



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**l_1 VE l_∞ NÖRMLÜ DÜZLEMLERDE ELİPTİK
İNVERSİYONLAR ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine AYGÜN

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

AKSARAY, 2025

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 212342446 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Emine AYGÜN tarafından hazırlanan “ l_1 VE l_∞ NORMLU DÜZLEMLERDE ELİPTİK İNVERSİYONLAR ÜZERİNE” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

Üniversite Adı: Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Üye: Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM

Üniversite Adı: Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Pelin TEKİN

Üniversite Adı: Trakya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Tez Savunma Tarihi: .../.../...

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Fazliye KARABÖRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

İmza

Emine AYGÜN

TEŞEKKÜR

Bu tezi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten çalışmalarında desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer ve kıymetli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN'a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Çalışmamı, beni bugünlere getiren her anlamda destekleyen sevgili annem Sultan AYGÜN'e, sevgili babam Cumali AYGÜN'e, her zaman yanımda olan kardeşim Hamza Ali ve abim Mehmet AYGÜN'e, hep yardımcı olan Muhammed UYSAL'a ithaf ediyorum.

Emine AYGÜN

AKSARAY, 2025

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1.GİRİŞ	1
1.1 Konveks Çokyüzlüler (Convex Polyhedra).....	1
1.2 Minkowski Geometri ve Konveks Çokyüzlüler ile İlişkileri	3
1.3 İnversiyon	3
2.TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER.....	5
2.1 Çeşitli Geometrik Özellikler	5
2.2 Çembere ve Elipse Göre İnversiyon.....	8
3.TAKSİ ELİPTİK İNVERSİYONLAR.....	11
3.1 Taksi Düzlemi ve Özellikleri	11
3.2 Taksi Elipsleri.....	12
3.3 Taksi Eliptik İnversiyonlar	13
4. $\mathbb{R}_T^2$ DE ELİPTİK İNVERSİYONLAR ALTINDA DOĞRULARIN İNVERSLERİNİN SINIFLANDIRMASI.....	19
5.MAKSİMUM ELİPTİK İNVERSİYONLAR	37
5.1 Maksimum Düzlemi ve Özellikleri	37
5.2 Maksimum Elipsleri	38
5.3 Maksimum Eliptik İnversiyonlar.....	39
6. $\mathbb{R}_M^2$ DE ELİPTİK İNVERSİYONLAR ALTINDA DOĞRULARIN İNVERSLERİNİN SINIFLANDIRMASI.....	51
7. $\mathbb{R}_M^2$ VE $\mathbb{R}_T^2$ DE ÇAPRAZ ORAN, HARMONİK EŞLENİK VE ELİPTİK İNVERSİYONLA İLİŞKİLERİ	68
8.SONUÇ VE ÖNERİLER.....	77
KAYNAKLAR	78
ÖZGEÇMİŞ.....	80

YÜKSEK LİSANS TEZİ

l_1 VE l_∞ NORMLU DÜZLEMLERDE ELİPTİK İNVERSİYONLAR ÜZERİNE

Emine AYGÜN

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

ÖZET

Bu tezde l_1 ve l_∞ -normla döşenmiş düzlemler olan taksi ve maksimum düzlemlerinde çembere göre inversiyonun bir genellemesi olan, elipse göre inversiyonun tanımlanması ve özelliklerinin incelenmesi üzerine çalışılmıştır.

Tez sekiz bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tezde üzerinde çalışılan problemin önemi, güncel çalışmalardaki konumu ve motivasyon kaynağının belirlenmesi adına literatür taraması yapılmıştır. İkinci bölümde tez boyunca kullanılmış, gerekli olan bazı önemli tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde taksi düzlemi ve bu düzlemde eliptik inversiyonun özelliklerine değinilmiştir. Dördüncü bölüm itibarıyla tezin orijinal sonuçları verilmektedir. Dördüncü bölümde taksi düzleminde eliptik inversiyonlar altında doğruların inversleri incelenmiştir. Beşinci bölümde maksimum düzleminde eliptik inversiyonlar tanımlanmış ve temel özellikleri belirlenmiştir. Altıncı bölümde maksimum düzleminde eliptik inversiyonlar altında doğruların inversleri incelenerek sınıflandırılmış, yedinci bölümde ise taksi ve maksimum düzlemlerinde eliptik inversiyonlar altında çapraz oran ve harmonik eşlenikler incelenmiştir. Son olarak sekizinci bölüm sonuç ve önerilere ayrılmış olup bu bölümde tezde elde edilenler değerlendirilerek tezin invers geometri literatürüne yaptığı katkılar ışığında daha başka yapılabilecek çalışmalara önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: l_1 -Norm, l_∞ -Norm, Taksi Düzlemi, Maksimum Düzlemi, İncersiyon, Taksi Eliptik İncersiyon, Maksimum Eliptik İncersiyon.

Mart, 2025; 80 sayfa

M.Sc. THESIS
ON THE ELIPTIC INVERSIONS IN l_1 AND l_∞ NORMED PLANES

Emine AYGÜN

Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

ABSTRACT

This thesis focuses on the inversion with respect to the ellipse, which is a generalization of the inversion with respect to the circle, in the taxicab and maximum planes, which are planes equipped with l_1 -norm and l_∞ -norm, respectively. The elliptic inversion is defined and its properties are studied in this thesis.

The thesis consists of eight chapters. In the first chapter, a literature review is conducted to determine the importance of the problem studied in this thesis, its place in current research, and the motivation behind the study. In the second chapter, some important definitions and theorems that are used throughout the thesis are given. In the third chapter, the properties of elliptic inversion in the taxicab plane are discussed and the geometric structures in the plane and their relationship to inversion are explored.. As of the fourth chapter, the original results of the thesis are given. In the fourth chapter, the inverses of the lines under elliptic inversions in the taxicab plane are examined. In the fifth chapter, elliptic inversions in the maximum plane are defined and their basic properties are determined. In the sixth chapter, the inverses of the lines under elliptic inversions in the maximum plane are examined and classified, and in the seventh chapter, the cross ratio and harmonic conjugates under elliptic inversions in the taxicab and maximum planes are examined. Finally, the eighth chapter is devoted to conclusions and suggestions, and in this section, the findings obtained in the thesis are evaluated and suggestions are made for further studies in the light of the thesis's contributions to the inversive geometry literature.

Keywords: l_1 -Norm, l_∞ -Norm, Taxi Plane, Maximum Plane, Inversion, Taxi Elliptical Inversion, Maximum Elliptical Inversion.

March, 2025; 80 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. 1. Platonik cisimler.	1
Şekil 1. 2. Arşimed cisimlerine örnekler.	2
Şekil 1. 3. Katalan cisimlerine örnekler.	2
Şekil 2. 1. Merkezil çemberde inversiyon.	9
Şekil 2. 2. Merkezil elipste inversiyon.	10
Şekil 3. 1. Taksi çemberi.	12
Şekil 3. 2. Taksi altıgen elipsi.	13
Şekil 3. 3. Taksi sekizgen elipsi.	13
Şekil 3. 4. Taksi elipsine göre bir noktanın inversi.	14
Şekil 3. 5. O dan geçmeyen bir l doğrusunu $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ altındaki inversi.	17
Şekil 3. 6. $\mathcal{E}_T$ inversiyon elipsi ile aynı tipten olmayan O merkezli $\mathcal{E}_1$ taksi elipsinin inversi.	18
Şekil 4. 1. Taksi sekizgen elipsine göre ayraç doğruları ve bölgeler.	20
Şekil 4. 2. Taksi altıgen elipsine göre ayraç doğruları ve bölgeler.	21
Şekil 4. 3. $m \rightarrow \infty$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.	24
Şekil 4. 4. $m = -1$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.	25
Şekil 4. 5. $m \rightarrow 0$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.	26
Şekil 4. 6. $m = -43$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.	27
Şekil 4. 7. $m = -25$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.	28
Şekil 4. 8. $m = 1$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.	30
Şekil 4. 9. $m = -1$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.	31
Şekil 4. 10. $m = 2$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.	32
Şekil 4. 11. $m \rightarrow \infty$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.	33
Şekil 4. 12. $m = 34$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.	34
Şekil 4. 13. $m = 25$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.	35
Şekil 4. 14. $m = 0$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.	36
Şekil 5. 1. Maksimum çemberi.	38
Şekil 5. 2. Maksimum elipsi çizme yöntemi.	39
Şekil 5. 3. Maksimum elipsine göre bir noktanın inversi.	40
Şekil 5. 4. $k < d_M(F_1, T) + d_M(F_2, T)$ için maksimum sekizgen elipsi.	44
Şekil 5. 5. $k = d_M(F_1, T) + d_M(F_2, T)$ için maksimum sekizgen elipsi.	45
Şekil 5. 6. $k > d_M(F_1, T) + d_M(F_2, T)$ için maksimum sekizgen elipsi.	46
Şekil 5. 7. Odakları birleştiren doğrunun eğimleri sırasıyla 0 ve ∞ olan maksimum sekizgen elipsleri.	47
Şekil 5. 8. Maksimum altıgen elipsi.	48
Şekil 5. 9. O dan geçmeyen bir l doğrusunu $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ altındaki inversi.	50
Şekil 5. 10. $\mathcal{E}_M$ inversiyon elipsi ile aynı tipten olmayan O merkezli $\mathcal{E}_1$ maksimum elipsinin inversi.	50
Şekil 6. 1. Maksimum sekizgen elipsine göre ayraç doğruları ve bölgeler.	52
Şekil 6. 2. Maksimum altıgen elipsine göre ayraç doğruları ve bölgeler.	53
Şekil 6. 3. $m = -1$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.	56
Şekil 6. 4. $m \rightarrow \infty$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.	57
Şekil 6. 5. $m = 0$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.	58
Şekil 6. 6. $m = 1$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.	59
Şekil 6. 7. $m = 13$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.	60
Şekil 6. 8. $m = 2$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.	61

Şekil 6. 9. $m = 1$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.	62
Şekil 6. 10. $m = -1$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.	63
Şekil 6. 11. $m = 34$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.	64
Şekil 6. 12. $m = 0$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.	65
Şekil 6. 13. $m = \infty$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.	66
Şekil 6. 14. $m = 43$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.	67



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4. 1. Taksi sekizgen elipsine göre bölgeler.....	19
Çizelge 4. 2. Taksi altıgen elipsine göre bölgeler.....	20
Çizelge 6. 1. Maksimum sekizgen elipsine göre bölgeler.	51
Çizelge 6. 2. Maksimum altıgen elipsine göre bölgeler.	52



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

d_E	Öklidyen uzaklık
d_M	Maksimum uzaklık
d_T	Taksicab uzaklık
l_1	Taksicab metrik
l_∞	Maksimum metrik
$\mathbb{R}^2$	Öklidyen düzlem
$\mathbb{R}_T^2$	Taksicab düzlemi
$\mathbb{R}_M^2$	Maksimum Düzlemi
$I_{O,r}$	Çembere göre inversiyon
$I_\varepsilon(O, k)$	Eliptik inversiyon
$I_{\varepsilon_T}(O, k)$	Taksicab eliptik inversiyon
$I_{\varepsilon_M}(O, k)$	Maksimum eliptik inversiyon

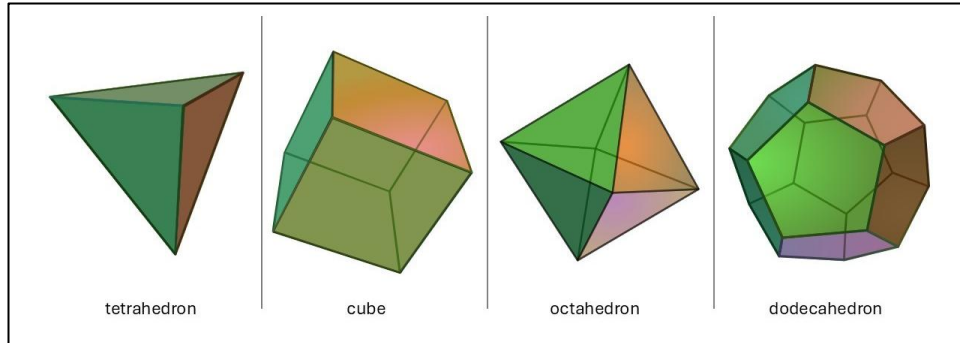


1. GİRİŞ

1.1 Konveks Çokyüzlüler (Convex Polyhedra)

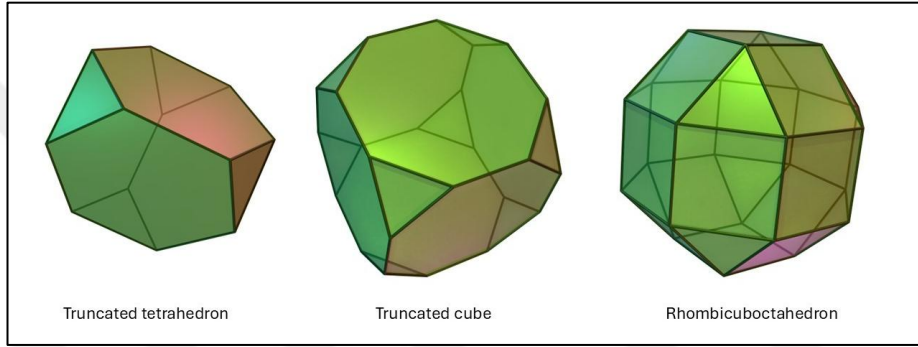
Konveks çokyüzlü, her bir yüzü düzlemsel çokgen olan ve iki nokta arasındaki doğru parçasının tamamının çokyüzlünün yüzeyinde veya içinde kaldığı cisimdir. Bu tür çokyüzlülerde, dışbükeylik (konvekslik) özelliği mevcuttur, yani doğru parçası cismin dışına çıkmaz. Tüm ayrıt ve yüzleri eş olan ve her köşeden aynı sayıda yüz geçen çokyüzlüler ise düzgün çokyüzlü olarak adlandırılır (Ermiş, 2014). Konveks çok yüzlüler çeşitli şekillerde sınıflandırılabilir, ancak üç önemli grup öne çıkar: Platonik cisimler, Arşimed cisimleri ve Katalan cisimleri olarak üç grupta incelenebilir.

Platonik cisimler (Platonic Solids), tüm yüzleri aynı tür düzgün çokgen olan, mükemmel simetriye sahip beş adet konveks çok yüzlüdür (Yüksel, 2012). Platonik cisimlerin her biri, eski Yunan filozofu Platon tarafından dört temel elementle ilişkilendirilmiştir. M.Ö. 360 yıllarında Yunan filozof Platonun (Eflatun) Timaus adlı eserinde platonik cisimler şu şekildedir; Dört yüzlü (tetrahedron): Her yüzü eşkenar üçgen olan dört yüzlüdür. Platon, tetrahedronu ateş elementiyle ilişkilendirmiştir. Küp (cube): Altı yüzü kare olan bir cisimdir. Platon, küpü toprak elementiyle ilişkilendirmiştir. Sekiz yüzlü (octahedron): Sekiz eşkenar üçgen yüzü vardır. Platon octahedronu hava elementiyle ilişkilendirmiştir. On iki yüzlü (dodecahedron): On iki yüzü düzgün beşgenlerden oluşur. Platon dodecahedron evrenin şekliyle ilişkilendirmiştir. Yirmi yüzlü (icosahedron): Yirmi yüzü eşkenar üçgenlerden oluşur. Platon icosahedron su elementiyle ilişkilendirir. Platonik cisimlere ait görsel Şekil 1.1'de gösterilmiştir.



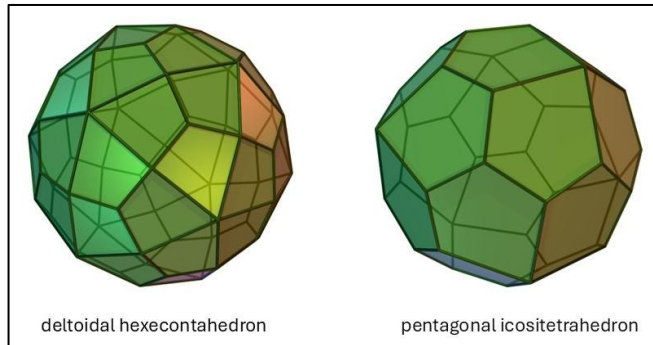
Şekil 1. 1. Platonik cisimler.

Arşimed cisimleri (Archimedean Solids): Farklı türde düzgün çokgenlerden oluşan, ancak köşeleri simetrik olan 13 konveks çok yüzlüdür. Arşimed cisimleri, bir Platonik cismin köşelerinin kesilip yeni bir yüz oluşturulmasıyla da elde edilir. Bu nedenle, bazı Arşimed cisimleri Platonik cisimlerin kesilmiş versiyonlarıdır. Örneğin, bir küpün köşeleri kesildiğinde ortaya çıkan cisim "kesik küp" (Truncated cube) olarak adlandırılır. Bazı Arşimed cisimleri şunlardır: Kesik Dört Yüzlü (Truncated tetrahedron): Bir tetrahedronun köşelerinin kesilmesiyle oluşur. Kesik Küp (Truncated cube): Bir küpün köşelerinin kesilmesiyle elde edilir. Rhombicuboctahedron: Küp ve oktahedron karışımı gibi görünebilecek bir yapıya sahiptir. Arşimed cisimlerine ait görsel Şekil 1.2'de gösterilmiştir.



Şekil 1. 2. Arşimed cisimlerine örnekler.

Katalan cisimleri (Catalan Solids): Arşimed cisimlerinin dual yapılarıdır; yüzeyleri düzenli çokgen değildir, ancak kenarları eşit uzunluktadır. Bu cisimler genellikle kristal yapıları ve minerallerin doğal şekillerini anlamak için kullanılır. Örneğin: Deltoidalhexecontahedron: Bu çok yüzlü, toplamda 60 yüzeye sahiptir ve her yüzü birer eşkenar dörtgendir. Pentagonal icositetrahedron ise beşgen biçimli yüzlerden oluşan bir katalan cisimdir. Katalan cisimlerine ait görsel Şekil 1.3'de gösterilmiştir.



Şekil 1. 3. Katalan cisimlerine örnekler.

1.2 Minkowski Geometri ve Konveks Çokyüzlüler ile İlişkileri

Minkowski geometrisi, Öklidyen olmayan geometrilerden biri olup, Öklidyen geometrinin temel yapılarından bazılarını korurken, uzaklık fonksiyonunda önemli bir farklılık sunar. Minkowski geometrisinde doğrular, düzlemler ve noktalar tıpkı Öklidyen geometrinin yapılarında olduğu gibidir (Thompson, 1996). Hatta açı ölçümü de benzer bir şekilde gerçekleştirilir. Ancak, uzaklık kavramı bu iki geometriyi birbirinden ayıran temel faktördür.

Öklidyen geometride uzaklık her yönde aynı iken, Minkowski geometrisinde uzaklık her yönde aynı değildir. Bu durum, geometri içindeki yapıları derin bir şekilde etkiler ve değiştirir. Özellikle, birim küre gibi temel yapılar Minkowski geometrisinde farklı şekiller alır; bu küreler simetrik ve konveks cisimler olabilir. Bu nedenle, birim küre kavramı Minkowski geometri türüne bağlı olarak değişebilir.

Minkowski geometrisi, farklı uzaklık fonksiyonları kullanılarak birçok varyasyona sahiptir. Bu varyasyonlar, belirli konveks cisimleri birim küre olarak kabul eden geometri türleri oluşturur. Literatürde, bu tür Minkowski geometrileri üzerine yapılan çalışmalar (Gelişgen ve Çolak, 2015; Gelişgen ve Can, 2016), geometri ve analiz alanlarında önemli bir yer tutmaktadır.

1.3 İncersiyon

İncersiyon geometrik şekillerin çemberin veya kürenin merkezine göre yansımasıdır. İlk olarak klasik dönem Japon yasında Japon tapınaklarının duvarlarında görülen iç içe çoklu çember sorularının çözüm yolları araştırılırken kullanılmıştır. İncersiyon aslında Öklid teoreminin bir sonucu olup ama daha çok Öklid dışı uygulamalara ışık tutar. İncersiyon tam olarak Öklid geometrisi içerisinde yer almaz çünkü Öklid geometrisi dönüşümlerinde doğru doğruya dönüşürken incersiyon de doğru eğriye çember ise doğruya dönüşmektedir. Bu konuda ilklerden olan J.L. Coolidge “A treatise on the Circle and the Sphere” (Coolidge, 1916) adlı çalışmasında incersiyon üzerine çalışmıştır. E.J. Dijkstra da “Archimedes” (Dijkstra, 1956) adlı çalışmasında incersiyon üzerine çalışmalarını yayınlamıştır. Zvezdelina Stankova-Frenkel ise “İncersiyon in plane” (Stankova-Frenkel, 1998) adlı çalışmasında incersiyon uygulamalarıyla ilgili çalışmalar yapmıştır. Son yıllarda F.J. Garcia Capitan

“Aplication De la Inversion A la Resolicion Problema” (Garcia Capitan, 2005) adlı çalışmasında inversiyonun bazı uygulamalarından söz etmiştir. Ülkemizde ise Cem Tezer, inversiyon üzerine bazı çalışmalar yapmıştır. Cem Tezer’in 1992-I ve 1992-II Matematik Dünyası dergisindeki inversiyon I-II yazısında Öklid geometrisinden kaynağını alıp Öklid dışı geometri olarak gelişen, inversiyon (evirtim, inversiyon) kısaca şekillerin çembere göre 3 yansıması olarak tanımlamıştır. Daha sonra Mustafa Yağcı 2006 da Matematik Dünyası Dergisinde “Evirtim” adlı yazısında inversiyonun uygulamalarını göstermiştir. İnversiyon karmaşık birçok şekli daha basit hale getirmede oldukça kullanışlıdır. Kullanım alanı oldukça geniş olan inversiyonin geçmişte uygulanan alanlar dışında geometride birçok uygulama alanı vardır (Bozan, 2019). İnversiyon birçok zor soruları beraberinde getirdiği ve uğraştırıcı problemler ortaya koyduğu için hâlâ düzlemdeki en ilgi çekici dönüşümlerden birisidir. Dolayısıyla son dönemde de inversiyon ile ilgili, literatürde pek çok çalışma vardır. Bir inversiyon söz konusu olduğunda akla ilk olarak bir çembere göre bir inversiyon gelmektedir, ancak bazı matematikçiler bazı diğer objelere göre de inversiyon dönüşümlerini tanımlayıp incelemişlerdir. Bu çalışmalara örnek olarak (Childress, 1964; Ramirez ve Rubaino, 2014) kaynakları gösterilebilir. Ayrıca diğer bazı matematikçiler de inversiyon dönüşümlerini farklı uzaklık fonksiyonları kullanarak araştırmışlardır, bu çalışmalar için (Rubaino ve Ramirez, 2014; Gelişgen ve Ermiş, 2019; Pekzorlu, 2019; Yüca ve Can, 2020) incelenebilir. Dahası inversiyon üç boyutlu Öklidyen ve Öklidyen olmayan uzaylarda da çalışılmıştır, bu çalışmalardan bazıları (Ramirez ve Rubaino, 2014; Pekzorlu ve Bayar, 2020; Can, 2022; Cırık ve Ekmekçi, 2022)’dir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak temel kavram ve teoremler verilmektedir.

2.1 Çeşitli Geometrik Özellikler

Bu bölümde verilen tanımlar ve teoremler (Martin, 1991; Salihova, 2006; Arslaner, 2011; Yüce, 2017) kaynaklarından derlenmiş olup ayrıntılı bilgi için bu kaynaklara başvurulabilir.

Tanım 2.1.1: X boş olmayan bir küme olmak üzere $X \times X$ üzerinde tanımlı $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, reel değerli fonksiyonu $\forall A, B, C \in X$ için

$$M1) d(A, B) \geq 0, d(A, B) = 0 \leftrightarrow A = B$$

$$M2) d(A, B) = d(B, A)$$

$$M3) d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

Özelliklerini sağlıyorsa d ye X kümesi üzerinde bir metriktir denir.

Tanım 2.1.2: $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$d_E(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlı $d_E: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna Öklid uzaklık fonksiyonu denir.

Teorem 2.1.1: $\mathbb{R}^2$ de d_E uzaklık fonksiyonu bir metriktir. d_E metriği ile döşenmiş analitik düzlem $\mathbb{R}_E^2$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3: Düzlemde verilen bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine çember denir. Yani düzlemde verilen bir M noktasından r birim ($r \in \mathbb{R}, r > 0$) uzaklıkta bulunan değişken noktalar kümesi ya da $\{X: |MX| = r\}$ kümesi bir çember belirtir. Burada M ye çemberin merkezi, r ye de çemberin yarıçapı adı verilir.

Tanım 2.1.4: Düzlemde verilen iki noktaya uzaklıklarının toplamı sabit olan noktaların kümesine elips denir. Başka bir ifadeyle, F_1 ve F_2 düzlemde verilen herhangi iki nokta olmak üzere

$$\{X: |XF_1| + |XF_2| = k, k \geq d(F_1, F_2)\} \quad (2.2)$$

kümesinin geometrik yerine bir elips denir. Burada F_1 ve F_2 ye elipsin odakları denilmektedir.

Tanım 2.1.5: Bir Oxy -dik koordinat sistemiyle verilen analitik düzlemde A, B ve C üçü birden sıfır olmayan üç reel sayı olmak üzere

$$G(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.3)$$

denklemleriyle verilen $G(x, y)$ fonksiyonunun grafiği bir koniktir.

Genel denklemi ile verilen bir koniğin odak, doğrultman ve dış merkezliğinin bulunması için (Yüce, 2017) kaynağından faydalanılarak şu yöntem kullanılmaktadır;

Bir M koniği, $\Phi(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ denklemi ile verilsin. M koniğinin odağı $F = (x_0, y_0)$ bu F odağına karşılık gelen doğrultman $d \dots ax + by + c = 0$ ve koniğin dış merkezliği de e olsun. Koniğe ait bir nokta da $P = (x, y)$ olsun.

P noktasının $F = (x_0, y_0)$ noktasına ve d doğrusuna olan uzaklıkları, sırasıyla,

$$\|\vec{FP}\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \text{ ve } l = \|\vec{PQ}\| = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ dir. O halde, } \frac{\|\vec{FP}\|}{l} = e$$

olacağından, $\frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = e$ olur. Bu bize koniğin odaksal denklemini verir.

Buradan $\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{(ax + by + c)^2} = \frac{e^2}{a^2 + b^2}$ veya $-\frac{e^2}{a^2 + b^2}(ax + by + c)^2 + [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F =$

$$-w \left\{ -\frac{e^2}{a^2 + b^2}(ax + by + c)^2 + [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = 0 \right\}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F + w[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] =$$

$$w \frac{e^2}{a^2 + b^2} (ax + by + c)^2 \quad (2.4)$$

Veya

$$\Phi(x, y) + w[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$$

$$= w \left(\frac{ea}{\sqrt{a^2 + b^2}} x + \frac{eb}{\sqrt{a^2 + b^2}} y + \frac{ec}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 \quad (2.5)$$

Bulunur. Bu ifadenin sağ tarafı tam kare olduğundan $\Phi(x, y) + w[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$ ifadesi de tam kare olmalıdır. Bu şart, bize koniğin odak ve doğrultmanını verir.

O halde genel konik denklemi verildiğinde son ifadenin tam kare olma şartından x_0 ve y_0 değerleri, yani odak bulunur. Bu son ifade tam kare olduğunda, bu ifadenin içi sıfıra eşitlenerek doğrultman bulunur. Ayrıca,

$$\lambda_1 = \frac{(ea)}{\sqrt{(a^2+b^2)}}, \lambda_2 = \frac{(eb)}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \text{ denilirse } \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{(e^2(a^2+b^2))}{(a^2+b^2)} = e^2 \text{ bulunur.}$$

Örnek 2.1.1: $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$ koniğinin odak, doğrultman ve dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm:

$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 + w[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$ ifadesi tam kare olmalıdır. Şimdi bu ifadeyi x 'e göre düzenlersek,

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 + w[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$$

$$= (1 + w)x^2 - 2(wx_0 + y - 1)x + y^2 - 4y + 3 + wx_0^2 + wy^2 - 2wy_0y + wy_0^2 \quad (2.6)$$

bulunur. Bu ifadenin tam kare olması için $\delta = 0$ olmalıdır. O halde $(wx_0 + y - 1)^2 - (1 + w)(y^2 - 4y + 3 + wx_0^2 + wy^2 - 2wy_0y + wy_0^2) = 0$ elde edilir. Bu denklemi y ye göre düzenlersek

$$(-w^2 - 2w)y^2 + (2w^2y_0 + 2 + 2wx_0 + 2wy_0 + 4w)y - wx_0^2 - 2wx_0 - wy_0^2 - 3w - 2 - w^2y_0^2 = 0 \quad (2.7)$$

bulunur. Buradan $w^2 + 2w = 0$ olup $w = 0$, $w = -2$ elde edilir. $w = -2$ değerinin, sırasıyla $2w^2y_0 + 2 + 2wx_0 + 2wy_0 + 4w = 0$ ve $-wx_0^2 - 2wx_0 - wy_0^2 - 3w - 2 - w^2y_0^2 = 0$ denklemlerinde yerine yazılırsa

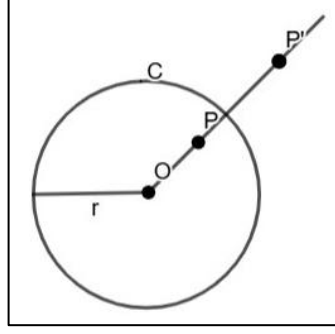
$$\begin{cases} -2x_0 + 2y_0 - 3 = 0 \\ 2x_0^2 - 2y_0^2 + 4x_0 + 4 = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

denklemler sistemi elde edilir. Buradan $2x_0^2 - 2\left(\frac{3+2x_0}{2}\right)^2 + 4x_0 + 4 = 0$ eşitliği bulunur. Böylece $x_0 = -\frac{1}{4}$, $y_0 = \frac{5}{4}$ ve $F = \left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ elde edilir. Ayrıca $(1+w)x^2 - 2(wx_0 + y - 1)x + y^2 - 4y + 3 + wx_0^2 + wy_0^2 - 2wy_0y + wy_0^2$ ifadesinde $F = \left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ ve $w = -2$ yerine yazılırsa, $-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{1}{2}\right)\right)^2$ bulunur. Bu ifadenin içini sıfıra eşitleyerek, $F = \left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ odağına karşılık gelen doğrultman $2x + 2y - 1 = 0$ olur. O halde $e = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ için $e = 1$ bulunur. Böylece konik parabol olduğundan $w = 0$ için reel odak ve doğrultman bulunmaz.

2.2 Çembere ve Elipse Göre İncersiyon

Bu bölümde öklidyen düzlemde incersiyonun çembere ve elipse göre tanımları ve bazı özellikleri (Yağcı, 2006; Ramirez, 2014; Sezgin, 2014) kaynaklarından özetlenmektedir.

Tanım 2.2.1: $C = C(O, r)$ çemberine göre İncersiyon, $I_{O,r}$ ile gösterilsin. Her $P \neq O$ için, $d_E(O, P) \cdot d_E(O, P') = r^2$ koşulunu sağlayan $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindeki P' noktasına P nin evriği denir ve $I_{O,r}(P) = P'$ şeklinde gösterilir. O noktasına incersiyon merkezi, C çemberine incersiyon çemberi, r yarıçapına incersiyon yarıçapı, r^2 sayısına da incersiyon kuvveti denir. Şekil 2.1'de merkezli çemberde incersiyona ait görsel verilmiştir.



Şekil 2. 1. Merkezil çemberde inversivon.

Bir P noktasının inversi P' olduğunda, P' noktasının inversinin de P olması gerektiği $d_E(O, P) \cdot d_E(O, P') = r^2$ koşulundan kolayca görülebilir.

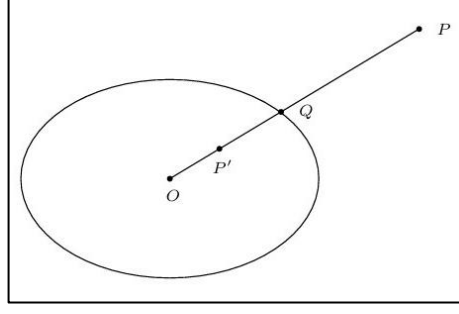
P noktası eğer C nin iç bölgesinde ise $d(O, P) < r$ dir.

$$d(O, P) \cdot d(O, P') = r^2 \quad (2.9)$$

olması için $d(O, P') > r$ olmalıdır. Bu sebeple inversiyon çemberinin içinde bulunan noktaların inversleri çemberin dışında olur. Benzer, şekilde inversiyon çemberinin dışında kalan noktaların inverslerinin çemberin içinde yer aldığı söylenebilir.

Eğer P noktası C nin üzerinde ise $d(O, P) = r$ dir. $d(O, P) \cdot d(O, P') = r^2$ koşulunu sağlaması için $d(O, P') = r^2$ olması gerekir. Böylelikle $P = P'$ olur. Yani inversion çemberi üzerinde bulunan bir noktanın inversi yine kendisi olmaktadır. Bu önermenin tersi de sağlanır. $P = P'$ olsun. Buradan $(d(O, P))^2 = r^2$ ve dolayısıyla $d(O, P) = r$ elde edilir. Bu da P noktasının inversiyon çemberi üzerinde bulunduğunun bir göstergesidir. İnversiyon O noktasında tanımlı değildir. Dolayısıyla tanım kümesi düzlemin tamamını içermez. Ayrıca inversiyon örten de değildir. Çünkü $I_{(O,r)}(P) = O$ olacak şekilde bir P noktası yoktur. Bu tür eksiklikleri gidermek için düzleme ∞ (noktası sonsuzdaki bir nokta) ilave edilerek düzlem genişletilmektedir. $I_{(O,r)}(O) = \infty$ ve $I_{(O,r)}(\infty) = O$, şeklinde tanımlandığında O ve ∞ noktaları birbirine karşılık gelmektedir. Dolayısıyla inversiyon genişletilmiş düzlemin bir dönüşümü olur.

Tanım 2.2.2: $\mathcal{E}$, $\mathbb{R}^2$ de O merkezli bir elips olsun, $\mathcal{E}$ ye göre inversiyon $\psi(P) = P'$ biçiminde tanımlı $\psi: \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \mapsto \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ dönüşümüdür, burada Q , OP ışını ile elipsin kesişim noktası olmak üzere P' , $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerindeki bir nokta ve $OP \cdot OP' = (OQ)^2$ dır. Şekil 2.2'de merkezli elipste inversivona ait görsel verilmiştir.



Şekil 2. 2. Merkezil elipste inversiyon.

P' noktasına $\mathcal{E}$ elipsine göre P nin inversi denir. $\mathcal{E}$ ye inversiyon elipsi, O ya inversiyon merkezi ve $w = OQ$ sayısına inversiyon yarıçapı denir (Bkz: Şekil 2.2). Klasik durumun tersine inversiyon yarıçapı sabit değildir. Açıkça ψ bir involüsyondur, yani her $P \neq O$ için $\psi(\psi(P)) = P$ dir. Sabit kalan noktalar $\mathcal{E}$ elipsinin üzerindeki noktalardır. Dahası P nin $\mathcal{E}$ nin dış bölgesinde olması için gerek ve yeter koşul P' nün $\mathcal{E}$ nin iç bölgesinde olmasıdır. O nun inversi görüntüsü olacak şekilde bir sonsuzdaki nokta O_∞ u ortaya koyarak ψ yi genişletilmiş $\mathbb{R}_\infty^2$ inversler düzlemi üzerinde bir involüsyon olarak alabiliriz.

Önerme 2.2.1: P nin $\mathcal{E}$ elipsine göre inversi OP doğrusu ile $\mathcal{E}$ ye göre P nin kutbunun kesişimidir. Daha açık olarak $\mathcal{E}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi ile (u, v) noktasının elipse göre inversi

$$\left(\frac{a^2 b^2 u}{b^2 u^2 + a^2 v^2}, \frac{a^2 b^2 v}{b^2 u^2 + a^2 v^2} \right) \quad (2.10)$$

noktasıdır.

Teorem 2.2.1: P ve T , $\mathcal{E}$ elipsine göre w ve u inversiyon yarıçaplarına sahip farklı noktalar olsunlar. P' ve T' , $\mathcal{E}$ ye göre P ve T nin inversleri iseler

$$\begin{cases} \frac{w^2 \cdot TP}{OP \cdot OT}, & O, P, T \text{ doğruduş ise} \\ \frac{\sqrt{(w^2 - u^2)(w^2 \cdot OT^2 - u^2 \cdot OP^2) + w^2 u^2 \cdot PT^2}}{OP \cdot OT}, & \text{diğer hallerde} \end{cases} \quad (2.11)$$

şeklindedir.

3. TAKSİ ELİPTİK İNVERSİYONLAR

Bu bölümde öncelikle taksi düzleminin genel tanımı ve bazı özellikleri verilecektir. Sonrasında taksi düzlemde odakların konumlarına göre elipslerin nasıl değişiklik gösterdiği incelenmektedir. Son olarak taksi düzleminde bir elipse göre inversiyon tanımlanmakta ve bu dönüşümün bazı özellikleri (Can, 2024) kaynağından faydalanılarak verilmektedir.

3.1 Taksi Düzlemi ve Özellikleri

Tanım 3.1.1: $P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$d_T(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlı $d_T: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonu taksi uzaklık fonksiyonu olarak isimlendirilir.

Teorem 3.1.1: d_T uzaklık fonksiyonu bir metriktir ve d_T metriği ile döşenmiş analitik düzlem $\mathbb{R}_T^2$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.1: Her öklidyen öteleme taksi düzlemde uzaklığı korur. Böylece ötelemelerin her biri $\mathbb{R}_T^2$ de bir izometridir.

Önerme 3.1.2: d_E öklidyen uzaklık fonksiyonunu göstermek üzere l , analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru olsun. l nin eğimi m ise

$$d_T(P_1, P_2) = \frac{1 + |m|}{\sqrt{1 + m^2}} d_E(P_1, P_2) \quad (3.2)$$

dir.

Sonuç 3.1.1: P_1, P_2 ve $X, \mathbb{R}^2$ de doğrudan noktalar olsunlar. Bu durumda $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ olması için gerek ve yeter koşul $d_T(P_1, X) = d_T(P_2, X)$ olmasıdır.

Sonuç 3.1.2: P_1, P_2 ve $X, \mathbb{R}^2$ de doğrudan ve farklı noktalar olsunlar. Bu durumda

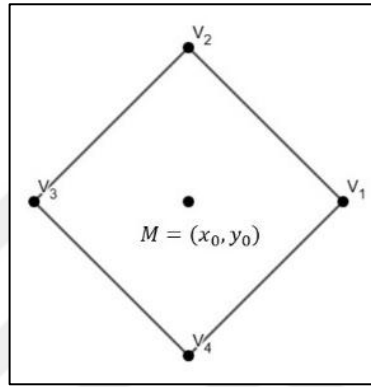
$$\frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)} = \frac{d_T(P_1, X)}{d_T(P_2, X)} \quad (3.3)$$

dır.

$\mathbb{R}_T^2$ de $M = (x_0, y_0)$ merkezli, r yarıçaplı çember

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 | d_T(X, M) = |x - x_0| + |y - y_0| = r\} \quad (3.4)$$

Kümesinin noktalarının geometrik yeridir ve bu çember köşe noktaları $V_1 = (x_0 + r, y_0)$, $V_2 = (x_0, y_0 + r)$, $V_3 = (x_0 - r, y_0)$, $V_4 = (x_0, y_0 - r)$ ve kenarlarının eğimi ± 1 olan bir karedir (Bkz: Şekil 3.1).



Şekil 3. 1. Taksi çemberi.

3.2 Taksi Elipsleri

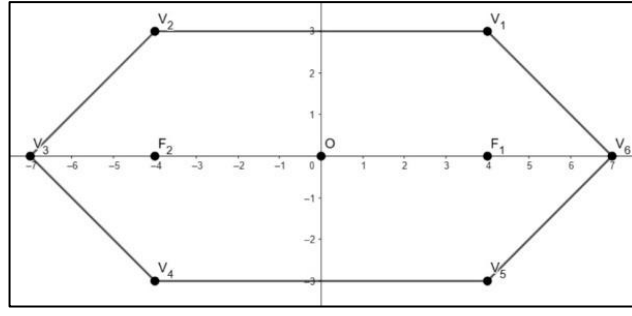
Tanım 3.2.1: F_1 ve F_2 , $\mathbb{R}_T^2$ de verilen noktalar olsunlar. Bu durumda odakları F_1 ve F_2 , sabiti k olan $\mathcal{E}_T$ taksi elipsi F_1 ve F_2 ye uzaklıkları toplamı k olan noktaların geometrik yeri yani

$$\mathcal{E}_T = \{P = (x, y): d_T(P, F_1) + d_T(P, F_2) = k, P \in \mathbb{R}_T^2, k \geq d_T(F_1, F_2)\} \quad (3.5)$$

kümesinin elemanlardır.

Elipsin odaklarından geçen doğrunun eğimine göre iki tür taksi elipsi vardır. F_1 ve F_2 odaklarından geçen doğrunun eğimi 0 veya ∞ ise elips bir altıgen, aksi takdirde elips bir sekizgendir. Bu durumda odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_1)$ olan taksi elipsi Şekil 3.2’de verilen elipstir ve bu elipsin köşelerinin koordinatları sırasıyla

$$V_1 = \left(x_1, \frac{k-x_1+x_2}{2}\right), V_2 = \left(x_2, \frac{k-x_1+x_2}{2}\right), V_3 = \left(\frac{-k+x_1+x_2}{2}, 0\right), V_4 = \left(x_2, \frac{-k+x_1-x_2}{2}\right), V_5 = \left(x_1, \frac{-k+x_1-x_2}{2}\right), V_6 = \left(\frac{k+x_1+x_2}{2}, 0\right) \text{ dır.}$$



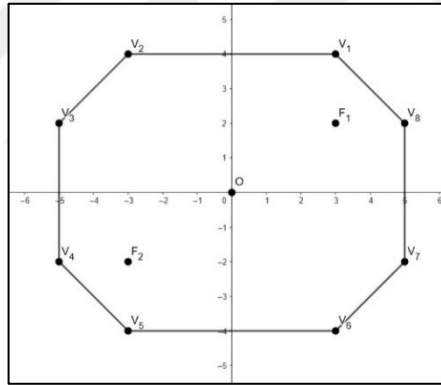
Şekil 3. 2. Taksi altıgen elipsi.

Benzer şekilde $x_1 \neq x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ iken odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ olan taksi elipsi Şekil 3.3’de verilen elipstir ve bu elipsin köşelerinin koordinatları sırasıyla;

$$V_1 = \left(x_1, \frac{-x_1+x_2+y_1+y_2+k}{2}\right), \quad V_2 = \left(x_2, \frac{-x_1+x_2+y_1+y_2+k}{2}\right), \quad V_3 = \left(\frac{x_1+x_2+y_1-y_2-k}{2}, y_1\right),$$

$$V_4 = \left(\frac{x_1+x_2+y_1-y_2-k}{2}, y_2\right), \quad V_5 = \left(x_2, \frac{x_1-x_2+y_1+y_2-k}{2}\right), \quad V_6 = \left(x_1, \frac{x_1-x_2+y_1+y_2-k}{2}\right),$$

$$V_7 = \left(\frac{x_1+x_2-y_1-y_2+k}{2}, y_2\right), \quad V_8 = \left(\frac{x_1+x_2-y_1-y_2+k}{2}, y_1\right) \text{ dir.}$$



Şekil 3. 3. Taksi sekizgen elipsi.

3.3 Taksi Eliptik İncersiyonlar

Bu bölümde çembere göre incersiyonların bir genellemesi olan eliptik incersiyonlar $\mathbb{R}_T^2$ de tanımlanmakta ve bu dönüşümlerin bazı özellikleri verilmektedir.

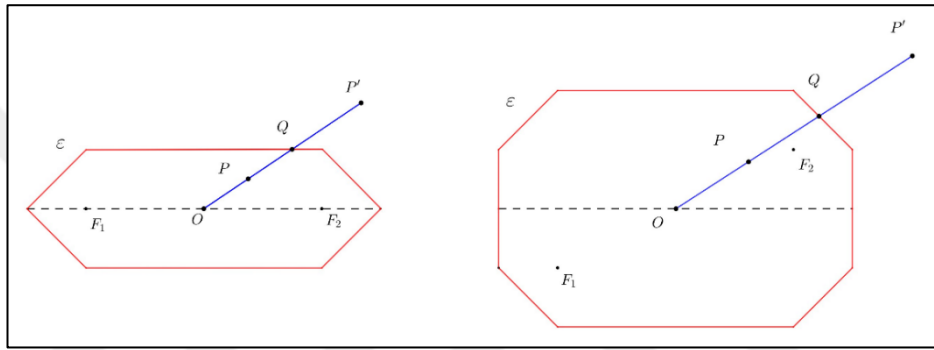
Tanım 3.3.1: $\mathcal{E}_T$, $\mathbb{R}_T^2$ de $O = (a, b)$ merkezli F_1, F_2 odaklı ve k sabitli bir elips, P_∞ da l_∞ -düzlemine eklenmiş ideal nokta olsun. $\mathbb{R}_T^2$ de $\mathcal{E}_T$ elipsine göre taksi eliptik incersiyon $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)(O) = P_\infty$, $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)(P_\infty) = O$ ve $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)(P) = P'$ biçiminde tanımlanan

$$I_{\mathcal{E}_T}(O, k): \mathbb{R}_T^2 \cup \{P_\infty\} \rightarrow \mathbb{R}_T^2 \cup \{P_\infty\} \quad (3.6)$$

dönüşümüdür. Burada P' , $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerinde O dan farklı bir nokta olup, $\mathcal{E}_T$ elipsi ile $\overrightarrow{OP}$ ışınının kesişimi Q noktası olmak üzere

$$d_T(O, P) \cdot d_T(O, P') = [d_T(O, Q)]^2 \quad (3.7)$$

dır. $\mathcal{E}_T$ ye inversiyon elipsi, O ya inversiyon merkezi, P' noktasına $\mathcal{E}_T$ elipsine göre, P noktasının inversi ve $\varepsilon := d_T(O, Q)$ pozitif reel sayısına da inversiyonun yarıçapı denir (Bkz: Şekil 3.4).



Şekil 3. 4. Taksi elipsine göre bir noktanın inversi.

Dikkat edilmesi gereken bir nokta taksi düzlemdeki (ve Öklid düzlemindeki) çembersel inversiyonların aksine, taksi eliptik inversiyonlarının yarıçaplarının sabit olmamasıdır.

Yardımcı Teorem 3.3.1: $P \in \mathbb{R}_T^2 \cup \{P_\infty\}$ olmak üzere $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)(P) = P'$ olsun. P , $\mathcal{E}_T$ nin iç bölgesindeyse P' , $\mathcal{E}_T$ nin dış bölgesindedir ve tersine P' , $\mathcal{E}_T$ nin iç bölgesindeyse P , $\mathcal{E}_T$ nin dış bölgesindedir. Ayrıca $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ altında invariant kalan noktalar yalnızca $\mathcal{E}_T$ elipsi üzerindeki noktalardır.

İspat: P noktasının $\mathcal{E}_T$ nin iç kısmında olduğunu varsayalım. Bu durumda $d_T(O, P) < d_T(O, Q)$ dur. $P' = I_{\mathcal{E}_T}(O, k)(P)$ ve $d_T(O, P) \cdot d_T(O, P') = [d_T(O, Q)]^2$ olduğundan $[d_T(O, Q)]^2 = d_T(O, P) \cdot d_T(O, P') < d_T(O, Q) \cdot d_T(O, P')$ olup $d_T(O, P') > d_T(O, Q)$ elde edilir. Dolayısıyla P' , $\mathcal{E}_T$ nin dış bölgesindedir. P nin $\mathcal{E}_T$ nin dış bölgesinde olduğunda P' nün $\mathcal{E}_T$ nin iç bölgesinde olması durumunun ispatı benzer şekilde yapılır.

Önerme 3.3.1: $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$, merkezi $O = (0,0)$ ve sabiti k olan $\mathcal{E}_T$ elipsine göre taksi eliptik inversiyon olsun. $P = (x, y)$ ve $P' = (x', y')$ $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ ya göre inversi noktalar ise;

$$(x', y') = \begin{cases} \left(\frac{k^2 x}{4(x+y)^2}, \frac{k^2 y}{4(x+y)^2} \right), & \left| \frac{2y_1}{k-2y_1} \right| < m < \left| \frac{k-2x_1}{2x_1} \right| \text{ ise} \\ \left(\frac{(k-2x_1)^2 x}{4y^2}, \frac{(k-2x_1)^2}{4y} \right), & \left| \frac{k-2x_1}{2x_1} \right| < |m| \text{ ise} \\ \left(\frac{k^2 x}{4(x-y)^2}, \frac{k^2 y}{4(x-y)^2} \right), & -\left| \frac{k-2x_1}{2x_1} \right| < m < -\left| \frac{2y_1}{k-2y_1} \right| \text{ ise} \\ \left(\frac{(k-2y_1)^2}{4x}, \frac{(k-2y_1)^2 y}{4x^2} \right), & m < \left| \frac{2y_1}{k-2y_1} \right| \text{ ise} \end{cases} \quad (3.8)$$

dır. Burada $x_i \neq 0, y_i \neq 0, x_1 > y_1$ ve $m, \overrightarrow{OP}$ ışınının eğimidir. Eğer $x_i \neq 0, y_i = 0$ ve $x_1 > y_1$ ise

$$(x', y') = \begin{cases} \left(\frac{k^2 x}{4(x+y)^2}, \frac{k^2 y}{4(x+y)^2} \right), & 0 < m < \left| \frac{k-2x_1}{2x_1} \right| \text{ ise} \\ \left(\frac{(k-2x_1)^2 x}{4y^2}, \frac{(k-2x_1)^2}{4y} \right), & \left| \frac{k-2x_1}{2x_1} \right| < |m| \text{ ise} \\ \left(\frac{k^2 x}{4(x-y)^2}, \frac{k^2 y}{4(x-y)^2} \right), & -\left| \frac{k-2x_1}{2x_1} \right| < m < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.9)$$

dır. Eğer $x_i = 0, y_i \neq 0$ ve $x_1 > y_1$ ise

$$(x', y') = \begin{cases} \left(\frac{k^2 x}{4(x+y)^2}, \frac{k^2 y}{4(x+y)^2} \right), & \left| \frac{2y_1}{k-2y_1} \right| < m \text{ ise} \\ \left(\frac{k^2 x}{4(x-y)^2}, \frac{k^2 y}{4(x-y)^2} \right), & m < -\left| \frac{2y_1}{k-2y_1} \right| \text{ ise} \\ \left(\frac{(k-2y_1)^2}{4x}, \frac{(k-2y_1)^2 y}{4x^2} \right), & |m| < \left| \frac{2y_1}{k-2y_1} \right| \text{ ise} \end{cases} \quad (3.10)$$

dır.

İspat: Odakları $F_1 = (x_1, y_1), F_2 = (x_2, y_2)$ ve sabiti k olan merkezsiz taksi elipsi $\mathcal{E}_T$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T &= \{Q \in \mathbb{R}_T^2 : |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = k, Q \\ &= (x, y), k \geq d_T(F_1, F_2) \}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

denklemini sağlayan noktalar kümesidir. $P = (x, y)$ ve $P' = (x', y')$ $\mathcal{E}_T$ ye göre invers noktalar ise O, P ve P' doğrudadır ve $\overrightarrow{OP}$ ile $\overrightarrow{OP'}$ ışınları aynı doğrultuya sahiptir. Böylece herhangi bir $t \in \mathbb{R}^+$ için $\overrightarrow{OP'} = t\overrightarrow{OP}$ dir. $d_T(O, P) \cdot d_T(O, P') = [d_T(O, Q)]^2$ olduğundan

$$t = \frac{[d_T(O, Q)]^2}{(|x| + |y|)^2} \quad (3.12)$$

bulunur. t nin bu değeri $(x', y') = (tx, ty)$ ifadesinde yerine yazılarak istenilen sonuçlar elde edilir. Örneğin $\frac{k-2x_1}{2x_1} < |m|$ ise, $d_T(O, Q) = (1 + |m|)(\frac{k-2x_1}{2m})$ olur.

Böylece $(x', y') = (\frac{(k-2x_1)^2 x}{4y^2}, \frac{(k-2x_1)^2}{4y^2})$ elde edilir.

Sonuç 3.3.1: $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$, $\mathbb{R}_T^2$ de odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$, merkezi $O = (a, b)$ ve sabiti k olan $\mathcal{E}_T$ taksi elipsine göre eliptik inversiyon olsun. $P = (x, y)$ ile $P' = (x', y')$, $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ ya göre invers noktalar ise $x_i \neq 0, y_i \neq 0, x_1 > y_1$ ve $m \overrightarrow{OP}$ ışınının eğimi olmak üzere

$$(x', y') = \left\{ \begin{array}{l} \left(a + \frac{k^2(x-a)}{4(x-a+y-b)^2}, b + \frac{k^2(y-a)}{4(x-a+y-b)^2} \right), \\ \left| \frac{2(y_1-b)}{k-2(y_1-b)} \right| < m < \left| \frac{k-2(x_1-a)}{2(x_1-a)} \right| \text{ ise} \\ \left(a + \frac{(k-2x_1-2a)^2(x-a)}{4(y-b)^2}, b + \frac{(k-2x_1-2a)^2}{4(y-b)} \right), \\ \left| \frac{k-2(x_1-a)}{2(x_1-a)} \right| < |m| \text{ ise} \\ \left(a + \frac{k^2(x-a)}{4(x-a+y-b)^2}, b + \frac{k^2(y-a)}{4(x-a+y-b)^2} \right), \\ - \left| \frac{k-2(x_1-a)}{2(x_1-a)} \right| < m < - \left| \frac{2(y_1-b)}{k-2(y_1-b)} \right| \text{ ise} \\ \left(a + \frac{(k-2y_1-2b)^2}{4(x-a)^2}, b + \frac{(k-2y_1-2b)^2(y-b)}{4(x-a)} \right), \\ m < \left| \frac{2(y_1-b)}{k-2(y_1-b)} \right| \text{ ise} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

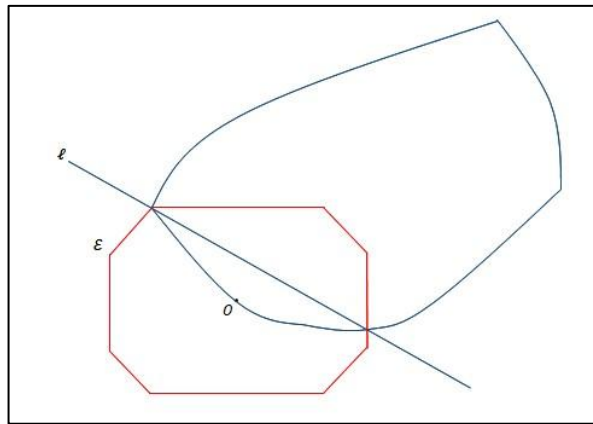
dır.

İspat: Ötelemelerin taksi düzleminin izometrilere olmalarından dolayı elde edilen bu sonuç açıktır.

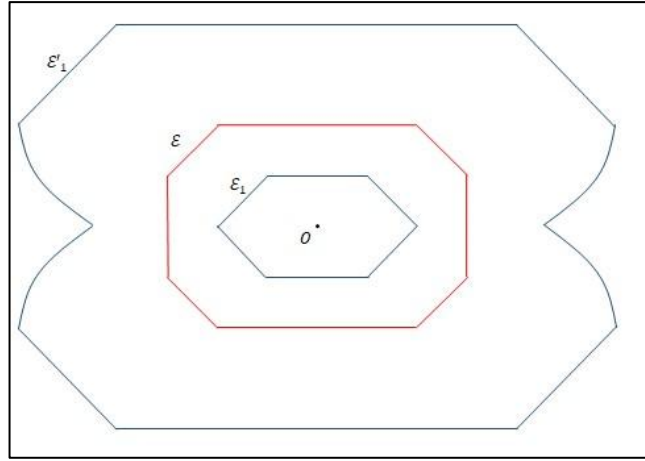
Sıradaki teorem Öklidyen düzlemde çembere göre inversiyon altında çember ve doğruların birbirlerine dönüşme durumlarına benzer olarak taksi düzlemde eliptik inversiyon altında elips ve doğruların ne olduklarını ifade etmektedir. Teoremdaki her bir durum birçok olası durum incelenerek ve Denklem (3.8) kullanılarak uzun hesaplamalarla elde edildiğinden ve Bölüm 4’de bu durumlar ayrıntılı olarak inceleneceğinden teorem ispatsız olarak ancak şekillerle açıklanarak verilmektedir.

Teorem 3.3.2:

- i. İversiyon merkezi O dan geçen bir doğru $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ altında invaryant kalır.
- ii. İversiyon merkezi O dan geçmeyen bir doğru $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ altında merkezi O olan bir taksi elipsine eşlenmez (Bkz: Şekil 3.5.).
- iii. İversiyon elipsi ile aynı tipten olan O merkezli taksi elipslerinin $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ altındaki inversleri de aynı tipten, O merkezli taksi elipsleridir.
- iv. İversiyon elipsi ile aynı tipten olmayan O merkezli taksi elipslerinin $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ altındaki inversleri O merkezli taksi elipsleri değildir (Bkz: Şekil 3.6.).
- v. O dan geçmeyen taksi elipslerinin $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ altındaki inversleri herhangi bir taksi elipsi değildir.
- vi. O inversiyon merkezinden geçen taksi elipslerinin $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ altındaki inversleri O merkezinden geçmeyen herhangi bir doğru değildir.



Şekil 3. 5. O dan geçmeyen bir l doğrusunu $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ altındaki inversi.



Şekil 3. 6. $\mathcal{E}_T$ inversiyon elipsi ile aynı tipten olmayan O merkezli $\mathcal{E}_1$ taksi elipsinin inversi.

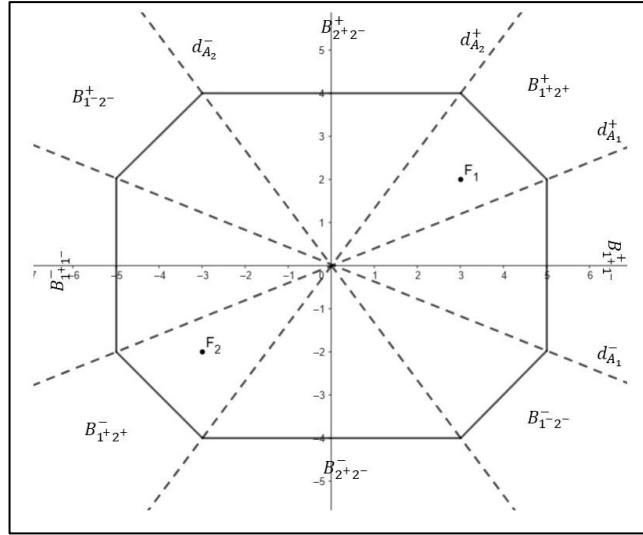
4. $\mathbb{R}_T^2$ DE ELİPTİK İNVERSİYONLAR ALTINDA DOĞRULARIN İNVERSLERİNİN SINIFLANDIRMASI

Bu bölümde $\mathbb{R}_T^2$ de doğrular eğimlerine göre sınıflandırılarak eliptik inversiyon altındaki inversleri incelenmiştir. $\mathbb{R}_T^2$ deki elipse göre inversiyonlarda bir doğrunun inversi yine bir elipstir (Rubianove Ramirez, 2014), ancak bu bölümde $\mathbb{R}_T^2$ de doğruların eliptik inversiyonlarının taksi elipsler değil de yalnızca konveks kümeler oldukları sonucuna ulaşılmıştır.

Tanım 4.1: Şekil 3.3’de verilen $O = (a, b)$ merkezli sabiti k olan $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2)$ odaklarına sahip $\mathcal{E}_T$ taksi elipsi ve bu elipsin $V_1, V_2, \dots, V_8$ köşe noktaları ele alınsın. O ve V_8 noktalarından geçen doğruya elipsin 1. *pozitif ayraç doğrusu*, O ve V_1 noktalarından geçen doğruya elipsin 2. *pozitif ayraç doğrusu*, O ve V_7 noktalarından geçen doğruya elipsin 1. *negatif ayraç doğrusu*, O ve V_2 noktalarından geçen doğruya elipsin 2. *negatif ayraç doğrusu* denilmekte ve bu doğrular sırasıyla $d_{A_1}^+, d_{A_2}^+, d_{A_1}^-,$ ve $d_{A_2}^-$ ile gösterilmektedir. Ayrıca $d_{A_1}^+$ ile $d_{A_2}^+$ doğruları arasında kalan bölgeler $d_{A_1}^+ > 0$ ve $d_{A_2}^+ < 0$ için $B_{1^+2^+}^+$, $d_{A_1}^+ < 0$ ve $d_{A_2}^+ > 0$ için $B_{1^+2^+}^-$, $d_{A_1}^+$ ile $d_{A_1}^-$ doğruları arasında kalan bölgeler $d_{A_1}^+ < 0$ ve $d_{A_1}^- > 0$ için $B_{1^+1^-}^+$, $d_{A_1}^+ > 0$ ve $d_{A_1}^- < 0$ için $B_{1^+1^-}^-$ $d_{A_2}^+$ ile $d_{A_2}^-$ doğruları arasında kalan bölgeler $d_{A_2}^+ > 0$ ve $d_{A_2}^- < 0$ için $B_{2^+2^-}^+$, $d_{A_2}^+ < 0$ ve $d_{A_2}^- > 0$ için $B_{2^+2^-}^-$ ve $d_{A_1}^-$ ile $d_{A_2}^-$ doğruları arasında kalan bölgeler $d_{A_1}^- > 0$ ve $d_{A_2}^- < 0$ için $B_{1^-2^-}^+$, $d_{A_1}^- < 0$ ve $d_{A_2}^- > 0$ için $B_{1^-2^-}^-$ ile gösterilir. (Bkz: Şekil 4.1. ve Çizelge 4.1.)

Çizelge 4. 1. Taksi sekizgen elipsine göre bölgeler.

	Sınır Ayraç Doğrular	Komşu Bölgeler	Dolaylı-Komşu Bölgeler
$B_{1^+2^+}^+$	$d_{A_1}^+ > 0$ ve $d_{A_2}^+ < 0$	$B_{1^+1^-}^+, B_{2^+2^-}^+$	$B_{1^-2^-}^-, B_{1^+2^-}^+$
$B_{1^+2^+}^-$	$d_{A_1}^+ < 0$ ve $d_{A_2}^+ > 0$	$B_{1^+1^-}^-, B_{2^+2^-}^-$	$B_{1^-2^-}^-, B_{1^+2^-}^-$
$B_{1^+1^-}^+$	$d_{A_1}^+ < 0$ ve $d_{A_1}^- > 0$	$B_{1^+2^+}^+, B_{1^-2^-}^-$	$B_{2^+2^-}^-, B_{2^+2^+}^-$
$B_{1^+1^-}^-$	$d_{A_1}^+ > 0$ ve $d_{A_1}^- < 0$	$B_{1^+2^-}^+, B_{1^+2^+}^+$	$B_{2^+2^-}^-, B_{2^+2^+}^-$
$B_{2^+2^-}^+$	$d_{A_2}^+ > 0$ ve $d_{A_2}^- < 0$	$B_{1^+2^+}^+, B_{1^-2^-}^-$	$B_{1^+1^-}^-, B_{1^+1^+}^-$
$B_{2^+2^-}^-$	$d_{A_2}^+ < 0$ ve $d_{A_2}^- > 0$	$B_{1^+2^+}^-, B_{1^-2^-}^-$	$B_{1^+1^-}^-, B_{1^+1^+}^-$
$B_{1^+2^-}^+$	$d_{A_1}^- > 0$ ve $d_{A_2}^- < 0$	$B_{2^+2^-}^+, B_{1^+1^-}^-$	$B_{1^+2^+}^+, B_{1^+2^+}^+$
$B_{1^+2^-}^-$	$d_{A_1}^- < 0$ ve $d_{A_2}^- > 0$	$B_{1^+1^-}^+, B_{2^+2^-}^-$	$B_{1^+2^+}^+, B_{1^+2^+}^+$

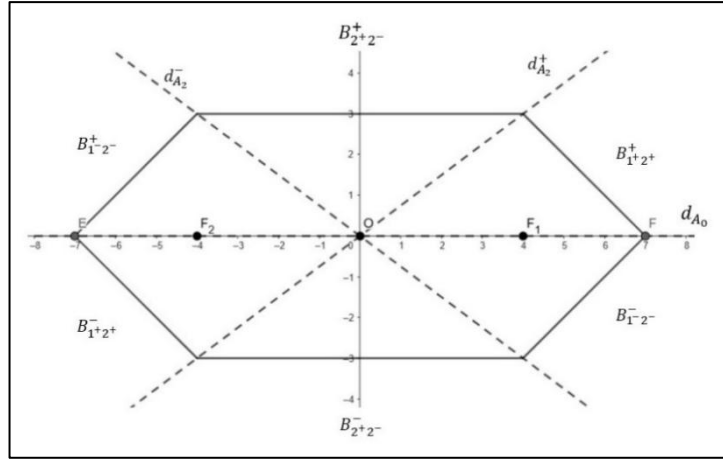


Şekil 4. 1. Taksi sekizgen elipsine göre ayraç doğruları ve bölgeler.

Şekil 3.2’de verilen $O = (a, b)$ merkezli, sabiti k olan, $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_1)$ odaklarına sahip $\mathcal{E}_T$ taksi elipsi ele alınsın. Bu durumda bu elips Şekil 3.2.1. de gösterildiği gibi köşeleri $V_1, V_2, \dots, V_6$ olan bir altıgen biçimindedir. Dikkat edilirse V_3 köşesi Şekil 3.3’de verilen sekizgen elipsin V_3 ve V_4 köşelerinin çakışması, V_6 köşesi de Şekil 3.3’de verilen sekizgen elipsin V_7 ve V_8 köşelerinin çakışması ile ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla bu halde 1. pozitif ve 1. negatif ayraç doğruları çakışarak $y = y_1$ denklemine sahip *nötr ayraç doğrusu* olarak isimlendirilen d_{A_0} doğrusuna dönüşmektedir ve $B_{1^+1^-}$ ile $B_{1^-1^-}$ bölgeleri ortadan kalkmaktadır. Geriye kalan ayraç doğruları ve bunların belirlediği bölgelerin isimlendirmeleri sekizgen elips için yapılan isimlendirmelerle aynıdır (Bkz: Şekil 4.2 ve Çizelge 4.2).

Çizelge 4. 2. Taksi altıgen elipsine göre bölgeler.

	Sınır Ayraç Doğruları	Komşu Bölgeler	Dolaylı Komşu Bölgeler
$B_{1^+2^+}$	$d_{A_0} > 0$ ve $d_{A_2}^+ < 0$	$B_{1^-2^-}, B_{2^+2^-}$	$B_{1^-2^-}, B_{2^+2^-}$
$B_{1^-2^+}$	$d_{A_0} < 0$ ve $d_{A_2}^+ > 0$	$B_{1^+2^-}, B_{2^+2^-}$	$B_{1^-2^-}, B_{2^+2^-}$
$B_{1^+2^-}$	$d_{A_0} < 0$ ve $d_{A_2}^- > 0$	$B_{2^+2^-}, B_{1^-2^+}$	$B_{1^+2^+}, B_{2^+2^-}$
$B_{1^-2^-}$	$d_{A_0} > 0$ ve $d_{A_2}^- < 0$	$B_{1^+2^+}, B_{2^+2^-}$	$B_{2^+2^-}, B_{1^-2^+}$
$B_{2^+2^-}$	$d_{A_2}^+ > 0$ ve $d_{A_2}^- < 0$	$B_{1^+2^+}, B_{1^+2^-}$	$B_{1^-2^+}, B_{1^-2^-}$
$B_{2^-2^-}$	$d_{A_2}^+ < 0$ ve $d_{A_2}^- > 0$	$B_{1^-2^+}, B_{1^-2^-}$	$B_{1^+2^+}, B_{1^+2^-}$



Şekil 4. 2. Taksi altıgen elipsine göre ayraç doğruları ve bölgeler.

Teorem 4.1: İnversiyon merkezinden geçen doğrular taksi eliptik inversiyon altında değişmez (invariant) kalırlar.

İspat: Ötelemeler taksi düzleminin izometrilere olduğundan inversiyon elipsinin merkezinin $O = (0,0)$ olduğunu kabul etmekte bir sakınca yoktur. Dolayısıyla $\mathcal{E}_T$ inversiyon elipsi, merkezi $O = (0,0)$, odakları $F_1 = (x_1, y_1), F_2 = (x_2, y_1)$ ve sabiti k olan bir taksi elipsi olsun. Ayrıca d doğrusu $ax + by = 0, a^2 + b^2 > 0$ biçiminde verilsin. Bu durumda $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ inversiyonu altında d nin görüntüsü;

$$d' = \begin{cases} ax + by = 0, & x \in B_{1^+2^+}^+ \cup B_{1^+2^+}^- \\ ax + by = 0, & x \in B_{2^+2^-}^+ \cup B_{2^+2^-}^- \\ ax + by = 0, & x \in B_{1^+1^-}^+ \cup B_{1^+1^-}^- \\ ax + by = 0, & x \in B_{1^-2^-}^+ \cup B_{1^-2^-}^- \end{cases} \quad (4.1)$$

olup $d, I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ altında invarianttır.

Teorem 4.2: İnversiyon merkezinden geçmeyen doğrular taksi eliptik inversiyon altında değişmez (invariant) kalmazlar. Ayrıca bu doğruların inversleri taksi inversiyon elipsinin merkezinden geçen kapalı bir eğridir.

İspat: $O = (0,0)$, $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ inversiyonunun merkezi, $F_1 = (x_1, y_1), F_2 = (x_2, y_1)$, $\mathcal{E}_T$ inversiyon elipsinin odakları, k , $\mathcal{E}_T$ nin sabiti ve $a^2 + b^2 > 0, c \neq 0$ olmak üzere $\mathbb{R}_T^2$ de bir d doğrusu $ax + by + c = 0$ olsun. d nin $I_{\mathcal{E}_T}(O, k)$ taksi eliptik inversiyonu altındaki görüntüsü

$$d' = \begin{cases} a \left(\frac{k^2 x}{4(x+y)^2} \right) + b \left(\frac{k^2 y}{4(x+y)^2} \right) + c = 0, & x \in B_{1+2+}^+ \cup B_{1+2+}^- \\ a \left(\frac{(k-2x_1)^2 x}{4y^2} \right) + b \left(\frac{(k-2x_1)^2}{4y} \right) + c = 0, & x \in B_{2+2-}^+ \cup B_{2+2-}^- \\ a \left(\frac{k^2 x}{4(x-y)^2} \right) + b \left(\frac{k^2 y}{4(x-y)^2} \right) + c = 0, & x \in B_{1-2-}^+ \cup B_{1-2-}^- \\ a \left(\frac{(k-2y_1)^2}{4x} \right) + b \left(\frac{(k-2y_1)^2 y}{4x^2} \right) + c = 0, & x \in B_{1+1-}^+ \cup B_{1+1-}^- \end{cases} \quad (4.2)$$

dir. Örneğin $B_{1+2+}^+ \cup B_{1+2+}^-$ ile $B_{1+1-}^+ \cup B_{1+1-}^-$ bölgelerindeki paraboller arasındaki açının $\frac{\pi}{4}$ radyan ve $B_{2+2-}^+ \cup B_{2+2-}^-$ ve $B_{1+1-}^+ \cup B_{1+1-}^-$ bölgelerindeki paraboller arasındaki açının $\frac{\pi}{2}$ radyan oldukları görülür. Benzer işlemler tüm komşu bölgeler ve dolaylı-komşu bölgeler için her durumda yapılırsa komşu bölgelerdeki invers konikler arasındaki açının $\frac{\pi}{4}$ radyan, dolaylı-komşu bölgelerdeki invers konikler arasındaki açının $\frac{\pi}{2}$ radyan oldukları gözlemlenir.

Ayrıca d doğrusunun eğimi $\pm 1,0$ ve ∞ olduğu durumlarda bir bölgede elipsin kenarlarından birine paralel olacağı açıktır. Bu durumda doğrunun bu bölgedeki parçasının inversi yine bir doğru parçası olacaktır. Dolayısıyla bu doğru parçası ile komşu bölgelerde ortaya çıkan parabollerin doğrultmanları arasında $\frac{\pi}{4}$ radyanlık açı, dolaylı-komşu bölgelerde ortaya çıkan parabollerin doğrultmanları ile doğru parçası arasında $\frac{\pi}{2}$ radyanlık açı bulunmaktadır. Örneğin $y = k$ doğrusunu ele alalım. Bu doğrunun $B_{2+2-}^+ \cup B_{2+2-}^-$ bölgesindeki inversi $\frac{(k-2x_1)^2 x}{4y} = k$ yani $y = \frac{(k-2x_1)^2 x}{4k}$ doğrusudur ve $B_{1+1-}^+ \cup B_{1+1-}^-$ bölgesindeki inversi $\frac{(k-2y_1)^2 y}{4x^2} = k$ parabolüdür. Bu parabolün doğrultmanı $y = \frac{(k-2x_1)^2 x}{4k}$ doğrusuna diktir. Benzer işlemler komşu bölgeler ve dolaylı-komşu bölgeler için her durumda yapılırsa inversleri doğru ya da parabol olan komşu bölgelerdeki doğru ile parabolün doğrultmanı ya da paraboller arasındaki açının $\frac{\pi}{4}$, dolaylı-komşu bölgelerdeki doğru ile parabolün doğrultmanı, ya da paraboller arasındaki açının $\frac{\pi}{2}$ radyan oldukları gözlemlenir.

Aşağıdaki örneklerde doğruların inversleri doğruların düzlemdeki konumlarına göre Teorem 4.2. de ifade edilen durumlar için incelenmektedir. Bu örneklerde inversiyon elipsi olarak odakları $F_1 = (3,2)$, $F_2 = (-3,-2)$ ve inversiyon sabiti $k = 14$ olan

$$\mathcal{E}_T = \{X = (x, y) \mid d_T(F_1, X) + d_T(F_2, X) = 14\} \quad (4.3)$$

taksi elipsi alınmıştır.

Örnek 4.1: $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ inversiyonu altında $x = 3$, $x = 5$ ve $x = 7$ doğruların inversleri Şekil 4.3’de gösterilmektedir.

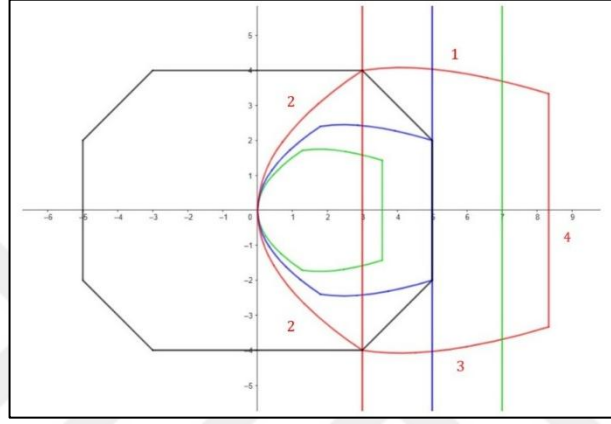
$x = 3$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49x - 3(x + y)^2 = 0$, $16x - 3y^2 = 0$, $48x - 3(x + y)^2 = 0$ ve $x = \frac{25}{3}$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 olanlar parabol yayları, 4 ise doğru parçasıdır. Dikkat edilirse 1 ve 3 parabolleri ortogonal parabolldir, 2 parabolünün doğrultmanı ile 4 doğrusu birbirine ortogonaldır, 1 ile 2 ve 2 ile 3 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 parabolünün doğrultmanı ile 4 doğrusu arasındaki açı ve 3 parabolünün doğrultmanı ile 4 doğrusu arasındaki açı ise $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$x = 5$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49x - 5(x + y)^2 = 0$, $16x - 5y^2 = 0$, $48x - 5(x + y)^2 = 0$ ve $x = 5$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 olanlar parabol yayları, 4 ise doğru parçasıdır. . Dikkat edilirse 1 ve 3 parabolleri ortogonal parabolldir, 2 parabolünün doğrultmanı ile 4 doğrusu birbirine ortogonaldır, 1 ile 2 ve 2 ile 3 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 parabolünün doğrultmanı ile 4 doğrusu arasındaki açı ve 3 parabolünün doğrultmanı ile 4 doğrusu arasındaki açı ise $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$x = 7$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir doğrunun inversi tamamen $\mathcal{E}_T$ nin iç bölgesindedir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49x - 7(x + y)^2 = 0$, $16x - 7y^2 = 0$, $48x - 7(x + y)^2 = 0$ ve $x = \frac{25}{7}$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 olanlar parabol yayları, 4 ise doğru parçasıdır. Dikkat

edilirse 1 ve 3 parabolleri ortogonal parabollerdir, 2 parabolünün doğrultmanı ile 4 doğrusu birbirine ortogondur, 1 ile 2 ve 2 ile 3 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 parabolünün doğrultmanı ile 4 doğrusu arasındaki açı ve 3 parabolünün doğrultmanı ile 4 doğrusu arasındaki açı ise $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$x = 3, x = 5$ ve $x = 7$ doğrularının $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altında invaryant kalan noktaları $\mathcal{E}_T$ ile kesiştikleri noktaldır.



Şekil 4.3. $m \rightarrow \infty$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.

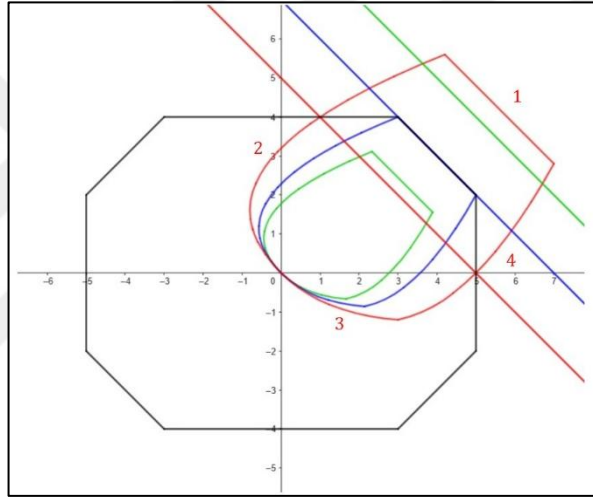
Örnek 4.2: $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ inversiyonu altında $x + y - 5 = 0$, $x + y - 7 = 0$ ve $x + y - 9 = 0$ doğruların inversleri Şekil 4.4'de gösterilmektedir.

$x + y - 5 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $x + y = \frac{49}{5}$, $16x + 16y - 5y^2 = 0$, $49x + 49y - 5(x - y)^2 = 0$, $25x + 25y - 5x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1 ile gösterilen bir doğru parçası 2, 3 ve 4 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. 2 ile 3, 3 ile 4 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.

$x + y - 7 = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $x + y = 7$, $16x + 16y - 7y^2 = 0$, $49x + 49y - 7(x - y)^2 = 0$, $25x + 25y - 7x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1 ile gösterilen bir doğru parçası 2, 3 ve 4 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. 2 ile 3, 3 ile 4 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki

açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogonaldır.

$x + y - 9 = 0$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir doğrunun inversi tamamen $\mathcal{E}_T$ nin iç bölgesindedir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $x + y = \frac{49}{9}$, $16x + 16y - 9y^2 = 0$, $49x + 49y - 9(x - y)^2 = 0$, $25x + 25y - 9x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1 ile gösterilen bir doğru parçası 2, 3 ve 4 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. 2 ile 3, 3 ile 4 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogonaldır.

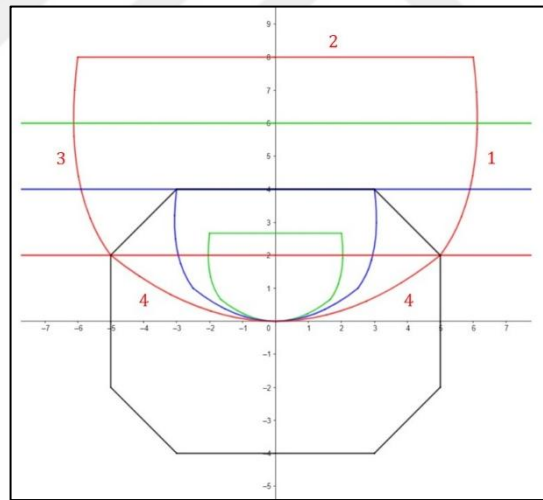


Şekil 4. 4. $m = -1$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.

Örnek 4.3: $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ inversiyonu altında $y = 2$, $y = 4$ ve $y = 6$ doğruların inversleri Şekil 4.5’de gösterilmektedir.

$y = 2$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49y - 2(x + y)^2 = 0$, $y = 8$, $49y - 2(x - y)^2 = 0$, $25y - 2x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2 ile gösterilen parça bir doğru parçası 1, 3 ve 4 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. 1 ile 2, 2 ile 3, 3 ile 4 ve 4 ile 1 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 ve 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogonaldır.

$y = 6$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir doğrunun inversi tamamen $\mathcal{E}_T$ nin iç bölgesindedir . 1,2,3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49y - 6(x + y)^2 = 0$, $y = \frac{16}{6}$, $49y - 6(x - y)^2 = 0$, $25y - 6x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2 ile gösterilen parça bir doğru parçası 1,3 ve 4 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 , 3 ile 4 ve 4 ile 1 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 ve 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.



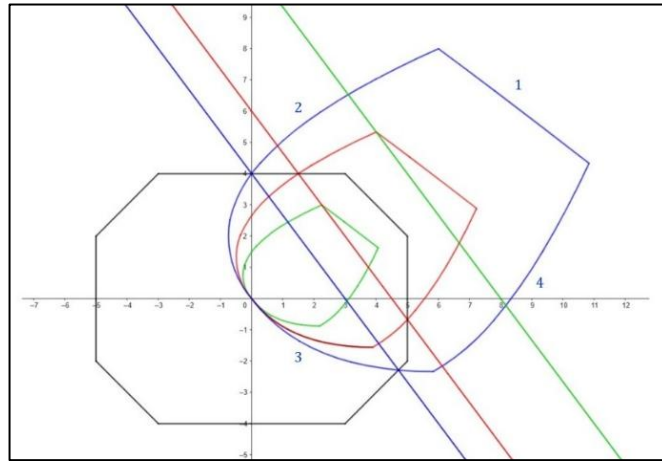
Örnek 4.4: $I_{\mathcal{E}_T}(0, 14)$ inversiyonu altında $4x + 3y - 12 = 0$, $4x + 3y - 18 = 0$ ve $4x + 3y - 32 = 0$ doğruların inversleri Şekil 4.6'da gösterilmektedir.

26

$12x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 , 3 ile 4 ve 4 ile 1 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 ve 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.

$4x + 3y - 18 = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $196x + 147y - 18(x + y)^2 = 0$, $64x + 48y - 18y^2 = 0$, $196x + 147y - 18(x - y)^2 = 0$, $100x + 75y - 18x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 , 3 ile 4 ve 4 ile 1 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 ve 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.

$4x + 3y - 32 = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $196x + 147y - 32(x + y)^2 = 0$, $64x + 48y - 32y^2 = 0$, $196x + 147y - 32(x - y)^2 = 0$, $100x + 75y - 32x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 , 3 ile 4 ve 4 ile 1 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 ve 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.



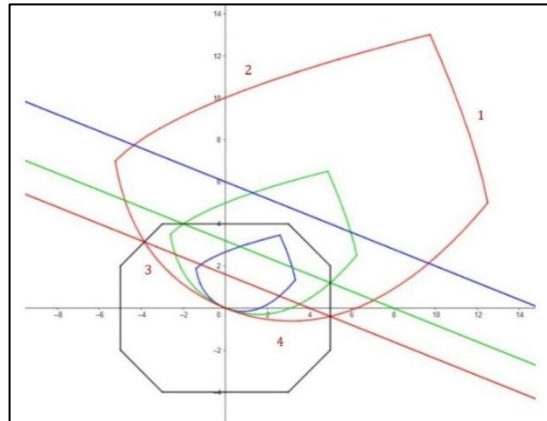
Şekil 4. 6. $m = -\frac{4}{3}$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.

Örnek 4.5: $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ inversiyonu altında $2x + 5y - 8 = 0$, $2x + 5y - 16 = 0$ ve $2x + 5y - 30 = 0$ doğruların inversleri Şekil 4.7’de gösterilmektedir.

$2x + 5y - 8 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1,2,3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $98x + 245y - 8(x + y)^2 = 0$, $32x + 80y - 8y^2 = 0$, $98x + 245y - 8(x - y)^2 = 0$, $50x + 125y - 8x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 , 3 ile 4 ve 4 ile 1 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 ve 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.

$2x + 5y - 16 = 0$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $98x + 245y - 16(x + y)^2 = 0$, $32x + 80y - 16y^2 = 0$, $98x + 245y - 16(x - y)^2 = 0$, $50x + 125y - 16x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 , 3 ile 4 ve 4 ile 1 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 ve 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.

$2x + 5y - 30 = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $98x + 245y - 30(x + y)^2 = 0$, $32x + 80y - 30y^2 = 0$, $98x + 245y - 30(x - y)^2 = 0$, $50x + 125y - 30x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 , 3 ile 4 ve 4 ile 1 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 ve 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.



Şekil 4. 7. $m = -\frac{2}{5}$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.

Aşağıdaki örneklerde Teorem 4.2. de ifade edilen durumlar için incelenmeler yapılmaktadır; Bu örneklerde inversiyon elipsi olarak odakları $F_1 = (4,0)$, $F_2 = (-4,0)$ ve inversiyon sabiti $k = 14$ olan

$$\mathcal{E}_T = \{X = (x, y) \mid d_T(F_1, X) + d_T(F_2, X) = 14\} \quad (4.4)$$

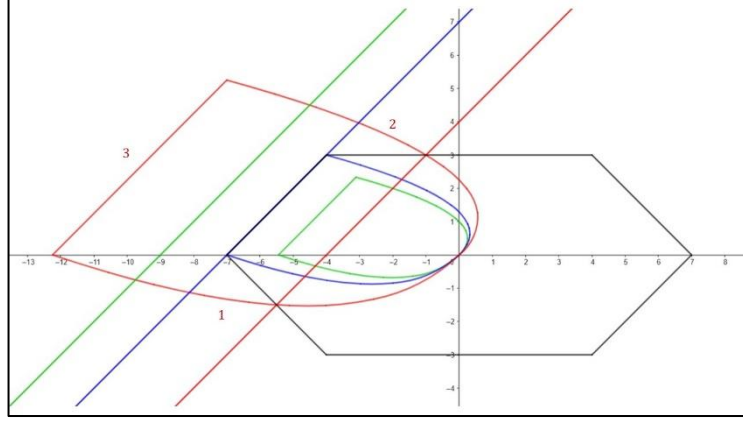
taksi elipsi alınmıştır.

Örnek 4.6: $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ inversiyonu altında $y - x - 4 = 0$, $y - x - 7 = 0$ ve $y - x - 9 = 0$ doğruların inversleri Şekil 4.8’de gösterilmektedir.

$y - x - 4 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49y - 49x - 4(x + y)^2 = 0$, $9y - 9x - 4y^2$, $49y - 49x - 4(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 3 ile gösterilen parça bir doğru parçası 1 ve 2 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. 1 ile 2 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır

$y - x - 7 = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49y - 49x - 7(x + y)^2 = 0$, $9y - 9x - 7y^2$, $49y - 49x - 7(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 3 ile gösterilen parça bir doğru parçası 1 ve 2 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. 1 ile 2 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır

$y - x - 9 = 0$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49y - 49x - 7(x + y)^2 = 0$, $9y - 9x - 7y^2$, $49y - 49x - 7(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 3 ile gösterilen parça bir doğru parçası 1 ve 2 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. 1 ile 2 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.



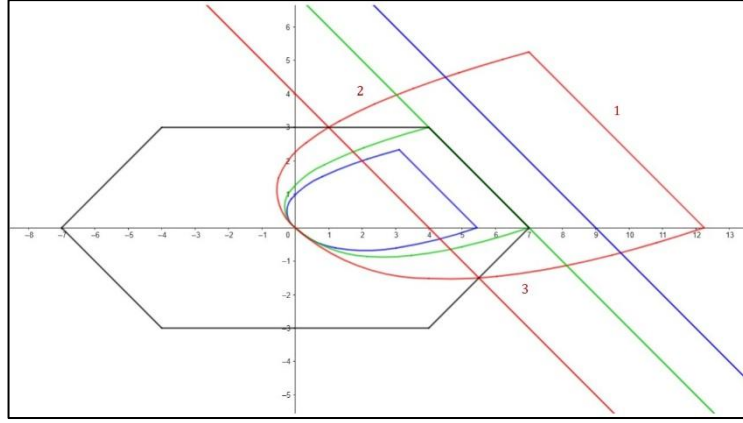
Şekil 4. 8. $m = 1$ eğimli doğruların $I_{E_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.

Örnek 4.7: $I_{E_T}(O, 14)$ inversiyonu altında $y + x - 4 = 0$, $y + x - 7 = 0$ ve $y + x - 9 = 0$ doğruların inversleri Şekil 4.9’da gösterilmektedir.

$y + x - 4 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49y + 49x - 4(x + y)^2 = 0$, $9y + 9x - 4y^2$, $49y + 49x - 4(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1 ile gösterilen parça bir doğru parçası 2 ve 3 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır

$y + x - 7 = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49y + 49x - 7(x + y)^2 = 0$, $9y + 9x - 7y^2$, $49y + 49x - 7(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1 ile gösterilen parça bir doğru parçası 2 ve 3 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır

$y + x - 9 = 0$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49y + 49x - 9(x + y)^2 = 0$, $9y + 9x - 9y^2$, $49y + 49x - 9(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1 ile gösterilen parça bir doğru parçası 2 ve 3 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.



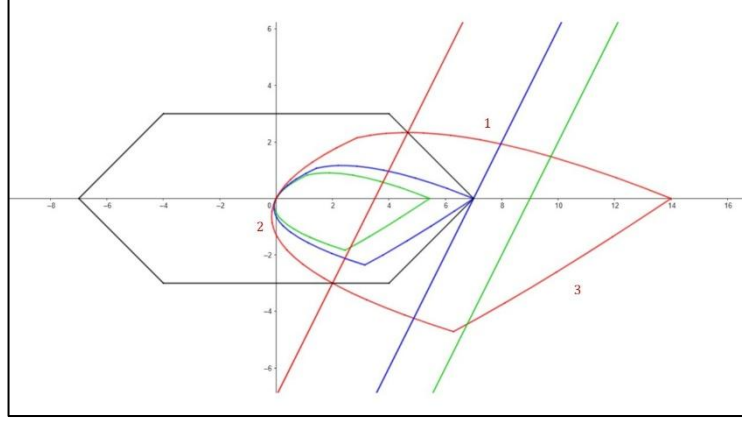
Şekil 4. 9. $m = -1$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.

Örnek 4.8: $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ inversiyonu altında $y - 2x + 7 = 0$, $y - 2x + 14 = 0$ ve $y - 2x + 18 = 0$ doğruların inversleri Şekil 4.10'da gösterilmektedir.

$y - 2x + 7 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49y - 98x + 7(x + y)^2 = 0$, $9y - 18x + 7y^2 = 0$, $49y - 98x + 7(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2, 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.

$y - 2x + 14 = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49y - 98x + 14(x + y)^2 = 0$, $9y - 18x + 14y^2 = 0$, $49y - 98x + 14(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2, 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.

$y - 2x + 18 = 0$ doğrusu yeşil doğru olup inverside yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49y - 98x + 18(x + y)^2 = 0$, $9y - 18x + 18y^2 = 0$, $49y - 98x + 18(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2, 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.



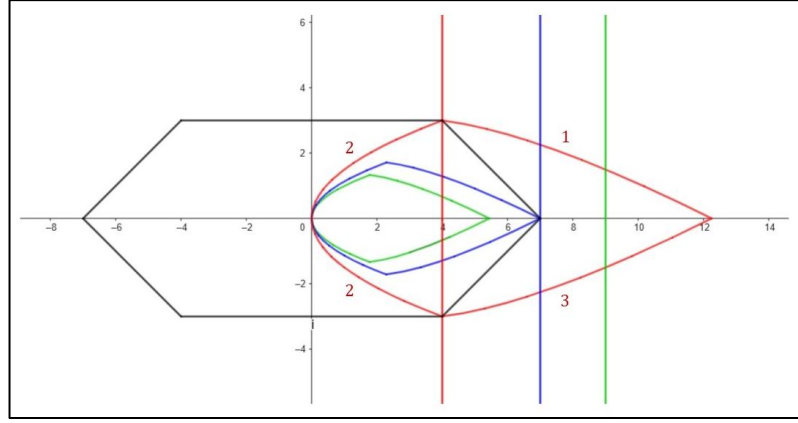
Şekil 4. 10. $m = 2$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.

Örnek 4.9: $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ inversiyonu altında $x = 4, x = 7$ ve $x = 9$ doğruların inversleri Şekil 4.11’de gösterilmektedir.

$x = 4$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49x - 7(x + y)^2 = 0$, $9x - 7y^2 = 0$, $49x - 7(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogonaldir.

$x = 7$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49x - 7(x + y)^2 = 0$, $9x - 7y^2 = 0$, $49x - 7(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogonaldir.

$x = 9$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49x - 9(x + y)^2 = 0$, $9x - 9y^2 = 0$, $49x - 9(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogonaldir.



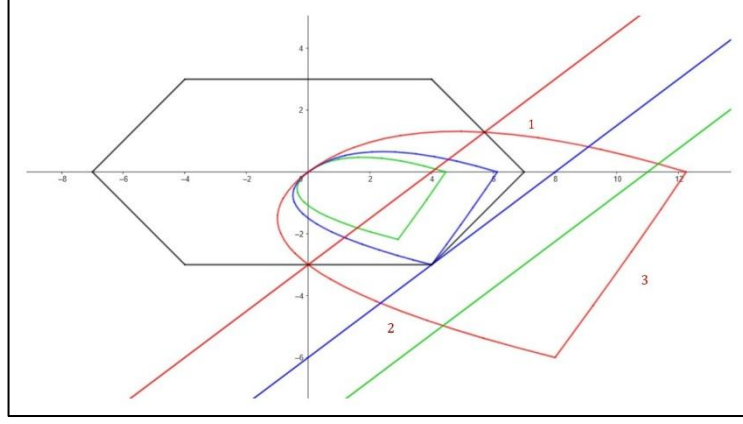
Şekil 4. 11. $m \rightarrow \infty$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.

Örnek 4.10: $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ inversiyonu altında $4y - 3x + 12 = 0$, $4y - 3x + 24 = 0$ ve $4y - 3x + 33 = 0$ doğruların inversleri Şekil 4.12’de gösterilmektedir.

$4y - 3x + 12 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1,2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $196y - 147x + 12(x + y)^2 = 0$, $36y - 27x + 12y^2 = 0$, $196y - 147x + 12(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogonaldır.

$4y - 3x + 24 = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 1,2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $196y - 147x + 24(x + y)^2 = 0$, $36y - 27x + 24y^2 = 0$, $196y - 147x + 24(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogonaldır.

$4y - 3x + 33 = 0$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 1,2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $196y - 147x + 33(x + y)^2 = 0$, $36y - 27x + 33y^2 = 0$, $196y - 147x + 33(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogonaldır.



Şekil 4. 12. $m = \frac{3}{4}$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.

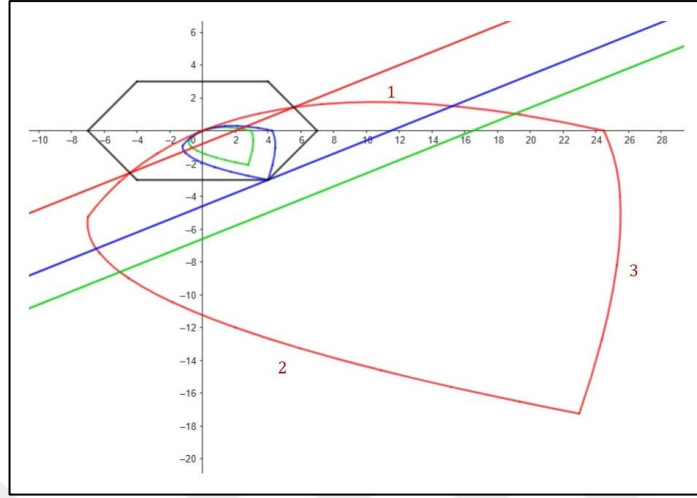
Örnek 4.11: $I_{\mathcal{E}_T}(O, 14)$ inversiyonu altında $5y - 2x + 4 = 0$, $5y - 2x + 23 = 0$ ve $5y - 2x + 33 = 0$ doğruların inversleri Şekil 4.13’de gösterilmektedir.

$5y - 2x + 4 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1,2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $245y - 98x + 4(x + y)^2 = 0$, $45y - 18x + 4y^2 = 0$, $245y - 98x + 4(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir.1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.

$5y - 2x + 23 = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $245y - 98x + 23(x + y)^2 = 0$, $45y - 18x + 23y^2 = 0$, $245y - 98x + 23(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.

$5y - 2x + 33 = 0$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $245y - 98x + 33(x + y)^2 = 0$, $45y - 18x + 33y^2 = 0$, $245y - 98x + 33(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir.1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2 , 2 ile 3 parabolleri

yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogonaldır.



Şekil 4. 13. $m = \frac{2}{5}$ eğimli doğruların $I_{E_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.

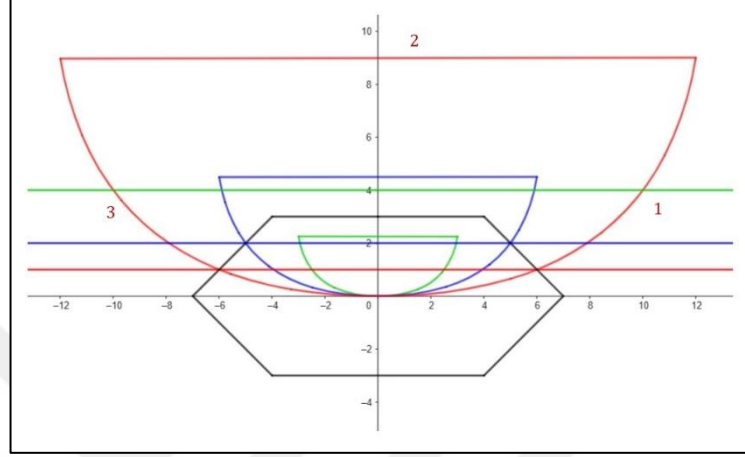
Örnek 4.12: $I_{E_T}(O, 14)$ inversiyonu altında $y = 1$, $y = 2$ ve $y = 4$ doğruların inversleri Şekil 4.14’de gösterilmektedir.

$y = 1$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49y - (x + y)^2 = 0$, $9y - y^2 = 0$, $49y - (x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2 ile gösterilen parça bir doğru parçası 1 ve 3 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. 1 ile 2 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır. 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$y = 2$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49y - 2(x + y)^2 = 0$, $9y - 2y^2 = 0$, $49y - 2(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2 ile gösterilen parça bir doğru parçası 1 ve 3 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. 1 ile 2 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır. 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$y = 4$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2 ve 3 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $49y - 4(x + y)^2 = 0$, $9y - 4y^2 = 0$, $49y -$

$4(x - y)^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2 ile gösterilen parça bir doğru parçası 1 ve 3 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. 1 ile 2 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır. 2 ile 3 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.



Şekil 4. 14. $m = 0$ eğimli doğruların $I_{E_T}(O, 14)$ altındaki inversleri.

5. MAKSİMUM ELİPTİK İNVERSİYONLAR

Bu bölümde öncelikle maximum düzleminin genel tanımı ve bazı özellikleri verilecektir. Sonrasında maximum düzlemde odakların konumlarına göre elipslerin nasıl değişiklik gösterdiği incelenmektedir. Son olarak maximum düzleminde bir elipse göre inversiyon tanımlanmakta ve bu dönüşümün bazı özellikleri verilmektedir.

5.1 Maksimum Düzlemi ve Özellikleri

Maksimum metriği ile döşenmiş iki boyutlu analitik düzlem $\mathbb{R}_M^2$ ile gösterilir. Bu bölümde $\mathbb{R}_M^2$ nin tanımı ve bazı özellikleri (Salihova, 2006) kaynağından faydalanılarak kısaca verilecektir.

Tanım 5.1.1: $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$d_M(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \quad (5.1)$$

biçiminde tanımlı $d_M: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonu maksimum uzaklı olarak isimlendirilir.

Teorem 5.1.1: d_M uzaklık fonksiyonu bir metriktir. d_M metriği ile döşenmiş analitik düzlem $\mathbb{R}_M^2$ ile gösterilmektedir.

Önerme 5.1.1: Her Öklidyen öteleme maksimum düzlemde uzaklığı korur. Böylece ötelemelerin her biri $\mathbb{R}_M^2$ de bir izometridir.

Önerme 5.1.2: d_E Öklidyen uzaklık fonksiyonunu göstermek üzere l analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru olsun. l nin eğimi m ise

$$d_M(P_1, P_2) = \frac{\max\{1, |m|\}}{\sqrt{1 + m^2}} d_E(P_1, P_2) \quad (5.2)$$

dir.

Sonuç 5.1.1: P_1, P_2 ve $X, \mathbb{R}^2$ de doğrudan noktalar olsunlar. Bu durumda $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ olması için gerek ve yeter koşul $d_M(P_1, X) = d_M(P_2, X)$ olmasıdır.

Sonuç 5.1.2: P_1, P_2 ve $X, \mathbb{R}^2$ de doğrudan ve farklı noktalar olsunlar. Bu durumda

$$\frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)} = \frac{d_M(P_1, X)}{d_M(P_2, X)} \quad (5.3)$$

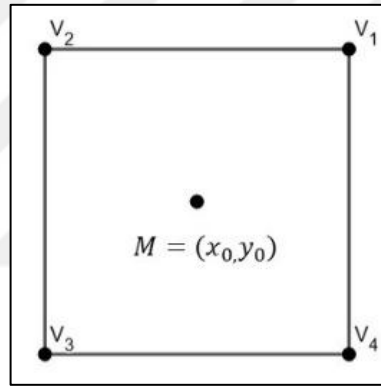
dır.

$\mathbb{R}_M^2$ de $M = (x_0, y_0)$ merkezli, r yarıçaplı çember

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 | d_M(X, M) = \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} = r\} \quad (5.4)$$

kümesinin noktalarının geometrik yeridir ve bu çember köşe noktaları $V_1 = (x_1 + r, y_1 + r)$, $V_2 = (x_1 - r, y_1 + r)$, $V_3 = (x_1 + r, y_1 - r)$, $V_4 = (x_1 - r, y_1 - r)$ ve kenarlarının eğimi 0 veya ∞ olan bir karedir.

Şekil 5.1’de maksimum çemberine ait görsel verilmiştir.



Şekil 5. 1. Maksimum çemberi.

5.2 Maksimum Elipsleri

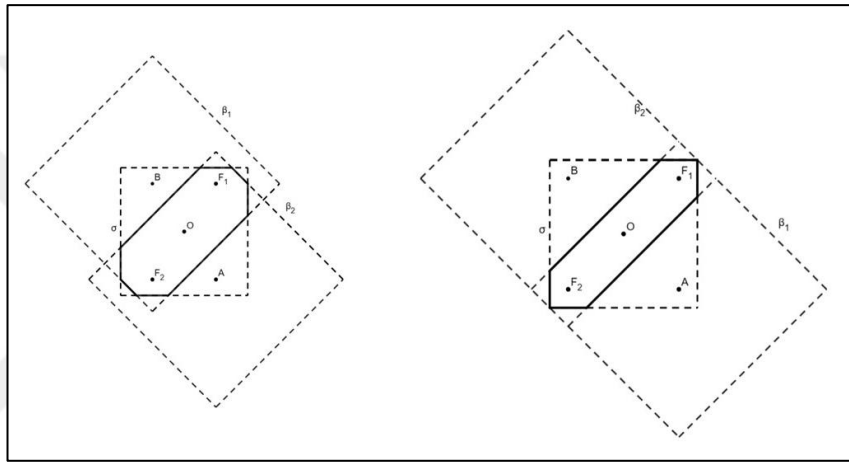
Minkowski tipi geometrilere uzaklık yöne göre değiştiğinden uzaklığa bağlı kavramlar Öklidyen geometrisindeki karşılıklarından oldukça farklı şekillerde ortaya çıkabilmektedir. Bir Minkowski tipi geometri olan maksimum geometrisinde de elips yapısı uzaklık fonksiyonuna bağlı olduğundan elipsler, odaklarının konumuna göre farklılıklar göstermektedir. Bu bölümde $\mathbb{R}_M^2$ de elipsin tanımı verilir ve farklı elipslerin nasıl çizilebileceğine dair bir kısa yöntem gösterilmektedir.

Tanım 5.2.1: F_1 ve F_2 , $\mathbb{R}_M^2$ de verilen noktalar, O bu iki noktanın orta noktası ve $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olsun. Bu durumda odakları F_1 ve F_2 , sabiti k olan $\mathcal{E}_M$ maksimum elipsi F_1 ve F_2 ye uzaklıkları toplamı k olan noktaların geometrik yeri yani

$$\mathcal{E}_M = \{P | d_M(F_1, P) + d_M(F_2, P) = k, k \geq d_M(F_1, F_2)\} \quad (5.5)$$

kümesinin elemanlardır.

Elipsin odaklarından geçen doğrunun eğimine göre iki tür maksimum elips vardır. Doğrunun eğimi -1 veya 1 ise elips bir altıgendir, aksi takdirde elips bir sekizgendir. Bu elipslerin kenarları, eğimleri $\pm 1, 0$ ve ∞ olan doğru parçalarıdır. Elipslerin köşe noktalarının bulunması ve koordinat sisteminde elipslerin konumları Bölüm 5.3’de ayrıntılı olarak incelenecektir. Maksimum elipsi çizme yöntemi ise Şekil 5.2’de verilmiştir.



Şekil 5. 2. Maksimum elipsi çizme yöntemi.

5.3 Maksimum Eliptik İnversiyonlar

Bu bölümde çembere göre inversiyonların bir genellemesi olan eliptik inversiyonlar $\mathbb{R}_M^2$ de tanımlanmakta ve bu dönüşümlerin bazı özellikleri (Can ve Aygün, 2024) kaynağından faydalanılarak verilmektedir.

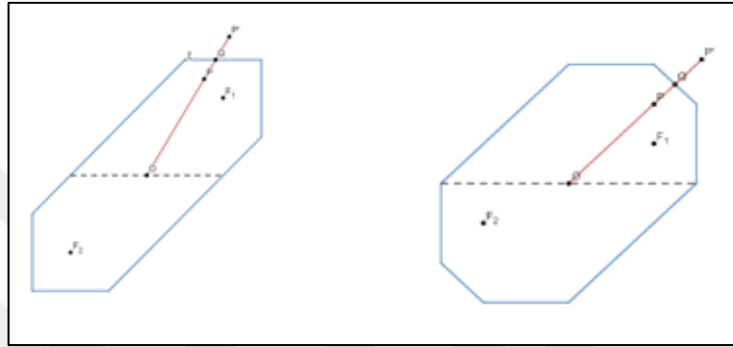
Tanım 5.3.1: $\mathcal{E}_M$, $\mathbb{R}_M^2$ de $O = (a, b)$ merkezli F_1, F_2 odaklı ve k sabitli bir elips, P_∞ da l_∞ -düzlemine eklenmiş ideal nokta olsun. $\mathbb{R}_M^2$ de $\mathcal{E}_M$ elipsine göre maksimum eliptik inversiyon $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)(O) = P_\infty$, $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)(P_\infty) = O$ ve $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)(P) = P'$ biçiminde tanımlanan

$$I_{\mathcal{E}}(O, k): \mathbb{R}_M^2 \cup \{P_\infty\} \rightarrow \mathbb{R}_M^2 \cup \{P_\infty\} \quad (5.6)$$

dönüşümüdür. Burada P' , $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerinde O dan farklı bir nokta olup, $\mathcal{E}_M$ elipsi ile $\overrightarrow{OP}$ ışınının kesişimi Q noktası olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = [d_M(O, Q)]^2 \quad (5.7)$$

dır. $\mathcal{E}_M$ ye inversiyon elipsi, O ya inversiyon merkezi, P' noktasına $\mathcal{E}_M$ elipsine göre, P noktasının inversi ve $\varepsilon := d_M(O, Q)$ pozitif reel sayısına da inversiyonun yarıçapı denir (Bkz: Şekil 5.3).



Şekil 5.3. Maksimum elipsine göre bir noktanın inversi.

Maksimum düzlemdeki (ve Öklid düzlemindeki) çembersel inversiyonların aksine, maksimum eliptik inversiyonların yarıçapları sabit değildir.

Yardımcı Teorem 5.3.1: $P \in \mathbb{R}_M^2 \cup \{P_\infty\}$ olmak üzere $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)(P) = P'$ olsun. P , $\mathcal{E}_M$ nin iç bölgesindeyse P' , $\mathcal{E}_M$ nin dış bölgesindedir ve tersine P' , $\mathcal{E}_M$ nin iç bölgesindeyse P , $\mathcal{E}_M$ nin dış bölgesindedir. Ayrıca $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ altında invaryant kalan noktalar yalnızca $\mathcal{E}_M$ elipsi üzerindeki noktalardır.

İspat: P noktasının $\mathcal{E}_M$ 'nin iç kısmında olduğunu varsayalım. Bu durumda $d_M(O, P) < d_M(O, Q)$ dur. $P' = I_{\mathcal{E}_M}(O, k)(P)$ ve $d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = [d_M(O, Q)]^2$ olduğundan $[d_M(O, Q)]^2 = d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') < d_M(O, Q) \cdot d_M(O, P')$ olup $d_M(O, P') > d_M(O, Q)$ elde edilir. Dolayısıyla P' , $\mathcal{E}_M$ nin dış bölgesindedir. P nin $\mathcal{E}_M$ nin dış bölgesinde olduğunda P' nün $\mathcal{E}_M$ nin iç bölgesinde olması durumunun ispatı benzerdir.

Önerme 5.3.1: $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$, merkezi $O = (0, 0)$ ve sabiti k olan $\mathcal{E}_M$ elipsine göre maximum eliptik inversiyon olsun. $P = (x, y)$ ve $P' = (x', y')$, $I_{\mathcal{E}}(O, k)$ ya göre invers noktalar ise

$$(x^l, y^l) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(k + x_1 + x_2)^2}{4x}, \frac{(k + x_1 + x_2)^2 y}{4x^2} \right), \\ \frac{-k + x_1 - x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} < m < \frac{k - x_1 + x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} \text{ ise} \\ \left(\frac{(k + x_2 + y_1)^2 x}{(x + y)^2}, \frac{(k + x_2 + y_1)^2 y}{(x + y)^2} \right), \\ \frac{k - x_1 + x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} < m < \frac{k + y_1 + y_2}{k + 2x_2 + y_1 - y_2} \text{ ise} \\ \left(\frac{(k + y_1 + y_2)^2 x}{4y^2}, \frac{(k + y_1 + y_2)^2 y}{4y} \right), \\ \frac{k + y_1 + y_2}{k + 2x_2 + y_1 - y_2} < m < \frac{k + y_1 + y_2}{-k + 2x_1 + y_1 - y_2} \text{ ise} \\ \left(\frac{(k - x_1 + y_2)^2 x}{(-x + y)^2}, \frac{(k - x_1 + y_2)^2 y}{(-x + y)^2} \right), \\ m < \frac{-k + x_1 - x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} \text{ veya } \frac{k + y_1 + y_2}{-k + 2x_1 + y_1 - y_2} < m \text{ ise} \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

dır. Burada $x_i \neq 0$, $y_i \neq 0$, $i = 1, 2$, $x_1 > y_1$ ve m , $\overrightarrow{OP}$ ışınının eğimidir. Ayrıca T noktası y eksenine ile F_1 den geçen ve eğimi -1 olan doğrunun kesişim noktası olmak üzere $k < d_M(F_1, T) + d_M(F_2, T)$ dır. $k = d_M(F_1, T) + d_M(F_2, T)$ olursa Denklem (5.8) de üçüncü aralık $\frac{k + y_1 + y_2}{k + 2x_2 + y_1 - y_2} < m$ ve dördüncü aralık $m \leq 0$ biçimine dönüşür.

$k > d_M(F_1, T) + d_M(F_2, T)$ ise üçüncü aralık $\frac{k + y_1 + y_2}{k + 2x_2 + y_1 - y_2} < m$ veya $m < \frac{k + y_1 + y_2}{k + 2x_2 + y_1 - y_2}$ biçimine ve dördüncü aralık ise $\frac{k + y_1 + y_2}{-k + 2x_1 + y_1 - y_2} < m < \frac{-k + x_1 - x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2}$ biçimine dönüşür. Dikkat edilirse $x_i = y_i$, $i = 1, 2$ ve $x_1 > 0$ veya $x_i = -y_i$, $i = 1, 2$ ve $y_1 > 0$ ise

$$(x', y') = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(k + y_1 + y_2)^2 x}{4y^2}, \frac{(k + y_1 + y_2)^2}{4y} \right), \\ 1 < m < \frac{k + y_1 + y_2}{-k + 2x_1 + y_1 - y_2} \text{ ise} \\ \left(\frac{(k - x_1 + y_2)^2 x}{(-x + y)^2}, \frac{(k - x_1 + y_2)^2 y}{(-x + y)^2} \right), \\ m < \frac{-k + x_1 - x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} \text{ veya } \frac{k + y_1 + y_2}{-k + 2x_1 + y_1 - y_2} < m \text{ ise} \\ \left(\frac{(k + x_1 + x_2)^2}{4x}, \frac{(k + x_1 + x_2)^2 y}{4x^2} \right), \\ \frac{-k + x_1 - x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} < m < 1 \text{ ise} \end{array} \right\} \quad (5.9)$$

dir.

İspat: Odakları $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2)$ ve sabiti k olan merkezsiz maksimum elipsi olan $\mathcal{E}$

$$\max\{|x - x_1|, |y - y_1|\} + \max\{|x - x_2|, |y - y_2|\} = k \quad (5.10)$$

denklemini sağlayan noktalar kümesidir. $P = (x, y)$ ve $P' = (x', y')$ $\mathcal{E}$ ye göre inversi noktalar ise O, P ve P' doğrudur ve $\overrightarrow{OP}$ ile $\overrightarrow{OP'}$ ışınları aynı doğrultuya sahiptir. Böylece herhangi bir $t \in \mathbb{R}^+$ için $\overrightarrow{OP'} = t\overrightarrow{OP}$ dir. $d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = [d_M(O, Q)]^2$ olduğundan

$$t = \frac{[d_M(O, Q)]^2}{(\max\{|x| + |y|\})^2} \quad (5.11)$$

bulunur. t nin bu değeri $(x', y') = (tx, ty)$ ifadesinde yerine yazılarak istenilen sonuçlar elde edilir. Şöyle ki;

1. Durum: $\frac{-k+x_1-x_2+2y_1}{k+x_1+x_2} < m < \frac{k-x_1+x_2+2y_1}{k+x_1+x_2}$ iken Q noktası $y = mx$ ile $x = \frac{k+x_1+x_2}{2}$ doğrularının arakesiti olacağından $Q = \left(\frac{k+x_1+x_2}{2}, \frac{y(k+x_1+x_2)}{2x} \right)$ biçiminde olup $d_M(O, Q) = \frac{|k+x_1+x_2|}{2} \max\{1, |m|\}$ elde edilir. Dolayısıyla $(x', y') = \left(\frac{(k+x_1+x_2)^2}{4x}, \frac{(k+x_1+x_2)^2 y}{4x^2} \right)$ dir.

2. Durum: $\frac{k-x_1+x_2+2y_1}{k+x_1+x_2} < m < \frac{k+y_1+y_2}{k+2x_2+y_1-y_2}$ iken Q noktası $y = mx$ ile $x + y = k + x_2 + y_1$ doğrularının arakesiti olacağından $Q = \left(\frac{(k+x_2+y_1)x}{x+y}, \frac{(k+x_2+y_1)y}{x+y} \right)$ biçiminde olup $d_M(O, Q) = \frac{|k+x_2+y_1|}{|1+m|} \max\{1, |m|\}$ elde edilir. Dolayısıyla $(x', y') = \left(\frac{(k+x_2+y_1)^2 x}{(x+y)^2}, \frac{(k+x_2+y_1)^2 y}{(x+y)^2} \right)$ dir.

3. Durum: $\frac{k+y_1+y_2}{k+2x_2+y_1-y_2} < m < \frac{k+y_1+y_2}{-k+2x_1+y_1-y_2}$ iken Q noktası $y = mx$ ile $y = \frac{k+y_1+y_2}{2}$ doğrularının arakesiti olacağından $Q = \left(\frac{(k+y_1+y_2)x}{2y}, \frac{(k+y_1+y_2)}{2} \right)$ biçiminde olup $d_M(O, Q) = \frac{|k+y_1+y_2|}{2} \max\left\{\frac{1}{|m|}, |m|\right\}$ elde edilir. Dolayısıyla $(x', y') = \left(\frac{(k+y_1+y_2)^2 x}{4y^2}, \frac{(k+y_1+y_2)^2}{4y} \right)$ dir.

4. Durum: $m < \frac{-k+x_1-x_2+2y_1}{k+x_1+x_2}$ veya $\frac{k+y_1+y_2}{-k+2x_1+y_1-y_2} < m$ iken Q noktası $y = mx$ ile $-x + y = k - x_1 + y_2$ doğrularının arakesiti olacağından $Q = \left(\frac{(k-x_1+y_2)x}{-x+y}, \frac{(k-x_1+y_2)y}{-x+y} \right)$ biçiminde olup $d_M(O, Q) = \frac{|k-x_1+y_2|}{|-1+m|} \max\{1, |m|\}$ elde edilir. Dolayısıyla $(x', y') = \left(\frac{(k-x_1+y_2)^2 x}{(-x+y)^2}, \frac{(k-x_1+y_2)^2 y}{(-x+y)^2} \right)$ dir.

Önerme 5.3.1 ifadesinde k nin seçilen değerlerine $\overrightarrow{OP}$ ışınının eğimi olan m nin alabileceği değerlere göre elipslerin nasıl değişiklik gösterdiğini açıklayalım;

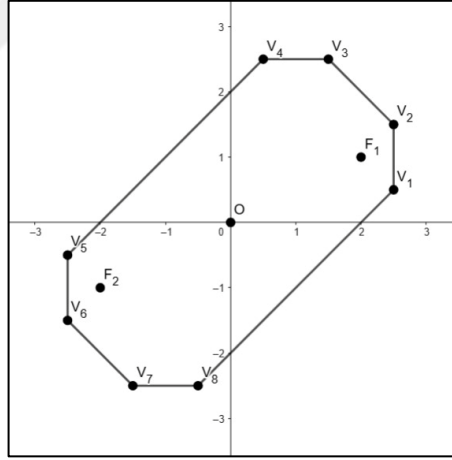
1. Durum: $k < d_M(F_1, T) + d_M(F_2, T)$, $x_i \neq 0$, $y_i \neq 0$, $i = 1, 2$ ve $x_1 > y_1 > 0$ ise

$$\mathcal{E}_M = \{X \mid d_M(F_1, X) + d_M(F_2, X) = k, \quad X = (x, y)\} \quad (5.12)$$

elipsi Şekil 5.4'de verilen elipstir ve $P = (x, y)$ noktasının inversi olan $P' = (x', y')$ noktasının koordinatları

$$(x^t, y^t) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(k+x_1+x_2)^2}{4x}, \frac{(k+x_1+x_2)^2 y}{4x^2} \right), \\ \frac{-k+x_1-x_2+2y_1}{k+x_1+x_2} < m < \frac{k-x_1+x_2+2y_1}{k+x_1+x_2} \text{ ise} \\ \left(\frac{(k+x_2+y_1)^2 x}{(x+y)^2}, \frac{(k+x_2+y_1)^2 y}{(x+y)^2} \right), \\ \frac{k-x_1+x_2+2y_1}{k+x_1+x_2} < m < \frac{k+y_1+y_2}{k+2x_2+y_1-y_2} \text{ ise} \\ \left(\frac{(k+y_1+y_2)^2 x}{4y^2}, \frac{(k+y_1+y_2)^2 y}{4y} \right), \\ \frac{k+y_1+y_2}{k+2x_2+y_1-y_2} < m < \frac{k+y_1+y_2}{-k+2x_1+y_1-y_2} \text{ ise} \\ \left(\frac{(k-x_1+y_2)^2 x}{(-x+y)^2}, \frac{(k-x_1+y_2)^2 y}{(-x+y)^2} \right), \\ m < \frac{-k+x_1-x_2+2y_1}{k+x_1+x_2} \text{ veya } \frac{k+y_1+y_2}{-k+2x_1+y_1-y_2} < m \text{ ise} \end{array} \right\} \quad (5.13)$$

biçiminde elde edilir (Bkz: Şekil 5.4).



Şekil 5. 4. $k < d_M(F_1, T) + d_M(F_2, T)$ için maksimum sekizgen elipsi.

Ayrıca bu elipsin köşe koordinatları;

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(\frac{k+x_1+x_2}{2}, \frac{-k+x_1-x_2+2y_1}{2} \right), & V_2 &= \left(\frac{k+x_1+x_2}{2}, \frac{k-x_1+x_2+2y_1}{2} \right), & V_3 &= \\ & \left(\frac{k+2x_2+y_1-y_2}{2}, \frac{k+y_1+y_2}{2} \right), & V_4 &= \left(\frac{-k+2x_1+y_1-y_2}{2}, \frac{k+y_1+y_2}{2} \right), & V_5 &= \\ & \left(\frac{-k+x_1+x_2}{2}, \frac{k-x_1+x_2+2y_2}{2} \right), & V_6 &= \left(\frac{-k+x_1+x_2}{2}, \frac{-k+x_1-x_2+2y_2}{2} \right) \\ V_7 &= \left(\frac{-k+2x_1-y_1+y_2}{2}, \frac{-k+y_1+y_2}{2} \right) \text{ ve } V_8 = \left(\frac{k+2x_2-y_1+y_2}{2}, \frac{-k+y_1+y_2}{2} \right) \text{ dir.} \end{aligned}$$

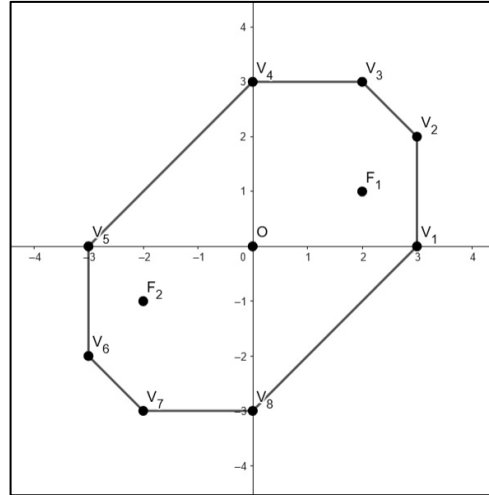
2. Durum: $k = d_M(F_1, T) + d_M(F_2, T)$, $x_i \neq 0, y_i \neq 0, i = 1, 2$ ve $x_1 > y_1 > 0$ ise

$$\mathcal{E}_M = \{X \mid d_M(F_1, X) + d_M(F_2, X) = k, X = (x, y)\} \quad (5.14)$$

elipsi Şekil 5.5’de verilen elipstir ve $P = (x, y)$ noktasının inversi olan $P' = (x', y')$ noktasının koordinatları

$$(x^l, y^l) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(k + x_1 + x_2)^2}{4x}, \frac{(k + x_1 + x_2)^2 y}{4x^2} \right), m \leq 0 \text{ ise} \\ \left(\frac{(k + x_2 + y_1)^2 x}{(x + y)^2}, \frac{(k + x_2 + y_1)^2 y}{(x + y)^2} \right), \\ 0 < m < \frac{k - x_1 + x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} \text{ ise} \\ \left(\frac{(k + y_1 + y_2)^2 x}{4y^2}, \frac{(k + y_1 + y_2)^2}{4y} \right), \\ \frac{k + x_1 - x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} < m < \frac{k + y_1 + y_2}{k + 2x_2 + y_1 - y_2} \text{ ise} \\ \left(\frac{(k - x_1 + y_2)^2 x}{(-x + y)^2}, \frac{(k - x_1 + y_2)^2 y}{(-x + y)^2} \right), \\ \frac{k + y_1 + y_2}{k + 2x_2 + y_1 - y_2} < m \text{ ise} \end{array} \right. \quad (5.15)$$

biçiminde elde edilir (Bkz: Şekil 5.5).



Şekil 5. 5. $k = d_M(F_1, T) + d_M(F_2, T)$ için maksimum sekizgen elipsi.

Ayrıca bu elipsin köşe koordinatları ilk haldeki elipsin köşe koordinatları ile aynıdır.

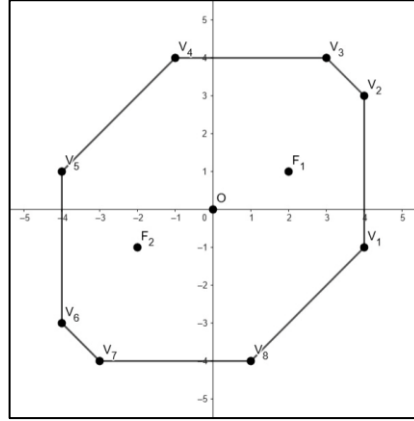
3. Durum: $k > d_M(F_1, T) + d_M(F_2, T)$, $x_i \neq 0, y_i \neq 0, i = 1, 2$ ve $x_1 > y_1 > 0$ ise

$$\mathcal{E}_M = \{X \mid d_M(F_1, X) + d_M(F_2, X) = k, \quad X = (x, y)\} \quad (5.16)$$

elipsi Şekil 5.6’da verilen elipstir ve $P = (x, y)$ noktasının inversi olan $P' = (x', y')$ noktasının koordinatları

$$(x^l, y^l) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(k + x_1 + x_2)^2}{4x}, \frac{(k + x_1 + x_2)^2 y}{4x^2} \right), \\ \frac{k + y_1 + y_2}{-k + 2x_1 + y_1 - y_2} < m < \frac{-k + x_1 - x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} \text{ ise} \\ \left(\frac{(k + x_2 + y_1)^2 x}{(x + y)^2}, \frac{(k + x_2 + y_1)^2 y}{(x + y)^2} \right), \\ \frac{-k + x_1 - x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} < m < \frac{k - x_1 + x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} \text{ ise} \\ \left(\frac{(k + y_1 + y_2)^2 x}{4y^2}, \frac{(k + y_1 + y_2)^2}{4y} \right), \\ \frac{k - x_1 + x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} < m < \frac{k + y_1 + y_2}{k + 2x_2 + y_1 - y_2} \text{ ise} \\ \left(\frac{(k - x_1 + y_2)^2 x}{(-x + y)^2}, \frac{(k - x_1 + y_2)^2 y}{(-x + y)^2} \right), \\ \frac{k + y_1 + y_2}{k + 2x_2 + y_1 - y_2} < m \text{ veya } m < \frac{k + y_1 + y_2}{-k + 2x_1 + y_1 - y_2} \text{ ise} \end{array} \right\} \quad (5.17)$$

ile bulunur (Bkz: Şekil 5.6).



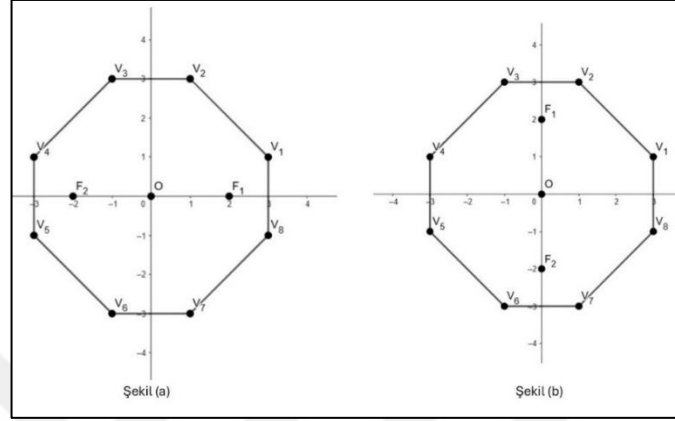
Şekil 5. 6. $k > d_M(F_1, T) + d_M(F_2, T)$ için maksimum sekizgen elipsi.

Ayrıca bu elipsin köşe koordinatları ilk haldeki elipsin köşe koordinatları ile aynıdır.

4. Durum: $x_i \neq 0, y_i = 0, i = 1, 2$ $x_1 > 0 > x_2$ veya $x_i = 0, y_i \neq 0, i = 1, 2$ $y_1 > 0 > y_2$ ise

$$\mathcal{E}_M = \{X \mid d_M(F_1, X) + d_M(F_2, X) = k, \quad X = (x, y)\} \quad (5.18)$$

elipsi Şekil 5.7’de sırasıyla şekil (a) ve şekil (b) de şekli verilen elipslerdir ve $P = (x, y)$ noktasının inversi olan $P' = (x', y')$ noktasının koordinatları Denklem (5.8) denklemindeki biçimde elde edilir.



Şekil 5. 7. Odakları birleştiren doğrunun eğimleri sırasıyla 0 ve ∞ olan maksimum sekizgen elipsleri.

Şekil(a)’da ki elipsin köşe koordinatları $V_1 = \left(\frac{k+x_1+x_2}{2}, \frac{k-x_1+x_2+2y_1}{2}\right)$, $V_2 = \left(\frac{k+2x_2+y_1-y_2}{2}, \frac{k+y_1+y_2}{2}\right)$, $V_3 = \left(\frac{-k+2x_1+y_1-y_2}{2}, \frac{k+y_1+y_2}{2}\right)$, $V_4 = \left(\frac{-k+x_1+x_2}{2}, \frac{k-x_1+x_2+2y_2}{2}\right)$, $V_5 = \left(\frac{-k+x_1+x_2}{2}, \frac{-k+x_1-x_2+2y_2}{2}\right)$, $V_6 = \left(\frac{-k+2x_1-y_1+y_2}{2}, \frac{-k+y_1+y_2}{2}\right)$, $V_7 = \left(\frac{k+2x_2-y_1+y_2}{2}, \frac{-k+y_1+y_2}{2}\right)$ ve $V_8 = \left(\frac{k+x_1+x_2}{2}, \frac{-k+x_1-x_2+2y_1}{2}\right)$ dir. Benzer şekilde şekil(b) deki köşe koordinatları $V_1 = \left(\frac{k+x_1+x_2}{2}, \frac{k+x_1-x_2+2y_2}{2}\right)$, $V_2 = \left(\frac{k+2x_1-y_1+y_2}{2}, \frac{k+y_1+y_2}{2}\right)$, $V_3 = \left(\frac{-k+2x_1+y_1-y_2}{2}, \frac{k+y_1+y_2}{2}\right)$, $V_4 = \left(\frac{-k+x_1+x_2}{2}, \frac{k-x_1+x_2+2y_2}{2}\right)$, $V_5 = \left(\frac{-k+x_1+x_2}{2}, \frac{-k-x_1+x_2+2y_1}{2}\right)$, $V_6 = \left(\frac{-k+2x_2+y_1-y_2}{2}, \frac{-k+y_1+y_2}{2}\right)$, $V_7 = \left(\frac{k+2x_2+y_1-y_2}{2}, \frac{-k+y_1+y_2}{2}\right)$ ve $V_8 = \left(\frac{k+x_1+x_2}{2}, \frac{-k+x_1-x_2+2y_1}{2}\right)$ dir.

Dikkat edilirse odakları $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2)$ ve sabiti k olan merkezsiz maksimum elipsi için

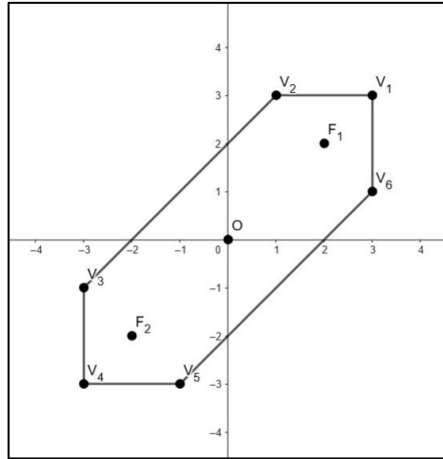
$$x_i = y_i, i = 1, 2 \text{ ve } x_1 > 0 \text{ veya } x_i = -y_i, i = 1, 2 \text{ ve } y_1 > 0 \text{ ise}$$

$$\mathcal{E}_M = \{X \mid d_M(F_1, X) + d_M(F_2, X) = k, \quad X = (x, y)\} \quad (5.19)$$

elipsi Şekil 5.8’de verilen elipstir ve köşe noktalarının koordinatları $V_1 = \left(\frac{k+x_1+x_2}{2}, \frac{k+y_1+y_2}{2}\right)$, $V_2 = \left(\frac{-k+2x_1+y_1-y_2}{2}, \frac{k+y_1+y_2}{2}\right)$, $V_3 = \left(\frac{-k+x_1+x_2}{2}, \frac{k-x_1+x_2+2y_2}{2}\right)$, $V_4 = \left(\frac{-k+x_1+x_2}{2}, \frac{-k+y_1+y_2}{2}\right)$, $V_5 = \left(\frac{k+2x_2-y_1+y_2}{2}, \frac{-k+y_1+y_2}{2}\right)$ ve $V_6 = \left(\frac{k+x_1+x_2}{2}, \frac{-k+x_1-x_2+2y_1}{2}\right)$ dir. Böylece $P = (x, y)$ noktasının inversi olan $P' = (x', y')$ noktasının koordinatları

$$(x', y') = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(k+y_1+y_2)^2 x}{4y^2}, \frac{(k+y_1+y_2)^2}{4y} \right), \\ 1 < m < \frac{k+y_1+y_2}{-k+2x_1+y_1-y_2} \\ \left(\frac{(k-x_1+y_2)^2 x}{(-x+y)^2}, \frac{(k-x_1+y_2)^2 y}{(-x+y)^2} \right), \\ m < \frac{-k+x_1-x_2+2y_1}{k+x_1+x_2} \text{ veya } \frac{k+y_1+y_2}{-k+2x_1+y_1-y_2} < m \\ \left(\frac{(k+x_1+x_2)^2}{4x}, \frac{(k+x_1+x_2)^2 y}{4x^2} \right), \\ \frac{-k+x_1-x_2+2y_1}{k+x_1+x_2} < m < 1 \end{array} \right\} \quad (5.20)$$

biçimde elde edilir.



Şekil 5. 8. Maksimum altıgen elipsi.

Sonuç 5.3.2: $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$, $\mathbb{R}_M^2$ de odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$, merkezi $O = (a, b)$ ve sabiti k olan $\mathcal{E}_M$ maksimum elipsine göre eliptik inversiyon olsun. $P = (x, y)$

ile $P' = (x', y')$, $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ ya göre invers noktalar ise $x_i \neq 0$, $y_i \neq 0$, $i = 1, 2$ $x_1 > y_1$ ve $m \overrightarrow{OP}$ ışınının eğimi olmak üzere

$$(x^l, y^l) = \left\{ \begin{array}{l} \left(a + \frac{(k + x_1 + x_2 - 2a)^2}{4(x - a)}, b + \frac{(k + x_1 + x_2 - 2a)^2(y - b)}{4(x - a)^2} \right), \\ \frac{-k + x_1 - x_2 + 2y_1 - 2b}{k + x_1 + x_2 - 2a} < m < \frac{k + x_1 - x_2 + 2y_1 - 2b}{k + x_1 + x_2 - 2a} \\ \left(a + \frac{(k + x_2 - a + y_1 - b)^2(x - a)}{(x - a + y - b)^2}, b + \frac{(k + x_2 - a + y_1 - b)^2(y - b)}{(x - a + y - b)^2} \right), \\ \frac{k - x_1 + x_2 + 2y_1 - 2b}{k + x_1 + x_2 - 2a} < m < \frac{k + y_1 - y_2 + 2y_1 - 2b}{k + 2x_2 - 2a + y_1 - y_2} \\ \left(a + \frac{(k + y_1 + y_2 - 2b)^2(x - a)}{4(y - b)^2}, b + \frac{(k + y_1 + y_2 - 2b)^2}{4(y - b)} \right), \\ \frac{k + y_1 + y_2 - 2b}{k + 2x_2 - 2a + y_1 - y_2} < m < \frac{k + y_1 + y_1 - 2b}{-k + 2x_1 - 2a + y_1 - y_2} \\ \left(a + \frac{(k + x_1 + a + y_2 - b)^2(x - a)}{(-x + a + y - b)^2}, b + \frac{(k - x_1 + a + y_2 - b)^2(y - b)}{(-x + a + y - b)^2} \right), \\ m < \frac{-k + x_1 - x_2 + 2y_1 - 2b}{k + x_1 + x_2 - 2a} \text{ veya } \frac{k + y_1 + y_1 - 2b}{-k + 2x_1 - 2a + y_1 - y_2} < m \end{array} \right\} \quad (5.21)$$

dir.

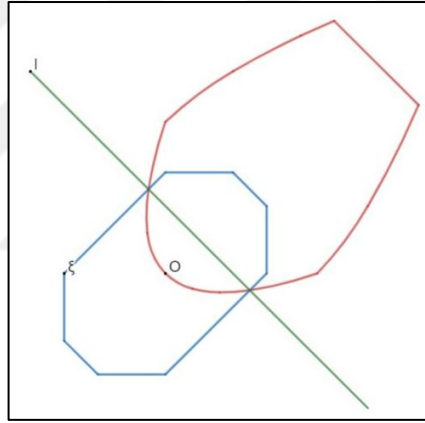
İspat: Ötelemelerin maximum düzleminin izometrilere olmalarından dolayı elde edilen bu sonuç açıktır.

Sıradaki teorem Öklidyen düzlemde çembere göre inversiyon altında çember ve doğruların birbirlerine dönüşme durumlarına benzer olarak maksimum düzlemde eliptik inversiyon altında elips ve doğruların ne olduklarını ifade etmektedir. Teoremdaki her bir durum birçok olası durum incelenerek ve Denklem (5.8) kullanılarak uzun hesaplamalarla elde edildiğinden ve Bölüm 6'da bu durumlar ayrıntılı olarak inceleneceğinden teorem ispatsız olarak ancak şekillerle açıklanarak verilmektedir.

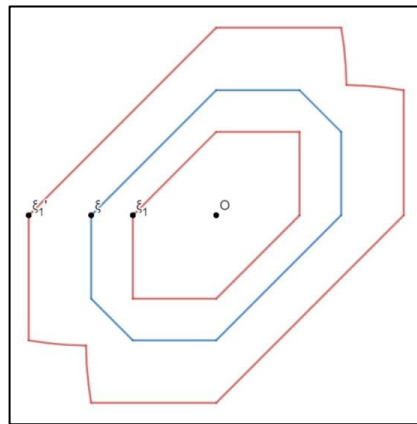
Teorem 5.3.3:

- i. İnversiyon merkezi O dan geçen bir doğru $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ altında invaryant kalır.

- ii. İncersiyon merkezi O dan geçmeyen bir doğru $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ altında merkezi O olan bir maksimum elipsine eşlenmez (Bkz: şekil 5.9).
- iii. İncersiyon elipsi ile aynı tipten olan O merkezli maksimum elipslerinin $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ altındaki inversleri de aynı tipten, O merkezli maksimum elipsleridir.
- iv. İncersiyon elipsi ile aynı tipten olmayan O merkezli maksimum elipslerinin $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ altındaki inversleri O merkezli maksimum elipsleri değildir (Bkz: şekil 5.10).
- v. O dan geçmeyen maksimum elipslerinin $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ altındaki inversleri herhangi bir maksimum elipsi değildir.
- vi. O incersiyon merkezinden geçen maksimum elipslerinin $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ altındaki inversleri O merkezinden geçmeyen herhangi bir doğru değildir.



şekil 5. 9. O dan geçmeyen bir l doğrusunu $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ altındaki inversi.



şekil 5. 10. $\mathcal{E}_M$ incersiyon elipsi ile aynı tipten olmayan O merkezli $\mathcal{E}_1$ maksimum elipsinin inversi.

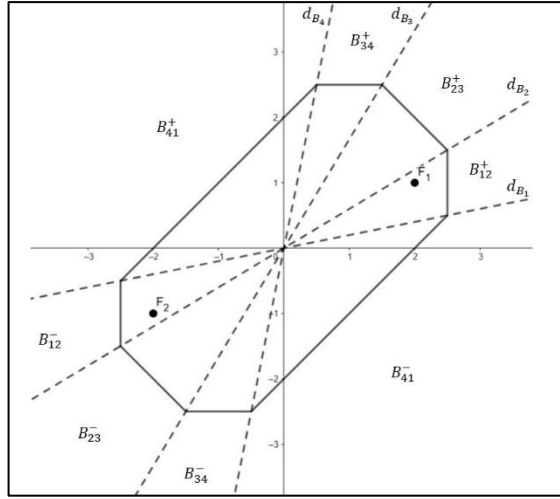
6. $\mathbb{R}_M^2$ DE ELİPTİK İNVERSİYONLAR ALTINDA DOĞRULARIN İNVERSLERİNİN SINIFLANDIRMASI

Bu bölümde $\mathbb{R}_M^2$ de doğrular eğimlerine göre sınıflandırılarak eliptik inversiyon altındaki inversleri incelenmiştir. $\mathbb{R}_E^2$ deki elipse göre inversiyonlarda bir doğrunun inversi yine bir elipstir (Rubiano ve Ramirez, 2014) ancak bu bölümde $\mathbb{R}_M^2$ de doğruların eliptik inversiyonlarının maksimum elipsler değil de yalnızca konveks kümeler oldukları sonucuna ulaşılmıştır.

Tanım 6.1. $O = (a, b)$ merkezli sabiti k olan $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2)$ odaklarına sahip $\mathcal{E}_M$ maksimum elipsi ve bu elipsin $V_1, V_2, \dots, V_8$ köşe noktaları ele alınsın, (Bkz: Şekil 5.5) O ve V_1 noktalarından geçen doğruya elipsin 1.ayraç doğrusu, O ve V_2 noktalarından geçen doğruya elipsin 2.ayraç doğrusu, O ve V_3 noktalarından geçen doğruya elipsin 3.ayraç doğrusu, O ve V_4 noktalarından geçen doğruya elipsin 4.ayraç doğrusu denilmekte ve bu doğrular sırasıyla $d_{B_1}, d_{B_2}, d_{B_3}$ ve d_{B_4} ile gösterilmektedir. Ayrıca d_{B_1} ile d_{B_2} doğruları arasında kalan bölgeler $d_{B_1} > 0$ ve $d_{B_2} < 0$ için B_{12}^+ , $d_{B_1} < 0$ ve $d_{B_2} > 0$ için B_{12}^- , d_{B_2} ile d_{B_3} doğruları arasında kalan bölgeler $d_{B_2} > 0$ ve $d_{B_3} < 0$ için B_{23}^+ , $d_{B_2} < 0$ ve $d_{B_3} > 0$ için B_{23}^- , d_{B_3} ile d_{B_4} doğruları arasında kalan bölgeler $d_{B_3} > 0$ ve $d_{B_4} < 0$ için B_{34}^+ , $d_{B_3} < 0$ ve $d_{B_4} > 0$ için B_{34}^- , d_{B_4} ile d_{B_1} doğruları arasında kalan bölgeler $d_{B_4} > 0$ ve $d_{B_1} < 0$ için B_{41}^+ , $d_{B_4} < 0$ ve $d_{B_1} > 0$ için B_{41}^- ile gösterilir (Bkz: Çizelge 6.1 ve Şekil 6.1).

Çizelge 6. 1. Maksimum sekizgen elipsine göre bölgeler.

	Sınır Ayraç Doğrular	Komşu Bölgeler	Dolaylı-Komşu Bölgeler
B_{12}^+	$d_{B_1} > 0$ ve $d_{B_2} < 0$	B_{23}^+, B_{41}^-	B_{34}^+, B_{34}^-
B_{12}^-	$d_{B_1} < 0$ ve $d_{B_2} > 0$	B_{23}^-, B_{41}^+	B_{34}^+, B_{34}^-
B_{23}^+	$d_{B_2} > 0$ ve $d_{B_3} < 0$	B_{12}^+, B_{34}^+	B_{41}^+, B_{41}^-
B_{23}^-	$d_{B_2} < 0$ ve $d_{B_3} > 0$	B_{12}^-, B_{34}^-	B_{41}^-, B_{41}^+
B_{34}^+	$d_{B_3} > 0$ ve $d_{B_4} < 0$	B_{23}^+, B_{41}^+	B_{12}^+, B_{12}^-
B_{34}^-	$d_{B_3} < 0$ ve $d_{B_4} > 0$	B_{23}^-, B_{41}^-	B_{12}^+, B_{12}^-
B_{41}^+	$d_{B_4} > 0$ ve $d_{B_1} < 0$	B_{12}^-, B_{34}^+	B_{23}^+, B_{23}^-
B_{41}^-	$d_{B_4} < 0$ ve $d_{B_1} > 0$	B_{12}^+, B_{34}^-	B_{23}^+, B_{23}^-

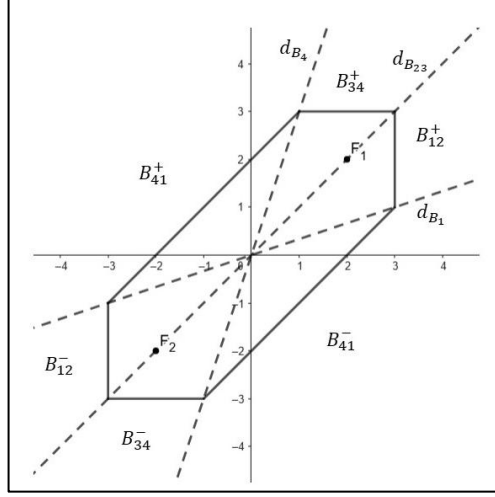


Şekil 6. 1. Maksimum sekizgen elipsine göre ayraç doğruları ve bölgeler.

Şekil 5.8’de verilen $O = (a, b)$ merkezli, sabiti k olan, $F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2)$ odaklarına sahip ve odaklarını birleştiren doğrunun eğimi 1 olan $\mathcal{E}_M$ maksimum elipsi ele alınsın. Bu durumda bu elips Şekil 5.8’de gösterildiği gibi köşeleri $V_1, V_2, \dots, V_6$ olan bir altıgen biçimindedir. Dikkat edilirse V_1 köşesi Şekil 5.6’da verilen sekizgen elipsin V_2 ve V_3 köşelerinin çakışması ile, V_4 köşesi de Şekil 5.6’da verilen sekizgen elipsin V_6 ve V_7 köşelerinin çakışması ile ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla bu halde 1.pozitif ve 1.negatif ayraç doğruları çakışarak $y = y_1$ denklemine sahip *nötr ayraç doğrusu* olarak isimlendirilen $d_{B_{23}}$ doğrusuna dönüşmektedir ve B_{23}^+, B_{23}^- bölgeleri ortadan kalkmaktadır. Geriye kalan ayraç doğruları ve bunların belirlediği bölgelerin isimlendirmeleri sekizgen elips için yapılan isimlendirmelerle aynıdır (Bkz: Çizelge 6.2 ve Şekil 6.2).

Çizelge 6. 2. Maksimum altıgen elipsine göre bölgeler.

	Sınır Ayraç Doğruları	Komşu Bölgeler	Dolaylı Komşu Bölgeler
B_{12}^+	$d_{B_1} > 0$ ve $d_{B_{23}} < 0$	B_{34}^+, B_{41}^-	B_{34}^-, B_{41}^+
B_{12}^-	$d_{B_1} < 0$ ve $d_{B_{23}} > 0$	B_{34}^-, B_{41}^+	B_{34}^+, B_{41}^-
B_{34}^+	$d_{B_{23}} > 0$ ve $d_{B_4} < 0$	B_{12}^+, B_{41}^+	B_{12}^-, B_{41}^-
B_{34}^-	$d_{B_{23}} < 0$ ve $d_{B_4} > 0$	B_{12}^-, B_{41}^-	B_{12}^+, B_{41}^+
B_{41}^+	$d_{B_4} > 0$ ve $d_{B_1} < 0$	B_{12}^-, B_{34}^+	B_{12}^+, B_{34}^-
B_{41}^-	$d_{B_4} < 0$ ve $d_{B_1} > 0$	B_{12}^+, B_{34}^-	B_{12}^-, B_{34}^+



Şekil 6. 2. Maksimum altıgen elipsine göre ayraç doğruları ve bölgeler.

Teorem 6.1: İnversiyon merkezinden geçen doğrular maksimum eliptik inversiyon altında değişmez (invariant) kalırlar.

İspat: Ötelemeler maksimum düzleminin izometrilere olduğundan inversiyon elipsinin merkezinin $O = (0,0)$ olduğunu kabul etmekte bir sakınca yoktur. Dolayısıyla $\mathcal{E}_M$, inversiyon elipsi merkezi $O = (0,0)$, odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ ve sabiti k olan bir maksimum elipsi olsun. Ayrıca d doğrusu $ax + by = 0$, $a^2 + b^2 > 0$ biçiminde verilsin. Bu durumda $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ inversiyonu altında d nin görüntüsü;

$$d' = \begin{cases} ax + by = 0, & x \in B_{12}^+ \cup B_{12}^- \\ ax + by = 0, & x \in B_{23}^+ \cup B_{23}^- \\ ax + by = 0, & x \in B_{34}^+ \cup B_{34}^- \\ ax + by = 0, & x \in B_{41}^+ \cup B_{41}^- \end{cases} \quad (6.1)$$

olup $d, I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ altında invarianttır.

Teorem 6.2: İnversiyon merkezinden geçmeyen doğrular maksimum eliptik inversiyon altında değişmez (invariant) kalmazlar. Ayrıca bu doğruların inversleri maksimum inversiyon elipsinin merkezinden geçen kapalı birer eğridir.

İspat: $O = (0,0)$, $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ inversiyonunun merkezi, $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$, $\mathcal{E}$ inversiyon elipsinin odakları, k , $\mathcal{E}$ nin sabiti ve $a^2 + b^2 > 0$, $c \neq 0$ olmak üzere $\mathbb{R}_M^2$ de bir d doğrusu $ax + by + c = 0$ olsun. d nin $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ maksimum eliptik inversiyonu altındaki görüntüsü

d'

$$= \begin{cases} a \left(\frac{(k+x_1+x_2)^2}{4x} \right) + b \left(\frac{(k+x_1+x_2)^2 y}{4x^2} \right) + c = 0, & x \in B_{12}^+ \cup B_{12}^- \\ a \left(\frac{(k+x_2+y_1)^2 x}{(x+y)^2} \right) + b \left(\frac{(k+x_2+y_1)^2 y}{(x+y)^2} \right) + c = 0, & x \in B_{23}^+ \cup B_{23}^- \\ a \left(\frac{(k+y_1+y_2)^2 x}{4y^2} \right) + b \left(\frac{(k+y_1+y_2)^2}{4y} \right) + c = 0, & x \in B_{34}^+ \cup B_{34}^- \\ a \left(\frac{(k-x_1+y_2)^2 x}{(-x+y)^2} \right) + b \left(\frac{(k-x_1+y_2)^2 y}{(-x+y)^2} \right) + c = 0, & x \in B_{41}^+ \cup B_{41}^- \end{cases} \quad (6.2)$$

dır. Örneğin $B_{23}^+ \cup B_{23}^-$ ile $B_{12}^+ \cup B_{12}^-$ bölgelerindeki paraboller arasındaki açının $\frac{\pi}{4}$ radyan ve $B_{23}^+ \cup B_{23}^-$ ile $B_{41}^+ \cup B_{41}^-$ bölgelerindeki paraboller arasındaki açının $\frac{\pi}{2}$ radyan oldukları görülür. Benzer işlemler tüm komşu bölgeler ve dolaylı-komşu bölgeler için her durumda yapılırsa komşu bölgelerdeki invers konikler arasındaki açının $\frac{\pi}{4}$ radyan, dolaylı-komşu bölgelerdeki invers konikler arasındaki açının $\frac{\pi}{2}$ radyan oldukları gözlemlenir.

Ayrıca d doğrusunun eğimi $\pm 1, 0$ ve ∞ olduğu durumlarda bir bölgede elipsin kenarlarından birine paralel olacağı açıktır. Bu durumda doğrunun bu bölgedeki parçasının inversi yine bir doğru parçası olacaktır. Dolayısıyla bu doğru parçası ile komşu bölgelerde ortaya çıkan parabollerin doğrultmanları arasında $\frac{\pi}{4}$ radyanlık açı, dolaylı-komşu bölgelerde ortaya çıkan parabollerin doğrultmanları arasında $\frac{\pi}{2}$ radyanlık açı bulunmaktadır. Örneğin $y = k$ doğrusunu ele alalım. Bu doğrunun $B_{34}^+ \cup B_{34}^-$ bölgesindeki inversi $\frac{(k+y_1+y_2)^2}{4y} = k$ yani $y = \frac{(k+y_1+y_2)^2}{4k}$ doğrusudur. Ayrıca $B_{12}^+ \cup B_{12}^-$ bölgesindeki inversi $\frac{(k+x_1+x_2)^2 y}{4x^2} = k$ parabolüdür. Bu parabol $y = \frac{(k-2x_1)^2 x}{4k}$ doğrusuna diktir. Benzer işlemler komşu bölgeler ve dolaylı-komşu bölgeler için her durumda yapılırsa inversleri doğru ya da parabol olan komşu bölgelerdeki doğru ile parabolün doğrultmanı ya da paraboller arasındaki açının $\frac{\pi}{4}$, dolaylı-komşu bölgelerdeki doğru ile parabolün doğrultmanı, ya da paraboller arasındaki açının $\frac{\pi}{2}$ radyan oldukları gözlemlenir.

Aşağıdaki örneklerde doğruların inversleri doğruların düzlemdeki konumlarına göre Teorem 6.2’de ifade edilen durumlar için incelenmektedir; Bu örneklerde inversiyon elipsi olarak odakları $F_1 = (2,1)$, $F_2 = (-2, -1)$ ve inversiyon sabiti $k = 6$ olan

$$\mathcal{E}_M = \{X = (x, y) \mid d_T(F_1, X) + d_T(F_2, X) = 6\} \quad (6.3)$$

taksi elipsi alınmıştır.

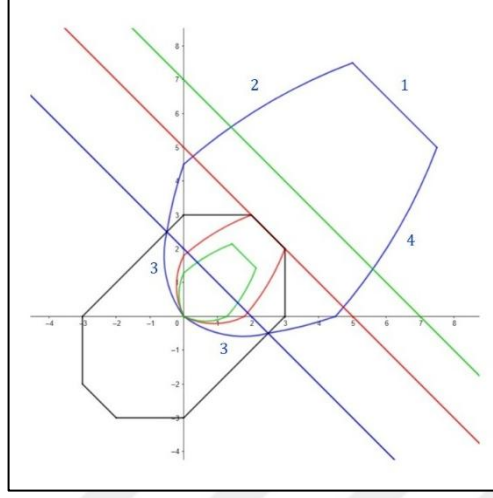
Örnek 6.1: $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ inversiyonu altında $x + y - 2 = 0$, $x + y - 5 = 0$ ve $x + y - 7 = 0$ doğruların inversleri Şekil 6.3’de gösterilmektedir.

$x + y - 2 = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $25x + 25y - 2(x + y)^2 = 0$, $36x + 36y - 8y^2 = 0$, $9x + 9y - 2(-x + y)^2 = 0$, $36x + 36y - 8x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2, 3 ve 4 olanlar parabol yayları, 1 ise doğru parçasıdır. Dikkat edilirse 2 ve 4 parabolleri ortogonal parabolldir, 3 parabolünün doğrultmanı ile 1 doğrusu birbirine ortogonaldir, 4 parabolünün doğrultmanı ile 1 doğrusu arasındaki açı ve 2 parabolünün doğrultmanı ile 1 doğrusu arasındaki açı ise $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$x + y - 5 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $25x + 25y - 5(x + y)^2 = 0$, $36x + 36y - 20y^2 = 0$, $9x + 9y - 5(-x + y)^2 = 0$ ve $36x + 36y - 20x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2, 3 ve 4 olanlar parabol yayları, 1 ise doğru parçasıdır. Dikkat edilirse 2 ve 4 parabolleri ortogonal parabolldir, 3 parabolünün doğrultmanı ile 1 doğrusu birbirine ortogonaldir, 4 parabolünün doğrultmanı ile 1 doğrusu arasındaki açı ve 2 parabolünün doğrultmanı ile 1 doğrusu arasındaki açı ise $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$x + y - 7 = 0$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir doğrunun inversi tamamen $\mathcal{E}_M$ nin iç bölgesindedir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $25x + 25y - 5(x + y)^2 = 0$, $36x + 36y - 20y^2 = 0$, $9x + 9y - 5(-x + y)^2 = 0$ ve $36x + 36y - 20x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2, 3 ve 4 olanlar parabol yayları, 1 ise doğru parçasıdır. Dikkat edilirse 2 ve 4 parabolleri ortogonal parabolldir, 3 parabolünün doğrultmanı ile 1 doğrusu birbirine

ortagonaldır, 4 parabolünün doğrultmanı ile 1 doğrusu arasındaki açı ve 2 parabolünün doğrultmanı ile 1 doğrusu arasındaki açı ise $\frac{\pi}{4}$ radyandır.



Şekil 6. 3. $m = -1$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.

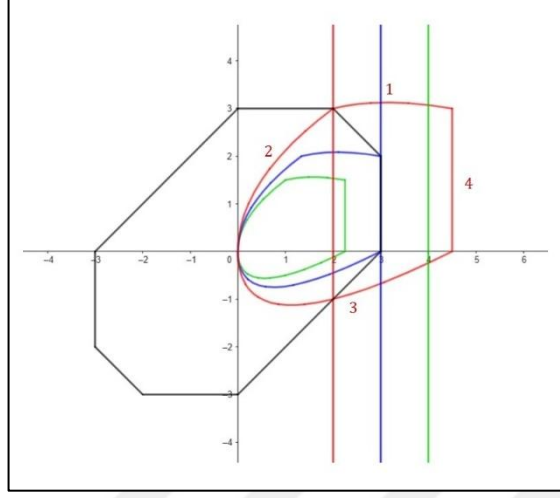
Örnek 6.2: $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ inversiyonu altında $x = 2$, $x = 3$ ve $x = 4$ doğruların inversleri Şekil 6.4’de gösterilmektedir.

$x = 2$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $25x - 2(x + y)^2 = 0$, $36x - 8y^2 = 0$, $9x - 2(-x + y)^2 = 0$, $36x - 8x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 olanlar parabol yayları, 4 ise doğru parçasıdır. Dikkat edilirse 1 ve 3 parabolleri ortogonal parabolldir, 1 ile 2 ve 2 ile 3 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$x = 3$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $25x - 3(x + y)^2 = 0$, $36x - 12y^2 = 0$, $9x - 3(-x + y)^2 = 0$, $36x - 12x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3 olanlar parabol yayları, 4 ise doğru parçasıdır. Dikkat edilirse 1 ve 3 parabolleri ortogonal parabolldir, 1 ile 2 ve 2 ile 3 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$x = 4$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $25x - 4(x + y)^2 = 0$, $36x - 16y^2 = 0$, $9x - 4(-x + y)^2 = 0$, $36x - 16x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 3

olanlar parabol yayları, 4 ise doğru parçasıdır. Dikkat edilirse 1 ve 3 parabolleri ortogonal parabolldir, 1 ile 2 ve 2 ile 3 parabollderi arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.



Şekil 6. 4. $m \rightarrow \infty$ eğimli doğruların $I_{E_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.

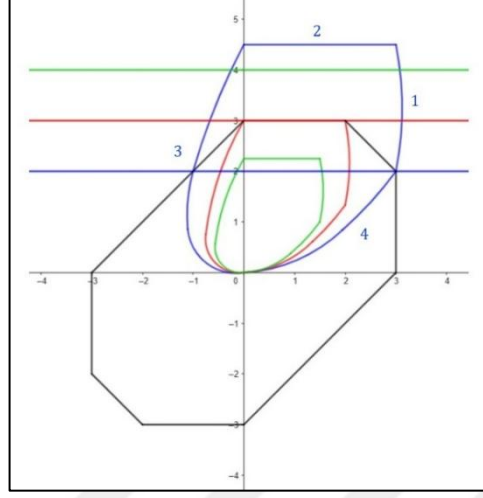
Örnek 6.3: $I_{E_M}(O, 6)$ inversiyonu altında $y = 2$, $y = 3$ ve $y = 4$ doğruların inversleri Şekil 6.5’de gösterilmektedir.

$y = 2$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $25y - 2(x + y)^2 = 0$, $36y - 8y^2 = 0$, $9y - 2(-x + y)^2 = 0$, $36y - 8x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 3 ve 4 olanlar parabol yayları, 2 ise doğru parçasıdır. Dikkat edilirse 1 ve 3 parabollderi ortogonal parabolldir, 1 ile 2 ve 3 ile 4 ve 1 ile 4 parabollderi arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$y = 3$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $25y - 3(x + y)^2 = 0$, $36y - 12y^2 = 0$, $9y - 3(-x + y)^2 = 0$, $36y - 12x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 3 ve 4 olanlar parabol yayları, 2 ise doğru parçasıdır. Dikkat edilirse 1 ve 3 parabollderi ortogonal 1 ile 2 ve 3 ile 4 ve 1 ile 4 parabollderi arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$y = 4$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $25y - 4(x + y)^2 = 0$, $36y - 16y^2 = 0$, $9y - 4(-x + y)^2 = 0$, $36y - 16x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 3 ve 4 olanlar

parabol yayları, 2 ise doğru parçasıdır. Dikkat edilirse 1 ve 3 parabolleri ortogonal parabollerdir, 1 ile 2 ve 3 ile 4 ve 1 ile 4 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.



Şekil 6. 5. $m = 0$ eğimli doğruların $I_{E_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.

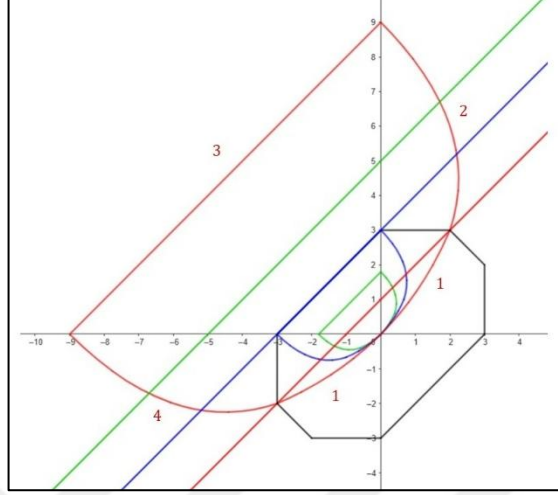
Örnek 6.4: $I_{E_M}(O, 6)$ inversiyonu altında $y - x - 1 = 0$, $y - x - 3 = 0$ ve $y - x - 5 = 0$ doğruların inversleri Şekil 6.6’da gösterilmektedir

$y - x - 1 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $-25x + 25y - (x + y)^2 = 0$, $-36x + 36y - 4y^2 = 0$, $-9x + 9y - (-x + y)^2 = 0$, $-36x + 36y - 4x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 4 olanlar parabol yayları, 3 ise doğru parçasıdır. Dikkat edilirse 1 ve 3 parabolleri ortogonal parabollerdir, 1 ile 2 ve 2 ile 3 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$y - x - 3 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $-25x + 25y - 3(x + y)^2 = 0$, $-36x + 36y - 12y^2 = 0$, $-9x + 9y - 3(-x + y)^2 = 0$, $-36x + 36y - 12x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 4 olanlar parabol yayları, 3 ise doğru parçasıdır. Dikkat edilirse 1 ve 3 parabolleri ortogonal parabollerdir, 1 ile 2 ve 2 ile 3 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$y - x - 5 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $-25x + 25y - 5(x + y)^2 = 0$, $-36x + 36y - 20y^2 = 0$, $-9x + 9y - 5(-x + y)^2 = 0$, $-36x +$

$36y - 20x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2 ve 4 olanlar parabol yayları, 3 ise doğru parçasıdır. Dikkat edilirse 1 ve 3 parabolleri ortogonal parabollerdir, 1 ile 2 ve 2 ile 3 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.



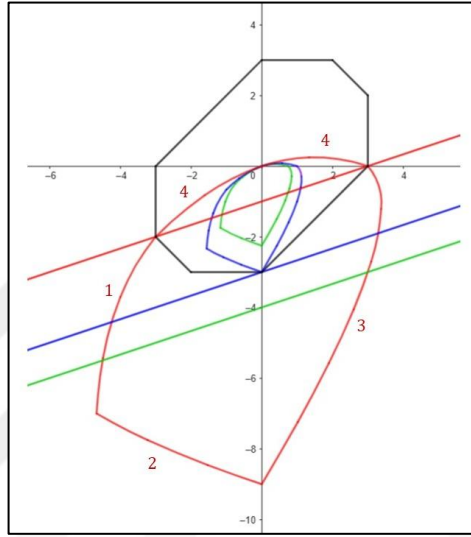
Şekil 6.6. $m = 1$ eğimli doğruların $I_{E_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.

Örnek 6.5: $I_{E_M}(O, 6)$ inversiyonu altında $3y - x + 3 = 0$, $3y - x + 9 = 0$ ve $3y - x + 12 = 0$ doğruların inversleri Şekil 6.7’de gösterilmektedir

$3y - x + 3 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $-25x + 75y + 3(x + y)^2 = 0$, $-36x + 108y + 12y^2 = 0$, $-9x + 25y + 3(-x + y)^2 = 0$, $-36x + 108y + 12x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2, 2 ile 3, 3 ile 4 ve 4 ile 1 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 ve 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogonaldır.

$3y - x + 9 = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $-25x + 75y + 9(x + y)^2 = 0$, $-36x + 108y + 48y^2 = 0$, $-9x + 25y + 12(-x + y)^2 = 0$, $-36x + 108y + 48x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2, 2 ile 3, 3 ile 4 ve 4 ile 1 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 ve 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogonaldır.

$3y - x + 12 = 0$ doğrusu yeşil doğru olup inverside yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $-25x + 75y + 12(x + y)^2 = 0$, $-36x + 108y + 48y^2 = 0$, $-9x + 25y + 12(-x + y)^2 = 0$, $-36x + 108y + 48x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2, 2 ile 3, 3 ile 4 ve 4 ile 1 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 ve 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.



Şekil 6.7. $m = \frac{1}{3}$ eğimli doğruların $I_{E_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.

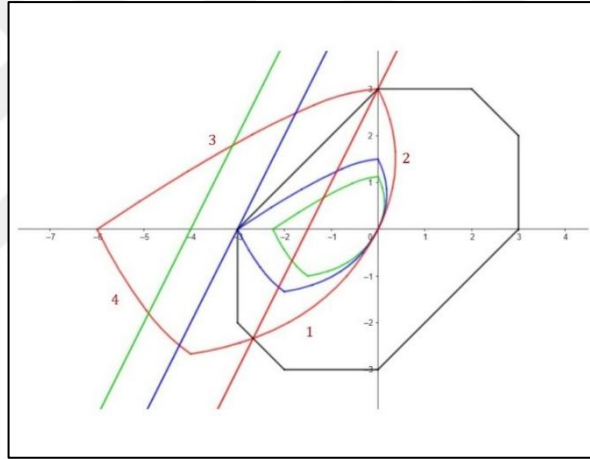
Örnek 6.6: $I_{E_M}(O, 6)$ inversiyonu altında $y - 2x - 3 = 0$, $y - 2x - 6 = 0$ ve $y - 2x - 8 = 0$ doğruların inversleri Şekil 6.8’de gösterilmektedir.

$y - 2x - 3 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $-50x + 25y - 3(x + y)^2 = 0$, $-72x + 36y - 12y^2 = 0$, $-18x + 9y - 3(-x + y)^2 = 0$, $-72x + 36y - 12x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2, 2 ile 3, 3 ile 4 ve 4 ile 1 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 ve 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.

$y - 2x - 6 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $-50x + 25y - 3(x + y)^2 = 0$, $-72x + 36y - 12y^2 = 0$, $-18x + 9y - 3(-x + y)^2 = 0$, $-72x +$

$36y - 12x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2, 2 ile 3, 3 ile 4 ve 4 ile 1 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 ve 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.

$y - 2x - 8 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $-25x + 75y + 3(x + y)^2 = 0$, $-36x + 108y + 12y^2 = 0$, $-9x + 25y + 3(-x + y)^2 = 0$, $-36x + 108y + 12x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 1, 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 1 ile 2, 2 ile 3, 3 ile 4 ve 4 ile 1 parabolleri yani komşu bölgelerdeki paraboller arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır, 1 ile 3 ve 2 ile 4 parabolleri yani dolaylı komşu bölgelerdeki paraboller birbirine ortogondur.



Şekil 6.8. $m = 2$ eğimli doğruların $I_{E_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.

Aşağıdaki örneklerde Teorem 4.2. de ifade edilen durumlar için incelenmektedir; Bu örneklerde inversiyon elipsi odakları $F_1 = (2, 2)$, $F_2 = (-2, -2)$ ve inversiyon sabiti $k = 6$ olan

$$\mathcal{E}_M = \{X = (x, y) \mid d_T(F_1, X) + d_T(F_2, X) = 6\} \quad (6.4)$$

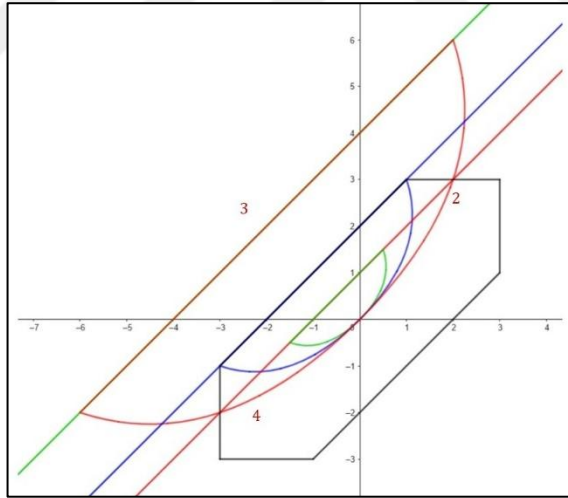
maksimum elipsi alınmıştır.

Örnek 6.7: $I_{E_M}(O, 6)$ inversiyonu altında $y - x - 1 = 0$, $y - x - 2 = 0$ ve $y - x - 4 = 0$ doğruların inversleri Şekil 6.9'da gösterilmektedir.

$y - x - 1 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36y - 36x - 4y^2 = 0$, $4y - 4x - (-x + y)^2$, $36y - 36x - 4x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 3 ile gösterilen parça bir doğru parçası 2 ve 4 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. Dikkat edilirse 2 ve 4 parabolleri ortogonal parabolldir.

$y - x - 2 = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36y - 36x - 8y^2 = 0$, $4y - 4x - 2(-x + y)^2$, $36y - 36x - 8x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 3 ile gösterilen parça bir doğru parçası 2 ve 4 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. Dikkat edilirse 2 ve 4 parabolleri ortogonal parabolldir.

$y - x - 4 = 0$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36y - 36x - 16y^2 = 0$, $4y - 4x - 4(-x + y)^2$, $36y - 36x - 16x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. Dikkat edilirse 2 ve 4 parabolleri ortogonal parabolldir.



Şekil 6. 9. $m = 1$ eğimli doğruların $I_{E_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.

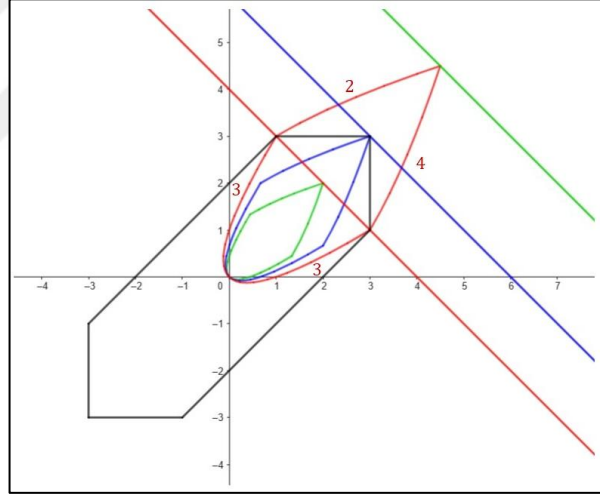
Örnek 6.8: $I_{E_M}(O, 6)$ inversiyonu altında $y + x - 4 = 0$, $y + x - 6 = 0$ ve $y + x - 9 = 0$ doğruların inversleri Şekil 6.10'da gösterilmektedir.

$y + x - 4 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 2,3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36y + 36x - 16y^2 = 0$, $4y + 4x - 4(-x + y)^2$, $36y + 36x - 16x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2, 3 ve 4 ile

isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. Dikkat edilirse 2 ile 3 ve 3 ile 4 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$y + x - 6 = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 2,3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36y + 36x - 24y^2 = 0$, $4y + 4x - 6(-x + y)^2$, $36y + 36x - 24x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2,3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. Dikkat edilirse 2 ile 3 ve 3 ile 4 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

$y + x - 9 = 0$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 2,3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36y + 36x - 36y^2 = 0$, $4y + 4x - 9(-x + y)^2$, $36y + 36x - 36x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2,3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. Dikkat edilirse 2 ile 3 ve 3 ile 4 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır.



Şekil 6. 10. $m = -1$ eğimli doğruların $I_{E_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.

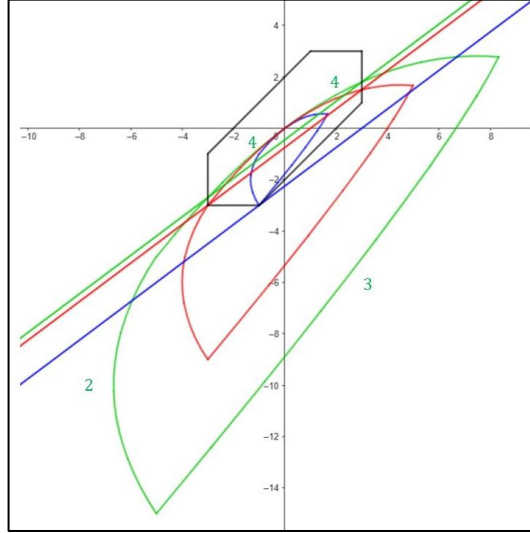
Örnek 6.9: $I_{E_M}(O, 6)$ inversiyonu altında $y - \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} = 0$, $y - \frac{3}{4}x + \frac{9}{4} = 0$ ve $y - \frac{3}{4}x + \frac{9}{20} = 0$ doğruların inversleri Şekil 6.11’de gösterilmektedir.

$y - \frac{3}{4}x + \frac{9}{20} = 0$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 2,3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36y - 27x + \frac{9}{5}y^2 = 0$, $16y - 12x + \frac{9}{5}(-x + y)^2$, $36y - 27x + \frac{9}{5}x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2,3 ve 4 ile

isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 2 ile 3 ve 3 ile 4 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır. Dikkat edilirse 2 ve 3 parabolleri ortogonal parabollerdir.

$y - \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 2,3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36y - 27x + 3y^2 = 0$, $16y - 12x + 3(-x + y)^2$, $36y - 27x + 3x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2,3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 2 ile 3 ve 3 ile 4 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır. Dikkat edilirse 2 ve 3 parabolleri ortogonal parabollerdir.

$y - \frac{3}{4}x + \frac{9}{4} = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 2,3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36y - 27x + 9y^2 = 0$, $16y - 12x + 9(-x + y)^2$, $36y - 27x + 9x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2,3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 2 ile 3 ve 3 ile 4 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır. Dikkat edilirse 2 ve 3 parabolleri ortogonal parabollerdir.



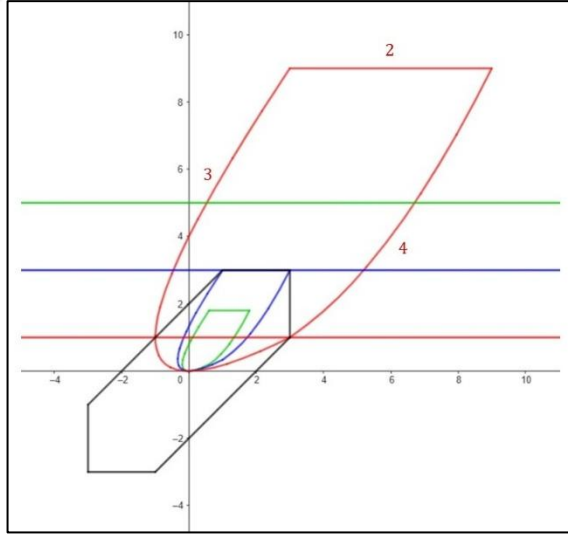
Şekil 6. 11. $m = \frac{3}{4}$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.

Örnek 6.10: $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ inversiyonu altında $y = 1$, $y = 3$ ve $y = 5$ doğruların inversleri Şekil 6.12’de gösterilmektedir

$y = 1$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36y - 4y^2 = 0$, $4y - (-x + y)^2$, $36y - 4x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2 ile gösterilen parça bir doğru parçası 3 ve 4 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. Dikkat edilirse 2 ve 4 parabolleri ortogonal parabolldir.

$y = 3$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36y - 12y^2 = 0$, $4y - 3(-x + y)^2$, $36y - 12x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2 ile gösterilen parça bir doğru parçası 3 ve 4 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. Dikkat edilirse 2 ve 4 parabolldir ortogonal parabolldir.

$y = 5$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36y - 20y^2 = 0$, $4y - 5(-x + y)^2$, $36y - 20x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2 ile gösterilen parça bir doğru parçası 3 ve 4 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. Dikkat edilirse 2 ve 4 parabolldir ortogonal parabolldir.



Şekil 6. 12. $m = 0$ eğimli doğruların $I_{E_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.

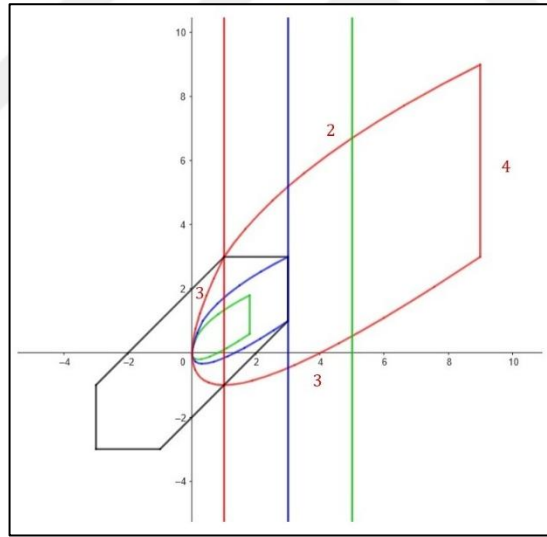
Örnek 6.11: $I_{E_M}(O, 6)$ inversiyonu altında $x = 1$, $x = 3$ ve $x = 5$ doğruların inversleri Şekil 6.13’de gösterilmektedir.

$x = 1$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36x - 4y^2 = 0$, $4x - (-x + y)^2$,

$36x - 4x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 4 ile gösterilen parça bir doğru parçası 2 ve 3 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. Dikkat edilirse 2 ve 4 parabolleri ortogonal parabolldir.

$x = 3$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36x - 12y^2 = 0$, $4x - 3(-x + y)^2$, $36x - 12x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 4 ile gösterilen parça bir doğru parçası 2 ve 3 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. Dikkat edilirse 2 ve 4 parabolleri ortogonal parabolldir.

$x = 5$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $36x - 20y^2 = 0$, $4x - 5(-x + y)^2$, $36x - 20x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 4 ile gösterilen parça bir doğru parçası 2 ve 3 ile gösterilenler ise parabol yaylarıdır. Dikkat edilirse 2 ve 4 parabolleri ortogonal parabolldir.



Şekil 6.13. $m = \infty$ eğimli doğruların $I_{E_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.

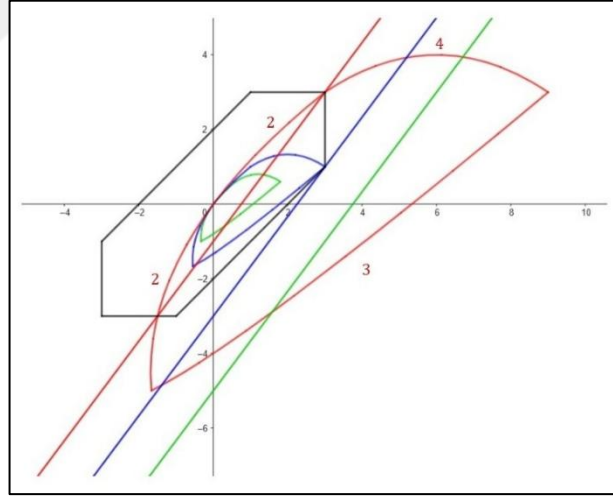
Örnek 6.12: $I_{E_M}(O, 6)$ inversiyonu altında $-4x + 3y + 3 = 0$, $-4x + 3y + 9 = 0$, ve $-4x + 3y + 15 = 0$ doğruların inversleri Şekil 6.14'de gösterilmektedir.

$-4x + 3y + 3 = 0$ doğrusu kırmızı doğru olup inversi de kırmızı ile çizilmiş kapalı eğridir. 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $108y - 144x + 12y^2 = 0$, $12y - 16x + 3(-x + y)^2$, $108y - 144x + 12x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 2 ile 3 ve 3 ile 4 parabolleri

arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır. Dikkat edilirse 2 ve 3 parabolleri ortogonal parabollerdir.

$-4x + 3y + 9 = 0$ doğrusu mavi doğru olup inversi de mavi ile çizilmiş kapalı eğridir. 2,3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $108y - 144x + 36y^2 = 0$, $12y - 16x + 9(-x + y)^2$, $108y - 144x + 36x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 2 ile 3 ve 3 ile 4 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır. Dikkat edilirse 2 ve 3 parabolleri ortogonal parabollerdir.

$-4x + 3y + 15 = 0$ doğrusu yeşil doğru olup inversi de yeşil ile çizilmiş kapalı eğridir. 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları sırasıyla $108y - 144x + 60y^2 = 0$, $12y - 16x + 15(-x + y)^2$, $108y - 144x + 60x^2 = 0$ denklemlerine sahiptir. 2, 3 ve 4 ile isimlendirilmiş konik parçaları parabol yaylarıdır. 2 ile 3 ve 3 ile 4 parabolleri arasındaki açılar $\frac{\pi}{4}$ radyandır. Dikkat edilirse 2 ve 3 parabolleri ortogonal parabollerdir.



Şekil 6. 14. $m = \frac{4}{3}$ eğimli doğruların $I_{\mathcal{E}_M}(O, 6)$ altındaki inversleri.

7. $\mathbb{R}_M^2$ VE $\mathbb{R}_T^2$ DE ÇAPRAZ ORAN, HARMONİK EŞLENİK VE ELİPTİK İNVERSİYONLA İLİŞKİLERİ

Maksimum düzleminde eliptik inversiyonlar altında uzaklık değişmez değildir. Bu sebeple maksimum düzleminde inversiyon bir izometri değildir. Ancak inversiyon altında çapraz oranın belli durumlarda korunuyor olması çapraz oran kavramına uzaklığın değişmesi durumunda da odaklanmanın gerekliliğini ortaya koymaktadır. Dolayısıyla bu bölümde çapraz ve harmonik eşlenik kavramları $\mathbb{R}_M^2$ ve $\mathbb{R}_T^2$ de tanımlanmış ve eliptik inversiyon ile aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu bölüm boyunca $d_{\Delta_i} = \{d_{\Delta_1} = d_M, d_{\Delta_2} = d_T\}$, $i = 1, 2$ olarak alınacaktır.

Tanım 7.1: Yönlendirilmiş bir l doğrusu üzerindeki herhangi iki nokta P_1 ve P_2 olmak üzere $\overline{P_1P_2}$ doğru parçasının yönlendirilmiş maksimum veya taksi uzunluğu $d_{\Delta_i}[P_1, P_2]$ ile gösterilir. $\overline{P_1P_2}$ doğru parçasını l ile aynı yöne sahipse $d_{\Delta_i}[P_1, P_2] = d_{\Delta_i}(P_1, P_2)$ aksi halde $d_{\Delta_i}[P_1, P_2] = -d_{\Delta_i}(P_1, P_2)$ dir.

Tanım 7.2: P_1, P_2, P_3 ve P_4 , $\mathbb{R}_M^2$ ve $\mathbb{R}_T^2$ deki yönlendirilmiş bir doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. Maksimum ve taksi çapraz oranı

$$(P_1P_2, P_3P_4)_{\Delta_i} = \frac{d_{\Delta_i}(P_1, P_3)d_{\Delta_i}(P_2, P_4)}{d_{\Delta_i}(P_1, P_4)d_{\Delta_i}(P_2, P_3)} \quad (7.1)$$

biçimindedir.

Sonuç 7.1: P_1, P_2, P_3 ve P_4 , $\mathbb{R}_M^2$ ve $\mathbb{R}_T^2$ deki yönlendirilmiş bir doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. $(P_1P_2, P_3P_4)_{\Delta_i}$, hem P_3 hem de P_4 , P_1 ile P_2 arasındaysa veya P_3 ile P_4 ün hiçbirisi P_1 ve P_2 nin arasında değilse pozitifdir.

İspat: Hem P_3 hem de P_4 , P_1 ile P_2 noktaları arasında olsun. Yönlendirilmiş $\overline{P_1P_2}$ doğru parçası için

$$(P_1P_2, P_3P_4)_{\Delta_i} = \frac{d_{\Delta_i}(P_1, P_3)d_{\Delta_i}(P_2, P_4)}{d_{\Delta_i}(P_1, P_4)d_{\Delta_i}(P_2, P_3)} \quad (7.2)$$

olup

$$(P_1P_2, P_3P_4)_{\Delta_i} = \frac{d_{\Delta_i}(P_1, P_3) \left(-d_{\Delta_i}(P_2, P_4) \right)}{d_{\Delta_i}(P_1, P_4) \left(-d_{\Delta_i}(P_2, P_3) \right)} = \frac{d_{\Delta_i}(P_1, P_3)d_{\Delta_i}(P_2, P_4)}{d_{\Delta_i}(P_1, P_4)d_{\Delta_i}(P_2, P_3)} \quad (7.3)$$

elde edilir, dolayısıyla $(P_1P_2, P_3P_4)_{\Delta_i}$ pozitifdir. P_3 ile P_4 ün hiçbirisi P_1 ve P_2 nin arasında değilse bu durumda oluşabilecek altı farklı sıralama vardır. Tüm olası sıralamaların ispatı benzer şekilde yapılacağından $P_3 - P_1 - P_2 - P_4$ yöneliminin ispatını veriyoruz. Bu durumda

$$\begin{aligned} (P_1P_2, P_3P_4)_{\Delta_i} &= \frac{d_{\Delta_i}(P_1, P_3)d_{\Delta_i}(P_2, P_4)}{d_{\Delta_i}(P_1, P_4)d_{\Delta_i}(P_2, P_3)} = \frac{-d_{\Delta_i}(P_1, P_3)d_{\Delta_i}(P_2, P_4)}{d_{\Delta_i}(P_1, P_4) \left(-d_{\Delta_i}(P_2, P_3) \right)} \\ &= \frac{d_{\Delta_i}(P_1, P_3)d_{\Delta_i}(P_2, P_4)}{d_{\Delta_i}(P_1, P_4)d_{\Delta_i}(P_2, P_3)} \end{aligned} \quad (7.4)$$

elde edilir, dolayısıyla $(P_1P_2, P_3P_4)_{\Delta_i}$ pozitifdir.

Sonuç 7.2: P_1, P_2, P_3 ve P_4 , $\mathbb{R}_M^2$ ve $\mathbb{R}_T^2$ deki yönlendirilmiş bir doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. $\{P_1P_2\}$ ve $\{P_3P_4\}$ nokta çiftleri birbirini , $(P_1P_2, P_3P_4)_{\Delta_i}$ negatiftir.

İspat: $\{P_1P_2\}$ ve $\{P_3P_4\}$ nokta çiftlerinin birbirini ayırması durumunda P_3 ve P_4 için dört farklı sıralama vardır. Tüm sıralamalardaki ispatlar benzer olduğundan yalnızca $P_3 - P_1 - P_2 - P_4$ oryantasyonu için inceleme yapılacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} (P_1P_2, P_3P_4)_{\Delta_i} &= \frac{d_{\Delta_i}(P_1, P_3)d_{\Delta_i}(P_2, P_4)}{d_{\Delta_i}(P_1, P_4)d_{\Delta_i}(P_2, P_3)} = \frac{\left(-d_{\Delta_i}(P_1, P_3) \right) \left(-d_{\Delta_i}(P_2, P_4) \right)}{d_{\Delta_i}(P_1, P_4) \left(-d_{\Delta_i}(P_2, P_3) \right)} \\ &= -\frac{d_{\Delta_i}(P_1, P_3)d_{\Delta_i}(P_2, P_4)}{d_{\Delta_i}(P_1, P_4)d_{\Delta_i}(P_2, P_3)} \end{aligned} \quad (7.5)$$

olup sonuç negatiftir.

Önerme 7.1: $\mathcal{E}_{\Delta_i}$, merkezi $O = (a, b)$ odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$ ve sabiti k olan bir maksimum inversiyon elipsi olsun. O , P_1 ve P_2 $\mathbb{R}_{\Delta_i}^2$, $i = 1, 2$ de herhangi doğrudaş üç nokta ve P_1, P_1' ile P_2, P_2' $I_{\mathcal{E}_{\Delta_i}}(O, k)$ ya göre invers nokta çiftleri olsunlar, bu durumda

$$d_{\Delta_i}(P'_1, P'_2) = \frac{[d_{\Delta_i}(O, Q)]^2 d_{\Delta_i}(P_1, P_2)}{d_{\Delta_i}(O, P_1) d_{\Delta_i}(O, P_2)} \quad (7.6)$$

dır, burada $Q, \overrightarrow{OP_1}$ ışını ile $\mathcal{E}_{\Delta_i}$ elipsinin kesişim noktası, $m, \overrightarrow{OP_1}$ ışınının eğimi ve

$$d_{\Delta_1}(O, Q) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{|k + x_1 + x_2|}{2} \max\{1, |m|\}, \\ \frac{-k + x_1 - x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} < m < \frac{k - x_1 + x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} \text{ ise} \\ \frac{|k + x_2 + y_1|}{|1 + m|} \max\{1, |m|\}, \\ \frac{k - x_1 + x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} < m < \frac{k + y_1 + y_2}{k + 2x_2 + y_1 - y_2} \text{ ise} \\ \frac{|k + y_1 + y_2|}{2} \max\left\{\frac{1}{|m|}, |m|\right\}, \\ \frac{k + y_1 + y_2}{k + 2x_2 + y_1 - y_2} < m < \frac{k + y_1 + y_2}{-k + 2x_1 + y_1 - y_2} \text{ ise} \\ \frac{|k - x_1 + y_2|}{|-1 + m|} \max\{1, |m|\}, \\ m < \frac{-k + x_1 - x_2 + 2y_1}{k + x_1 + x_2} \text{ veya } \frac{k + y_1 + y_2}{-k + 2x_1 + y_1 - y_2} < m \text{ ise} \end{array} \right\} \quad (7.7)$$

dir.

$$d_{\Delta_2}(O, Q) = \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{k}{2(1 + m)} \right| (1 + |m|), \\ \left| \frac{2(y_1 - b)}{k - 2(y_1 - b)} \right| < m < \left| \frac{k - 2(x_1 - a)}{2(x_1 - a)} \right| \text{ ise} \\ \left| \frac{k - 2(x_1 - a)}{2m} \right| (1 + |m|), \left| \frac{k - 2(x_1 - a)}{2(x_1 - a)} \right| < |m| \text{ ise} \\ \left| \frac{k}{2(m - 1)} \right| (1 + |m|), \\ - \left| \frac{k - 2(x_1 - a)}{2(x_1 - a)} \right| < m < \left| \frac{2(y_1 - b)}{k - 2(y_1 - b)} \right| \text{ ise} \\ \left| \frac{k - 2(y_1 - b)}{2} \right| (1 + |m|), \quad m < \left| \frac{2(y_1 - b)}{k - 2(y_1 - b)} \right| \text{ ise} \end{array} \right\} \quad (7.8)$$

dir.

Dikkat edilirse O , P_1 ve P_2 doğrudan noktalar değilse Önerme 7.1'deki eşitlik $\mathbb{R}_{\Delta_i}^2$ deki her nokta için geçerli değildir. Ancak sıradaki iki önerme ile Önerme 7.1'deki eşitliğin noktalar doğrudan olmasa bile geçerli olduğu bazı durumlar verilmektedir.

İspat: $d_M(O, Q)$ yu hesaplamak için 4 durum incelenmektedir. $P \in B_{23}^+ \cup B_{23}^-$ ise Q noktası $y = mx$ ile $x + y = k + x_2 + y_1$ doğrularının kesişimi olup $Q = \left(\frac{(k+x_2+y_1)x}{x+y}, \frac{(k+x_2+y_1)y}{x+y} \right)$ ve böylece $d_M(O, Q) = \frac{|k+x_2+y_1|}{|1+m|} \max\{1, |m|\}$ dir. $P \in B_{34}^+ \cup B_{34}^-$ ise Q noktası $y = mx$ ile $y = \frac{k+y_1+y_2}{2}$ doğrularının arakesiti olup $Q = \left(\frac{(k+y_1+y_2)x}{2y}, \frac{(k+y_1+y_2)}{2} \right)$ ve böylece $d_M(O, Q) = \frac{|k+y_1+y_2|}{2} \max\left\{\frac{1}{|m|}, |m|\right\}$ dir. $P \in B_{41}^+ \cup B_{41}^-$ ise Q noktası $y = mx$ ile $-x + y = k - x_1 + y_2$ doğrularının kesişimi olup $Q = \left(\frac{(k-x_1+y_2)x}{-x+y}, \frac{(k-x_1+y_2)y}{-x+y} \right)$ ve böylece $d_M(O, Q) = \frac{|k-x_1+y_2|}{|-1+m|} \max\{1, |m|\}$ dir. $P \in B_{12}^+ \cup B_{12}^-$ Q noktası $y = mx$ ile $x = \frac{k+x_1+x_2}{2}$ doğrularının kesişimi olup $Q = \left(\frac{k+x_1+x_2}{2}, \frac{y(k+x_1+x_2)}{2x} \right)$ biçiminde olup $d_M(O, Q) = \frac{|k+x_1+x_2|}{2} \max\{1, |m|\}$ dir.

$d_T(O, Q)$ nun hesabı da $d_M(O, Q)$ nun hesaplanmasına benzerdir. Şimdi O , P_1 ve P_2 doğrudan olduklarını ve P'_1 ile P'_2 nün sırasıyla P_1 ve P_2 nin inversleri olduklarını varsayalım. Tanım 5.3.1'den $d_{\Delta_i}(O, P_1) \cdot d_{\Delta_i}(O, P'_1) = [d_{\Delta_i}(O, Q)]^2 = d_{\Delta_i}(O, P_2) \cdot d_{\Delta_i}(O, P'_2)$ dir böylece Sonuç 5.1.2'den

$$\begin{aligned} d_{\Delta_i}(P'_1, P'_2) &= |d_{\Delta_i}(O, P'_1) - d_{\Delta_i}(O, P'_2)| \\ &= \frac{[d_{\Delta_i}(O, Q)]^2}{d_{\Delta_i}(O, P'_1)} - \frac{[d_{\Delta_i}(O, Q)]^2}{d_{\Delta_i}(O, P'_2)} \\ &= \frac{[d_{\Delta_i}(O, Q)]^2 d_{\Delta_i}(P_1, P_2)}{d_{\Delta_i}(O, P_1) d_{\Delta_i}(O, P_2)} \end{aligned} \quad (7.9)$$

elde edilir.

Önerme 7.2: O , P_1 ve P_2 , $\mathbb{R}_{\Delta_i}^2$, $i = 1, 2$, deki farklı, doğrudan olmayan üç nokta, P'_1 ile $P'_2 \in I_{\varepsilon_{\Delta_i}}(O, k)$ ya göre sırasıyla P_1 ve P_2 nin inversi noktaları olsunlar ve $m_{\overrightarrow{(OP_1)}_{\Delta_i}}$ ile $m_{\overrightarrow{(OP_2)}_{\Delta_i}}$ de $\mathbb{R}_{\Delta_i}^2$ de sırasıyla $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ ışınlarının eğimlerini gösterebilirsin. $M_{1\Delta_1} =$

$\left\{m: \frac{k+y_1+y_2}{k+2x_2+y_1-y_2} < m < \frac{k+y_1+y_2}{-k+2x_1+y_1-y_2}\right\}, \quad M_{1\Delta_2} = \left\{m: \frac{-k+x_1-x_2+2y_1}{k+x_1+x_2} < m < \frac{k-x_1+x_2+2y_1}{k+x_1+x_2}\right\},$
 $M_{2\Delta_1} = \left\{m: \left|\frac{k-2(x_1-a)}{2(x_1-a)}\right| < |m|\right\}$ ve $M_{2\Delta_2} = \left\{m: m < \left|\frac{2(y_1-b)}{k-2(y_1-b)}\right|\right\}$
 olmak üzere $m_{\overrightarrow{(OP_1)_{\Delta_i}}}, m_{\overrightarrow{(OP_2)_{\Delta_i}}} \in M_{1\Delta_i}, i = 1, 2$ ve P_1 ile P_2 eğimi 0 olan bir doğru
 üzerindeyse veya $m_{\overrightarrow{(OP_1)_{\Delta_i}}}, m_{\overrightarrow{(OP_2)_{\Delta_i}}} \in M_{2\Delta_i}, i = 1, 2$ ve P_1 ile P_2 eğimi ∞ olan bir
 doğru üzerindeyse

$$d_{\Delta_i}(P'_1, P'_2) = \frac{d_{\Delta_i}(O, Q_1)d_{\Delta_i}(O, Q_2)d_{\Delta_i}(P_1, P_2)}{d_{\Delta_i}(O, P_1)d_{\Delta_i}(O, P_2)} \quad (7.10)$$

dir. Burada $\mathcal{E}_{\Delta_i}$ elipslerinin odakları $F_1 = (x_1, y_1)$ ve $F_2 = (x_2, y_2)$, merkezi $O = (a, b)$ ve sabiti k dır.

İspat: $m_{\overrightarrow{(OP_1)_{\Delta_i}}}$ ile $m_{\overrightarrow{(OP_2)_{\Delta_i}}} \in M_{1\Delta_i}, i = 1, 2$ olsun. $P_1 = (x_3, y_0)$ ve $P_2 = (x_4, y_0)$
 noktalarının $\mathbb{R}_{\Delta_2}^2$ deki inversleri sırasıyla $P'_1 = \left(a + \frac{(k-2x_1-2a)^2(x_3-a)}{4(y_0-b)^2}, b + \frac{(k-2x_1-2a)^2}{4(y_0-b)}\right)$ ve $P'_2 = \left(a + \frac{(k-2x_1-2a)^2(x_4-a)}{4(y_0-b)^2}, b + \frac{(k-2x_1-2a)^2}{4(y_0-b)}\right)$ ve $\mathbb{R}_{\Delta_1}^2$ deki inversleri
 sırasıyla $P'_1 = \left(a + \frac{(k+y_1+y_2-2b)^2(x_3-a)}{4(y_0-b)^2}, b + \frac{(k+y_1+y_2-2b)^2}{4(y_0-b)}\right)$ ve $P'_2 = \left(a + \frac{(k+y_1+y_2-2b)^2(x_4-a)}{4(y_0-b)^2}, b + \frac{(k+y_1+y_2-2b)^2}{4(y_0-b)}\right)$ dır. Benzer şekilde $m_{\overrightarrow{(OP_1)_{\Delta_i}}}$ ile $m_{\overrightarrow{(OP_2)_{\Delta_i}}} \in M_{2\Delta_i}, i = 1, 2$ olsun. Bu durumda noktalarının $\mathbb{R}_{\Delta_2}^2$ deki inversleri sırasıyla $P'_1 = \left(a + \frac{(k-2y_1+2b)^2}{4(x_0-a)}, b + \frac{(k-2y_1+2b)^2(y_3-b)}{4(x_0-a)^2}\right)$ and $P'_2 = \left(a + \frac{(k-2y_1+2b)^2}{4(x_0-a)}, b + \frac{(k-2y_1+2b)^2(y_4-b)}{4(x_0-a)^2}\right)$ ve $\mathbb{R}_{\Delta_1}^2$ deki inversleri sırasıyla $P'_1 = \left(a + \frac{(k+x_1+x_2-2a)^2}{4(x_0-a)}, b + \frac{(k+x_1+x_2-2a)^2(y_3-b)}{4(x_0-a)^2}\right)$ and $P'_2 = \left(a + \frac{(k+x_1+x_2-2a)^2}{4(x_0-a)}, b + \frac{(k+x_1+x_2-2a)^2(y_4-b)}{4(x_0-a)^2}\right)$ dir.

Böylece gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$d_{\Delta_i}(P'_1, P'_2) = \frac{d_{\Delta_i}(O, Q_1)d_{\Delta_i}(O, Q_2)d_{\Delta_i}(P_1, P_2)}{d_{\Delta_i}(O, P_1)d_{\Delta_i}(O, P_2)} \quad (7.11)$$

elde edilir.

Önerme 7.3: O, P_1 ve $P_2, \mathbb{R}_M^2$ de farklı, doğrudan olmayan üç nokta ve P'_1 ile P'_2
 $I_{\mathcal{E}_M}(O, k)$ ya göre sırasıyla P_1 ve P_2 nin inversleri olsunlar. $m_{\overrightarrow{OP_1}}$ ve $m_{\overrightarrow{OP_2}}$ sırasıyla

$\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ ışınlarının eğimlerini gösterebiliriz. $m_{\overrightarrow{OP_1}}, m_{\overrightarrow{OP_2}} \in \left\{m: m < \frac{-k+x_1-x_2+2y_1}{k+x_1+x_2} \text{ veya } \frac{k+y_1+y_2}{-k+2x_1+y_1-y_2} < m\right\}$ ve P_1 ile P_2 eğimi 1 olan bir doğru üzerinde iseler ya da $m_{\overrightarrow{OP_1}}, m_{\overrightarrow{OP_2}} \in \left\{m: \frac{k-x_1+x_2+2y_1}{k+x_1+x_2} < m < \frac{k+y_1+y_2}{k+2x_2+y_1-y_2}\right\}$ ve P_1 ile P_2 eğimi -1 olan bir doğru üzerinde iseler, bu durumda $Q_1, \overrightarrow{OP_1}$ ışını ile $\mathcal{E}_M$ elipsinin kesişim noktası ve $Q_2, \overrightarrow{OP_2}$ ışını ile $\mathcal{E}_M$ elipsinin kesişim noktası olmak üzere

$$d_M(P'_1, P'_2) = \frac{d_M(O, Q_1)d_M(O, Q_2)d_M(P_1, P_2)}{d_M(O, P_1)d_M(O, P_2)} \quad (7.12)$$

dir.

İspat: Dikkat edilirse $m_{\overrightarrow{OP_1}}, m_{\overrightarrow{OP_2}} \in \left\{\frac{k-x_1+x_2+2y_1}{k+x_1+x_2} < m < \frac{k+y_1+y_2}{k+2x_2+y_1-y_2}\right\}$ ise $P_1 = (x_0, y_0)$ ve $P_2 = (y_0, x_0)$ sırasıyla $P'_1 = \left(a + \frac{(k+x_2-a+y_1-b)^2(x_0-a)}{(x_0-a+y_0-b)^2}, b + \frac{(k+x_2-a+y_1-b)^2(y_0-b)}{(x_0-a+y_0-b)^2}\right)$ ve $P'_2 = \left(a + \frac{(k+x_2-a+y_1-b)^2(y_0-a)}{(y_0-a+x_0-b)^2}, b + \frac{(k+x_2-a+y_1-b)^2(x_0-b)}{(y_0-a+x_0-b)^2}\right)$ eşlenirler. Benzer şekilde $m_{\overrightarrow{OP_1}}$ ve $m_{\overrightarrow{OP_2}} \in \left\{m < \frac{-k+x_1-x_2+2y_1}{k+x_1+x_2} \text{ veya } \frac{k+y_1+y_2}{-k+2x_1+y_1-y_2} < m\right\}$ ise $P_1 = (x_3, y_3)$ ve $P_2 = (-y_3, -x_3)$ sırasıyla $P'_1 = \left(a + \frac{(k-x_1+a+y_2-b)^2(x_3-a)}{(-x_3+a+y_3-b)^2}, b + \frac{(k-x_1+a+y_2-b)^2(y_3-b)}{(-x_3+a+y_3-b)^2}\right)$ ve $P'_2 = \left(a + \frac{(k-x_1+a+y_2-b)^2(-y_3-a)}{(y_3+a-x_3-b)^2}, b + \frac{(k-x_1+a+y_2-b)^2(-x_3-b)}{(y_3+a-x_3-b)^2}\right)$ eşlenirler. Böylece gerekli hesaplamalar yapılarak

$$d_M(P'_1, P'_2) = \frac{d_M(O, Q_1)d_M(O, Q_2)d_M(P_1, P_2)}{d_M(O, P_1)d_M(O, P_2)} \quad (7.13)$$

elde edilir.

Teorem 7.1: $\mathbb{R}_{\Delta_i}^2$ de maksimum ve taksi inversiyonu altında değişmezdir.

İspat: $I_{\mathcal{E}_{\Delta_i}}(O, k)$, merkezi O ve yarıçapı r olan maksimum veya taksi inversiyonu ve P_1, P_2, P_3 ve P_4 , O dan geçen yönlendirilmiş bir doğru l üzerinde dört nokta olsun. P'_1, P'_2, P'_3 ve P'_4 sırasıyla $I_{\mathcal{E}}(O, k)$ altında P_1, P_2, P_3 ve P_4 nin invers noktaları olsunlar.

Dikkat edilirse maksimum ve taksi inversiyonu, $\{P_1, P_2\}$ ve $\{P_3, P_4\}$ nokta çiftlerinin ayrılmasını veya ayrılmamasını korumaktadır ve ayrıca maksimum ve taksi inversiyonları P noktasından Q noktasına bir l doğrusu boyunca maksimum ve taksi yönlü uzaklığını inversiyonunu gözlemleyin. Q' noktasından P' noktasına yönlü uzaklığını l doğrusu boyunca Q' noktasından P' noktasına maksimum veya taksi yönlü uzaklığına çevirir. Böylece Önerme 7.1 den

$$\begin{aligned}
(P_1'P_2', P_3'P_4')_{\Delta_i} &= \frac{d_{\Delta_i}[P_1', P_3'] \cdot d_{\Delta_i}[P_2', P_4']}{d_{\Delta_i}[P_1', P_4'] \cdot d_{\Delta_i}[P_2', P_3']} \\
&= \frac{\frac{[d_{\Delta_i}(O, Q)]^2 d_{\Delta_i}(P_1, P_3)}{d_{\Delta_i}(O, P_1) d_{\Delta_i}(O, P_3)} \cdot \frac{[d_{\Delta_i}(O, Q)]^2 d_{\Delta_i}(P_2, P_4)}{d_{\Delta_i}(O, P_2) d_{\Delta_i}(O, P_4)}}{\frac{[d_{\Delta_i}(O, Q)]^2 d_{\Delta_i}(P_1, P_4)}{d_{\Delta_i}(O, P_1) d_{\Delta_i}(O, P_4)} \cdot \frac{[d_{\Delta_i}(O, Q)]^2 d_{\Delta_i}(P_2, P_3)}{d_{\Delta_i}(O, P_2) d_{\Delta_i}(O, P_3)}} \\
&= \frac{d_{\Delta_i}(P_1, P_3) d_{\Delta_i}(P_2, P_4)}{d_{\Delta_i}(P_1, P_4) d_{\Delta_i}(P_2, P_3)} \\
&= (P_1P_2, P_3P_4)_{\Delta_i}
\end{aligned} \tag{7.14}$$

elde edilir.

$\mathbb{R}_{\Delta_i}^2$, $i = 1, 2$, de l bir doğru olsun. P_1, P_2, P_3 ve P_4 nin l üzerinde dört nokta olduğunu varsayalım.

$(P_1P_2, P_3P_4)_{\Delta_i} = -1$ ise P_1, P_2, P_3 ve P_4 bir harmonik küme oluşturur denir ve $H(P_1P_2, P_3P_4)_{\Delta_i}$ ile gösterilir. Yani l üzerindeki herhangi bir P_3 ve P_4 çifti

$$\frac{d_{\Delta_i}[P_1, P_3] d_{\Delta_i}[P_2, P_4]}{d_{\Delta_i}[P_1, P_4] d_{\Delta_i}[P_2, P_3]} = -1 \tag{7.15}$$

ise P_1 ve P_2 yi harmonik olarak böldüğü söylenir. P_3 ve P_4 noktaları, P_1 ve P_2 a göre maksimum veya taksi harmonik eşlenikler olarak adlandırılır.

Teorem 7.2: $\mathcal{E}_{\Delta_i}$, $i = 1, 2$, merkezi O olan bir maksimum veya taksi elipsi olmak üzere P_1 ve P_2 , $\mathcal{E}_{\Delta_i}$ $i = 1, 2$, üzerindeki noktalar olacak şekilde O , P_1 ve P_2 , $\mathbb{R}_{\Delta_i}^2$ de doğrudaş noktaları verilsin. P_3 ve P_4 , $[P_1P_2]$ doğru parçasını içerden ve dışardan bölecek

biçimde $\overrightarrow{OP_1}$ ışını üzerindeki farklı noktalar olsunlar. Böylece P_3 ve P_4 ün P_1 ve P_2 nin maksimum ve taksi harmonik eşlenikleri olması için gerek ve yeter koşul P_3 ve P_4 ün $I_{\varepsilon_{\Delta_i}}(O, k)$ inversiyonuna göre invers noktalar olmalarıdır.

İspat: P_3 ve P_4 , P_1 ve P_2 ya göre maksimum ve taksi harmonik eşleniği olsun. Bu durumda

$$(P_1P_2, P_3P_4)_{\Delta_i} = -1 \Rightarrow \frac{d_{\Delta_i}[P_1, P_3]d_{\Delta_i}[P_2, P_4]}{d_{\Delta_i}[P_1, P_4]d_{\Delta_i}[P_2, P_3]} = -1 \quad (7.16)$$

dır. P_3 , $\overline{PQ}$ doğru parçasını içerden böldüğünden ve P_3 , $\overrightarrow{OQ}$ ışını üzerinde olduğundan $d_{\Delta_i}(O, Q) = d_{\Delta_i}(O, P_1) = d_{\Delta_i}(O, P_2)$ olduğundan

$d_{\Delta_i}(P_3, P_2) = d_{\Delta_i}(O, Q) - d_{\Delta_i}(O, P_3)$ ve $d_{\Delta_i}(P_1, P_3) = d_{\Delta_i}(O, Q) + d_{\Delta_i}(O, P_3)$ dır.

P_4 , $\overline{PQ}$ doğru parçasını dışardan böldüğünden, P_4 $\overrightarrow{OQ}$ ışını üzerinde olduğundan ve $d_{\Delta_i}(O, Q) = d_{\Delta_i}(O, P_1) = d_{\Delta_i}(O, P_2)$ olup

$d_{\Delta_i}(P_1, P_4) = d_{\Delta_i}(O, Q) + d_{\Delta_i}(O, P_4)$ ve $d_{\Delta_i}(P_2, P_4) = d_{\Delta_i}(O, Q) - d_{\Delta_i}(O, P_3)$ dır. Böylece

$$\frac{(d_{\Delta_i}(O, Q) + d_{\Delta_i}(O, P_3))(d_{\Delta_i}(O, Q) - d_{\Delta_i}(O, P_4))}{(d_{\Delta_i}(O, Q) + d_{\Delta_i}(O, P_4))(d_{\Delta_i}(O, Q) - d_{\Delta_i}(O, P_3))} = -1 \quad (7.17)$$

elde edilir ki

$$\begin{aligned} & (d_{\Delta_i}(O, Q) + d_{\Delta_i}(O, P_3))(d_{\Delta_i}(O, Q) - d_{\Delta_i}(O, P_4)) \\ &= (d_{\Delta_i}(O, Q) + d_{\Delta_i}(O, P_4))(d_{\Delta_i}(O, P_3) - d_{\Delta_i}(O, Q)) (P_1P_2, P_3P_4)_{\Delta_i} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{d_{\Delta_i}[P_1, P_3]d_{\Delta_i}[P_2, P_4]}{d_{\Delta_i}[P_1, P_4]d_{\Delta_i}[P_2, P_3]} = -1 \end{aligned} \quad (7.18)$$

demektir. Son eşitlik sadeleştirilirse $d_{\Delta_i}(O, P_3) \cdot d_{\Delta_i}(O, P_4) = (d_{\Delta_i}(O, Q))^2$ elde edilir.

Yani P_3 ve P_4 $I_{\varepsilon_{\Delta_i}}(O, k)$ maximum ve taksi inversiyonuna göre maksimum veya taksi

eliptik inversi noktalarıdır. Diğer koşul için (P_4 ve P_3 ün $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerinde olması) $\overrightarrow{OP}$ de benzer hesaplamalarla aynı sonuç elde edilir.

Tersine eğer P_3 ve P_4 , $I_{\mathcal{E}_{\Delta_i}}(O, k)$ maximum ve taksi inversiyonuna göre inversi noktalarsa, ispat benzerdir.



8. SONUÇ VE ÖNERİLER

İnversiyon zorlayıcı birçok problem ortaya koymasının yanında birçok karmaşık problemin çözümünü kolaylaştırmasıyla geometride oldukça ilgi çekici ve güncelliğini koruyan bir dönüşümdür.

Bu çalışmada Öklid dışı geometrilere örnek teşkil eden, Minkowski tipi geometriler olan, l_1 ve l_∞ -normla döşenmiş düzlemlerde yani taksi ve maksimum geometrilerde çembere göre inversiyonun bir genellemesi olan elipse göre inversiyonlar incelenmiştir. İlk üç bölümde konunun daha iyi anlaşılabilmesi için problemin ortaya çıkışından bahsedilmiş, gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde taksi eliptik inversiyonlar altında doğruların inversleri detaylı olarak incelenmiştir. Beşinci bölümde maksimum eliptik inversiyonlar ilk olarak tanımlanıp temel özellikleri verilmiştir. Altıncı bölümde maksimum eliptik inversiyonlar altında doğruların inversleri, doğrular sınıflandırılarak incelenmiştir. Son olarak yedinci bölümde çapraz oran ve harmonik eşlenikler taksi ve maksimum eliptik inversiyonlar altında çalışılmıştır.

Sonuç olarak bu tez çalışması minkowski tipi geometrilerde çembere göre inversiyonun bir genellemesini (eliptik inversiyonu) ve özelliklerini invers geometri literatürüne sunmaktadır ve bu tip geometriler üzerinde çalışacak matematikçilere çalışmalarında ışık tutacak olup, başka koniklere göre inversiyonların bulunması açık bir problem olarak durmaktadır.

KAYNAKLAR

- Arslaner, R., Mayıs 2011. Analitik geometri, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- Bayar, A. ve Ekmekçi, S., 2014. On circular versions in taxicab plane, Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, 6, 4, 33-39.
- Blair, D. E., 2000. Inversion Theory ve Conformal Mapping, Student Mathematic Library, 9.
- Bozan, E., 2019. Çember ve kürede evirtimin uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.
- Can, Z., 2022. On spherical inversions in three dimensional tetrakis hexahedron space, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 38, 1, 100-108.
- Can, Z., 2024. Elliptic inversions in taxicab geometry. Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 24, 2, 266-272.
- Can, Z. ve Aygün, E. 2024. Elliptic inversion in l_{∞} – plane. International Journal of Geometry, 4, 84-95.
- Childress, N., 1964. Inversion with respect to the central conics, Mathematics Magazine, 38, 3, 147-149.
- Cırık, Y. ve Ekmekçi, S., 2022. On the maximum spherical inversions, Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 15, 1, 360-371.
- Coolidge, J. L., 1916. A treatise on the circle and the sphere. Oxford University Press.
- Dijksterhuis, E. J., 1956. Archimedes. Ejnar Munksgard, Kopenhag.
- Ermiş, T., 2014. Düzgün çokyüzlülerin metrik geometriler ile ilişkileri üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- García Capitan, F. J., 2005. Aplicación de la inversión a la resolución de problemas.
- Gelişgen, Ö. ve Can, Z., 2016. On the family of metrics for some platonic and archimedean polyhedra, Konuralp Journal of Mathematics, 4(2), 25-33.
- Gelişgen, Ö. ve Çolak, Z., 2015. A Family of metrics for some polyhedra, Automation Computers Applied Mathematics Scientific Journal, 24, 1, 3-15.
- Gelişgen, Ö. ve Ermiş, T., 2019. Some properties of inversions in alpha plane, Forum Geometricorum, 19, 1-9.
- Martin, G. E., 1991. The foundations of geometry and the non-euclidean plane, Springer.

- Pekzorlu, A., 2019. On inversions in non-euclidean geometries, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
- Pekzorlu, A. ve Bayar, A., 2020. Taxicab spherical inversions in taxicab space, Journal of Mahani Mathematic Research Center, 9, 1, 2, 45-54.
- Ramirez, J., 2014. Inversions in an ellipse. Forum Geom., 14, 107-115.
- Ramirez, J. L. ve Rubiano, G. N., 2014. A geometrical construction of inverse points with respect to an ellipse, International Journal of Mathematical Education in Science ve Technology, 45,8, 1254-1259.
- Rubiano, G. N. ve Ramirez, J. L., 2014. Elliptic inversion of two dimensional objects, International Journal of Geometry, 3, 1, 12-27.
- Salihova, S., 2006. On the geometry of maximum metric, Doktora Tezi, Department of Mathematic, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
- Sezgin, N., 2014. Öklidyen düzlemde ve taksi düzlemde evritim üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Stankova-Frenkel, Z., 1998. Inversion in plane. Mathematical Association of America. Erişim Adresi: <https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/archivedocs/1998_1999/lectures/9899lecturepdf/Inversion1.pdf>, Erişim tarihi: 15.12.2024.
- Tezer, C., 1992. Evritim I, II, Matematik Dünyası Dergisi, 1, 12-16, 8-12.
- Thompson, A. C., 1996. Minkowski geometry, Cambridge University Press.
- Yağcı, M., 2006. Evritim, Matematik Dünyası Dergisi, 1, 72,81.
- Yüca, G. ve Can, Z., 2020. On the circular inversion in maximum plane, 2, 2.
- Yüce, S., Ekim 2017. Analitik Geometri.
- Yüksel, S., 2012. Taksi uzayda bazı düzgün çokgenler ve çokyüzlüler üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Emine AYGÜN

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2016-2021

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2022-2024

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler

1. Can, Z., & Aygün, E. (2024). Elliptic inversion in l_∞ – plane. International Journal of Geometry, 4, s. 84-95.

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Can, Z., Aygün, E., A Comparison of Inversions in l_∞ -Plane and l_1 -Plane, 20th International Geometry Symposium, Van-Türkiye, 18-20 July 2024