

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şebnem UYSAL

LATİS SİRALANMIŞ 2-BÖLÜNEBİLİR GRUPLAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA,2008

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

LATİS SIRALANMIŞ 2-BÖLÜNEBİLİR GRUPLAR

Şebnem UYSAL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Bu tez/...../..... Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

İmza
Yrd.Doç.Dr.Ali ÖZKURT
DANIŞMAN

İmza.....
Prof.Dr.Doğan DÖNMEZ
ÜYE

İmza.....
Yrd.Doç.Dr.Ersin KIRAL
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

**Prof.Dr.Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin ,çizelge,şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı , 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

LATİS SIRALANMIŞ 2- BÖLÜNEBİLİR GRUPLAR

Şebnem UYSAL

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Yrd.Doç.Dr.Ali Arslan ÖZKURT
Yıl : 2008, Sayfa:49
Jüri : Yrd.Doç.Dr.Ali Arslan ÖZKURT
Prof.Dr.Doğan DÖNMEZ
Yrd.Doç.Dr.Ersin KIRAL

Bu çalışmada öncelikle latis sıralı grupların ve bu gruplardaki norm fonksiyonunun bir takım özellikleri incelenip bu gruplarda kabul edilebilir elemanlar olarak adlandırılan bir takım özel elemanlar tanıtıldı.

Norm fonksiyonu ve kabul edilebilir elemanların C ile göstereceğimiz bir kümesi yardımıyla bir latis sıralı grup üzerine doğal yollarla bir topoloji konulabilir. Öte yandan bu topoloji C kümesinin seçimine bağlı olduğundan C topolojisi olarak adlandırılır.

Bu çalışmada Arşimed aksiyomunu sağlayan 2-bölünebilir latis sıralı gruplar çalışılıp bu grupların C topolojisi ile birer topolojik grup olduğu belirtilmiştir.

Anahtar Kelimeler:Latis sıralı grup, N -normu, C -topoloji, C -grup

ABSTRACT

MSc THESIS

LATTICE ORDERED 2-DIVISIBLE GROUPS

Şebnem UYSAL

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor : Assist.Prof.Dr.Ali Arslan ÖZKURT
Year : 2008, Pages:49
Jury : Assist.Prof.Dr.Ali Arslan ÖZKURT
Prof.Dr.Doğan DÖNMEZ
Assist.Prof.Dr.Ersin KIRAL

In this work, we investigate some properties of a lattice ordered groups and norm function on this group and we recognize some special elements which is called admissible elements of a lattice ordered groups.

Furthermore one can define a topology in a natural way on a lattice ordered group by norm function and a set C of admissible elements. Since this topology depends on the choice of the set C , we call this topology as C topology.

If a lattice ordered group is 2-divisible and satisfies Archimedes' axiom then this group is a topological group with C topology.

Key Words:Lattice ordered group,N norm,C-topology,C group

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında yardımını esirgemeyen, bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, değerli zamanını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan saygıdeğer danışmanım Yrd.Dç.Dr.Ali ÖZKURT'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tüm Matematik Bölümü akademik personeline teşekkür ederim. Bugüne kadar desteğini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan anneme, babama, ablalarım ve sevgili eşime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ.....	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
2.1.Sıralı Kavramı.....	2
2.2.Sıra Koruyan Dönüşümler.....	4
2..3.Kalanlı Dönüşümler.....	6
3. LATİS VE LATİS MORFİZMİ.....	9
3.1.Yarı Latis ve Latisler.....	9
3.2.Alt Latisler.....	11
3.3.Latis Morfizması.....	13
3.4.Tam Latisler.....	14
3.5.Sıralı Gruplar.....	17
3.6.Konveks Altgruplar.....	20
3.7.Latis Sıralı Gruplar.....	21
3.8.Mutlak Değer ve Ortogonallik.....	23
3.9.Konveks $\mathbf{I}$ -altgruplar.....	28
4. ARŞİMED SIRALI YAPILARI.....	31
4.1.Tam Sıralı Halkalar ve Cisimler.....	31
4.2.Arşimed Sıralı Cisimler.....	33
4.3.Arşimedyan Tam Sıralı Gruplar.....	36
5. LATİS SIRALI GRUPLAR ÜZERİNDE BİR TOPOLOJİ.....	39
5.1.Latis Sıralı Toplamsal Gruplar.....	39
5.2.C-Topoloji.....	39
5.3.C-Grupları.....	43
KAYNAKLAR.....	48
ÖZGEÇMİŞ.....	49

1.GİRİŞ

Sıralama kavramı matematikte ve mantık ve bilgisayar bilimleri gibi matematiğe yakın branşlarda önemli bir rol oynar. Matematiğin bir çok alanındaki kavramlar sıralı kümeler teorisi ile modellenenir. Örnek olarak sıralı kümeler teorisinde kalanlı dönüşümler olarak bilinen dönüşümleri analizin temel araçlarından biri olan sürekli dönüşümlere karşılık getirebiliriz.

Çalışmamızın ikinci bölümünde sıralı kümeler , kümeler arasındaki sıra koruyan dönüşüm ve kalanlı dönüşümler ile ilgili bazı temel tanım ve teoremleri verdik.

Üçüncü bölümde ise latice ve latice morfizmleri hakkında bazı temel tanım ve teoremleri verip sıralı cebirsel yapılardan özellikle de sıralı gruplardan bahsettik. Daha sonra latice sıralı gruplardan ve bu gruplardaki mutlak değeri normu ve ortogonalite kavramlarını açıklamaya çalıştık. Ayrıca konveks gruplar ve konveks l -gruplar hakkında bazı bilgiler verdik.

Dördüncü bölümde ise reel sayıların karakterizasyonu ile ilgilendik. Bunun için sıralı Arşimed yapılar ve özellikle de sıralı Arşimed cisimler ve latice sıralı Arşimed gruplar hakkında bazı temel tanım ve teoremleri verildi. Tam sıralı Arşimed grupların $(\mathbb{R}, +)$ nin bir alt grubuna izomorfik olduğu söylendi.

Beşinci bölümde öncelikle latice sıralı toplamsal grupların ve bu gruplardaki norm fonksiyonunun bir takım özellikleri incelenip bu gruplarda kabul edilebilir elemanlar olarak adlandırılan bir takım özel elemanlar tanıtılmıştır. Daha sonra bu özel elemanlar yardımıyla latice sıralı gruplar üzerinde tanımlanan bir topoloji incelenmiştir ve Arşimed aksiyomunu sağlayan 2-bölünebilir latice sıralı grupların bu topoloji ile bir ayrık olmayan topolojik grup olduğu gösterilmiştir. Çalışmamızın 5.bölümündeki sonuçlar Ivica Gusic tarafından “A Topology on Lattice Ordered Groups” (Proc. A.M.S.1998) isimli makalede gösterilmiştir. Biz ise çalışmamızda bu makaledeki sonuçlardan bazılarını farklı yöntemlerle gösterdik.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Sıralı Kavramı

E boştan farklı bir küme ve R de $E \times E = \{(x, y) \mid x, y \in E\}$ kartezyen çarpım kümesinin bir alt kümesi olsun. R kümesine E üzerinde bir bağıntı denir. $x, y \in E$ olmak üzere $(x, y) \in R$ ifadesi genellikle xRy formunda yazılır. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa R ye E üzerinde bir **denklik bağıntısı** denir.

- (1) $\forall x \in E$ için $(x, x) \in R$ ise R ye **yansımali**,
- (2) $\forall x, y \in E$ için $(x, y) \in R$ iken $(y, x) \in R$ oluyorsa R ye **simetrik**,
- (3) $\forall x, y, z \in E$ için $(x, y) \in R$ ve $(y, z) \in R$ iken $(x, z) \in R$ oluyorsa R ye **geçişmelidir** denir.
- (2') $\forall x, y \in E$ için $(x, y) \in R$ ve $(y, x) \in R$ iken $x=y$ oluyorsa R ye **ters-simetrik** denir.

Tanım 2.1.1: E boş olmayan bir küme olsun. E üzerinde yansımali, ters simetrik ve geçişmeli bir $\leq$ bağıntısını E üzerinde bir sıralanış olarak adlandıracakız.

$(x, y) \in \leq$ ifadesi $x \leq y$ formunda yazılabilir. Bir başka ifade ile $\leq$ bağıntısının E üzerinde bir sıralanış olması için

1. $\forall x \in E$ için $x \leq x$
 2. $\forall x, y \in E$ için eğer $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x=y$
 3. $\forall x, y, z \in E$ için eğer $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$
- gerekir ve yeterdir.

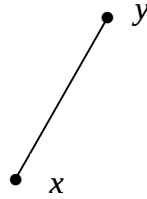
Örnek 2.1.2: Doğal sayılar kümesi üzerinde $m \mid n$ şeklinde tanımlanan bölünebilirlik bağıntısı bir sıralanıştır.

Örnek 2.1.3: Eğer $(E_1, \leq_1), \dots, (E_n, \leq_n)$ sıralı kümeler ise o zaman $\prod_{i=1}^n E_i$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde $(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_i \leq_i y_i$ şeklinde tanımlanan bağıntı bir sıralanıştır.

$(E, \leq)$ sıralı kümesinin x, y elemanları karşılaştırılabilir ise $x \leq y$ veya $y \leq x$ koşulundan biri sağlanıyordur. Eğer E nin tüm ikilileri karşılaştırılabiliriyorsa E bir zincirdir veya $\leq$ tam sıralanıştır denir.

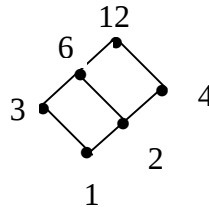
Örnek 2.1.4: $\mathbb{I}, \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Y}$ tüm ikilileri karşılaştırılabilir olduğundan zincirdirler.

Tanım 2.1.5: $(E, \leq)$ sıralı bir küme olsun. Eğer $x < y$ ise ve $x < a < y$ olacak şekilde $a \in E$ yoksa y, x i örter denir ve x y şeklinde gösterilir. y, x i örtüyör ise



şeklinde bir diyagram ile gösterilir. Bu diyagrama Hasse diyagramı denir.

Örnek 2.1.6: $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, 12 nin pozitif bölenlerinin kümesi olsun. E üzerindeki bölünebilirlik bağıntısıyla bir sıralı kümedir ve bu sıralamaya uyan Hasse diyagramı aşağıdaki şekildedir



2.2. Sıra Koruyan Dönüşümler

Tanım 2.2.1: $(A; \leq_1)$ ve $(B; \leq_2)$ sıralı kümeler olsun. Eğer $x, y \in A$ ve $x \leq_1 y$ iken $f(x) \leq_2 f(y)$ oluyorsa $f: A \rightarrow B$ dönüşümüne izoton dönüşüm denir.

Eğer $x, y \in A$ ve $x \leq_1 y$ iken $f(x) \geq_2 f(y)$ oluyorsa $f: A \rightarrow B$ dönüşümüne antiton dönüşüm denir.

Örnek 2.2.2: E boş olmayan bir küme ve $A \subseteq E$ olsun. O zaman $f_A(X) = A \cap X$ ile verilen $f_A: \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}(E)$ dönüşümü izotondur. Eğer X', X in E deki tümleyeni ise o zaman $\mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}(E)$, $X \rightarrow X'$ dönüşümü antitondur.

Tanım 2.2.3: $(E, \leq)$ sıralı bir küme ve D, E nin alt kümesi olsun. Eğer $x \in D$, $y \in E$ ve $y \leq x$ koşulu sağlandığında $y \in D$ oluyorsa D ye E nin bir iniş kümesi denir. Boş küme E nin bir iniş kümesidir.

$$x^\downarrow = \{y \in E \mid y \leq x\}$$

formunda olan kümelere esas iniş kümesi denir.

Eğer $x \in U$, $y \in E$ ve $y \geq x$ koşulu sağlandığında $y \in U$ oluyorsa U ya E nin bir çıkış kümesi denir. Benzer şekilde

$$x^\uparrow = \{y \in E \mid y \geq x\}$$

formunda olan kümelere esas çıkış kümesi denir.

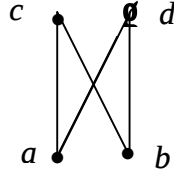
Örnek 2.2.4: Pozitif rasyonel sayılar zincirinde

$$\{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 \leq 2\}$$

kümesi bir iniş kümesidir. Fakat esas iniş kümesi değildir.

Örnek 2.2.5: Eğer A ve B , E sıralı kümesinin birer iniş kümeleri ise o zaman $A \cap B$ ve $A \cup B$ de birer iniş kümeleridir. Bu esas iniş kümeleri için genellikle doğru değildir.

Örneğin



Hasse diyagramı ile verilen sıralı kümesi için

$$c^{\downarrow} \cap d^{\downarrow} = \{a, b\} = a^{\downarrow} \cup b^{\downarrow}$$

dir.

Teorem 2.2.6: Eğer E, F sıralı kümeler ve eğer $f: E \rightarrow F$ herhangi bir dönüşüm ise o zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

1. f izotondur.
2. F in her esas iniş kümesinin ters görüntüsü E nin bir iniş kümesidir.
3. F in her esas çıkış kümesinin ters görüntüsü E nin bir çıkış kümesidir.

İspat:(1) $\Rightarrow$ (2): f izoton, $y \in F$ ve $A = f^{\leftarrow}(y^{\downarrow}) = \{x \in E : f(x) \in y^{\downarrow}\}$ olsun. Eğer $A = \emptyset$

ise A bir iniş kümesidir. $A \neq \emptyset$ ve

$$x \in A = f^{\leftarrow}(y^{\downarrow}) = \{x \in E : f(x) \in y^{\downarrow}\} = \{x \in E : f(x) \leq y\} \text{ olsun. } \forall (z \in E, z \leq x) \text{ için}$$

$z \in A$ olduğunu göstermeliyiz. $z \leq x$ ve f izoton olduğundan $f(z) \leq f(x) \leq y$ dir.

Dolayısıyla $z \in A$ olup A bir iniş kümesidir.

(2) $\Rightarrow$ (1): F in her esas iniş kümesinin ters görüntüsü E nin bir iniş kümesi

olsun. O zaman $\forall x \in E$ için $x \in f^{\leftarrow}[f(x)^{\downarrow}]$ ve $f^{\leftarrow}[f(x)^{\downarrow}]$ bir iniş kümesi

olduğundan $\forall (y \in E, y \leq x)$ için $y \in f^{\leftarrow}[f(x)^{\downarrow}]$ olur. Bu yüzden $f(y) \leq f(x)$

olup dolayısıyla f izotondur.

(1) $\Leftrightarrow$ (3): Benzer şekilde yapılır.

2.3. Kalanlı Dönüşümler

Teorem 2.3.1: Eğer E ve F sıralı kümeler ise o zaman $f:E \rightarrow F$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

- (1) F in her esas iniş kümesinin f altındaki ters görüntüsü E nin bir esas iniş kümesidir.
- (2) f izoton ve $go f \geq id_E$ ve $fog \leq id_F$ olacak şekilde $g:F \rightarrow E$ bir izoton dönüşüm vardır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2): (1) i kabul edelim. Bu durumda her $y \in F$ için $f^{\leftarrow}(y^{\downarrow}) = x^{\downarrow}$ olacak şekilde bir $x \in E$ vardır. Teorem 2.2.6 dan dolayı f izoton dur. Açıkça görülmekte ki her $y \in F$ için bu şekilde ki x elemanı tek olup $g: F \rightarrow E$, $g(y) = x$ dönüşümünü tanımlayabiliriz. $f^{\leftarrow}$ izoton olduğundan g de izoton dur. Bu g dönüşümü için $g(y) \in g(y)^{\downarrow} = x^{\downarrow} = f^{\leftarrow}(y^{\downarrow})$ dir. Dolayısıyla her $y \in F$ için $f(g(y)) \leq y$ dir. Benzer şekilde $x \in f^{\leftarrow}(f(x)^{\downarrow}) = g(f(x))^{\downarrow}$ olup $x \leq g(f(x))$ dir. Dolayısıyla $fog \leq id_F$ ve $go f \geq id_E$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (1): (2) yi kabul edelim. O zaman $f(x) \leq y$ ise $x \leq g(f(x)) \leq g(y)$ ve diğer yandan $x \leq g(y)$ ise $f(x) \leq f(g(y))$ dir. Buradan $f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y)$ ve dolayısıyla $f^{\leftarrow}(y^{\downarrow}) = f^{\leftarrow}(f(x)) = x$ olur.

Tanım 2.3.2: Bir önceki teoremin koşullarından biri sağlanıyorsa $f: E \rightarrow F$ dönüşümüne kalanlı dönüşüm denir.

Eğer $f:E \rightarrow F$ bir kalanlı dönüşüm ise o zaman $fog \leq id_F$ ve $go f \geq id_E$ olacak şekilde bir tek $g: F \rightarrow E$ izoton dönüşüm vardır. Tekliği göstermek istersek g ve g^* gibi her biri izoton olan dönüşümler seçelim.

O zaman

$$\begin{aligned}
g &= id_E \circ g \leq (g^* \circ f) \circ g \\
&= g^* \circ (f \circ g) \leq g^* \circ id_F \\
&= g^*
\end{aligned}$$

olup $g \leq g^*$ olur. Aynı benzerlikle $g^* \leq g$ olup dolayısıyla $g = g^*$ dır. Dolayısıyla g tekdir. Bu dönüşüme f nin kalanı denir ve f^+ ile gösterilir.

Açıkça görülebilir ki $f: E \rightarrow F$ dönüşümünün kalanlı olması için gerek ve yeter koşul her $y \in F$ için

$$f^+(y) = \max f^{\leftarrow}(y^{\downarrow}) = \max \{x \in E: f(x) \leq y\}$$

olmasıdır. Ayrıca

$$f^+ \circ f \geq id_E \text{ ve } f \circ f^+ \leq id_F$$

olduğu da açıktır.

Örnek 2.3.3: Eğer E herhangi bir küme ve $A \subseteq E$ ise o zaman $l_A: \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}(E)$

$$l_A(X) = A \cap X \text{ dönüşümü } l_A^+(Y) = Y \cup A' \text{ kalanı ile kalanlıdır.}$$

Örnek 2.3.4: $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $f_m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dönüşümü $f_m(n) = mn$ ile tanımlansın. O

zaman $f_m, f_m^+(p) = \left\lfloor \frac{p}{m} \right\rfloor$ ile kalanlıdır. $\lfloor q \rfloor, q \in \mathbb{Q}$ nun tamsayı kısmını belirtir.

Teorem 2.3.5: Eğer $f: E \rightarrow F$ kalanlı ise o zaman

$$f \circ f^+ \circ f = f \text{ ve } f^+ \circ f \circ f^+ = f^+$$

dır.

İspat: f izoton olduğuna göre $f \circ f^+ \circ f \geq f \circ id_E = f$ ve

$$f \circ f^+ \circ f \leq id_F \circ f = f \text{ olduğundan } f \circ f^+ \circ f = f \text{ dir. Aynı şekilde}$$

$$f^+ \circ f \circ f^+ \leq f^+ \circ id_F = f^+ \text{ ve } f^+ \circ f \circ f^+ \geq id_E \circ f^+ = f^+ \text{ olup } f^+ \circ f \circ f^+ = f^+ \text{ dir.}$$

Teorem 2.3.6: Eğer $f:E \rightarrow F$ ve $g:F \rightarrow G$ kalanlı dönüşümler ise o zaman $g \circ f:E \rightarrow G$ de kalanlı dönüşümdür ve $(g \circ f)^+ = f^+ \circ g^+$ dir.

İspat: $f \circ g$ ve $g \circ f$ izotondur. Ayrıca $f^+ \circ g^+ \circ (g \circ f) \geq f^+ \circ id_F \circ f = f^+ \circ f \geq id_E$ ve $(g \circ f) \circ (f^+ \circ g^+) \leq g \circ id_F \circ g^+ = g \circ g^+ \leq id_G$ dir.

3. LATİS VE LATİS MORFİZMİ

3.1. Yarı Latis ve Latisler

Teorem 3.1.1: Eğer E sıralı küme ise aşağıdakiler birbirine denktir.

1. $\forall x \in E$ için $x^\downarrow$ den E ye dönüşümü kalanlıdır.
2. Herhangi iki esas iniş kümesinin arakesiti bir esas iniş kümesidir.

Tanım 3.1.2: Eğer E bir önceki teoremde ki koşulların birini sağlıyorsa

$x^\downarrow \cap y^\downarrow = a^\downarrow$ olacak şekilde a elemanını $x \wedge y$ ile gösteririz. Bu durumda E ye bir kesişen (meet) yarı latis veya $\wedge$ -yarı latis denir. Benzer şekilde eğer iki esas çıkış kümesinin kesişimi bir esas çıkış kümesi ise $x^\uparrow \cap y^\uparrow = b^\uparrow$ olacak şekildeki b elemanını $x \vee y$ ile gösteririz. Bu durumda E ye bir birleşen (join) yarı latis veya $\vee$ -yarı latis denir.

Örnek 3.1.3: Her zincir $x \wedge y = \min \{x, y\}$ ile bir kesişen yarı latisdir.

Örnek 3.1.4: ($\mathbb{N}; |$) doğal sayılardaki bölme işlemi, $m \wedge n = \text{obeb}\{m, n\}$ olup ($\mathbb{N}; |$) bir kesişen yarı latisdir.

E bir kesişen yarı latis olsun E üzerinde $(x, y) \rightarrow x \wedge y$ ikili işlemini tanımlayalım.

1. $x^\downarrow \cap (y^\downarrow \cap z^\downarrow) = (x^\downarrow \cap y^\downarrow) \cap z^\downarrow$ olup $\wedge, E$ üzerinde birleşmelidir.
2. $x^\downarrow \cap y^\downarrow = y^\downarrow \cap x^\downarrow$ olup $\wedge, E$ üzerinde değişmelidir.
3. $x^\downarrow \cap x^\downarrow = x^\downarrow$ olup $(E, \wedge)$ bir değişmeli idempotent yarıgruptur.

Tanım 3.1.5: E bir yarıgrup olsun. $\forall x \in E$ için $x^2 = x$ oluyorsa E ye idempotenttir denir.

Teorem 3.1.6: Her değişmeli idempotent yarıgrubu bir kesişen yarı latis yapan bir sıralama vardır.

İspat: E değişmeli idempotent yarıgrup olsun. E üzerindeki R bağıntısını $xRy \Leftrightarrow xy = x$ olarak tanımlayalım. Bu durumda R bir sıralanıştır. Bunu görelim.

- i) $\forall x \in E$ için $x^2 = x$ olup dolayısıyla xRx dir. Bu yüzden R yansımalıdır.
- ii) $\forall x, y \in E$ için xRy ve yRx ise $x = xy = yx = y$ olup R ters simetriktir.
- iii) $\forall x, y, z \in E$ için xRy ve yRz ise $xy = x$ ve $yz = y$ olur. Dolayısıyla $x = xy = xyz = xz$ dir. Bir başka ifade ile xRz olup R geçişmelidir.

R bağıntısını kısaca $\leq$ ile göstereceğiz. Dolayısıyla $(E, \leq)$ bir sıralanıştır.

$\forall x, y \in E$ için $xy = xxy = xyx$ olup dolayısıyla $xy \leq x$ olur. Benzer şekilde $xy = xyy$ olup $xy \leq y$ dir. Dolayısıyla $xy \in x^\downarrow \cap y^\downarrow$ dir. Varsayalım ki $z \leq x^\downarrow \cap y^\downarrow$ olsun.

O zaman $z \in x^\downarrow$ ve $z \in y^\downarrow$ olup $z \leq x$ ve $z \leq y$ dir. Bundan dolayı $z = zx$ ve $z = zy$ dir.

$z = zy = zxy$ olup $z \leq xy$ olur. Dolayısıyla xy en büyük alt sınır olup $x \wedge y = xy$ dir. Dolayısıyla E , bir $\wedge$ -yarı latisdir.

Tanım 3.1.7: E bir sıralı bir küme ve F , E nin alt kümesi olsun. $\forall y \in F$ için $x \leq y$ oluyorsa $x \in E$ elemanına F in **alt sınırı**; $y \leq x$ oluyorsa $x \in F$ in **üst sınırı** denir. E de F in alt sınırlarının kümesini $F^\downarrow$, F in üst sınırlarının kümesini $F^\uparrow$ ile göstereceğiz.

Not: A tarafından doğurulan iniş kümesi $A^\downarrow$ ile gösterilir ve

$A^\downarrow = \{x \in E \mid \forall a \in A \text{ için } x \leq a\}$ dir. A tarafından doğurulan çıkış kümesi $A^\uparrow$ ile gösterilir ve $A^\uparrow = \{x \in E \mid \forall a \in A \text{ için } a \leq x\}$ dir.

Tanım 3.1.8: Eğer E sıralı küme ve F , E nin alt kümesi ise F in alt sınırlarının en büyüğüne (mevcut ise) F in en büyük alt sınırı veya infimumu denir. $\inf_E F$ veya $\inf F$ ile gösterilir.

$\wedge$ -yarı latisin her sonlu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alt kümesi için $\inf \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ vardır ve bu $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$ ile gösterilir.

F nin üst sınırlarının en küçüğüne (mevcut ise) F in en küçük üst sınırı veya supremumu denir. $\sup_E F$ veya $\sup F$ ile gösterilir. $\vee$ -yarı latisin her sonlu alt kümesi için $\sup\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$ dır.

Tanım 3.1.9: Eğer $(E; \leq)$ sıralı kümesi hem kesişen hem de birleşen yarı latis ise $(E; \leq)$ ye latis denir ve $(E; \wedge, \vee, \leq)$ şeklinde gösterilir. Bu durumda bir latis her a, b ikilisi (dolayısıyla her sonlu alt küme) için en büyük alt sınırı ve en küçük üst sınırı sahip sıralı bir kümedir.

Örnek 3.1.10: Her zincir bir latisdir.

$$\inf\{x, y\} = \min\{x, y\} \text{ ve } \sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$$

dır.

Örnek 3.1.11: Her E kümesi için $(\mathbf{P}(E); \cap, \cup, \subseteq)$ sınırlı latisdir.

$$A \wedge B = A \cap B = \inf\{A, B\} \text{ ve } A \vee B = A \cup B = \sup\{A, B\}$$

dır.

Örnek 3.1.12: $(\mathbb{Z}, |)$ bir sınırlı latisdir. Minimum elemanı 1 ve maksimum elemanı 0 dır. $\inf\{m, n\} = \text{obeb}\{m, n\}$ ve $\sup\{m, n\} = \text{okek}\{m, n\}$ dır.

3.2. Alt Latisler

Tanım 3.2.1: $L, \wedge$ -yarı latis ve E de L nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in E$ için $x \wedge y \in E$ oluyorsa $(E; \wedge)$ yapısına L nin bir $\wedge$ -alt yarı latisi denir. Benzer tanım $\vee$ -alt yarı latis için de yapılabilir. Eğer E hem $\vee$ -alt yarı latis hem de $\wedge$ -alt yarı latis ise E ye bir alt latis denir.

Örnek 3.2.2: Eğer V vektör uzayı olsun. V nin alt uzaylarının kümesini $subV$ ile gösterelim. O zaman $(subV; \subseteq)$ bir sıralı kümedir ve $A, B \in subV$ ise

$\inf\{A, B\} = A \cap B \in subV$ olur. Dolayısıyla $(subV; \subseteq), (\mathcal{P}(V); \subseteq)$ latisinin

$\cap$ -alt yarı latisidir.

Tanım 3.2.3: $f = f^2 \geq id_E$ olacak şekildeki izoton $f: E \rightarrow E$ dönüşümüne E üzerinde bir kapanış denir. Benzer şekilde $f = f^2 \leq id_E$ olacak şekildeki izoton $f: E \rightarrow E$ dönüşümüne de bir dual kapanış denir.

$f: E \rightarrow E$ dönüşümü E üzerinde bir kapanış olsun $x \in \text{Im } f$ alalım. $f(y) = x$ olacak şekilde bir $y \in E$ vardır. $f(x) = f(f(y)) = f^2(y) = f(y) = x$ olup $\text{Im } f = \{x \in E \mid x = f(x)\}$ elde edilir.

Teorem 3.2.4: L bir latis olsun ve $f: L \rightarrow L$ bir kapanış olsun. O zaman $\text{Im } f$

$$\inf \{a, b\} = a \wedge b, \sup \{a, b\} = f(a \vee b)$$

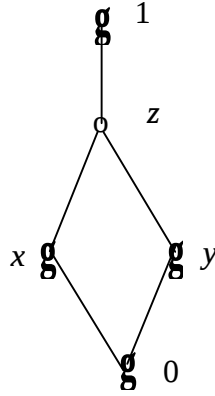
işlemleri ile bir latisdir.

İspat: $a, b \in \text{Im } f$ ise f izoton olup $f = f^2 \geq id_L$ dır.

$f(a) \wedge f(b) = a \wedge b \leq f(a \wedge b) \leq f(a) \wedge f(b)$ olup $a \wedge b = f(a \wedge b)$ dır. Sonuç olarak $a \wedge b \in \text{Im } f$ dır. Dolayısıyla $\text{Im } f, L$ in alt yarı latisidir.

$a, b \in \text{Im } f$ olsun. $a \vee b \leq f(a \vee b)$ ve bu yüzden $f(a \vee b) \in \text{Im } f$, $\{a, b\}$ nin üst sınırıdır. Şimdi en küçük üst sınırı olduğunu gösterelim. $c = f(c) \in \text{Im } f$ olacak şekilde $\{a, b\}$ nin bir üst sınırı olsun. O zaman $a \vee b \leq c$ olup $f(a \vee b) \leq f(c) = c$ olur. Bu sebeple $\sup \{a, b\} = f(a \vee b)$ olup $\text{Im } f, L$ nin $\vee$ -alt yarı latisidir. Dolayısıyla $\text{Im } f$ bir latisdir.

Örnek 3.2.5: E aşağıdaki Hasse diyagramı ile verilen latis olsun.



$$f(t) = \begin{cases} 1 & t = z \\ t & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f: E \rightarrow E$ için $\text{Im } f = \{0, x, y, 1\}$, $\sup\{x, y\} = f(x \vee y) = f(z) = 1$ ve $\inf\{x, y\} = x \wedge y = 0$ dır.

3.3. Latis Morfizması

Tanım 3.3.1: L ve M , $\vee$ -yarılatis olsun. Eğer $\forall x, y \in L$ için $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ oluyor ise o zaman $f: L \rightarrow M$ bir $\vee$ -morfizmadır. $\wedge$ -morfizm de benzer şekilde tanımlanır. L ve M latis olsun. Eğer $f: L \rightarrow M$ hem $\vee$ -morfizm hem de $\wedge$ -morfizm ise o zaman $f: L \rightarrow M$ bir latis morfizmadır.

L ve M , $\vee$ -yarı latis olsun. Eğer L de $\bigvee_{a \in I} x_a$ varken $(x_a)_{a \in I}$ için M de $\bigvee_{a \in I} f(x_a)$ varsa ve $f(\bigvee_{a \in I} x_a) = \bigvee_{a \in I} f(x_a)$ ise o zaman, $f: L \rightarrow M$, $\vee$ -tam morfizmadır.

Teorem 3.3.2: Eğer L ve M , $\vee$ -yarılatis ise o zaman her $f: L \rightarrow M$ kalanlı dönüşümü bir tam $\vee$ - morfizmadır.

İspat: L ve M yarı latis ve $f: L \rightarrow M$ kalanlı dönüşüm ise f izoton ve $go f \geq id_L$ ve $fog \leq id_M$ olacak şekilde $g: M \rightarrow L$ izoton dönüşüm vardır. Şimdi $\forall (x_a)_{a \in I}$ için

$\bigvee_{a \in I} x_a$ nın var olduğunu kabul edelim. Biz M de $\bigvee_{a \in I} f(x_a)$ var olduğunu ve

$f(\bigvee_{a \in I} x_a) = \bigvee_{a \in I} f(x_a)$ olduğunu göstereceğiz.

$x = \bigvee_{a \in I} x_a$ diyelim. O zaman $x \geq x_a$ ve izotonluktan $f(x) \geq f(x_a)$ dır. Eğer her $a \in I$ için $y \geq f(x_a)$ ise $f^+(y) \geq f^+(f(x_a)) \geq x_a$ dır ve bu yüzden $f^+(y) \geq \bigvee_{a \in I} x_a = x$ olur.

Dolayısıyla $y \geq f(f^+(y)) \geq f(x)$ olup $\bigvee_{a \in I} f(x_a)$ vardır ve $f(x)$ dir.

Öte yandan $f(x) = f(\bigvee_{a \in I} x_a)$ ve $\bigvee_{a \in I} f(x_a) = f(x)$ olduğundan $f(\bigvee_{a \in I} x_a) = \bigvee_{a \in I} f(x_a)$ dır.

3.4. Tam Latisler

Tanım 3.4.1: Eğer L nin her $E = \{x_a \mid a \in A\}$ alt kümesi bir infimuma sahip ise L ,

$\wedge$ -yarılatisine $\wedge$ -tamdır denir. Eğer bir supremuma sahip ise L , $\vee$ -yarılatisine

$\vee$ -tamdır denir. Eğer hem $\vee$ -tam hem de $\wedge$ -tam ise o zaman bu latise tamdır diyeceğiz.

Teorem 3.4.2: Her tam latis bir maksimum ve minimum elemana sahiptir.

İspat: Zorn lemması

Örnek 3.4.3: Her boş olmayan E kümesinin tüm alt kümelerinin $\mathbf{P}(E)$ kümesi tamdır.

Maksimum elemanı E , minimum elemanı $\emptyset$ dir.

Örnek 3.4.4: $L = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ latisini düşünelim. Bu durumda L sınırlıdır fakat tam değildir. Örneğin $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$ olarak alırsak $\sup_L L$ yoktur.

Teorem 3.4.5: Bir $\wedge$ -tam $\wedge$ -yarılatis bir tam latisdir. $\Leftrightarrow$ bir maksimum elemana sahiptir.

İspat: $\Rightarrow$: Zorn lemması

$\Leftarrow$: L bir $\wedge$ -tam yarılatı ve bir maksimum elemana sahip olsun.

$X = \{x_a \mid a \in A\}$, L nin boş olmayan alt kümesi olsun. Bu kümenin supremuma

sahip olduğunu göstermeliyiz. X in üst sınırlarının kümesi $X^\uparrow = \{m_b \mid b \in B\}$

olsun. L nin bir maksimum elemana sahip olduğundan bu küme boş değildir.

L , $\wedge$ -tam olduğundan $\bigwedge_{b \in B} m_b$ vardır. Öte yandan $\bigwedge_{b \in B} m_b \in X^\uparrow$ ve

$\bigwedge_{b \in B} m_b = \sup_L X$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.4.6: Eğer L bir tam latis ve eğer $f: L \rightarrow L$ izoton dönüşüm ise o zaman f bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $A = \{x \in L \mid x \leq f(x)\}$ kümesini düşünelim.

$A \neq \emptyset$ dır. Çünkü L tam latis olduğundan minimum eleman 0 a sahiptir ve $0 \in A$ olduğu kolayca görülmektedir. L tam latis olduğundan $a = \sup_L A$ vardır.

Dolayısıyla her $x \in A$ için $x \leq a$ olup f izoton olduğundan $x \leq f(x) \leq f(a)$ dır. a en küçük üst sınır olduğundan $a = \sup_L A \leq f(a)$ dır. Dolayısıyla $f(a) \leq f(f(a))$ olur.

O halde $f(a) \in A$ olup $f(a) \leq a = \sup_L A$ olur. Dolayısıyla $a = f(a)$ dır.

Teorem 3.4.7: L bir tam latis olsun. Eğer f , L üzerinde bir kapanış ise o zaman $\text{Im } f$ bir tam latisdir. Bununla beraber $\text{Im } f$ in her boştan farklı A alt kümesi için

$$\inf_{\text{Im } f} A = \inf_L A \text{ ve } \sup_{\text{Im } f} A = f(\sup_L A)$$

dır.

İspat: Öncelikle $\text{Im } f$ in $\wedge$ -tam yarılatı olduğunu göstermeliyiz. f bir kapanış olduğundan $\text{Im } f$, f in sabit noktalarının kümesidir. $C \subseteq \text{Im } f$ ve $a = \inf_L C$ olsun.

O zaman $\forall x \in C$ için $a \leq x$ ve izotonluktan $f(a) \leq f(x) = x$ olup $f(a) \leq \inf_L C = a$ ve f bir kapanış olduğundan $a \leq f(f(a)) \leq f(a)$ olup dolayısıyla $f(a) = a$ dır. Bundan dolayı $a \in \text{Im } f$ ve $\text{Im } f$, $\wedge$ -tam latisdir.

L tam latis olup maksimum eleman 1 e sahiptir ve $f = f^2 \geq id_L$ olduğundan $f(1)=1 \in \text{Im } f$ sonucu bulunur. Dolayısıyla Teorem 3.4.5 dan dolayı $\text{Im } f$ bir tam latisdir. Şimdi $\inf_{\text{Im } f} A = \inf_L A$ olduğunu gösterelim.

$A \subseteq \text{Im } f$ ve $a = \inf_L A$ alalım. O zaman $a = f(a) \in \text{Im } f$ dir. Eğer $y \in \text{Im } f$ ve $\forall x \in A$ için $y \leq x$ ise $a = \inf_L A$ olduğundan $y \leq a$ olur. Dolayısıyla $a = \inf_{\text{Im } f} A$ dir.

Şimdi $\sup_{\text{Im } f} A = f(\sup_L A)$ olduğunu gösterelim. $\sup_L A = b$ ve $\sup_{\text{Im } f} A = b^*$ diyelim. $f(b) = b^*$ olduğunu göstermeliyiz. $\text{Im } f$ tam latis olduğundan $b^* \in \text{Im } f$ ve $\forall x \in A$ için $b^* \geq x$ dir. Dolayısıyla $b^* \geq \sup_L A = b$ dir. Bu yüzden izotonluktan $b^* = f(b^*) \geq f(b)$ dir.

$\sup_L A = b$ demiştik. $\forall x \in A$ için $b \geq x$ dir. Bu yüzden $f(b) \geq f(x) = x$ olur. $b^* = f(b^*) \geq f(b) \geq f(x) = x$ ve $f(b) \geq \sup_{\text{Im } f} A = b^*$ olup $b^* = f(b)$ olur.

Teorem 3.4.8: E sıralı bir küme olsun. Eğer $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$, E nin alt kümelerinin bir ailesi ise o zaman

$$(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^\uparrow = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^\uparrow \text{ ve } (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^\downarrow = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^\downarrow$$

dır.

İspat: $A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ olduğundan ve $A \rightarrow A^\uparrow$ bir antiton dönüşümdür. Dolayısıyla

$A_\alpha^\uparrow \supseteq (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^\uparrow$ olup $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^\uparrow \supseteq (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^\uparrow$ dir. Şimdi $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^\uparrow$ alalım. O zaman x , her

$\alpha \in I$ için A_α nın bir üst sınırıdır. Bundan dolayı x , $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ nın da bir üst sınırıdır. Bu

yüzden $x \in (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^\uparrow$ olur. Diğer önermede benzer şekilde gösterilir.

Tanım 3.4.9: E bir sıralı küme ve L bir latis olsun. $\forall x, y \in E$ için $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$ olacak şekildeki $f: E \rightarrow L$ dönüşümüne E sıralı kümesinin L içine bir **gömülmesi** denir.

Teorem 3.4.10: Her sıralı E kümesi bir L tam latisine E deki supremum ve infimumlar L de korunacak şekilde gömülebilir.

İspat: Genelliği kaybetmeksizin E sıralı kümesini sınırlı varsayabiliriz.

$f: \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}(E)$ $f(A)=A^{\uparrow\downarrow}$ kapanış dönüşümü olsun. O zaman teorem 3.4.7 den $L=\text{Im } f$ bir tam latis olur. Öte yandan her $x \in E$ için $f(\{x\})=\{x\}^{\uparrow\downarrow}=x^{\downarrow}$ ve dolayısıyla $x \leq y \Leftrightarrow f(\{x\}) \subseteq f(\{y\})$ olur. O halde $f: \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}(E)$ dönüşümü $f^*: E \rightarrow L$

$f^*(x)=f(\{x\})=\{x\}^{\uparrow\downarrow}=x^{\downarrow}$ olacak şekilde bir gömme belirler. Şimdi $A=\{x_a \mid a \in I\} \subseteq E$ olsun. Eğer $a = \bigwedge_{a \in I} x_a$ varsa o zaman $a^{\downarrow} = \bigwedge_{a \in I} x_a^{\downarrow}$ dır. Bu nedenle

$$f^*(a) = \bigwedge_{a \in I} f^*(x_a) \text{ olup } f^*\left(\bigwedge_{a \in I} x_a\right) = \bigwedge_{a \in I} f^*(x_a) \text{ olur.}$$

$$\text{Eğer } b = \bigvee_{a \in I} x_a \text{ varsa } y \geq b \Leftrightarrow (\forall a \in I)$$

$$y \in x_a^{\downarrow} = \{x_a\}^{\uparrow\downarrow} \Leftrightarrow y \in \bigwedge_{a \in I} \{x_a\}^{\uparrow\downarrow} = \left(\bigcup_{a \in I} \{x_a\}^{\uparrow\downarrow}\right)^{\uparrow} \text{ olup } b^{\uparrow} = \left(\bigcup_{a \in I} \{x_a\}^{\uparrow\downarrow}\right)^{\uparrow} \text{ dır. Bu yüzden}$$

$$\begin{aligned} f^*(b) &= \{b\}^{\uparrow\downarrow} = \left(\bigcup_{a \in I} \{x_a\}^{\uparrow\downarrow}\right)^{\uparrow\downarrow} \\ &= f(\sup_{P(E)} \{\{x_a\}^{\uparrow\downarrow} \mid a \in I\}) \\ &= \sup_{\text{Im } f} \{\{x_a\}^{\uparrow\downarrow} \mid a \in I\} \\ &= \sup_{\text{Im } f} \{f^*(x_a) \mid a \in I\}. \end{aligned}$$

Tanım:3.4.11. $L = \text{Im } f = \{A^{\uparrow\downarrow} \mid A \in \mathbf{P}(E)\}$ tam latisi E nin Dedekind-MacNeille tamamlayanıdır.

Bu aynı zamanda kesitlerin tamamlayanı olarak da bilinir ve rasyonel sayılar kümesinden reel sayılar kümesini oluşturma yönteminin bir genellemesidir.

3.5. Sıralı Gruplar

Tanım 3.5.1: S üzerinde çarpımsal yazılımla verilen bir ikili işlem olsun. Eğer S üzerinde $ki \leq$ sıralaması ile $y \rightarrow xy$ ve $y \rightarrow yx$ dönüşümleri her $x \in S$ için izoton dönüşümler ise $\leq$ sıralamasına S üzerinde uyumludur (compatible order) denir.

Tanım 3.5.2: Bir grup üzerinde uyumlu bir sıralama varsa bu gruba bir sıralı grup denir.

Örnek 3.5.3: Toplama işlemi ve doğal sıralama altında $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{I}$ nin her biri bir sıralı abelyen gruptur.

Örnek 3.5.4: $C[0,1]$ tüm sürekli reel değerli fonksiyonlar kümesi olsun. $(C[0,1]; +)$ bir sıralı abelyen gruptur.

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow h(x) + f(x) \leq h(x) + g(x) \text{ ve } f(x) + h(x) \leq g(x) + h(x)$$

dır.

Tanım 3.5.5: G bir sıralı grup olsun. Eğer $x \geq 1_G$ ise o zaman $x \in G$ bir pozitif elemandır. Eğer $x \leq 1_G$ ise o zaman $x \in G$ bir negatif elemandır.

G nin pozitif elemanlarının kümesi P_G ile gösterilir ve G nin pozitif konisi olarak adlandırılır. Benzer şekilde G nin negatif elemanlarının kümesi N_G ile gösterilir ve G nin negatif konisi olarak adlandırılır. Kolayca görülebilir ki aşağıdaki önermeler birbirine eşittir.

$$x \leq y; xy^{-1} \in N_G; y^{-1}x \in N_G; x^{-1}y \in P_G; yx^{-1} \in P_G; y^{-1} \leq x^{-1}$$

Teorem 3.5.6: G bir grup $P \subseteq G$ olsun. G üzerinde P, G nin bir pozitif konisi olacak şekilde uyumlu bir sıralama olması için gerek ve yeter koşul

$$1) P \cap P^{-1} = \{1_G\}$$

$$2) P^2 = P$$

$$3) (\forall x \in G) xPx^{-1} = P \text{ olmasıdır.}$$

Bununla birlikte eğer $P \cup P^{-1} = G$ ise bu sıralama bir tam sıralamadır.

İspat: $\Rightarrow$: $\leq$, G üzerinde uyumlu bir sıra ve P_G de G nin pozitif konisi olsun.

1) $x \in P_G \cap P_G^{-1}$ alalım. $x \in P_G \cap P_G^{-1}$ ise $x \in P_G$ ve $x \in P_G^{-1}$ dir. $x \in P_G$ olduğundan $x \geq 1_G$ dir. Benzer şekilde $x \in P_G^{-1}$ olduğundan bir $y \in P_G$ için $x = y^{-1}$ olur. O zaman $y \geq 1_G$ ve $x = y^{-1} \leq 1_G$ olup dolayısıyla $x = 1_G$ olur.

2) $x, y \in P_G$ alalım. $x \in P_G$ ise $x \geq 1_G$ ve $y \in P_G$ ise $y \geq 1_G$ dir. Bu yüzden $xy \geq 1_G$ olup $xy \in P_G$ dir. Bundan dolayı $P_G^2 \subseteq P_G$ olur. Aynı zamanda $P_G \subseteq P_G^2$ olup dolayısıyla $P_G^2 = P_G$ dir.

3) $\forall x \in G$ için $xP_Gx^{-1} = P_G$ olduğunu gösterelim.

$y \in P_G$ alalım. $xyx^{-1} \geq x1_Gx^{-1} = 1_G$ olur. Bu yüzden $xyx^{-1} \in P_G$ olup $xP_Gx^{-1} \subseteq P_G$ olur.

$\forall x \in G$ için x yerine x^{-1} yazalım. $x^{-1}P_Gx \subseteq P_G$ elde ederiz. Dolayısıyla $P_G \subseteq xP_Gx^{-1}$ olur.

$\Leftarrow$: P , G nin bir alt kümesi olsun ve P , bu üç özelliği sağlasın. G üzerinde $x \leq y \Leftrightarrow yx^{-1} \in P$ bağıntısını tanımlayalım. Önce $\leq$ bağıntısının G üzerinde uyumlu bir sıralanış olup olmadığına bakalım. $x \leq x \Rightarrow xx^{-1} = 1_G \in P$ olup $\leq$, G üzerinde yansımalıdır.

$x \leq y$ ve $y \leq x$ iken $x = y$ olduğuna bakalım.

$x \leq y \Rightarrow yx^{-1} \in P$ ve $y \leq x \Rightarrow xy^{-1} \in P$ dir. $(yx^{-1})^{-1} = xy^{-1} \in P$ dir.

(1) den $P \cap P^{-1} = \{1_G\}$ olduğundan $yx^{-1} = 1_G$ olup $y = x$ olur. Bu yüzden $\leq$, G üzerinde ters simetriktir.

$x \leq y$ ve $y \leq z$ iken $x \leq z$ olduğuna bakalım.

$x \leq y \Rightarrow yx^{-1} \in P$ ve $y \leq z \Rightarrow zy^{-1} \in P$ dir. $zx^{-1} = zy^{-1}yx^{-1} \in P(P^2 = P)$ olur. Dolayısıyla $x \leq z$ olup $\leq$, G üzerinde geçişmelidir.

Bundan dolayı $\leq$, G üzerinde bir sıralanışdır. Şimdi uyumlu sıralanış olup olmadığına bakalım.

$x \leq y$ olsun. O zaman $yx^{-1} \in P$ dir. $\forall a, b \in G$ için $axb \leq ayb$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$ayb(axb)^{-1} = aybb^{-1}x^{-1}a^{-1} = ayx^{-1}a^{-1}$$

olup (3) den dolayı $ayx^{-1}a^{-1} \in P$ dir. Dolayısıyla $\leq$, uyumludur. Ayrıca kolayca görülüyor ki $y \geq 1_G \Leftrightarrow y \in P$ dir. Dolayısıyla P , G nin pozitif konisidir. Varsayalım ki $P \cup P^{-1} = G$ olsun. Dolayısıyla her $x, y \in G$ için $xy^{-1} \in P$ veya $xy^{-1} \in P^{-1}$ bir başka ifade ile $xy^{-1} \geq 1_G$ veya $xy^{-1} \leq 1_G$ dir. Dolayısıyla $x \geq y$ veya $x \leq y$ olmalıdır. O halde G , tam sıralıdır. Eğer G tam sıralı ise o zaman $\forall x \in G$ için $x \geq 1_G$ veya $x \leq 1_G$ olup bu sebeple $x \in P_G$ veya $x \in P_G^{-1}$ olup $P \cup P^{-1} = G$ dir.

Yukarıdan bir G sıralı grubunun P_G pozitif konisi bir alt yarıgruptur.

3.6. Konveks Altgruplar

Tanım 3.6.1: E bir sıralı küme ve A , E nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $a, b \in A$ ve $a \leq b$ iken $[a, b] \subseteq A$ oluyor ise A kümesine konvektir denir. Eğer E bir sıralı küme ve $x, y \in E$ için $x \leq y$ ise o zaman

$$[x, y] = x^{\uparrow} \cap y^{\downarrow} = \{z \in L \mid x \leq z \leq y\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.6.2: G bir sıralı grup olsun. Bir alt grup G nin sıralanışı altında konveks alt küme ise bu alt gruba G nin konveks alt grubu denir.

Teorem 3.6.3: Eğer H , G sıralı grubunun bir alt grubu ise o zaman $P_H = H \cap P_G$ dir.

Bununla birlikte aşağıdaki önermeler denktir.

1. H , konveksdir.
2. P_H , P_G nin bir iniş kümesidir.

İspat: $1_H = 1_G$ olduğundan $P_H = H \cap P_G$ olduğu açıktır.

(1) $\Rightarrow$ (2): H konveks olsun. $P_H = H \cap P_G$ olduğundan $P_H \subset P_G$ dir. $x \in P_H$ ve $y \in P_G$ için $y \leq x$ olsun. $y \in P_H$ olduğunu göstermeliyiz.

$1_H, x \in P_H \subseteq H$ ise $x \geq 1_H$ dir. $1_H \leq y \leq x$ ve H konveks olduğundan $y \in H \cap P_G = P_H$ olup P_H, P_G nin bir iniş kümesidir.

(2) $\Rightarrow$ (1): P_H, P_G nin bir iniş kümesi olsun. $x, z \in H$ için $x \leq y \leq z$ olsun. O zaman $1_H \leq x^{-1}y \leq x^{-1}z$ ($1_H, x^{-1}z \in P_H$) $x^{-1}y \in P_H \subseteq H$ olup $y \in H$ dir.

3.7. Latis Sıralı Gruplar

Teorem 3.7.1: Eğer $(G, \leq)$ sıralı grubu bir yarılatis ise o zaman

1. $(G, \leq)$ bir latisdir.
2. G deki her öteleme bir tam latis morfizmidir.

İspat: $(G, \leq)$ bir $\vee$ -yarılatis olsun. G deki her sağ öteleme $l_x : y \mapsto yx$ kalanlı olup Teorem 3.3.2 den l_x bir tam $\vee$ -morfizmidir. Bu yüzden $\forall a, b, x \in G$ için

$$(a \vee b)x = ax \vee bx \quad (*)$$

dir. Bununla birlikte benzer şekilde her sol öteleme aynı zamanda bir tam $\vee$ -morfizmidir ve $\forall a, b, x \in G$ için

$$x(a \vee b) = xa \vee xb \quad (**)$$

dir. Şimdi G üzerinde

$$a \wedge b = a(a \vee b)^{-1}b = b(a \vee b)^{-1}a \quad (***)$$

olarak $\wedge$ işlemi tanımlayalım. Bu işlemle G nin bir latis olduğunu gösterelim.

$a \leq a \vee b$ ise $(a \vee b)^{-1} \leq a^{-1}$ ve $a(a \vee b)^{-1}b \leq b$ dir. Aynı benzerlikle $b \leq a \vee b$ olup $(a \vee b)^{-1} \leq b^{-1}$ ve $a(a \vee b)^{-1}b \leq a$ olur. Dolayısıyla $a \wedge b = a(a \vee b)^{-1}b, \{a, b\}$ nin bir alt sınırı olur. Şimdi varsayalım $x \in G, \{a, b\}$ in herhangi bir alt sınırı olsun. $x \leq a$ ve $x \leq b$ olur. Bundan dolayı $a^{-1} \leq x^{-1}$ ve $b^{-1} \leq x^{-1}$ olup $a^{-1} \vee b^{-1} \leq x^{-1}$ olur. Dolayısıyla (*) ve (**) dan

$$b^{-1}(a \vee b)a^{-1} = (b^{-1}a \vee b^{-1}b)a^{-1} = b^{-1}aa^{-1} \vee b^{-1}ba^{-1} = b^{-1} \vee a^{-1} \leq x^{-1}$$

$$x \leq (b^{-1}(a \vee b)a^{-1})^{-1} = a(a \vee b)^{-1}b$$

olup $\inf\{a, b\}$ var ve $\inf\{a, b\} = a \wedge b = a(a \vee b)^{-1}b$ dir. Bu yüzden G bir latistir.

$$(\bigwedge_{a \in I} x_a)^{-1} = \bigvee_{a \in I} x_a^{-1}, \quad (\bigvee_{a \in I} x_a)^{-1} = \bigwedge_{a \in I} x_a^{-1} \quad (****)$$

Eşitliklerini gösterelim. Eğer $y = \bigwedge_{a \in I} x_a$ ise o zaman her $a \in I$ için $y \leq x_a$ dir ve

$$x_a^{-1} \leq y^{-1} \text{ olup } \bigvee_{a \in I} x_a^{-1} \leq y^{-1} = (\bigwedge_{a \in I} x_a)^{-1} \text{ dir. Fakat eğer } z = \bigvee_{a \in I} x_a^{-1} \text{ ise o zaman } \forall a \in I$$

$$\text{ için } z \geq x_a^{-1} \text{ ve } z^{-1} \leq x_a \text{ olup } z^{-1} \leq \bigwedge_{a \in I} x_a \text{ olur.}$$

$$(\bigwedge_{a \in I} x_a)^{-1} \leq z = \bigvee_{a \in I} x_a^{-1} \leq y^{-1} = (\bigwedge_{a \in I} x_a)^{-1} \text{ olup dolayısıyla } (\bigwedge_{a \in I} x_a)^{-1} = \bigvee_{a \in I} x_a^{-1} \text{ dir. İkinci}$$

eşitlik de benzer şekilde gösterilir. (****) den dolayı

$$y(\bigwedge_{a \in I} x_a) = y(\bigvee_{a \in I} x_a^{-1})^{-1} = [(\bigvee_{a \in I} x_a^{-1})y^{-1}]^{-1} = (\bigvee_{a \in I} x_a^{-1}y^{-1})^{-1} = \bigwedge_{a \in I} yx_a \text{ olur. Dolayısıyla her sol}$$

öteleme bir tam $\wedge$ -morfizmidir. Aynı benzerlikle her sağ ötelemenin bir tam

$\wedge$ -morfizmi olduğu gösterilebilir.

Tanım 3.7.2: $(G, \leq)$ bir latis ve $(G; \cdot, \leq)$ sıralı grup ise G ye **latis sıralı grup** denir.

Teorem 3.7.3: G bir latis sıralı grup ve $x, y \in G$ elemanları için $xy = yx$ olsun. Bu durumda

$$x^n \leq y^n \Rightarrow x \leq y$$

olur.

İspat: $x, y \in G$ elemanları değişmeli olduğundan $x, y^{-1} \in G$ elemanları da değişmelidir. Dolayısıyla $(xy^{-1})^n = x^n(y^{-1})^n \leq y^n(y^{-1})^n = 1_G$ olur. Şimdi $z = xy^{-1}$ ise z ve 1_G değişmeli olup $(z \vee 1_G)^n = z^n \vee z^{n-1} \vee \dots \vee z \vee 1_G$ olur. $z^n \leq 1_G$ olduğundan $(z \vee 1_G)^n = z^{n-1} \vee \dots \vee z \vee 1_G = (z \vee 1_G)^{n-1}$ olur.

Dolayısıyla $z \vee 1_G = 1_G$ olup $z = xy^{-1} \leq 1_G$ ve böylece $x \leq y$ sonucu bulunur.

3.8. Mutlak Değer ve Ortogonallik

Tanım 3.8.1: Eğer G latis sıralı grup ise o zaman her $x \in G$ için $x_+ = x \vee 1_G \in P_G$ elemanına x in **pozitif parçası** denir. Benzer şekilde $x_- = x \wedge 1_G \in N_G$ elemanına x in **negatif parçası** denir.

Teorem 3.8.2: Eğer G latis sıralı grup ise her $x, y \in G$ için

1. $(x_+)^{-1} = (x^{-1})_-$ ve $(x_-)^{-1} = (x^{-1})_+$
2. $x \vee y = (yx^{-1})_+ x$ ve $x \wedge y = x(x^{-1}y)_-$
3. $x = x_+ x_- = x_- x_+$
4. $x \leq y \Leftrightarrow x_+ \leq y_+$ ve $x_- \leq y_-$

İspat: (1) $(x_+)^{-1} = (x \vee 1_G)^{-1} = x^{-1} \wedge 1_G = (x^{-1})_-$

$$(x_-)^{-1} = (x \wedge 1_G)^{-1} = x^{-1} \vee 1_G = (x^{-1})_+$$

$$(2) \quad x \vee y = (yx^{-1} \vee 1_G)x = (yx^{-1})_+ x \quad \text{ve} \quad x \wedge y = x(x^{-1}y \wedge 1_G) = x(x^{-1}y)_-$$

$$(3) \quad xy \wedge yx \leq (x \vee y)(x \wedge y) \leq xy \vee yx \text{ dir.}$$

Teorem 3.7.1. den $(x \vee y)(x \wedge y) = x(x \wedge y) \vee y(x \wedge y) \leq xy \wedge yx$ olur.

Aynı benzerlikten $(x \vee y)(x \wedge y) = (x \vee y)x \wedge (x \vee y)y \geq yx \wedge xy$

$y=1_G$ alırsak $x = (x \vee 1_G)(x \wedge 1_G) = x_+ x_-$ olur. Aynı şekilde

$$(x \wedge y)(x \vee y) = x(x \vee y) \wedge y(x \vee y) \leq xy \vee yx \text{ ve}$$

$$(x \wedge y)(x \vee y) = (x \wedge y)x \vee (x \wedge y)y \geq yx \wedge xy \text{ olup } y=1_G \text{ alınırsa } x = x_- x_+ \text{ olur.}$$

(4) $\Rightarrow$: Eğer $x \leq y$ ise o zaman $x \vee 1_G \leq y \vee 1_G$ olup $x_+ \leq y_+$ olur. Aynı şekilde

$$x \wedge 1_G \leq y \wedge 1_G \text{ olup } x_- \leq y_- \text{ olur.}$$

$$\Leftarrow: x_+ \leq y_+ \text{ ve } x_- \leq y_- \text{ ise } x_+ \cdot x_- \leq y_+ \cdot y_- \text{ olup 3.özellikten } x \leq y \text{ olur.}$$

Tanım 3.8.3: G bir latıs sıralı grup olsun. $\forall x \in G$ için $|x| = x \vee x^{-1}$ değerine x in **mutlak değeri** denir.

Örnek 3.8.4: $(\mathbb{C}, +, \leq)$ latıs sıralı grubu doğal sıralama altında bir zincirdir. Dolayısıyla

$x \vee y = \max \{x, y\}$, $x \wedge y = \min \{x, y\}$, $x^{-1} = -x$ dir. Bu yüzden

$$|x| = x \vee (-x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

dir.

Teorem 3.8.5: Eğer G latıs sıralı grup ise o zaman $\forall x, y, z \in G$ için

- (1) $|x| = |x^{-1}|$
- (2) $|x| \in P_G$
- (3) $|x| = 1_G \Leftrightarrow x = 1_G$
- (4) $|x| \leq |y| \Leftrightarrow |y|^{-1} \leq x \leq |y|$
- (5) $|xy^{-1}| = (x \vee y)(x \wedge y)^{-1} = |yx^{-1}|$
- (6) $|xy| \leq |x| |y|$
- (7) $|x| = x_+ (x_-)^{-1}$
- (8) $|(x \vee z)(y \vee z)^{-1}| |(x \wedge z)(y \wedge z)^{-1}| = |xy^{-1}|$
- (9) $|x \vee y| \leq |x| \vee |y| \leq |x| |y|$.

İspat: (1) $|x^{-1}| = x^{-1} \vee x = x \vee x^{-1} = |x|$ dir.

(2) $1_G = (x \vee x^{-1})(x \vee x^{-1})^{-1} = (x \vee x^{-1})(x^{-1} \wedge x) \leq (x \vee x^{-1})(x \vee x^{-1}) = (x \vee x^{-1})^2 = |x|^2$ olup Teorem 3.7.3 den $1_G \leq |x|$ ve bu yüzden $|x| \in P_G$ dir.

(3) $\Rightarrow$: Eğer $1_G = |x| = x \vee x^{-1}$ ise o zaman $x \leq 1_G$ ve $x^{-1} \leq 1_G \Rightarrow 1_G \leq x$ olup $x = 1_G$ dir.

$\Leftarrow$: $x = 1_G$ olsun $x^{-1} = 1_G$ dir. Dolayısıyla $x \vee x^{-1} = |x| = 1_G$ olur.

- (4) $\Rightarrow: |x| \leq |y|$ olsun. $|x|^{-1} = x \wedge x^{-1} \leq x \leq x \vee x^{-1} = |x|$ ve aynı zamanda $|y|^{-1} \leq |x|^{-1}$ olup $|y|^{-1} \leq |x|^{-1} \leq x \leq |x| \leq |y|$ dir. Dolayısıyla $|y|^{-1} \leq x \leq |y|$ dir.
 $\Leftarrow$: Eğer $|y|^{-1} \leq x \leq |y|$ ise o zaman $|y|^{-1} \leq |x|^{-1} \leq |y|$ dir. $|x| = x \vee x^{-1} \leq |y|$ olup dolayısıyla $|x| \leq |y|$ dir.
- (5) $|xy^{-1}| = xy^{-1} \vee (xy^{-1})^{-1} = xy^{-1} \vee yx^{-1} = xy^{-1} \vee yx^{-1} \vee 1_G$
 (2.özellikten)
 $|xy^{-1}| = (xy^{-1} \vee 1_G)(yx^{-1} \vee 1_G) = (x \vee y)y^{-1}y(x^{-1} \vee y^{-1}) = (x \vee y)(x \wedge y)^{-1}$ dir.
 Dolayısıyla $|xy^{-1}| = ((xy^{-1})^{-1})^{-1} = |yx^{-1}|$ olur.
- (6) $|x| \geq 1_G$ olup $|x|^{-1} \leq 1_G$ ve $x \leq |x|$ dir. Dolayısıyla $|x|^{-1}|y|^{-1}|x|^{-1} \leq |x|^{-1}|y|^{-1} \leq xy \leq |x||y| \leq |x||y||x|$ ve 4.özellikten $|xy| \leq |x||y||x|$ dir.
- (7) $(x_+)(x_-)^{-1} = (x \vee 1_G)(x \wedge 1_G)^{-1} = (x \vee 1_G)(x^{-1} \vee 1_G) = 1_G \vee x \vee x^{-1} = 1_G \vee |x| = |x|$ olur.
- (8) $\forall x, y, z \in G$ için
 $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \wedge y) \vee [(x \wedge y) \wedge z]$
 $= (x \wedge y)(x \wedge y \wedge z)^{-1}[(x \vee y) \wedge z]$ (teorem 3.7.1
 (***) eşitliğinden)
 $= (x \wedge y)[(x \wedge y)^{-1} \vee z^{-1}]^{-1}[(x \vee y) \wedge z]$
 $= [1_G \vee (x \wedge y) z^{-1}][(x \vee y) \wedge z]$
 $= [(x \wedge y) \vee z] z^{-1} [(x \vee y) \wedge z]$
 $[(x \wedge y) \vee z] z^{-1} [(x \vee y) \wedge z] = [(x \vee y) \wedge z] z^{-1} [(x \wedge y) \vee z]$ olup
 (5.özellikten)
 $|(x \vee z)(y \vee z)^{-1}| |(x \wedge z)(y \wedge z)^{-1}| = (x \vee y \vee z)[(x \wedge y) \vee z]^{-1}[(x \vee y) \wedge z](x \wedge y \wedge z)^{-1}$
 $= (x \vee y)[(x \vee y) \wedge z]^{-1} z [(x \wedge y) \vee z]^{-1} [(x \vee y) \wedge z] z^{-1} [(x \wedge y) \vee z](x \wedge y)^{-1}$
 $= (x \vee y) 1_G (x \wedge y)^{-1} = |xy^{-1}|$ dir.
- (9) $|x \vee y| = (x \vee y) \vee (x \vee y)^{-1} = (x \vee y) \vee (x^{-1} \wedge y^{-1}) \leq x \vee y \vee x^{-1} = |x| \vee y \leq |x| \vee |y|$ dir. Bununla birlikte $|x| \leq |x||y|$ ve $|y| \leq |x||y|$ olup $|x| \vee |y| \leq |x||y|$ olur.

Tanım 3.8.6: G bir latis sıralı grup olsun. Eğer $|x| \wedge |y| = 1_G$ ise $x, y \in G$ elemanlarına ortogonal veya ayrık elemanlar denir.

Teorem 3.8.7: G bir sıralı grup olsun. Eğer $x, y, z \in P_G$ için x, y ortogonal ve x, z ortogonal ise o zaman x, yz de ortogonaldir.

İspat: $y, z \in P_G$ ise $y \geq 1_G$ ve $z \geq 1_G$ olup $yz \in P_G$ dir. $x \in P_G$ olduğundan $x \wedge yz \in P_G$ dir. Diğer yandan

$$1_G = (x \wedge y)(x \wedge z) = x^2 \wedge xz \wedge yx \wedge yz \geq x \wedge yz \text{ dir.}$$

$$1_G \geq x \wedge yz \text{ ve } x \wedge yz \geq 1_G \text{ olduğundan } x \wedge yz = 1_G \text{ dir.}$$

Sonuç 3.8.8: Eğer $x, y \in P_G$ ortogonal ise o zaman her $m, n \geq 1$ için x^m, y^n ortogonaldir.

İspat: $z=y$ alalım. Tümevarım kullanırsak x, y^n elemanlarının ortogonalliği elde edilir. Benzer düşünceyle x^m, y^n ortogonaldir.

Teorem 3.8.9: Eğer G bir latis sıralı grup ise o zaman $\forall x \in G$ ve $n \in \mathbb{C}^+$ için $(x_+)^n$ ve $(x_-)^{-n}$ ortogonaldir.

$$\begin{aligned} \text{İspat: } x_+ \wedge (x_-)^{-1} &= x_+ \wedge (x^{-1})_+ \\ &= (x \vee 1_G) \wedge (x^{-1} \vee 1_G) \\ &= (x \wedge x^{-1}) \vee 1_G \\ &= |x|^{-1} \vee 1_G = 1_G \end{aligned}$$

olup sonuç 3.8.8 den dolayı $(x_+)^n$ ve $(x_-)^{-n}$ ortogonaldir.

Teorem 3.8.10: Eğer G bir latis sıralı grup ve $x, y \in P_G$ ortogonal ise o zaman $(xy^{-1})_+ = x$ ve $(xy^{-1})_- = y^{-1}$ dir.

İspat: $(xy^{-1})_+ = (xy^{-1}) \vee 1_G = x(y^{-1} \vee x^{-1}) = x(y \wedge x)^{-1} = x1_G = x$ dir. Benzer şekilde $(xy^{-1})_- = xy^{-1} \wedge 1_G = (x \wedge y) y^{-1} = 1_G y^{-1} = y^{-1}$ dir.

Teorem 3.8.11: G bir latis sıralı grup ve $x_1, \dots, x_n \in P_G$ ikişer ikişer ayrık elemanlar ise $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = x_1 x_2 \dots x_n$ olur. Bunun bir sonucu olarak bu elemanlar değişmeli olur.

İspat: $x_1, x_2 \in P_G$ ortogonal elemanlar ise $x_1 \vee x_2 = x_1(x_1 \wedge x_2)^{-1} x_2 = x_1 x_2$ olur. Teorem 3.8.7 den ve tümevarımdan x_n ve $x_1 \dots x_{n-1}$ ortogonaldır.

Öte yandan $(x_1 \dots x_{n-1}) \vee x_n = x_1 \dots x_{n-1} 1_G x_n$ olur. Tümevarım hipotezinden $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_{n-1} = x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ idi dolayısıyla $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = x_1 x_2 \dots x_n$ sonucu elde edilir.

Tanım 3.8.12: G bir latis sıralı grup olsun. Eğer $x, y \in P_G$ ve $p \leq xy \Rightarrow p \leq x$ veya $p \leq y$ önermesini gerçekleyen $1_G \neq p \in P_G$ elemanına P_G nin bir atomu denir.

Teorem 3.8.13: G bir latis sıralı grup ve S, P_G nin atomlarının bir alt kümesi olsun. Bu durumda S tarafından doğurulan altgrup serbest abelyen gruptur.

İspat: Öncelikle ayrık atomlar ortogonal ve bu yüzden teorem 3.8.11 den değişmeli olduğundan S tarafından doğurulan alt grup abelyendir. Şimdi $p_1, \dots, p_n, P_G$ nin atomları ve $x = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \geq 1_G$ olsun. Dolayısıyla $a = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m} \geq b = p_{m+1}^{-k_{m+1}} \dots p_n^{-k_n}$ olur. Öte yandan p_1 ve b ortogonal olup teorem 3.8.7 den a ve b ortogonal ve dolayısıyla $b = 1_G$ ve sonuç olarak $x = a$ bulunur. Bu gözlemden eğer $x = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} = 1_G$ ise

$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ sonucu bulunur. Dolayısıyla S tarafından doğurulan alt grup serbest gruptur.

Teorem 3.8.14: G bir latis sıralı grup olsun aşağıdakiler birbirine denktir.

1. G değişmelidir.
2. P_G değişmelidir.
3. Her $x, y \in G$ için $|xy| \leq |x||y|$

İspat: (1) $\Rightarrow$ (3): $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \leq |y^{-1}||x^{-1}| = |y||x|$. Ayrıca (1) den dolayı

$$|y||x| = |x||y| \text{ ve sonuç olarak } |xy| = xy \vee (xy)^{-1} \leq |x||y| \text{ bulunur.}$$

(3) $\Rightarrow$ (2): $x, y \in P_G$ olsun. Dolayısıyla $xy \in P_G$ olur. Hipotezden dolayı

$$xy = |xy| = |(xy)^{-1}| = |y^{-1}x^{-1}| \leq |y^{-1}||x^{-1}| = |y||x| = yx \text{ ve benzer şekilde } yx \leq xy \text{ olduğu gösterilir.}$$

(2) $\Rightarrow$ (1): $x, y \in G$ alalım. $y_+, (x^{-1})_+$ ile değişmeli olduğundan

$$((x^{-1})_+)^{-1} = x_- \text{ ile de değişmelidir. Benzer şekilde } (x^{-1})_+ = (x_-)^{-1},$$

$$(y^{-1})_+ = (y_-)^{-1} \text{ ile değişmeli olduğundan } x_-, y_- \text{ ile değişmelidir.}$$

$$\text{Dolayısıyla } xy = x_+x_-y_+y_- = y_+y_-x_+x_- = yx \text{ elde edilir.}$$

3.9. Konveks 1-altgruplar

Bir latis sıralı grubun altgrubu bir altlatis olmayabilir. Örneğin $G = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ toplamsal abelyen latis sıralı grubun $H = \{(n, -n) \mid n \in \mathbb{C}\}$ alt kümesi bir altgrup fakat $(0, 0) \vee (1, -1) = (1, 0) \notin H$ olup bir altlatis değildir.

Tanım 3.9.1: G nin H altgrubu aynı zamanda G nin bir altlatisi ise o zaman H alt grubuna G latis sıralı grubunun bir **1-altgrubu** denir.

Teorem 3.9.2: Bir G latis sıralı grubunun bir H altgrubunun G nin bir $\mathbf{1}$ -altgrubu olması için gerek ve yeter koşul her $x \in H$ için $x \vee 1_G \in H$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: H, G nin $\mathbf{1}$ -altgrubu ise $x, 1_G \in H$ için $x \vee 1_G \in H$ dir.

$\Leftarrow$: $x, y \in H$ için $x \vee y = (xy^{-1} \vee 1_G)y \in H$ olduğundan $H, \vee$ -altlatisidir. Ayrıca $x \wedge y = x(x \vee y)^{-1}y \in H$ olduğundan $H, \wedge$ -altlatisidir. Dolayısıyla H , altlatis olup $\mathbf{1}$ -altgrubudur.

Teorem 3.9.3: G bir latis sıralı grup ve $A, 1_G$ yi içeren P_G nin konveks altyarıgrubu olsun. O zaman A tarafından doğurulan $\langle A \rangle$ altgrubu

$$\langle A \rangle = \{ xy^{-1} | x, y \in A \}$$

dir ve $\langle A \rangle, G$ nin bir konveks $\mathbf{1}$ -altgrubudur. Bununla birlikte G nin her konveks $\mathbf{1}$ -altgrubu bu şekildedir.

İspat: $A^* = \{ xy^{-1} | x, y \in A \}$ kümesini ele alalım. Açıkça görülüyor ki $A \subseteq A^* \subseteq \langle A \rangle$ dir. Eğer $x \in A^*$ ise o zaman $x^{-1} \in A^*$ dir.

$A^* = \langle A \rangle$ olduğunu göstermek için A^* ın altyarıgrup olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $xy^{-1}, gh^{-1} \in A^*$ ve $xy^{-1}gh^{-1}$ çarpımını düşünelim.

$a = (y \wedge g)^{-1}y$ ve $b = (y \wedge g)^{-1}g$ olsun. O zaman

$$a \wedge b = (y^{-1} \vee g^{-1})y \wedge (y^{-1} \vee g^{-1})g = (1_G \vee g^{-1}y) \wedge (y^{-1}g \vee 1_G) = 1_G \text{ dir ve Teorem}$$

3.8.11 den a ve b dolayısıyla a^{-1} ve b değişmelidir. Öte yandan $y \geq y \wedge g \geq 1_G$ olup $y \geq a = (y \wedge g)^{-1}y \geq 1_G$ olur. A konveks olduğundan $a \in A$ dir. Öte yandan

$$xy^{-1}gh^{-1} = xa^{-1}(y \wedge g)^{-1}(y \wedge g)bh^{-1} = xa^{-1}bh^{-1} = xba^{-1}h^{-1} \in A^* \text{ olur. } \langle A \rangle \text{ nin}$$

konveks olduğunu göstermek için $\langle A \rangle$ nin pozitif konisinin P_G nin bir iniş kümesi olduğunu göstermek yeterlidir. Varsayalım $1_G \leq g \leq xy^{-1} \in \langle A \rangle$ olsun. O zaman

$$y^{-1} \leq 1_G \text{ olduğundan } 1_G \leq g \leq x \in A \text{ olur. } A, 1_G \text{ yi içeren konveks alt yarıgrup}$$

oldüğünden $g \in A \subseteq \langle A \rangle$ dir. Bu yüzden $P_{\langle A \rangle}, P_G$ nin bir iniş kümesidir.

Ayrıca her $x, y \in A$ için $1_G \leq xy^{-1} \vee 1_G \leq x \vee 1_G = x \in A$ olup $xy^{-1} \vee 1_G \in A \subseteq \langle A \rangle$ ve Teorem 3.9.2. den $\langle A \rangle$, G nin bir $\mathbf{I}$ -altgrubudur.

G nin her H konveks $\mathbf{I}$ -altgrubunun bu formda olduğu $x = x_+[(x^{-1})_+]^{-1}$ eşitliğinden hemen görülür.

4. ARŞİMED SIRALI YAPILARI

4.1. Tam Sıralı Halkalar ve Cisimler

Bir D bölüm halkası $D \setminus \{0\}$ çarpımsal alt yarıgrubu bir grup olan bir tamlık bölgesidir. Bir değişmeli bölüm halkası bir cisimdir. Eğer F bir cisim ve $x \in F$ ise o zaman $n \in \mathbb{C}$ için nx tanımlarız.

Eğer $n > 0$ ise o zaman $nx = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ tane}}$

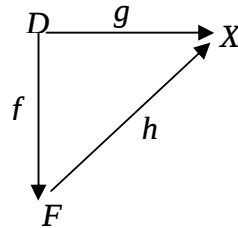
Eğer $n = 0$ ise o zaman $nx = 0$ dır.

Eğer $n < 0$ ise o zaman $nx = -|n|x$ dır.

X , F in alt kümesi olsun. X i içeren F in tüm alt cisimlerinin arakesiti X i içeren F in en küçük alt cismidir ve bu cisme X tarafından doğurulan alt cisim Örneğin $\{1_F\}$ tarafından doğurulan alt cisim

$$\left\{ \frac{m1_F}{n1_F} \mid m, n \in \mathbb{C}, n1_F \neq 0 \right\}$$

dir. Eğer D değişmeli tamlık bölgesi ise o zaman D nin kesir cismi $f: D \rightarrow F$ olacak şekilde bir halka monomorfizmi ile bir F cismi olarak adlandırılır öyle ki her X bölüm halkası için ve her $g: D \rightarrow X$ halka monomorfizmi için



diagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $h: F \rightarrow X$ halka monomorfizmi vardır.

Teorem 4.1.1: Eğer D değişmeli tamlık bölgesi ise o zaman izomorfizme bağlı olarak D nin bir tek (F, f) kesir cismi vardır. Bununla birlikte F , $\text{Im } f$ tarafından doğurulur.

Tanım 4.1.2: $(R, +, \cdot)$ bir halka ve $(R, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $(R, +, \leq)$ bir sıralı (değişmeli) grup ve R_+ pozitif konisi $(R, \cdot)$ grubunun bir alt yarı grubu ise R ye bir sıralı halka denir.

Teorem 4.1.3: Bir R sıralı halkasının boş olmayan P alt kümesinin R üzerinde bir uyumlu sıralama için pozitif koni olması için gerek ve yeter koşul

1. $P \cap (-P) = \{0\}$
2. $P + P \subseteq P$
3. $PP \subseteq P$

koşullarının sağlanmasıdır. Bununla birlikte bu sıralamanın bir tam sıralama olması için gerek ve yeter koşul bu 3 koşula ek olarak $P \cup (-P) = R$ olmasıdır.

İspat: Teorem 3.5.6. nın toplamsal gruplara uygulanmasıyla hemen görülür.

Teorem 4.1.4: $(R; \leq)$ bir sıralı halka olsun. O zaman $\forall x, y \in R$ için

- (1) $x \leq y \Rightarrow (\forall z \geq 0) \quad xz \leq yz \text{ ve } zx \leq zy$
- (2) $x \leq y \Rightarrow (\forall z \leq 0) \quad xz \geq yz \text{ ve } zx \geq zy$

Bununla birlikte eğer R tam sıralı ise

- (3) $\forall x \in R$ için $x^2 \geq 0$
- (4) $x \in R$ tersinir ve $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$

İspat: (1): Eğer $x \leq y$ ise o zaman $y - x \in R_+$ dir. $\forall z \in R_+$ için

$zy - zx = z(y - x) \in R_+ \quad R_+ \subseteq R_+ \text{ ve } zx \leq zy \text{ dir. Benzer şekilde } xz \leq yz$
eşitliği gösterilebilir.

(2): Eğer $x \leq y$ ise o zaman $y - x \in R_+$ dir. $z \leq 0$ ise $-z \in R_+$ dir.

$zx - zy = -z(y - x) \in R_+ \quad R_+ \subseteq R_+ \text{ olup } zx \geq zy \text{ dir.}$

(3): Eğer $x \geq 0$ ise o zaman $x^2 \in R_+ \quad R_+ \subseteq R_+ \text{ ve } x \leq 0$ ise

$$x^2 = (-x) \cdot (-x) \in R_+ \quad R_+ \subseteq R \text{ olup } \forall x \in R \text{ için } x^2 \geq 0 \text{ dir.}$$

(4): $x = x^2 x^{-1}$ yazalım. Eğer $x^{-1} \in R_+$ ise $x \in R_+$ olur. Benzer şekilde $x \in R_+$ ise $x^2 \geq 0$ olduğundan $x^{-1} \in R_+$ olur.

4.2. Arşimed Sıralı Cisimler

Tanım 4.2.1: G bir sıralı grup ve $x, y \in G$ olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \leq y$ ise x, y den sonsuz oranda küçüktür denir ve $x = y$ şeklinde gösterilir.

$1_G \leq x = y$ iken $x = 1_G$ oluyor ise G ye **arşimedyan** denir. $(R; +, \cdot, \leq)$ bir sıralı halka (cisim) olsun. Eğer $(R, +, \leq)$ sıralı grubu arşimedyan ise R ye arşimedyan denir. Açıkça görülüyor ki bir tam sıralı G grubunun arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul $x, y \in G_+, 1_G < x \leq y$ iken $x^n \leq y < x^{n+1}$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ olmasıdır.

Örnek 4.2.2: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi arşimedyanıdır. Eğer $0 < \frac{m}{n} < \frac{p}{q}$, $n, q > 0$ ise

$$(n^2 p + 1) \frac{m}{n} > n^2 p \frac{m}{n} = npm \geq np \geq \frac{np}{nq} = \frac{p}{q} > \frac{m}{n}$$

dir.

Eğer F bir tam sıralı cisim ve $x \in F$ ise o zaman $|x| = \max \{x, -x\}$ dir.

Teorem 4.2.3: Eğer F bir tam sıralı cisim ise o zaman $\forall x, y \in F$ için

- (1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dir.
- (2) $x \leq |x|$
- (3) $|x| = |-x|$
- (4) $|xy| = |x||y|$
- (5) $|x+y| \leq |x| + |y|$
- (6) $||x| - |y|| \leq |x - y|$
- (7) $|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y$
- (8) Eğer $x \neq 0$ ise $|x^{-1}| = |x|^{-1}$

Tanım 4.2.4: F , bir tam sıralı cisim olsun. $a: \mathbb{N} \rightarrow F$ olan dönüşüme F in elemanlarının bir dizisi denir.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|a(n)| \leq b$ olacak şekilde $b \in F$ varsa a dizisine **sınırlı dizi** denir.
2. $\forall \epsilon > 0$ için $|a(p) - a(q)| < \epsilon \quad \forall (p, q \geq a_\epsilon)$ olacak şekilde bir a_ϵ pozitif tamsayısı varsa a dizisine **Cauchy dizisi** denir.
3. $\forall \epsilon > 0$ için $|a(p)| < \epsilon, \quad \forall p \geq a_\epsilon$ olacak şekilde bir a_ϵ pozitif tamsayısı varsa a dizisine **sıfır dizisi** denir.

$B(F), C(F)$ ve $N(F)$ ile sırasıyla sınırlı, Cauchy ve sıfır dizilerinin kümesini göstereceğiz.

Teorem 4.2.5: $N(F) \subseteq C(F) \subseteq B(F)$ dir.

İspat: Eğer $a \in N(F)$ ise $\epsilon > 0$ ve $\forall p, q \geq a_{\frac{\epsilon}{2}}$ için

$$|a(p) - a(q)| < |a(p)| + |-a(q)| = |a(p)| + |a(q)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olup $a \in C(F)$ olur. Dolayısıyla $N(F) \subseteq C(F)$ dir.

Eğer $a \in C(F)$ ise o zaman $\epsilon = 1 > 0$ için $|a(p) - a(q)| < 1 \quad \forall p, q \geq a_1$.

Şimdi $b = 1 + \max \{|a(1)|, \dots, |a(a_1)|\}$ olsun. O zaman $|a(p)| \leq b \quad p \leq a_1$ ve $p > a_1$ için

$$|a(p)| = |a(p) - a(a_1) + a(a_1)| \leq |a(p) - a(a_1)| + |a(a_1)| < 1 + |a(a_1)| \leq b \text{ olup } a \in B(F)$$

dir. Dolayısıyla $C(F) \subseteq B(F)$ dir.

Örnek 4.2.6: $\forall n$ için $a(n) = 1$ dizisi $C(F)$ e ait fakat $N(F)$ e ait değildir.

$|a(n) - a(m)| = |1 - 1| = 0 < \epsilon$. $\epsilon = 1$ alalım. $|a(p)| < \epsilon = 1 \quad (p \geq a_\epsilon)$ olacak şekilde bir a_ϵ pozitif tamsayısı olmadığından bu dizi $N(F)$ e ait değildir.

Örnek 4.2.7: $\forall n$ için $a(n) = (-1)^n$ dizisi $B(F)$ e ait olup $C(F)$ e ait değildir.

$|(-1)^n - (-1)^m| \leq |(-1)^n| + |(-1)^m| < 1 + 1$ olup $e = 1$ alınırsa bu dizinin $C(F)$ e ait olmadığı kolayca görülür.

Tanım 4.2.8: S, F tam sıralı cisminin boştan farklı alt kümesi olsun. $a, b \in F$ ve $a < b$ olmak üzere $a < x < b$ olacak şekilde $x \in S$ varsa S ye yoğunur denir.

Teorem 4.2.9: F tam sıralı cismi arşimedyandır. $\Leftrightarrow F$ in asal alt cismi yoğunur.

İspat: $\Leftarrow$: F in asal alt cismi $\mathfrak{A}$ ya izomorfiktir. Dolayısıyla F in asal alt cismini $\mathfrak{A}$

ile özdeşleştirebiliriz. $0 < a < b$ olsun. Yoğunluktan $0 < \frac{m}{n} < \frac{a}{b}$ olacak şekilde

$m, n > 0$ tamsayıları vardır. $na = bn \frac{a}{b} > bn \frac{m}{n} = bm \geq b$ olup F arşimedyandır.

$\Rightarrow$: F arşimedyan olsun ve $a, b \in F$ için $a < b$ olsun. 3 durumda inceleme yapacağız.

(1) $a < 0 < b$, $0 \in \mathfrak{A}$

(2) $0 < a < b$ olsun. Bu durumda $b - a > 0$ ve $\frac{1}{b-a} > 0$. O halde $n1 > \frac{1}{b-a}$ ve

dolayısıyla $\frac{1}{n} < b - a$ olacak şekilde $n > 0$ vardır. F arşimedyan ve $\mathbb{Y}$ iyi sıralı

olduğundan $b \leq m \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$ olacak şekilde en küçük $m \in \mathbb{Y}$ seçebiliriz. O zaman

$b > \frac{m-1}{n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} > b - (b - a) = a$ ve $\frac{m-1}{n} \in \mathfrak{A}$ olduğundan istenilen sonuç

elde edilir.

(3) $a < b < 0$ olsun. Bu durumda $0 < -b < -a$ ve (2) den $-b < x < -a$ ve dolayısıyla $a < -x < b$ olacak şekilde $x \in \mathfrak{A}$ vardır.

Tanım 4.2.10: Eğer bir sıralı cismin boştan farklı her üstten sınırlı alt kümesi bir supremuma sahip ise o zaman bu sıralı cisme Dedekind tam denir.

Örnek 4.2.11: $\mathfrak{A}$ tam sıralı cismi Dedekind tam değildir.

$t = \sup \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ ve $t \in \mathbb{Q}$ olduğunu varsayalım. 2 hiçbir rasyonel sayının karesi olmadığından $(t+1)^2 > 2$ ve dolayısıyla $2t+1 > 2-t^2$ dir. $r = \frac{2-t^2}{2t+1}$ olsun. $0 < r < 1$ ve bu yüzden $r^2 < r$ dir. Sonuç olarak $2tr + r^2 < 2tr + r = 2 - t^2$. Dolayısıyla $(t+r)^2 < 2$ olur. Bu ise t nin supremum olmasıyla çelişir.

4.3. Arşimedyan Tam Sıralı Gruplar

Teorem 4.3.1: G , bir tam sıralı grup olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine eşittir.

1. G arşimedyandır.
2. $G, (R; +)$ nin bir altgrubuna izomorfik
3. G , konveks öz altgrubuna sahip değil

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2): İki durumda inceleyeceğiz. Varsayalım ki P_G , bir a atomuna sahip olsun. G bir tam sıralı grup olduğundan P_G de başka atom yoktur. Dolayısıyla teorem 3.8.13 den $G = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\} ; (\mathbb{Z}, +)$ olur. Şimdi varsayalım ki P_G , bir atoma sahip olmasın. O zaman $\forall (g, g > 1_G)$ için $1_G < h < g$ olacak şekilde $h \in P_G$ vardır. Öte yandan $h \leq gh^{-1}$ veya $gh^{-1} \leq h$ dir. Dolayısıyla $1_G < h^2 < g$ veya $1_G < (gh^{-1})^2 \leq g$ dir. Sonuç olarak $1_G < f^2 \leq g$ olacak şekilde bir $f \in P_G$ vardır. Bu gözlemi kullanarak

G nin değişmeli olduğunu gösterelim. $a, b \in P_G$ için $[a, b]$ komütatörünü düşünelim. Genelliği kaybetmeksizin $[a, b] \in P_G$ varsayabiliriz. $[a, b] \neq 1_G$ olsun. Burada $f \in P_G$ vardır öyle ki $f^2 \leq [a, b]$. Ayrıca Arşimedyan özelliğinden $f^m \leq a < f^{m+1}$ ve $f^n \leq b < f^{n+1}$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}$ vardır. Dolayısıyla

$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab < f^{-m}f^{-n}f^{m+1}f^{n+1} = f^2$ elde edilir. Bu ise $f^2 \leq [a, b]$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla her $a, b \in P_G$ için $[a, b] = 1_G$ dir. Bu yüzden P_G değişmeli olup teorem 3.8.14 den dolayı G de değişmelidir.

$\varphi: G \rightarrow \mathbb{I}$ bir $\mathbb{I}$ -morfizmi (grup ve latis morfizmi) inşa edelim. $b > 1_G$ sabit bir eleman alalım. Varsayalım $g \in G$, b ya rasyonel bağlı olsun. Bir başka ifade ile bir $m, n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $g^m = b^n$ olsun. Dikkat edilirse $x^m = b^n$ bir tek çözüme sahiptir.

Çünkü eğer $y \in G$ için $y^m = b^n$ ise o zaman $x^{|m|} = y^{|m|}$ dir. Dolayısıyla teorem

3.7.3 den dolayı $x=y$ dir. $x^m = b^n$ in tek çözümünü $b^{\frac{n}{m}}$ ile gösterelim.

$\varphi(g) = \frac{n}{m}$ olarak tanımlayalım. Varsayalım g, b ya rasyonel bağlı olmasın. O

zaman $\mathbb{A}$ rasyonel sayılar kümesini L ve R gibi iki sınıfa ayıralım. Şöyleki

$$\frac{m}{n} \in L \Leftrightarrow g^m < b^n, \frac{m}{n} \in R \Leftrightarrow g^m > b^n$$

Eğer $g < b$ ise o zaman $\frac{1}{1} \in L$ ve arşimedyan özelliğinden $g^k < b < g^{k+1}$

olacak şekilde bir k vardır. Dolayısıyla $R \neq \emptyset$ dir. Benzer argüman $b < g$

içinde yapılır. Dolayısıyla L ve R boş kümeler değildir. Eğer $\frac{p}{q} \in \mathbb{A}$ ve

$\frac{p}{q} < \frac{m}{n} \in L$ ise $|g|^{pn} < |g|^{qm} < b^{qn}$ olur. G değişmeli olduğundan teorem

3.8.14(3) ve teorem 4.2.3(7) den dolayı $g^p < b^q$ ve dolayısıyla $\frac{p}{q} \in L$ olur.

Bir başka ifade ile $L, \mathbb{A}$ nun bir iniş kümesidir. Benzer şekilde R nin de $\mathbb{A}$ nun bir çıkış kümesi olduğu gösterilir.

Bu yüzden (L, R) $\mathbb{A}$ nun bir Dedekind kesitidir ve bir irrasyonel sayı ile ilişkilidir. Bu durumda $\varphi(g)$ yi sözü edilen irrasyonel olarak tanımlarız. Eğer $g, h \in G$ ve b ya rasyonel bağımlı ise $g^m = b^n$ ve $h^p = b^q$ dur. O zaman g ve h değişmeli olduğundan $(gh)^{mp} = g^{mp} h^{mp} = b^{np} b^{mq} = b^{np+mq}$ dir. Dolayısıyla

$\varphi(gh) = \frac{np+mq}{mp} = \frac{n}{m} + \frac{q}{p} = \varphi(g) + \varphi(h)$ olur. Genel olarak varsayalım ki φ

$\varphi(g)=r$ ve $\varphi(h)=s$ olsun. r ve s den küçük (benzer şekilde büyük) iki rasyonel

sayının toplamı $\varphi(gh)$ reel sayısının Dedekind kesitinin alt sınıfına (benzer şekilde üst sınıfına) ait olduğundan $\varphi(gh) = \varphi(g) + \varphi(h)$ olur. Dolayısıyla φ bir grup morfizmidir. φ izoton aynı zamanda bir latis morfizmidir.

Eğer $\varphi(g)=0$ ise o zaman b nın sadece negatif kuvvetleri, g nin pozitif kuvvetlerinden küçüktür. Sonuç olarak her $n \in \mathbb{Z}$ için $g^n \leq b$ olup Arşimedyanlıktan $g = 1_G$ dir. Dolayısıyla φ bire-birdir.

(2) $\Rightarrow$ (3): $G, \mathfrak{i}$ in alt grubu ve H, G nin konveks özalt grubu olsun. O zaman eğer $0 < h \in H$ ve $0 < g \in G$ ise $nh \geq g$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}$ vardır. H in konveksliğinden $g \in H$ ve dolayısıyla $P_G \subseteq P_H$ olup $G \subseteq H$ sonucu elde edilir. Dolayısıyla $G=H$ olur.

(3) $\Rightarrow$ (1): $g, h \in G$ için $1_G \leq g = h$ olsun. O zaman $G(g) \subset G(h)$ olur. (3) den dolayı $G(g) = \{ 1_G \}$ ve dolayısıyla $g = 1_G$ olup G arşimedyanlıdır.

Sonuç 4.3.2: Her arşimedyan tam sıralı grup değişmelidir. Aslında her arşimedyan latis sıralı grup değişmelidir.

5. LATİS SIRALI GRUPLAR ÜZERİNDE BİR TOPOLOJİ

5.1. Latis Sıralı Toplamsal Gruplar

A toplamsal bir sıralı grup olsun. Eğer $\forall x, y \in A$ için $\sup(x, y)$ ve $\inf(x, y)$ varsa A ya **latis sıralı toplamsal grup** denir.

$$\inf(x, y) = -\sup(-x, -y) \text{ dır.}$$

Tanım 5.1.1: A latıs sıralı toplamsal grup olsun. $N: A \rightarrow A$ olmak üzere

$$N(x) = |x| = \sup(x, -x) = x \vee (-x)$$

biçimindeki fonksiyona mutlak değer fonksiyonu veya **N normu** denir.

Teorem 5.1.2: N bir A latıs sıralı toplamsal grubu üzerinde N norm olsun. O zaman

- (i) $N(x) = \sup(x, 0) - \inf(x, 0)$
- (ii) $N(x) = x \Leftrightarrow x \geq 0$ ve özel olarak $N(N(x)) = N(x)$
- (iii) $N(x) \geq 0$
- (iv) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (v) $N(mx) = |m| N(x)$, $x \in A$ ve $m \in \mathbb{C}$ için
- (vi) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Tanım 5.1.1.den aşağıdaki elde edilir.

$$N(x) \leq e \Leftrightarrow -e \leq x \leq e, \forall e \geq 0 \text{ için. Özel olarak } -N(x) \leq x \leq N(x)$$

5.2. C-Topoloji

Tanım 5.2.1: G bir toplamsal grup olsun. Eğer her $x \in G$ için $y + y + \dots + y = x$
 $n\text{-defa}$

olacak şekilde bir $y \in G$ varsa G grubuna n -bölünebilir grup denir. Böyle bir $y \in G$

varsa bu elemanın tek olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla bu $y \in G$ elemanını $\frac{x}{n}$ ile göstereceğiz. Her $n \in \mathbb{N}$ için n -bölünebilir gruplara kısaca bölünebilir gruplar denir.

Tanım 5.2.2: A , 2-bölünebilir latıs sıralı toplamsal grup olsun.

$\emptyset \neq C \subset A^+ = \{x \in A : x \geq 0\}$ ve

- i) $0 \notin C$
- ii) $(x \in C \text{ ve } y \geq x) \Rightarrow y \in C$
- iii) $x, y \in C \Rightarrow \inf(x, y) \in C$
- iv) $x \in C \Rightarrow \frac{x}{2} \in C$

ise $C \subseteq A^+ \setminus \{0\}$ kümesine kabul edilebilir elemanların bir kümesi, C nin elemanlarına da kabul edilebilir elemanlar denir.

Teorem 5.2.3: Varsayalım a , A nın bir pozitif elemanı olsun. $A_a = \{x \in A : x \geq a\}$ alalım. O zaman A_a tanım 5.2.2. deki i, ii ve iii sağlar. Şimdi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_{a,n} = \frac{1}{2^{n-1}} A_a$ olarak tanımlayalım. O zaman $A_{a,n+1} \supseteq A_{a,n}$ olduğu kolayca görülür. $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{a,n}$ olarak alınırsa C kabul edilebilir elemanların bir kümesidir. Bu küme a yı içeren minimal kabul edilebilir elemanların kümesidir.

İspat: i) $a > 0$, $0 \notin A_{a,1} = A_a = \{x : x \geq a\}$

$$A_{a,2} = \frac{1}{2} A_a = \left\{ \frac{x}{2} : x \in A_a \right\}$$

$0 \in A_{a,2}$ ise $0 = 0 + 0$ olup $0 \in A_a$ olur. Bu ise çelişki yaratır. Bu şekilde devam edilerek $0 \notin C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{a,n}$ bulunur.

ii) $y \notin C$ ve $y \geq x$ olsun. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $y \notin A_{a,n}$ dir. $x \in C$ olduğunu tümevarımla göstereceğiz. $n=1$ için $x \in A_{a,1}$ olduğunu gösterelim. $x \in A_{a,1} = A_a = \{x : x \geq a\}$ ise $y \geq x \geq a$ olduğundan $y \in A_{a,1}$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

$x \notin A_{a,2}$ olduğunu gösterelim.

$x \in A_{a,2}$ ise $x = \frac{z}{2}$, $z \in A_{a,1}$. Dolayısıyla $x+x = \frac{z}{2} + \frac{z}{2} = z \in A_{a,1}$ olur. Öte yandan

$y+y \geq x+x \geq a$ olup dolayısıyla $2y \in A_{a,1}$ ve sonuç olarak $y = \frac{2y}{2} \in A_{a,2}$ olur. Bu

ise bir çelişkidir.

$n \leq k$ için hipotez doğru olsun. Yani $x \notin A_{a,k}$ olsun. $x \notin A_{a,k+1}$ olduğunu

göstereceğiz. Varsayalım ki $x \in A_{a,k+1}$ olsun. Dolayısıyla $x = \frac{z}{2}$, $z \in A_{a,k}$

$x+x = z \in A_{a,k}$ $x+x \leq y+y$ ve

tümevarım hipotezinden $y = \frac{y+y}{2} \in A_{a,k+1}$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

iii) $x, y \in C$ ise $\inf\{x, y\} \in C$ olduğunu göstereceğiz.

$x, y \in C$ olsun. $x \in A_{a,n}$, $y \in A_{a,k}$

$x \in A_{a,n} = \frac{1}{2^{n-1}} A_a$, $x = \frac{1}{2^{n-1}} z$ olacak şekilde $z \in A_a$ vardır.

$y \in A_{a,k} = \frac{1}{2^{k-1}} A_a$, $y = \frac{1}{2^{k-1}} t$ olacak şekilde $t \in A_a$ vardır.

O halde $\inf\{x, y\} = \frac{\inf\{t, z\}}{2^{m-1}}$ $m = \max\{n, k\}$ $t, z \in A_a$ olup $\inf\{t, z\} \in A_a$

olduğu açıktır. Dolayısıyla $x \in A_{a,n}$ ve $y \in A_{a,k}$, $m = \max\{n, k\}$ ise

$\inf\{x, y\} \in A_{a,m}$ olur.

iv) $x \in C \Rightarrow x \in A_{a,n} \Rightarrow \frac{x}{2} \in A_{a,n+1} \Rightarrow \frac{x}{2} \in C$ dir.

Tanım 5.2.4: A , 2 bölünebilir latıs sıralı toplamsal grup ve C , A nın kabul edilebilir elemanlarının kümesi olsun. $x_0 \in A$ ve $r \in C$ olmak üzere

$$U_{x_0, r} = \{x \in A : r \cdot N(x - x_0) \in C\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık C -disk denir.

Teorem 5.2.5: A , 2 bölünebilir latis sıralı toplamsal grup olsun. O zaman açık C -diskleri A üzerinde bir topolojinin bir bazıdır. Bu topolojiye C topolojisi denir.

İspat: i) $x_0 \in U_{x_0,r}$ olduğundan $A = \bigcup_{x_0 \in A} U_{x_0,r}$ olur.

ii) $z_0 \in U_{x_0,r} \cap U_{y_0,R}$ olsun.

Dolayısıyla $c_1 = r - N(z_0 - x_0)$, $c_2 = R - N(z_0 - y_0) \in C$ olur. $e = \inf(c_1, c_2)$

olsun. $U_{z_0,e} \subseteq U_{x_0,r} \cap U_{y_0,R}$ olduğunu gösterelim.

$x \in U_{z_0,e}$ olsun. Dolayısıyla $c_3 = e - N(z_0 - x) \in C$ olur. O halde

$$\begin{aligned} r - N(x - x_0) &= r - N(x - z_0 + z_0 - x_0) \geq r - N(x_0 - z_0) + e - N(z_0 - x) - e \\ &= c_3 + c_1 - e > c_3 + e - e = c_3 \in C \text{ olup} \end{aligned}$$

dolayısıyla tanım 5.2.2 (ii) den

$r - N(x - x_0) \in C$ bir başka ifade ile $x \in U_{x_0,r}$ sonucu elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} R - N(x - y_0) &= R - N(x - z_0 + z_0 - y_0) \geq R - N(y_0 - z_0) + e - N(z_0 - x) - e \\ &= c_3 + c_2 - e > c_3 + e - e = c_3 \in C \end{aligned}$$

olup $x \in U_{y_0,R}$ elde edilir.

NOT: A , 2 bölünebilir olmasa bile teorem 5.2.5 geçerlidir. Bu durumda 5.2.2.nin iv. maddesine ihtiyaç yoktur. Ayrıca N normunun C topolojisi ile sürekli olduğu kolayca görülebilir.

Kolayca görülüyor ki eğer $V_{x_0,r} = \{x \in A: N(x - x_0) < r\}$ ve

$F_{x_0,r} = \{x \in A: N(x - x_0) \leq r\}$ ise o zaman $U_{x_0,r} \subseteq V_{x_0,r} \subseteq F_{x_0,r}$ dir.

Örnek 5.2.6: $A = \mathbb{R}^2$ ve $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow (a \leq c \wedge b \leq d)$ biçiminde tanımlanan sıralama olsun. O zaman A bölünebilir latis sıralı toplamsal gruptur.

$\sup((a, b), (c, d)) = (\sup(a, c), \sup(b, d))$, $A^+ = \{(a, b): a \geq 0 \wedge b \geq 0\}$ dir ve

$C = \{(a, b): a > 0 \wedge b > 0\}$ kümesi kabul edilebilir elemanların bir kümesidir.

$$U_{(x_0, y_0), r} = \{(x, y) \in \mathbb{I}^2 : -r < x - x_0 < r \text{ ve } -r < y - y_0 < r\};$$

$$F_{(x_0, y_0), r} = \{(x, y) \in \mathbb{I}^2 : -r \leq x - x_0 \leq r \text{ ve } -r \leq y - y_0 \leq r\};$$

$$V_{(x_0, y_0), r} = F_{(x_0, y_0), r} \setminus \{(x_0 + r, y_0 + r), (x_0 + r, y_0 - r), (x_0 - r, y_0 + r), (x_0 - r, y_0 - r)\}.$$

Bu yüzden A üzerindeki C topoloji $\mathbb{I}^2$ üzerindeki standart topolojiye denktir. Öte yandan $C = \{(x, y) \in \mathbb{I}^2 : (x \geq 0) \wedge (y > 0)\}$ kümesi de kabul edilebilir elemanların bir kümesidir. Fakat bu kümeye uygun C topolojisi $\mathbb{I}^2$ üzerinde standart topoloji değildir.

Teorem 5.2.7: A , 2 bölünebilir latıs sıralı toplamsal grup ve C kabul edilebilir elemanların bir kümesi olsun. O zaman

(i) C , C topolojisinde bir açık kümedir.

(ii) $A = C - C$

İspat: (i) $c \in C$ ve $N(x, c) \leq \frac{c}{2}$ ise $\sup(x - c, -x + c) < \frac{c}{2}$ olup $x - c < \frac{c}{2}$ ve $-x + c < \frac{c}{2}$ dir.

Dolayısıyla $\frac{c}{2} \leq x \leq \frac{3c}{2}$ olur. Bu sebeple $U_{c, \frac{c}{2}} \subseteq C$ dir.

(ii) Her $x \in A$ ve her $c \in C$ için teorem 5.1.2 (i) den

$$x = \sup(x, 0) - \sup(-x, 0) = (\sup(x, 0) + c) - (\sup(-x, 0) + c) \in C - C \text{ olur.}$$

5.3. C -Grupları

A , latıs sıralı toplamsal grup ve C kabul edilebilir elemanların bir kümesi olsun. Eğer her $x, y \in C$ için $ny > x$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa A ya C arşimedyen grup denir.

Tanım 5.3.1: Eğer A bir latıs sıralı, 2 bölünebilir, C arşimedyen grup ise A ya bir C grubu diyeceğiz.

Örnek 5.3.2: A örnek 5.2.6. deki gibi tanımlansın. Eğer biz $C=\{(x, y):x>0, y>0\}$ olarak alırsak o zaman A bir C grubudur. Eğer $C=\{(x, y):x\geq 0, y>0\}$ olarak alırsak o zaman A bir C grubu değildir.

Örnek 5.3.3: Tüm dyadic sayıların Q_2 grubu bir C grubudur.

Teorem 5.3.4: A bir C grubu olsun. Bu durumda her $x \in A$ ve her $c \in C$ için

$$\frac{x}{2^n} + c \in C \text{ olacak şekilde bir } n \in \mathbb{N} \text{ vardır.}$$

İspat: $c \in C, x \in A$ olsun. O zaman teorem 5.2.7.(ii) den $c_1, c_2 \in C$ vardır öyle ki

$$x = c_1 - c_2 \text{ dir. Bundan dolayı her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \frac{x}{2^n} = \frac{c_1}{2^n} - \frac{c_2}{2^n}. A, C \text{ arşimedyan grup}$$

olduğundan $c - \frac{c_2}{2^n} > 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla

$$\frac{x}{2^n} + c = \frac{c_1}{2^n} + (c - \frac{c_2}{2^n}) \in C \text{ dir.}$$

Tanım 5.3.5: Eğer her $e \in C$ için $n \geq n_0$ iken $e - N(x - x_n) \in C$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $x \in A$ elemanına x_n dizisinin limiti denir ve $\lim x_n = x$ ile gösterilir.

Teorem 5.3.6: (i) $F \subseteq A$ olsun. O zaman F nin kapanışı $clF = \{ \lim x_n : x_n \in F \}$ dir.

$$(ii) A^+ = clC$$

İspat: (i) $X = \{x: F \text{ de bir } x_n \text{ dizisi için } \lim x_n = x\}$ olsun. $x \in X$ varsayalım. O zaman x in her komşuluğu F i keser. Bu yüzden $X \subseteq clF$ olur. Varsayalım ki

$$x \in clF \text{ ve } e \in C \text{ ve } U_n, \text{ yarıçapı } \frac{e}{2^n} \text{ olan } x \text{ etrafındaki açık } C \text{ diski olsun.}$$

$$x \in clF \text{ olduğundan her } n \in \mathbb{N} \text{ için } U_n \cap F \neq \emptyset \text{ olur.}$$

$$x_n \in U_n \cap F \text{ seçelim.}$$

O zaman $x = \lim x_n$ dir. Bu yüzden $clF \subseteq X$ olur.

(ii) Varsayalım $x \in A^+$ olsun. Bir keyfi $c \in C$ seçelim. O zaman $\lim (x + \frac{c}{2^n}) = x$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x + \frac{c}{2^n} \in C$ dir. Dolayısıyla $x \in clC$ olup $A^+ \subseteq clC$ dir.

$x \in clC$ alalım. O zaman $x = \lim x_n$, $x_n \in C$ için. N normunun

sürekliliğinden ve teorem 5.1.2 (ii) den

$Nx = N(\lim x_n) = \lim (Nx_n) = \lim x_n = x$. Bu yüzden $x \geq 0$ olup $x \in A^+$ olur.

Dolayısıyla $A^+ = clC$ dir.

Teorem 5.3.7: $x \geq 0$ ve her $c \in C$ için $x < c$ ise o zaman $x = 0$ dir.

İspat: Varsayalım ki $x > 0$ olsun. $x = \lim x_n$ (her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in C$) olur. Dolayısıyla

yeteri kadar büyük bir $n \in \mathbb{N}$ ve keyfi $e \in C$ için $N(x - x_n) < e$ olur. Dolayısıyla

$-e < x - x_n$ olup $x_n < x + e$ olur. Bu yüzden yeterince büyük bir $n \in \mathbb{N}$

için $x_n < x + e < e + e = 2e$ yazılabilir. Dolayısıyla yeteri kadar büyük bir $K \in \mathbb{N}$ için

$e = \frac{x_K}{2} \in C$ alınırsa $x_K < \frac{x_K}{2} + \frac{x_K}{2} = x_K$ olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $x = 0$

olmalıdır.

Teorem 5.3.8: A bir Hausdorff uzaydır.

İspat: Varsayalım $x, y \in A$ ve $x \neq y$ olsun. Eğer $N(x - y) = e \in C$ ise o zaman x ve y nin

$\frac{e}{4}$ komşulukları $U_{x, \frac{e}{4}}$ ve $U_{y, \frac{e}{4}}$ için $U_{x, \frac{e}{4}} \cap U_{y, \frac{e}{4}} = \emptyset$ olduğunu gösterelim. Varsayalım

ki $z \in U_{x, \frac{e}{4}} \cap U_{y, \frac{e}{4}}$ olsun. $z \in U_{x, \frac{e}{4}}$ ise $\frac{e}{4} - N(x - z) \in C$ dir. $z \in U_{y, \frac{e}{4}}$ ise $\frac{e}{4} - N(y - z) \in C$

dir. $N(x - y) = N(x - z + z - y) = e$ alalım.

$e - N(x-z+z-y) > \frac{e}{4} - N(x-z) + \frac{e}{4} - N(y-z) > \frac{e}{4} - N(x-z) \in C$ olup $e - e = 0 \in C$ olur ki bu da çelişki yaratır.

Şimdi varsayalım ki $N(x-y) \in A^+ \setminus C$ olsun. Bir ötelemeden sonra $y=0$ varsayabiliriz. Dikkat edilirse 0 ile $N(x) \in A^+$ elemanlarının açık kümelerle ayrılabilir olduğunu göstermek yeterlidir. Dolayısıyla $x > 0$ varsayılabilir.

İddia: $\exists (U^{açık}, 0 \in U \text{ ve } x \notin U)$

Varsayalım ki iddia yanlış olsun. Dolayısıyla her $c \in C$ için $x < c$ olup teorem 5.3.7.den $x=0$ olup bir çelişki verir.

Şimdi $x \notin U_{0,2e}$ olsun. $V = U_{x+\frac{e}{2},e}$ alalım. $x \in V$ olduğu açıktır.

Şimdi $U_{0,e} \cap V = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $z \in U_{0,e} \cap V$ olsun.

$z \in U_{0,e}$ olduğundan $e - N(z) \in C$ ve dolayısıyla $e > N(z)$ olur. Benzer şekilde $z \in V$

ise $e - N(z - x - \frac{e}{2}) \in C \Rightarrow e > N(z - x - \frac{e}{2})$. Öte yandan

$x + \frac{e}{2} = N(x + \frac{e}{2}) \leq N(x + \frac{e}{2} - z) + N(z) < 2e$. Dolayısıyla $x < \frac{3e}{2}$ olur. Bu ise

$x \notin U_{0,2e}$ olması ile çelişir.

Teorem 5.3.9: Her C grubu topolojik gruptur.

İspat: $f : A \rightarrow A, f(a) = -a$ ve $g : A \times A \rightarrow A, g(a,b) = a + b$ olsun.

$\forall (V^{açık}, -a \in V) \exists (U^{açık} a \in U)$ vardır öyle ki $f(U) \subseteq V$ olduğunu göstermeliyiz. $V = U_{-a,e} = \{x \in A : e - N(x+a) \in C\}$ olsun. $U = U_{a,e}$ alalım. $x \in U$ ise

$e - N(x-a) \in C$ dir. $e - N(-x+a) = e - N(x-a) \in C$ olduğundan $f(x) = -x \in V$ olup

$f(U) \subseteq V$ dir. Dolayısıyla f süreklidir.

Şimdi $g : A \times A \rightarrow A, g(a,b) = a + b$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.

$W = U_{x_0+y_0, e}$ alalım. $U = U_{x_0, \frac{e}{2}} = \{x: \frac{e}{2} - N(x - x_0) \in C\}$.

$V = U_{y_0, \frac{e}{2}} = \{y: \frac{e}{2} - N(y - y_0) \in C\}$ alalım. $g(U \times V) \subset W$ $g(x, y) \in g(U \times V)$ olsun.

$(x, y) = z \in U \times V$ olur.

$e - N(x_0 + y_0 - (x+y)) \geq \frac{e}{2} - N(x - x_0) + \frac{e}{2} - N(y - y_0) > \frac{e}{2} - N(x - x_0) \in C$ olup

$g(x, y) = x+y \in W$ dur.

Dolayısıyla $g(U \times V) \subset W$ olduğundan g süreklidir. Bununla birlikte A Hausdorff uzay olduğundan bir topolojik gruptur.

KAYNAKLAR

BLYTH T. S. “Lattices and Ordered Algebraic Structures” Springer 1 edition (2005)

BOURBAKI, NICHOLAS “Elements of mathematics algebra” Hermann Paris
(1974)

BOURBAKI, NICHOLAS “ Elements of mathematics general topology”

Addison-Wesley Reading, Mass (1966)

GUSİC. I “A Topology On Lattice Ordered Groups”

Proc.Amer.Math.Soc.126 (1998), No.9,2593-2597

SİKORA, A. “Topology on the spaces of orderings of groups”

Bull.London Math.Soc.36 (2004)519-526

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Mersin’de doğdum. Öğrenimimi sırasıyla Tarsus Misak-i Milli ilkokulu, Kasım Ekenler Ortaokulu ve Tarsus Cengiz Topel Lisesi’nde tamamladım. 1996 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne kayıt oldum. 2000 yılında mezun oldum. İlk olarak Hasanbeyli İlköğretim okuluna atandım. Daha sonra Adana Karşıya Meslek Lisesi, Tunceli Atatürk Lisesi ve Ceyhan Lisesinde görev yaptım. 2005 yılında yüksek lisansa başladım. Şu anda Tarsus Cumhuriyet Lisesinde matematik öğretmenliği yapmaktayım.