

**T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**LANE-EMDEN, PANTOGRAPH VE RİCCATİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN CHARLIER POLİNOMLARI VE  
İNTEGRALE DAYALI YENİ BİR KOLLOKASYON YÖNTEMİ**

**Simge YILMAZ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**TEMMUZ 2025**

**ANTALYA**

**T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**LANE-EMDEN, PANTOGRAPH VE RİCCATİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN CHARLIER POLİNOMLARI VE  
İNTEGRALE DAYALI YENİ BİR KOLLOKASYON YÖNTEMİ**

**Simge YILMAZ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**TEMMUZ 2025**

**ANTALYA**

T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LANE-EMDEN, PANTOGRAPH VE RİCCATİ DİFERANİYEL  
DENKLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN CHARLIER POLİNOMLARI VE  
İNTEGRALE DAYALI YENİ BİR KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Simgе YILMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 14/07/2025 tarihinde jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Şuayip YÜZBAŞI (Danışman)

Prof. Dr. Mehmet MERDAN

Doç. Dr. Ramazan KARATAŞ

## ÖZET

# LANE-EMDEN, PANTOGRAPH VE RİCCATİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN CHARLIER POLİNOMLARI VE İNTEGRALE DAYALI YENİ BİR KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Simge YILMAZ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Temmuz 2025, 63 sayfa

Bu tezdeki amaç multi-pantograph, Lane-Emden, Riccati ve geliştirilmiş pantograph diferansiyel denklemlerini nümerik olarak çözmeye yardımcı olacak Charlier polinomları üzerine kurulmuş integrale dayalı yeni bir kollokasyon metodu oluşturmaktır. Diferansiyel denklemde bilinmeyen en yüksek mertebeden türevli terime Charlier polinomlarının sonlu serisi şeklinde bir yaklaşım yaparak yönteme başlanır. Bu yaklaşım matris formunda ifade edilir ve denklemdaki diğer türevli terimler ile bilinmeyen fonksiyonun matris formunu bulmak için gerekli sayıda integral alınır. İntegraller alındığında diferansiyel denklem ile verilen koşullar ilgili yerlerde kullanılır. Bu adımlardan sonra ise kollokasyon noktaları kullanılarak diferansiyel denklem problemi cebirsel denklemlerin lineer/lineer olmayan sistemine dönüştürülür. Bu cebirsel sistemin çözülmesi ile yaklaşımdaki bilinmeyen katsayılar elde edilir ve bilinmeyen fonksiyonun matris formunda yerine yazılarak problemin çözümü elde edilir. Sonrasında rezidüel fonksiyonu baz alan bir hata tahmini yöntemi sunulur. Bu hata tahmini tekniği ile bir hata problemi oluşturulur ve aynı çözüm yöntemi ile hata problemi de çözülerek hata tahmini edilir. Nümerik örnekler çözülerek yöntem ve hata tahmini tekniği açıklanır. Literatürdeki bilinen yöntemler ile karşılaştırmalar yapılarak yöntemin etkinliği gösterilir. Sunulan yöntemin sonuçlarının diğer yöntemlere göre daha iyi geldiği gözlemlenir. Bütün hesaplamalar Matlab'da yazılan kod ile yapılmıştır.

**ANAHTAR KELİMELEER:** Charlier polinomları, Differansiyel denklemler, Kollokas-yon yöntemi, Lane-Emden diferansiyel denklemleri, Pantograph diferansiyel denklemleri, Riccati diferansiyel denklemleri.

**JÜRİ:** Prof.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Prof. Dr. Mehmet MERDAN

Doç. Dr. Ramazan KARATAŞ



## **ABSTRACT**

### **A NEW COLLOCATION METHOD BASED ON CHARLIER POLYNOMIALS AND INTEGRAL TO SOLVE LANE-EMDEN, PANTOGRAPH AND RICCATI DIFFERENTIAL EQUATIONS**

**Simge YILMAZ**

**MSc Thesis in MATHEMATICS**

**Supervisor: Prof. Dr. Şuayip Yüzbaşı**

**July 2025, 63 pages**

The aim of this thesis is to create a new collocation method based on Charlier polynomials that will help us solve multi-pantograph, Lane-Emden, Riccati and generalized pantograph type differential equations numerically. The method starts by approximating the highest order derivative of unknown term in the differential equation as a finite series of Charlier polynomials. This approximation is expressed in matrix form and the necessary number of integrals are taken to find the matrix form of the unknown function and the other derivative terms in the equation. When the integrals are taken, the conditions given by the differential equation are used in the relevant places. After these steps, the differential equation problem is converted to a linear/nonlinear system of algebraic equations using collocation points. By solving this algebraic system, the unknown coefficients in the approximation are obtained. The solution of the problem is obtained by replacing the unknown function into matrix form. Then, an error estimation method based on the residual function is presented. With this error estimation technique, an error problem is created and the error problem is solved with the same solution method and the error is estimated. The method and error estimation technique are explained by solving numerical examples. The effectiveness of the method is shown by making comparisons with known methods from the literature. It is observed that the results of the presented method are better than other methods. All calculations are made with the code written in Matlab.

**KEYWORDS:** Charlier polynomials, Differential equations, Collocation method, Lane-Emden differential equations, Pantograph differential equations, Riccati differential equations.

**COMMITTEE:** Prof. Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Prof. Dr. Mehmet MERDAN

Assoc. Prof. Dr. Ramazan KARATAŞ



## ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında bilgi, deneyim ve yönlendirmeleriyle bana rehberlik eden, akademik hayatımda bana ilham kaynağı olan değerli danışmanım Prof. Dr. Şuayip Yüzbaşı'ya içten teşekkürlerimi sunuyorum. Her aşamada sabırla dinlediği, fikirlerimi önemseyerek geliştirmeme olanak sağladığı ve akademik bakış açımı şekillendirdiği için kendisine minnettarım.

Hayatım boyunca yanımda olan, koşulsuz sevgileri ve desteğiyle her zaman güç bulduğum aileme de sonsuz teşekkür ederim. Varlıklarıyla bana güven veren, her adımda yanımda olduklarını hissettiren anneme, babama ve kardeşime minnettarım. Bu süreci sağduyuları ve sevgileriyle kolaylaştırdılar; başarılarımı kendi sevinçleri gibi sahiplenerek yanımda olduklarını her zaman hissettirdiler.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                              |      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ÖZET . . . . .                                                                               | i    |
| ABSTRACT . . . . .                                                                           | iii  |
| ÖNSÖZ . . . . .                                                                              | v    |
| AKADEMİK BEYAN . . . . .                                                                     | viii |
| SİMGELER VE KISALTMALAR . . . . .                                                            | ix   |
| ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .                                                                    | x    |
| ÇİZELGELER DİZİNİ . . . . .                                                                  | xii  |
| 1. GİRİŞ . . . . .                                                                           | 1    |
| 2. KAYNAK TARAMASI . . . . .                                                                 | 3    |
| 3. MATERYAL VE METOT . . . . .                                                               | 7    |
| 3.1. Temel Matris Bağlılıkları . . . . .                                                     | 7    |
| 3.2. Yöntem . . . . .                                                                        | 8    |
| 3.3. Ele Alınacak Denklemler . . . . .                                                       | 10   |
| 3.4. Rezidüel Fonksiyona Dayalı Hata Analizi . . . . .                                       | 11   |
| 4. BULGULAR VE TARTIŞMA . . . . .                                                            | 12   |
| 4.1. Çözüm Metodunun Uygulanması . . . . .                                                   | 12   |
| 4.1.1. Multi-pantograph denklemler için çözüm metodu . . . . .                               | 12   |
| 4.1.2. Lane-Emden tipi diferansiyel denklemleri için çözüm metodu . . . . .                  | 14   |
| 4.1.3. Riccati diferansiyel denklemleri için çözüm metodu . . . . .                          | 17   |
| 4.1.4. Genelleştirilmiş pantograph denklemleri için çözüm metodu . . . . .                   | 18   |
| 4.2. Hata Tahmini Yöntemi . . . . .                                                          | 22   |
| 4.2.1. Multi-pantograph diferansiyel denklemleri için hata analizi . . . . .                 | 22   |
| 4.2.2. Lane-Emden diferansiyel denklemleri için hata analizi . . . . .                       | 23   |
| 4.2.3. Riccati diferansiyel denklemleri için hata analizi . . . . .                          | 24   |
| 4.2.4. Genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemleri için hata ana-<br>lizi . . . . . | 26   |
| 4.3. Nümerik Örnekler . . . . .                                                              | 27   |
| 4.3.1. Multi-pantograph denklemleri için örnekler . . . . .                                  | 27   |
| 4.3.2. Lane-Emden denklemleri için örnekler . . . . .                                        | 33   |
| 4.3.3. Riccati denklemleri için örnekler . . . . .                                           | 41   |
| 4.3.4. Genelleştirilmiş-pantograph denklemleri için örnekler . . . . .                       | 45   |
| 5. SONUÇLAR . . . . .                                                                        | 59   |

|                        |    |
|------------------------|----|
| 6. KAYNAKLAR . . . . . | 60 |
| ÖZGEÇMİŞ               |    |



## AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “LANE-EMDEN, PANTOGRAPH VE RİCATİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN CHARLIER POLİNOMLARI VE İNTEGRALE DAYALI YENİ BİR KOLLOKASYON YÖNTEMİ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

14/07/2025

Simge YILMAZ

İmza



## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler:

|              |                                                                    |
|--------------|--------------------------------------------------------------------|
| $a_n$        | : Charlier polinomlarına dayalı çözüm formunda yer alan katsayılar |
| $A$          | : Bilinmeyenlerden oluşan katsayı matrisi                          |
| $L$          | : Charlier polinomunun katsayıları matrisi                         |
| $C$          | : Charlier polinomu matrisi                                        |
| $C_n$        | : Genelleştirilmiş Charlier fonksiyonu                             |
| $l_{mn}$     | : Charlier polinomunun katsayı fonksiyonu                          |
| $X$          | : $x$ 'in satır vektörü                                            |
| $H_n$        | : İntegral katsayı matrisi                                         |
| $H$          | : Gecikme katsayılarının oluşturduğu matris                        |
| $W$          | : Elde edilen cebirsel sistemin katsayı matrisi                    |
| $x_i$        | : Kollokasyon noktaları                                            |
| $y(x)$       | : Diferansiyel denklemlerin tam çözümü                             |
| $y_N(x)$     | : Diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü                        |
| $y_{N,M}(x)$ | : Diferansiyel denklemlerin iyileştirilmiş yaklaşık çözümü         |
| $N$          | : Charlier polinom yaklaşımındaki sonlu serinin kesme sınırı       |
| $e_N(x)$     | : Gerçek hata fonksiyonu                                           |
| $e_{N,M}$    | : Tahmini hata fonksiyonu                                          |
| $E_{N,M}$    | : İyileştirilmiş hata fonksiyonu                                   |
| $R_N(x)$     | : Rezidüel hata fonksiyonu                                         |
| $L$          | : Diferansiyel denklemin lineer operatörü                          |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                   |                                                                                                                                   |    |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 2.1</b>  | Carl Vilhelm Ludwig Charlier (Anonymous 2) . . . . .                                                                              | 3  |
| <b>Şekil 4.2</b>  | Örnek 4.2'nin $N = 5, 7, 9$ için Gerçek Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .                                         | 31 |
| <b>Şekil 4.3</b>  | Örnek 4.2'nin $e_5$ Gerçek Hata ve $e_{5,7}$ Tahmini Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .                            | 32 |
| <b>Şekil 4.4</b>  | Örnek 4.2'nin $e_5$ Gerçek Hata ve $E_{5,7}, E_{5,9}, E_{5,11}$ İyileştirilmiş Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .  | 32 |
| <b>Şekil 4.5</b>  | Örnek 4.4'ün $N = 7, 10, 12$ için Gerçek Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .                                        | 38 |
| <b>Şekil 4.6</b>  | Örnek 4.4'ün $e_7$ Gerçek Hata ve $e_{7,10}$ Tahmini Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .                            | 38 |
| <b>Şekil 4.7</b>  | Örnek 4.4'ün $e_7$ Gerçek Hata ve $E_{7,9}, E_{7,11}, E_{7,9}$ İyileştirilmiş Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .   | 39 |
| <b>Şekil 4.8</b>  | Örnek 4.6'nın $N = 3, 5, 8$ için Gerçek Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .                                         | 43 |
| <b>Şekil 4.9</b>  | Örnek 4.6'nın $e_3$ Gerçek Hata ve $e_{3,5}$ Tahmini Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .                            | 43 |
| <b>Şekil 4.10</b> | Örnek 4.6'nın $e_8$ Gerçek Hata ve $E_{8,9}, E_{8,10}, E_{8,11}$ İyileştirilmiş Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . . | 44 |
| <b>Şekil 4.11</b> | Örnek 4.8'in $N = 3, 5, 8$ için Gerçek Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .                                          | 49 |
| <b>Şekil 4.12</b> | Örnek 4.8'in $e_5$ Gerçek Hata ve $e_{5,6}$ Tahmini Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .                             | 49 |
| <b>Şekil 4.13</b> | Örnek 4.8'in $e_3$ Gerçek Hata ve $E_{3,5}, E_{3,7}, E_{3,9}$ İyileştirilmiş Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .    | 50 |
| <b>Şekil 4.14</b> | Örnek 4.9'un $N = 6, 8, 10$ için Gerçek Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .                                         | 53 |
| <b>Şekil 4.15</b> | Örnek 4.9'un $e_8$ Gerçek Hata ve $e_{8,10}$ Tahmini Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .                            | 54 |
| <b>Şekil 4.16</b> | Örnek 4.9'un $e_6$ Gerçek Hata ve $E_{6,7}, E_{6,8}, E_{6,9}$ İyileştirilmiş Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .    | 54 |

|                                                                                                                                                   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 4.17</b> Örnek 4.10'un $N = 3, 5, 7$ için Gerçek Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .                                       | 57 |
| <b>Şekil 4.18</b> Örnek 4.10'un $e_5$ Gerçek Hata ve $e_{5,7}$ Tahmini Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . .                          | 58 |
| <b>Şekil 4.19</b> Örnek 4.10'un $e_5$ Gerçek Hata ve $E_{5,6}, E_{5,7}, E_{5,8}$ İyileştirilmiş Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması . . . . . | 58 |



## ÇİZELGELER DİZİNİ

|                    |                                                                                                                                                                         |    |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Çizelge 4.1</b> | N=5 iken, $\alpha=1$ ve $\alpha=1000$ için Gerçek Hata Fonksiyonları . . . .                                                                                            | 31 |
| <b>Çizelge 4.2</b> | Örnek 4.2'nin Gerçek Hatalarının Spline, Varyasyonel ve Üstel Yaklaşım Metotlarının Sonuçları İle Karşılaştırılması . . . . .                                           | 33 |
| <b>Çizelge 4.3</b> | Örnek 4.4'ün Gerçek Hatalarının B-spline, Türeve Dayalı Bessel Kollokasyon ve Türeve Dayalı Charlier Kollokasyon Metotlarının Sonuçları İle Karşılaştırılması . . . . . | 40 |
| <b>Çizelge 4.4</b> | Örnek 4.6'nın Gerçek Hatalarının Adomian ve Taylor Metotlarının Sonuçları İle Karşılaştırılması . . . . .                                                               | 45 |
| <b>Çizelge 4.5</b> | Örnek 4.8'in Gerçek Hatalarının Üstel, Taylor ve Bessel Metotlarının Sonuçları İle Karşılaştırılması . . . . .                                                          | 51 |
| <b>Çizelge 4.6</b> | Örnek 4.9'un Gerçek Hatalarının Hermite, Taylor ve Jacobi Rasyonel-Gauss Metotlarının Sonuçları ile Karşılaştırılması . . . . .                                         | 55 |

## 1. GİRİŞ

Bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak bazen çok zor bazen de imkansız olabilmektedir. Tam çözümün bulunamadığı bu durumlarda, çözüme olabildiğince yaklaşmak için yaklaşım metotları kullanılır. Bu çalışmada anlatılan yaklaşım metodu bir kollokasyon yaklaşım metodudur. Kollokasyon yöntemi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini bulmak için oluşturulmaktadır. Yöntemin temel fikri, aday çözümlerin tanım aralığındaki bir dizi kollokasyon noktasının verilen denklemi sağladığı çözümü oluşturmaktır. Kollokasyon yöntemi ilk olarak 1960'lerde diferansiyel ve integral denklemlerin sayısal çözümleri için bir projeksiyon yöntemi olarak tanıtılmıştır. Bu dönemde, çözümün belirli noktalarda denklemi sağlaması prensibi benimsenmiştir. Sınır değer problemleri ve başlangıç değer problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılmaya 1970'lerde başlanmıştır ve bu dönemde polinom tabanlı yaklaşımlar ile ilgili çalışmalar ön plana çıkmıştır. 1980'ler ve 1990'lerde kollokasyon yöntemleri, mühendislik ve fizik problemlerinin çözümünde daha geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Özellikle, elastisite, ısı iletimi, elektromanyetik alan analizi ve akışkanlar dinamiği gibi alanlarda kullanımı artmıştır. Yakın geçmişte de spektral yöntemlerle birleştirilerek yüksek doğrulukta çözümler elde etmek için kullanılmıştır. Ayrıca, meshless (ağırsız) yöntemlerle entegrasyonu sayesinde karmaşık geometrilere sahip problemlerin çözümünde de etkin hale gelmiştir. (Jiang ve Gao 2024)

Bu çalışmada Lane-Emden, pantograph ve Riccati diferansiyel denklemleri çözmek için Charlier polinomları ile integrale dayalı bir kollokasyon yöntemi sunulmaktadır. Bu kollokasyon metodunda kullanılmak üzere Charlier polinomu seçilmiştir. Charlier polinomları ilk olarak İsveçli astronom ve matematikçi Carl Vilhelm Ludwig Charlier tarafından ortaya atılmış (1905) bir ortagonal polinom ailesidir. Bu polinomları "*Über die Darstellung willkürlicher Funktionen*" adlı çalışmasında tanıtmıştır. Bu çalışma "*Rastgele Fonksiyonların Gösterimi Üzerine*" olarak çevirilebilir. Charlier polinomu istatistik alanında uyum testleri ve doğrulayıcı analizlerde kullanılabilir. (Johnson vd. 2005, Ledwina ve Wyłupek 2017) Makine öğrenmesi ve veri biliminde modellemeler için teorik olarak kullanılabilir. Dunster (2001b), Rui ve Wong (1994)  $C_n[x, a]$  için çeşitli asimptotik açılımlar ortaya koymuştur. Sonrasında bu polinom kullanılarak birçok modellemeler ve

denklem çözümleri üzerine çalışmalar yapılmıştır. Charlier polinomunun üreteç fonksiyonu şu şekildedir (Szegö 1939)

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x, \alpha) \frac{z^n}{n!} = \frac{(1+z)^x}{e^{az}} \quad (1.1)$$

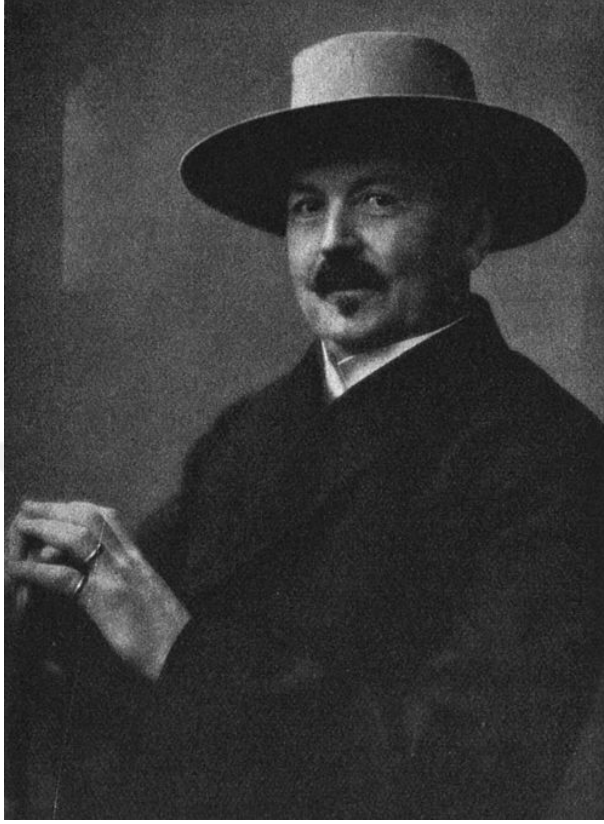
ve Charlier polinomunun ele alınan yöntemde çokça kullanıcak olan açık formülasyonu şu şekildedir

$$C_n(x, \alpha) = \sum_{k=0}^n k! \binom{n}{k} \binom{x}{k} (-\alpha)^{n-k}. \quad (1.2)$$

Charlier polinomuna bağlı kollokasyon yöntemiyle yapılan yaklaşım, diferansiyel denklemin içindeki fonksiyonun en yüksek mertebeden türevine yapılmıştır. Yapılan bu yaklaşımdan gerekli sayıda integral alarak diferansiyel denklemdeki diğer türevler ve bilinmeyen fonksiyonun kendisi için de yaklaşım formu bulunur. Bir başka deyişle oluşturulan kollokasyon yöntemi integrali baz almaktadır. İntegrali baz alan kollokasyon yöntemleri başlangıç değer problemleri, zayıf formülasyonlara sahip denklemler, ısı iletimi ve elektrik devreleri gibi fiziksel sistemlerin modellenmesi, spektral ve pseudospektral yöntemler gibi kullanım alanlarına sahiptir (Brunner 2004, Schiesser 2012).

Yapılan yaklaşımın türevinin alınması, küçük hata ya da dalgalanmaları çok daha büyük sapmalara çevirebilir. Yaklaşımın integralini almak pürüzsüzleştirici bir etkiye sahip olup sistemin genel eğilimini korur. Ayrıca türeve dayalı kollokasyon, çözümün sürekli türevlenebilir olmasını gerektirir. Ancak bazı problemlerde çözüm türevlenebilir olmayabilir. İntegral bazlı yöntemler, bu gibi durumlarda zayıf çözümleri kabul eder ve sayısal çözüm elde etmeye olanak tanır. Yani daha geniş bir problem sınıfına uygulanabilirlik sağlar. Bu nedenlerle integrali baz alan kollokasyon yöntemlerinin daha iyi sonuçlar getireceği öngörülmektedir. Dolayısıyla Charlier polinomuna bağlı integrali baz alan kollokasyon metodu bu tezde geliştirilmiştir (Schiesser 2012).

## 2. KAYNAK TARAMASI



**Şekil 2.1.** Carl Vilhelm Ludwig Charlier (Anonymous 2)

Charlier polinomları ilk olarak İsveç gök bilimci Carl Vilhelm Ludwig Charlier (1 Nisan 1862 – 4 Kasım 1934) tarafından 1905'te ortaya atılmıştır. Charlier, Östersund şehrinde doğmuştur. 1887 yılında Uppsala Üniversitesi'nden doktora derecesi almış ve Stockholm Rasathanesi'de çalışmıştır. Ardından 1897 yılında Lund Üniversitesi'nde astronomi profesörü ve gözlemevi müdürü olarak görev yapmıştır. İstatistiksel astronomi alanıyla ilgilenmiştir. Samanyolu Galaksisi'nin ve yıldızların pozisyon ve hareketleri üzerine bir galaksi modeli oluşturmuştur. Yıldızlar arası uzaklık için siriometre kavramını önermiştir. Charlier ayrıca klasik istatistik ile de ilgilenmiştir. İstatistik dalının İsveç'te gelişmesinde büyük rol sahibidir. Öğrencilerinden birçoğunu bu alanda yetiştirmiştir. Galaksi yapısını modelledikten sonra bunun hakkında John Heinrich Lambert'ün çalışmalarına dayalı bir kozmolojik teori geliştirmiştir. Bruce madalyası (1933) ve James Craig Watson madalyası'na (1924) layık görülmüştür (Anonymous 2).

Charlier polinomlarının bazı terimleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} C_0(x, \alpha) &= 1 \\ C_1(x, \alpha) &= x - \alpha \\ C_2(x, \alpha) &= x^2 - (2\alpha + 1)x + \alpha^2 \\ C_3(x, \alpha) &= x^3 - (3\alpha + 3)x^2 + (3\alpha^2 + 3\alpha + 2)x - \alpha^3. \end{aligned}$$

Charlier polinomlarının, Poisson ağırlık fonksiyonları altında

$$\langle C_n, C_m \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} C_n(x, \alpha) C_m(x, \alpha) \frac{\alpha^x}{x!} = \frac{n! e^\alpha}{\alpha^n} \lambda_{m,n} \quad (2.3)$$

şeklinde ortagonallığı belirtilir. Burada  $w(x, \alpha) = \frac{\alpha^x}{x!}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$  ağırlık fonksiyonunu ve  $\lambda_{m,n}$  Kronecker deltayı ( $n = m$  ise 1, değil ise 0) temsil etmektedir (Anonymous 1).

Charlier polinomları,  $C_0(x, \alpha) = 1$  başlangıç bağıntısıyla,

$$C_{n+1}(x, \alpha) = \alpha^{-1} x C_n(x - 1, \alpha) - C_n(x, \alpha) \quad (2.4)$$

öz yineleme formülünü sağlar (Anonymous 1).

Charlier polinomlarının genelleştirilmiş Laguerre polinomlarıyla ilişkisi

$$C_n(x, \alpha) = (-1)^n n! L_n^{(-1-x)} \left( -\frac{1}{\alpha} \right) \quad (2.5)$$

şeklinde olup burada  $L_n(x)$  genelleştirilmiş Laguerre polinomlarını temsil etmektedir (Anonymous 1).

Charlier polinomlarının Meixner polinomlarıyla ilişkisi

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} M_n(x, \beta, \frac{\alpha}{\beta + \alpha}) = C_n(x, \alpha) \quad (2.6)$$

şeklinde olup burada  $M_n(x, \beta, c)$  Meixner polinomlarını temsil etmektedir.

Bu tezde Charlier polinomunu ve integral operatörünü kullanarak bir kollokasyon metodu oluşturulmaktadır.

Literatürde integral operatörüyle beraber farklı polinomlar kullanılarak metotlar geliştirilmiştir. Örneğin Taylor polinomuyla (Yüzbaşı 2018) bir metot geliştirilmiş ve genelleştirilmiş pantograph tipi gecikmeli diferansiyel denklemler çözülmüştür.

Bu tezde de Charlier polinomları ve integrale dayalı metot geliştirildikten sonra Lane-Emden diferansiyel denklemi, Riccati diferansiyel denklemi, multi-pantograph tipi gecikmeli diferansiyel denklemi ve yüksek mertebeden pantograph denklemi temsili matris ilişkilerine dönüştürülüp bu metotla çözümleri araştırılır.

Öncelikle multi-pantograph tipi gecikmeli diferansiyel denklemi ele alınır. Bu denklemler ekonomi, biyoloji, astrofizik ve elektrodinamik gibi birçok alanda önemli rol oynamaktadır. Daha önce Galerkin-benzeri yaklaşım metodu (Yüzbaşı ve Karaçayır 2018), Taylor kollokasyon metodu (Sezer vd. 2011), Spline metodu (El-Safty ve Hasha 1990) ve Vieta-Lucas kollokasyon metodu (Izadi vd. 2021) gibi birçok metotla çözülmüştür.

Sonrasında ise Lane-Emden diferansiyel denklemi ele alınmıştır. Lane-Emden denklemleri ilk Jonathan Homer Lane ve Robert Emden (Lane 1870) adlarında iki astrofizikçi tarafından ortaya atılmış ve adını onlardan almıştır. Bu diferansiyel denklemler termal patlamalar, yıldız yapısı, küresel bir gaz bulutunun termal davranışı, izotermal gaz küreleri ve termal akımlar gibi matematiksel fizik ve astrofizikteki çeşitli olayları modellemek için kullanılmıştır. Bu denklemler daha önce Bessel kollokasyon metodu (Yüzbaşı, Sezer 2011), B-spline metodu (Çağlar, Çağlar 2006) ve Pell-Lucas kollokasyon metodu (Yüzbaşı, Yıldırım 2022) gibi birçok yöntemle çözülmüştür.

Üçüncü olarak Riccati diferansiyel denklemi ele alınmıştır. Riccati diferansiyel denklemi uygulamalı bilimlerin ve mühendisliğin farklı dallarında sıklıkla bulunan birinci mertebeden lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir. Literatürde Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı, 2012), Taylor kollokasyon yöntemi (Öztürk 2013), Legendre kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı, Yıldırım 2020), Müntz–Legendre dalgacık kollokasyon yöntemi (Soleyman ve Area 2025), en küçük kareler yöntemi (Yüzbaşı, 2020), parametreler varyasyonu yöntemi (Tumbarell, Oliveira 2020) gibi birçok yöntemle çözülmüştür. Bu metotlara kıyasla Charlier polinomunun ne kadar etkin olduğunu göreceğiz olmamız da daha sonra yapılacak çalışmalara yol gösterici olacaktır.

Dördüncü olarak, elde edeceğimiz yaklaşık çözüm yöntemiyle yüksek mertebeden pantograph denklemi ele alınmıştır. Pantograph adı, Ockendon ve Tayler'in (1971) elektrikli bir lokomotifin pantograph başlığı tarafından akımın toplanmasıyla ilgili çalışmalarından kaynaklanmaktadır. Pantograph denklemleri, nöron sinyali gecikmeleri modellemelerinde (Bellen ve Zennaro 2003), robotik kollar veya otomatik kontrol sistemleri gibi

geri beslemeye sahip sistemlerin modellemelerinde (Gopalsamy 2013), biyolojide bir türün büyüme oranının geçmişteki popülasyon seviyelerine bağlı olduğu modellemelerde (Wu 2012), stok fiyatlarının gecikmeli tepkisi gibi geçmiş verilere bağlı ama zamanla değişen gecikme oranları içeren ekonomik modellerde (Niculescu 2003) önemli rol oynar. Bu denklem literatürde Taylor matris metodu (Sezer, Şahin 2008), Legendre-Gauss kollokasyon metodu (Yang, Tohidi 2019) ve varyasyonel iterasyon metodu (Yu, 2008) gibi birçok metotla çözülmüştür.



### 3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde önce metodu oluşturmak için kullanılan materyaller, yani temel matris bağıntıları verilmiştir. Bu temel matris bağıntıları kullanılarak Charlier polinomlarına ve integrale dayalı kollokasyon yöntemi oluşturulmuştur. Lane-Emden diferansiyel denklemleri, Riccati tipi diferansiyel denklemleri, multi-pantograph tipi diferansiyel denklemleri ve yüksek mertebeden pantograph denklemlerine uygulanmıştır.

#### 3.1. Temel Matris Bağıntıları

Literatürde Charlier polinomlarını ve türev bağıntılarını içeren yöntemde kullanılan Charlier polinomları şu şekilde matris formunda yazılabilir:

$$\mathbf{C}(x, \alpha) = \mathbf{X}(x)\mathbf{L}(\alpha). \quad (3.7)$$

Buradaki matrisler (Kürkçü, Sezer 2022);  $\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^N \end{bmatrix}$ ,  
 $\mathbf{C}(x, \alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0(x, \alpha) & \mathbf{C}_1(x, \alpha) & \dots & \mathbf{C}_N(x, \alpha) \end{bmatrix}$  ve

$$\mathbf{L}(\alpha) = \begin{bmatrix} l_{00}(\alpha) & l_{01}(\alpha) & l_{02}(\alpha) & \dots & l_{0N}(\alpha) \\ 0 & l_{11}(\alpha) & l_{12}(\alpha) & \dots & l_{1N}(\alpha) \\ 0 & 0 & l_{22}(\alpha) & \dots & l_{2N}(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{NN}(\alpha) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradaki  $\mathbf{L}(\alpha)$  matrisinin elemanlarına  $l_{mn}(\alpha)$ ,  $m, n = 0, 1, 2, \dots, N$  diyecek olursak  $l_{mn}(\alpha)$  fonksiyonu Charlier polinomundaki katsayılarıdır. Şu şekilde tanımlanırlar (Kürkçü, Sezer 2022)

$$l_{mn}(\alpha) = \begin{cases} m! \binom{n}{m} (-\alpha)^{n-m}, & m \leq n \\ 0, & m > n \end{cases}, \quad m, n = 0, 1, \dots, N \quad (3.8)$$

ve  $\mathbf{L}(\alpha)$  matrisi şu şekilde elde edilir:

$$\mathbf{L}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \dots & (-1)^N \alpha^N \\ 0 & 1 & -2\alpha & 3\alpha^2 & \dots & (-1)^{N-1} N \alpha^{N-1} \\ 0 & 0 & 2 & -6\alpha & \dots & (-1)^{N-2} N(N-1) \alpha^{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \dots & (-1)^{N-3} N(N-1)(N-3) \alpha^{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N! \end{bmatrix}.$$

### 3.2. Yöntem

Bu çalışmada yapılan Charlier polinomları ve integrale dayalı oluşturulan yöntemde, bilinmeyen fonksiyonun denklem içerisindeki en yüksek mertebeden türevine yaklaşım yapılır. Eğer denklemin en yüksek mertebesine ‘ $p$ ’ denirse fonksiyonun  $p$ ’nci mertebeden türevine yaklaşım şu şekilde olur:

$$y^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^N a_n C_n(x, \alpha). \quad (3.9)$$

Burada  $N$  ve  $\alpha$  belirli pozitif tam sayılar ve  $C_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  olmak üzere Charlier polinomlarıdır. Charlier polinomunun bu gösterimini kullanarak (3.9) yaklaşımı

$$y^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^N a_n C_n(x, \alpha) = \mathbf{C}(x, \alpha) \mathbf{A} \quad (3.10)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Burada  $\mathbf{A}$  matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_N \end{bmatrix}^T \quad (3.11)$$

olarak tanımlanır. Sonrasında (3.7) denklemi kullanılarak (3.10) yaklaşımı

$$y^{(p)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} \quad (3.12)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece  $y$ ’nin  $p$ ’nci mertebeden türevinin matris formu bulunmuş olur. Bu eşitliğin iki tarafının  $p$  defa integrali alınarak,  $y$  fonksiyonun daha küçük mertebeden türevleri ve  $y$  fonksiyonunun kendisi elde edilir. Bu doğrultuda eğer iki tarafın da,  $a$ ’dan  $x$ ’e,  $x$  üzerinden integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_a^x y^{(p)}(x) dx &= \int_a^x \mathbf{X}(x) \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} dx \\ y^{(p-1)}(x) - y^{(p-1)}(a) &= \int_a^x \begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^N \end{bmatrix} dx \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} \\ y^{(p-1)}(x) - y^{(p-1)}(a) &= [\tilde{\mathbf{X}}(x) - \tilde{\mathbf{X}}(a)] \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir. Burada

$$\tilde{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \cdots & \frac{x^{N+1}}{N+1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

şeklindedir. Eğer  $\tilde{\mathbf{X}}$  matrisi daha düzgün bir formda görülmek istenirse, bir  $\mathbf{H}_i$  matrisi

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2+i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N+i} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlandığında şu formda da yazılabilir:

$$\tilde{\mathbf{X}} = x\mathbf{X}(x)\mathbf{H}_i \quad (3.15)$$

(3.13) ve (3.15) denklemlerinden, koşul  $y^{(p-1)}(a) = y_1$  olarak ele alınırsa

$$y^{(p-1)}(x) = y_1 + [x\mathbf{X}(x) - x\mathbf{X}(a)] \mathbf{H}_i \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} \quad (3.16)$$

şeklinde yazılabilir.

Böylece  $p - 1$ 'inci türevin yaklaşım türünden ifadesi bulunmuş olur. Bu şekilde  $p - 1$  kez daha integral alınırsa  $y$  fonksiyonu ve  $p$ 'den küçük her mertebeden türevlerin yaklaşım türünden ifadeleri bulunmuş olur. Daha sonra türevlerin ve bağımlı değişkenin elde edilen yaklaşımlarında koşulların yerine konulduktan sonra bu yaklaşımlar diferansiyel denklemde yerine yazılır. Ardından elde edilen denklemde kollokasyon noktaları kullanılarak diferansiyel denklem problemi cebirsel denklem sistemine indirgenir.

Charlier polinomlarına ve integrale dayalı oluşturulan bu yöntem kullanılarak diferansiyel denklem problemi cebirsel denklem sistemine dönüştürülmüş olur. Cebirsel sistem; lineer diferansiyel denklem problemleri için lineer olurken, lineer olmayan diferansiyel denklemler için lineer olmayan cebirsel sistem olur. Yöntemde yapılan bu dönüşüm, uygulanan denklemin kaçınıcı mertebeden olduğuna göre yani denklem tipine göre değişeceği için bütün denklem tipleri, bulgular ve tartışma bölümünde, tek tek kendi alt başlıklarının altında ele alınarak yaklaşık çözümler elde edilecektir.

### 3.3. Ele Alınacak Denklemler

Yöntemin uygulanacağı denklem çeşitleri, multi-pantograph, Lane-Emden, Riccati ve genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklem tipleridir.

Multi-pantograph diferansiyel denklemi şu şekilde tanımlanmaktadır: (Ockendon ve Taylor 1971)

$$y'(x) = py(x) + qy(rx) + g(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (3.17)$$

Denklem  $y(a) = y_1$  koşulu altında ele alınmıştır.  $y^{(0)}(x) = y(x)$ ,  $c \leq x \leq d$  aralığında tanımlı bilinmeyen bir fonksiyondur. (3.17) ile verilen multi-pantograph diferansiyel denklemi birinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklem olup (3.9) yaklaşımı bilinmeyen fonksiyonun birinci mertebeden türevine yapılır.

Lane-Emden diferansiyel denklemi şu şekilde tanımlanmaktadır: (Emden 1907)

$$y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + p(x)y(x) = g(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (3.18)$$

Denklem  $y'(a) = y_1$  ve  $y(b) = y_2$  koşulları altında incelenmektedir. Burada  $y^{(0)}(x) = y(x)$  bilinmeyen bir fonksiyon,  $p(x)$  ve  $g(x)$  bilinen fonksiyonları  $c \leq x \leq d$  aralığında tanımlı, ve  $\alpha$  gerçek ya da karmaşık sabittir. (3.18) ile verilen Lane-Emden diferansiyel denklemi ikinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklem olup (3.9) yaklaşımı bilinmeyen fonksiyonun ikinci mertebeden türevine yapılır.

Riccati diferansiyel denklemi şu şekilde tanımlanmaktadır: (Riccati 1724)

$$y'(x) = g(x) + q(x)y(x) + r(x)y^2(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (3.19)$$

Denklem  $y(a) = y_1$  koşulu altında incelenmektedir. Burada  $y^{(0)}(x) = y(x)$  bilinmeyen bir fonksiyon,  $g(x)$ ,  $q(x)$  ve  $r(x)$  bilinen fonksiyonları  $c \leq x \leq d$  aralığında tanımlıdır. (3.19) ile verilen Riccati diferansiyel denklemi birinci mertebeden lineer olmayan bir diferansiyel denklem olup (3.9) yaklaşımı bilinmeyen fonksiyonun birinci mertebeden türevine yapılır.

Genelleştirilmiş pantograph denklemi şu şekilde tanımlanmaktadır: (Derfel 1995)

$$y^{(m)}(x) = f(x) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} u_{jk}(x)y^{(k)}(\delta_{jk}x + \mu_{jk}), \quad 0 \leq x \leq d. \quad (3.20)$$

$$y^{(i)}(0) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

başlangıç koşulları altında incelenmektedir. Burada  $u_{jk}(x)$  ve  $y(x)$  sürekli fonksiyonları  $0 \leq x \leq d$  aralığında tanımlı, ve  $a_{ik}$ ,  $\lambda_i$ ,  $\delta_{jk}$  ve  $\mu_{jk}$  gerçekte ya da karmaşık sabitlerdir. (3.20) ile verilen genelleştirilmiş pantograph denklemi için (3.9) yaklaşımı bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebesi  $m$  kabul edilerek fonksiyonun  $m$ 'inci mertebeden türevine yapılır.

### 3.4. Rezidüel Fonksiyona Dayalı Hata Analizi

Bu bölümde rezidüel tahmini hata (Mahmoud vd. 2005, Shahmorad 2005) ve rezidüel iyileştirilmiş çözümleri (Çelik 2006, Oliveira 1980) hesaplama yöntemi açıklanır.

Ele alınan diferansiyel denklem tipinin tam çözümü  $y(x)$  olmak üzere problemin önceki bölümde açıklanan yöntem kullanılarak  $y_N(x)$  yaklaşık çözümü hesaplanır. Böylece gerçek hata fonksiyonu

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x) \quad (3.21)$$

ile temsil edilebilir.  $y_N(x)$  yaklaşık çözümü diferansiyel denklemde bağımlı değişken yerine konularak rezidü fonksiyonu oluşturulur. Daha sonra diferansiyel denklem ile bu rezidü fonksiyonu taraf tarafa çıkarılarak hata fonksiyonunun bağımlı değişken olduğu yeni bir diferansiyel denklem elde edilir. Diğer taraftan, hem  $y(x)$  tam çözümü hem de  $y_N(x)$  yaklaşık çözümü koşulları sağladığından bu koşullar taraf tarafa çıkarıldığında hata fonksiyonuna bağlı homojen koşul elde edilir. Böylece bir hata diferansiyel denklem problemi elde edilmiş olur.  $e_N(x)$  hata fonksiyonunu belirlemek için, diferansiyel denklemin mertebesi  $m$  iken, önceki bölümde anlatılan yöntem ile  $M$  kesme sınırı için

$$e_{N,M}^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^M \tilde{a}_n \mathbf{C}_n(x, \alpha). \quad (3.22)$$

şeklinde yaklaşım yapılarak yöntem önceki bölümde olduğu gibi hata problemine uygulanır. Yöntemin sonucunda  $e_N(x)$ 'in yaklaşımı olan  $e_{N,M}(x)$  tahmini hata fonksiyonu elde edilir. Bunun da devamında iyileştirilmiş çözüm

$$y_{N,M} = y_N(x) + e_{N,M}(x) \quad (3.23)$$

şeklinde elde edilebilir ve o zaman iyileştirilmiş çözümün gerçek hata fonksiyonu

$$E_{N,M}(x) = e_N(x) - e_{N,M}(x) = y(x) - y_{N,M}(x) \quad (3.24)$$

ile hesaplanır.

#### 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Önceki bölümde açıklanan yöntem ele aldığımız her bir denklem için tek tek alt başlıklar altında ele alınarak yaklaşık çözümler elde edilecek, her bir denklem için hata tahmini yöntemi açıklanacak ve sayısal örnekler ele alınacaktır.

##### 4.1. Çözüm Metodunun Uygulanması

Ele aldığımız her bir denklem için (3.9) yaklaşık çözümü bu bölümde alt başlıklar altında ele alınmıştır.

###### 4.1.1. Multi-pantograph denklemler için çözüm metodu

(3.17) denklemleri ile verilen multi-pantograph denklemleri birinci mertebeden oransal gecikmeli bir denklem tipidir. Dolayısıyla  $y$  fonksiyonunun birinci mertebeden türevine,

$$y'(x) = \sum_{n=0}^N a_n C_n(x, \alpha) \quad (4.25)$$

şeklinde yaklaşım yapılarak yönteme başlanır. Burada  $C$  matrisiyle ilgili verilen (3.7) bağıntısından yola çıkarak

$$y'(x) = X(x)L(\alpha)A \quad (4.26)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin  $a$ 'dan  $x$ 'e integrali alınarak  $y$  fonksiyonunun türevinin matris formu şu adımlarla elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_a^x y'(x)dx &= \int_a^x X(x)L(\alpha)A dx \\ y(x) - y(a) &= \int_a^x \begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^N \end{bmatrix} dx L(\alpha)A \\ y(x) - y(a) &= [\tilde{X}(x) - \tilde{X}(a)]L(\alpha)A \\ y(x) &= y(a) + [xX(x)H_1 - aX(a)H_1]L(\alpha)A. \end{aligned} \quad (4.27)$$

$y(a) = y_1$  koşulu burada yerine yazılırsa,

$$y(x) = y_1 + [xX(x)H_1 - aX(a)H_1]L(\alpha)A \quad (4.28)$$

elde edilir. Bu eşitlikteki  $X(a)$  ve  $H_1$  matrisleri

$$\mathbf{X}(a) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(a) \\ \mathbf{X}(a) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(a) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/(N+1) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. (3.17) ile verilen multi-pantograph denklem tipindeki  $y(rx)$ , ( $r \neq 0$ ) ifadesinin matris formunu elde etmek için (4.28) denkleminde  $x$  yerine  $rx$  yazarsak ve

$$\mathbf{X}(rx) = \mathbf{X}(x)\mathbf{H}(r) \quad (4.29)$$

bağıntısını kullanırsak

$$y(rx) = y(a) + [rx\mathbf{X}(x)\mathbf{H}(r)\mathbf{H}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \quad (4.30)$$

denklemini elde ederiz. Burada

$$\mathbf{H}(r) = \begin{bmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r \end{bmatrix}.$$

(4.26) ve (4.28) denklemleri (3.17) ile verilen multi-pantograph denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}(x)\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} - p(x)[[x\mathbf{X}(x) - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{H}_1\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} - y_1] \\ &-q(x)[[rx\mathbf{X}\mathbf{H}(r) - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{H}_1\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} - y_1] = g(x) \end{aligned} \quad (4.31)$$

denklemini elde edilir.

$$x_i = c + \frac{d-c}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

ile tanımlı kollokasyon noktalarını (4.31) denkleminde yazdığımızda

$$\begin{aligned} &[\mathbf{X}(x_i)\mathbf{L}(\alpha) - p(x_i)[x_i\mathbf{X}(x_i) - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{H}_1\mathbf{L}(\alpha) - q(x_i)[rx_i\mathbf{X}\mathbf{H}(r) - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{H}_1\mathbf{L}(\alpha)]\mathbf{A} \\ &= g(x_i) + y_1(p(x_i) + q(x_i)), \quad i = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.32)$$

sistemi elde ederiz. Bu sistemin matris formunu şu şekilde ifade edebiliriz:

$$[\mathbf{X}\mathbf{L}(\alpha) - \mathbf{P}[\mathbf{K}\mathbf{X} - \dot{\mathbf{A}}\mathbf{X}_a]\mathbf{H}_1\mathbf{L}(\alpha) - \mathbf{Q}[\mathbf{K}\mathbf{X}\mathbf{H}(r) - \dot{\mathbf{A}}\mathbf{X}_a]\mathbf{H}_1\mathbf{L}(\alpha)]\mathbf{A} = \mathbf{G}. \quad (4.33)$$

(4.32) denkleminde bir  $\tilde{g}(x)$  fonksiyonu

$$\tilde{g}(x_i) = g(x_i) + y_1(p(x_i) + q(x_i))$$

olarak belirlenmiş ve (4.33) matris formunda  $\tilde{g}(x_i)$ 'lerden oluşan sütun vektörü  $\mathbf{G}$  matrisiyle temsil edilmiştir. Bu matris formundaki bazı matrisler şu şekildedir:

$$\mathbf{X}(x_i) = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \tilde{g}(x_0) \\ \tilde{g}(x_1) \\ \vdots \\ \tilde{g}(x_N) \end{bmatrix}.$$

(4.33) matris formunda bir  $\mathbf{W}$  matrisi

$$\mathbf{W} = \mathbf{X}\mathbf{L}(\alpha) - \mathbf{P}[\mathbf{K}\mathbf{X} - \dot{\mathbf{A}}\mathbf{X}_a]\mathbf{H}_1\mathbf{L}(\alpha) - \mathbf{Q}[\mathbf{K}\mathbf{X}\mathbf{H}(r) - \dot{\mathbf{A}}\mathbf{X}_a]\mathbf{H}_1\mathbf{L}(\alpha) \quad (4.34)$$

olarak kabul edildiğinde, (4.33) matris formu

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılıp, bu sistem çözülür ve  $\mathbf{A}$  katsayıları hesaplanır. Belirlenen  $\mathbf{A}$  katsayı matrisi  $y(x)$  çözüm formu olan (4.27) denkleminde yerine yazılarak çözüm elde edilir.

#### 4.1.2. Lane-Emden tipi diferansiyel denklemleri için çözüm metodu

(3.18) ile verilen Lane-Emden denklemi ikinci mertebeden lineer denklem tipidir. Dolayısıyla  $y$  fonksiyonunun ikinci mertebeden türevine

$$y''(x) = \sum_{n=0}^N a_n \mathbf{C}_n(x, \alpha) \quad (4.35)$$

şeklinde yaklaşım yapılarak yöntemle başlanır. Burada  $\mathbf{C}$  matrisiyle ilgili verilen (3.7) bağıntısından yola çıkarak

$$y''(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \quad (4.36)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin integrali alınarak  $y$  fonksiyonun türevinin matris formu şu adımlarla elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_a^x y''(x)dx &= \int_a^x \mathbf{X}(x)\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A}dx \\ y'(x) - y'(a) &= \int_a^x \begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^N \end{bmatrix} dx \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \\ &= [\tilde{\mathbf{X}}(x) - \tilde{\mathbf{X}}(a)]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \\ y'(x) &= y_1 + [x\mathbf{X}(x)\mathbf{H}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Burada denklemin koşulu olan  $y'(a) = y_1$  olarak yerine konulmuştur. Bu fonksiyonun da  $b$ 'den  $x$ 'e integrali alınarak  $y$  fonksiyonunun matris formu

$$\begin{aligned} \int_b^x y'(x)dx &= \int_b^x [y_1 + [x\mathbf{X}(x) - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{H}_1\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A}]dx, \\ y(x) &= y_2 + y_1(x - b) + [x^2\mathbf{X}(x)\mathbf{H}_2 - b^2\mathbf{X}(b)\mathbf{H}_2 - a\mathbf{X}(a)(x - b)]\mathbf{H}_1\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \end{aligned} \quad (4.38)$$

şeklinde elde edilir. Burada denklem koşulu  $y(b) = y_2$  olarak ele alınmıştır ve  $\mathbf{H}_2$  şu şekildedir:

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/(N+2) \end{bmatrix}.$$

(4.36), (4.37) ve (4.38) denklemleri, (3.18) ile verilen Lane-Emden denkleminde yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}(x)\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} + \frac{\alpha}{x}[y_1 + [x\mathbf{X}(x)\mathbf{H}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A}] \\ &+ p(x)[y_2 + y_1(x - b) + [x^2\mathbf{X}(x)\mathbf{H}_2 - b^2\mathbf{X}(b)\mathbf{H}_2 - a\mathbf{X}(a)(x - b)]\mathbf{H}_1\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A}] = g(x) \end{aligned} \quad (4.39)$$

denklemini elde edilir.

$$x_i = c + \frac{d-c}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

ile tanımlı kollokasyon noktalarını (4.39) denkleminde yazdığımızda

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}(x_i)\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} + \frac{\alpha}{x_i}[\mathbf{K}\mathbf{X}(x_i)\mathbf{H}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \\ &+ p(x_i)[\mathbf{K}^2\mathbf{X}(x_i)\mathbf{H}_2 - b^2\mathbf{X}(b)\mathbf{H}_2 - a\mathbf{X}(a)(x_i - b)]\mathbf{H}_1\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \\ &= g(x_i) - \frac{\alpha}{x_i}y_1 - p(x_i)[y_2 + (x_i - b)y_1], \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.40)$$

sistemi elde ederiz. Bu sistemi matris formunda şu şekilde ifade edebiliriz:

$$[\mathbf{X} + \mathbf{S}[[\mathbf{K}\mathbf{X} - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{H}_1] + \mathbf{P}\mathbf{K}^2\mathbf{X}\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1 - \mathbf{P}b^2\mathbf{X}_b\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1 - \mathbf{P}a\mathbf{X}_a\mathbf{K}_b\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} = \mathbf{G}. \quad (4.41)$$

(4.40) denkleminde bir  $\tilde{g}(x)$  fonksiyonu

$$\tilde{g}(x) = g(x) - \frac{\alpha}{x}y_1 - p(x)[y_2 + (x - b)y_1]$$

olarak belirlenmiş ve (4.41) matris formunda  $\tilde{g}(x)$ 'da kollokasyon noktaları konulması ile elde edilen sütun vektörü  $\mathbf{G}$  matrisiyle temsil edilmiştir. (4.41) matris formunda yer alan bazı matrisler şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x_i) &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(a) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(a) \\ \mathbf{X}(a) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(a) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(b) \\ \mathbf{X}(b) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(b) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{x_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{x_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\alpha}{x_N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p(x_N) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_N \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_b &= \begin{bmatrix} x_0 - b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 - b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_N - b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \tilde{g}(x_0) \\ \tilde{g}(x_1) \\ \vdots \\ \tilde{g}(x_N) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(4.41) matris formunda bir  $\mathbf{W}$  matrisi

$$\mathbf{W} = [\mathbf{X} + \mathbf{S}[[\mathbf{K}\mathbf{X} - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{H}_1] + \mathbf{P}\mathbf{K}^2\mathbf{X}(x_i)\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1 - \mathbf{P}b^2\mathbf{X}_b\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1 - \mathbf{P}a\mathbf{X}_a\mathbf{K}_b\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha) \quad (4.42)$$

olarak kabul edildiğinde, (4.41) matris formu

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G}$$

şeklinde yazılıp, bu sistem çözülür ve  $\mathbf{A}$  katsayıları hesaplanır. Belirlenen  $\mathbf{A}$  katsayı matrisi  $y(x)$  çözüm formu olan (4.38) denkleminde yerine yazılarak çözüm elde edilir.

#### 4.1.3. Riccati diferansiyel denklemleri için çözüm metodu

(3.19) ile verilen Riccati denklemi birinci mertebeden olup lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir. Dolayısıyla  $y$  fonksiyonun birinci mertebeden türevine

$$y'(x) = \sum_{n=0}^N a_n \mathbf{C}_n(x, \alpha) \quad (4.43)$$

şeklinde yaklaşım yapılarak yöntemle başlanır. Burada  $\mathbf{C}$  matrisiyle ilgili verilen (3.7) bağıntısından yola çıkarak

$$y'(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \quad (4.44)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin  $a$ 'dan  $x$ 'e integrali alınarak  $y$  fonksiyonun türevinin matris formu şu adımlarla elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_a^x y'(x)dx &= \int_a^x \mathbf{X}(x)\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A}dx \\ y(x) - y(a) &= \int_a^x \begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^N \end{bmatrix} dx \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \\ y(x) - y(a) &= [\tilde{\mathbf{X}}(x) - \tilde{\mathbf{X}}(a)]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \\ y(x) &= y(a) + [x\mathbf{X}(x)\mathbf{H}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Bu eşitlikteki matrisler yukarıda verilen çözüm metotlarında olduğu gibidir.  $y(a) = y_1$  koşulu (4.45) denkleminde yerine yazıldığında ve (4.44) ve (4.45) denklemleri (3.19) ile verilen Riccati denkleminde yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x)\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} &= g(x) + q(x)[y_1 + [x\mathbf{X}(x)\mathbf{H}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A}] \\ &\quad + r(x)[y_1 + [x\mathbf{X}(x)\mathbf{H}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A}]^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

denklemi elde edilir.

$$x_i = c + \frac{d-c}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

ile tanımlı kollokasyon noktalarını (4.46) denkleminde yazdığımızda

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x_i)\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} - q(x_i)[x\mathbf{X}(x_i)\mathbf{H}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} - r(x_i)[x\mathbf{X}(x_i)\mathbf{H}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A}]^2 \\ = g(x_i) + q(x_i)y_1 + r(x_i)y_1, \quad i = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.47)$$

sistemi elde ederiz. Bu sistemi matris formunda şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{X} - \mathbf{Q} [\mathbf{KX} - a\mathbf{X}_a] \mathbf{H}_1 - 2\mathbf{R}y_1 [\mathbf{KX} - a\mathbf{X}_a] \mathbf{H}_1 \\ & - \mathbf{R} [\mathbf{KX} - a\mathbf{X}_a] \mathbf{H}_1 \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} [\mathbf{KX} - a\mathbf{X}_a] \mathbf{H}_1 \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} = \mathbf{G}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

(4.47) denkleminde bir  $\tilde{g}(x)$  fonksiyonu

$$\tilde{g}(x) = p(x) + q(x)y_1 + r(x)y_1$$

olarak belirlenerek kollokasyon noktaları kullanılmış sütun vektörü (4.48) matris formunda  $\mathbf{G}$  matrisiyle temsil edilmiştir. (4.48) matris formunda yer alan bazı matrisler şu şekildedir:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \tilde{g}(x_0) \\ \tilde{g}(x_1) \\ \vdots \\ \tilde{g}(x_N) \end{bmatrix}.$$

(4.48) lineer olmayan cebirsel sistemin matris formu uygun MATLAB kodu yazılarak çözülür ve  $\mathbf{A}$  katsayı matrisi hesaplanır. Belirlenen  $\mathbf{A}$  katsayı matrisi  $y(x)$  çözüm formu olan (4.45) denkleminde yerine yazılarak çözüm elde edilir.

#### 4.1.4. Genelleştirilmiş pantograph denklemleri için çözüm metodu

(3.20) ile verilen genelleştirilmiş pantograph denklemlerinde en yüksek mertebe  $m$  olduğu için  $y$  fonksiyonunun ' $m$ 'inci mertebeden türevine,

$$y^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^N a_n \mathbf{C}_n(x, \alpha) \quad (4.49)$$

şeklinde yaklaşım yapılarak yöntemle başlanır. Burada  $\mathbf{C}$  matrisiyle ilgili verilen (3.7) bağıntısından yola çıkarak

$$y^{(m)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} \quad (4.50)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin, 0'dan  $x$ 'e  $m$  defa integrali alınır. Başlangıç koşulları,  $y$  fonksiyonunda ve  $m$ 'inci mertebesine kadar her mertebeden türevinde 0'ın değeridir. Bu adımlarda

fonksiyonun daha düşük mertebeden türevlerinin matris hâlleri elde edilir ve  $y$  fonksiyonunun genelleştirilmiş hâli elde edilir. Bu süreçte elde edilen 3 adım aşağıda belirtilmiştir:

$$\begin{aligned}
 y^{(m)}(x) &= \mathbf{X}(x)\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \\
 y^{(m-1)}(x) &= \lambda_{m-1} + x\mathbf{X}(x)\mathbf{H}_1\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \\
 y^{(m-2)}(x) &= \lambda_{m-2} + \lambda_{m-1}x + x^2\mathbf{X}(x)\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \\
 y^{(m-3)}(x) &= \lambda_{m-3} + \lambda_{m-2}x + \lambda_{m-1}\frac{x^2}{2} + x^3\mathbf{X}(x)\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\mathbf{H}_3\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \\
 &\vdots \\
 y(x) &= \lambda_0 + \lambda_1x + \lambda_2\frac{x^2}{2} + \dots + \lambda_{m-1}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + x^m\mathbf{X}(x)\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\mathbf{H}_3\dots\mathbf{H}_m\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A}.
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

(4.51) denklemi daha kısa ve kapalı olarak şu şekilde yazılabilir:

$$y(x) = \sum_{l=0}^{m-1} (\lambda_l \frac{x^l}{l!}) + x^m \mathbf{X}(x) (\prod_{n=1}^m \mathbf{H}_n) \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A}. \tag{4.52}$$

Burada  $\mathbf{H}_n$  matrisi

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2+n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N+n} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca (4.52) fonksiyonundaki

$$\sum_{l=0}^{m-1} (\lambda_l \frac{x^l}{l!}) = \mathbf{X}(x)\mathbf{Z}(\lambda) \tag{4.53}$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\mathbf{Z}(\lambda)$ ,

$$\mathbf{Z}(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_0}{0!} \\ \frac{\lambda_1}{1!} \\ \frac{\lambda_2}{2!} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_{m-1}}{(m-1)!} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece

$$y(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{Z}(\lambda) + x^m \mathbf{X}(x) (\prod_{n=1}^m \mathbf{H}_n) \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} \tag{4.54}$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.51) denklemlerinden

$$y^{(k)}(x) = \sum_{l=k}^{m-k-1} (\lambda_l \frac{x^l}{l!}) + x^{m-k} \mathbf{X}(x) (\prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{H}_j) \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} \quad (4.55)$$

elde edilir. Bir  $\tilde{\mathbf{Z}}$  matrisi

$$\tilde{\mathbf{Z}}(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_k}{0!} \\ \frac{\lambda_{k+1}}{1!} \\ \frac{\lambda_{k+2}}{2!} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_{m-1}}{(m-k-1)!} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa (4.55) fonksiyonu

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x) \tilde{\mathbf{Z}}(\lambda) + x^{m-k} \mathbf{X}(x) (\prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{H}_j) \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} \quad (4.56)$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.20) ile verilen Genelleştirilmiş pantograph denklem tipindeki  $y(\delta_{jk}x + \mu_{jk})$  fonksiyonunu elde etmek için türevli kollokasyon yöntemlerinde de kullanılan,  $\delta_{jk} \neq 0$  ve  $\mu_{jk} \neq 0$  olmak üzere, (Yüzbaşı vd. 2012)

$$\mathbf{X}(\delta_{jk}x + \mu_{jk}) = \mathbf{X}(x) \mathbf{H}(\delta_{jk}, \mu_{jk}) \quad (4.57)$$

bağıntısından yararlanılabilir. (4.56) denkleminde bu bağıntı yerine yazılınca

$$y^{(k)}(\delta_{jk}x + \mu_{jk}) = \mathbf{X}(x) \mathbf{H}(\delta_{jk}, \mu_{jk}) \tilde{\mathbf{Z}}(\lambda) + x^{m-k} \mathbf{X}(x) \mathbf{H}(\delta_{jk}, \mu_{jk}) (\prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{H}_j) \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} \quad (4.58)$$

fonksiyonu elde edilir. Burada  $\mathbf{H}(\delta_{jk}, \mu_{jk})$  matrisi şu şekildedir:

$$\mathbf{H}(\delta_{jk}, \mu_{jk}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} (\delta_{jk})^0 (\mu_{jk})^0 & \binom{1}{0} (\delta_{jk})^0 (\mu_{jk})^1 & \dots & \binom{N}{0} (\delta_{jk})^0 (\mu_{jk})^N \\ 0 & \binom{1}{1} (\delta_{jk})^1 (\mu_{jk})^0 & \dots & \binom{N}{1} (\delta_{jk})^1 (\mu_{jk})^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N} (\delta_{jk})^N (\mu_{jk})^0 \end{bmatrix}.$$

Bu fonksiyonlar ve matrisler (3.20) ile verilen Genelleştirilmiş pantograph denkleminde yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} & \mathbf{X}(x) \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} - f(x) \\ &= \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} u_{jk}(x) \left[ \mathbf{X}(x) \mathbf{H}(\delta_{jk}, \mu_{jk}) \tilde{\mathbf{Z}}(\lambda) + x^{m-k} \mathbf{X}(x) \mathbf{H}(\delta_{jk}, \mu_{jk}) (\prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{H}_j) \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

denklemini elde edilir.

$$x_i = \frac{d}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

ile tanımlı kollokasyon noktalarını (4.59) denkleminde yazdığımızda

$$\begin{aligned} & \mathbf{X}(x_i)\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} - f(x_i) \\ = & \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} u_{jk}(x_i) \left[ \mathbf{X}(x_i)\mathbf{H}(\delta_{jk}x_i + \mu_{jk})\tilde{\mathbf{Z}}(\lambda) + x_i^{m-k}\mathbf{X}(x_i)\mathbf{H}(\delta_{jk}x_i + \mu_{jk})\left(\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{H}_j\right)\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \right], \\ & i = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.60)$$

sistemi elde ederiz. Bu sistemi matris formunda

$$\mathbf{XL}(\alpha)\mathbf{A} - \mathbf{G} = \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{U}_{jk} \left[ \mathbf{XH}(\delta_{jk}x + \mu_{jk})\tilde{\mathbf{Z}}(\lambda) + \mathbf{K}_{m-k}\mathbf{XH}(\delta_{jk}x + \mu_{jk})\left(\prod_{j=1}^{m-k}\mathbf{H}_j\right)\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} \right] \quad (4.61)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu matris formundaki bazı matrisler şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x_i) &= \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{bmatrix}, \\ \mathbf{U}_{jk} &= \begin{bmatrix} u_{jk}(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{jk}(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_{jk}(x_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{jk}(x_N) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{m-k} &= \begin{bmatrix} x_0^{m-k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1^{m-k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_2^{m-k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_N^{m-k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{j} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2+j} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N+j} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(4.61) matris sistemi çözülür ve  $\mathbf{A}$  katsayıları hesaplanır. Belirlenen  $\mathbf{A}$  katsayı matrisi  $y(x)$  çözüm formu olan (4.54) denkleminde yerine yazılarak çözüm elde edilir.

## 4.2. Hata Tahmini Yöntemi

Ele aldığımız her bir denklem için hata tahmini yöntemleri bu bölümde alt başlıklar altında ele alınmıştır.

### 4.2.1. Multi-pantograph diferansiyel denklemleri için hata analizi

Bu bölümde bulunan yaklaşık çözümler için rezidüel tahmini hata (Mahmoud vd. 2005, Shahmorad 2005) ve rezidüel iyileştirilmiş çözümlerini (Çelik 2006, Oliveira 1980) hesaplama yöntemi açıklanır. Önceki bölümde bulunan  $y_N(x)$  yaklaşık çözümleri de verilen multi-pantograph diferansiyel denklemlerini sağlar. Dolayısıyla rezidüel fonksiyon

$$R_N(x) = y'_N(x) - py_N(x) - qy_N(rx) - g(x) \cong 0, \quad c \leq x \leq d \quad (4.62)$$

olarak hesaplanır. Ya da diğer bir deyişle (4.62)  $L$  lineer operatörü kullanılarak

$$L[y_N(x)] = R_N(x) + g(x) \quad (4.63)$$

şeklinde de yazılabilir. Gerçek hata fonksiyonu da

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x) \quad (4.64)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Bu eşitlikte,  $y_N(x)$  (4.27) yaklaşık çözümünü,  $y(x)$  tam çözümü temsil etmektedir. (3.17) multi-pantograph denkleminin  $L$  operatörü ile yazılan formu olan

$$L[y(x)] = g(x) \quad (4.65)$$

denklemini ile (4.63) denklemini taraf tarafa çıkarılırsa

$$L[e_N(x)] = L[y(x)] - L[y_N(x)] = -R_N(x) \quad (4.66)$$

şeklinde bağımlı değişkeni hata fonksiyonu olan diferansiyel denklem elde edilir. Multi-pantograph denkleminin  $y(a) = y_1$  koşulu,  $y_N(x)$  yaklaşık çözümünü sağlayacağından  $y_N(a) = y_1$  dir. Dolayısıyla, koşullar da çıkarılacağından, (4.66) diferansiyel denkleminin koşulu

$$e_N(a) = 0 \quad (4.67)$$

homogen koşulu şeklindedir. Böylece hata problemi

$$e'_N(x) - pe_N(x) - qe_N(rx) = -R_N(x), \quad e_N(a) = 0, \quad c \leq x \leq d. \quad (4.68)$$

olarak da yazılabilir.  $e_N(x)$  hata fonksiyonunu belirlemek için, önceki bölümde anlatılan yöntem ile  $M$  kesme sınırı için

$$e'_{N,M}(x) = \sum_{n=0}^M \tilde{a}_n \mathbf{C}_n(x, \alpha) \quad (4.69)$$

şeklinde yaklaşım yapılarak yöntem önceki bölümde olduğu gibi uygulanır. Yöntemin sonucunda  $e_N(x)$ 'in yaklaşımı olan  $e_{N,M}(x)$  tahmini hata fonksiyonu elde edilir. Bunun da devamında iyileştirilmiş çözüm

$$y_{N,M} = y_N(x) + e_{N,M}(x) \quad (4.70)$$

şeklinde elde edilebilir ve o zaman iyileştirilmiş çözümün gerçek hata fonksiyonu

$$E_{N,M}(x) = e_N(x) - e_{N,M}(x) = y(x) - y_{N,M}(x) \quad (4.71)$$

ile hesaplanır.

#### 4.2.2. Lane-Emden diferansiyel denklemleri için hata analizi

Bu bölümde bulunan yaklaşık çözümler için rezidüel tahmini hata (Mahmoud vd. 2005, Shahmorad 2005) ve rezidüel iyileştirilmiş çözümlerini (Çelik 2006, Oliveira 1980) hesaplama yöntemi açıklanır. Önceki bölümde bulunan  $y_N(x)$  yaklaşık çözümleri de verilen Lane-Emden diferansiyel denklemlerini sağlar. Dolayısıyla rezidüel fonksiyon

$$R_N(x) = y''_N(x) + \frac{\alpha}{x} y'_N(x) + p(x)y_N(x) - g(x) \cong 0, \quad c \leq x \leq d \quad (4.72)$$

olarak hesaplanır. Ya da diğer bir deyişle (4.72)  $L$  lineer operatörü kullanılarak

$$L[y_N(x)] = R_N(x) + g(x) \quad (4.73)$$

şeklinde de yazılabilir. Gerçek hata fonksiyonu da

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x) \quad (4.74)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Bu eşitlikte, (4.38)  $y_N(x)$  yaklaşık çözümünü,  $y(x)$  tam çözümü temsil etmektedir. (3.18) denkleminin  $L$  operatörü ile yazılan formu olan

$$L[y(x)] = g(x) \quad (4.75)$$

denklemleri ile (4.73) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$L[e_N(x)] = L[y(x)] - L[y_N(x)] = -R_N(x) \quad (4.76)$$

şeklinde bağımlı değişkeni hata fonksiyonu olan diferansiyel denklem elde edilir. Lane-Emden denkleminin  $y(a) = y_1$  ve  $y(b) = y_2$  koşulları,  $y_N(x)$  yaklaşık çözümünü sağlayacağından  $y_N(a) = y_1$  ve  $y_N(b) = y_2$  dir. Dolayısıyla, koşullar da çıkarılacağından, (4.76) diferansiyel denkleminin koşulları

$$e_N(a) = 0 \quad \text{ve} \quad e_N(b) = 0 \quad (4.77)$$

homojen koşulları şeklindedir. Bu hata problemi

$$e_N''(x) + \frac{\alpha}{x} e_N'(x) + p(x)e_N(x) - g(x) = -R_N(x), \quad e_N(a) = 0, \quad e_N(b) = 0, \quad c \leq x \leq d \quad (4.78)$$

olarak da yazılabilir.  $e_N(x)$  hata fonksiyonunu belirlemek için, önceki bölümde anlatılan yöntem ile  $M$  kesme sınırı için

$$e_{N,M}''(x) = \sum_{n=0}^M \tilde{a}_n \mathbf{C}_n(x, \alpha) \quad (4.79)$$

şeklinde yaklaşım yapılarak yöntem önceki bölümde olduğu gibi uygulanır. Yöntemin sonucunda  $e_N(x)$ 'in yaklaşımı olan  $e_{N,M}(x)$  tahmini hata fonksiyonu elde edilir. Bunun da devamında iyileştirilmiş çözüm

$$y_{N,M} = y_N(x) + e_{N,M}(x) \quad (4.80)$$

şeklinde elde edilebilir ve iyileştirilmiş çözümün gerçek hata fonksiyonu

$$E_{N,M}(x) = e_N(x) - e_{N,M}(x) = y(x) - y_{N,M}(x) \quad (4.81)$$

ile hesaplanır.

#### 4.2.3. Riccati diferansiyel denklemleri için hata analizi

Bu bölümde bulunan yaklaşık çözümler için rezidüel tahmini hata (Mahmoud vd. 2005, Shahmorad 2005) ve rezidüel iyileştirilmiş çözümlerini (Çelik 2006, Oliveira 1980) hesaplama yöntemi açıklanır.

$y_N(x)$ ,  $N$  kesme sınırı için yaklaşık çözümü temsil eder.  $y_N(x)$  yaklaşık çözümleri,  $y(x)$  tam çözümü gibi (3.19) ile verilen Riccati diferansiyel denklemlerini sağlar. Dolayısıyla

$$y_N'(x) - q(x)y_N(x) - r(x)y_N^2(x) = g(x) + R_N(x), \quad y(a) = y_1, \quad c \leq x \leq d \quad (4.82)$$

olarak yazılır. Sonrasında rezidüel fonksiyon

$$R_N(x) = y'_N(x) - q(x)y_N(x) - r(x)y_N^2(x) - g(x) \quad (4.83)$$

olarak belirlenir. Hata fonksiyonu da

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x) \quad (4.84)$$

olduğunu kabul edersek

$$y(x) = e_N(x) + y_N(x) \implies y^2(x) = (e_N(x) + y_N(x))^2 \quad (4.85)$$

şeklinde tanımlanır. (3.19) ricatti diferansiyel denklemi ve (4.82) denklemleri taraf tarafa çıkarıldığında

$$y'(x) - q(x)y(x) - r(x)y^2(x) - y'_N(x) - q(x)y_N(x) - r(x)y_N^2(x) = -R_N(x), \quad y(a) = 0 \quad (4.86)$$

şeklinde bağımlı değişkeni hata fonksiyonu olan diferansiyel denklem elde edilir. Ya da (4.84) kullanılarak

$$e'_N(x) - q(x)e_N(x) - r(x)[y^2(x) - y_N^2(x)] = -R_N(x), \quad y(a) = 0 \quad (4.87)$$

şeklinde daha açık yazılır ve (4.85) denklemi de yerine konulduğunda hata diferansiyel denklemini

$$e'_N(x) - q(x)e_N(x) - r(x)[(e_N(x) + y_N(x))^2 - y_N^2(x)] = -R_N(x), \quad y(a) = 0 \quad (4.88)$$

hâlini alır.  $[(e_N(x) + y_N(x))^2 - y_N^2(x)]$  terimi daha açık yazılırsa

$$e'_N(x) - q(x)e_N(x) - r(x)[e_N^2(x) + 2y_N(x)e_N(x)] = -R_N(x), \quad y(a) = 0 \quad (4.89)$$

hata diferansiyel denklemi elde edilir.  $e_N(x)$  hata fonksiyonunu belirlemek için, önceki bölümde anlatılan yöntem ile  $M$  kesme sınırı için

$$e'_{N,M}(x) = \sum_{n=0}^M \tilde{a}_n \mathbf{C}_n(x, \alpha). \quad (4.90)$$

şeklinde yaklaşım yapılarak yöntem önceki bölümde olduğu gibi uygulanır. Yöntemin sonucunda  $e_N(x)$  in yaklaşımı olan  $e_{N,M}(x)$  tahmini hata fonksiyonu elde edilir. Bunun da devamında iyileştirilmiş çözüm

$$y_{N,M} = y_N(x) + e_{N,M}(x) \quad (4.91)$$

şeklinde elde edilebilir ve o zaman iyileştirilmiş çözümün gerçek hata fonksiyonu

$$E_{N,M}(x) = e_N(x) - e_{N,M}(x) = y(x) - y_{N,M}(x) \quad (4.92)$$

ile hesaplanır.

#### 4.2.4. Genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemleri için hata analizi

Bu bölümde bulunan yaklaşık çözümler için rezidüel tahmini hata (Pour-Mahmoud vd. 2005, Shahmorad 2005) ve rezidüel iyileştirilmiş çözümlerini (Çelik 2006, Oliveira 1980) hesaplama yöntemi açıklanır. Önceki bölümde bulunan  $y_N(x)$  yaklaşık çözümleri de verilen genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemlerini sağlar. Dolayısıyla rezidüel fonksiyon

$$R_N(x) = y_N^{(m)}(x) - f(x) - \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} u_{jk}(x) y_N^{(k)}(\delta_{jk}x + \mu_{jk}) \cong 0, \quad 0 \leq x \leq d \quad (4.93)$$

olarak hesaplanır. Ya da diğer bir deyişle (4.93)  $L$  lineer operatörü kullanılarak

$$L[y_N(x)] = R_N(x) + g(x) \quad (4.94)$$

şeklinde de yazılır. Gerçek hata fonksiyonu da

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x) \quad (4.95)$$

şeklinde hesaplanır. Bu eşitlikte,  $y_N(x)$  (4.51) yaklaşık çözümü,  $y(x)$  tam çözümü temsil etmektedir. (3.20) genelleştirilmiş pantograph denkleminin  $L$  operatörü ile yazılan formu olan

$$L[y(x)] = g(x) \quad (4.96)$$

denklemini ile (4.94) denklemini taraf tarafa çıkarılırsa

$$L[e_N(x)] = L[y(x)] - L[y_N(x)] = -R_N(x) \quad (4.97)$$

şeklinde bağımlı değişkeni hata fonksiyonu olan diferansiyel denklem elde edilir. Genelleştirilmiş pantograph denkleminin  $y^{(i)}(0) = \lambda_i$ ,  $(i = 0, 1, \dots, m-1)$  koşulları,  $y_N(x)$  yaklaşık çözümlerini sağlayacağından  $y_N^{(i)}(0) = \lambda_i$  dir. Dolayısıyla, koşullar da çıkarılacağından, (4.97) diferansiyel denkleminin koşulu

$$e_N^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (4.98)$$

homojen koşulu şeklindedir. Bu hata problemi

$$e_N^{(m)}(x) - f(x) - \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} u_{jk}(x) e_N^{(k)}(\delta_{jk}x + \mu_{jk}) = -R_N(x), \quad 0 \leq x \leq d. \quad (4.99)$$

olarak da yazılabilir.  $e_N(x)$  hata fonksiyonunu belirlemek için, önceki bölümde anlatılan yöntem ile  $M$  kesme sınırı için

$$e_{N,M}^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^M \tilde{a}_n \mathbf{C}_n(x, \alpha) \quad (4.100)$$

şeklinde yaklaşım yapılarak yöntem önceki bölümde olduğu gibi uygulanır. Yöntemin sonucunda  $e_N(x)$ 'in yaklaşımı olan  $e_{N,M}(x)$  tahmini hata fonksiyonu elde edilir. Bunun da devamında iyileştirilmiş çözüm

$$y_{N,M} = y_N(x) + e_{N,M}(x) \quad (4.101)$$

şeklinde elde edilebilir ve o zaman iyileştirilmiş çözümün gerçek hata fonksiyonu

$$E_{N,M}(x) = e_N(x) - e_{N,M}(x) = y(x) - y_{N,M}(x) \quad (4.102)$$

ile hesaplanır.

### 4.3. Nümerik Örnekler

Bu bölümde bütün örnekler için tek tek temel matris bağıntıları oluşturularak çözülmüştür. Bütün hesaplamalar MATLAB üzerinde hazırlanan kodlarla hesaplanmıştır. Ayrıca yaklaşım verilerinin hata paylarının ne kadar olduğunu göstermek, verilerin doğruluğunu, güvenilirliğini ve kullanılabilirliğini göstermek için yine MATLAB kodlarıyla tablolar ve grafikler gözler önüne serilmiştir.

#### 4.3.1. Multi-pantograph denklemleri için örnekler

**Örnek 4.1.** *Multi-pantograph tipi diferansiyel denklem için ilk ele aldığımız denklem, parametrelerini kendimiz belirlediğimiz*

$$y'(x) = 2y(x) + xy(2x) - 4x^3 - 4x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.103)$$

olmak üzere denklemin başlangıç koşulu  $y(0) = 0$ 'dır. Bu örnek için oluşturulan temel matris denklemi şu şekildedir:

$$[[\mathbf{X} - \mathbf{Q}[\mathbf{KX} - 0\mathbf{X}_0] \mathbf{H}_1 - \mathbf{QX}[\mathbf{KXH} - 0\mathbf{X}_0] \mathbf{H}_1] \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.104)$$

ya da düzenlenmiş

$$[[\mathbf{X} - \mathbf{QKXH}_1 - \mathbf{QXKXHH}_1] \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.105)$$

olarak yazılabilir. Bu diferansiyel denklemin başlangıç koşulu  $y(0) = 0$  olmak üzere yöntemi-mizde  $N = 1$  olarak çözümü inceleyelim. Temel matris denklemindeki matrisler  $N = 1$  için şu şekildedir:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}(1996) = \begin{bmatrix} 1 & -1996 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

(4.105) denkleminde

$$[(\mathbf{X} - \mathbf{QKH}_1 - \mathbf{QXKXHH}_1)] \mathbf{L} = \mathbf{W} \quad (4.106)$$

olarak adlandırıldığında

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ; & 1 \\ -3 & -2 & ; & -7 \end{bmatrix}$$

genişletilmiş matrisi elde edilir.  $\mathbf{A}$  (Charlier katsayı) matrisini elde etmek için

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}$$

eşitliği kullanılmış ve  $\mathbf{A}$  şu şekilde belirlenmiştir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bu matris  $y$  fonksiyonunu veren

$$y_1(x) = \mathbf{KXH}_1 \mathbf{L} \mathbf{A}$$

$(\mathbf{X} = [1 \ x \ \dots \ x^N])$  eşitliğinde yerine yazdığımızda

$$y_1(x) = x^2 + x$$

çözümüne, yani direkt tam çözüme ulaşılmıştır.

**Örnek 4.2.** İkinci multi-pantograph tipi diferansiyel denklem örneği olarak (Shadia 1992)

$$y'(x) = \frac{1}{2}y(x) + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}y\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.107)$$

denklemini ele alınmış olup, denklemin başlangıç koşulu  $y(0) = 1$  olmak üzere incelenmiştir. Denklemin tam çözümü  $y(x) = e^x$ 'tir. Bu örnek için (4.105) ile verilen temel matris denkleminde

$$[(\mathbf{X} - \mathbf{Q}[\mathbf{KX} - 0\mathbf{X}_0])\mathbf{H}_1 - \mathbf{QR}[\mathbf{KXH} - 0\mathbf{X}_0])\mathbf{H}_1] \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{R}\tilde{\mathbf{Q}} \quad (4.108)$$

ya da daha kısa versiyonuyla

$$[(\mathbf{X} - \mathbf{QKH}_1 - \mathbf{QRKXHH}_1)] \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{R}\tilde{\mathbf{Q}} \quad (4.109)$$

olarak yazılabilir. Oluşturulan yaklaşık çözüm denkleminin geçerliliğini ve güvenilirliğini gözlemlemek adına literatürdeki diğer çözümlerle karşılaştırma yapabilmek için  $N = 7, 9$  alınmış olup, hata fonksiyonunun  $N$  arttıkça nasıl değiştiğini gözlemlemek için  $N = 5, 7, 9$  alınmıştır. (4.108) denklemindeki matrisler  $N = 5$  için şu şekilde oluşturulmuştur:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2.0000e-01 & 4.0000e-02 & 8.0000e-03 & 1.6000e-03 & 3.2000e-04 \\ 1 & 4.0000e-01 & 1.6000e-01 & 6.4000e-02 & 2.5600e-02 & 1.0240e-02 \\ 1 & 6.0000e-01 & 3.6000e-01 & 2.1600e-01 & 1.2960e-01 & 7.7760e-02 \\ 1 & 8.0000e-01 & 6.4000e-01 & 5.1200e-01 & 4.0960e-01 & 3.2768e-01 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 24 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 32 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1052 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2214 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3499 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4918 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6487 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}$  matrisi denklemdaki  $e^{\frac{x}{2}}$  çarpanını temsil etmektedir. (4.109) denkleminde

$$[(\mathbf{X} - \mathbf{Q}\mathbf{K}\mathbf{X}\mathbf{H}_1 - \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{X}\mathbf{H}\mathbf{H}_1)]\mathbf{L} = \mathbf{W} \quad (4.110)$$

ve

$$\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{R}\tilde{\mathbf{Q}} \quad (4.111)$$

olarak adlandırıldığında

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0.84474 & 0.18724 & 0.076965 & 0.046717 & 0.037605 & 0.037749 & ; & 1.0526 \\ 0.67786 & 0.34779 & 0.29541 & 0.36333 & 0.58889 & 1.1871 & ; & 1.1107 \\ 0.49752 & 0.47963 & 0.63585 & 1.1906 & 2.9159 & 8.8548 & ; & 1.1749 \\ 0.30164 & 0.58033 & 0.10775 & 2.7362 & 9.0073 & 36.639 & ; & 1.2459 \\ 0.087820 & 0.64695 & 1.5980 & 5.1727 & 21.476 & 109.74 & ; & 1.3244 \end{bmatrix}$$

genişletilmiş matrisi elde edilir.  $\mathbf{A}$  (Charlier katsayı) matrisini elde etmek için

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}$$

eşitliği kullanılmış ve  $\mathbf{A}$  şu şekilde belirlenmiştir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.0000e+00 \\ 1.0001e+00 \\ 2.4953e-01 \\ 2.8408e-02 \\ 1.4510e-03 \\ 1.1560e-04 \end{bmatrix}.$$

Bu matrisi  $y$  fonksiyonunu veren

$$y_5(x) = \mathbf{KXH}_1\mathbf{LA}$$

$(\mathbf{X}(x) = [1 \ x \ \dots \ x^N])$  eşitliğinde yerine yazılınca

$$y_5(x) = (2.3120e-03)x^6 + (6.9648e-03)x^5 + (4.2612e-02)x^4 + (1.6635e-01)x^3 + (5.0005e-01)x^2 + x + 1$$

çözümüne ulaşılmıştır.  $N = 7$  ve  $9$  için de hesaplamalar aynı şekilde yapılarak

$$y_7(x) = (4.1167e-05)x^8 + (1.6497e-04)x^7 + (1.4243e-03)x^6 + (8.3117e-03)x^5 + (4.1674e-02)x^4 + (1.6667e-01)x^3 + (5.0000e-01)x^2 + x + 1$$

ve

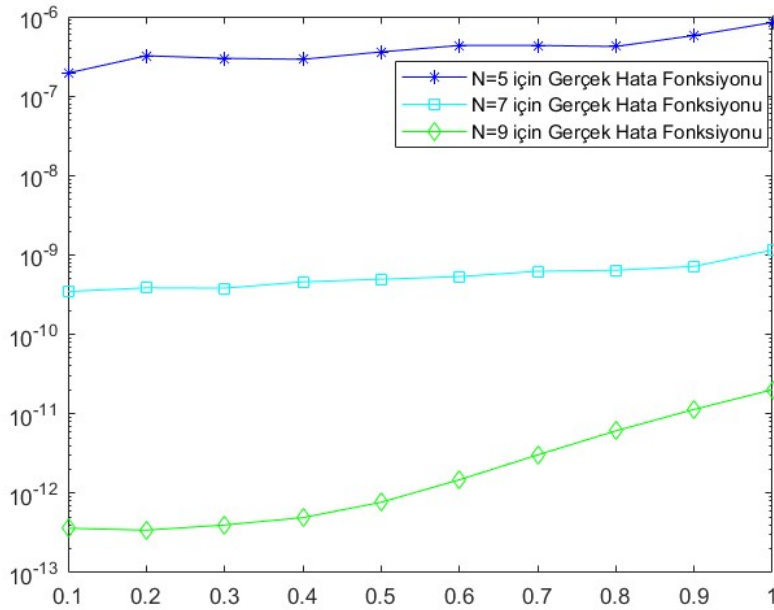
$$y_9(x) = (4.5668e-07)x^{10} + (2.2858e-06)x^9 + (2.5466e-05)x^8 + (1.9784e-04)x^7 + (1.3892e-03)x^6 + (8.3333e-03)x^5 + (4.1667e-02)x^4 + (1.6667e-01)x^3 + (5.0000e-01)x^2 + x + 1$$

yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.  $\mathbf{L}(\alpha)$  matrisinde  $\alpha = 0$  ve  $\alpha = 1000$  alındığında oluşacak durumu gözlemlemek için aşağıdaki tablo oluşturulmuştur.

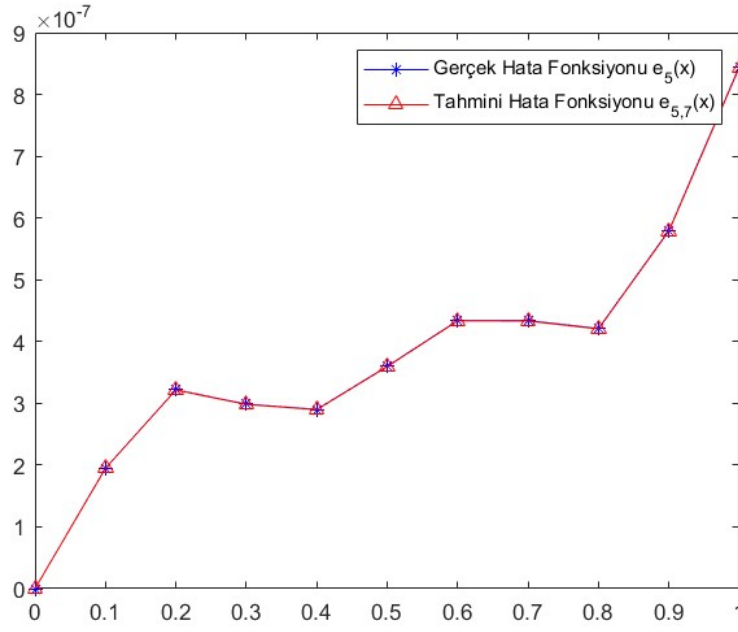
**Çizelge 4.1.**  $N=5$  iken,  $\alpha=1$  ve  $\alpha=1000$  için Gerçek Hata Fonksiyonları

| $x_i$ | $\alpha=1$ için Gerçek Hata | $\alpha=1000$ için Gerçek Hata |
|-------|-----------------------------|--------------------------------|
| 0.2   | 3.218068684862629e-07       | 3.218068684861032e-07          |
| 0.4   | 2.901064084515070e-07       | 2.901064084514998e-07          |
| 0.6   | 4.339546211262757e-07       | 4.339546211265994e-07          |
| 0.8   | 4.210297239737315e-07       | 4.210297239731631e-07          |
| 1     | 8.450724728881198e-07       | 8.450724728881241e-07          |

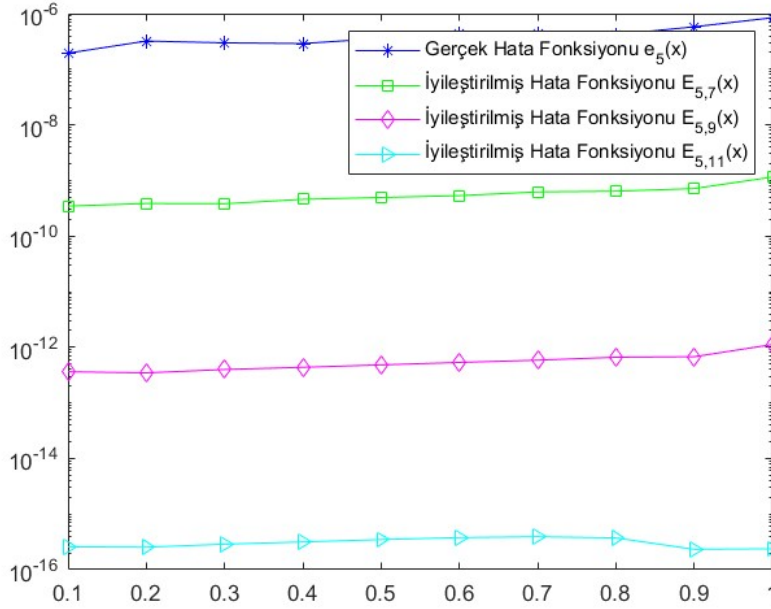
Burada hataların küçük bir farka sahip olduğu gözlemlenip bundan sonraki örneklerde  $\mathbf{L}(\alpha)$  matrisi tek bir  $\alpha$  değeri için oluşturulup örnekler çözülmüştür.



**Şekil 4.2.** Örnek 4.2'nin  $N = 5, 7, 9$  için Gerçek Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması



**Şekil 4.3.** Örnek 4.2'nin  $e_5$  Gerçek Hata ve  $e_{5,7}$  Tahmini Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması



**Şekil 4.4.** Örnek 4.2'nin  $e_5$  Gerçek Hata ve  $E_{5,7}$ ,  $E_{5,9}$ ,  $E_{5,11}$  İyileştirilmiş Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması

**Çizelge 4.2.** Örnek 4.2'nin Gerçek Hatalarının Spline, Varyasyonel ve Üstel Yaklaşım Metotlarının Sonuçları İle Karşılaştırılması

| $x_i$                   | Üstel Yaklaşım<br>Metodu $e_3(x_i)$ | Üstel Yaklaşım<br>Metodu $e_5(x_i)$ | Üstel Yaklaşım<br>Metodu $e_{10}(x_i)$ | Charlier<br>Metodu $e_7(x_i)$ |
|-------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------|
| (Yüzbaşı ve Sezer 2013) |                                     |                                     |                                        |                               |
| 0.2                     | 1.8434e-002                         | 3.2778e-003                         | 4.0212e-005                            | 3.85036e-10                   |
| 0.4                     | 2.7110e-002                         | 3.2081e-003                         | 4.9801e-005                            | 4.57988e-10                   |
| 0.6                     | 2.1008e-002                         | 4.4444e-003                         | 6.0845e-005                            | 5.33135e-10                   |
| 0.8                     | 3.5321e-002                         | 4.6898e-003                         | 7.4252e-005                            | 6.41517e-10                   |
| 1                       | 1.1580e-001                         | 1.2864e-002                         | 7.5403e-005                            | 1.15575e-9                    |

| $x_i$ | Spline<br>Metodu<br>(El-Safty ve Abo-Hasha 1990) | Varyasyonel<br>Metodu<br>(Yu 2008) | Spline Metodu<br>h=0.001 m=3<br>(Shadia 1992) | Charlier<br>Metodu<br>$e_9(x_i)$ |
|-------|--------------------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------|
| 0.2   | 1.980e-8                                         | 2.44e-5                            | 1.37e-11                                      | 3.42533e-13                      |
| 0.4   | 4.730e-8                                         | 2.28e-4                            | 3.27e-11                                      | 4.92779e-13                      |
| 0.6   | 8.470e-8                                         | 9.00e-4                            | 5.86e-11                                      | 1.47711e-13                      |
| 0.8   | 1.130e-8                                         | 2.507e-3                           | 9.54e-11                                      | 6.09664e-13                      |
| 1     | 2.010e-7                                         | 5.71e-3                            | 1.43e-10                                      | 2.01019e-13                      |

#### 4.3.2. Lane-Emden denklemleri için örnekler

Bu bölümde iki Lane-Emden tipi diferansiyel denklem örneği incelenmiştir. Lane-Emden denklemleri için  $x = 0$  noktası tekil nokta olduğu için, kollokasyon noktaları 0'dan değil de 0'a çok yakın bir noktadan başlayarak belirlenmiştir.

**Örnek 4.3.** Öncelikle ele alınmış Lane-Emden denklemi şudur: (Yüzbaşı ve Sezer 2011)

$$y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + y(x) = 6 + 12x + x^2 + x^3, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (4.112)$$

Denklemin başlangıç koşulları

$$y(0) = 0 \quad \text{ve} \quad y'(0) = 0 \quad (4.113)$$

olarak verilmektedir. Denklemden de gözlemlenildiği üzere  $\alpha = 2, a = b = y_1 = y_2 = 0, p(x) = 1$  ve  $g(x) = 6 + 12x + x^2 + x^3$ 'tür. Denklemin tam çözümü  $y(x) = x^2 + x^3$  olmak üzere

$N = 1$  alınmıştır. Kollokasyon noktaları  $x_0 = 0.00001$  ve  $x_1 = 1$  olarak belirlenmiştir. (4.41) denkleminde, bu örneğin temel matris denklemi

$$[\mathbf{X} + \mathbf{S}[(\mathbf{K}\mathbf{X} - \mathbf{0}\mathbf{X}(0))\mathbf{H}_1] + \mathbf{P}\mathbf{K}^2\mathbf{X}\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1 - \mathbf{P}\mathbf{0}^2\mathbf{X}_0\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1 - \mathbf{P}\mathbf{0}\mathbf{K}_0\mathbf{X}_0\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} = \mathbf{G} - \mathbf{S}\mathbf{0} - \mathbf{P}\mathbf{0} - \mathbf{0}\mathbf{P}\mathbf{K}_0 \quad (4.114)$$

ya da daha basit bir şekilde

$$[\mathbf{X} + \mathbf{S}\mathbf{K}\mathbf{X}\mathbf{H}_1 + \mathbf{P}\mathbf{K}^2\mathbf{X}\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.115)$$

olarak yazılabilir. Burada kullanılan matrisler şu şekildedir:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0.00001 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.00001 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{4999}{833} \\ 20 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \mathbf{L}(2025) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2025 & 1 \end{bmatrix}.$$

Burada bir  $\mathbf{W}$  matrisi

$$\mathbf{W} = [\mathbf{X} + \mathbf{S}\mathbf{K}\mathbf{X}\mathbf{H}_1 + \mathbf{P}\mathbf{K}^2\mathbf{X}\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1]\mathbf{L}$$

şeklinde tanımlandığında, (4.115) ile verilen temel matris formu

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

hâlini alır ve  $\mathbf{A}$  (Charlier katsayı matrisi)

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}$$

eşitliği kullanılarak şu şekilde belirlenmiştir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Bu matrisi  $y$  fonksiyonunu veren

$$y_1(x) = \mathbf{K}^2\mathbf{X}\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{L}\mathbf{A}$$

$(\mathbf{X}(x) = [1 \ x \ \dots \ x^N])$  eşitliğinde yerine yazıldığında

$$y_1(x) = x^2 + x^3$$

çözümüne, yani direkt tam çözüme ulaşılmıştır.

**Örnek 4.4.** İkinci olarak ele alınmış Lane-Emden denklemi şudur: (Çağlar ve Çağlar 2006)

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) = \left(\frac{8}{8-x^2}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (4.116)$$

Denklemin koşulları

$$y(1) = 0 \quad \text{ve} \quad y'(0) = 0$$

şeklinde verilmektedir. Denklemden de gözlemlenildiği üzere  $\alpha = 1$ ,  $p(x) = 0$ ,  $a = y_1 = y_2 = 0$ ,  $b = 1$  ve  $g(x) = \left(\frac{8}{8-x^2}\right)^2$ . Denklemin tam çözümü  $y(x) = 2\log\left(\frac{7}{8-x^2}\right)$  olmak üzere  $N = 7, 10, 12$  için çözülmüştür. Kollokasyon noktaları  $c = 0.1$  ve  $d = 1$  için hesaplanmıştır. (4.41) denkleminde, bu örneğin temel matris denklemi

$$[\mathbf{X} + \mathbf{S}[0 + [\mathbf{KX} - 0\mathbf{X}(0)]\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} = \mathbf{G} - \mathbf{S}_0 \quad (4.117)$$

ya da daha basit bir şekilde

$$[\mathbf{X} + \mathbf{S}[[\mathbf{KX} - 0\mathbf{X}_0]\mathbf{H}_1]\mathbf{L}(\alpha)\mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.118)$$

olarak yazılabilir. Denklemdaki matrisler  $N = 7$  için

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.1000 & 0.0100 & 0.0010 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 1.0000 & 0.2286 & 0.0522 & 0.0119 & 0.0027 & 0.0006 & 0.0001 & 0.0000 \\ 1.0000 & 0.3571 & 0.1276 & 0.0456 & 0.0163 & 0.0058 & 0.0021 & 0.0007 \\ 1.0000 & 0.4857 & 0.2359 & 0.1146 & 0.0557 & 0.0270 & 0.0131 & 0.0064 \\ 1.0000 & 0.6143 & 0.3773 & 0.2318 & 0.1424 & 0.0875 & 0.0537 & 0.0330 \\ 1.0000 & 0.7429 & 0.5518 & 0.4099 & 0.3045 & 0.2262 & 0.1680 & 0.1248 \\ 1.0000 & 0.8714 & 0.7594 & 0.6618 & 0.5767 & 0.5025 & 0.4379 & 0.3816 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.3750 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.0588 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6279 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3462 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1475 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.22857 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35714 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.48571 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.61429 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.74286 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.87143 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 1.0025 \\ 1.0132 \\ 1.0327 \\ 1.0617 \\ 1.1015 \\ 1.1537 \\ 1.22080 \\ 1.3061 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{L}(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 720 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5040 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada bir  $\mathbf{W}$  matrisi

$$\mathbf{W} = [\mathbf{X} + \mathbf{S}[[\mathbf{KX} - \mathbf{0X}_0]\mathbf{H}_1]\mathbf{L}$$

şeklinde tanımlandığında, (4.118) ile verilen temel matris formu

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G}$$

hâlini alır ve  $A$  (Charlier katsayı matrisi)

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}$$

eşitliği kullanılarak

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5.0000e - 01 \\ 1.1581e - 04 \\ 9.3156e - 02 \\ 9.8790e - 04 \\ 9.4391e - 04 \\ 2.1825e - 04 \\ -2.2901e - 05 \\ 1.9817e - 06 \end{bmatrix}$$

olarak belirlenmiştir. Bu matris  $y$  fonksiyonunu veren

$$y_N(x) = \mathbf{XK}^2\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{LA}$$

$(\mathbf{X}(x) = [1 \ x \ \dots \ x^N])$  eşitliğinde yerine yazılınca  $N = 7$  için  $y_7(x)$  fonksiyonu elde edilmiştir.

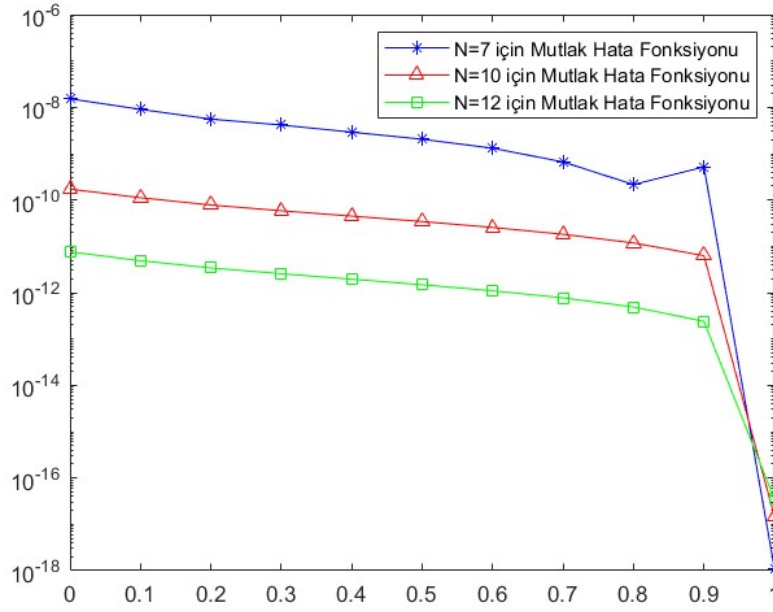
$$y_7(x) = 0.00013872x^9 - 0.00029444x^8 + 0.00062358x^7 + 0.00075513x^6 + 0.00029637x^5 + 0.015526x^4 + (1.9302e - 05)x^3 + 0.25x^2 - 0.26706.$$

$N = 10, 12$  için de aynı adımlar uygulanarak üretilen  $y$  fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

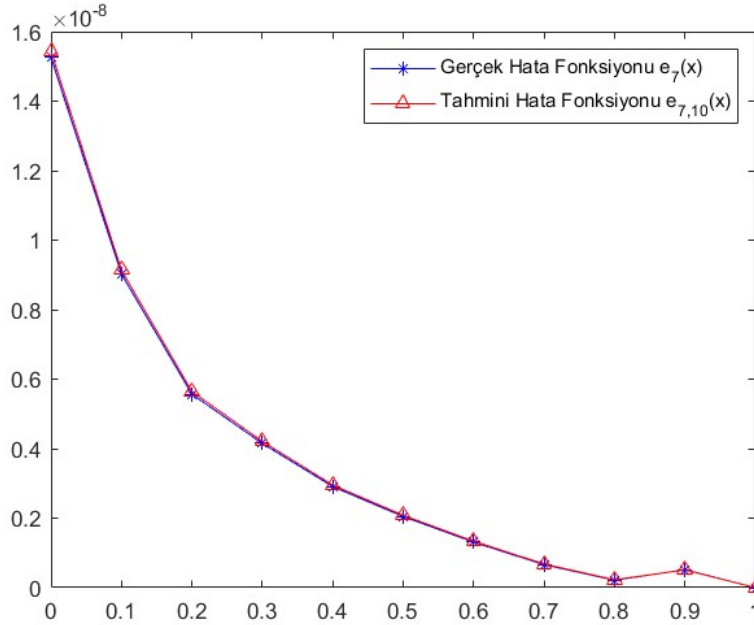
$$y_{10}(x) = (9.3566e - 06)x^{12} - (3.8485e - 05)x^{11} + (9.9971e - 05)x^{10} - (1.2216e - 04)x^9 + (2.3548e - 04)x^8 - x^7 + (1.3351e - 03)x^6 - (1.0414e - 05)x^5 + (1.5627e - 02)x^4 - (3.0257e - 07)x^3 + (2.5000e - 01)x^2 - (2.6706e - 01)$$

ve

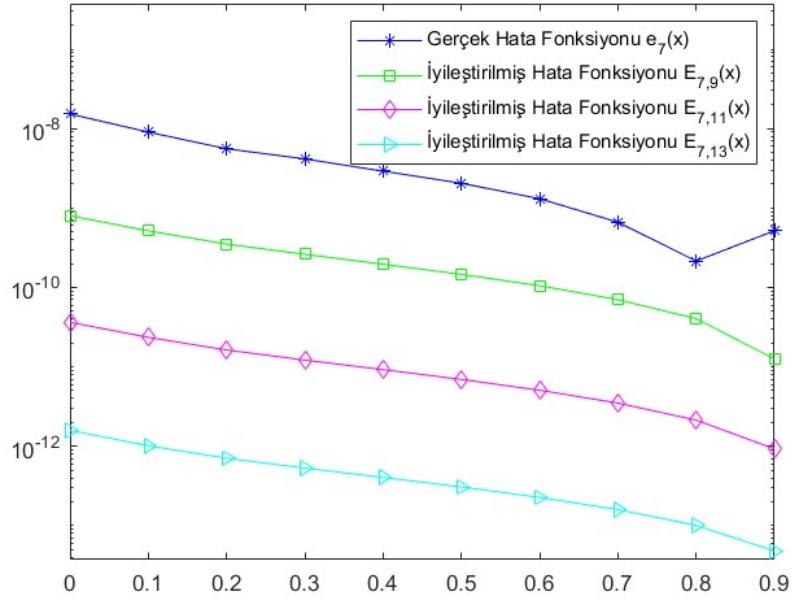
$$y_{12}(x) = (1.5609e - 06)x^{14} - (8.1545e - 06)x^{13} + (2.3894e - 05)x^{12} - (3.9054e - 05)x^{11} + (5.8357e - 05)x^{10} - (3.91e - 05)x^9 + 0.00014637x^8 - (1.1173e - 05)x^7 + 0.0013059x^6 - (9.3139e - 07)x^5 + 0.015625x^4 - (1.819e - 08)x^3 + 0.25x^2 - 0.26706.$$



**Şekil 4.5.** Örnek 4.4'ün  $N = 7, 10, 12$  için Gerçek Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması



**Şekil 4.6.** Örnek 4.4'ün  $e_7$  Gerçek Hata ve  $e_{7,10}$  Tahmini Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması



**Şekil 4.7.** Örnek 4.4'ün  $e_7$  Gerçek Hata ve  $E_{7,9}$ ,  $E_{7,11}$ ,  $E_{7,13}$  İyileştirilmiş Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması

**Çizelge 4.3.** Örnek 4.4'ün Gerçek Hatalarının B-spline, Türeve Dayalı Bessel Kollokasyon ve Türeve Dayalı Charlier Kollokasyon Metotlarının Sonuçları İle Karşılaştırılması

| $x_i$ | B-spline Metodu<br>$h = 1/20$ (Çağlar<br>ve Çağlar 2006) | Bessel Metodu<br>(Yüzbaşı ve Sezer<br>2011) $e_7(x_i)$ | Türeve Dayalı<br>Charlier Metodu<br>(Yüzbaşı ve Yılmaz<br>2023) $e_7(x_i)$ | İntegrale Dayalı<br>Charlier<br>Metodu $e_7(x_i)$ |
|-------|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 0.0   | 2.6000e-05                                               | 1.6012e-06                                             | 3.03786e-06                                                                | 1.5253e-08                                        |
| 0.2   | 2.6000e-05                                               | 1.5665e-06                                             | 3.04714e-06                                                                | 5.56786e-09                                       |
| 0.4   | 2.4000e-05                                               | 1.5577e-06                                             | 3.04875e-06                                                                | 2.90777e-09                                       |
| 0.6   | 1.9000e-05                                               | 1.5524e-06                                             | 3.04889e-06                                                                | 1.30939e-09                                       |
| 0.8   | 1.1000e-05                                               | 1.5519e-06                                             | 3.04656e-06                                                                | 2.14983e-10                                       |
| 0.9   | 6.0000e-06                                               | 1.3845e-06                                             | 2.62967e-06                                                                | 5.16319e-10                                       |

| $x_i$ | Bessel Metodu<br>(Yüzbaşı ve Sezer 2011)<br>$e_{10}(x_i)$ | Türeve Dayalı<br>Charlier Metodu,<br>(Yüzbaşı ve Yılmaz 2023) $e_{10}(x_i)$ | İntegrale Dayalı<br>Charlier<br>Metodu, $e_{10}(x_i)$ |
|-------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 0.0   | 3.5790e-09                                                | 1.02343e-08                                                                 | 1.71467e-10                                           |
| 0.2   | 3.8808e-09                                                | 1.02189e-08                                                                 | 7.78732e-11                                           |
| 0.4   | 3.9875e-09                                                | 1.02142e-08                                                                 | 4.48768e-11                                           |
| 0.6   | 4.0500e-09                                                | 1.02118e-08                                                                 | 2.55458e-11                                           |
| 0.8   | 4.0957e-09                                                | 1.02234e-08                                                                 | 1.18248e-11                                           |
| 0.9   | 4.0323e-09                                                | 9.87415e-09                                                                 | 6.28049e-12                                           |

| $x_i$ | Bessel Metodu<br>(Yüzbaşı ve Sezer 2011)<br>$e_{12}(x_i)$ | Türeve Dayalı<br>Charlier Metodu,<br>(Yüzbaşı ve Yılmaz 2023) $e_{12}(x_i)$ | İntegrale Dayalı<br>Charlier<br>Metodu, $e_{12}(x_i)$ |
|-------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 0.0   | 6.1045e-11                                                | 2.57733e-10                                                                 | 7.57761e-12                                           |
| 0.2   | 7.4741e-11                                                | 2.57444e-10                                                                 | 3.41368e-12                                           |
| 0.4   | 7.9562e-11                                                | 2.57313e-10                                                                 | 1.95119e-12                                           |
| 0.6   | 8.2334e-11                                                | 2.50808e-10                                                                 | 1.09574e-12                                           |
| 0.8   | 8.4234e-11                                                | 2.63807e-11                                                                 | 4.89008e-13                                           |
| 0.9   | 8.4689e-11                                                | 407.3597e-10                                                                | 2.40265e-13                                           |

### 4.3.3. Riccati denklemleri için örnekler

**Örnek 4.5.** Riccati tipi denklem örneği olarak öncelikle, parametrelerini kendimiz belirlediğimiz

$$y'(x) = \frac{1}{2}y(x) + \frac{1}{4}y^2(x) - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.119)$$

denklemini ele alınmıştır. Denklemin başlangıç koşulu  $y(0) = 0$  şeklindedir. Denklemin tam çözümü  $y(x) = x^2$  olmak üzere  $N = 1$  alınmıştır. Kollokasyon noktaları  $x_0 = 0$  ve  $x_1 = 1$  olarak belirlenmiştir. (4.48) denkleminde bu örneğin temel matris denklemini

$$\begin{aligned} & [\mathbf{X} - \mathbf{Q} [\mathbf{KX} - 0\mathbf{X}_0] \mathbf{H}_1 - 2\mathbf{R}0 [\mathbf{KX} - 0\mathbf{X}_0] \mathbf{H}_1 \\ & - \mathbf{R} [\mathbf{KX} - 0\mathbf{X}_0] \mathbf{H}_1 \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} [\mathbf{KX} - 0\mathbf{X}_0] \mathbf{H}_1 \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} \\ & = \mathbf{G} + \mathbf{Q}0 + \mathbf{R}0^2 \end{aligned} \quad (4.120)$$

ya da

$$[\mathbf{X} - \mathbf{QKXH}_1 - \mathbf{RKXH}_1 \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{AKXH}_1] \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.121)$$

şeklinde yazılabilir. Burada kullanılan matrisler şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{L}(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(4.121) lineer olmayan cebirsel sistemi uygun Matlab koduyla çözülmüş ve  $\mathbf{A}$  matrisi elde edilmiştir. Bu  $\mathbf{A}$  matrisi,  $y$  fonksiyonunu veren (4.45) denkleminde yerine yazılarak denklemin tam çözümü olan  $y(x) = x^2$  elde edilmiştir.

**Örnek 4.6.** İkinci Riccati tipi denklem örneği olarak (Gülsu ve Sezer 2006)

$$y'(x) = -y^2(x) + 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.122)$$

ele alınmıştır. Denklemin başlangıç koşulu  $y(0) = 0$  olmak üzere denklem tipinde ele alınan bazı parametreler bu örnekte  $p(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$  ve  $r(x) = -1$  olmaktadır. Denklemin tam çözümü  $y(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$  olup, oluşan hataların  $N$  arttıkça nasıl değiştiğini incelemek için grafikte gösterilmek üzere  $N = 3, 5, 8$  alınmış ve literatürdeki diğer makalelerle karşılaştırmak adına tablolarda  $N = 5, 8$  alınmıştır. Kollokasyon noktaları  $c = 0$  ve  $d = 1$  için hesaplanmıştır. (4.48) numaralı Riccati diferansiyel denklemleri için genel temel matris denklemine buradaki parametreler entegre edilince, bu örneğin temel matris denklemini şu şekilde elde edilmiştir:

$$\mathbf{XL}(\alpha) \mathbf{A} + [\mathbf{KXH}_1 \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A}]^2 - \mathbf{P} = 0. \quad (4.123)$$

Bu denklemde ( $N = 3$  için) kullanılan matrisler şu şekildedir:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{L}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Bu lineer olmayan sistem MATLAB koduyla çözdürüldüğünde A matrisi şu şekilde elde edilmiştir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.0000e + 00 \\ -1.9018e - 01 \\ -1.0435e - 01 \\ -6.8097e - 02 \end{bmatrix}.$$

A matrisi y fonksiyonunu veren

$$y_N(x) = \mathbf{XKH}_1\mathbf{LA} \quad (4.124)$$

eşitliğinde yerine yazılınca  $N = 3$  için bulunan  $y_3(x)$  çözümü aşağıdaki gibidir.

$$y_3(x) = (-1.0215e - 01)x^4 - (6.9567e - 02)x^3 - (9.5090e - 02)x^2 + x.$$

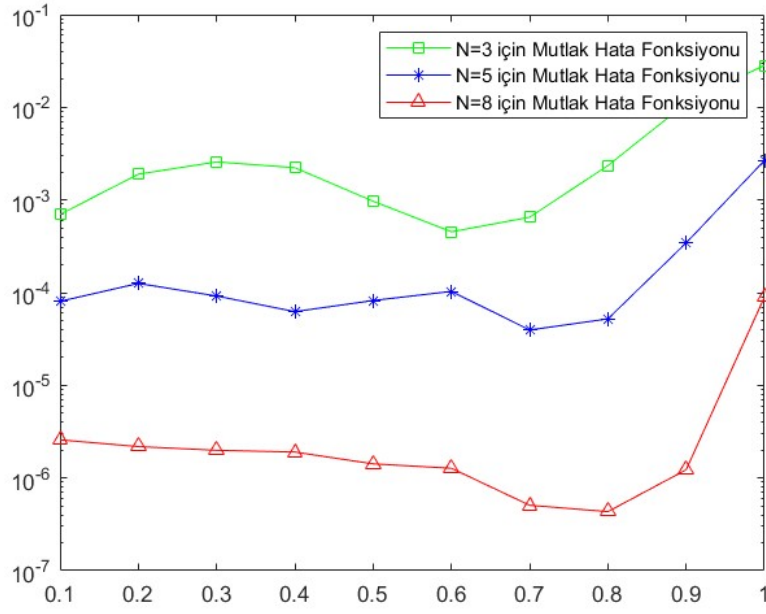
$N=5$  ve  $N=8$  için bulunan çözümler ise;

$$y_5(x) = (-2.2008e - 01)x^6 + (5.3851e - 01)x^5 - (3.3230e - 01)x^4 - (2.0973e - 01)x^3 - (1.7479e - 02)x^2 + x$$

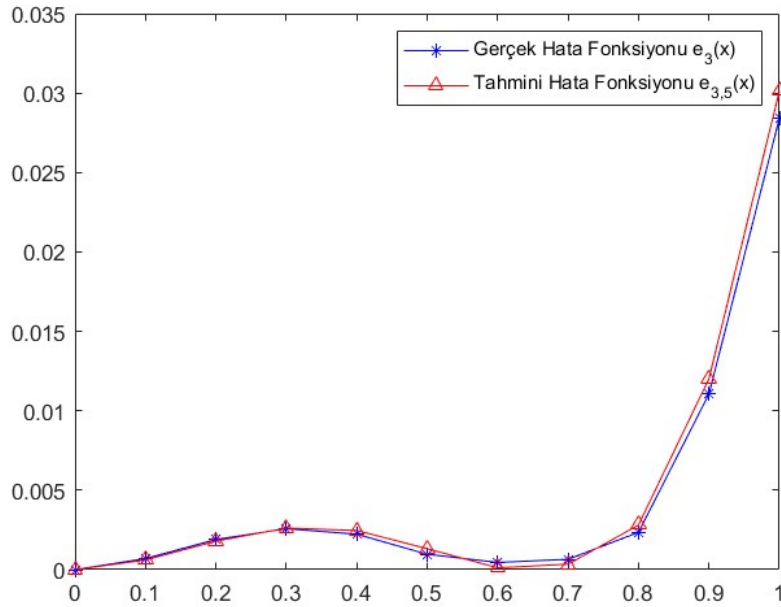
ve

$$y_8(x) = (1.0026e - 01)x^9 - (3.7874e - 01)x^8 + (6.1009e - 01)x^7 - (6.0588e - 01)x^6 + (4.5132e - 01)x^5 - (9.6999e - 02)x^4 - (3.1720e - 01)x^3 - (1.1650e - 03)x^2 + x$$

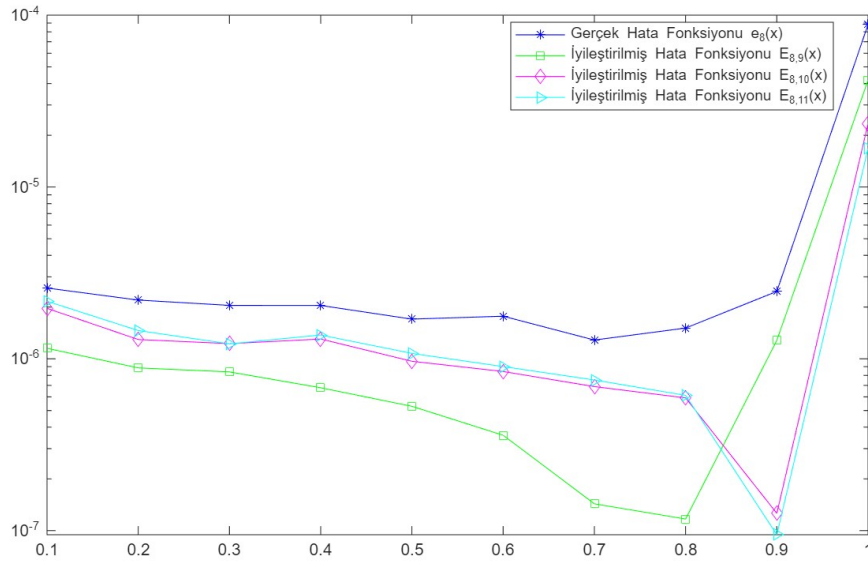
şeklinde bulunur.



Şekil 4.8. Örnek 4.6'nın  $N = 3, 5, 8$  için Gerçek Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması



Şekil 4.9. Örnek 4.6'nın  $e_3$  Gerçek Hata ve  $e_{3,5}$  Tahmini Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması



**Şekil 4.10.** Örnek 4.6'nın  $e_8$  Gerçek Hata ve  $E_{8,9}$ ,  $E_{8,10}$ ,  $E_{8,11}$  İyileştirilmiş Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması

Grafik,  $N$  değıştikçe gerçek hata fonksiyonunun nasıl değışeceğini daha iyi gözlemlemek adına MATLAB'da logaritmik ölçekle çizdirilmiş olup,  $x = 0$  iken gerçek hata 0 olduğu için grafikte görünmemektedir.  $N = 3, 5, 8$  için elde edilen yaklaşık çözümlerde ve tam çözümde  $x = 0$  için fonksiyon değęlerinin 0 olduğu görölmekte olup ve tabloda da kullanılmıştır.

**Çizelge 4.4.** Örnek 4.6'nın Gerçek Hatalarının Adomian ve Taylor Metotlarının Sonuçları İle Karşılaştırılması

|       | Adomian Metodu<br>(El-Tawil ve Bahnasawi 2004) | Taylor Metodu<br>(Gülsu ve Sezer 2006) | Charlier<br>Metodu | Charlier<br>Metodu |
|-------|------------------------------------------------|----------------------------------------|--------------------|--------------------|
| $x_i$ | $e_5(x_i)$                                     | $e_5(x_i)$                             | $e_5(x_i)$         | $e_8(x_i)$         |
| 0     | 0                                              | 0                                      | 0                  | 0                  |
| 0.2   | 0.12940e-4                                     | 0.679776e-6                            | 0.12578e-3         | 0.21812e-5         |
| 0.4   | 0.94690e-4                                     | 0.83037745e-4                          | 0.623724e-4        | 0.190514e-5        |
| 0.6   | 0.27565e-3                                     | 0.1318433002e-2                        | 0.103198e-3        | 0.127422e-5        |
| 0.8   | 0.52715e-3                                     | 0.8987229732e-2                        | 0.521317e-4        | 0.433196e-6        |
| 1     | 0.73570e-3                                     | 0.38405844044e-1                       | 0.266949e-3        | 0.892512e-4        |

#### 4.3.4. Genelleştirilmiş-pantograph denklemleri için örnekler

**Örnek 4.7.** İlk olarak ikinci mertebeden pantograph denklemi olan, parametrelerini kendimiz belirlediğimiz

$$y''(x) = \frac{3}{4}y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right) + 20x^3 - \frac{25}{32}x^5, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.125)$$

denklemi  $N = 3$  için ele alınmıştır. Bu denklemin başlangıç koşulları  $y(0) = 0$  ve  $y'(0) = 0$  dır.

Bu örnek için oluşturulan temel matris denklemi şu şekildedir.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} - [\mathbf{PK}^2\mathbf{XH}_2\mathbf{H}_1 + \mathbf{P0}^2\mathbf{X}_0\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1 + \mathbf{P0K}_0\mathbf{X}_0\mathbf{H}_1] \\ - [\mathbf{K}^2\mathbf{XHH}_2\mathbf{H}_1 + \mathbf{0}^2\mathbf{X}_0\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1 + \mathbf{0K}_0\mathbf{X}_0\mathbf{H}_1] \mathbf{LA}(\alpha) = \mathbf{G} \end{aligned} \quad (4.126)$$

ya da

$$[\mathbf{X} - \mathbf{PK}^2\mathbf{XH}_2\mathbf{H}_1 - \mathbf{K}^2\mathbf{XHH}_2\mathbf{H}_1] \mathbf{LA}(\alpha) = \mathbf{G} \quad (4.127)$$

şeklinde daha kısa yazılabilir.  $N = 3$  için bu denklemdeki matrisler şu şekildedir.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3.3333e-01 & 1.1111e-01 & 3.7037e-02 \\ 1 & 6.6667e-01 & 4.4444e-01 & 2.9630e-01 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \mathbf{L}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.3333e-01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.6667e-01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.3753e-01 \\ 5.8230e+00 \\ 1.9219e+01 \end{bmatrix}.$$

Burada bir  $\mathbf{W}$  matrisi

$$\mathbf{W} = [\mathbf{X} - \mathbf{PK}^2\mathbf{XH}_2\mathbf{H}_1 - \mathbf{K}^2\mathbf{XHH}_2\mathbf{H}_1] \mathbf{L}$$

olarak tanımlandığında

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 9.4444e-01 & 3.2793e-01 & 2.2055e-01 & 2.2126e-01 & ; & 0.73753 \\ 7.7778e-01 & 6.2346e-01 & 8.6214e-01 & 1.7469e+00 & ; & 5.8230 \\ 5.0000e-01 & 8.5417e-01 & 1.8646e+00 & 5.7656e+00 & ; & 19.219 \end{bmatrix}$$

genişletilmiş matrisi elde edilir.  $\mathbf{A}$  (Charlier katsayı) matrisini elde etmek için

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}$$

eşitliği kullanılarak

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.3333 \end{bmatrix}$$

elde edilmiştir. Bu  $\mathbf{A}$  matrisi  $y_3(x)$  fonksiyonunu veren

$$y_3(x) = \mathbf{K}^2\mathbf{XH}_2\mathbf{H}_1\mathbf{LA}$$

eşitliğinde yerine yazılınca

$$y_3(x) = x^5$$

çözümüne, yani direkt tam çözüme ulaşılmıştır.

**Örnek 4.8.** Genelleştirilmiş-pantograph denklemlerimizden ikincisi, üçüncü mertebeden pantograph denkleminin (Sezer, Akyüz-Daşcıoğlu 2007)

$$y^{(3)}(x) = xy''(2x) - y'(x) - y\left(\frac{x}{2}\right) + x\cos(2x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.128)$$

denklemin ele alınmıştır. Denklemin başlangıç koşulları  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  ve  $y''(0) = -1$  şeklindedir. Tam çözüm  $y(x) = \cos(x)$  tir. Bu örnek denklemin temel matris denkleminin

$$\left[ \mathbf{X} - \mathbf{K}^2 \mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{H}_1 + \mathbf{K}^2 \mathbf{X} \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 - \mathbf{K}^3 \mathbf{X} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \right] \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.129)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\mathbf{G}$  matrisi  $g(x) = x\cos(2x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{8} - 1$  fonksiyonunun matris hâlini temsil etmektedir.

$N = 3, 5, 8$  için yaklaşık çözüm denklemleri hesaplanmıştır.  $N = 3$  için bu denklemden matrisler şu şekildedir.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3.3333e-01 & 1.1111e-01 & 3.7037e-02 \\ 1 & 6.6667e-01 & 4.4444e-01 & 2.9630e-01 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \mathbf{L}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.3333e-01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.6667e-01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_3 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.6199e-01 \\ 1.5734e-01 \\ -4.1356e-01 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(4.129) matris denkleminde

$$\mathbf{W} = \left[ \mathbf{X} - \mathbf{K}^2 \mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{H}_1 + \mathbf{K}^2 \mathbf{X} \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 - \mathbf{K}^3 \mathbf{X} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \right] \mathbf{L} \quad (4.130)$$

olarak adlandırıldığında

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 8.3410e-01 & 2.6546e-01 & 1.5844e-01 & 1.2469e-01 & ; & 1.0526 \\ 3.3951e-01 & 1.2397e-01 & -1.3155e-01 & -1.3431e+00 & ; & 1.1107 \\ -4.7917e-01 & -8.3073e-01 & -3.1656e+00 & -1.7699e+01 & ; & 1.1749 \end{bmatrix}$$

genişletilmiş matrisi elde edilir.  $\mathbf{A}$  (Charlier katsayı) matrisini elde etmek için

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}$$

eşitliği kullanılmış ve  $\mathbf{A}$  şu şekilde belirlenmiştir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.9461e-01 \\ 1.9707e-01 \\ -5.3871e-02 \end{bmatrix}.$$

Bu  $\mathbf{A}$  matrisi  $y_3(x)$  çözümünü veren

$$y_3(x) = \mathbf{K}^3 \mathbf{X} \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \mathbf{L} \mathbf{A} - \frac{x^2}{2}$$

$(\mathbf{X}(x) = [1 \ x \ \dots \ x^N])$  eşitliğinde yerine yazılınca

$$y_3(x) = (-2.6936e-03)x^6 + (6.5690e-03)x^5 + (3.7275e-02)x^4 - (5.0000e-01)x^2 + 1$$

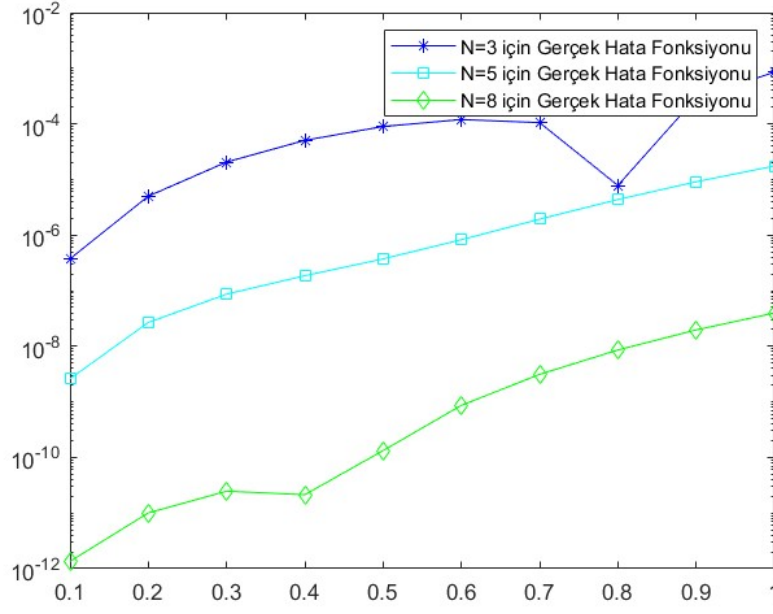
çözümü elde edilir.  $N = 5, 8$  için de hesaplamalar aynı şekilde yapılarak

$$y_5(x) = (4.0014e-06)x^8 + (1.1198e-04)x^7 - (1.6100e-03)x^6 + (1.5125e-04)x^5 + (4.1627e-02)x^4 - (5.0000e-01)x^2 + 1$$

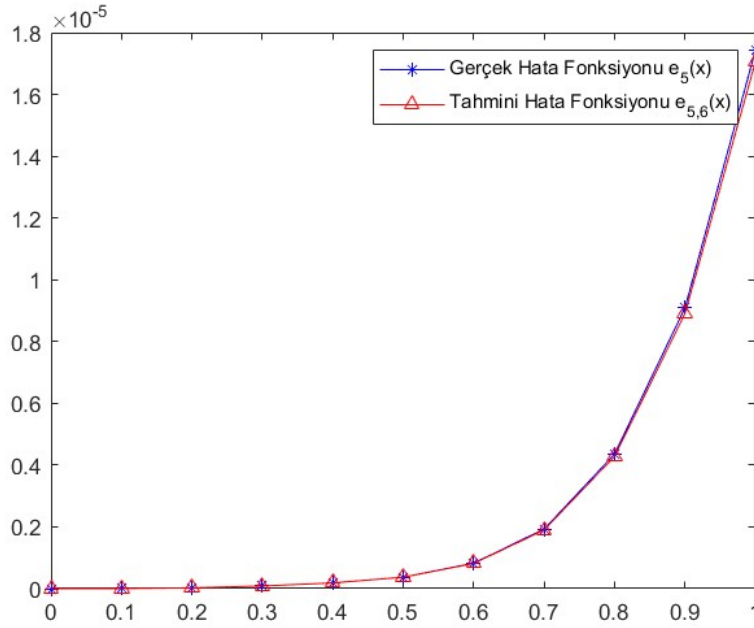
ve

$$y_8(x) = (4.4706e-09)x^{11} - (2.0786e-07)x^{10} - (4.2407e-07)x^9 + (2.5861e-05)x^8 - (1.3103e-06)x^7 - (1.3881e-03)x^6 - (2.2322e-07)x^5 + (4.1667e-02)x^4 - (5.0000e-01)x^2 + 1$$

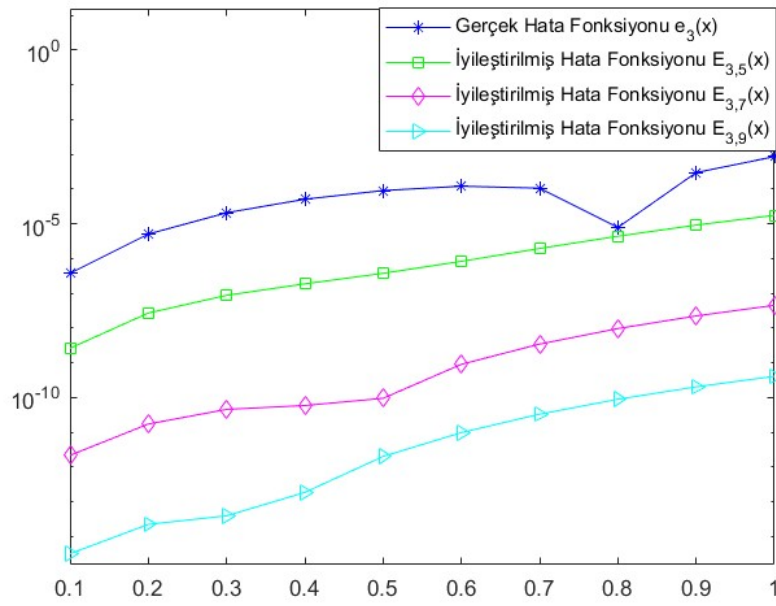
yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.



**Şekil 4.11.** Örnek 4.8'in  $N = 3, 5, 8$  için Gerçek Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması



**Şekil 4.12.** Örnek 4.8'in  $e_5$  Gerçek Hata ve  $e_{5,6}$  Tahmini Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması



**Şekil 4.13.** Örnek 4.8'in  $e_3$  Gerçek Hata ve  $E_{3,5}$ ,  $E_{3,7}$ ,  $E_{3,9}$  İyileştirilmiş Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması

**Çizelge 4.5.** Örnek 4.8'in Gerçek Hatalarının Üstel, Taylor ve Bessel Metotlarının Sonuçları İle Karşılaştırılması

| Üstel Kollokasyon Metodu<br>(Yüzbaşı ve Sezer 2013) |             | Charlier<br>Metodu |
|-----------------------------------------------------|-------------|--------------------|
| $x_i$                                               | $e_3(x)$    | $e_3(x_i)$         |
| 0                                                   | 0           | 0                  |
| 0.2                                                 | 5.2603e-004 | 5.00748e-06        |
| 0.4                                                 | 6.6783e-003 | 5.05096e-05        |
| 0.6                                                 | 2.6954e-002 | 1.19586e-04        |
| 0.8                                                 | 6.8182e-002 | 7.73327e-06        |
| 1                                                   | 1.3362e-001 | 8.48561e-04        |

| Üstel Kollokasyon<br>Metodu (Yüzbaşı ve<br>Sezer 2013) |             | Taylor Metodu (Sezer<br>ve Akyüz-Dascioğlu<br>2007) | Bessel Metodu<br>(Yüzbaşı vd. 2012) | Charlier<br>Metodu |
|--------------------------------------------------------|-------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------|--------------------|
| $x_i$                                                  | $e_8(x)$    | $e_8(x_i)$                                          | $e_8(x_i)$                          | $e_8(x_i)$         |
| 0                                                      | 4.2788e-013 | 0                                                   | 0                                   | 0                  |
| 0.2                                                    | 7.5859e-006 | 8.00e-8                                             | 4.9377e-11                          | 3.84121e-11        |
| 0.4                                                    | 3.7294e-005 | 5.12e-6                                             | 1.0456e-10                          | 8.15662e-10        |
| 0.6                                                    | 6.7100e-005 | 5.832e-5                                            | 1.1634e-08                          | 5.62117e-09        |
| 0.8                                                    | 4.7974e-005 | 3.277e-4                                            | 1.0821e-07                          | 2.58922e-08        |
| 1                                                      | 7.1575e-004 | 1.25e-3                                             | 4.9681e-07                          | 8.91049e-08        |

**Örnek 4.9.** Genelleştirilmiş-pantograph denklemi olarak üçüncü örnek, üçüncü mertebeden pantograph denklemi olan (Yalçınbaş vd. 2011)

$$y^{(3)}(x) = -y(x) - y(x - 0.3) + e^{-x+0.3}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.131)$$

denklemi ele alınmıştır. Denklemin başlangıç koşulları  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$  ve  $y''(0) = 1$  şeklindedir. Tam çözüm  $y(x) = e^{-x}$  tir. Bu örnek denklemin temel matris denklemi

$$[\mathbf{X} + \mathbf{K}^3 \mathbf{X} \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 + \mathbf{K}^3 \mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1] \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.132)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\mathbf{G}$  matrisi  $g(x) = e^{-x+0.3} - x^2 + 2.3x - 2.345$  fonksiyonun matris ver-siyonunu temsil etmektedir.  $N = 3, 6, 8, 10$  için yaklaşık çözümler hesaplanmış olup,  $N = 6, 8, 10$

için hesaplanan çözümler grafiklerde ve tablolarda literatürdeki diğer çözümlerle karşılaştırmak için kullanılmıştır.  $N = 3$  için (4.132) matris denklemindeki matrisler şu şekildedir.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3.3333e-01 & 1.1111e-01 & 3.7037e-02 \\ 1 & 6.6667e-01 & 4.4444e-01 & 2.9630e-01 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -0.3 & 0.09 & 0.027 \\ 0 & 1 & -0.6 & 0.27 \\ 0 & 0 & 1 & -0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.3333e-01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.6667e-01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -9.9514e-01 \\ -7.2223e-01 \\ -5.6307e-01 \\ -5.4841e-01 \end{bmatrix}.$$

(4.132) matris denkleminde

$$\mathbf{W} = [\mathbf{X} + \mathbf{K}^3 \mathbf{X} \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 + \mathbf{K}^3 \mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1] \mathbf{L} \quad (4.133)$$

olarak adlandırıldığında

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 9.9550e-01 & 3.3750e-04 & -8.1000e-05 & 3.6450e-05 & ; & -9.9514e-01 \\ 1.0062e+00 & 3.3385e-01 & 2.2236e-01 & 2.2229e-01 & ; & -7.2223e-01 \\ 1.0576e+00 & 6.7565e-01 & 8.9350e-01 & 1.7823e+00 & ; & -5.6307e-01 \\ 1.2238e+00 & 1.0517e+00 & 2.0389e+00 & 6.0559e+00 & ; & -5.4841e-01 \end{bmatrix}$$

genişletilmiş matrisi elde edilir.  $\mathbf{A}$  (Charlier katsayı) matrisini elde etmek için

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}$$

eşitliği kullanılmış ve  $\mathbf{A}$  şu şekilde belirlenmiştir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9.9369e-01 \\ -2.3202e-01 \\ 1.7083e-02 \end{bmatrix}.$$

Bu matrisi  $y$  fonksiyonunu veren

$$y_3(x) = \mathbf{K}^3 \mathbf{X} \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \mathbf{L} \mathbf{A} + \frac{x^2}{2} - x + 1$$

$(\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^N \end{bmatrix})$  eşitliğinde yerine yazılınca

$$y_3(x) = (8.5414e - 04)x^6 - (7.7339e - 03)x^5 + (4.1404e - 02)x^4 - (1.6667e - 01)x^3 - (5.0000e - 01)x^2 - x + 1$$

çözümü elde edilir.  $N = 6, 8$  ve  $10$  için de hesaplamalar aynı şekilde yapıldığında

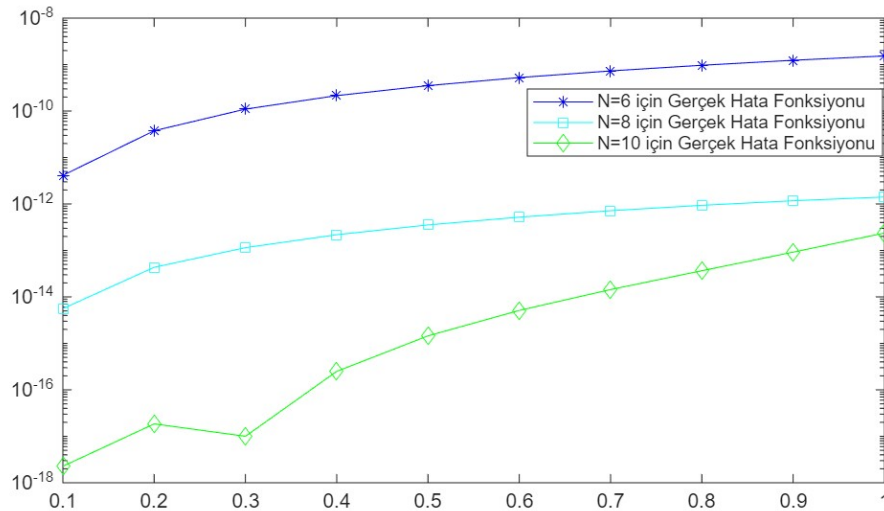
$$y_6(x) = -(1.6826e - 06)x^9 + (2.2754e - 05)x^8 - (1.9621e - 04)x^7 + (1.3875e - 03)x^6 - (8.3328e - 03)x^5 + (4.1667e - 02)x^4 - (1.6667e - 01)x^3 + (5.0000e - 01)x^2 - x + 1,$$

$$y_8(x) = -(1.5270e - 08)x^{11} + (1.5270e - 08)x^{10} - (2.7225e - 06)x^9 + (2.4771e - 05)x^8 - (1.9839e - 04)x^7 + (1.3889e - 03)x^6 - (8.3333e - 03)x^5 + (4.1667e - 02)x^4 - (1.6667e - 01)x^3 + (5.0000e - 01)x^2 - x + 1$$

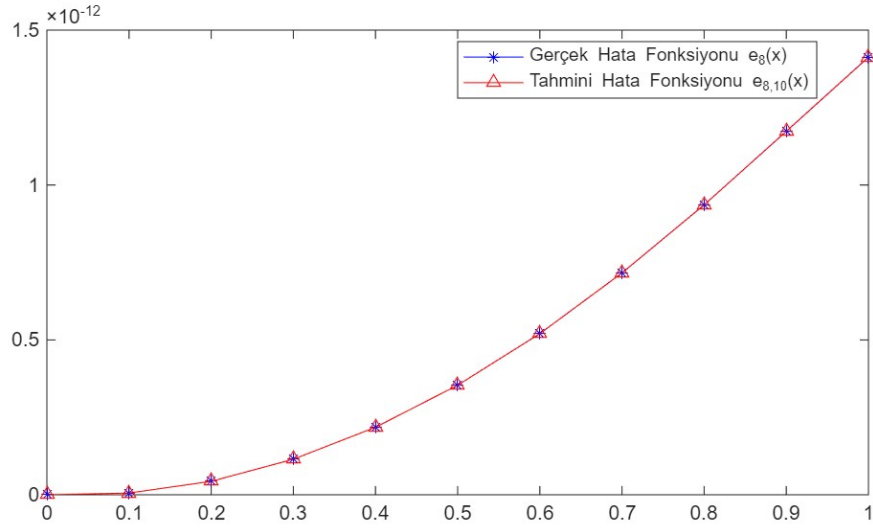
ve

$$y_{10}(x) = -(9.7641e - 11)x^{13} + (1.9077e - 09)x^{12} - (2.4736e - 08)x^{11} + (2.7520e - 07)x^{10} - (2.7554e - 06)x^9 + (2.4801e - 05)x^8 - (1.9841e - 04)x^7 + (1.3889e - 03)x^6 - (8.3333e - 03)x^5 + (4.1667e - 02)x^4 - (1.6667e - 01)x^3 + (5.0000e - 01)x^2 - x + 1$$

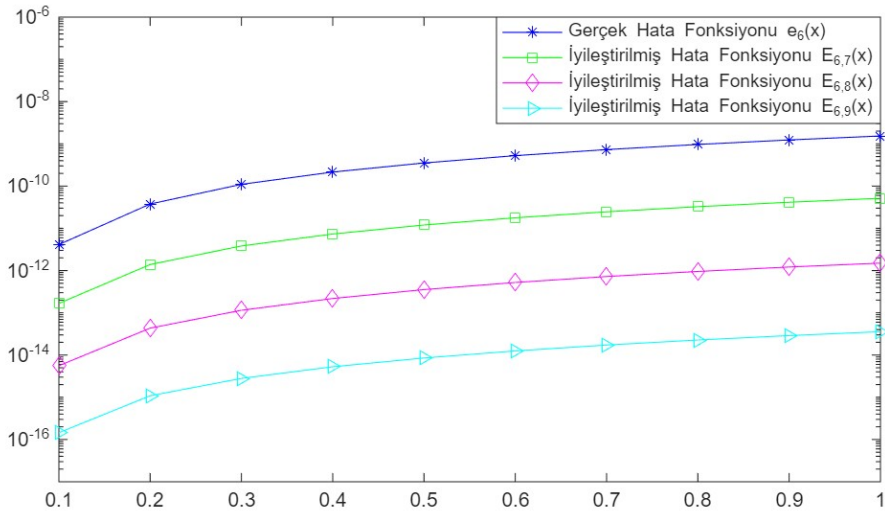
yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.



**Şekil 4.14.** Örnek 4.9'un  $N = 6, 8, 10$  için Gerçek Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması



**Şekil 4.15.** Örnek 4.9'un  $e_8$  Gerçek Hata ve  $e_{8,10}$  Tahmini Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması



**Şekil 4.16.** Örnek 4.9'un  $e_6$  Gerçek Hata ve  $E_{6,7}$ ,  $E_{6,8}$ ,  $E_{6,9}$  İyileştirilmiş Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması

**Çizelge 4.6.** Örnek 4.9'un Gerçek Hatalarının Hermite, Taylor ve Jacobi Rasyonel-Gauss Metotlarının Sonuçları ile Karşılaştırılması

| Hermite Metodu<br>(Yalçınbaş vd. 2011) |          | Taylor Metodu<br>(Yüzbaşı ve Ismailov 2018) | Charlier<br>Metodu |
|----------------------------------------|----------|---------------------------------------------|--------------------|
| $x_i$                                  | $e_8(x)$ | $e_8(x_i)$                                  | $e_8(x_i)$         |
| 0.2                                    | 6.2e-9   | 6.777e-11                                   | 4.33671e-14        |
| 0.4                                    | 5.76e-8  | 3.312e-10                                   | 2.17984e-13        |
| 0.6                                    | 1.796e-7 | 8.428e-10                                   | 5.20298e-13        |
| 0.8                                    | 3.735e-7 | 1.543e-9                                    | 9.36059e-13        |
| 1                                      | 6.368e-7 | 2.491e-9                                    | 1.41294e-12        |

| Jacobi Rasyonel-Gauss Metodu<br>(Yousefi ve Behroozifar 2010) |             | Taylor Metodu<br>(Yüzbaşı ve Ismailov 2018) | Charlier<br>Metodu |
|---------------------------------------------------------------|-------------|---------------------------------------------|--------------------|
| $x_i$                                                         | $e_{26}(x)$ | $e_{10}(x_i)$                               | $e_{10}(x_i)$      |
| 0.2                                                           | 3.605e-8    | 2.313e-13                                   | 1.84975e-17        |
| 0.4                                                           | 9.299e-9    | 1.168e-12                                   | 2.49921e-16        |
| 0.6                                                           | 3.503e-10   | 2.775e-12                                   | 5.12028e-15        |
| 0.8                                                           | 8.345e-9    | 5.125e-12                                   | 3.662355e-14       |
| 1                                                             | 1.161e-8    | 8.123e-12                                   | 2.36992e-13        |

**Örnek 4.10.** Genelleştirilmiş-pantograph denklemi olarak dördüncü örnek denklemi, üçüncü merbeden pantograph denklemi olan (Yüzbaşı ve Sezer 2013)

$$y^{(3)}(x) - xy''\left(\frac{1}{3}x - 1\right) + xy'\left(\frac{1}{4}x + 1\right) + y(x) = -x \left( e^{-\frac{1}{3}x+1} + e^{-\frac{1}{4}x-1} \right), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.134)$$

denklemi ele alınmıştır. Denklem başlangıç koşulları  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$  ve  $y''(0) = 1$  şeklindedir. Tam çözüm  $y(x) = e^{-x}$  tir. Bu örnek denklemin temel matris denklemi

$$\left[ \mathbf{X} - \mathbf{K}^2 \mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{H}_1 + \mathbf{K}^3 \mathbf{X} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 + \mathbf{K}^3 \mathbf{X} \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \right] \mathbf{L}(\alpha) \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.135)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\mathbf{G}$  matrisi  $g(x) = -x \left( e^{-\frac{1}{3}x+1} + e^{-\frac{1}{4}x-1} \right) - \frac{3}{4}x^2 + 2x - 1$  fonksiyonun matris versiyonunu temsil etmektedir.  $N = 3, 5, 7$  için hesaplanan çözümler grafikte kullanılmıştır.  $N = 3$  için (4.135) matris denklemindeki matrisler şu şekildedir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3.3333e-01 & 1.1111e-01 & 3.7037e-02 \\ 1 & 6.6667e-01 & 4.4444e-01 & 2.9630e-01 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/9 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/27 \end{bmatrix}, \\
\dot{\mathbf{H}} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/16 & 3/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1/64 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.3333e-01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.6667e-01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{H}_3 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1.3403 \\ -1.6587 \\ -1.9842 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(4.135) matris denkleminde

$$\mathbf{W} = \left[ \mathbf{X} - \mathbf{K}^2 \mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{H}_1 + \mathbf{K}^3 \mathbf{X} \dot{\mathbf{H}} \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 + \mathbf{K}^3 \mathbf{X} \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \right] \mathbf{L} \quad (4.136)$$

olarak adlandırıldığında

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ; & -1 \\ 1.4981e+00 & 2.7279e-01 & 4.5495e-01 & 5.9358e-02 & ; & -1.3403 \\ 2.0216e+00 & 6.4969e-01 & 1.3082e+00 & 1.8485e+00 & ; & -1.6587 \\ 2.6146e+00 & 1.1450e+00 & 2.6378e+00 & 6.6692e+00 & ; & -1.9842 \end{bmatrix}$$

genişletilmiş matrisi elde edilir.  $\mathbf{A}$  (Charlier katsayı) matrisini elde etmek için

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}$$

eşitliği kullanılmış ve  $\mathbf{A}$  şu şekilde belirlenmiştir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8.1047e-01 \\ -1.4061e-01 \\ 1.0987e-02 \end{bmatrix}.$$

Bu matrisi  $y$  fonksiyonunu veren

$$y_3(x) = \mathbf{K}^3 \mathbf{X} \mathbf{H}_3 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \mathbf{L} \mathbf{A}$$

$(\mathbf{X}(x) = [1 \ x \ \dots \ x^N])$  eşitliğinde yerine yazılınca

$$y_3(x) = (5.4935e - 04)x^6 - (4.6869e - 03)x^5 + (3.3770e - 02)x^4 - (1.6667e - 01)x^3 + (5.0000e - 01)x^2 - x + 1$$

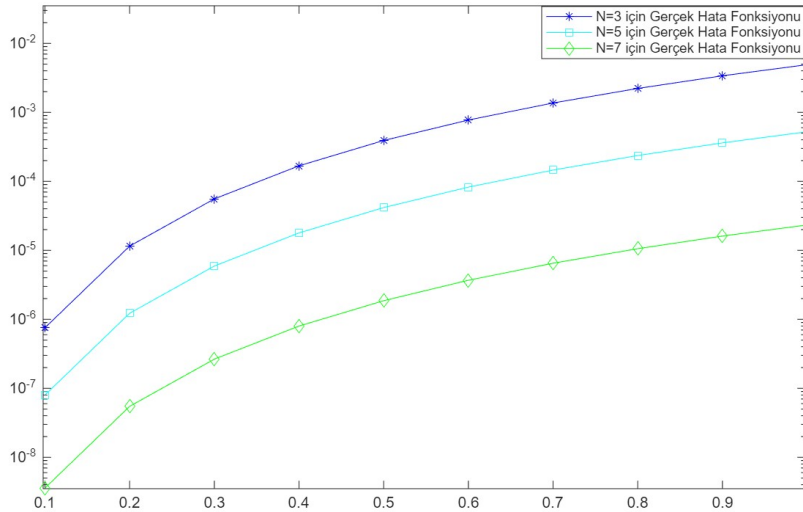
çözümüne ulaşılmıştır.  $N = 5, 7$  için de hesaplamalar aynı şekilde yapılarak

$$y_5(x) = (1.3855e - 05)x^8 - (1.7111e - 04)x^7 + (1.3098e - 03)x^6 - (7.9592e - 03)x^5 + (4.0829e - 02)x^4 - (1.6667e - 01)x^3 + (5.0000e - 01)x^2 - x + 1$$

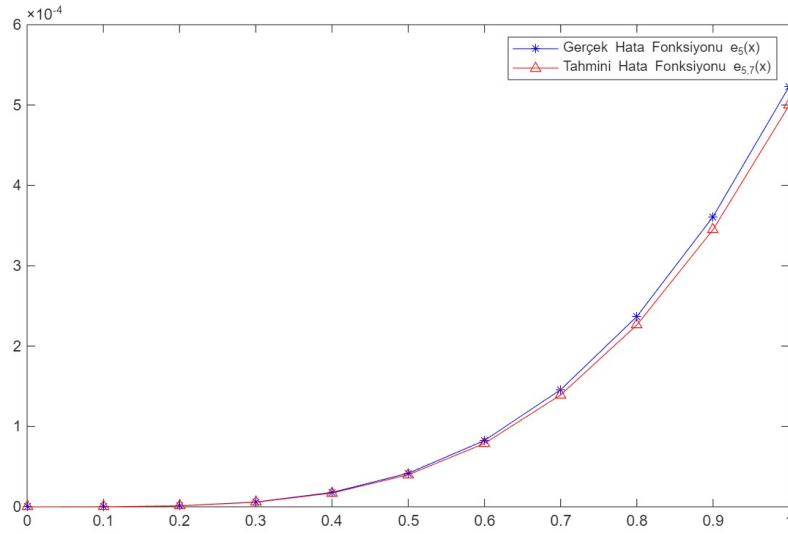
ve

$$y_7(x) = (1.6684e - 07)x^{10} - (2.5083e - 06)x^9 + (2.4379e - 05)x^8 - (1.9748e - 04)x^7 + (1.3855e - 03)x^6 - (8.3165e - 03)x^5 + (4.1629e - 02)x^4 - (1.6667e - 01)x^3 + (5.0000e - 01)x^2 - x + 1$$

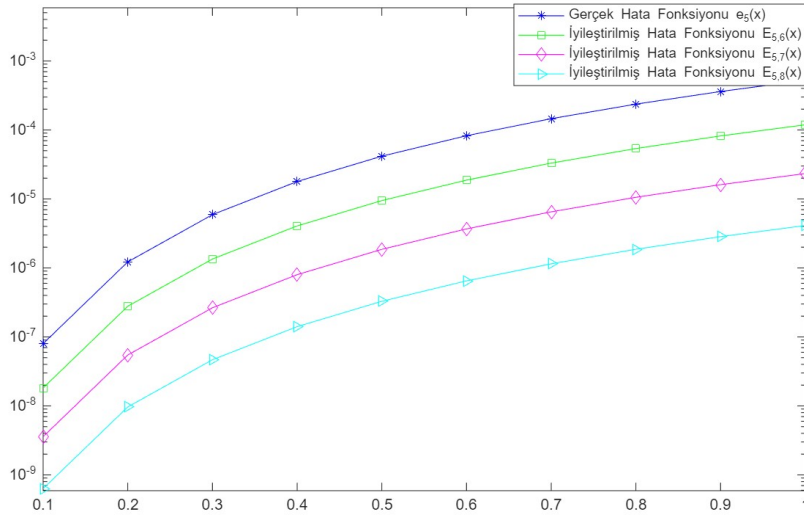
yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.



**Şekil 4.17.** Örnek 4.10'un  $N = 3, 5, 7$  için Gerçek Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması



**Şekil 4.18.** Örnek 4.10'un  $e_5$  Gerçek Hata ve  $e_{5,7}$  Tahmini Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması



**Şekil 4.19.** Örnek 4.10'un  $e_5$  Gerçek Hata ve  $E_{5,6}$ ,  $E_{5,7}$ ,  $E_{5,8}$  İyileştirilmiş Hata Fonksiyonlarının Karşılaştırılması

## 5. SONUÇLAR

Yapılan bu çalışmada Charlier polinomlarının integral denklemlerini baz alan kollokasyon yöntemi geliştirilmiş ve multi-pantograph tipi diferansiyel denklemleri, Lane-Emden diferansiyel denklemleri, Riccati diferansiyel denklemleri ve genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözüm fonksiyonlarını bulmak için kullanılmıştır. Farklı örneklere uygulanarak yöntemin hassasiyeti, doğruluğu ve uygulanabilirliğini incelemek adına tablolar ve grafiklerden yararlanılmıştır.

Grafikleri inceleyerek kesme sınırı olan  $N$  değerinin arttırılmasıyla gerçek hataların azaldığı gözlemlenmiştir. Oluşturulan MATLAB kodlarıyla kesme sınırı kolayca istenilen büyüklükte seçilebilmektedir. Bir başka deyişle, hatalar kolayca küçültülebilmektedir. Ayrıca tahmini hata değerleri de grafiklerde gösterilmiştir ve gerçek hata değerleri gibi çok küçük oldukları gözlemlenebilmektedir. İyileştirilmiş hatalarda ayrı bir grafikte incelenmiştir.

Tablolarda ise hesaplanan gerçek hataların literatürdeki diğer yaklaşım metotlarıyla karşılaştırılması sunulmuştur. Bu karşılaştırmadan çözümlerin doğruluğu ve güvenilirliği gözlemlenebilmektedir.

Ortaya konulan Charlier kollokasyon yönteminin, multi-pantograph tipi diferansiyel denklemleri, Lane-Emden diferansiyel denklemleri, Riccati diferansiyel denklemleri ve genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemlerinin yanı sıra, lineer ya da değil, diğer diferansiyel denklemler için de geliştirilip uygulanabileceği öngörülmektedir.

## 6. KAYNAKLAR

- Brunner, H. 2004. Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations (Vol. 15). Cambridge university press.
- Charlier, C. V. L. 1905. Über die Darstellung willkürlicher Functione. *Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik*, 2:1-35.
- Çağlar, N. and Çağlar, H. 2006. B-spline solution of singular boundary value problems. *Applied Mathematics and Computation*, 182(2):1509-1513.
- Çelik, I. 2006. Collocation method and residual correction using Chebyshev series, *Appl. Math. Comput.*, 174:910–920.
- Derfel, G. 1995. Functional-differential and functional equations with rescaling. In *Operator Theory and Boundary Eigenvalue Problems: International Workshop in Vienna, July 27–30, 1993* (pp. 100-111). Basel: Birkhäuser Basel.
- Dunster, T. M. 2001. Uniform asymptotic expansions for Charlier polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 112(1):93-133.
- El-Safty, A. and Abo-Hasha S. M. 1990. On the application of spline functions to initial value problems with retarded argument. *International journal of computer mathematics*, 32.(3-4):173-179.
- Emden, R. 1907. Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Warmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme. BG Teubner.
- Gopalsamy, K. 2013. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics (Vol. 74). Springer Science & Business Media.
- Gülsu, M. and Sezer, M. 2006. On the solution of the Riccati equation by the Taylor matrix method. *Applied Mathematics and Computation*, 176.(2):414-421.
- Izadi, M. and Yüzbaşı, Ş., and Ansari, K. J. 2021. Application of Vieta–Lucas series to solve a class of multi-pantograph delay differential equations with singularity. *Symmetry*, 13(12): 2370.
- Jiang, W., and Gao, X. 2024. Review of Collocation Methods and Applications in Solving Science and Engineering Problems. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 140(1).

- Johnson, N. L., Kemp, A. W., and Kotz, S. 2005. Univariate discrete distributions. John Wiley & Sons.
- Kürkçü, Ö. K., and Sezer, M. 2022. Charlier Series Solutions of Systems of First Order Delay Differential Equations with Proportional and Constant Arguments. *Scientific Research Communications*, 2(1).
- Lane, H. J. 1870. On the theoretical temperature of the sun, under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat, and depending on the laws of gases as known to terrestrial experiment. *American Journal of Science*, 2(148):57-74.
- Ledwina, T., and Wyłupek, G. 2017. On Charlier polynomials in testing Poissonity. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 46(3):1918–1932.
- Ockendon J. R. and Tayler A. B. 1971. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive, *Proc R Soc Lond Ser A*, 322: 447–468.
- Oliveira, F. A. 1980. Collocation and residual correction. *Numerische Mathematik*, 36: 27-31.
- Öztürk, Y., Anapalı, A., Gülsu, M., and Sezer, M. 2013. A collocation method for solving fractional Riccati differential equation. *Journal of Applied Mathematics*, 2013(1): 598083.
- Pour-Mahmoud, J., Rahimi-Ardabili, M. Y., and Shahmorad, S. 2005. Numerical solution of the system of Fredholm integro-differential equations by the Tau method. *Applied Mathematics and Computation*, 168(1):465-478.
- Riccati, J. 1724. Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus. *Actorum Eruditorum Supplementa*, 8(1724), 66-73.
- Rui, B., and Wong, R. 1994. Uniform asymptotic expansion of Charlier polynomials. *Methods and Applications of Analysis*, 1(3): 294-313.
- Schiesser, W. E. 2012. The numerical method of lines: integration of partial differential equations. Elsevier.
- Shahmorad, S. 2005. Numerical solution of the general form linear Fredholm–Volterra integro-differential equations by the Tau method with an error estimation. *Applied Mathematics and Computation*, 167(2):1418-1429.

- Sezer, M., and Akyüz-Daşcıoğlu, A. 2007. A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200(1):217-225.
- Sezer, M., and Şahin, N. 2008. Approximate solution of multi-pantograph equation with variable coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 214(2), 406-416.
- Shadia M. 1992. Numerical solution of delay differential and neutral differential equations using spline methods. *PhD Dissertation*, Assuit University.
- Soleyman, F., and Area, I. 2025. Müntz–Legendre Wavelet Collocation Method for Solving Fractional Riccati Equation. *Axioms*, 14(3), 185.
- Szegö, G. 1939. Orthogonal polynomials (Vol. 23). American Mathematical Soc. (Kitap)
- Tumbarell Aranda, O., and Oliveira, F. A. 2020. Analytical and numerical solutions of the Riccati equation using the method of variation of parameters. *Application to population dynamics. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 15(10):101009.
- Wu, J. 2012. Theory and applications of partial functional differential equations (Vol. 119). Springer Science & Business Media.
- Yalçınbaş, S., Aynigül, M., and Sezer, M. 2011. A collocation method using Hermite polynomials for approximate solution of pantograph equations. *Journal of the Franklin Institute*, 348(6): 1128-1139.
- Yang, Y. and Tohidi, E. 2019. Numerical solution of multi-pantograph delay boundary value problems via an efficient approach with the convergence analysis. *Computational and Applied Mathematics*, 38(3):127.
- Yu, Z. H. 2008. Variational iteration method for solving the multi-pantograph delay equation. *Physics Letters A*, 372(43):6475-6479.
- Yousefi, S. A., and Behroozifar, M. 2010. Operational matrices of Bernstein polynomials and their applications. *International Journal of Systems Science*, 41(6): 709-716.
- Yüzbaşı, Ş. 2012. A collocation approach to solve the Riccati-type differential equation systems. *International Journal of Computer Mathematics*, 89(16):2180-2197.
- Yüzbaşı, Ş. 2020. An operational method for solutions of Riccati type differential equations with functional arguments. *Journal of Taibah University for Science*, 14(1):661-669.

- Yüzbaşı, Ş. and Ismailov, N. 2018. A Taylor operation method for solutions of generalized pantograph type delay differential equations. *Turkish Journal of Mathematics*, 42(2):395-406.
- Yüzbaşı, Ş. and Karaçayır, M. 2018. A Galerkin-like approach to solve multi-pantograph type delay differential equations. *Filomat*, 32(2):409-422.
- Yüzbaşı, Ş., Şahin N. and Sezer M. 2012. A Bessel collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 28(4):1105-1123.
- Yüzbaşı, Ş. and Sezer, M. 2011. A collocation approach to solve a class of Lane-Emden type equations. *J. Adv. Res. Appl. Math.*, 2(3):58-73.
- Yüzbaşı, Ş. and Sezer, M. 2013. An exponential approximation for solutions of generalized pantograph-delay differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 37(22):9160-9173.
- Yüzbaşı, Ş. and Yıldırım, G. 2020. Legendre collocation method to solve the Riccati equations with functional arguments. *International Journal of Computational Methods*, 17(10):2050011.
- Yüzbaşı, Ş. and Yıldırım, G. 2022. Pell-Lucas Collocation Method to Solve Second-Order Non-linear Lane-Emden Type Pantograph Differential Equations. *Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences*, 3(1):75-97.
- Yüzbaşı, Ş. and Yılmaz, S. 2023. Charlier Polynomial Solutions of Lane-Emden Differential Equations, ss. 326-333, Evry Üniversitesi, Paris, ISBN:978-2-491766-01-6.
- Anonymous 1: Charlier-Polynome. <https://de.wikipedia.org/wiki/Charlier-Polynome> [Son Erişim Tarihi: 27.05.2025].
- Anonymous 2: Carl Charlier. [https://en.wikipedia.org/wiki/Carl\\_Charlier](https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Charlier) [Son Erişim Tarihi: 27.05.2025].

## ÖZGEÇMİŞ

**Simge YILMAZ**

### ÖĞRENİM BİLGİLERİ

|                            |                                                                                          |
|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| Yüksek Lisans<br>2022-2024 | Akdeniz Üniversitesi<br>Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya        |
| Lisans<br>2015-2021        | Orta Doğu Teknik Üniversitesi<br>Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü, Ankara |

### ESERLER

#### Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

- 1- Yüzbaşı, Ş. and Yılmaz, S. (2023). Charlier polynomial solutions of Lane-Emden differential equations. Proceedings Book of "The 6th Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Area (MICOPAM 2023)", Paris, Fransa, ISBN:978-2-491766-01-6.
- 2- Yüzbaşı, Ş. and Yılmaz, S. (2024). Charlier collocation approach to logistic growth population model. Proceedings Book of "The 35th International Conference of Jangeon Mathematical Society", Seoul, South Korea 2024", Seoul, South Korea, ISBN:978-89-88615-16-4.
- 3-Yüzbaşı, Ş. and Yılmaz, S. (2024). Charlier collocation Method for Riccati differential equations. Proceedings Book of "The 7th Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2024)", Antalya, Türkiye, ISBN: 978-625-00-1131-7.