



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ℓ_p UZAYINDA RIESZ-EULER TOTİENT MATRİSİNİN ETKİ
ALANI VE KOMPAKT OPERATÖRLER**

MEHMET AKİF BAYRAKDAR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. MERVE İLKHAN KARA**

DÜZCE, 2021

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ℓ_p UZAYINDA RIESZ-EULER TOTİENT MATRİSİNİN ETKİ
ALANI VE KOMPAKT OPERATÖRLER**

Mehmet Akif BAYRAKDAR tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından
Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK
LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Merve İLKHAN KARA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Merve İLKHAN KARA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Fuat USTA
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Güllü Canan HAZAR GÜLEÇ
Pamukkale Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 12/02/2021

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

12 Şubat 2021

Mehmet Akif BAYRAKDAR

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın belirlenmesi ve yürütülmesi sürecinde karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesiyle üstesinden gelmem için yardımcı olan değerli danışman hocam Doç.Dr. Merve İLKHAN KARA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarında karşılaştığım zorlukları aşmamda bilgi ve tecrübesiyle her zaman desteklerini paylaşan değerli hocam Prof. Dr. Emrah Evren KARA'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımın her anında maddi manevi yanımda olan sevgili anneme ve babama teşekkürlerimi sunarım.

12 Şubat 2021

Mehmet Akif BAYRAKDAR

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÇİZELGE LİSTESİ	vi
SİMGELER	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
2.1. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.2. DİZİ UZAYLARI, MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ VE NONKOMPAKTLIK HAUSDORFF ÖLÇÜSÜ	8
3. $\ell_p(R_\Phi)$ DİZİ UZAYI	16
4. $\ell_p(R_\Phi)$ UZAYININ α -, β -, γ -DUALLERİ	20
5. $\ell_p(R_\Phi)$ UZAYI ÜZERİNDE BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ	24
6. $\ell_p(R_\Phi)$ UZAYI ÜZERİNDE KOMPAKT OPERATÖRLER	27
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	33
8. KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	37

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Çizelge 2.1. Möbius fonksiyonu.	14
Çizelge 2.2. Euler totient fonksiyonu.	15



SİMGELER

bs	Sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı
$B(X, Y)$	X uzayından Y uzayına sınırlı ve lineer operatörlerin uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
c	Yakınsak dizilerin uzayı
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
cs	Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
$\text{Çek}M$	M operatörünün sıfır uzayı (çekirdeği)
d	Metrik fonksiyonu
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismi
$K(X, Y)$	X uzayından Y uzayına kompakt opratörlerin uzayı
ℓ_1	Mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
ℓ_p	Mutlak p -yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
ℓ_∞	Sınırlı dizilerin uzayı
$L(X, Y)$	X uzayından Y uzayına lineer operatörlerin uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif gerçel sayılar kümesi
(s_n)	Sonsuz serinin kısmi toplamlar dizisi
ω	Reel veya karmaşık terimli dizilerin uzayı
$ x $	x vektörünün mutlak değeri
$\ x\ $	x vektörünün normu
X^α	X dizi uzayının α - duali
X^β	X dizi uzayının β - duali
X^γ	X dizi uzayının γ - duali
(X, d)	Metrik uzay
$(X, \ \cdot\)$	Normlu uzay
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
μ	Möbius fonksiyonu
φ	Euler totient fonksiyonu
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	Sonsuz seri

ÖZET

ℓ_p UZAYINDA RIESZ-EULER TOTIENT MATRİSİNİN ETKİ ALANI VE KOMPAKT OPERATÖRLER

Mehmet Akif BAYRAKDAR
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Merve İLKHAN KARA
Şubat 2021, 36 sayfa

Bu tez çalışmasında, özel bir alt üçgensel matris olan Riesz-Euler totient matrisinin ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) dizi uzayı üzerindeki matris etki alanı kullanılarak yeni bir Banach dizi uzayı tanımlanacaktır. Daha sonra bu uzayın α -, β -, γ -dualleri belirlenecek ve bu uzay üzerinde tanımlı çeşitli matris operatörleri karakterize edilecektir. Son olarak nonkompaktlık ölçüsü yardımıyla bu uzay üzerindeki bazı matris dönüşümlerinin kompakt olması için taşıması gereken şartlar belirlenecektir.

Anahtar sözcükler: Dizi uzayı, Kompakt operatörler, Nonkompaktlık Hausdorff ölçüsü, α -, β -, γ -dualleri.

ABSTRACT

MATRIX DOMAIN OF RIESZ-EULER TOTIENT MATRIX IN THE SPACE ℓ_p AND COMPACT OPERATORS

Mehmet Akif BAYRAKDAR

Düzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Merve İLKHAN KARA

February 2021, 36 pages

In this thesis, a new Banach sequence space will be defined using the matrix domain of the Riesz-Euler totient matrix, which is a special sub-triangular matrix on the sequence space ℓ_p ($1 \leq p < \infty$). Later, α -, β -, γ -duals of this space will be determined and various matrix operators defined on this space will be characterized. Finally, with the help of the measure of non-compactness, the required conditions for some matrix transformations to be compact on this space will be determined.

Keywords: Compact operators, Hausdorff measure of non-compactness, Sequence space, α -, β -, γ -duals.

1. GİRİŞ

Tüm reel veya kompleks terimli dizilerin uzayı ω dizilerin koordinatsal toplamı ve skalerle çarpımı işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Bu uzayın herhangi bir alt vektör uzayı dizi uzayı olarak adlandırılır. Sınırlı tüm dizilerin uzayı ℓ_∞ , yakınsak tüm dizilerin uzayı c , mutlak p -toplanabilir tüm dizilerin uzayı ℓ_p klasik dizi uzaylarına örnek olarak verilir. Dizi uzayları toplanabilme teorisinin temelini oluşturur. Toplanabilme, özellikle analiz ve fonksiyonel analizde yaklaşım teorisi, operatör teorisi gibi konularda çok fazla uygulaması olan matematiğin geniş bir alanıdır. Toplanabilme teorisi Abel, Borel, Cesàro, Nörlund, Riesz tarafından kullanılan metotlar ile elde edilmiş ve artık bu metotlar kullanıldıkça daha farklı metotlara gerek duyulmuş, bundan dolayı matris dönüşümü teorisi kullanılmaya başlanmıştır. Klasik toplanabilme teorisi serilerin ya da dizilerin yakınsaklığının genelleştirilmesi ile ilgilenir. Burada amaç ıraksak serilere ya da dizilere bir dönüşüm uygulayarak yakınsak serilere ya da dizilere dönüştürmektir. Bu amaçla dizi uzayları arasında en genel lineer operatör bir sonsuz matris yardımı ile verilebildiğinden genel bir lineer operatör yerine sonsuz matrisler kullanılır. Bu nedenle dizi uzayları çalışılırken matris dönüşümleri önemli bir yere sahip olmuştur.

Yeni dizi uzayları ile ilgili çeşitli çalışmalar 1978 yılında Ng ve Lee tarafından 1. mertebeden Cesàro ortalamasının ℓ_p uzayında etki alanını kullanılarak X_p uzayını inşa etmesi ile başlamıştır. Daha sonra Nörlund ortalaması, Riesz ortalaması kullanılarak yeni uzaylar tanımlanmıştır. Bu uzayların, üzerinde tanımladıkları normla Banach uzayı olduklarını ve duallerini bularak, yeni dizi uzaylarından standart dizi uzaylarına bazı matris sınıflarının karakterize edilmesi üzerine çalışılmıştır.

Sonsuz bir matrisin klasik dizi uzayları üzerinde matris etki alanı yardımıyla klasik uzaya lineer olarak izomorf olan yeni Banach dizi uzayları tanımlanmaktadır. Birçok yazar, özel üçgensel matrisler yardımıyla yeni Banach uzayları inşa etmek için bu tekniği uyguladı. İlk olarak [1]'de fark matrisi kullanılarak fark dizi uzayları tanımlanmıştır. Daha sonra özel bir limitleme metodunun etki alanı yardımıyla yeni bir dizi uzayı oluşturma fikri

[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] nolu çalışmalarda görüleceği üzere birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada kullanılacak olan Riesz matrisi yardımıyla [11] nolu çalışmada yazarlar mutlak olmayan tipte Riesz dizi uzaylarını tanımlamışlardır. Daha fazla çalışma için bakınız [12, 13, 14, 15].

Kompakt operatörler ilk kez integral operatörler şeklinde Volterra tarafından ortaya konulmuştur. Banach uzaylarında kompakt operatörlerin genel tanımı ilk kez Alman matematikçi Hilbert tarafından verilmiştir. Kompakt operatörler fonksiyonel analizin, operatör teorisi ve yaklaşım teorisi gibi birçok dalında önemli bir yer teşkil etmektedir. İki dizi uzayı arasındaki en genel lineer dönüşüm bir matris ile verilebildiğinden, bir matris operatörünün hangi şartlar altında kompakt olacağı sorusu akla gelmektedir. Bu şartlar nonkompaktlık ölçüsü kavramı yardımıyla belirlenmektedir. Nonkompaktlık ölçüsünün operatör teorisi, sabit nokta teorisi, diferansiyel denklemler gibi bir çok alanda önemli uygulamaları vardır. Dizi uzayları üzerinde nonkompaktlık ölçüsü ve uygulaması ile ilgili bazı çalışmalar için bakınız [16, 17, 18, 19].

Aritmetik fonksiyonların aralarında olan ilişkileri bulmak, özelliklerini incelemek sayılar teorisinde önemli yere sahiptir. Aritmetik fonksiyonlardan bazılarına örnek olarak Möbius fonksiyonu, Euler totient fonksiyonu verilebilir. Euler totient fonksiyonunun birçok özelliği vardır ve literatürde bu özellikler formüllerle ifade edilmiştir.

Son zamanlarda [20] ve [21] nolu çalışmalarda Euler totient matrisini kullanarak çeşitli dizi uzayları tanımlanmıştır. Daha sonrasında [22]'de bu matris yardımıyla paranormlu dizi uzayları tanımlanıp bu uzayların bazı özellikleri incelenmiştir. Kısa bir süre önce [23, 24, 25, 26, 27, 28]'de bu matris kullanılarak birçok yeni dizi ve seri uzayı tanımlanmıştır. Bu çalışmada Euler totient matrisinin daha genel bir hali olan ağırlıklı Euler totient üçgensel matrisinin ℓ_p dizi uzayı üzerinde matris etki alanı çalışılacaktır. Bu tezin asıl amacı bu uzayın dualleri belirlendikten sonra yeni oluşturulmuş olan bu dizi uzayı üzerinde bazı matris dönüşümlerini ve kompakt operatörleri karakterize etmektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu alt bölümde verilen tüm temel kavramlar ile ilgili bakınız [29, 30, 31].

Tanım 2.1. (Lineer Uzay) X boş olmayan bir küme, $\mathbb{K}$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$\begin{aligned} + : X \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times X &\rightarrow X \\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha x \end{aligned} \tag{2.2}$$

ikili işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine $\mathbb{K}$ üzerinde bir lineer (vektör) uzay adı verilir.

A) X , $+$ işlemine göre bir değişmeli gruptur. Yani $\forall x, y, z \in X$ için,

$$A1) x + y \in X,$$

$$A2) x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$A3) x + \theta = \theta + x = x \text{ olacak şekilde } \theta \in X \text{ vardır,}$$

$$A4) x + (-x) = (-x) + x = \theta \text{ olacak şekilde } (-x) \in X \text{ vardır,}$$

$$A5) x + y = y + x.$$

B) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ için

$$B1) \alpha x \in X,$$

$$B2) \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y,$$

$$B3) (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$B4) \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,$$

$$B5) 1x = x, 1 \in \mathbb{K}.$$

Tanım 2.2. (Lineer Altuzay): X bir lineer uzay ve M de X 'in bir alt kümesi olsun. $x, y \in M$ ve α ve β skaler olmak üzere $\alpha x + \beta y \in M$ ise M kümesine X 'in bir lineer alt uzayı denir.

Tanım 2.3. X boş olmayan bir küme olsun. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa X üzerinde metrik (uzaklık fonksiyonu) adını alır ve (X, d) ikilisine metrik uzay denir.

$$\forall x, y, z \in X \text{ için,}$$

$$M1) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ dir.}$$

$$M2) d(x, y) = d(y, x) \text{ dir.}$$

$$M3) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ dir.}$$

Örnek 2.4. $\mathbb{R}$ üzerinde d dönüşümü

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = |x - y| \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlansın. $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzaydır. Bu metriğe alışılmış metrik veya mutlak değer metriği denir.

Örnek 2.5. $X \in \{\ell_\infty, c_0, c\}$ olmak üzere d_∞ dönüşümü

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (x, y) &\mapsto d_\infty(x, y) = \sup_k |x_k - y_k| \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlansın. (X, d_∞) bir metrik uzaydır.

Tanım 2.6. (X, d) ikilisi herhangi bir metrik uzay olmak üzere $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olsun. Bu durumda

- a) $B(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ kümesine, x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar denir.
- b) $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ kümesine, x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar denir.
- c) $S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$ kümesine, x_0 merkezli ve r yarıçaplı küre denir.

Tanım 2.7. (Normlu Lineer Uzay): X , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ çiftine de normlu lineer uzay veya kısaca normlu uzay denir.

$\forall x, y \in X$ için,

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$N3) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \lambda \in \mathbb{K}$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (Üçgen Eşitsizliği)}$$

Örnek 2.8. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $x = (x_n) \in \ell_p$ olsun. Eğer $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ biçiminde tanımlanırsa $(\ell_p, \|\cdot\|)$ ikilisi bir normlu uzay olur.

Tanım 2.9. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere X uzayında bir (x_n) dizisi verilsin ve $x \in X$ olsun. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > n_0$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \tag{2.5}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0 \tag{2.6}$$

olur. x noktasına, (x_n) dizisinin limiti denir.

Tanım 2.10. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere (x_n) X uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı bulunuyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.11. Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu (X, d) metrik uzayına tam metrik uzayı denir.

Örnek 2.12. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ olsun. Bu durumda $(\mathbb{R}, d)$ bir tam metrik uzaydır.

Örnek 2.13. Aşağıdaki uzaylar tam metrik uzaylara örnektir.

- $1 \leq p < \infty$ olmak üzere ℓ_p dizi uzayı,
- $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ uzayları,
- Ayırık metrik uzay

Tanım 2.14. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere X uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak oluyorsa X uzayı normun doğurduğu metriğe göre tamdır denir ve Banach uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.15. X $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım, $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir. 1) $\forall x, y, z \in X$ için $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ dir.

2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in X$ için $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ dir.

3) $\forall x, y \in X$ için $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ dir.

4) $\forall x \in X$ için $\langle x, x \rangle \geq 0$ dir.

5) $\forall x \in X$ için $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ dir.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ise X vektör uzayına, reel iç çarpım uzayı denir.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ise X vektör uzayına, kompleks iç çarpım uzayı denir.

Tanım 2.16. $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun.

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonu bir normdur ve iç çarpımın ürettiği norm olarak adlandırılır.

Tanım 2.17. (Paralel Kenar Kuralı) X bir iç çarpım uzayı olmak üzere X üzerinde ki iç çarpımın ürettiği norm $\|\cdot\| \forall x, y \in X$ için

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (2.8)$$

eşitliğini sağlar. Buna Paralel Kenar Kuralı denir.

Teorem 2.18. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayının bir iç çarpım uzayı olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in X$ için Paralel Kenar kuralının sağlanmasıdır.

Tanım 2.19. $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir iç çarpım uzayı olmak üzere $x \in X$ için $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ biçiminde tanımlanan, iç çarpımın doğurduğu normu göz önüne alalım. Bu durumda $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} \quad (2.9)$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna, iç çarpımın ürettiği metrik denir. Eğer X iç çarpım uzayı d metriğine göre tam ise X uzayına, Hilbert uzayı veya tam iç çarpım uzayı denir.

Tanım 2.20. N ve N' aynı $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $M: N \rightarrow N'$ operatörü her $x, y \in N$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

$$M(x+y) = M(x) + M(y) \quad (2.10)$$

$$M(\alpha x) = \alpha M(x) \quad (2.11)$$

aksiyomlarını sağlıyorsa M operatörüne N uzayından N' uzayına bir lineer operatör denir.

Tanım 2.21. $M : N \rightarrow N'$ lineer operatör olsun.

$$\text{Çek}M = \{x \in X : Mx = \theta'\} \quad (2.12)$$

kümesine M operatörünün çekirdeği veya sıfır uzayı denir. Burada θ' , N' uzayının sıfır vektörüdür.

Teorem 2.22. M lineer operatörünün bire-bir olması için gerek ve yeter şart $\text{Çek}M = \{\theta\}$ olmasıdır.

Tanım 2.23. X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $M : X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Her $x \in X$ için

$$\|M(x)\| \leq c\|x\| \quad (2.13)$$

olacak şekilde $c > 0$ reel sayısı varsa M operatörüne sınırlı lineer operatör denir.

Tanım 2.24. X ve Y normlu uzaylar olmak üzere, $M : X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun.

$$\|M\| = \sup\left\{\frac{\|M(x)\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq \theta\right\} = \sup\{\|M(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \quad (2.14)$$

olmak üzere $\|M\|$ değerine M operatörünün normu denir.

Tanım 2.25. X normlu uzayından Y normlu uzayına lineer bir izometrik izomorfizm, normu koruyan yani her $x \in X$ için,

$$\|M(x)\|_Y = \|x\|_X \quad (2.15)$$

olan bire-bir ve örten $M : X \rightarrow Y$ lineer operatördür. Bu durumda X ve Y uzaylarına lineer izomorfiktirler denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir.

2.2. DİZİ UZAYLARI, MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ VE NONKOMPAKTLIK HAUSDORFF ÖLÇÜSÜ

Tanım 2.26. [14] Reel ve kompleks terimli tüm dizilerinin kümesi

$$\omega = \{x = (x_n) : x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}, n \rightarrow x(n) = x_n\} \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanır.

$x = (x_k), y = (y_k) \in \omega$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ olsun.

$$((x_k), (y_k)) \rightarrow (x_k + y_k) \quad (2.17)$$

$$(\alpha, (x_k)) \rightarrow (\alpha x_k) \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlı işlemlere göre ω bir lineer uzaydır.

Tanım 2.27. [14] ω uzayının herhangi bir alt vektör uzayına dizi uzayı denir.

Örnek 2.28. [14] Bazı dizi uzayı örnekleri

1) $\ell_p = \{x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}, 0 \leq p < \infty$

(p . dereceden mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.)

2) $\ell_{\infty} = \{x = (x_k) \in \omega : \sup_k |x_k| < \infty\}$

(Sınırlı dizilerin uzayı)

3) $c_0 = \{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0\}$

(Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı)

4) $c = \{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = l, l \in \mathbb{K}\}$

(Yakınsak dizilerin uzayı)

5) $bs = \{x = (x_k) \in \omega : (\sum_{k=1}^n x_k) \in \ell_{\infty}\}$

(Sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı)

6) $cs = \{x = (x_k) \in \omega : (\sum_{k=1}^n x_k) \in c\}$

(Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı)

7) $cs_0 = \{x = (x_k) \in \omega : (\sum_{k=1}^n x_k) \in c_0\}$

(Sıfıra yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı)

8) $\psi = \{x = (x_k) \in \omega : \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall k > n_0 \ x_k = 0\}$

Tanım 2.29. [14] $\mathcal{A} = (a_{nk})$ kompleks veya reel terimli sonsuz bir matrisi olsun. $k > n$ olduğunda $a_{nk} = 0$ ise bu matrise alt üçgensel matris denir. Yani

$$\mathcal{A} = (a_{nk}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & \dots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

şeklindeki matrise alt üçgensel matris denir.

Tanım 2.30. [14] $\mathcal{A} = (a_{nk})$ kompleks veya reel terimli sonsuz bir matrisi olsun. $n > k$ olduğunda $a_{nk} = 0$ ise bu matrise üst üçgensel matris denir. Yani

$$\mathcal{A} = (a_{nk}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

şeklindeki matrise üst üçgensel matris denir.

Tanım 2.31. [14]

$$I_{n \times k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

şeklindeki matrise birim matris denir.

Tanım 2.32. [14] X bir lineer topolojik dizi uzayı olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n : X \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto p_n(x) = x_n$ biçiminde tanımlı koordinat dönüşümleri sürekli ise X dizi uzayına K -uzayı denir.

Tanım 2.33. [14] X bir K -uzayı olsun. X tam lineer metrik uzay ise X dizi uzayına FK -uzayı denir.

Tanım 2.34. [14] X bir FK -uzayı olsun. X uzayının metriği normlanabiliyorsa bu uzaya BK -uzayı denir.

Örnek 2.35. [14] ℓ_∞ , c ve c_0 uzayları $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$ normuna göre, $1 \leq p < \infty$ için ℓ_p uzayı $\|x\|_p = (\sum_{k=0}^n |x_k|^p)^{1/p}$ normuna göre birer BK -uzayıdır.

Teorem 2.36. [14] BK -uzayları arasında tanımlanan lineer dönüşümler süreklidirler.

Teorem 2.37. [14] (Silverman Toeplitz) Bir $\mathcal{A} = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar:

1) Her n için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < G$ olacak şekilde bir G sabiti vardır.

2) Her k için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$ dir.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$ dir.

Tanım 2.38. [14] $\mathcal{A} = (a_{nk})$ kompleks veya reel terimli sonsuz bir matris ve X, Y herhangi iki dizi uzayı olsun. X bir vektör uzayı olduğundan herhangi $x = (x_n) \in X$ dizisi

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

şeklinde vektörel olarak ifade edilebilir. Burada matris çarpımı yaparak

$$\mathcal{A}x = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0k} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k}x_k \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k}x_k \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

elde edilir. Her bir $n \in N$ için $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$ serisinin yakınsak olduğu kabul edilir. Her $n \in N$ için $y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$ olmak üzere $y = (y_n)$ dizisi Y dizi uzayının bir elemanı ise $\mathcal{A}$

matrisine X dizi uzayından Y dizi uzayına bir matris dönüşümü denir. Bu matris dönüşümü lineer bir dönüşümdür. $\mathcal{A}x = y$ dizisine x dizisinin $\mathcal{A}$ -dönüşümü denir.

$\mathcal{A}_n$ ile $\mathcal{A}$ matrisinin n . satırındaki dizi gösterilmektedir.

Tanım 2.39. [14] $\mathcal{A} = (a_{nk})$ reel yada kompleks terimli sonsuz bir matris ve X de herhangi bir dizi uzayı olsun. $\mathcal{A} = (a_{nk})$ matrisinin X dizi uzayı üzerindeki etki alanı $X_{\mathcal{A}}$ ile gösterilir ve

$$X_{\mathcal{A}} = \{x = (x_n) \in \omega : \mathcal{A}x \in X\} \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlanır.

(X, Y) ile X uzayından Y uzayına tanımlı tüm matrislerin sınıfı gösterilecektir. $B(X, Y)$ ile X uzayından Y uzayına tanımlı tüm sınırlı (sürekli) lineer operatörlerin sınıfı gösterilecektir.

Tanım 2.40. [14]

$$X^{\alpha} = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \forall x = (x_k) \in X \sum_{k=1}^{\infty} |t_k x_k| < \infty \right\}, \quad (2.25)$$

$$X^{\beta} = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \forall x = (x_k) \in X \sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k \text{ yakınsaktır} \right\}, \quad (2.26)$$

$$X^{\gamma} = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \forall x = (x_k) \in X \sup_n \left| \sum_{k=1}^n t_k x_k \right| < \infty \right\}, \quad (2.27)$$

uzayları sırasıyla X dizi uzayının α -, β -, γ -dualleri olarak adlandırılır.

$(X, \|\cdot\|_X)$ bir normlu uzay ve $B_X = \{x \in \omega : \|x\|_X = 1\}$ olsun. Herhangi bir $X \supset \psi$ BK-uzayı ve $t = (t_n) \in \omega$ için

$$\|t\|_X^* = \sup_{x \in B_X} \left| \sum_k t_k x_k \right| \quad (2.28)$$

notasyonu kullanılacaktır. Bu durumda $t \in X^{\beta}$ dır.

Yardımcı Teorem 2.41. [32, Theorem 1.29] $\ell_1^{\beta} = \ell_{\infty}$ ve $\ell_p^{\beta} = \ell_q$ ($1 < p < \infty$). $1 \leq p < \infty$ olmak üzere her $t \in \ell_p^{\beta}$ için $\|t\|_{\ell_p}^* = \|t\|_{\ell_p^{\beta}}$ olur.

Yardımcı Teorem 2.42. [32, Theorem 1.23 (a)] X, Y herhangi BK -uzayları ve $\mathcal{A} \in (X, Y)$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(x) = \mathcal{A}x$ olacak şekilde $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \in B(X, Y)$ lineer operatörü vardır.

Yardımcı Teorem 2.43. [32] $X \supset \psi$ bir BK -uzayı ve $Y \in \{c_0, c, \ell_\infty\}$ olsun. $\mathcal{A} \in (X, Y)$ ise

$$\|\mathcal{L}_{\mathcal{A}}\| = \|\mathcal{A}\|_{(X, Y)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathcal{A}_n\|_X^* < \infty \quad (2.29)$$

olur.

Tanım 2.44. [32] $\mathcal{Q}$ bir X metrik uzayında sınırlı bir küme olsun.

$$\chi(\mathcal{Q}) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mathcal{Q} \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta_i), x_i \in X, \delta_i < \varepsilon, n \in \mathbb{N}\} \quad (2.30)$$

değerine $\mathcal{Q}$ kümesinin nonkompaktlık Hausdorff ölçüsü denir.

ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) uzayında bir kümenin nonkompaktlık Hausdorff ölçüsünü hesaplamak için aşağıdaki sonuca ihtiyaç duyulur.

Teorem 2.45. [33] $\mathcal{Q}$ kümesi ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) uzayında sınırlı ve her bir $r \in \mathbb{N}$ için $P_r : \ell_p \rightarrow \ell_p$, $P_r(x) = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_r, 0, 0, \dots)$ olsun. Bu durumda

$$\chi(\mathcal{Q}) = \lim_r \left(\sup_{x \in \mathcal{Q}} \|(I - P_r)(x)\|_{\ell_p} \right) \quad (2.31)$$

olur. Burada I birim operatördür.

Tanım 2.46. [29] $\mathcal{L} : X \rightarrow Y$ lineer operatör olmak üzere X uzayındaki sınırlı her $x = (x_n)$ dizisi için $(\mathcal{L}(x_n))$ dizisi Y uzayında yakınsak alt diziye sahip oluyorsa $\mathcal{L}$ operatörü kompakttır denir.

Tanım 2.47. [32] Bir $\mathcal{L} \in B(X, Y)$ operatörünün nonkompaktlık Hausdorff ölçüsü $\|\mathcal{L}\|_\chi = \chi(\mathcal{L}(B_X))$ şeklinde tanımlıdır. $\|\mathcal{L}\|_\chi = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{L}$ operatörünün kompakt olmasıdır.

Tanım 2.48. [34] n bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & , \quad n = 1 \text{ ise} , \\ 0 & , \quad p^2 | n, p \text{ asal ise} , \\ (-1)^r & , \quad n = P_1 P_2 \dots P_r, i \neq j \text{ için } P_i \neq P_j \text{ ise} \end{cases} \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlı μ fonksiyonuna Möbius fonksiyonu denir.

$n \neq 1$ için

$$\sum_{k|n} \mu(k) = 0 \quad (2.33)$$

eşitliği sağlanır.

Çizelge 2.1’de Möbius fonksiyonunun bazı değerleri verilmiştir.

Çizelge 2.1. Möbius fonksiyonu.

$\mu(1)$	1
$\mu(2)$	-1
$\mu(3)$	-1
$\mu(4)$	0
$\mu(5)$	-1
$\mu(6)$	1
$\mu(7)$	-1
$\mu(8)$	0
$\mu(9)$	0
$\mu(10)$	1

Tanım 2.49. [34] $n \geq 1$ bir tamsayı olsun. $(k, n) = 1$ ve $1 \leq k < n$ koşulunu sağlayan k tam sayılarının sayısını veren fonksiyona Euler totient fonksiyonu denir. $\varphi(n)$ ile gösterilir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$n = \sum_{k|n} \varphi(k) \quad (2.34)$$

eşitliği sağlanır.

Çizelge 2.2’de Euler totient fonksiyonunun bazı değerleri verilmiştir.

Euler totient matrisi $\Phi = (\phi_{nk})$

$$\phi_{nk} = \begin{cases} \frac{\varphi(k)}{n} & , \quad k | n \text{ ise} \\ 0 & , \quad k \nmid n \text{ ise} \end{cases} \quad (2.35)$$

şeklinde tanımlanmıştır [20].

Çizelge 2.2. Euler totient fonksiyonu.

$\varphi(1)$	1
$\varphi(2)$	1
$\varphi(3)$	2
$\varphi(4)$	2
$\varphi(5)$	4
$\varphi(6)$	2
$\varphi(7)$	6
$\varphi(8)$	4
$\varphi(9)$	6
$\varphi(10)$	4

Riesz matrisi $E = (e_{nk})$ (q_k) pozitif sayıların bir dizisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $Q_n = \sum_{k=0}^n q_k$ olmak üzere

$$e_{nk} = \begin{cases} \frac{q_k}{Q_n} & , \quad 0 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , \quad k > n \text{ ise} \end{cases} \quad (2.36)$$

şeklinde tanımlanmıştır [11].

3. $\ell_p(R_\Phi)$ DİZİ UZAYI

Bu bölümde Riesz matrisi ve Euler totient matrisi yardımıyla üretilmiş R_Φ matrisi tanımlanacak ve bu matrisin $1 \leq p < \infty$ için ℓ_p uzayındaki matris etki alanı olarak yeni bir Banach uzayı tanımlanacaktır. Bu uzayın ℓ_p ile lineer olarak izomorf olduğu gösterildikten sonra Hilbert uzayı olup olmadığı araştırılacaktır. Ayrıca bu uzay ile ilgili bazı kapsama bağıntıları verilecektir.

$Q_n = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ olmak üzere $R_\Phi = (r_{nk})$ matrisi

$$r_{nk} = \begin{cases} \frac{q_k \varphi(k)}{Q_n} & , \quad k \mid n \text{ ise} \\ 0 & , \quad k \nmid n \text{ ise} \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu matris *Riesz Euler totient matris operatörü* olarak adlandırılacaktır.

R_Φ matrisinin tersi $R_\Phi^{-1} = (r_{nk}^{-1})$ ile gösterilsin. Bu ters matris $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$r_{nk}^{-1} = \begin{cases} \frac{\mu(\frac{n}{k}) Q_k}{\varphi(n) q_n} & , \quad k \mid n \text{ ise} \\ 0 & , \quad k \nmid n \text{ ise} \end{cases} \quad (3.2)$$

şeklinde hesaplanmıştır.

Bu durumda R_Φ matrisinin ℓ_p dizi uzayında matris etki alanı olarak $\ell_p(R_\Phi)$ uzayı

$$\ell_p(R_\Phi) = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sum_n \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{k \mid n} q_k \varphi(k) x_k \right|^p < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty) \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Aksi belirtilmediği sürece $y = (y_n)$ dizisi bir $x = (x_n)$ dizisinin R_Φ -dönüşümü olarak kullanılacaktır, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = (R_\Phi x)_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{k \mid n} q_k \varphi(k) x_k$ dır.

Teorem 3.1. $\ell_p(R_\Phi)$ uzayı $1 \leq p < \infty$ için

$$\|x\|_{\ell_p(R_\Phi)} = \left(\sum_n \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{k|n} q_k \varphi(k) x_k \right|^p \right)^{1/p} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlı norm ile bir Banach uzayıdır.

İspat. Öncelikle $(\ell_p(R_\Phi), \|\cdot\|_{\ell_p(R_\Phi)})$ ikilisinin bir normlu uzay olduğu gösterilecektir.

$\|x\|_{\ell_p(R_\Phi)} = \|R_\Phi x\|_{\ell_p} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $R_\Phi x = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ olmasıdır.

R_Φ matrisinin tersi mevcut olduğundan $x = (0, \dots, 0, \dots)$ olur.

$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in \ell_p(R_\Phi)$ olsun.

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_{\ell_p(R_\Phi)} &= \|R_\Phi(\alpha x)\|_{\ell_p} = \|\alpha R_\Phi x\|_{\ell_p} \\ &= |\alpha| \|R_\Phi x\|_{\ell_p} = |\alpha| \|x\|_{\ell_p(R_\Phi)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir.

Son olarak $x, \tilde{x} \in \ell_p(R_\Phi)$ için

$$\begin{aligned} \|x + \tilde{x}\|_{\ell_p(R_\Phi)} &= \|R_\Phi(x + \tilde{x})\|_{\ell_p} = \|R_\Phi x + R_\Phi \tilde{x}\|_{\ell_p} \\ &\leq \|R_\Phi x\|_{\ell_p} + \|R_\Phi \tilde{x}\|_{\ell_p} = \|x\|_{\ell_p(R_\Phi)} + \|\tilde{x}\|_{\ell_p(R_\Phi)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir.

Şimdi $\ell_p(R_\Phi)$ uzayının bir Banach uzayı olduğu gösterilecektir. (x^n) dizisi $\ell_p(R_\Phi)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $(y^n) = (R_\Phi x^n)$ ℓ_p uzayında bir dizidir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|x^n - x^m\|_{\ell_p(R_\Phi)} &= \|R_\Phi(x^n - x^m)\|_{\ell_p} \\ &= \|R_\Phi x^n - R_\Phi x^m\|_{\ell_p} = \|y^n - y^m\|_{\ell_p} \end{aligned} \quad (3.7)$$

olacağından $(y^n) = (R_\Phi x^n)$ ℓ_p uzayında bir Cauchy dizisi olur. $(\ell_p, \|\cdot\|_{\ell_p})$ bir Banach uzayı olduğundan bir $\hat{y} \in \ell_p$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} y^n = \hat{y}$ olur. $\hat{x} = R_\Phi^{-1} \hat{y}$ seçilirse

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - \hat{x}\|_{\ell_p(R_\Phi)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|R_\Phi(x^n - \hat{x})\|_{\ell_p} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|R_\Phi x^n - R_\Phi \hat{x}\|_{\ell_p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y^n - \hat{y}\|_{\ell_p} = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

bulunur. Böylece $\hat{x} \in \ell_p(R_\Phi)$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \hat{x}$ elde edilir. $\square$

Sonuç 3.2. $\ell_p(R_\Phi)$ ($1 \leq p < \infty$) uzayı bir BK-uzayıdır.

Teorem 3.3. $1 \leq p < \infty$ için $\ell_p(R_\Phi)$ uzayı ℓ_p uzayına lineer olarak izomorftur.

İspat. $f, \ell_p(R_\Phi)$ uzayından ℓ_p uzayına her $x \in \ell_p(R_\Phi)$ için $f(x) = R_\Phi x$ ile tanımlı bir dönüşüm olsun. f dönüşümünün lineer olduğu açıktır. Ayrıca f dönüşümünün çekirdeği sadece $(0, 0, \dots, 0, \dots)$ dizisinden oluştuğu için f bire-bir dönüşümdür. f dönüşümünün örten olduğunu göstermek için $y = (y_k) \in \ell_p$ olmak üzere terimleri

$$x_n = \sum_{k|n} \frac{\mu(\frac{n}{k})}{\varphi(n)} \frac{Q_k}{q_n} y_k \quad (3.9)$$

ile tanımlı $x = (x_n)$ dizisi ele alınsın. (2.33) den

$$\begin{aligned} (R_\Phi x)_n &= \frac{1}{Q_n} \sum_{k|n} q_k \varphi(k) x_k = \frac{1}{Q_n} \sum_{k|n} q_k \varphi(k) \sum_{j|k} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{\varphi(k)} \frac{Q_j}{q_k} y_j \\ &= \frac{1}{Q_n} \sum_{k|n} \sum_{j|k} \mu(\frac{k}{j}) Q_j y_j = \frac{1}{Q_n} \sum_{k|n} \left(\sum_{j|k} \mu(j) \right) Q_{\frac{n}{k}} y_{\frac{n}{k}} = \frac{1}{Q_n} \mu(1) Q_n y_n = y_n \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir. Böylece $x = (x_n) \in \ell_p(R_\Phi)$ olur. $\|x\|_{\ell_p(R_\Phi)} = \|f(x)\|_{\ell_p}$ eşitliği sağlandığından f dönüşümü normu korur. Dolayısıyla $\ell_p(R_\Phi)$ uzayının ℓ_p uzayına lineer olarak izomorf olduğu görülür. $\square$

Not 3.4. ℓ_2 uzayı üzerinde $\|\cdot\|_{\ell_2}$ normunu veren iç çarpım $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell_2}$ olsun. $\ell_2(R_\Phi)$ uzayı $\langle x, \tilde{x} \rangle_{\ell_2(R_\Phi)} = \langle R_\Phi x, R_\Phi \tilde{x} \rangle_{\ell_2}$ iç çarpımı ile bir iç çarpım uzayıdır.

Teorem 3.5. $p \neq 2$ için $\ell_p(R_\Phi)$ uzayı bir iç çarpım uzayı değildir.

İspat. Terimleri her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \begin{cases} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \frac{Q_1}{q_n} + \frac{\mu(\frac{n}{2})}{\varphi(n)} \frac{Q_2}{q_n} & , \quad n \text{ çift ise} \\ \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \frac{Q_1}{q_n} & , \quad n \text{ tek ise} \end{cases} \quad (3.11)$$

ve

$$\tilde{x}_n = \begin{cases} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \frac{Q_1}{q_n} - \frac{\mu(\frac{n}{2})}{\varphi(n)} \frac{Q_2}{q_n} & , \quad n \text{ çift ise} \\ \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \frac{Q_1}{q_n} & , \quad n \text{ tek ise} \end{cases} \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlı $x = (x_n)$ ve $\tilde{x} = (\tilde{x}_n)$ dizileri ele alınsın. Bu durumda $R_\Phi x = (1, 1, 0, \dots, 0, \dots) \in \ell_p$ ve $R_\Phi \tilde{x} = (1, -1, 0, \dots, 0, \dots) \in \ell_p$ olur. Böylece $p \neq 2$ için

$$\|x + \tilde{x}\|_{\ell_p(R_\Phi)} + \|x - \tilde{x}\|_{\ell_p(R_\Phi)} \neq 2(\|x\|_{\ell_p(R_\Phi)} + \|\tilde{x}\|_{\ell_p(R_\Phi)}) \quad (3.13)$$

olduğu görülür. Paralelkenar kuralı sağlanmadığı için $p \neq 2$ için $\ell_p(R_\Phi)$ uzayı bir iç çarpım uzayı olamaz. $\square$

Teorem 3.6. $1 \leq p < q < \infty$ için $\ell_p(R_\Phi) \subset \ell_q(R_\Phi)$ kapsama bağıntısı kesin olarak sağlanır.

İspat. $1 \leq p < q < \infty$ için $\ell_p \subset \ell_q$ olduğundan $\ell_p(R_\Phi) \subset \ell_q(R_\Phi)$ sağlanır. Ayrıca $\ell_p \subset \ell_q$ kesin olarak sağlandığından $\ell_q \setminus \ell_p$ uzayında bir $z = (z_n)$ dizisi vardır. $x = (x_n)$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \sum_{k|n} \frac{\mu(\frac{n}{k})}{\varphi(n)} \frac{Q_k}{q_n} z_k \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanırsa $x \in \ell_q(R_\Phi) \setminus \ell_p(R_\Phi)$ olur. Dolayısıyla istenen kapsama bağıntısı kesin olarak sağlanır. $\square$

R_Φ matrisinin ℓ_∞ dizi uzayında matris etki alanı

$$\ell_\infty(R_\Phi) = \{x \in \omega : R_\Phi x \in \ell_\infty\} \quad (3.15)$$

uzayıdır.

Teorem 3.7. $1 \leq p < \infty$ için $\ell_p(R_\Phi) \subset \ell_\infty(R_\Phi)$ kapsama bağıntısı kesin olarak sağlanır.

İspat. $1 \leq p < \infty$ için $\ell_p \subset \ell_\infty$ olduğundan $\ell_p(R_\Phi) \subset \ell_\infty(R_\Phi)$ sağlanır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \sum_{k|n} (-1)^k \frac{\mu(\frac{n}{k})}{\varphi(n)} \frac{Q_k}{q_n}$ olmak üzere $x = (x_n)$ dizisi verilsin. Buradan $R_\Phi x = \left(\frac{1}{Q_n} \sum_{k|n} q_k \varphi(k) \sum_{j|k} (-1)^j \frac{\mu(\frac{k}{j})}{\varphi(k)} \frac{Q_j}{q_k} \right) = ((-1)^n) \in \ell_\infty \setminus \ell_p$ elde edilir. Dolayısıyla $1 \leq p < \infty$ için $x \in \ell_\infty(R_\Phi) \setminus \ell_p(R_\Phi)$ olur. Dolayısıyla istenen kapsama bağıntısı kesin olarak sağlanır. $\square$

4. $\ell_p(R_\Phi)$ UZAYININ α -, β -, γ -DUALLERİ

Bu bölümde $\ell_p(R_\Phi)$ ($1 \leq p < \infty$) uzayının α -, β - ve γ -dualleri belirlenecektir. Bunun için aşağıda verilen yardımcı teoreme ihtiyaç duyulmaktadır. Çalışma boyunca $\mathcal{K}$ doğal sayılar kümesinin tüm sonlu alt kümelerinin ailesini göstermektedir.

Yardımcı Teorem 4.1. [35]

- $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_p, \ell_1)$ ($1 < p < \infty$) olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{F \in \mathcal{K}} \sum_k \left| \sum_{n \in F} a_{nk} \right|^q < \infty \quad (4.1)$$

olmasıdır.

- $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_\infty, \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart $q = 1$ için (4.1) ifadesinin sağlanmasıdır.
- $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_1, \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_k \sum_n |a_{nk}| < \infty \quad (4.2)$$

olmasıdır.

- $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_p, c)$ ($1 < p < \infty$) olması için gerek ve yeter şart

$$\text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} \text{ mevcut} \quad (4.3)$$

ve

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}|^q < \infty \quad (4.4)$$

olmasıdır.

- $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_\infty, c)$ olması için gerek ve yeter şart (4.3) ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |a_{nk}| = \sum_k \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} \right| \quad (4.5)$$

olmasıdır.

- $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_1, c)$ olması için gerek ve yeter şart (4.3) ve

$$\sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty \quad (4.6)$$

olmasıdır.

- $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_p, c_0)$ ($1 < p < \infty$) olması için gerek ve yeter şart

$$\text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \quad (4.7)$$

ve (4.4) ifadesinin sağlanmasıdır.

- $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_\infty, c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (4.7) ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |a_{nk}| = 0 \quad (4.8)$$

olmasıdır.

- $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_1, c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (4.6) ve (4.7) ifadelerinin sağlanmasıdır.
- $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_p, \ell_\infty)$ ($1 < p < \infty$) olması için gerek ve yeter şart (4.4) ifadesinin sağlanmasıdır.
- $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart $q = 1$ için (4.4) ifadesinin sağlanmasıdır.
- $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_1, \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (4.6) ifadesinin sağlanmasıdır.

İlk olarak $\ell_p(R_\Phi)$ ($1 < p < \infty$) ve $\ell_1(R_\Phi)$ uzaylarının α -dualleri belirlenecektir.

Teorem 4.2. $\ell_p(R_\Phi)$ ($1 < p < \infty$) ve $\ell_1(R_\Phi)$ uzaylarının α -dualleri

$$(\ell_p(R_\Phi))^\alpha = \left\{ t = (t_n) \in \omega : \sup_{F \in \mathcal{K}} \sum_k \left| \sum_{n \in F, k|n} \frac{\mu(\frac{n}{k})}{\varphi(k)} \frac{Q_k}{q_n} t_n \right|^q < \infty \right\}, \quad (4.9)$$

ve

$$(\ell_1(R_\Phi))^\alpha = \left\{ t = (t_n) \in \omega : \sup_k \sum_{n \in \mathbb{N}, k|n} \left| \frac{\mu(\frac{n}{k})}{\varphi(k)} \frac{Q_k}{q_n} t_n \right| < \infty \right\} \quad (4.10)$$

uzaylarıdır.

İspat. Herhangi $t = (t_n) \in \omega$ için bir $C = (c_{nk})$ matrisi

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{\mu(\frac{n}{k})}{\varphi(k)} \frac{Q_k}{q_n} t_n & , \quad k \mid n \\ 0 & , \quad k \nmid n \end{cases} \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlansın. Böylece verilen herhangi $x = (x_n) \in \ell_p(R_\Phi)$ ($1 \leq p < \infty$) için $t_n x_n = (Cy)_n$ olur. Buradan $x \in \ell_p(R_\Phi)$ iken $tx \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şartın $y \in \ell_p$ iken $Cy \in \ell_1$ olması gerektiği sonucuna varılır. Böylece $t \in (\ell_p(R_\Phi))^\alpha$ olması için gerek ve yeter şartın $C \in (\ell_p, \ell_1)$ olması gerektiği görülür. Yardımcı Teorem 4.1 kullanılarak istenen sonuç elde edilir. $\square$

Teorem 4.3.

$$A_1 = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \text{her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=k, k|j}^n \frac{\mu(\frac{j}{k})}{\varphi(j)} \frac{Q_k}{q_j} t_j \text{ mevcuttur} \right\}, \quad (4.12)$$

$$A_2 = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \sup_n \sum_k \left| \sum_{j=k, k|j}^n \frac{\mu(\frac{j}{k})}{\varphi(j)} \frac{Q_k}{q_j} t_j \right|^q < \infty \right\}, \quad (4.13)$$

ve

$$A_3 = \left\{ t = (t_k) \in \omega : \sup_{n,k} \left| \sum_{j=k, k|j}^n \frac{\mu(\frac{j}{k})}{\varphi(j)} \frac{Q_k}{q_j} t_j \right| < \infty \right\} \quad (4.14)$$

olsun. $\ell_p(R_\Phi)$ ($1 < p < \infty$) ve $\ell_1(R_\Phi)$ uzaylarının β - ve γ -dualları

$$(\ell_p(R_\Phi))^\beta = A_1 \cap A_2 \text{ ve } (\ell_1(R_\Phi))^\beta = A_1 \cap A_3,$$

$$(\ell_p(R_\Phi))^\gamma = A_2 \text{ ve } (\ell_1(R_\Phi))^\gamma = A_3$$

şeklindedir.

İspat. $t = (t_k) \in \omega$ olsun. $B = (b_{nk})$ matrisi

$$b_{nk} = \begin{cases} \sum_{j=k, k|j}^n t_j \frac{\mu(\frac{j}{k})}{\varphi(j)} \frac{Q_k}{q_j} & , \quad 1 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlansın. Herhangi bir $x = (x_n) \in \ell_p(R_\Phi)$ için

$$\sum_{k=1}^n t_k x_k = \sum_{k=1}^n t_k \left(\sum_{j|k} \frac{\mu(\frac{k}{j})}{\varphi(k)} \frac{Q_j}{q_k} y_j \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=k, k|j}^n t_j \frac{\mu(\frac{j}{k})}{\varphi(j)} \frac{Q_k}{q_j} \right) y_k = (By)_n \quad (4.16)$$

elde edilir. Bu eşitlikten $x \in \ell_p(R_\Phi)$ iken $tx \in cs$ olması için gerek ve yeter şartın $y \in \ell_p$ iken $By \in c$ olması gerektiği sonucu çıkar. Böylece $t \in (\ell_p(R_\Phi))^\beta$ olması için gerek ve yeter şartın $B \in (\ell_p, c)$ ($1 \leq p < \infty$) olması gerektiği görülür. Yardımcı Teorem 4.1 kullanılarak $(\ell_p(R_\Phi))^\beta = A_1 \cap A_2$ ve $(\ell_1(R_\Phi))^\beta = A_1 \cap A_3$ elde edilir.

Ayrıca eşitlik (4.16) kullanılarak $x \in \ell_p(R_\Phi)$ iken $tx \in bs$ olması için gerek ve yeter şartın $y \in \ell_p$ iken $By \in \ell_\infty$ olması gerektiği sonucuna varılır. Böylece $t \in (\ell_p(R_\Phi))^\gamma$ olması için gerek ve yeter şartın $B \in (\ell_p, \ell_\infty)$ ($1 \leq p < \infty$) olması gerektiği görülür. Yardımcı Teorem 4.1 kullanılarak $(\ell_p(R_\Phi))^\gamma = A_2$ ve $(\ell_1(R_\Phi))^\gamma = A_3$ elde edilir.

□



5. $\ell_p(R_\Phi)$ UZAYI ÜZERİNDE BAZI MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde bir matrisin $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $(\ell_p(R_\Phi), \ell_\infty)$, $(\ell_p(R_\Phi), c)$, $(\ell_p(R_\Phi), c_0)$, $(\ell_p(R_\Phi), \ell_1)$ sınıflarından birine ait olması için sağlaması gereken şartlar karakterize edilecektir. Bölüm boyunca $D = (d_{nk})$ sonsuz bir matris olmak üzere $d(n, k) = \sum_{j=0}^n d_{jk}$ ifadesi kullanılacaktır.

Teorem 5.1. $1 \leq p < \infty$ ve Y bir dizi uzayı olsun. Bu durumda $\mathcal{A} = (a_{nk})$ matrisinin $(\ell_p(R_\Phi), Y)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$d_{mk}^{(n)} = \begin{cases} 0 & , \quad k > m \\ \sum_{j=k, k|j}^m a_{nj} \frac{\mu(\frac{j}{k})}{\phi(k)} \frac{Q_k}{q_j} & , \quad 0 \leq k \leq m \end{cases} \quad (5.1)$$

ve $d_{nk} = \sum_{j=k, k|j}^\infty a_{nj} \frac{\mu(\frac{j}{k})}{\phi(k)} \frac{Q_k}{q_j}$ olmak üzere

$$\text{her bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } D^{(n)} = (d_{mk}^{(n)}) \in (\ell_p, c), \quad (5.2)$$

$$D = (d_{nk}) \in (\ell_p, Y) \quad (5.3)$$

olmasıdır.

İspat. Teoremin ispatı [36, Theorem 4.1] ile benzer yöntemle yapılır. $\square$

Yardımcı Teorem 4.1 ile Teorem 5.1 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 5.2.

(a) $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_1(R_\Phi), \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\text{her bir } n, k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{m \rightarrow \infty} d_{mk}^{(n)} \text{ mevcut} \quad (5.4)$$

$$\text{her bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } \sup_{m, k} |d_{mk}^{(n)}| < \infty \quad (5.5)$$

ifadelerinin sağlanması ve a_{nk} yerine d_{nk} alınarak (4.6) ifadesinin sağlanmasıdır.

(b) $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_1(R_\Phi), c)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4) ve (5.5) ifadelerinin sağlanması ve ayrıca a_{nk} yerine d_{nk} alınarak (4.3) ve (4.6) ifadelerinin sağlanmasıdır.

(c) $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_1(R_\Phi), c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4) ve (5.5) ifadelerinin sağlanması ve ayrıca a_{nk} yerine d_{nk} alınarak (4.6) ve (4.7) ifadelerinin sağlanmasıdır.

(d) $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_1(R_\Phi), \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4) ve (5.5) ifadelerinin sağlanması ve ayrıca a_{nk} yerine d_{nk} alınarak (4.2) ifadesinin sağlanmasıdır.

Teorem 5.3. $1 < p < \infty$ olsun.

(a) $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_p(R_\Phi), \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4) ve

$$\text{her bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } \sup_m \sum_{k=0}^m |d_{mk}^{(n)}|^q < \infty \quad (5.6)$$

ifadelerinin sağlanması ve ayrıca a_{nk} yerine d_{nk} alınarak (4.4) ifadesinin sağlanmasıdır.

(b) $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_p(R_\Phi), c)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4) ve (5.6) ifadelerinin sağlanması ve ayrıca a_{nk} yerine d_{nk} alınarak (4.3) ve (4.4) ifadelerinin sağlanmasıdır.

(c) $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_p(R_\Phi), c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4) ve (5.6) ifadelerinin sağlanması ve ayrıca a_{nk} yerine d_{nk} alınarak (4.4) ve (4.7) ifadelerinin sağlanmasıdır.

(d) $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_p(R_\Phi), \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4) ve (5.6) ifadelerinin sağlanması ve ayrıca a_{nk} yerine d_{nk} alınarak (4.1) ifadesinin sağlanmasıdır.

Aşağıdaki sonuçlar Theorem 5.2 ve Teorem 5.3'den elde edilir.

Sonuç 5.4. (a) $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_1(R_\Phi), bs)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4), (5.5) ifadelerinin sağlanması ve ayrıca a_{nk} yerine $d(n, k)$ alınarak (4.6) ifadesinin sağlanmasıdır.

(b) $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_1(R_\Phi), cs)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4), (5.5) ifadelerinin sağlanması ve ayrıca a_{nk} yerine $d(n, k)$ alınarak (4.3), (4.6) ifadelerinin sağlanmasıdır.

(c) $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_1(R_\Phi), cs_0)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4), (5.5) ifadelerinin sağlanması ve ayrıca a_{nk} yerine $d(n, k)$ alınarak (4.6), (4.7) ifadelerinin sağlanmasıdır.

Sonuç 5.5. $1 < p < \infty$ olsun.

(a) $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_p(R_\Phi), bs)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4), (5.6) ifadelerinin sağlanması ve ayrıca a_{nk} yerine $d(n, k)$ alınarak (4.4) ifadesinin sağlanmasıdır.

(b) $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_p(R_\Phi), cs)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4), (5.6) ifadelerinin sağlanması ve ayrıca a_{nk} yerine $d(n, k)$ alınarak (4.3), (4.4) ifadelerinin sağlanmasıdır.

(c) $\mathcal{A} = (a_{nk}) \in (\ell_p(R_\Phi), cs_0)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4), (5.6) ifadelerinin sağlanması ve ayrıca a_{nk} yerine $d(n, k)$ alınarak (4.4), (4.7) ifadelerinin sağlanmasıdır.



6. $\ell_p(R_\Phi)$ UZAYI ÜZERİNDE KOMPAKT OPERATÖRLER

Sonsuz bir $\mathcal{A} = (a_{nk})$ matrisi ile yeni bir $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{a}_{nk})$ matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\tilde{a}_{nk} = \sum_{j=k, k|j}^{\infty} \frac{\mu(\frac{j}{k})}{\varphi(j)} \frac{Q_k}{q_j} a_{nj} \quad (6.1)$$

şeklinde tanımlansın.

Bir $t = (t_k) \in \omega$ dizisi için yeni bir $\tilde{t} = (\tilde{t}_k)$ dizisi her $k \in \mathbb{N}$ için $\tilde{t}_k = \sum_{j=k, k|j}^{\infty} \frac{\mu(\frac{j}{k})}{\varphi(j)} \frac{Q_k}{q_j} t_j$ şeklinde verilsin.

Yardımcı Teorem 6.1. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $t = (t_k) \in (\ell_p(R_\Phi))^\beta$ olsun. Bu durumda $\tilde{t} = (\tilde{t}_k) \in \ell_q$ ve her $x = (x_k) \in \ell_p(R_\Phi)$ için

$$\sum_k t_k x_k = \sum_k \tilde{t}_k y_k \quad (6.2)$$

olur.

Yardımcı Teorem 6.2. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) Her $t = (t_k) \in (\ell_1(R_\Phi))^\beta$ için $\|t\|_{\ell_1(R_\Phi)}^* = \sup_k |\tilde{t}_k| < \infty$ olur.

(b) $1 < p < \infty$ ve her $t = (t_k) \in (\ell_p(R_\Phi))^\beta$ için $\|t\|_{\ell_p(R_\Phi)}^* = (\sum_k |\tilde{t}_k|^q)^{1/q} < \infty$ olur.

Yardımcı Teorem 6.3. X herhangi bir dizi uzayı ve $\mathcal{A} = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun.

$1 \leq p < \infty$ için $\mathcal{A} \in (\ell_p(R_\Phi), X)$ ise $\tilde{\mathcal{A}} \in (\ell_p, X)$ ve her $x \in \ell_p(R_\Phi)$ için $\mathcal{A}x = \tilde{\mathcal{A}}y$ olur.

İspat. İspat Yardımcı Teorem 6.1 kullanılarak elde edilir. □

Yardımcı Teorem 6.4. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\mathcal{A} \in (\ell_1(R_\Phi), \ell_p)$ ise

$$\|\mathcal{L}_{\mathcal{A}}\| = \|\mathcal{A}\|_{(\ell_1(R_\Phi), \ell_p)} = \sup_k \left(\sum_n |\tilde{a}_{nk}|^p \right)^{1/p} < \infty \quad (6.3)$$

olur.

Yardımcı Teorem 6.5. [37, Theorem 3.7] $X \supset \psi$ bir BK -uzayı olsun.

(a) $\mathcal{A} \in (X, \ell_\infty)$ ise $0 \leq \|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi \leq \limsup_n \|\mathcal{A}_n\|_X^*$ olur.

(b) $\mathcal{A} \in (X, c_0)$ ise $\|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi = \limsup_n \|\mathcal{A}_n\|_X^*$ olur.

(c) X uzayı AK özelliğine sahip veya $X = \ell_\infty$ ve $\mathcal{A} \in (X, c)$ ise $a = (a_k)$ ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için $a_k = \lim_n a_{nk}$ olmak üzere

$$\frac{1}{2} \limsup_n \|\mathcal{A}_n - a\|_X^* \leq \|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi \leq \limsup_n \|\mathcal{A}_n - a\|_X^* \quad (6.4)$$

olur.

Çalışmanın devamında $\mathcal{K}_r$ ile r den büyük elemanlı $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinden oluşan $\mathcal{K}$ nin alt ailesi gösterilecektir.

Yardımcı Teorem 6.6. [37, Theorem 3.11] $X \supset \psi$ bir BK -uzayı olsun. $\mathcal{A} \in (X, \ell_1)$ ise

$$\lim_r \left(\sup_{N \in \mathcal{K}_r} \left\| \sum_{n \in N} \mathcal{A}_n \right\|_X^* \right) \leq \|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi \leq 4 \lim_r \left(\sup_{N \in \mathcal{K}_r} \left\| \sum_{n \in N} \mathcal{A}_n \right\|_X^* \right) \quad (6.5)$$

olur. Ayrıca $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart $\lim_r \left(\sup_{N \in \mathcal{K}_r} \left\| \sum_{n \in N} \mathcal{A}_n \right\|_X^* \right) = 0$ olmasıdır.

Teorem 6.7. $1 < p < \infty$ olsun.

1. $\mathcal{A} \in (\ell_p(R_\Phi), \ell_\infty)$ ise

$$0 \leq \|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi \leq \limsup_n \left(\sum_k |\tilde{a}_{nk}|^q \right)^{1/q} \quad (6.6)$$

olur.

2. $\mathcal{A} \in (\ell_p(R_\Phi), c)$ ise $\tilde{a} = (\tilde{a}_k)$ ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\tilde{a}_k = \lim_n \tilde{a}_{nk}$ olmak üzere

$$\frac{1}{2} \limsup_n \left(\sum_k |\tilde{a}_{nk} - \tilde{a}_k|^q \right)^{1/q} \leq \|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi \leq \limsup_n \left(\sum_k |\tilde{a}_{nk} - \tilde{a}_k|^q \right)^{1/q} \quad (6.7)$$

olur.

3. $\mathcal{A} \in (\ell_p(R_\Phi), c_0)$ ise

$$\|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi = \limsup_n \left(\sum_k |\tilde{a}_{nk}|^q \right)^{1/q} \quad (6.8)$$

olur.

4. $\mathcal{A} \in (\ell_p(R_\Phi), \ell_1)$ ise $\|\mathcal{A}\|_{(\ell_p(R_\Phi), \ell_1)}^{(r)} = \sup_{N \in \mathcal{K}_r} (\sum_k |\sum_{n \in N} \tilde{a}_{nk}|^q)^{1/q}$ ($r \in \mathbb{N}$) olmak üzere

$$\lim_r \|\mathcal{A}\|_{(\ell_p(R_\Phi), \ell_1)}^{(r)} \leq \|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi \leq 4 \lim_r \|\mathcal{A}\|_{(\ell_p(R_\Phi), \ell_1)}^{(r)} \quad (6.9)$$

olur.

İspat.

1. $\mathcal{A} \in (\ell_p(R_\Phi), \ell_\infty)$ olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^\infty a_{nk}x_k$ serisi yakınsak olduğundan $\mathcal{A}_n \in (\ell_p(R_\Phi))^\beta$ olur. Yardımcı Teorem 6.2 (b) kullanılarak her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\|\mathcal{A}_n\|_{\ell_p(R_\Phi)}^* = \|\tilde{\mathcal{A}}_n\|_{\ell_p}^* = \|\tilde{\mathcal{A}}_n\|_{\ell_q} = (\sum_k |\tilde{a}_{nk}|^q)^{1/q}$ elde edilir. Yardımcı Teorem 6.5 (a) dan

$$0 \leq \|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi \leq \limsup_n \left(\sum_k |\tilde{a}_{nk}|^q \right)^{1/q} \quad (6.10)$$

olduğu görülür.

2. $\mathcal{A} \in (\ell_p(R_\Phi), c)$ olsun. Yardımcı Teorem 6.3 den $\tilde{\mathcal{A}} \in (\ell_p, c)$ elde edilir. Böylece Yardımcı Teorem 6.5 (c) den $\tilde{a} = (\tilde{a}_k)$ ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\tilde{a}_k = \lim_n \tilde{a}_{nk}$ olmak üzere

$$\frac{1}{2} \limsup_n \|\tilde{\mathcal{A}}_n - \tilde{a}\|_{\ell_p}^* \leq \|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi \leq \limsup_n \|\tilde{\mathcal{A}}_n - \tilde{a}\|_{\ell_p}^* \quad (6.11)$$

olduğu görülür. Ayrıca Yardımcı Teorem 2.41 her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\|\tilde{\mathcal{A}}_n - \tilde{a}\|_{\ell_p}^* = \|\tilde{\mathcal{A}}_n - \tilde{a}\|_{\ell_q} = (\sum_k |\tilde{a}_{nk} - \tilde{a}_k|^q)^{1/q}$ olmasını gerektirir. Bu ise ispatı tamamlar.

3. $\mathcal{A} \in (\ell_p(R_\Phi), c_0)$ olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\|\mathcal{A}_n\|_{\ell_p(R_\Phi)}^* = \|\tilde{\mathcal{A}}_n\|_{\ell_p}^* = \|\tilde{\mathcal{A}}_n\|_{\ell_q} = (\sum_k |\tilde{a}_{nk}|^q)^{1/q}$ olduğundan Yardımcı Teorem 6.5 (b) den

$$\|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi = \limsup_n \left(\sum_k |\tilde{a}_{nk}|^q \right)^{1/q} \quad (6.12)$$

sonucuna varılır.

4. $\mathcal{A} \in (\ell_p(R_\Phi), \ell_1)$ olsun. Yardımcı Teorem 6.3 den $\tilde{\mathcal{A}} \in (\ell_p, \ell_1)$ elde edilir. Yardımcı Teorem 6.6 kullanılarak

$$\lim_r \left(\sup_{N \in \mathcal{K}_r} \left\| \sum_{n \in N} \tilde{\mathcal{A}}_n \right\|_{\ell_p}^* \right) \leq \|\mathcal{L}_{\mathcal{A}}\|_{\mathcal{X}} \leq 4 \lim_r \left(\sup_{N \in \mathcal{K}_r} \left\| \sum_{n \in N} \tilde{\mathcal{A}}_n \right\|_{\ell_p}^* \right) \quad (6.13)$$

olduğu görülür. Ayrıca Yardımcı Teorem 2.41 $\|\sum_{n \in N} \tilde{\mathcal{A}}_n\|_{\ell_p}^* = \|\sum_{n \in N} \tilde{\mathcal{A}}_n\|_{\ell_q} = (\sum_k |\sum_{n \in N} \tilde{a}_{nk}|^q)^{1/q}$ olmasını gerektirir. Bu ise ispatı tamamlar.

□

Sonuç 6.8. $1 < p < \infty$ olsun.

1.

$$\lim_n \left(\sum_k |\tilde{a}_{nk}|^q \right)^{1/q} = 0 \quad (6.14)$$

ise $\mathcal{A} \in (\ell_p(R_\Phi), \ell_\infty)$ için $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ operatörü kompaktır.

2. $\mathcal{A} \in (\ell_p(R_\Phi), c)$ için $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_n \left(\sum_k |\tilde{a}_{nk} - \tilde{a}_k|^q \right)^{1/q} = 0 \quad (6.15)$$

olmasıdır.

3. $\mathcal{A} \in (\ell_p(R_\Phi), c_0)$ için $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_n \left(\sum_k |\tilde{a}_{nk}|^q \right)^{1/q} = 0 \quad (6.16)$$

olmasıdır.

4. $\mathcal{A} \in (\ell_p(R_\Phi), \ell_1)$ için $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart

$\|\mathcal{A}\|_{(\ell_p(R_\Phi), \ell_1)}^{(r)} = \sup_{N \in \mathcal{K}_r} (\sum_k |\sum_{n \in N} \tilde{a}_{nk}|^q)^{1/q}$ olmak üzere

$$\lim_r \|\mathcal{A}\|_{(\ell_p(R_\Phi), \ell_1)}^{(r)} = 0 \quad (6.17)$$

olmasıdır.

Teorem 6.9.

1. $\mathcal{A} \in (\ell_1(R_\Phi), \ell_\infty)$ ise

$$0 \leq \|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi \leq \limsup_n \left(\sup_k |\tilde{a}_{nk}| \right) \quad (6.18)$$

olur.

2. $\mathcal{A} \in (\ell_1(R_\Phi), c)$ ise

$$\frac{1}{2} \limsup_n \left(\sup_k |\tilde{a}_{nk} - \tilde{a}_k| \right) \leq \|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi \leq \limsup_n \left(\sup_k |\tilde{a}_{nk} - \tilde{a}_k| \right) \quad (6.19)$$

olur.

3. $\mathcal{A} \in (\ell_1(R_\Phi), c_0)$ ise

$$\|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi = \limsup_n \left(\sup_k |\tilde{a}_{nk}| \right) \quad (6.20)$$

olur.

4. $\mathcal{A} \in (\ell_1(R_\Phi), \ell_1)$ ise

$$\|\mathcal{L}_\mathcal{A}\|_\chi = \lim_r \left(\sup_k \sum_{n=r}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}| \right) \quad (6.21)$$

olur.

İspat. Teorem 6.7 nin ispatına benzer şekilde yapılır. □

Sonuç 6.10.

- 1.

$$\lim_n \left(\sup_k |\tilde{a}_{nk}| \right) = 0 \quad (6.22)$$

ise $\mathcal{A} \in (\ell_1(R_\Phi), \ell_\infty)$ için $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ kompaktır.

2. $\mathcal{A} \in (\ell_1(R_\Phi), c)$ için $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_n \left(\sup_k |\tilde{a}_{nk} - \tilde{a}_k| \right) = 0 \quad (6.23)$$

olmasıdır.

3. $\mathcal{A} \in (\ell_1(R_\Phi), c_0)$ için $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_n \left(\sup_k |\tilde{a}_{nk}| \right) = 0 \quad (6.24)$$

olmasıdır.

4. $\mathcal{A} \in (\ell_1(R_\Phi), \ell_1)$ için $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_r \left(\sup_k \sum_{n=r}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}| \right) = 0 \quad (6.25)$$

olmasıdır.



7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Riesz matrisi ve regüler bir matris olan Euler totient matrisi kullanılarak yeni bir matris elde edilmiştir. Bu matrisin mutlak p -toplanabilir dizilerin uzayında matris etki alanı tanımlanarak ℓ_p uzayına lineer olarak izomorf yeni bir Banach dizi uzayı olan $\ell_p(R_\Phi)$ uzayı tanımlanmıştır. Eğer özel olarak her $k \in \mathbb{N}$ için $q_k = 1$ seçilirse bu uzay İlkhan ve Kara [20] tarafından tanımlanan $\ell_p(\Phi)$ uzayına dönüşmektedir. Bu uzay ile ilgili çeşitli kapsama bağıntıları verildikten sonra dual uzayları belirlenmiş ve bu uzay üzerinde bazı matris dönüşümlerinin sağlaması gereken şartlar sunulmuştur. Son olarak nonkompaktlık Hausdorff ölçüsü yardımıyla çeşitli matris dönüşümlerinin kompakt olması için gereken şartlar belirlenmiştir. Her $k \in \mathbb{N}$ için $q_k = 1$ alınma durumunda elde edilen tüm sonuçlar [20] nolu çalışmada verilen sonuçlara dönüşür. Dolayısıyla bu sonuçlar daha geneldir.

Bu tez çalışmasının dizi uzayları ve matris dönüşümleri konusunda yeni çalışmalara yön vereceği düşünülmektedir. İlk olarak elde edilen bu uzayda $1 \leq p < \infty$ yerine $p = (p_k)$ dizisi alınarak paranormlu uzay elde edilebilir ve benzer sonuçlar üzerine çalışılabilir. Daha sonra bu yeni matris yardımıyla yeni hemen hemen yakınsak dizi uzayları tanımlanabilir. Matris etki alanı kavramı yardımıyla tanımlanan Banach uzaylarının çeşitli geometrik ve topolojik özellikleri üzerine çalışmalar yapılabilir.

8. KAYNAKLAR

- [1] H. Kızmaz, "On certain sequence spaces," *Canadian Mathematical Bulletin*, c. 24, sayı 2, ss. 169-176, 1981.
- [2] M. Et, "On some difference sequence spaces", *Turkish Journal of Mathematics*, c. 17, ss. 18-24, 1993.
- [3] M. Mursaleen, "Generalized spaces of difference sequences", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 203, sayı 3, ss. 738-745, 1996.
- [4] M. Mursaleen ve A. K. Noman, "On the spaces of λ -convergent and bounded sequences", *Thai Journal of Mathematics*, c. 8, sayı 2, ss. 311-329, 2012.
- [5] B. Altay ve F. Başar, "Certain topological properties and duals of the matrix domain of a triangle matrix in a sequence space", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 336, ss. 632-645, 2007.
- [6] C. Aydın ve F. Başar, "Some new sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ ", *Demonstratio Mathematica*, c. 38, ss. 641-656, 2005.
- [7] M. Başarır ve E. E. Kara, "On some difference sequence spaces of weighted means and compact operators", *Annals of Functional Analysis*, c. 2, sayı 2, ss. 114-129, 2011.
- [8] E. E. Kara, "Some topological and geometrical properties of new Banach sequence spaces", *Journal of Inequalities and Applications*, c. 2013, sayı 38, ss. 1-15, 2013.
- [9] M. Candan, "Almost convergence and double sequential band matrix", *Acta Mathematica Scientia*, c. 34, sayı 2, ss. 354-366, 2014.
- [10] E. E. Kara ve M. İlhan, "Some properties of generalized Fibonacci sequence spaces", *Linear and Multilinear Algebra*, c. 64, sayı 11, ss. 2208-2223, 2016.
- [11] B. Altay ve F. Başar, "Some paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type", *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, c. 30, sayı 4, 2006.
- [12] B. Altay, F. Başar, ve M. Mursaleen, "On the Euler sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ I", *Information Sciences*, c. 176, sayı 10, ss. 1450-1462, 2006.
- [13] F. Başar ve B. Altay, "On the space of sequences of p -bounded variation and related matrix mappings", *Ukrainian Mathematical Journal*, c. 55, sayı 1, ss. 136-147, 2003.
- [14] F. Başar, *Summability Theory and Its Applications*, İstanbul, Türkiye: Bentham Science Publishers, 2012.

- [15] M. Mursaleen ve A. K. Noman, "On some new difference sequence spaces of non-absolute type", *Mathematical and Computer Modelling*, c. 52, sayı 3-4, ss. 603-617, 2010.
- [16] M. Başarır ve E. E. Kara, "On the B-difference sequence space derived by generalized weighted mean and compact operators", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 391, sayı 1, ss. 67-81, 2012.
- [17] M. Başarır ve E. E. Kara, "On compact operators on the Riesz B^m -difference sequence space", *Iranian Journal of Science and Technology*, c. 35, sayı 4, ss. 279-285, 2011.
- [18] E. E. Kara ve M. Başarır, "On compact operators and some Euler B^m -difference sequence spaces" *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 379, sayı 2, ss. 499-511, 2011.
- [19] M. Mursaleen ve A. K. Noman, "The Hausdorff measure of noncompactness of matrix operatorson some BK spaces", *Operators and Matrices*, c. 5, ss. 473-486, 2011.
- [20] M. İlkan ve E. E. Kara, "A new Banach space defined by Euler totient matrix operator", *Operators and Matrices*, c. 13, sayı 2, ss. 527-544, 2019.
- [21] M. İlkan, "Matrix domain of a regular matrix derived by Euler totient function in the spaces c_0 and c ", *Mediterranean Journal of Mathematics*, c. 17, sayı 1, ss. 1-21, 2020.
- [22] M. İlkan, S. Demiriz, ve E. E. Kara, "A new paranormed sequence space defined by Euler totient matrix", *Karaelmas Science and Engineering Journal*, c. 9, sayı 2, ss. 277-282, 2019.
- [23] S. Demiriz ve S. Erdem, "Domain of Euler-totient matrix operator in the space $\mathcal{L}_p$ ", *The Korean Journal of Mathematics*, c. 28, sayı 2, ss. 361-378, 2020.
- [24] S. Demiriz, M. İlkan, ve E. E. Kara, "Almost convergence and Euler totient matrix", *Annals of Functional Analysis*, c. 11, ss. 604-616, 2020.
- [25] S. Erdem ve S. Demiriz, "4-dimensional Euler-totient matrix operator and some double sequence spaces", *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, c. 8, sayı 2, ss. 110-122, 2020.
- [26] G. C. Hazar Güleç ve M. İlkan, "A new paranormed series space using Euler totient means and some matrix transformations", *The Korean Journal of Mathematics*, c. 28, sayı 2, ss. 205-221, 2020.
- [27] M. İlkan, "Certain geometric properties and matrix transformations on a newly introduced Banach space", *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, c. 3, sayı 1, ss. 45-51 2020.
- [28] M. İlkan ve G. C. Hazar Güleç, "A study on absolute Euler totient series space and certain matrix transformations", *Mugla Journal of Science and Technology*, c. 6, sayı 1, ss. 112-119, 2020.
- [29] B. Musayev ve M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Kütahya, Türkiye: Balcı Yayınları, 2000.

- [30] M. Mursaleen, *Elements of Metric Spaces*, New Delhi, India: Anamaya Publishers, 2011.
- [31] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1970.
- [32] E. Malkowsky ve V. Rakocevic, "An introduction into the theory of sequence spaces and measures of noncompactness", *Zbornik Radova*, sayı 17, ss. 143-234, 2000.
- [33] V. Rakocevic, "Measures of noncompactness and some applications", *Filomat*, c. 12, ss. 87-120, 1998.
- [34] E. Kovac, "On ϕ convergence and ϕ density", *Mathematica Slovaca*, c. 55, ss. 329-351, 2005.
- [35] M. Stieglitz ve H. Tietz, "Matrixtransformationen von folgenräumen eine ergebnisübersicht", *Mathematische Zeitschrift*, c. 154, sayı 1, ss. 1-16, 1977.
- [36] M. Kirişci ve F. Başar, "Some new sequence spaces derived by the domain of generalized difference matrix", *Computers & Mathematics with Applications*, c. 60, sayı 5, ss. 1299-1309, 2010.
- [37] M. Mursaleen ve A. K. Noman, "Compactness by the Hausdorff measure of noncompactness", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, c. 73, sayı 8, ss. 2541-2557, 2010.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mehmet Akif BAYRAKDAR

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2021
Lisans	Matematik	Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi	2017

YAYINLAR

Merve İlhan Kara, Mehmet Akif Bayrakdar, "A study on matrix domain of Riesz-Euler totient matrix in the space of p -absolutely summable sequences", *Communications in Advanced Mathematical Sciences*, c. 4, sayı 1, ss.1-12, 2021.