

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LANE-EMDEN DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMİ İLE NÜMERİK
ÇÖZÜMÜ

Gonca ÖZDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2019

Tezin Başlığı : LANE-EMDEN DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMİ
İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Tezi Hazırlayan : Gonca ÖZDEMİR

Sınav Tarihi : 28.06.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değeriendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. A. Refik BAHADIR

İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Ali ÖZDEŞ

İnönü Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Bilge İNAN

Kilis 7 Aralık Üniversitesi

Prof.Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Lane-Emden Denkleminin Sonlu Fark Yöntemi İle Nümerik Çözümü” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Gonca ÖZDEMİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LANE-EMDEN DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMİ İLE NÜMERİK
ÇÖZÜMÜ

Gonca ÖZDEMİR

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

39+iv sayfa

2019

Danışman : Prof. Dr. A. Refik BAHADIR

Bu yüksek lisans tezi dört bölüm olarak düzenlendi.

Birinci bölüm giriş bölümü olarak tasarlandı. Bu bölümde, Lane-Emden denklemi ve çözüm yöntemleri ile ilgili literatür taraması verildi.

İkinci bölüm, bu tez kapsamında kullanılacak olan bazı temel bilgileri içermektedir.

Üçüncü bölümde, adi diferansiyel denklemlerdeki sınır değer problemlerinin sonlu farklar yöntemi ile nümerik çözümünün genel yapısı verildi.

Dördüncü bölümde ise, farklı sınır şartları altında altı farklı model problemin sonlu farklar yöntemi ile nümerik çözümleri yapıldı. Elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılarak L_2 ve L_∞ hata normlarıyla birlikte tablolar halinde sunuldu.

ANAHTAR KELİMELEER: Lane-Emden Denklemi, Sonlu-Fark Yöntemi

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

NUMERICAL SOLUTION OF LANE-EMDEN EQUATION WITH FINITE-DIFFERENCE METHOD

Gonca ÖZDEMİR

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

39+iv pages

2019

Supervisor : Prof.Dr. A. Refik BAHADIR

This master thesis was organized in four chapters.

The first chapter is designed as an introduction section. In this chapter, a literature review related to the Lane-Emden equation and its solution methods is given.

The second chapter contains some basic information to be used in this thesis.

In the third chapter a general structure was given about the numerical solution of boundary value problems in ordinary differential equations by the finite difference method.

In the fourth chapter numerical solutions of six different model problems with different boundary conditions were made with finite difference method. The obtained results are compared with analytical solutions and they are presented with their error norms L_2 ve L_∞ in the tables.

KEYWORDS: Lane-Emden Equation, Finite-Difference Method

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince engin bilgisi ve titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalışmamın her aşamasında ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan tez danışmanım çok değerli hocam Prof. Dr. Ahmet Refik BAHADIR' a, bölüm başkanımız Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e, tez yazımında kullandığım latex programının kullanımında yardımını esirgemeyen Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR' e, yardımlarından dolayı Doç. Dr. N. Murat YAĞMURLU' ya, ayrıca her zaman desteklerini aldığım sevgili aileme ve çok kıymetli eşime teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
TABLolar DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR, TEOREMLER VE YÖNTEMLER	4
3. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDEKİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	12
3.1. Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları.....	12
3.2. Lineer Problemlerin Sonlu Fark Yöntemi İle Çözümü	14
3.3. Lineer Olmayan Problemlerin Sonlu Fark Yöntemi İle Çözümü	16
4. LANE-EMDEN DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ	18
4.1. Model Problemler	19
4.1.1. Problem 1	19
4.1.2. Problem 2	22
4.1.3. Problem 3	25
4.1.4. Problem 4	27
4.1.5. Problem 5	29
4.1.6. Problem 6	31
ÖZGEÇMİŞ.....	39

TABLolar DİZİNİ

Tablo 4.1	Farklı n değerleri için Problem 1' in nümerik çözümlerinin tam çözümle karşılaştırılması	20
Tablo 4.2	Problem 1' de n' nin bazı değerleri için elde edilen L_∞ hata normlarının [55] ve [54]' teki sonuçlarla karşılaştırılması	21
Tablo 4.3	Farklı n değerleri için Problem 2' nin nümerik çözümlerinin tam çözümle karşılaştırılması	23
Tablo 4.4	Problem 2' de n' nin bazı değerleri için elde edilen L_∞ hata normlarının [55] ve [54]' teki sonuçlarla karşılaştırılması	24
Tablo 4.5	Farklı n değerleri için Problem 3' ün nümerik çözümlerinin tam çözümle karşılaştırılması	26
Tablo 4.6	Problem 3' te n' nin bazı değerleri için elde edilen L_∞ hata normlarının [55] ve [54]' teki sonuçlarla karşılaştırılması	26
Tablo 4.7	Farklı n değerleri için Problem 4' ün nümerik çözümlerinin tam çözümle karşılaştırılması	28
Tablo 4.8	Problem 4' te n' nin bazı değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının [56]' daki sonuçlarla karşılaştırılması	28
Tablo 4.9	Farklı n değerleri için Problem 5' in nümerik çözümlerinin tam çözümle karşılaştırılması	30
Tablo 4.10	Problem 5' te n' nin bazı değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının [56]' daki sonuçlarla karşılaştırılması	30
Tablo 4.11	Farklı n değerleri için Problem 6' nın nümerik çözümlerinin tam çözümle karşılaştırılması	32
Tablo 4.12	Problem 6' da n' nin bazı değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının [56]' daki sonuçlarla karşılaştırılması	32

1. GİRİŞ

Gerçek dünya problemlerinin çözümü için oluşturulan matematiksel modeller genellikle diferansiyel denklemlerden oluşur. Son yıllarda, ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler ile formüle edilen problemlerin çözümü, Matematik, Fizik ve diğer uygulamalı bilimlerde çalışan birçok bilim insanının ilgi odağı olmuştur. Bu tür denklemlerden biri de Lane-Emden tipi denklemlerdir. Lane-Emden tipi denklemler gerek birçok fiziksel olayın matematiksel modellemesinde ve gerekse yeni nümerik yöntemlerin etkinliğinin test edilmesinde önemli bir yere sahiptir.

Lane-Emden denklemi ilk defa astrofizikçiler Jonathan Homer ve Robert Emden' in gazların küresel bulutlarının termal davranışını, izotermal gaz kürelerini ve termiyonik akıntılar teorisini incelemeleri sırasında ortaya çıkmıştır [1, 2]. Bunun yanı sıra Lane-Emden denklemi, matematiksel fizik ve yıldız yapısı teorisi gibi astrofizik alanındaki birtakım olayları modellemek için kullanılmıştır [1]. Lane-Emden denklemi yıldız yapılarının teorisinde temel bir denklemdir. Bu denklem aynı zamanda fizik, kimya, biyoloji, biyokimya ve izotermal olmayan difüzyon işlemleri gibi birçok alanda sıcaklık ve konsantrasyonun değişimini de tanımlar. Bunlar gözenekli silindir ve küresel katalisler içerisindeki işlemler [1] , küresel ve silindirik nesnelerin katılaşması [3] ve dikdörtgensel bir levha içinde ısı patlaması gibi işlemlerdir [4]. Lane-Emden denklemi aynı zamanda oksijen difüzyonunda, Michaelis-Menten kaldırma kinetiğine sahip küresel hücrelerdeki oksijen difüzyonunda [5] ve insan başındaki ısı iletiminin modellenmesinde de kullanılır [6–8].

$x = 0$ da meydana gelen tekil davranış Lane-Emden denklemini çözmedeki ana zorluktur. Lane-Emden denklemini çözmek için birtakım teknikler ve yöntemler kullanılmıştır. Bunlar; sıralama yöntemi [9, 10], tanjant giriş yöntemi [8], sonlu

fark yöntemleri [11–13], spline sonlu fark yöntemleri [14], B-Spline yöntemi [15], spline yöntemi [16], Chebyshev ekonomizasyon yöntemi [17], Kübik spline yöntemi [18–21], Adomian ayrışma yöntemi [21–24], Adomian ayrışma yönteminin Green Teoremi ile kullanımı [25, 26], varyasyonel iterasyon yöntemi [27–29], optimal varyasyonel iterasyon yöntemi [30], homotopy analiz yöntemi [31] ve diğer çalışmalardır.

Öte yandan, denklemin hem lineer olmayışı hem de orijindeki tekil(singüler) davranışı onu matematikçiler için de cazip kılmıştır. Lineer olmayan diferansiyel denklemleri çözmek için geliştirilen yeni yöntemleri test etmek için adeta bir prototip denklem olarak görülmektedir.

Bender ve arkadaşları tarafından, denklemin çözümü için δ yöntemi adı verilen bir pertürbasyon yöntemi önerilmiştir [32]. Mandelzwing ve Tabakin [33] Lane-Emden denkleminin çözümü için quasilinearization yöntemini uygulamışlardır. Adomian ayrışma yöntemini ise 1993’ te Shawagfeh [34] ve 2001’ de Wazwaz [35] kullanmıştır. Ayrıca Wazwaz [36], Lane-Emden denklemine benzer şekilde non-lineer olan adi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerine yönelik modifiye edilmiş dekompozisyon yöntemini kullanmıştır. Liao [37], 2003 ’ te ve Van Gorder ve Vajvelu [39] ise 2008’ de Lane-Emden tipi denklemlerin çözümünde yakınsaklık bölgelerini ayarlamanın kolay bir yolunu gösteren homotopi analiz yöntemini kullanmışlardır. 2003’ te He [38] problemin analitik çözümü için Ritz’ in yönteminin kullanılabileceğini göstermiştir. Ramos ise yaptığı bir dizi çalışmada Lane-Emden denkleminin çözümü için lineerleştirme yöntemi, seri yaklaşımı ve parçalı-uyarlamalı ayrıştırma yöntemleri gibi farklı teknikler önermiştir [40–43]. Yousefi, Lane-Emden denklemlerini integral denklemlerine dönüştüren ve elde edilen integral denklemlerini Legendre dalgacık yaklaşımlarını kullanarak çözen sayısal bir yöntem sunmuştur [44]. Rational Legendre pseudospectral yaklaşım [45], Hermite fonksiyonları yöntemi [46], Sinc-Collocation yöntemi [47]

ve modifiye edilmiş Legendre-spektral yöntemi [48] bazı diğer sayısal tekniklerdir. Son zamanlarda ise Pandey ve Kumar [49], Pandey ve arkadaşları [50] Lane-Emden denkleminin çözümü için Bernstein ve Legendre operasyonel matris diferansiyel yöntemini kullanmışlardır.



2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR, TEOREMLER VE YÖNTEMLER

Bu bölümde ilerideki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teoremler ve yöntemler yer almaktadır.

Tanım 2.0.1. *Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken(birden fazla bağımlı değişkenin olması durumunda bağımlı değişkenler) denklemde görülen çeşitli mertebeden türevlere göre birinci dereceden ve katsayılar bağımsız değişkenin fonksiyonu ise denkleme lineer diferansiyel denklem denir. Bağımsız değişken x ve bağımlı değişken y olmak üzere n . mertebeden lineer diferansiyel denklem*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

şeklindedir [51].

Tanım 2.0.2. *Eğer bağımlı değişkenin kendisi herhangi bir trigonometrik veya logaritmik fonksiyonların argümenti şeklinde ya da üstel fonksiyon olarak denklemde bulunuyorsa bu durumlarda lineerliği bozar. Lineer olmayan bir diferansiyel denkleme non-lineer diferansiyel denklem denir [51].*

Tanım 2.0.3. *Bağımlı değişkenin kendisi veya türevleri bağımsız değişkenin bir tek değeri için verilmişse bu şart ya da şartlara başlangıç şartı ya da şartları denir. Diferansiyel denklemin başlangıç şartlarını sağlayan bir çözümünün bulunması problemine de başlangıç değer problemi denir [51].*

Tanım 2.0.4. *Bağımlı değişkenin kendisi veya türevleri bağımsız değişkenin birden fazla değeri için verilmişse bu şartlara sınır şartları denir. Diferansiyel denklemin sınır şartlarını sağlayan bir çözümünün bulunması problemine de sınır değer problemi denir [51].*

Tanım 2.0.5. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere Ω bölgesinden alınan her (x, y_0) ve (x, y_1) için

$$|f(x, y_0) - f(x, y_1)| \leq L |y_0 - y_1|$$

oluyorsa f fonksiyonuna Ω bölgesinde y değişkenine göre Lipschitz şartını sağlıyor denir. Buradaki L sabitine Lipschitz sabiti denir [52].

Teorem 2.0.1 (Varlık ve Teklik Teoremi).

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

sınır-değer problemi verilsin.

$$\Omega = \{(x, y, y') : a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty\}$$

bölgesinde $f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ fonksiyonları sürekli olsunlar.

- i) $\forall (x, y, y') \in \Omega$ için $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} > 0$
- ii) $\forall (x, y, y') \in \Omega$ için $\left| \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} \right| \leq M$

olacak şekilde M sayısı varsa yukarıda verilen sınır-değer probleminin bir tek çözümü vardır [52].

Tanım 2.0.6. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna vektör normu denir.

- 1 $\forall X \in \mathbb{R}^n$ için $\|X\| \geq 0$,
- 2 $\forall X \in \mathbb{R}^n$ için $\|X\| = 0 \iff X = 0$,
- 3 $\forall c \in \mathbb{R}$ ve $X \in \mathbb{R}^n$ için $\|cX\| = |c| \|X\|$,
- 4 $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ için $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.

$X \in \mathbb{R}^n$ vektörü $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere L_1 , L_2 ve L_∞ vektör normları sırasıyla,

$$\begin{aligned}\|X\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{k=1}^n |x_k|, \\ \|X\|_2 &= \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}}, \\ \|X\|_\infty &= \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|\end{aligned}$$

dir [52].



Crout Yöntemi:

Crout Yöntemi lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan bir yöntemdir. Özellikle katsayılar matrisi üç diagonal olan lineer denklem sistemlerin çözümünde oldukça etkilidir.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= a_{1,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= a_{2,n+1}, \\ &\vdots \\ a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n &= a_{n,n+1}, \end{aligned}$$

şeklindeki denklem sistemini göz önüne alalım. Bu sistemi matris formunda $AX = B$ şeklinde yazabiliriz. Bu yöntemde amaç öncelikle katsayılar matrisi olan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisini, biri

$$L = \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & \dots & & 0 \\ v_{21} & v_{22} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & v_{n,n-1} & v_{nn} \end{bmatrix}$$

ve diğeri de

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olan iki matrisin çarpımı şeklinde yazmaktır. Böylece,

$$AX = B$$

denklem sistemi

$$LUX = B$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $UX = Z$ diyecek olursak $LZ = B$ olur.

Böylece önce ileri doğru yerine koyma yöntemiyle $LZ = B$ denklem sistemi çözülerek Z vektörü bulunur, daha sonra da geriye doğru yerine koyma yöntemiyle

$UX = Z$ denklem sistemi çözülerek aranan X çözüm vektörü bulunmuş olur [52].

Yöntemin algoritması aşağıdaki gibidir:

Algoritma(Crout Yöntemi):

A ve B matrisleri girilecek.

1. Adım: $v_{11} = a_{11};$
 $u_{12} = a_{12}/v_{11};$
 $z_1 = a_{1,n+1}/v_{11}.$
2. Adım: $i = 2, \dots, n-1$ için; $v_{i,i-1} = a_{i,i-1};$
 $v_{ii} = a_{ii} - v_{i,i-1}u_{i-1,i};$
 $u_{i,i+1} = a_{i,i+1}/v_{ii};$
 $z_i = (a_{i,n+1} - v_{i,i-1}z_{i-1})/v_{ii}.$
3. Adım: $v_{n,n-1} = a_{n,n-1};$
 $v_{nn} = a_{nn} - v_{n,n-1}u_{n-1,n};$
 $z_n = (a_{n,n+1} - v_{n,n-1}z_{n-1})/v_{nn}.$
4. Adım: $x_n = z_n.$
5. Adım: $i = n-1, \dots, 1$ için $x_i = z_i - u_{i,i+1}x_{i+1}.$
6. Adım: $(x_1, x_2, \dots, x_n)'$ i yazdır; DUR.

Newton Yöntemi:

Non-lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan en etkin yöntemlerden biridir.

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0 \end{array} \quad \text{veya} \quad \begin{array}{ccc} f_1(X) & = & 0 \\ f_2(X) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(X) & = & 0 \end{array} \quad (2.0.1)$$

şeklinde n tane denklemden oluşan non-lineer denklem sistemini göz önüne alalım.

(2.0.1) denklem sistemini

$$F(X) = \mathbf{0} \quad (2.0.2)$$

şeklinde de ifade edebiliriz.

(2.0.2) denklem sisteminin bir yaklaşık çözüm vektörünü

$$X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

ve bu yaklaşımdan dolayı oluşan hata vektörünü de

$$\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$$

ile gösterecek olursak yaklaşık çözüm vektörünün düzeltilmiş hali

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \Delta$$

olacaktır. $X^{(1)}$ düzeltilmiş vektörünün (2.0.2) denklem sisteminin çözümü olduğu kabul edilirse,

$$F(X^{(1)}) = \mathbf{0} \quad \text{veya} \quad F(X^{(0)} + \Delta) = \mathbf{0} \quad (2.0.3)$$

olur. (2.0.3) ifadesinin sol tarafındaki her bir f_i fonksiyonu için çok değişkenli

fonksiyonlardaki Taylor serisi açılımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
f_1(X^{(0)} + \Delta) &= f_1(X^{(0)}) + \frac{\partial f_1(X^{(0)})}{\partial x_1} \delta_1 + \frac{\partial f_1(X^{(0)})}{\partial x_2} \delta_2 + \dots + \frac{\partial f_1(X^{(0)})}{\partial x_n} \delta_n + \dots = 0 \\
f_2(X^{(0)} + \Delta) &= f_2(X^{(0)}) + \frac{\partial f_2(X^{(0)})}{\partial x_1} \delta_1 + \frac{\partial f_2(X^{(0)})}{\partial x_2} \delta_2 + \dots + \frac{\partial f_2(X^{(0)})}{\partial x_n} \delta_n + \dots = 0 \\
&\vdots \\
f_n(X^{(0)} + \Delta) &= f_n(X^{(0)}) + \frac{\partial f_n(X^{(0)})}{\partial x_1} \delta_1 + \frac{\partial f_n(X^{(0)})}{\partial x_2} \delta_2 + \dots + \frac{\partial f_n(X^{(0)})}{\partial x_n} \delta_n + \dots = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada birinci mertebeden türevli terimlerden sonraki kısmı kesilirse,

$$\begin{aligned}
f_1(X^{(0)}) + \frac{\partial f_1(X^{(0)})}{\partial x_1} \delta_1 + \frac{\partial f_1(X^{(0)})}{\partial x_2} \delta_2 + \dots + \frac{\partial f_1(X^{(0)})}{\partial x_n} \delta_n &= 0 \\
f_2(X^{(0)}) + \frac{\partial f_2(X^{(0)})}{\partial x_1} \delta_1 + \frac{\partial f_2(X^{(0)})}{\partial x_2} \delta_2 + \dots + \frac{\partial f_2(X^{(0)})}{\partial x_n} \delta_n &= 0 \\
&\vdots \\
f_n(X^{(0)}) + \frac{\partial f_n(X^{(0)})}{\partial x_1} \delta_1 + \frac{\partial f_n(X^{(0)})}{\partial x_2} \delta_2 + \dots + \frac{\partial f_n(X^{(0)})}{\partial x_n} \delta_n &= 0
\end{aligned} \tag{2.0.4}$$

olur. (2.0.4) sistemini matris formunda

$$\begin{bmatrix} f_1(X^{(0)}) \\ f_2(X^{(0)}) \\ \vdots \\ f_n(X^{(0)}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(X^{(0)})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(X^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(X^{(0)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(X^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(X^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(X^{(0)})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(X^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(X^{(0)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(X^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(X^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(X^{(0)}) \\ f_2(X^{(0)}) \\ \vdots \\ f_n(X^{(0)}) \end{bmatrix}$$

veya kısaca

$$J(X^{(0)})\Delta = -F(X^{(0)})$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu denklem sisteminin çözümünden $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$

hata vektörü bulunmuş olur. Böylece,

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \Delta$$

ifadesinden de $X^{(1)}$ birinci düzeltilmiş vektörü elde edilir [53].

Bu işlem genelleştirildiğinde aşağıdaki algoritma elde edilir:

Algoritma(Newton Yöntemi):

MAXIT(Maksimum iterasyon) ve TOL(Tolerans) belirlenir.

$X^{(0)}$ başlangıç vektörü elde seçilir.

1. Adım: $k = 0, 1, \dots, \text{MAXIT}$ için (2 – 5). Adımları yap
2. Adım: $J(X^{(k-1)})$. Jakobiye matrisinin oluşturulması
3. Adım: $J(X^{(k-1)})\Delta = -F(X^{(k-1)})$. Denklem sisteminin çözümü
4. Adım: $X^{(k)} = X^{(k-1)} + \Delta$.
5. Adım: $\|F(X^{(k)})\| < \text{TOL}$ ise “ Çözüm vektörü $X^{(k)}$ ” DUR.
6. Adım: “ Maksimum iterasyon gerçekleştirildi ” DUR.

3. ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLERDEKİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

3.1 Türevler İçin Sonlu Fark Yaklaşımları

Türevler için sonlu fark yaklaşımları Taylor serisi açılımından faydalanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun x_i noktası civarındaki Taylor serisi açılımı

$$y(x) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}(x - x_i)^3 + \dots \quad (3.1.1)$$

şeklindedir. (3.1.1) ifadesinde $h = x - x_i$ alınırsa,

$$y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 + \frac{y'''(x_i)}{6}h^3 + \dots \quad (3.1.2)$$

elde edilir. (3.1.1) ifadesinde $h = x_i - x$ alınırsa,

$$y(x_i - h) = y(x_i) - y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 - \frac{y'''(x_i)}{6}h^3 + \dots \quad (3.1.3)$$

elde edilir.

(3.1.2) ifadesinden $y'(x_i)$ türevi çekilirse,

$$y'(x_i) = \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} + O(h) \quad (\text{İleri fark yaklaşımı})$$

elde edilir.

(3.1.3) ifadesinden $y'(x_i)$ türevi çekilirse,

$$y'(x_i) = \frac{y(x_i) - y(x_i - h)}{h} + O(h) \quad (\text{Geri fark yaklaşımı})$$

elde edilir.

(3.1.2) ile (3.1.3) ifadeleri taraf tarafa çıkarılırsa ve $y'(x_i)$ türevi çekilirse,

$$y'(x_i) = \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h} + O(h^2) \quad (\text{Merkezi fark yaklaşımı})$$

elde edilir.

(3.1.2) ifadesinde h yerine $2h$ alınır,

$$y(x_i + 2h) = y(x_i) + y'(x_i)2h + \frac{y''(x_i)}{2}4h^2 + \frac{y'''(x_i)}{6}8h^3 + \dots \quad (3.1.4)$$

ve (3.1.3) ifadesinde h yerine $2h$ alınır,

$$y(x_i - 2h) = y(x_i) - y'(x_i)2h + \frac{y''(x_i)}{2}4h^2 - \frac{y'''(x_i)}{6}8h^3 + \dots \quad (3.1.5)$$

elde edilir.

(3.1.2) ifadesi 2 ile çarpılıp (3.1.4) ifadesinden taraf tarafa çıkarılırsa,

$$y(x_i + 2h) - 2y(x_i + h) = -y(x_i) + y''(x_i)h^2 + y'''(x_i)h^3 + \dots$$

olur. Buradan da $y''(x_i)$ çekilirse,

$$y''(x_i) = \frac{y(x_i + 2h) - 2y(x_i + h) + y(x_i)}{h^2} + O(h) \quad (\text{İleri fark yaklaşımı})$$

elde edilir.

(3.1.3) ifadesi 2 ile çarpılıp (3.1.5) ifadesinden taraf tarafa çıkarılırsa,

$$y(x_i - 2h) - 2y(x_i - h) = -y(x_i) + y''(x_i)h^2 - y'''(x_i)h^3 + \dots$$

olur. Buradan da $y''(x_i)$ çekilirse,

$$y''(x_i) = \frac{y(x_i) - 2y(x_i - h) + y(x_i - 2h)}{h^2} + O(h) \quad (\text{Geri fark yaklaşımı})$$

elde edilir.

(3.1.2) ve (3.1.3) ifadeleri taraf tarafa toplanır,

$$y(x_i + h) + y(x_i - h) = 2y(x_i) + y''(x_i)h^2 + \dots$$

olur. Buradan da $y''(x_i)$ çekilirse,

$$y''(x_i) = \frac{y(x_i - h) - 2y(x_i) + y(x_i + h)}{h^2} + O(h^2) \quad (\text{Merkezi fark yaklaşımı})$$

elde edilir [52].

3.2 Lineer Problemlerin Sonlu Fark Yöntemi İle Çözümü

Bu başlık altında lineer, ikinci mertebeden sınır-değer problemlerinin sonlu fark yöntemleriyle çözümü ele alınacaktır.

$$y''(x_i) = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha \text{ ve } y(b) = \beta \quad (3.2.1)$$

şeklindeki sınır-değer problemini göz önüne alalım. Bu problemi sonlu fark yöntemiyle çözmek için $[a, b]$ aralığını $n + 1$ eşit parçaya bölelim. Böylece, $h = (b - a)/(n + 1)$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n + 1$ olur. y' ve y'' türevleri yerine merkezi sonlu fark yaklaşımları alınırsa,

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) = p(x_i) \left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + O(h) \right] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$$

elde edilir. Bu denklem hatalar ihmal edilerek yazılırsa,

$$\left(\frac{-z_{i+1} + 2z_i - z_{i-1}}{h^2} \right) + p(x_i) \left(\frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2h} \right) + q(x_i)z_i = -r(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olur. Bu ifade düzenlenir ve sınır değerleri de göz önüne alınırsa,

$$-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right)z_{i-1} + (2 + h^2q(x_i))z_i - \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right)z_{i+1} = -h^2r(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$z_0 = \alpha, \quad z_{n+1} = \beta$$

elde edilir. Burada z_i , $y(x_i)$ nin yaklaşık değeridir. Bu ise

$$AZ = B$$

şeklinde bir lineer denklem sistemi olarak ifade edilebilir. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 2+h^2q(x_1) & -1+\frac{h}{2}p(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ -1-\frac{h}{2}p(x_2) & 2+h^2q(x_2) & -1+\frac{h}{2}p(x_2) & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & -1-\frac{h}{2}p(x_{n-1}) & 2+h^2q(x_{n-1}) & -1+\frac{h}{2}p(x_{n-1}) \\ 0 & \dots & 0 & -1-\frac{h}{2}p(x_n) & 2+h^2q(x_n) \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix}_{n \times 1},$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} -h^2r(x_1) + (1 + \frac{h}{2}p(x_1))\alpha \\ -h^2r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2r(x_{n-1}) \\ -h^2r(x_n) + (1 - \frac{h}{2}p(x_n))\beta \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

dir. Bu lineer denklem sistemi bir önceki bölümde verilen Crout Yöntemi ile çözüldüğünde (3.2.1) ile verilen sınır-değer probleminin nümerik çözümü elde edilmiş olur [52].

3.3 Lineer Olmayan Problemlerin Sonlu Fark Yöntemi İle Çözümü

Bu başlık altında lineer olmayan, ikinci mertebeden sınır-değer problemlerinin sonlu fark yöntemleriyle çözümü ele alınacaktır.

Lineer olmayan sınır-değer problemi,

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (3.3.1)$$

şeklinde verilsin. Bu tür problemlerin de sonlu fark yöntemiyle çözümü lineer problemlerdekine benzer şekildedir. Bu problemi sonlu fark yöntemiyle çözmek için $[a, b]$ aralığını $n + 1$ eşit parçaya bölelim. Böylece,

$h = (b - a)/(n + 1)$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n + 1$ olur. y' ve y'' türevleri yerine merkezi sonlu fark yaklaşımları alınır,

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) = f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + O(h)\right)$$

elde edilir.

Bu denklemde hatalar ihmal edilirse ve sınır değerleri de göz önüne alınır,

$$\left(\frac{-z_{i+1} + 2z_i - z_{i-1}}{h^2}\right) + f\left(x_i, z_i, \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2h}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$z_0 = \alpha, \quad z_{n+1} = \beta$$

olur. Burada z_i , $y(x_i)$ nin yaklaşık değeridir. Bu yöntemden,

$$\begin{aligned} 2z_1 - z_2 + h^2 f\left(x_1, z_1, \frac{z_2 - \alpha}{2h}\right) - \alpha &= 0 \\ -z_1 + 2z_2 - z_3 + h^2 f\left(x_2, z_2, \frac{z_3 - z_1}{2h}\right) &= 0 \\ &\vdots \\ -z_{n-2} + 2z_{n-1} - z_n + h^2 f\left(x_{n-1}, z_{n-1}, \frac{z_n - z_{n-2}}{2h}\right) &= 0 \\ -z_{n-1} + 2z_n + h^2 f\left(x_n, z_n, \frac{\beta - z_{n-1}}{2h}\right) - \beta &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde n tane lineer olmayan denklemden oluşan bir non-lineer denklem sistemine ulaşılır. $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ olmak üzere yukarıdaki denklem sistemi $F(Z) = \mathbf{0}$ şeklinde ifade edilebilir. Lineer olmayan denklem sistemini çözmek için bir önceki bölümde verilen Newton yöntemi kullanılır.

Böylece (3.3.1) ile verilen lineer olmayan sınır değer probleminin nümerik çözümü elde edilmiş olur [52].



4. LANE-EMDEN DENKLEMİNİN SONLU FARK YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde,

$$y''(x) + \frac{k}{x}y'(x) + f(x, y(x)) = 0, \quad x \in (0, 1) \quad (4.0.1)$$

formundaki Lane-Emden denklemi ve

$$y(0) = a_1, \quad y(1) = b_1,$$

$$y'(0) = a_2, \quad y'(1) = b_2,$$

$$y'(0) = 0, \quad a_3y(1) + b_3y'(1) = c_3,$$

şeklindeki farklı sınır şartlarını içeren altı model problem göz önüne alındı. Ayrıca (4.0.1) denkleminin Teorem (2.0.1)' deki şartları sağladığı kabul edildi. Burada a_i, b_i ve c_i ler birer reel sabittir.

Her bir model problem, yapısına göre 3. Bölümde açıklanan sonlu fark yöntemi ile çözüldü. Elde edilen nümerik çözümler tam çözümle karşılaştırıldı. Ayrıca her bir durum için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı. Hesaplanan hata normları literatürde yer alan bazı çalışmalardaki hata normları ile karşılaştırıldı.

Çözümler sırasındaki işlemler Matlab' te yazılan programlar ile gerçekleştirildi.

4.1 Model Problemler

4.1.1 Problem 1

Bu problemde

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \cos x + \frac{1}{x} \sin x = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = \cos 1$$

sınır şartlarıyla verilen lineer Lane-Emden denklemi göz önüne alınmıştır.

Problemin analitik çözümü,

$$y(x) = \cos x$$

dir [55].

Bu problemi sonlu fark yöntemi ile çözmek için y' ve y'' türevleri yerine merkezi sonlu fark yaklaşımları alınır, hatalar ihmal edilir ve sınır değerleri de göz önüne alınır,

$$\left(1 - \frac{h}{2x_i}\right) z_{i-1} - 2z_i + \left(1 + \frac{h}{2x_i}\right) z_{i+1} = -h^2 \left(\cos x_i + \frac{1}{x_i} \sin x_i\right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

veya matris formunda

$$AZ = B$$

şeklinde bir lineer denklem sistemi elde edilir. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 - \frac{h}{2x_2} & -2 & 1 + \frac{h}{2x_2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 - \frac{h}{2x_{n-1}} & -2 & 1 + \frac{h}{2x_{n-1}} \\ 0 & \dots & 0 & 1 - \frac{h}{2x_n} & -2 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix}_{n \times 1},$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} -h^2 \left(\cos x_1 + \frac{1}{x_1} \sin x_1 \right) \\ -h^2 \left(\cos x_2 + \frac{1}{x_2} \sin x_2 \right) \\ \vdots \\ -h^2 \left(\cos x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \sin x_{n-1} \right) \\ -h^2 \left(\cos x_n + \frac{1}{x_n} \sin x_n \right) - \left(1 + \frac{h}{2x_n} \right) (\cos 1) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

dir. Bu lineer denklem sistemi Crout Yöntemi ile çözüldüğünde Problem 1' in nümerik çözümü elde edilmiş olur.

Problem 1' in sonlu fark yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçların analitik çözüm ile karşılaştırılması Tablo 4.1' de verilmiştir. Tabloda farklı n değerleri için bulunan L_∞ hata normu incelendiğinde n ' nin değeri büyüdükçe L_∞ hata normunun da azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.1: Farklı n değerleri için Problem 1' in nümerik çözümlerinin tam çözümle karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Problem 1' in Tam Çözümü
	$n=20$	$n=40$	$n=80$	$n=160$	
0.1	0.99658	0.99540	0.99510	0.99503	0.99500
0.2	0.98121	0.98035	0.98014	0.98008	0.98007
0.3	0.95622	0.95556	0.95539	0.95535	0.95534
0.4	0.92175	0.92123	0.92110	0.92107	0.92106
0.5	0.87812	0.87772	0.87762	0.87759	0.87758
0.6	0.82575	0.82544	0.82536	0.82534	0.82534
0.7	0.76514	0.76492	0.76486	0.76485	0.76484
0.8	0.69690	0.69675	0.69672	0.69671	0.69671
0.9	0.62170	0.62163	0.62162	0.62161	0.62161
L_2	4.93e-003	1.68e-003	5.75e-004	1.99e-004	
L_∞	3.25e-003	9.20e-004	2.57e-004	7.10e-005	

Elde edilen nümerik çözümlere karşılık gelen L_∞ hata normları [55] ve [54]' te yer alan değerlerle Tablo 4.2' de karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.2: Problem 1’ de n ’ nin bazı değerleri için elde edilen L_∞ hata normlarının [55] ve [54]’ teki sonuçlarla karşılaştırılması

n	[55]	[54]	Bu alıřma
20	$4.079613e-04$	$4.4e-05$	$3.25e-03$
40	$1.525665e-04$	$1.1e-05$	$9.20e-04$
80	$6.460536e-05$	$2.7e-06$	$2.57e-04$
160	$2.465809e-05$	$6.8e-07$	$7.10e-05$

4.1.2 Problem 2

Bu problemde

$$y'' + \frac{1}{x}y' = (9x + 9x^4)y, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = e$$

sınır şartlarıyla verilen lineer Lane-Emden denklemi göz önüne alınmıştır.

Problemın analitik çözümü,

$$y(x) = \exp(x^3)$$

dir [55].

Bu problemi sonlu fark yöntemi ile çözmek için y' ve y'' türevleri yerine merkezi sonlu fark yaklaşımları alınır, hatalar ihmal edilir ve sınır değerleri de göz önüne alınır,

$$\left(1 - \frac{h}{2x_i}\right) z_{i-1} - (2 + h^2(9x_i + 9x_i^4)) z_i + \left(1 + \frac{h}{2x_i}\right) z_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

veya matris formunda

$$AZ = B$$

şeklinde bir lineer denklem sistemi olarak ifade edilebilir.

$$A = \begin{bmatrix} -2-h^2(9x_1+9x_1^4) & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1-\frac{h}{2x_2} & -2-h^2(9x_2+9x_2^4) & 1+\frac{h}{2x_2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1-\frac{h}{2x_{n-1}} & \ddots & 1+\frac{h}{2x_{n-1}} \\ 0 & \dots & 0 & 1-\frac{h}{2x_n} & -2-h^2(9x_n+9x_n^4) \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix}_{n \times 1},$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\left(1 + \frac{h}{2x_n}\right)e \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

dir. Bu lineer denklem sistemi Crout Yöntemi ile çözüldüğünde Problem 2' nin nümerik çözümü elde edilmiş olur

Problem 2' nin sonlu fark yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçların analitik çözüm ile karşılaştırılması Tablo 4.3' te verilmiştir. Tabloda farklı n değerleri için bulunan L_∞ hata normu incelendiğinde n ' nin değeri büyüdükçe L_∞ hata normunun da azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.3: Farklı n değerleri için Problem 2' nin nümerik çözümlerinin tam çözümle karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Problem 2' nin
	$n=20$	$n=40$	$n=80$	$n=160$	Tam Çözümü
0.1	1.00633	1.00234	1.00133	1.00108	1.00100
0.2	1.01314	1.00931	1.00835	1.00811	1.00803
0.3	1.03230	1.02860	1.02768	1.02745	1.02737
0.4	1.07089	1.06730	1.06639	1.06617	1.06609
0.5	1.13785	1.13433	1.13344	1.13322	1.13315
0.6	1.24570	1.24226	1.24139	1.24117	1.24110
0.7	1.41358	1.41028	1.40945	1.40924	1.40917
0.8	1.67258	1.66962	1.66887	1.66869	1.66863
0.9	2.07582	2.07371	2.07318	2.07305	2.07301
L_2	2.06e-002	7.23e-003	2.55e-003	8.98e-004	
L_∞	5.58e-003	1.40e-003	3.50e-004	8.74e-005	

Elde edilen nümerik çözümlere karşılık gelen L_∞ hata normları [55] ve [54]' te yer alan değerlerle Tablo 4.4' te karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.4: Problem 2' de n ' nin bazı değerleri için elde edilen L_∞ hata normlarının [55] ve [54]' teki sonuçlarla karşılaştırılması

n	[55]	[54]	Bu alıřma
16	$8.727368e-03$	$4.6e-03$	$8.70e-03$
32	$2.333770e-03$	$1.1e-03$	$2.18e-03$
64	$6.041763e-04$	$2.8e-04$	$5.46e-04$
128	$1.506475e-04$	$7.1e-05$	$1.37e-04$



4.1.3 Problem 3

Bu problemde

$$y'' + \frac{1}{x}y' + e^y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

sınır şartlarıyla verilen non-linear Lane-Emden denklemi göz önüne alınmıştır.

Problemın analitik çözümü,

$$y(x) = 2 \ln \frac{C+1}{Cx^2+1}, \quad (C = 3 \pm 2\sqrt{2})$$

dir [55].

Bu problemi sonlu fark yöntemi ile çözmek için y' ve y'' türevleri yerine merkezi sonlu fark yaklaşımları alınır, hatalar ihmal edilir ve sınır değerleri de göz önüne alınır,

$$\left(1 - \frac{h}{2x_i}\right) z_{i-1} - 2z_i + \left(1 + \frac{h}{2x_i}\right) z_{i+1} + h^2 e^{z_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olur. Bu yöntemden,

$$\begin{aligned} -2z_1 + 2z_2 + h^2 e^{z_1} &= 0 \\ \left(1 - \frac{h}{2x_2}\right) z_1 - 2z_2 + \left(1 + \frac{h}{2x_2}\right) z_3 + h^2 e^{z_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \left(1 - \frac{h}{2x_{n-1}}\right) z_{n-2} - 2z_{n-1} + \left(1 + \frac{h}{2x_{n-1}}\right) z_n + h^2 e^{z_{n-1}} &= 0 \\ \left(1 - \frac{h}{2x_n}\right) z_{n-1} - 2z_n + h^2 e^{z_n} &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde n tane lineer olmayan denklemden oluşan bir non-linear denklem sistemine ulaşılır. $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ olmak üzere bu denklem sistemi $F(Z) = \mathbf{0}$ şeklinde ifade edilebilir. Lineer olmayan denklem sistemini çözmek için Newton yöntemi kullanılır. Böylece Problem 3' ün nümerik çözümü elde edilmiş olur.

Problem 3' ün sonlu fark yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçların analitik çözüm ile karşılaştırılması Tablo 4.5' te verilmiştir. Tabloda farklı n değerleri için bulunan L_∞ hata normu incelendiğinde n ' nin değeri büyüdükçe L_∞ hata normunun da azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.5: Farklı n değerleri için Problem 3' ün nümerik çözümlerinin tam çözümle karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Problem 3' ün
	$n=20$	$n=40$	$n=80$	$n=160$	Tam Çözümü
0.1	0.31454	0.31358	0.31335	0.31329	0.31327
0.2	0.30398	0.30326	0.30308	0.30303	0.30302
0.3	0.28681	0.28624	0.28609	0.28606	0.28605
0.4	0.26314	0.26268	0.26257	0.26254	0.26253
0.5	0.23318	0.23282	0.23273	0.23270	0.23270
0.6	0.19720	0.19692	0.19685	0.19683	0.19683
0.7	0.15551	0.15531	0.15526	0.15525	0.15525
0.8	0.10849	0.10837	0.10833	0.10833	0.10832
0.9	0.05652	0.05646	0.05644	0.05644	0.05644
L_2	3.92e-003	1.33e-003	4.59e-004	1.59e-004	
L_∞	2.43e-003	6.80e-004	1.88e-004	5.18e-005	

Elde edilen nümerik çözümlere karşılık gelen L_∞ hata normları [55] ve [54]' te yer alan değerlerle Tablo 4.6' da karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.6: Problem 3' te n ' nin bazı değerleri için elde edilen L_∞ hata normlarının [55] ve [54]' teki sonuçlarla karşılaştırılması

n	[55]	[54]	Bu çalışma
8	3.118446e-03	2.0e-04	1.29e-02
16	5.291068e-04	5.0e-05	3.65e-03
32	1.466800e-04	1.2e-05	1.03e-03
64	6.835504e-05	3.1e-06	2.85e-04
128	2.768110e-05	7.8e-07	7.85e-05

4.1.4 Problem 4

Bu problemde

$$y'' + \frac{0.5}{x}y' + e^{2y} - 0.5e^y = 0, \quad y(0) = \ln 2, \quad y(1) = 0$$

sınır şartlarıyla verilen non-lineer Lane-Emden denklemi göz önüne alınmıştır. Problemin analitik çözümü,

$$y(x) = \ln \frac{2}{x^2 + 1}$$

dir [25].

Bu problemi sonlu fark yöntemi ile çözmek için y' ve y'' türevleri yerine merkezi sonlu fark yaklaşımları alınır, hatalar ihmal edilir ve sınır değerleri de göz önüne alınırsa,

$$\left(1 - \frac{0.5h}{2x_i}\right) z_{i-1} - 2z_i + \left(1 + \frac{0.5h}{2x_i}\right) z_{i+1} + h^2 (e^{2z_i} - 0.5e^{z_i}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olur. Bu yöntemden,

$$\begin{aligned} -2z_1 + \left(1 + \frac{0.5h}{2x_1}\right) z_2 + \left(1 - \frac{0.5h}{2x_1}\right) \ln 2 + h^2 (e^{2z_1} - 0.5e^{z_1}) &= 0 \\ \left(1 - \frac{0.5h}{2x_2}\right) z_1 - 2z_2 + \left(1 + \frac{0.5h}{2x_2}\right) z_3 + h^2 (e^{2z_2} - 0.5e^{z_2}) &= 0 \\ &\vdots \\ \left(1 - \frac{0.5h}{2x_{n-1}}\right) z_{n-2} - 2z_{n-1} + \left(1 + \frac{0.5h}{2x_{n-1}}\right) z_n + h^2 (e^{2z_{n-1}} - 0.5e^{z_{n-1}}) &= 0 \\ \left(1 - \frac{0.5h}{2x_n}\right) z_{n-1} - 2z_n + h^2 (e^{2z_n} - 0.5e^{z_n}) &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde n tane lineer olmayan denklemden oluşan bir non-lineer denklem sistemine ulaşılır. $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ olmak üzere bu denklem sistemi $F(Z) = \mathbf{0}$ şeklinde ifade edilebilir. Lineer olmayan denklem sistemini çözmek için Newton yöntemi kullanılır. Böylece Problem 4' ün nümerik çözümü elde edilmiş olur.

Problem 4' ün sonlu fark yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçların analitik çözüm ile karşılaştırılması Tablo 4.7' de verilmiştir. Tabloda farklı n

değerleri için bulunan L_2 ve L_∞ hata normları incelendiğinde n' nin değeri büyüdükçe her iki hata normunun da azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.7: Farklı n değerleri için Problem 4' ün nümerik çözümlerinin tam çözümle karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Problem 4' ün Tam Çözümü
	$n=20$	$n=40$	$n=80$	$n=160$	
0.1	0.68351	0.68328	0.68321	0.68320	0.68320
0.2	0.65435	0.65403	0.65395	0.65393	0.65393
0.3	0.60742	0.60708	0.60699	0.60697	0.60697
0.4	0.54515	0.54483	0.54475	0.54473	0.54473
0.5	0.47037	0.47010	0.47002	0.47001	0.47000
0.6	0.38596	0.38574	0.38568	0.38566	0.38566
0.7	0.29459	0.29443	0.29438	0.29437	0.29437
0.8	0.19859	0.19849	0.19846	0.19845	0.19845
0.9	0.09989	0.09984	0.09982	0.09982	0.09982
L_2	1.66e-003	5.96e-004	1.59e-004	2.70e-005	
L_∞	4.50e-004	1.14e-004	2.22e-005	2.91e-006	

Elde edilen nümerik çözümlere karşılık gelen L_2 ve L_∞ hata normları [56]' da yer alan değerlerle Tablo 4.8' de karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.8: Problem 4' te n' nin bazı değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının [56]' daki sonuçlarla karşılaştırılması

n	[56]		Bu çalışma	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
8	1.63e-003	7.80e-004	5.69e-003	2.45e-003
16	5.74e-004	1.94e-004	2.30e-003	6.87e-004
32	2.03e-004	4.84e-005	8.28e-004	1.80e-004
64	7.18e-005	1.21e-005	2.61e-004	4.03e-005
128	2.54e-005	3.02e-006	1.36e-005	1.96e-006
256	8.97e-006	7.55e-007	4.15e-005	2.96e-006
512	3.17e-006	1.89e-007	1.18e-004	6.09e-006
1024	1.12e-006	4.72e-008	1.99e-004	7.28e-006

4.1.5 Problem 5

Bu problemde

$$y'' + \frac{2}{x}y' + e^y(6 - 4x^2e^y) = 0, \quad y'(0) = 0, y'(1) = -\frac{2}{5}$$

sınır şartlarıyla verilen non-linear Lane-Emden denklemi göz önüne alınmıştır.

Problemın analitik çözümü,

$$y(x) = \ln \frac{1}{4 + x^2}$$

dir [56].

Bu problemi sonlu fark yöntemi ile çözmek için y' ve y'' türevleri yerine merkezi sonlu fark yaklaşımları alınır, hatalar ihmal edilir ve sınır değerleri de göz önüne alınır,

$$\left(1 - \frac{h}{x_i}\right) z_{i-1} - 2z_i + \left(1 + \frac{h}{x_i}\right) z_{i+1} + h^2 e^{z_i} (6 - 4x_i^2 e^{z_i}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olur. Bu yöntemden,

$$\begin{aligned} -2z_1 + 2z_2 + h^2 e^{z_1} (6 - 4x_1^2 e^{z_1}) &= 0 \\ \left(1 - \frac{h}{x_2}\right) z_1 - 2z_2 + \left(1 + \frac{h}{x_2}\right) z_3 + h^2 e^{z_2} (6 - 4x_2^2 e^{z_2}) &= 0 \\ &\vdots \\ \left(1 - \frac{h}{x_{n-1}}\right) z_{n-2} - 2z_{n-1} + \left(1 + \frac{h}{x_{n-1}}\right) z_n + h^2 e^{z_{n-1}} (6 - 4x_{n-1}^2 e^{z_{n-1}}) &= 0 \\ 2z_{n-1} - 2z_n - \frac{4}{5}h \left(1 + \frac{h}{x_n}\right) + h^2 e^{z_n} (6 - 4x_n^2 e^{z_n}) &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde n tane lineer olmayan denklemden oluşan bir non-linear denklem sistemine ulaşılır. $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ olmak üzere bu denklem sistemi $F(Z) = \mathbf{0}$ şeklinde ifade edilebilir. Lineer olmayan denklem sistemini çözmek için Newton yöntemi kullanılır. Böylece Problem 5' in nümerik çözümü elde edilmiş olur.

Problem 5' in sonlu fark yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçların analitik çözüm ile karşılaştırılması Tablo 4.9' da verilmiştir. Tabloda farklı n değerleri için

bulunan L_2 ve L_∞ hata normları incelendiğinde n' nin değeri büyüdükçe her iki hata normunun da azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.9: Farklı n değerleri için Problem 5' in nümerik çözümlerinin tam çözümle karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Problem 5' in
	$n=20$	$n=40$	$n=80$	$n=160$	Tam Çözüm
0.1	-1.35317	-1.37116	-1.38002	-1.38442	-1.38879
0.2	-1.36346	-1.38000	-1.38816	-1.39221	-1.39624
0.3	-1.37870	-1.39375	-1.40118	-1.40487	-1.40854
0.4	-1.39866	-1.41219	-1.41888	-1.42220	-1.42552
0.5	-1.42306	-1.43507	-1.44102	-1.44397	-1.44692
0.6	-1.45158	-1.46209	-1.46730	-1.46989	-1.47247
0.7	-1.48386	-1.49290	-1.49739	-1.49962	-1.50185
0.8	-1.51951	-1.52714	-1.53093	-1.53283	-1.53471
0.9	-1.55816	-1.56444	-1.56757	-1.56914	-1.57070
L_2	1.16e-001	8.05e-002	5.64e-002	3.97e-002	
L_∞	3.83e-002	1.89e-002	9.43e-003	4.70e-003	

Elde edilen nümerik çözümlere karşılık gelen L_2 ve L_∞ hata normları [56]' da yer alan değerlerle Tablo 4.10' da karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.10: Problem 5' te n' nin bazı değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının [56]' daki sonuçlarla karşılaştırılması

n	[56]		Bu çalışma	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
8	5.23e-003	1.95e-003	1.94e-001	9.90e-002
16	1.85e-003	4.89e-004	1.31e-001	4.81e-002
32	6.54e-004	1.22e-004	9.04e-002	2.38e-002
64	2.31e-004	3.06e-005	6.32e-002	1.18e-002
128	8.18e-005	7.65e-006	4.44e-002	5.88e-003
256	2.89e-005	1.91e-006	3.13e-002	2.93e-003
512	1.02e-005	4.78e-007	2.21e-002	1.47e-003
1024	3.62e-006	1.20e-007	1.56e-002	7.33e-004

4.1.6 Problem 6

Bu problemde

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y^5 = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

sınır şartlarıyla verilen non-linear Lane-Emden denklemi göz önüne alınmıştır.

Problemnin analitik çözümü,

$$y(x) = \sqrt{\frac{3}{3+x^2}}$$

dir [57].

Bu problemi sonlu fark yöntemi ile çözmek için y' ve y'' türevleri yerine merkezi sonlu fark yaklaşımları alınır, hatalar ihmal edilir ve sınır değerleri de göz önüne alınır,

$$\left(1 - \frac{h}{x_i}\right) z_{i-1} - 2z_i + \left(1 + \frac{h}{x_i}\right) z_{i+1} + h^2 z_i^5 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olur. Bu yöntemden,

$$\begin{aligned} -2z_1 + 2z_2 + h^2 z_1^5 &= 0 \\ \left(1 - \frac{h}{x_2}\right) z_1 - 2z_2 + \left(1 + \frac{h}{x_2}\right) z_3 + h^2 z_2^5 &= 0 \\ &\vdots \\ \left(1 - \frac{h}{x_{n-1}}\right) z_{n-2} - 2z_{n-1} + \left(1 + \frac{h}{x_{n-1}}\right) z_n + h^2 z_{n-1}^5 &= 0 \\ \left(1 - \frac{h}{x_n}\right) z_{n-1} - 2z_n + \left(1 + \frac{h}{x_n}\right) \sqrt{\frac{3}{4}} + h^2 z_n^5 &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde n tane lineer olmayan denklemden oluşan bir non-linear denklem sistemine ulaşılır. $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ olmak üzere bu denklem sistemi $F(Z) = \mathbf{0}$ şeklinde ifade edilebilir. Lineer olmayan denklem sistemini çözmek için Newton yöntemi kullanılır. Böylece Problem 6' nın nümerik çözümü elde edilmiş olur.

Problem 6' nın sonlu fark yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçların analitik çözüm ile karşılaştırılması Tablo 4.11' de verilmiştir. Tabloda farklı n değerleri için bulunan L_2 ve L_∞ hata normları incelendiğinde n ' nin değeri büyüdükçe her iki hata normunun da azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.11: Farklı n değerleri için Problem 6' nın nümerik çözümlerinin tam çözümle karşılaştırılması

x	Nümerik Çözüm				Problem 6' nın
	$n=20$	$n=40$	$n=80$	$n=160$	Tam Çözümü
0.1	0.99646	0.99745	0.99791	0.99813	0.99834
0.2	0.98992	0.99171	0.99257	0.99299	0.99340
0.3	0.98034	0.98289	0.98412	0.98473	0.98533
0.4	0.96800	0.97123	0.97280	0.97358	0.97435
0.5	0.95321	0.95703	0.95891	0.95984	0.96077
0.6	0.93633	0.94066	0.94279	0.94385	0.94491
0.7	0.91772	0.92247	0.92481	0.92598	0.92715
0.8	0.89776	0.90283	0.90534	0.90659	0.90784
0.9	0.87679	0.88209	0.88473	0.88605	0.88736
L_2	3.12e-002	2.28e-002	1.64e-002	1.17e-002	
L_∞	1.06e-002	5.36e-003	2.69e-003	1.35e-003	

Elde edilen nümerik çözümlere karşılık gelen L_2 ve L_∞ hata normları [56]' da yer alan değerlerle Tablo 4.12' de karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.12: Problem 6' da n ' nin bazı değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının [56]' daki sonuçlarla karşılaştırılması

n	[56]		Bu çalışma	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
8	4.71e-004	1.97e-003	4.41e-002	2.49e-002
16	1.65e-004	4.91e-004	3.42e-002	1.31e-002
32	5.84e-005	1.23e-004	2.53e-002	6.67e-003
64	2.06e-005	3.12e-005	1.82e-002	3.36e-003
128	7.28e-006	8.92e-006	1.30e-002	1.69e-003
256	2.56e-006	2.96e-006	9.26e-003	8.44e-004
512	8.81e-007	1.29e-007	6.56e-003	4.23e-004
1024	2.79e-007	8.47e-008	4.65e-003	2.11e-004

Sonuç:

Bu bölümde farklı sınır şartları ile birlikte göz önüne alınan Lane-Emden denkleminin sonlu fark yöntemi ile çözümü gerçekleştirildi. Göz önüne alınan altı farklı model problemin elde edilen nümerik sonuçları tam çözümlerle karşılaştırıldı. Sonuçlar tablolar halinde sunuldu. Tablolarda L_2 ve L_∞ hata normları da yer aldı.

Sonuç olarak sonlu fark yönteminin, diğer birçok denklemin çözümünde olduğu

gibi Lane-Emden denkleminin çözümünde de etkin bir yöntem olduğu görüldü.



KAYNAKLAR

- [1] J. H. Lane, *On theoretical temperature of the sun under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its internal heat and depending on the laws of gases known to terrestrial experiment*, **Am. J. Sci. Arts** 2:50(1870), 57-74.
- [2] R. Emden, *Gaskugeln Anwendungen der Mechan, Warmtheorie*, Teubner, Leipzig/Berlin(1907).
- [3] K. Reger, R. Van Gorder, *Lane-Emden equations of second kind modelling thermal explosion in infinite cylinder and sphere*, **Appl. Math. Mech.** 34:12(2013) 1439-1452.
- [4] R. A. Van Gorder, *Exact first integrals for a Lane-Emden equation of the second kind modeling a thermal explosion in a rectangular slab*, **New Astron.** 16:8(2011) 492-497.
- [5] S. Lin, *Oxygen diffusion in a spherical cell with nonlinear oxygen uptake kinetics*, **J. Theoret. Biol.** 60:2(1976) 449-457.
- [6] U. Flesch, *The distribution of heat sources in the human head: a theoretical consideration*, **J. Theoret. Biol.** 54:2(1975) 285-287.
- [7] B. Gray, *The distribution of heat sources in the human head-theoretical considerations*, **J. Theoret. Biol.** 82:3(1980) 473-476.
- [8] R. Duggan, A. Goodman, *Pointwise bounds for a nonlinear heat conduction model of the human head*, **Bull. Math. Biol.** 48:2(1986) 229-236.
- [9] G. Reddien, *Projection methods and singular two point boundary value problems*, **Numer. Math.** 21:3(1973) 193-205.
- [10] R. Russell, L. Shampine, *Numerical methods for singular boundary value problems*, **SIAM J. Numer. Anal.** 12:1(1975) 13-36.
- [11] P. Jamet, *On the convergence of finite-difference approximations to one-dimensional singular boundary-value problems*, **Numer. Math.** 14:4(1970) 355-378.
- [12] M. Chawla, C. Katti, *Finite difference methods and their convergence for a class of singular two point boundary value problems*, **Numer. Math.** 39:3(1982) 341-350.
- [13] M. Chawla, C. Katti, *A finite-difference method for a class of singular two-point boundary-value problems*, **IMA J. Numer. Anal.** 4:4(1984) 457-466.

- [14] S. Iyengar, P. Jain, *Spline finite difference methods for singular two point boundary value problems*, **Numer. Math.** 50:3(1986) 363-376.
- [15] M. K. Kadalbajoo, V. Kumar, *B-spline method for a class of singular two-point boundary value problems using optimal grid*, **Appl. Math. Comput.** 188:2(2007) 1856-1869.
- [16] M. Kumar, *Higher order method for singular boundary-value problems by using spline function*, **Appl. Math. Comput.** 192:1(2007) 175-179.
- [17] A. R. Kanth, Y. Reddy, *A numerical method for singular two point boundary value problems via Chebyshev economization*, **Appl. Math. Comput.** 146:2(2003) 691-700.
- [18] A. R. Kanth, Y. Reddy, *Cubic spline for a class of singular two-point boundary value problems*, **Appl. Math. Comput.** 170:2(2005) 733-740.
- [19] A. Ravi Kanth, V. Bhattacharya, *Cubic spline for a class of non-linear singular boundary value problems arising in physiology*, **Appl. Math. Comput.** 174:1(2006) 768-774.
- [20] A. R. Kanth, *Cubic spline polynomial for non-linear singular two-point boundary value problems*, **Appl. Math. Comput.** 189:2(2007) 2017-2022.
- [21] M. Inc, M. Ergut, Y. Cherruault, *A different approach for solving singular two-point boundary value problems*, **Kybernetes** 34:7(2005) 934-940.
- [22] R. Mittal, R. Nigam, *Solution of a class of singular boundary value problems*, **Numer. Algorithms** 47:2(2008) 169-179.
- [23] S. Khuri, A. Sayfy, *A novel approach for the solution of a class of singular boundary value problems arising in physiology*, **Math. Comput. Modelling** 52:3(2010) 626-636.
- [24] A. Ebaid, *A new analytical and numerical treatment for singular two-point boundary value problems via the Adomian decomposition method*, **J. Comput. Appl. Math.** 235:8(2011) 1914-1924.
- [25] R. Singh, J. Kumar, G. Nelakanti, *Numerical solution of singular boundary value problems using Green's function and improved decomposition method*, **J. Appl. Math. Comput.** 43:(1-2)(2013) 409-425.
- [26] R. Singh, J. Kumar, *An efficient numerical technique for the solution of nonlinear singular boundary value problems*, **Comput. Phys. Comm.** 185:4(2014) 1282-1289.
- [27] A. Wazwaz, R. Rach, *Comparison of the Adomian decomposition method and the variational iteration method for solving the Lane-Emden equations of the first and second kinds*, **Kybernetes** 40:(9/10)(2011) 1305-1318.

- [28] A. Wazwaz, *The variational iteration method for solving nonlinear singular boundary value problems arising in various physical models*, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.** 16:10(2011) 3881-3886.
- [29] A. Ravi Kanth, K. Aruna, *He's variational iteration method for treating nonlinear singular boundary value problems*, **Comput. Math. Appl.** 60:3(2010) 821-829.
- [30] R. Singh, N. Das, J. Kumar, *The optimal modified variational iteration method for the Lane-Emden equations with Neumann and Robin boundary conditions*, **Eur. Phys. J. Plus** 132:6(2017) 251.
- [31] M. Danish, S. Kumar, *A note on the solution of singular boundary value problems arising in engineering and applied sciences: Use of OHAM*, **Comput. Chem. Eng.** 36(2012) 57-67.
- [32] Bender, C. M. , Milton, K. A. , Pinsky, S. S. , Simmons Jr. , L. M. , *A new perturbative approach to nonlinear problems*, **J. Math. Phys.** , 30:7(1989) 1447-1455.
- [33] Mandelzweig, V. B. , Tabakin, F. *Quasilinearization approach to nonlinear problems in physics with application to nonlinear ODEs*, **Comput. Phy. Commun.** 141(2001), 268-281.
- [34] Shawagfeh, N. T. *Nonperturbative approximate solution for Lane-Emden equation*, **J. Math. Phys.** 34:9(1993) 4364-4369.
- [35] Wazwaz, A. , *A new algorithm for solving differential equations of Lane-Emden type*, **Appl. Math. Comput.** 118(2001) 287-310.
- [36] Wazwaz, A. , *The modified decomposition method for analytic treatment of differential equations*, **Appl. Math. Comput.** 173(2006) 165-76.
- [37] Liao, S. , *A new analytic algorithm of Lane-Emden type equations*, **Appl. Math. Comput.** 142(2003) 1-16.
- [38] He, J. H. , *Variational approach to the Lane-Emden equation*, **Appl. Math. Comput.** 143:(2-3)(2003) 539-541.
- [39] Van Gorder, R. A. , Vajravelu, K. , *Analytic and numerical solutions to the Lane-Emden equation*, **Physics Letters, A** 372:39(2008) 6060-6065.
- [40] Ramos, J. I. , *Linearization methods in classical and quantum mechanics*, **Comput. Phy. Commun.** 153(2003) 199-208.
- [41] Ramos, J. I. , *Linearization techniques for singular initial-value problems of ordinary differential equations*, **Appl. Math. Comput.** 161(2005) 525-542.

- [42] Ramos, J. I. , *Series approach to the Lane-Emden equation and comparison with the homotopy perturbation method*, **Chaos. Solit. Fract.** , 38(2008) 400-408.
- [43] Ramos, J. I. , *Piecewise-adaptive decomposition methods*, **Chaos. Solit. Fract.** ,40(2009) 1623-1636.
- [44] Yousefi, S. A. , *Legendre wavelets method for solving differential equations of Lane-Emden type*, **Appl. Math. Comput.** 181(2006) 1417-1422.
- [45] Parand, K. , Shahini, M. , Dehghan, M. , *Rational Legendre pseudospectral approach for solving nonlinear differential equations of Lane-Emden type*, **J. Comput. Phys.** , 228(2009) 8830-8840.
- [46] Parand, K. , Dehghan, M. , Rezaeia, A. R. , Ghaderi, S. M. , *An approximation algorithm for the solution of the nonlinear Lane-Emden type equations arising in astrophysics using Hermite functions collocation method*, **Comput. Phy. Commun.** 181:6(2010) 1096-1108.
- [47] Parand, K. , Pirkhedri, A. , *Sinc-Collocation method for solving astrophysics equations*, **New Astronomy**, 15:6(2010), 533-537.
- [48] Adibi, H. , Rismani, A. M. , *On using a modified Legendre-spectral method for solving singular IVPs of Lane-Emden type*, **Comput. Math. Appl.** 60:7(2010) 2126-2130.
- [49] Pandey, Rajesh K. , Kumar, Narayan, *Solution of Lane-Emden type equations using Bernstein operational matrix of differentiation*, **New Astronomy**, 17:3(2012) 303-308.
- [50] Pandey, Rajesh K. , Kumar, Narayan, Bhardwaj, Abhinav, Dutta, Goutam, *Solution of Lane-Emden type equations using Legendre operational matrix of differentiation*, **Comput. Math. Appl.**, 218:14(2012) 7629-7637.
- [51] S. L. Ross, *Differential Equations*, John Wiley&Sons, 1984.
- [52] R. L. Burden, J. D. Faires, *Numerical Analysis*, Thomson Brooks/Cole, USA, 2005.
- [53] W. E. Schiesser, *Nonlinear Equations*, Lecture Notes, 2018.
- [54] M. Kumar, *A three-point finite difference method for a class of singular two-point boundary value problems*, **Comput. Math. Appl.** 145(2002) 89-97.
- [55] J. I. Ramos, *Piecewise quasilinearization techniques for singular boundary-value problems*, **Comput. Phy. Commun.** 158(2004) 12-25.

- [56] R. Singh, H. Garg, V. Guleria, *Haar wavelet collocation method for Lane-Emden equations with Dirichlet, Neumann-Robin boundary conditions*, **Comput. Math. Appl.** 346(2019) 150-161.
- [57] M. Chawla, R. Subramanian, H. Sathi, *A fourth order method for a singular two point boundary value problem*, **BIT Numer. Math.** 28:1(1988) 88-97.



ÖZGEÇMİŞ

Gonca ÖZDEMİR, 31 Mayıs 1992 tarihinde Malatya’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya’ da tamamladı. 2011 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve 2015 yılında buradan mezun oldu. 2016 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Burada Prof. Dr. Ahmet Refik BAHADIR danışmanlığında “Lane-Emden Denkleminin Sonlu Fark Yöntemi İle Nümerik Çözümü” isimli çalışmayı yürüttü.

