



T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

LIE CEBİRLERİNİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİNİN
KAPABİLİTE ÖZELLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Eda ŞAHİN

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

ORTAK DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN

AKSARAY, 2017

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

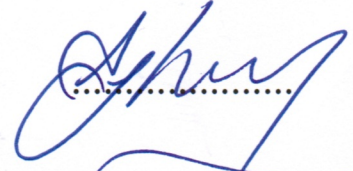
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 132309409 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, "Eda ŞAHİN", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "LİE CEBİRLERİNİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİNİN KAPABİLİTE ÖZELLİĞİ" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

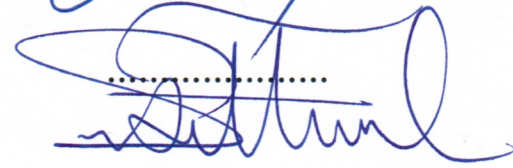
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN
Aksaray Üniversitesi



Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Ayhan ERCİYES
Aksaray Üniversitesi



Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Sedat TEMEL
Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi



Teslim Tarihi: 06 Mart 2017 _

Savunma Tarihi: 07 Nisan 2017

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanışımında alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Eda ŞAHİN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli zamanını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan saygıdeğer hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali AYTEKİN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Aksaray Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarına yüksek lisans eğitimim boyunca yardım ve teşviklerinden dolayı sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca manevi desteklerinden dolayı değerli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Ayhan ERCİYES'e ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi iletirim.

Ayrıca bana olan sevgi ve güvenleriyle beni matematiğe bir adım daha yaklaştıran, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen başta annem Serpil ALTINOLUK ve babam Mahmut ALTINOLUK olmak üzere bütün aileme sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
1. GİRİŞ	1
1.1 Temel Kavramlar	1
2. LIE CEBİRLERİ	10
2.1 Lie Cebirleri Hakkında Temel Kavramlar	10
3. LIE CEBİRLERİ ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER.....	14
3.1 Lie Çaprazlanmış Modüller.....	14
3.2 Çaprazlanmış İdealler.....	17
4. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİNİN HOMOLOJİSİ	22
4.1 Chevalley-Eilenberg Homolojisi.....	22
5. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİNİN KAPABİLİTE ÖZELLİĞİ	26
5.1 Actor Çaprazlanmış Modül	26
5.2 Kapabilite	28
6. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN ÖRTÜLERİ VE KAPABİLİTESİ	36
6.1 Örtü Çaprazlanmış Modülü.....	36
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	39
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ.....	43

LIE CEBİRLERİNİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİNİN KAPABİLİTESİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Eda ŞAHİN

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Nisan 2017

ÖZET

Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin kapabilitesi üzerine hazırlanan bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tezin yapısında kullanılan bazı temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde Lie cebirleri kavramına giriş yapıp bazı örneklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Lie cebirleri üzerinde çaprazlanmış modül yapısı oluşturulmuştur. Dördüncü bölümde ise Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin homolojisiinden bahsedilmiştir. Beşinci bölümde aktör çaprazlanmış modül ve iç aktör tanımları verilip bu tanımlar yardımıyla kapabil çaprazlanmış modül kavramı açıklanmıştır. Son bölümde ise çaprazlanmış modüllerin örtüleri ve kapabilitesi ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Lie cebiri, Çaprazlanmış modül, Kapabilite, Örtü
Sayfa Adedi : 42
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

CAPABILITY OF CROSSED MODULES OF LIE ALGEBRAS

(M.Sc. Thesis)

Eda ŞAHİN

AKSARAY UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

April 2017

ABSTRACT

This thesis, based on capability of crossed modules of Lie algebras, consists of six chapters. In the first chapter, basic concepts which used in the structure of the thesis was given. In the second chapter, introduction to the notion of Lie algebras and some examples were given. In the third chapter, we recall the structure of crossed modules over Lie algebras. In the fourth chapter, we mentioned about homology of crossed modules of Lie algebras. In the fifth chapter, we have given the notion of actor crossed module and inner actor, and using these definitions, explained the notion of capability of crossed modules. In the last chapter, we have given the definitions and theorems about capability and covers of crossed modules.

Keywords : Lie algebra, Crossed module, Capability, Cover
Number of pages : 42
Adviser : Asst. Prof. Dr. Tunçar ŞAHAN

1. GİRİŞ

Gruplardaki çaprazlanmış modüller relatif homotopi gruplarında Whitehead tarafından [1] de tanıtılmıştır. Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülleri Lavendhomme ve Rousin tarafından bir T-cebirinin abelyan olmayan kohomolojisinin uygun katsayısı olarak [2]'de kullanılmıştır. 1982'de Kassel ve Loday asosyatif cebirin döngüsel homolojisi [3]'de belirtmiş ve Lie cebirlerinin üçüncü Chevalley-Eilenberg kohomolojisinin bir yorumlamasını vermiştir. Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülleri, Lie cebirlerinin kategorisindeki modül ve ideal kavramlarının bir genelleştirmesi olan cebirsel objelerdir.

Son zamanlarda çaprazlanmış modüllerin teorik cebirsel yapısı çeşitli özelliklerle birçok yazar tarafından çalışılmaktadır. Örneğin Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin (ko)homolojisi [4]'de Casas ve Ladra tarafından tanıtılmıştır ve çaprazlanmış modüllerin mükemmeliği ve abelyan genişlemeleri üzerine bazı sonuçlar bu konulara bağlıdır.

Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin kategorisinin temel kavramlarını gözden geçirmekle başlayalım. Bu çalışmanın genel amacı Lie cebirlerindeki kapabilite kavramını Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerine genelleştirmek ve kapabilite için bazı yeterli kriterleri vermektir.

Örtü veya diğer bir deyişle Lie cebirleri için maksimal tanımlı ikili 1994'de grup teorideki kavramlara benzer olarak [5] de Moneyhun tarafından tanıtıldı. Örtülerin ve örtülerle ilişkili kavramların bazı temel özellikleri [6] ve [7] de gözden geçirilmiş ve genelleştirilmiştir. Bu makalelerde küçük boyutlardaki nilpotent Lie cebirleri, örtüleri yardımıyla karakterize edilmeye çalışılmıştır.

1.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde tezde verilen kavramların daha iyi anlaşılması için bilinen cebirsel yapılar verilecektir.

Tanım 1.1.1. $R \neq \emptyset$ bir küme ve R üzerinde "+" ve "." ikili işlemleri tanımlanmış olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir *halka* denir.

H1) $(R, +)$ bir değişmeli gruptur.

H2) Her $a, b, c \in R$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ dır.

H3) Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ dir.

Eğer her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ oluyorsa R ye *değişmeli halka* denir.

Eğer her $a \in R$ için $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa R ye *birimli halka* denir.

Örnek 1.1.1. $L = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ kümesinde toplama ve çarpma işlemleri şöyle tanımlansın:

$$(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f) \text{ ve } (a, b, c)(d, e, f) = (ad, bd + ce, cf)$$

Bu durumda $(L, +, \cdot)$ cebirsel yapısının bir halka olduğunu gösterelim.

i) $(L, +)$ değişmeli gruptur. Birim eleman $(0, 0, 0)$ dır, (a, b, c) nin tersi $-(a, b, c) = (-a, -b, -c)$ dir ve değişme özelliği vardır.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad (a, b, c)[(d, e, f)(g, h, i)] &= (a, b, c)[(dg, eg + fh, fi)] \\ &= (adg, bdg + ceg + cfh, cfi) \\ &= (ad, bd + ce, cf)(g, h, i) \\ &= [(a, b, c)(d, e, f)](g, h, i) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad (a, b, c)[(d, e, f) + (g, h, i)] &= (a, b, c)[(d + g, e + h, f + i)] \\ &= (ad + ag, bd + bg + ce + ch, cf + ci) \\ &= (a, b, c)(d, e, f) + (a, b, c)(g, h, i) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Sağdan dağılma özelliği de vardır. Dolayısıyla $(L, +, \cdot)$ bir halkadır.

iv) Birim elemanını bulalım:

$$\begin{aligned} (a, b, c)(x, y, z) &= (a, b, c) \Rightarrow (ax, bx + cy, cz) = (a, b, c) \\ &\Rightarrow ax = a, bx + cy = b, cz = c \\ &\Rightarrow x = 1, z = 1, y = 0 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $(1, 0, 1)(a, b, c) = (a, b, c)$ olup $(1, 0, 1)$ birim elemandır. Yani $(L, +, \cdot)$ birim elemanlı bir halkadır.

v) $(1,0,0)(0,1,0) = (0,0,0)$ fakat $(0,1,0)(1,0,0) = (0,1,0)$ olup çarpmanın değişme özelliği yoktur. $(L, +, \cdot)$ değişmeli halka değildir.

Tanım 1.1.2. R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olmak üzere $a \cdot b = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına *sol sıfır bölen* denir. Benzer şekilde $0 \neq a \in R$ olmak üzere $b \cdot a = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına *sağ sıfır bölen* denir. Eğer a elemanı hem sağ sıfır bölen hem de sol sıfır bölen ise a elemanına *sıfır bölen* denir.

Örnek 1.1.2. $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus, \odot)$ halkasının sıfır bölenlerini bulalım:

$$\bar{2} \odot \bar{6} = \bar{0}, \quad \bar{3} \odot \bar{4} = \bar{0}, \quad \bar{8} \odot \bar{9} = \bar{0}, \quad \bar{6} \odot \bar{10} = \bar{0}$$

olduğundan, sıfır bölenlerinin kümesi:

$$\{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$$

olur.

Tanım 1.1.3. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer S kümesi R halkasındaki işlemlerle birlikte bir halka oluyorsa S kümesine R halkasının bir *alt halkası* denir.

Tanım 1.1.4. Birimli, değişmeli ve sıfırdan farklı her elemanın çarpmaya (ikinci işleme) göre tersi varsa o zaman bu halkaya bir *cisim* denir.

Tanım 1.1.5. $(V, +)$ bir abelyan grup ve F bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlandığı takdirde V ye F üzerinde bir *vektör uzayı* denir.

$\cdot: F \times V \rightarrow V$ fonksiyonu her $a \in F$ ve her $v \in V$ için $\cdot(a, v) = a \cdot v$ olmak üzere

V1) Her $a_1, a_2 \in F$ ve $v \in V$ için $(a_1 + a_2) \cdot v = a_1 \cdot v + a_2 \cdot v$,

V2) Her $a \in F$ ve $v_1, v_2 \in V$ için $a \cdot (v_1 + v_2) = a \cdot v_1 + a \cdot v_2$,

V3) $1 \in F$ özdeş eleman ve $v \in V$ herhangi bir eleman olmak üzere $1 \cdot v = v$,

V4) Her $a, b \in F$ ve $v \in V$ için $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$ dir.

Burada V nin elemanlarına vektörler, F nin elemanlarına da skalerler denir.

Tanım 1.1.6. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi ve $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. $\mathbb{R}^2$ yi abelyan grup yapan $(+)$ işlemi her $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ şeklinde tarif edilmiştir. Yine skaler ile çarpma işlemi de her $x \in \mathbb{R}$ ve $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için $x \cdot (x_1, x_2) = (xx_1, xx_2)$ şeklinde tarif edilmiştir.

Bu işlemlerle birlikte $\mathbb{R}^2$ nin $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tanım 1.1.7. $(V, +)$ keyfi F cismi üzerinde bir vektör uzay ve S, V nin boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Eğer $(S, +)$, F üzerinde bir vektör uzayı ise bu takdirde S ye V nin bir *alt vektör uzayı* denir.

Tanım 1.1.8. R ve S iki halka olsun. Eğer $\varphi : R \rightarrow S$ fonksiyonu her $a, b \in R$ için

$$\text{i)} \quad \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$\text{ii)} \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

koşullarını sağlıyorsa φ ye bir *halka homomorfizmi* denir. Eğer φ birebir ise φ ye *monomorfizm* denir. Eğer φ örten ise φ ye *epimorfizm* denir. Eğer φ birebir ve örten ise φ ye *izomorfizm* denir.

Örnek 1.1.3. $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ bilinen matris toplamı ve çarpımı ile bir

halkadır. $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow H$, $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ bir halka homomorfizmasıdır ve φ

dönüşümü $\mathbb{C}$ ile H arasında bir izomorfizmdir. Gerçekten;

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ve $w = c + di \in \mathbb{C}$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \varphi(z + w) &= \varphi((a + c) + (b + d)i) \\ &= \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -b - d & a + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\ &= \varphi(z) + \varphi(w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(zw) &= \varphi((ac - bd) + (ad + bc)i) \\
&= \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\
&= \varphi(z)\varphi(w)
\end{aligned}$$

olup φ bir halka homomorfizmasıdır.

$$\varphi(z) = \varphi(w) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \Rightarrow a = c, b = d \Rightarrow a + bi = c + di \Rightarrow z = w$$

olduğundan φ nin birebir olduğu görülür. Şimdi verilen her bir $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in H$ matrisi için $X = a + bi \in \mathbb{C}$ seçilirse $\varphi(X) = Y$ olup φ nin örten olduğu görülür. Yani $\mathbb{C}$ ile H izomorfiktir.

Tanım 1.1.9. R bir halka olmak üzere eğer her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı varsa bu özelliği sağlayan en küçük tamsayıya halkanın *karakteristiği* denir ve $\text{kar}(R)$ şeklinde gösterilir. Eğer böyle bir pozitif n tamsayısı yoksa yani her $a \in R$ için $na = 0$ iken $n = 0$ oluyorsa o zaman halkanın karakteristiği sıfırdır denir.

Örnek 1.1.4. $\text{kar}(\mathbb{Q}) = \text{kar}(\mathbb{Z}) = 0$ dır. Ayrıca $\text{kar}(2\mathbb{Z}) = 0$ dır. Karakteristiği 1 olan tek halka aşıkark halka $R = \{0\}$ dır.

Tanım 1.1.10. R bir halka ve $(M, +)$ abelyan bir grup olsun. Eğer her $r \in R, m \in M$ için $f : R \times M \rightarrow M, (r, m) \rightarrow f(r, m) = r \cdot m$ olarak tanımlanan f fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa M ye R halkası üzerinde bir *sol R -modül* denir. Her $r, r_1, r_2 \in R$ için ve her $m, m_1, m_2 \in M$ için,

- i) $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2,$
- ii) $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m,$
- iii) $(r_1 \cdot r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m).$

Eğer R birimli bir halka ise f fonksiyonu her $m \in M$ için,

iv) $1 \cdot m = m$

koşulunu sağlıyorsa M ye bir *birimli sol R -modül* denir. Sağ R -modül de benzer şekilde tanımlanabilir.

Tanım 1.1.11. M bir R -modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise N alt kümesine M nin bir *alt modülü* denir.

- i) N, M nin bir alt grubudur.
- ii) Her $r \in R$ ve $n \in N$ için $r \cdot n \in N$ dir.

Tanım 1.1.12. M ve N , R halkası üzerinde iki sol R -modül olmak üzere $\varphi: M \rightarrow N$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa φ dönüşümüne M den N ye bir *sol R -modül homomorfizmi* denir.

- i) Her $m_1, m_2 \in M$ için $\varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$
- ii) Her $m \in M$ ve $r \in R$ için $\varphi(r \cdot m) = r \cdot \varphi(m)$

Tanım 1.1.13. A, B ve C üç abelyan grup olsun. $h: A \times B \rightarrow C$ fonksiyonu

- i) Her $a_1, a_2 \in A$ ve $b \in B$ için $h(a_1 + a_2, b) = h(a_1, b) + h(a_2, b)$
- ii) Her $a \in A$ ve $b_1, b_2 \in B$ için $h(a, b_1 + b_2) = h(a, b_1) + h(a, b_2)$

koşullarını sağlıyorsa h fonksiyonuna *bilineer fonksiyon* denir.

Tanım 1.1.14. R birimli ve değişmeli bir halka ve A bir R -modül olmak üzere A , $\cdot: A \times A \rightarrow A$ bilineer dönüşümüyle birlikte *A -cebiri* olarak adlandırılır. Buradaki bilineer dönüşüm çarpım olarak adlandırılır ve $x, y \in A$ için $\cdot(x, y)$ yerine xy notasyonu kullanılır.

$$\begin{aligned} A \times A &\rightarrow A \\ (x, y) &\mapsto \cdot(x, y) = xy \end{aligned}$$

bilineer dönüşümü

- M1)** $(x_1 + x_2)y = x_1y + x_2y$, $x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2$
- M2)** $r(xy) = (rx)y = x(ry)$, $r \in R$

şartlarını sağlar.

Tanım 1.1.15. A bir cebir olsun. Eğer " $\cdot$ " işlemine göre birim eleman varsa yani $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ olacak şekilde $1 \in A$ varsa A ya *birimli cebir* denir.

Tanım 1.1.16. A bir R – cebir olmak üzere her $x, y, z \in A$ için

$$x(yz) = (xy)z \quad (\text{Asosyatiflik kuralı})$$

sağlanıyor ise A ya *asosyatif cebir* denir.

A R -modülü $(A, +)$ abelyan grup yapısını ihtiva ettiği için ve $\cdot$ bilineer dönüşümünün **(M1)** şartından dağılma aksiyomunu sağladığından asosyatif cebir şu şekilde de tanımlanabilir:

A bir R – modül ve bir halka olsun. Her $r \in R$ ve $x, y \in A$ için

$$r(xy) = (rx)y = x(ry)$$

şartı sağlanıyorsa A ya *asosyatif R – cebir* denir.

Örnek 1.1.5. A bir R – modül olsun. $End(A)$, A dan A ya tüm modül homomorfizmlerinin kümesi olmak üzere

$$R \times End(A) \rightarrow End(A)$$

$$(r, f) \mapsto r \cdot f : A \rightarrow A$$

$$a \mapsto (r \cdot f)(a) = f(ra)$$

işlemiyle birlikte $End(A)$ bir asosyatif R – cebiridir.

Bir A – cebiri, R – modül olduğundan, bir $B \subseteq A$ alt modülü için $x, y \in B$ iken $xy \in B$ oluyorsa B bir *alt cebir* olarak adlandırılır. Aynı zamanda $x \in A$ ve $y \in B$ için $xy \in B$ ve $yx \in B$ ise B ye A nın *ideali* denir. Açıktır ki her ideal bir alt cebirdir. A ve B iki R – cebir olmak üzere

$$\varphi : A \rightarrow B$$

dönüşümü her $x, y \in A$ için

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

şartını sağlıyorsa φ ye bir *cebir homomorfizmi* denir. Eğer φ , birebir ve örtense *izomorfizm* olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.17. R bir cisim ve A bir R -cebiri olsun. Bu durumda

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

şartını sağlayan

$$D: A \rightarrow A$$

şeklinde tanımlı R -lineer fonksiyonlarına A 'nın bir R -derivasyonu denir. A 'nın tüm R -derivasyonları kümesi $Der(A)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.6. Her B halkası toplamsal abelyan gruptur. Buradan

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times B &\rightarrow B \\ (n, b) &\mapsto n \cdot b = \underbrace{b + \dots + b}_{n \text{ tane}} \end{aligned}$$

işlemiyle B bir $\mathbb{Z}$ -modüldür. Dolayısıyla her halka bir $\mathbb{Z}$ -cebidir.

Örnek 1.1.7. Her B halkası aynı zamanda B -modül olduğundan bir B -cebidir.

Örnek 1.1.8. k bir halka, S bir cisim ve $Der(S)$, S 'nin k -derivasyonları kümesi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} + : Der(S) \times Der(S) &\rightarrow Der(S) \\ (D_1, D_2) &\mapsto (D_1 + D_2)(s) = D_1(s) + D_2(s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \cdot : k \times Der(S) &\rightarrow Der(S) \\ (k, D) &\mapsto (k \cdot D)(s) = kD(s) \end{aligned}$$

işlemleriyle birlikte $Der(S)$ 'nin bir k -modül olduğunu gösterelim.

(i) $(Der(S), +)$ bir abelyan gruptur.

(ii) Her $s \in S$ için

$$\begin{aligned} (k \cdot (D_1 + D_2))(s) &= (D_1 + D_2)(ks) \\ &= D_1(ks) + D_2(ks) \\ &= k \cdot D_1(s) + k \cdot D_2(s) \\ &= (k \cdot D_1 + k \cdot D_2)(s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$k \cdot (D_1 + D_2) = k \cdot D_1 + k \cdot D_2$$

dır.

(iii) Her $s \in S$ için

$$\begin{aligned}((k_1 + k_2) \cdot D)(s) &= D((k_1 + k_2)s) \\&= D(k_1s + k_2s) \\&= D(k_1s) + D(k_2s) \quad (\because \text{Der}(S) \text{ k-lineer}) \\&= (k_1 \cdot D)(s) + (k_2 \cdot D)(s) \\&= (k_1 \cdot D + k_2 \cdot D)(s)\end{aligned}$$

olduğundan $(k_1 + k_2) \cdot D = k_1 \cdot D + k_2 \cdot D$ dır.

(iv) Her $s \in S$ için

$$\begin{aligned}((k_1k_2) \cdot D)(s) &= D((k_1k_2)s) \\&= D(k_1(k_2s)) \\&= k_1 \cdot D(k_2s) \\&= k_1 \cdot (k_2 \cdot D)(s)\end{aligned}$$

olduğundan $(k_1k_2) \cdot D = k_1 \cdot (k_2 \cdot D)$ dır.

Bu durumda $\text{Der}(S)$ bir k – modüldür.

2. LIE CEBİRLERİ

Bir cebirin asosyatif olmaması fikri, ilginç yapısal sonuçların elde edilmesine olanak sağlar. Çarpım üzerine bazı şartların eklenmesiyle bu sonuçlara ulaşılabilir. Bu şartların en önemlileri asosyatiflik kuralı ve Lie şartlarıdır.

2.1 Lie Cebirleri Hakkında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. A birimli ve değişmeli halka ve M de bir A – modül olsun. Eğer her $x, y, z \in M$ için

$$\mathbf{L1)} \quad [x, x] = 0,$$

$$\mathbf{L2)} \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

özelliklerini sağlayan bir $[\cdot, \cdot]: M \times M \rightarrow M$ iki lineer (bilineer) fonksiyonu varsa M ye A üzerinde bir *Lie cebiri* denir.

Burada $[\cdot, \cdot]$ fonksiyonuna Lie braketi ya da Lie çarpımı ve **L2)** deki özelliğe Jakobi özdeşliği denir. İki lineerlik özelliği ve **L2)** gereğince

$$0 = [x + y, x + y] = [x, y] + [y, x]$$

olduğundan

$$\mathbf{i)} \quad [x, y] = -[y, x],$$

$$\mathbf{ii)} \quad [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

olduğu kolayca görülebilir.[8]

Örnek 2.1.1. k bir halka, S bir cisim ve $Der(S)$, S nin k – derivasyonları kümesi olsun. Örnek 1.1.8. de $Der(S)$ in bir k – modül olduğunu göstermiştik. Buna ilave olarak k – derivasyonların bileşkesi işlemi ile

$$\mathbf{L1)} \quad [D, D] = DD - DD = 0$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& [D_1, [D_2, D_3]] + [D_2, [D_3, D_1]] + [D_3, [D_1, D_2]] \\
&= [D_1, D_2 D_3 - D_3 D_2] + [D_2, D_3 D_1 - D_1 D_3] + [D_3, D_1 D_2 - D_2 D_1] \\
&= D_1(D_2 D_3 - D_3 D_2) - (D_2 D_3 - D_3 D_2) D_1 + D_2(D_3 D_1 - D_1 D_3) \\
&\quad - (D_3 D_1 - D_1 D_3) D_2 + D_3(D_1 D_2 - D_2 D_1) - (D_1 D_2 - D_2 D_1) D_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu da gösterilebilir.

L2) Her $s \in S$ için

$$\begin{aligned}
k \cdot [D_1, D_2](s) &= [D_1, D_2](ks) \\
&= (D_1 D_2 - D_2 D_1)(ks) \\
&= D_1 D_2(ks) - D_2 D_1(ks) \\
&= D_1(D_2(ks)) - D_2(D_1(ks)) \\
&= D_1(k D_2(s)) - D_2(k D_1(s)) \quad (\because \text{Der}(S) \text{ } k\text{-linear}) \\
&= k D_1(D_2(s)) - D_2(k D_1(s)) \quad (\because \text{Der}(S) \text{ } k\text{-linear}) \\
&= ((k D_1) D_2)(s) - (D_2(k D_1))(s) \\
&= ((k D_1) D_2 - D_2(k D_1))(s) \\
&= [k \cdot D_1, D_2](s)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$k \cdot [D_1, D_2] = [k \cdot D_1, D_2]$$

dır. Benzer şekilde

$$k \cdot [D_1, D_2] = [D_1, k \cdot D_2]$$

olduğu da gösterilebilir.

O halde $[,]$ braketi k – bilineerdir.

Örnek 2.1.2. M, A üzerinde bir cebir olsun. $[,]: M \times M \rightarrow M$ fonksiyonu $[x, y] = xy - yx$ şeklinde tanımlansın. $[,]$ fonksiyonunun iki lineer olduğunun gösterilmesi zor değildir.

L1) $[x, x] = xx - xx = 0,$

L2)
$$\begin{aligned}
[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= [x, yz - zy] + [y, zx - xz] + [z, xy - yx] \\
&= x(yz - zy) - (yz - zy)x + y(zx - xz) \\
&\quad - (zx - xz)y + z(xy - yx) - (xy - yx)z \\
&= 0
\end{aligned}$$

dir. Böylece $M, [,]$ ile birlikte bir Lie cebiridir.

Örnek 2.1.3. L bir Lie R – cebir olsun. $x, y \in L$ olmak üzere

$$\begin{aligned} ad_L x : L &\rightarrow L \\ y &\mapsto ad_L x(y) = [x, y] \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm x tarafından belirlenen adjoint fonksiyon olarak adlandırılır. Açıkça $ad_L x \in End(L)$ dir. $ad_L x$ tarafından üretilen

$$\langle ad_L x \rangle = \{ad_L x : x \in L\}$$

kümesi $End(L)$ kümesinin bir alt cebiridir. $End(L)$ bir asosyatif cebir olduğundan $\langle ad_L x \rangle$ asosyatif cebiri elde edilir. O halde herhangi bir asosyatif cebirden Lie cebiri ve herhangi bir Lie cebirinden asosyatif cebir elde edilebilir.

Tanım 2.1.2. M bir Lie cebiri olsun. Eğer her $x, y \in M$ için $[x, y] = 0$ oluyorsa M ye *abelyan Lie cebiri* denir.

Tanım 2.1.3. M_1 ve M_2 , A üzerinde iki Lie cebiri ve $\partial : M_1 \rightarrow M_2$ bir A – modül homomorfizmi olsun. Her $x, y \in M_1$ için $\partial([x, y]) = [\partial(x), \partial(y)]$ ise ∂ ye bir *Lie cebir homomorfizmi* denir. Eğer ∂ Lie cebir homomorfizmi birebir ve örtense ∂ ye bir *Lie cebir izomorfizmi* denir. Bu durumda M_1 ve M_2 ye *izomorfiktirler* denir.[8]

Tanım 2.1.4. L bir Lie cebiri ve $M \triangleleft L$ olsun. L/M *bölüm cebiri* aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$L/M = \{x + M : x \in L\}$$

olmak üzere L/M içindeki toplama ve çarpma işlemini; $x + M, y + M \in L/M$ için

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M$$

$$[(x + M), (y + M)] = [x, y] + M$$

olarak tanımlayalım. L/M bu işlemlerle birlikte bir Lie cebiri olur. Bu cebire L nin M ile *bölüm cebiri* denir.[8]

Tanım 2.1.5. L bir Lie cebiri ve $K \subseteq L$ olsun. Her $x, y \in K$ için $[x, y] \in K$ ve K, L nin alt modülü ise K ya L nin bir *Lie altcebbiri* denir. K, L nin Lie alt cebiri ve her $x \in K, y \in L$ için $[x, y] \in K$ oluyorsa K ya L nin bir *ideali* denir.

L ve M iki Lie cebiri olmak üzere, bu çalışmada merkezleştirici, dengeleyici ve komütatör alt cebirler için uygun olan şu notasyon ve terminolojiyi kullanacağız.

$$C_L(M) = \{m \in M : {}^l m = 0 \ \forall l \in L \text{ için}\}$$

$$st_L(M) = \{l \in L : {}^l m = 0 \ \forall m \in M \text{ için}\}$$

$$[L, M] = \langle {}^l m : l \in L, m \in M \rangle$$



3. LIE CEBİRLERİ ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Bu çalışma boyunca, keyfi bir k cismi alınacak ve bütün Lie cebirleri ve tensör çarpımları bu k cismi üzerinde düşünülecektir.

3.1 Lie Çaprazlanmış Modüller

Tanım 3.1.1. M ve L iki Lie cebiri olsun. M üzerine L 'nin *Lie etkisi* aşağıdaki aksiyomları sağlayan

$$\begin{aligned} L \times M &\rightarrow M \\ (l, m) &\mapsto {}^l m \end{aligned}$$

k -bilineer dönüşümüdür [9].

Her $m, m_1, m_2 \in M$ ve $l, l_1, l_2 \in L$ için

$$\text{LE1)} \quad [{}^{l_1, l_2} m] = {}^{l_1} ({}^{l_2} m) - {}^{l_2} ({}^{l_1} m),$$

$$\text{LE2)} \quad {}^l [m_1, m_2] = [{}^l m_1, m_2] + [m_1, {}^l m_2].$$

Tanım 3.1.2. M ve L iki Lie cebiri olsun. $\delta : M \rightarrow L$ bir Lie k -cebir morfizmi ve

$$\begin{aligned} L \times M &\rightarrow M \\ (l, m) &\mapsto {}^l m \end{aligned}$$

L nin M üzerine Lie etkisi ile birlikte her $l \in L$, $m \in M$ ve $m, m' \in M$ için

$$\text{ÇM1)} \quad \delta({}^l m) = [l, \delta(m)],$$

$$\text{ÇM2)} \quad \delta^{(m)}(m') = [m, m'] \text{ (Peiffer özdeşliği)}$$

şartları sağlanıyor ise (M, L, δ) üçlüsüne *Lie çaprazlanmış modül* denir. Sadece

ÇM1) aksiyomunu sağlayan (M, L, δ) üçlüsüne *Lie ön çaprazlanmış modül*ü denir.

Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülleri, Lie cebirleri üzerindeki modül ve ideal kavramlarının bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

Örnek 3.1.1. R bir Lie cebiri ve I , R nin bir ideali olsun

$$\begin{aligned}\partial : I &\rightarrow R \\ i &\mapsto i\end{aligned}$$

içine dönüşümünü ele alalım. R nin I üzerine etkisi

$$\begin{aligned}R \times I &\rightarrow I \\ (r, i) &\mapsto {}^r i = [r, i]\end{aligned}$$

şeklinde Lie çarpım işlemi olarak verilsin.

$$\begin{aligned}\text{ÇM1)} \quad \partial(r, i) &= \partial[r, i] \\ &= [r, i] \\ &= [r, \partial i]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ÇM2)} \quad \partial(r) {}^{r'} &= {}^r r' \\ &= [r, r']\end{aligned}$$

olduğundan dolayı (I, R, ∂) bir Lie çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 3.1.2. M bir Lie G – cebir olmak üzere

$$\pi_2 : M \rtimes G \rightarrow G$$

ikinci izdüşüm fonksiyonu bir Lie G – cebir morfizmidir. G nin $G \rtimes M$ üzerine Lie etkisi $g' \in G$ ve $(g', m) \in G \rtimes M$ için

$$g'(m, g) = (g'm, [g', g])$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(G \rtimes M, G, \pi_2)$ bir ön çaprazlanmış modüldür.

Çünkü

$$\begin{aligned}\pi_2 : M \times G &\rightarrow G \\ (m, g) &\mapsto g\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}G \times (M \times G) &\rightarrow M \\ (g', (m, g)) &\mapsto g' \cdot (m, g) = (g' \cdot m, [g', g])\end{aligned}$$

Lie etkisi olmak üzere

$$\begin{aligned}\text{ÇM1)} \quad \pi_2(g' \cdot (m, g)) &= \pi_2(g' \cdot m, [g', g]) \\ &= [g', g] \\ &= [g', \pi_2((m, g))]\end{aligned}$$

ÇM2) $\pi_2((m', g')) \cdot (m, g) = [(m', g'), (m, g)]$ eşitliğinin olup olmadığına bakalım.

$$\begin{aligned}\pi_2((m', g')) \cdot (m, g) &= g' \cdot (m, g) \\ &= (g' \cdot m, [g', g]) \quad \dots(I)\end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$[(m', g'), (m, g)] = ([m', m], [g', g]) \quad \dots(II)$$

olduğundan (I)=(II) olması için

$$(g' \cdot m, [g', g]) = ([m', m], [g', g]) \Rightarrow g' \cdot m = [m, m']$$

olması gerekir. Fakat bu mümkün değildir.

Sonuç olarak sadece **ÇM1)** şartı sağlandığından $(G \propto M, M, \pi_2)$ üçlüsü bir ön çaprazlanmış modüldür.

Tanım 3.1.3. (M_1, L_1, δ_1) ve (M_2, L_2, δ_2) iki Lie çaprazlanmış modül olsun.

$$\delta_1(l, m) = \delta_2(l) \cdot \delta_1(m)$$

ve

$$\alpha_2 \delta_1(m) = \delta_2 \alpha_1(m)$$

olacak şekilde $\alpha_1 : M_1 \rightarrow M_2$, $\alpha_2 : L_1 \rightarrow L_2$ Lie k -cebir morfizmleri varsa

$$(\alpha_1, \alpha_2) : (M_1, L_1, \delta_1) \rightarrow (M_2, L_2, \delta_2)$$

morfizmine *çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm* denir. Böylece çaprazlanmış modüllerin kategorisi oluşturulur ve bu kategori LieXMod ile gösterilir.

Örnek 3.1.3. $(f, I) : (M_1, L_1, \delta) \rightarrow (M_2, L_1, \delta)$ bir çaprazlanmış modül morfizmi ise (M_1, M_2, f) bir çaprazlanmış modüldür. Burada M_2 nin M_1 e etkisi δ' tarafından elde edilir. Yani $m_1 \in M_1$ ve $m_2 \in M_2$ için

$$m_2 m_1 = \delta'(m_2) m_1$$

dir.

$(Id_{M_1}, Id_{L_1}) : (M_1, L_1, \delta) \rightarrow (M_1, L_1, \delta)$ birim homomorfizmi kısaca (I, I) ile gösterilir.

3.2 Çaprazlanmış İdealler

Tanım 3.2.1. (M, L, δ) bir çaprazlanmış modül olsun. N, M nin ve K, L nin bir alt Lie cebiri olmak üzere

$$\delta' : \delta|_N : N \rightarrow K$$

δ nın N ye kısıtlanmış ve K nin N ye etkisi L nin M ye etkisinin kısıtlanması olmak üzere (N, K, δ') çaprazlanmış modülüne (M, L, δ) çaprazlanmış modülünün *alt çaprazlanmış modülü* denir ve $(N, K, \delta') \leq (M, L, \delta)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.2. (M, L, δ) çaprazlanmış modülünün (N, K, δ') alt çaprazlanmış modülü olmak üzere

- i) K, L cebirinin bir idealidir, yani $K \trianglelefteq L$
- ii) Her $l \in L$ ve $k \in K$ için $l \cdot k \in N$
- iii) Her $k \in K$ ve $m \in M$ için $k \cdot m \in N$

şartları sağlanıyorsa (N, K, δ') alt çaprazlanmış modülüne (M, L, δ) bir *çaprazlanmış modül ideali* denir ve $(N, K, \delta') \trianglelefteq (M, L, \delta)$ şeklinde gösterilir. Eğer $(N, K, \delta') \trianglelefteq (M, L, \delta)$ ise her $m \in M$ ve $m' \in M$ için

$$[m, m'] = \delta(m) \cdot m' \in N$$

olduğundan N, M nin bir idealidir.

Tanım 3.2.3. $(N, K, \delta'), (M, L, \delta)$ nın bir ideali olsun. Bu durumda $L, M/N$ üzerine etki eder. K nın M/N üzerine etkisi ise

$$\begin{aligned} K \times M/N &\rightarrow M/N \\ (g', (m + N)) &\mapsto g' \cdot (m + N) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$g' \cdot (m + N) = g' \cdot m + N$$

ve $g'm \in N$ olduğundan sıfırdır. Dolayısıyla L/K bölüm Lie cebiri M/N üzerine

$$\begin{aligned} L/K \times M/N &\rightarrow M/N \\ ((l + K), (m + N)) &\mapsto l \cdot m + N \end{aligned}$$

şeklinde etki eder ve bu etki bir Lie etkisidir.

$$\begin{aligned}\bar{\delta}: M/N &\rightarrow L/K \\ (m+N) &\mapsto \delta(m) + K\end{aligned}$$

bölüm dönüşümü bir Lie cebir homomorfizmidir. Böylece bu dönüşüm ve etki fonksiyonuna göre

$$(M/N, L/K, \bar{\delta}) = \frac{(M, L, \delta)}{(N, K, \delta')}$$

Lie çaprazlanmış modül yapısı oluşturur ve buna *bölüm çaprazlanmış modül* denir.[10]

Tanım 3.2.4. $(\alpha_1, \alpha_2): (M_1, L_1, \delta_1) \rightarrow (M_2, L_2, \delta_2)$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$\delta_1: \ker \alpha_1 \rightarrow \ker \alpha_2$$

çaprazlanmış modülüne (α_1, α_2) morfizminin *çekirdeği* denir ve $\ker(\alpha_1, \alpha_2)$ ile gösterilir.[10]

Tanım 3.2.5. $(\alpha_1, \alpha_2): (M_1, L_1, \delta_1) \rightarrow (M_2, L_2, \delta_2)$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$\delta_2: \text{Im } \alpha_1 \rightarrow \text{Im } \alpha_2$$

çaprazlanmış modülüne (α_1, α_2) morfizminin *görüntüsü* denir ve $\text{Im}(\alpha_1, \alpha_2)$ ile gösterilir.[10]

Tanım 3.2.6. (N_1, K_1, δ_1) ve (N_2, K_2, δ_2) , (M, L, δ) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülleri olsunlar. Bu durumda

$$\delta|_{N_1 \cap N_2}: N_1 \cap N_2 \rightarrow K_1 \cap K_2$$

şeklinde indirgenen alt çaprazlanmış modülüne (N_1, K_1, δ_1) ile (N_2, K_2, δ_2) nin *arakesiti* denir ve $(N_1, K_1, \delta_1) \cap (N_2, K_2, \delta_2)$ şeklinde gösterilir. [6]'de yer alan Casas ve Ladra'nın temel tanımlarını hatırlayalım.

Tanım 3.2.7. (M, L, δ) bir çaprazlanmış modül olsun. (M, L, δ) çaprazlanmış modülünün *merkezi* $(\eta, \gamma): (M, L, \delta) \rightarrow A(M, L, \delta)$ homomorfizminin çekirdeği olarak tanımlanır ve $Z(M, L, \delta)$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned}
Ker\eta &= \{m \in M : \eta_m(l), l \in L\} \\
&= \{m \in M : l \cdot m = 0, l \in L\} \\
&= M^L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ker\gamma &= \{l \in L : \gamma(l) = 0\} \\
&= \{l \in L : \alpha_l(m) = 0, m \in M \text{ ve } \phi_l(l') = 0, l' \in L\} \\
&= \{l \in L : l \cdot m = 0, m \in M\} \cap \{l \in L : [l, l'] = 0, l' \in L\} \\
&= st_L(M) \cap Z(L)
\end{aligned}$$

alınarak;

$$Z(M, L, \delta) = Ker(\eta, \gamma) = (M^L, st_L(M) \cap Z(L), \delta)$$

bulunur. Aynı zamanda $Z(M, L, \delta)$, (M, L, δ) çaprazlanmış modülünün bir idealidir.[8]

Tanım 3.2.8. (M, L, δ) çaprazlanmış modül olsun. Eğer $Z(M, L, \delta) = (M, L, \delta)$ ise (M, L, δ) ye *abelyan çaprazlanmış modül* denir.

Teorem 3.2.1. Eğer (M, L, δ) bir abelyan çaprazlanmış modül ise M ve L abelyan Lie cebiridir.

Tanım 3.2.9. Çaprazlanmış modüllerin ve morfizmlerin bir dizisi

$$0 \rightarrow (M_1, L_1, \delta_1) \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} (M_2, L_2, \delta_2) \xrightarrow{(\beta_1, \beta_2)} (M_3, L_3, \delta_3) \rightarrow 0$$

olsun. Eğer α_1, α_2 birebir, β_1, β_2 örten ve $\text{Im}(\alpha_1, \alpha_2) = \ker(\beta_1, \beta_2)$ ise bu dizi *kısa tam dizi* olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.10. Eğer $\text{Im}(\alpha_1, \alpha_2)$, $Z(M_2, L_2, \delta_2)$ 'nin bir çaprazlanmış alt modülü ise o halde bu dizi bir *merkezsiz genişleme* olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.11. (N_1, K_1, δ) ve (N_2, K_2, δ) , (M, L, δ) çaprazlanmış modülünün iki ideali olsun. Bu durumda (N_1, K_1, δ) ve (N_2, K_2, δ) 'nin *komütatör alt çaprazlanmış modülü*

$$[(N_1, K_1, \delta), (N_2, K_2, \delta)] = ([K_2, N_1] + [K_1, N_2], [K_1, K_2], \delta)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada dikkat edelim ki (N, K, δ) alt modülünün (M, L, δ) 'nin merkezini içermesi için gerek ve yeter şart $[(N, K, \delta), (M, L, \delta)] = 0$ olmasıdır.

(M, L, δ) nın komütatör çaprazlanmış alt modülü $(M, L, \delta)' = [(M, L, \delta), (M, L, \delta)]$ olarak tanımlanır. (M, L, δ) çaprazlanmış modülünün komütatör çaprazlanmış alt modülü (M, L, δ) nın bir idealidir ve

$$Ab(M, L, \delta) = (M, L, \delta) / (M, L, \delta)'$$

(M, L, δ) nın *abelyanlaştırması* olarak tanımlanabilir.

Tanım 3.2.12. (M, L, δ) bir çaprazlanmış modül olsun. Eğer (M, L, δ) çaprazlanmış modülü kendi komütatörüne eşitse bu çaprazlanmış modüle *mükemmel çaprazlanmış modül* denir.[9]

Lie cebirlerinin içeriğine benzer olarak mükemmel Lie cebirler ve evrensel merkezsel genişlemelerle ilişkileri ve ikinci homoloji cebiri [11,12]'de çalışılmıştır.

Tanım 3.2.13. (M_1, L_1, δ_1) ve (M_2, L_2, δ_2) Lie cebirlerinin iki abelyan çaprazlanmış modülünün tensör çarpımı

$$(M_1, L_1, \delta_1) \otimes (M_2, L_2, \delta_2) = (Co\ ker\ \alpha, L_1 \otimes L_2, \mu)$$

yine bir abelyan çaprazlanmış modüldür.

Burada

$$\alpha = (\delta_1 \otimes Id, -Id \otimes \delta_2) : M_1 \otimes M_2 \rightarrow (L_1 \otimes M_2) \oplus (M_1 \otimes L_2)$$

ve $\mu : Co\ ker\ \alpha \rightarrow L_1 \otimes L_2$ dönüşümü her $l_i \in L_i$ ve $m_i \in M_i$ için

$$\mu((l_1 \otimes m_2) + (m_1 \otimes l_2)) = (l_1 \otimes \delta_2(m_2)) + (\delta_1(m_1) \otimes l_2)$$

olarak verilmiştir.

Örnek 3.2.1.

- i) (M, L, δ) Lie cebirlerinin herhangi bir abelyan çaprazlanmış modülü için $(0, \kappa, 0) \otimes (M, L, \delta) \cong (M, L, \delta)$ doğal izomorfizmin varlığını gösterilebilir.
- ii) Herhangi keyfi L_1, L_2 abelyan Lie cebirleri için şu izomorfizmler vardır:

$$(0, L_1, 0) \otimes (0, L_2, 0) \cong (0, L_1 \otimes L_2, 0),$$

$$(L_1, L_1, Id) \otimes (L_2, L_2, Id) \cong (L_1 \otimes L_2, L_1 \otimes L_2, Id)$$

- iii) (M, L, δ) abelyan çaprazlanmış modül, δ örten ve $(N, 0, 0)$ abelyan çaprazlanmış modül olsun. O halde $(M, L, \delta) \otimes (N, 0, 0) \cong (0, 0, 0)$ dir.
- iv) (M, L, δ) Lie cebirlerinin bir asferikal ($\ker \delta = 0$) abelyan çaprazlanmış modülü olsun. O halde herhangi bir $(N, 0, 0)$ abelyan çaprazlanmış modülü için $(M, L, \delta) \otimes (N, 0, 0) \cong (L / M \otimes N, 0, 0)$ olur.

(M_1, L_1, δ_1) ve (M_2, L_2, δ_2) Lie cebirlerinin herhangi bir abelyan çaprazlanmış modülü olsun. Bu herhangi bir $f: L_1 \rightarrow M_2$ için abelyan Lie cebirlerinin bir morfizmidir

$$Hom(L_1, M_2) \rightarrow Hom((M_1, L_1, \delta_1), (M_2, L_2, \delta_2))$$

$$f \mapsto (f \circ \delta_1, \delta_2 \circ f)$$

$Hom((M_1, L_1, \delta_1), (M_2, L_2, \delta_2))$ özel çaprazlanmış modülü olarak tanımlanabilir ki Lie etkileri aşıkardır. Hom 'un eşleniği ve $LieXMod$ 'daki tensör çarpımı sayesinde aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.2.1. (Tensör çarpımının eşleniği(adjointness)) (M_1, L_1, δ_1) , (M_2, L_2, δ_2) ve (M_3, L_3, δ_3) Lie cebirlerinin herhangi abelyan çaprazlanmış modülleri olsunlar. O halde

$$Hom((M_1, L_1, \delta_1) \otimes (M_2, L_2, \delta_2), (M_3, L_3, \delta_3)) \cong Hom((M_1, L_1, \delta_1), Hom((M_2, L_2, \delta_2), (M_3, L_3, \delta_3)))$$

dir.

4. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİNİN HOMOLOJİSİ

Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin homolojisi [4,13]'de Casas ve çalışma arkadaşları tarafından tanıtılmıştır. $F : Set \rightarrow CM$ ve $U : CM \rightarrow Set$ adjoint fonktorlarının ikilisi tanıtılmıştır ve CM deki bir çaprazlanmış modül için eşüçlü(cotriple) çözümleri yapılandırılmıştır. abelyanlaştırılmış fonktorların sol türevli fonktorların bir çaprazlanmış modülünün homoloji fonktörleri tanımlanmıştır. Aynı zamanda Lie cebirlerinin homolojisinin iyi bilindik çeşitli sonuçları Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin kategorisine genelleştirilmiştir. Örneğin, (M, L, ∂) çaprazlanmış modülünün birinci homolojisi bu çaprazlanmış modülün abelyanlaştırılmasıdır. Yani

$$H_1(M, L, \partial) \cong \frac{(M, L, \partial)}{[(M, L, \partial), (M, L, \partial)]}$$

dır.

4.1 Chevalley-Eilenberg Homolojisi

Aşağıdaki önermeler Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin kategorisindeki sonuçların bir özel durumu [14, bölüm 6] da verilmiştir ve [4, Teorem 2.31 ve 2.36] dan elde edilebilir.

Önerme 4.1.1. (Çaprazlanmış modüller için Hopf formülü) (M, L, ∂) Lie cebirinin bir çaprazlanmış modülü olsun. Bu çaprazlanmış modülün bir projektif sunumu $0 \rightarrow (R_2, R_1, \delta) \rightarrow (F_2, F_1, \delta) \rightarrow (M, L, \partial) \rightarrow 0$ olsun. Bu bir doğal izomorfizmdir.

$$\begin{aligned} H_2(M, L, \partial) &\cong \left(\frac{R_2 \cap [F_1, F_2]}{[F_1, R_2] + [F_2, R_1]}, \frac{R_1 \cap F_1^2}{[R_1, F_1]}, \bar{\delta} \right) \\ &= \frac{(R_2, R_1, \delta) \cap [(F_2, F_1, \delta), (F_2, F_1, \delta)]}{[(R_2, R_1, \delta), (F_2, F_1, \delta)]} \end{aligned}$$

Aşağıdaki dizi Lie cebirlerinin Chevalley-Eilenberg homolojisinde beş terimli tam dizinin bir genelleştirmesidir [15].

Önerme 4.1.2. (Çaprazlanmış modüllerin homolojisinde beş terimli tam dizi) Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülünün kısa tam dizisi

$$0 \rightarrow (N, K, \partial) \rightarrow (M, L, \partial) \rightarrow (T, Q, \omega) \rightarrow 0$$

olsun. Burada çaprazlanmış modüllerin doğal tam dizisi mevcuttur.

$$H_2(M, L, \partial) \rightarrow H_2(T, Q, \omega) \rightarrow \frac{(N, K, \partial)}{[(N, K, \partial), (M, L, \partial)]} \rightarrow H_1(M, L, \partial) \rightarrow H_1(T, Q, \omega) \rightarrow 0$$

Aşağıdaki teoremden, yukarıdaki dizi bir terim daha genişletilmiştir. İspatın ana fikri Lie cebirlerindeki [6, Önerme 4.1 (iii)] den gelmektedir.

Teorem 4.1.1. Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin merkezsiz genişlemesi

$$0 \rightarrow (N, K, \partial) \rightarrow (M, L, \partial) \xrightarrow{(\tau_1, \tau_2)} (T, Q, \omega) \rightarrow 0$$

olsun. O halde abelyan çaprazlanmış modüllerin şu dizisi tamdır:

$$(N, K, \partial) \otimes Ab(M, L, \partial) \xrightarrow{(\gamma_1, \gamma_2)} H_2(M, L, \partial) \xrightarrow{(\sigma_1, \sigma_2)} H_2(T, Q, \omega) \rightarrow (N, K, \partial) \rightarrow H_1(M, L, \partial) \rightarrow H_1(T, Q, \omega) \rightarrow 0$$

İspat : (M, L, ∂) çaprazlanmış modülünün projektif sunumu

$$0 \rightarrow (R_2, R_1, \delta) \rightarrow (F_2, F_1, \delta) \xrightarrow{(\pi_1, \pi_2)} (M, L, \partial) \rightarrow 0$$

olsun. (F_2, F_1, δ) nin ideali olan (S_2, S_1, δ) , $(S_2, S_1, \delta) = \ker((\tau_1, \tau_2) \circ (\pi_1, \pi_2))$ yardımıyla tanımlanır. O halde

$$0 \rightarrow (R_2, R_1, \delta) \rightarrow (S_2, S_1, \delta) \xrightarrow{(\pi_1|_{S_2}, \pi_2|_{S_1})} (N, K, \partial) \rightarrow 0$$

dizisi tamdır ve çaprazlanmış modülün kısa tam dizisi

$$0 \rightarrow (S_2, S_1, \delta) \rightarrow (F_2, F_1, \delta) \rightarrow (T, Q, \omega) \rightarrow 0$$

(T, Q, ω) nin bir projektif sunumudur. Çaprazlanmış modüller için Hopf's formülünün yardımıyla aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilir:

$$\begin{array}{ccc} \frac{R_2 \cap [F_1, F_2]}{[F_1, R_2] + [R_1, F_2]} & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \frac{R_1 \cap F_1^2}{[R_1, F_1]} \\ \sigma_1 \downarrow & & \sigma_2 \downarrow \\ \frac{S_2 \cap [F_1, F_2]}{[F_1, S_2] + [S_1, F_2]} & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \frac{S_1 \cap F_1^2}{[S_1, F_1]} \end{array}$$

Burada $\bar{\delta}$, δ yardımıyla indirgenmiştir ve σ_1, σ_2 doğal homomorfizmdir. Çünkü $[(N, K, \partial), (M, L, \partial)] = 0$, $[(F_2, F_1, \delta), (S_2, S_1, \delta)]$, (R_2, R_1, δ) nin alt modülüdür ve

$$\ker(\sigma_1, \sigma_2) = \left(\frac{[F_1, S_2] + [S_1, F_2]}{[F_1, R_2] + [R_1, F_2]}, \frac{[F_1, S_1]}{[R_1, F_1]}, \bar{\delta} \right)$$

$H_2(M, L, \delta)$ nın alt modülünün olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Böylece bu $(N, K, \partial) \otimes Ab(M, L, \partial)$ dan $\ker(\sigma_1, \sigma_2)$ ye bir epimorfizm tanımlamak için yeterlidir. Çünkü $K \cong S_1 / R_1$ ve $L / L^2 \cong F_1 / (R_1 + [F_1, F_1])$ [6, Önerme 4.1 (iii)] yardımıyla doğal bir epimorfizm vardır. Her $s_1 \in S_1, f_1 \in F_1$ için

$$\begin{aligned} \gamma_2 : K \otimes \frac{L}{L^2} &\rightarrow \frac{[F_1, S_1]}{[F_1, R_1]} \\ (s_1 + R_1) \otimes (f_1 + R_1 + [F_1, F_1]) &\mapsto [s_1, f_1] + [F_1, R_1] \end{aligned}$$

Diğer yandan, $K \cong S_1 / R_1$ ve $M / [L, M] \cong F_2 / ([F_1, F_2] + R_2)$ dir. Böylece her $s_1 \in S_1, f_2 \in F_2$ için

$$\begin{aligned} \beta_1 : K \times \frac{M}{[L, M]} &\rightarrow \frac{[F_1, S_2] + [S_1, F_2]}{[F_1, R_2] + [R_1, F_2]} \\ (s_1 + R_1, f_2 + ([F_1, F_2] + R_2)) &\mapsto {}^{s_1}f_1 + ([F_1, R_2] + [R_1, F_2]) \end{aligned}$$

bilineer dönüşümü tanımlanabilir. Çünkü,

$[S_1, R_2] \subseteq [F_1, R_2], [S_1, [F_1, F_2]] \subseteq [F_1, R_2] + [R_1, F_2]$, β_1 morfizmi iyi tanımlıdır ve

$$\delta_1 : K \otimes M / [L, M] \rightarrow \frac{[F_1, S_2] + [S_1, F_2]}{[F_1, R_2] + [R_1, F_2]}$$

indirgenir.

Aynı zamanda $L / L^2 \cong F_1 / (F_1^2 + R_1), N \cong S_2 / R_2$ dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \beta_2 : N \times \frac{L}{L^2} &\rightarrow \frac{[F_1, S_2] + [S_1, F_2]}{[F_1, R_2] + [R_1, F_2]} \\ (s_2 + R_1, f_1 + (F_1^2 + R_1)) &\mapsto {}^{f_1}s_2 + ([F_1, R_2] + [R_1, F_2]) \end{aligned}$$

iyi tanımlıdır. Çünkü $[R_1, S_2] \subseteq [R_1, F_2]$ ve $[F_1, S_2] \subseteq R_2$ dir. Böylece β_2 ,

$$\delta_2 : N \otimes L / L^2 \rightarrow \frac{[F_1, S_2] + [S_1, F_2]}{[F_1, R_2] + [R_1, F_2]}$$

dönüşümüne indirgenir.

$$\gamma'_1 = (\delta_1 \otimes Id, Id \otimes \delta_2) : (K \otimes \frac{M}{[L, M]} \oplus \frac{L}{L^2} \otimes N) \rightarrow \frac{[F_1, S_2] + [S_1, F_2]}{[F_1, R_2] + [R_1, F_2]}$$

homomorfizmi açık bir şekilde örtendir. Çünkü $\gamma'_1, N \otimes \frac{M}{[L, M]}$ ın görüntüsünü sıfıra dönüştürür, γ_1 indirgenmiş morfizmini oluşturabiliriz ve aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{array}{ccc}
N \otimes \frac{M}{[L,M]} & \xrightarrow{\alpha} & (K \otimes \frac{M}{[L,M]} \oplus N \otimes \frac{L}{L^2}) \xrightarrow{\pi} \text{Coker } \alpha \\
& & \downarrow \gamma'_1 \quad \nwarrow \gamma_1 \\
& & \frac{[F_1, S_2] + [S_1, F_2]}{[F_1, R_2] + [R_1, F_2]}
\end{array}$$

Burada $\alpha = (\partial \otimes Id \oplus -Id \otimes \bar{\delta})$ dır. Çünkü

$$(\gamma_1, \gamma_2) : (\text{Coker } \alpha, K \otimes \frac{L}{L^2}, \mu) \rightarrow \ker(\sigma_1, \sigma_2)$$

ikilisinin aşikar olarak düşünülen etkileri çaprazlanmış modüllerin bir morfizmidir ve (γ_1, γ_2) örtendir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi Örnek 3.2.1(iii) kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 4.1.1. (M, L, ∂) bir çaprazlanmış modül ve ∂ örten olsun. O halde (M, L, ∂) çaprazlanmış modülünün $(N, 0, \partial)$ merkezselsel ideali

$$(\sigma_1, \sigma_2) : H_2(M, L, \partial) \rightarrow H_2(T, Q, \omega)$$

morfizmi ile bir moniktir. Burada (T, Q, ω) ile $(M, L, \partial) / (N, 0, \partial)$ izomorftur.

Örnek 4.1.1. M, L Lie cebirinin bir merkezselsel ideali olsun. Çaprazlanmış modüllerin merkezselsel genişlemeleri için

$$0 \rightarrow (0, M, 0) \rightarrow (0, L, 0) \rightarrow (0, L/M, 0) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow (M, M, Id) \rightarrow (L, L, Id) \rightarrow (L/M, L/M, Id) \rightarrow 0$$

(γ_1, γ_2) morfizmi Teorem 4.1.1 de belirlenmiştir ve sırasıyla

$$(0, M \otimes L / L^2, 0) \rightarrow (0, H_2(L), 0)$$

$$(M \otimes L / L^2, M \otimes L / L^2, Id) \rightarrow (H_2(L), H_2(L), Id)$$

olur. Burada $H_2(L)$, L nin ikinci Chevalley-Eilenberg homolojisiidir.

5. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİNİN KAPABİLİTE ÖZELLİĞİ

Öncelikle bu bölümde kullanacağımız bazı tanımları verelim.

5.1 Actor Çaprazlanmış Modül

Tanım 5.1.1. G bir Lie k -cebiri ve $d: G \rightarrow M$, k -lineer dönüşüm olsun. Her $g, g' \in G$ için

$$d[g, g'] = gd(g') - g'd(g)$$

özellik sağlanıyorsa d ye bir *derivasyon* denir. G den M ye bütün derivasyonların kümesi $Der(G)$ ile gösterilir.

Tanım 5.1.2. (M, G, μ) ve (N, G, ν) çaprazlanmış iki Lie modül ve $\alpha: M \rightarrow N$ bir k -lineer dönüşüm olsun. Her $m, m' \in M$ için

$$\alpha[m, m'] = \mu(m) \cdot \alpha(m') - \mu(m') \cdot \alpha(m)$$

ise α ya M den N ye bir *derivasyon* denir. M den N ye bütün derivasyonların kümesi $Der(M, N)$ şeklinde gösterilir.[9]

Tanım 5.1.3. (M, G, μ) çaprazlanmış modül ve $f: M \rightarrow M$, $g: G \rightarrow G$ birer fonksiyon olmak üzere $(f, \phi): (M, G, \mu) \rightarrow (M, G, \mu)$ verilsin.

- i) $f \in Der(M)$, $\phi \in Der(G)$,
- ii) $\phi\mu = \mu f$,
- iii) her $g \in G$ ve her $m \in M$ için $f(g \cdot m) = g \cdot f(m) + \phi(g) \cdot m$

özellikleri sağlanıyorsa (f, ϕ) ye (M, G, μ) nin bir *derivasyonu* denir. (M, G, μ) nin bütün derivasyonlarının kümesi $Der(M, G, \mu)$ ile gösterilir.

Teorem 5.1.1. $\Delta(d) = (\theta_d, \phi_d) = (d\mu, \mu d)$ şeklinde tanımlı

$$\Delta : Der(G, M) \rightarrow Der(M, G, \mu)$$

fonksiyonu bir Lie k -cebir homomorfizmidir. Üstelik $(Der(G, M), Der(M, G, \mu), \Delta)$ üçlüsü bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Tanım 5.1.4. Yukarıdaki teoremden tanımlanan $(Der(G, M), Der(M, G, \mu), \Delta)$ çaprazlanmış modülüne (M, G, μ) nin *aktör çaprazlanmış modülü* denir ve $A(M, G, \mu)$ ile gösterilir.

Teorem 5.1.2. (M, G, μ) bir çaprazlanmış modül olsun. $m \in M$ ve $g \in G$ için $\eta_m : G \rightarrow M$, $\eta_m(g) = -g \cdot m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \eta : M &\rightarrow Der(G, M) \\ m &\mapsto \eta(m) = \eta_m \end{aligned}$$

dönüşümü bir cebir homomorfizmidir.

İspat: $\eta[m, m'] = \eta_{[m, m']} = [\eta_m, \eta_{m'}] = [\eta(m), \eta(m')]$ dir. Şimdi bunun doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} [\eta_m, \eta_{m'}](g) &= \eta_m \mu \eta_{m'}(g) - \eta_{m'} \mu \eta_m(g) \\ &= -g \cdot \eta_m \mu(m') + \mu(m') \cdot \eta_m(g) + g \cdot \eta_{m'} \mu(m) - \mu(m) \cdot \eta_{m'}(g) \\ &= g \cdot [m, m'] - [m', g \cdot m] - g \cdot [m, m'] + [m, g \cdot m'] \\ &= [g \cdot m', m] - [g \cdot m, m'] \\ &= -g \cdot [m, m'] \\ &= \eta_{[m, m']}(g) \end{aligned}$$

Burada tanımlanan η nin görüntüsü $\text{Im}(\eta) = E(G, M)$ şeklinde gösterilir.[9]

Teorem 5.1.3. $\alpha_g : M \rightarrow M$, $m \mapsto \alpha_g(m) = g \cdot m$ ve $\phi_g : G \rightarrow G$, $g' \mapsto \phi_g(g') = [g, g']$ olmak üzere

(a) $\alpha_g \in Der(M)$ ve $\phi_g \in Der(G)$ dir.

(b) $\phi_g \mu(m) = [g, \mu(m)] = \mu(g \cdot m) = \mu \alpha_g(m)$ dir.

(c) Her $g, g' \in Der(G)$ ve $m \in M$ için

$$g' \alpha_g(m) + \phi_g(g') \cdot m = g'(g \cdot m) + [g, g'] \cdot m = g(g' \cdot m) = \alpha_g(g' \cdot m)$$

dir. Üstelik

$$\gamma: G \rightarrow \text{Der}(M, G, \mu)$$

$$g \mapsto (\alpha_g, \phi_g)$$

dönüşümü bir cebir homomorfizmidir.

İspat: İspat için

$$\begin{aligned} \gamma[g_1, g_2] &= (\alpha_{[g_1, g_2]}, \phi_{[g_1, g_2]}) \\ &= ([\alpha_{g_1}, \alpha_{g_2}], [\phi_{g_1}, \phi_{g_2}]) \\ &= ([\alpha_{g_1}, \phi_{g_1}], [\alpha_{g_2}, \phi_{g_2}]) \\ &= [\gamma(g_1), \gamma(g_2)] \end{aligned}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} \alpha_{[g_1, g_2]}(g) &= g_1 \cdot (g_2 \cdot m) - g_2 \cdot (g_1 \cdot m) \\ &= \alpha_{g_1}(\alpha_{g_2}(m)) - \alpha_{g_2}(\alpha_{g_1}(m)) \\ &= [\alpha_{g_1}, \alpha_{g_2}](m) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \phi_{[g_1, g_2]}(g) &= [[g_1, g_2], g] \\ &= [g_1[g_2, g]] - [g_2, [g_1, g]] \\ &= \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(g)) - \phi_{g_2}(\phi_{g_1}(g)) \\ &= [\phi_{g_1}, \phi_{g_2}](g) \end{aligned}$$

dir.

Burada tanımlanan γ dönüşümünün görüntüsü $\text{Im}(\gamma) = \overline{G}$ ile gösterilir.

Tanım 5.1.5. $(E(G, M), \overline{G}, \Delta)$ çaprazlanmış modülüne, *iç aktör* denir ve $I(M, G, \mu)$ ile gösterilir.

5.2 Kapabilite

Tanım 5.2.1. L bir Lie cebiri olsun. Bu durumda iç derivasyonları ile izomorf bir K Lie cebiri varsa yani $L \cong K / Z(K)$ ise L ye *kapabil Lie cebiri* denir.

Tanım 5.2.2. L ve T iki Lie cebiri olsun. L/T kapabil olacak şekilde L nin en küçük idealine *merkez ideali* denir ve $Z^*(L)$ ile gösterilir.

Bu çalışmada $Z^*(L)$ yardımıyla $\pi(Z(L^*))$ ideali temsil edilmiştir. Bu bölümde kapabilite kavramı çaprazlanmış modüllere genelleştirilecektir.

Tanım 5.2.3. (M, L, ∂) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

$$(M, L, \partial) \cong \frac{(T, K, \delta)}{Z(T, K, \delta)}$$

olacak şekilde (T, K, δ) çaprazlanmış modülü varsa (M, L, ∂) ya *kapabil çaprazlanmış modül* denir.

Diğer bir deyişle [16] da vurgulandığı gibi, (M, L, ∂) herhangi bir çaprazlanmış modülün iç aktörüne izomorf ise (M, L, ∂) ye kapabil çaprazlanmış modül denir.

(M, L, ∂) nın projektif sunumu

$$0 \rightarrow (R_2, R_1, \delta) \rightarrow (F_2, F_1, \delta) \xrightarrow{(\pi_1, \pi_2)} (M, L, \partial) \rightarrow 0 \quad (*)$$

olsun. Bu durumda

$$(\overline{F_2}, \overline{F_1}, \overline{\delta}) = \frac{(F_2, F_1, \delta)}{[(F_2, F_1, \delta), (R_2, R_1, \delta)]} \text{ ve } (\overline{R_2}, \overline{R_1}, \overline{\delta}) = \frac{(R_2, R_1, \delta)}{[(F_2, F_1, \delta), (R_2, R_1, \delta)]}$$

olmak üzere çaprazlanmış modüllerin

$$0 \rightarrow (\overline{R_2}, \overline{R_1}, \overline{\delta}) \xrightarrow{(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2})} (\overline{F_2}, \overline{F_1}, \overline{\delta}) \xrightarrow{(\overline{\pi_1}, \overline{\pi_2})} (M, L, \partial) \rightarrow 0$$

dizisi

i) $(\overline{\pi_1}, \overline{\pi_2}) : (\overline{F_2}, \overline{F_1}, \overline{\delta}) \rightarrow (M, L, \partial)$ fonksiyonu (*) dizisinde

$(\pi_1, \pi_2) : (F_2, F_1, \delta) \rightarrow (M, L, \partial)$ örten olduğu için örtendir.

ii) $(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}) : (\overline{R_2}, \overline{R_1}, \overline{\delta}) \rightarrow (\overline{F_2}, \overline{F_1}, \overline{\delta})$ fonksiyonu birebirdir. Çünkü

$$0 \rightarrow (R_2, R_1, \delta) \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} (F_2, F_1, \delta) \xrightarrow{(\pi_1, \pi_2)} (M, L, \partial) \rightarrow 0$$

dizisi (M, L, ∂) nın bir projektif sunumudur.

Dolayısıyla

$$0 \rightarrow (\overline{R_2}, \overline{R_1}, \overline{\delta}) \xrightarrow{(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2})} (\overline{F_2}, \overline{F_1}, \overline{\delta}) \xrightarrow{(\overline{\pi_1}, \overline{\pi_2})} (M, L, \partial) \rightarrow 0$$

dizisi tamdır. Ayrıca $\text{Im}(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2})$, $Z(\overline{F_2}, \overline{F_1}, \overline{\delta})$ nin bir alt modülü olduğundan

yukarıdaki dizi merkezseldir. Burada $(\overline{\pi_1}, \overline{\pi_2})$, (π_1, π_2) tarafından indirgenmiştir.

Aşağıdaki lemma temel sonuçlar için önemli bir rol oynamaktadır.

Lemma 5.2.1. (M, L, ∂) bir çaprazlanmış modül ve

$$0 \rightarrow (R_2, R_1, \delta) \rightarrow (F_2, F_1, \delta) \xrightarrow{(\pi_1, \pi_2)} (M, L, \partial) \rightarrow 0$$

bu çaprazlanmış modülünün bir projektif sunumu ve

$$0 \rightarrow (M_1, L_1, \omega) \rightarrow (M_2, L_2, \omega) \rightarrow (M, L, \partial) \rightarrow 0$$

merkezsel genişlemesi olsun. O halde

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\bar{R}_2, \bar{R}_1, \bar{\delta}) & \longrightarrow & (\bar{F}_2, \bar{F}_1, \bar{\delta}) & \xrightarrow{(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)} & (M, L, \partial) \longrightarrow 0 \\ & & (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) \downarrow & & (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) \downarrow & & (\text{Id}, \text{Id}) \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (M_1, L_1, \omega) & \longrightarrow & (M_2, L_2, \omega) & \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} & (M, L, \partial) \longrightarrow 0 \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde yani $\alpha_1 \beta_1 = \bar{\pi}_1$, $\alpha_2 \beta_2 = \bar{\pi}_2$

$$(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) : (\bar{F}_2, \bar{F}_1, \bar{\delta}) \rightarrow (M_2, L_2, \omega)$$

morfizmi vardır.

İspat: (F_2, F_1, δ) projektif olduğundan $(\beta_1, \beta_2) : (F_2, F_1, \delta) \rightarrow (M_2, L_2, \omega)$ morfizmi vardır yani $\alpha_1 \beta_1 = \pi_1$, $\alpha_2 \beta_2 = \pi_2$ dir. Açıkça görüleceği üzere (R_2, R_1, δ) nın (β_1, β_2) altındaki görüntüsü (M_1, L_1, ω) nın bir alt modülüdür, çaprazlanmış modül morfizminin özelliği yardımıyla, bu dönüşüm $[(F_2, F_1, \delta), (R_2, R_1, \delta)]$ yı sıfıra götürür. Böylece (β_1, β_2) , $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ e indirgenir.

Tanım 5.2.4. (M, L, ∂) ve (T, K, δ) bir çaprazlanmış modül olsun. $(\Phi, \Psi) : (T, K, \delta) \rightarrow (M, L, \partial)$ örten morfizm ve $\ker(\Phi, \Psi)$, $Z(M, L, \delta)$ nın bir alt modülü olmak üzere $Z^*(M, L, \partial)$ idealini $(\Phi, \Psi)(Z(T, K, \delta))$ çaprazlanmış alt modülünün bir arakesiti olarak tanımlayabiliriz. $(\Phi, \Psi)(Z(T, K, \delta))$ yardımıyla $(\Phi(C_K(T)), \Psi(st_K(T) \cap Z(K)), \delta)$ olduğu gösterilebilir. Çünkü (T, K, δ) çaprazlanmış modülün merkezi

$$(\eta, \gamma) : (T, K, \delta) \rightarrow A(T, K, \delta)$$

homomorfizminin çekirdeği olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned} \ker \eta &= \{t \in T : \eta_t(k), k \in K\} \\ &= \{t \in T : t \cdot k = 0, k \in K\} \\ &= T^K \\ &= C_K(T) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\ker k &= \{k \in K : \gamma(k) = 0\} \\
&= \{k \in K : \alpha_1(t) = 0, t \in T \text{ ve } \phi_1(k'), k' \in K\} \\
&= \{k \in K : k \cdot t = 0, t \in T\} \cap \{k \in K : [k, k'] = 0, k' \in K\} \\
&= st_K(T) \cap Z(K)
\end{aligned}$$

alınarak

$$Z(T, K, \delta) = Ker(\eta, \gamma) = (C_K(T), st_K(T) \cap Z(K), \delta)$$

yazılabilir.

Teorem 5.2.1. (M, L, ∂) çaprazlanmış modülünün herhangi bir

$$0 \rightarrow (R_2, R_1, \delta) \rightarrow (F_2, F_1, \delta) \xrightarrow{(\pi_1, \pi_2)} (M, L, \partial) \rightarrow 0$$

projektif sunumu için

$$Z^*(M, L, \partial) = (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)(Z(\bar{F}_2, \bar{F}_1, \bar{\delta})).$$

dir.

İspat: $Z^*(M, L, \partial)$ tanımından $Z^*(M, L, \partial) \subseteq (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)(Z(\bar{F}_2, \bar{F}_1, \bar{\delta}))$ olduğunu biliyoruz. Şimdi kabul edelim ki

$$0 \rightarrow (M_1, L_1, \omega) \rightarrow (M_2, L_2, \omega) \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} (M, L, \partial) \rightarrow 0$$

bir merkezsiz genişleme olsun. Lemma 5.2.1 deki diyagramdan

$$M_1 + \bar{\beta}_1(\bar{F}_2) = M_2, \quad L_1 + \bar{\beta}_2(\bar{F}_1) = L_2$$

elde edilir.

$[L_1, M_2] = 0$ olmasından ve Lemma 5.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}_1(C_{\bar{F}_1}(\bar{F}_2)) &= \alpha_1 \bar{\beta}_1(C_{\bar{F}_1}(\bar{F}_2)) \subseteq \alpha_1(C_{\bar{\beta}_2(\bar{F}_1)}(\bar{\beta}_1(\bar{F}_2))) \\
&\subseteq \alpha_1(C_{\bar{\beta}_2(\bar{F}_1)}(M_2)) \\
&= \alpha_1(C_{\bar{\beta}_2(\bar{F}_1) + L_1}(M_2)) = \alpha_1(C_{L_2}(M_2))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}_2(st_{\bar{F}_1}(\bar{F}_2) \cap Z(\bar{F}_1)) &\subseteq \alpha_2(st_{\bar{\beta}_2(\bar{F}_1)}(\bar{\beta}_1(\bar{F}_2)) \cap Z(\bar{\beta}_2(\bar{F}_1))) \\
&\subseteq \alpha_2(st_{L_2}(\bar{\beta}_1(\bar{F}_2)) \cap Z(L_2)) \\
&\subseteq \alpha_2(st_{L_2}(M_2) \cap Z(L_2))
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $(\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)(Z(\bar{F}_2, \bar{F}_1, \bar{\delta})) \subseteq (\alpha_1, \alpha_2)(Z(M_2, L_2, \omega))$ olduğu görülür.

Sonuç 5.2.1. (M, L, ∂) nin kapabil olması için gerek ve yeter şart $Z^*(M, L, \partial) = 0$ olmasıdır.

İspat: $0 \rightarrow (R_2, R_1, \delta) \rightarrow (F_2, F_1, \delta) \xrightarrow{(\pi_1, \pi_2)} (M, L, \partial) \rightarrow 0$ dizisi (M, L, ∂) nin bir projektif sunumu olsun. Teorem 5.2.1 i kullanarak

$$\begin{aligned} Z^*(M, L, \partial) &= (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)(Z(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{\delta})) \\ &= (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)\left(Z\left(\frac{(F_2, F_1, \delta)}{[(F_2, F_1, \delta), (R_2, R_1, \delta)]}\right)\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu durumda $(\bar{R}_2, \bar{R}_1, \bar{\delta}) = Z(\bar{F}_2, \bar{F}_1, \bar{\delta})$ olması için gerek ve yeter şart $Z^*(M, L, \partial) = 0$ olmasıdır.

Sonuç 5.2.2. Herhangi bir L Lie cebiri için $Z^*(L, L, Id) = (Z^*(L), Z^*(L), Id)$ ve $Z^*(0, L, 0) = (0, Z^*(L), 0)$ dır. Özel olarak L nin kapabil olması için gerek ve yeter şart (L, L, Id) nin kapabil olmasıdır. Benzer şekilde L nin kapabil olması için gerek ve yeter şart $(0, L, 0)$ nin kapabil olmasıdır.

İspat: Daha önceden

$$(\bar{F}_2, \bar{F}_1, \bar{\delta}) = \frac{(F_2, F_1, \delta)}{[(F_2, F_1, \delta), (R_2, R_1, \delta)]}$$

ve

$$[(F_2, F_1, \delta), (R_2, R_1, \delta)] = ([R_1, F_2] + [F_1, R_2], [F_1, R_1], \delta)$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi L Lie cebirinin herhangi bir

$$0 \rightarrow R \rightarrow F \xrightarrow{\pi} L \rightarrow 0$$

serbest sunumu için

$$0 \rightarrow (R, R, Id) \rightarrow (F, F, Id) \xrightarrow{(\pi, \pi)} (L, L, Id) \rightarrow 0$$

tam dizisi (L, L, Id) nin bir projektif sunumu olsun. Teorem 5.2.1 ve [6, Sonuç 3.4] kullanılarak

$$\begin{aligned}
Z^*(L, L, Id) &= (\bar{\pi}, \bar{\pi}) \left(Z(\bar{F}, \bar{F}, Id) \right) \\
&= (\bar{\pi}, \bar{\pi}) \left(Z \left(\frac{(F, F, Id)}{[(F, F, Id), (R, R, Id)]} \right) \right) \\
&= (\bar{\pi}, \bar{\pi}) \left(Z \left(\frac{(F, F, Id)}{([R, F] + [F, R], [F, R], Id)} \right) \right) \\
&= (\bar{\pi}, \bar{\pi}) \left(Z \left(\frac{F}{[R, F]}, \frac{F}{[R, F]}, Id \right) \right) \\
&= (\bar{\pi}, \bar{\pi}) \left(Z \left(\frac{F}{[R, F]} \right), Z \left(\frac{F}{[R, F]} \right), Id \right) \\
Z^*(L, L, Id) &= \left(\bar{\pi} \left(Z \left(\frac{F}{[R, F]} \right) \right), \bar{\pi} \left(Z \left(\frac{F}{[R, F]} \right) \right), Id \right) \\
&= (Z^*(L), Z^*(L), Id)
\end{aligned}$$

olduğunu söyleyebiliriz. İspatın diğer kısmı ise;

$$0 \rightarrow R \rightarrow F \xrightarrow{\pi} L \rightarrow 0$$

serbest sunumu için

$$0 \rightarrow (0, R, 0) \rightarrow (0, F, 0) \xrightarrow{(\pi, \pi)} (0, L, 0) \rightarrow 0$$

tam dizisi $(0, L, 0)$ in bir projektif sunumu olsun. Yine Sonuç 4.1.1 ve Teorem 5.2.1 yardımıyla

$$\begin{aligned}
Z^*(0, L, 0) &= (\bar{\pi}, \bar{\pi}) \left(Z(0, \bar{F}, 0) \right) \\
&= (\bar{\pi}, \bar{\pi}) \left(Z \left(\frac{(0, F, 0)}{[(0, F, 0), (0, R, 0)]} \right) \right) \\
&= (\bar{\pi}, \bar{\pi}) \left(Z \left(\frac{(0, F, 0)}{([R, F] + [F, 0], [F, R], 0)} \right) \right) \\
&= (\bar{\pi}, \bar{\pi}) \left(Z \left(\frac{0}{[R, F] + [F, 0]}, \frac{F}{[F, R]}, 0 \right) \right) \\
&= (\bar{\pi}, \bar{\pi}) \left(Z \left(\frac{0}{[R, F]} \right), Z \left(\frac{F}{[R, F]} \right), 0 \right) \\
&= \left(\bar{\pi} \left(Z \left(\frac{0}{[R, F]} \right) \right), \bar{\pi} \left(Z \left(\frac{F}{[R, F]} \right) \right), 0 \right) \\
&= (0, Z^*(L), 0)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Şimdi aşağıdaki teoremde, Teorem 4.1.1 deki (γ_1, γ_2) morfizmi yardımıyla bir çaprazlanmış modülün kapabilitesi için yeterli kriter verilecektir.

Teorem 5.2.2. $(N, K, \delta), (M, L, \delta)$ nın bir merkezsiz genişlemesi olsun. Bu durumda (N, K, δ) nın $Z^*(M, L, \delta)$ yı içermesi için gerek ve şart

$$(\gamma_1, \gamma_2) : (N, K, \delta) \otimes Ab(M, L, \delta) \rightarrow H_2(M, L, \delta)$$

morfizminin aşikar olmasıdır veya buna denk olarak

$$(\sigma_1, \sigma_2) : H_2(M, L, \delta) \rightarrow H_2(T, Q, \partial)$$

morfizmi bir monomorfizmdir.

İspat: Teorem 4.1.1 ve Lemma 5.2.1 deki notasyonlara benzer olarak, eğer

$$(\overline{F_2}, \overline{F_1}, \overline{\delta}) = \frac{(F_2, F_1, \delta)}{[(F_2, F_1, \delta), (S_2, S_1, \delta)]}, \quad (\overline{S_2}, \overline{S_1}, \overline{\delta}) = \frac{(S_2, S_1, \delta)}{[(F_2, F_1, \delta), (R_2, R_1, \delta)]}$$

eşitlikleri varsa

$$\text{Im}(\gamma_1, \gamma_2) = \ker(\sigma_1, \sigma_2) = \left(\frac{[F_1, S_2] + [S_1, F_2]}{[F_1, R_2] + [R_1, F_2]}, \frac{[F_1, S_1]}{[R_1, F_1]}, \overline{\delta} \right) = [(\overline{S_2}, \overline{S_1}, \overline{\delta}), (\overline{F_2}, \overline{F_1}, \overline{\delta})]$$

eşitliği de vardır. Böylece (γ_1, γ_2) sıfıra gider ancak ve ancak $(\overline{S_2}, \overline{S_1}, \overline{\delta}) \subseteq Z((\overline{F_2}, \overline{F_1}, \overline{\delta}))$. Diğer yandan Teorem 5.2.1 den

$$Z^*(M, L, \partial) = (\pi_1, \pi_2)(Z(\overline{F_2}, \overline{F_1}, \overline{\delta}))$$

yazılabilir. O halde

$$(\overline{S_2}, \overline{S_1}, \overline{\delta}) \subseteq Z((\overline{F_2}, \overline{F_1}, \overline{\delta})) \Leftrightarrow (N, K, \delta) = (\pi_1, \pi_2)(\overline{S_2}, \overline{S_1}, \overline{\delta}) \subseteq Z^*(M, L, \partial)$$

elde edilir.

Sonuç 5.2.3. (M, L, ∂) çaprazlanmış modülünün kapabil olması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı her $l \in st_L(M) \cap Z(L)$ ve $m \in \ker \partial \cap C_L(M)$ elemanı için

$$(\gamma_1, \gamma_2) : (0, \langle l \rangle, \partial) \otimes Ab(M, L, \partial) \rightarrow H_2(M, L, \partial)$$

$$(\gamma'_1, \gamma'_2) : (\langle m \rangle, 0, \partial) \otimes Ab(M, L, \partial) \rightarrow H_2(M, L, \partial)$$

dönüşümlerinin aşikar olmamasıdır.

İspat: İspat için (M, L, ∂) nın kapabil olmaması için gerek ve yeter şartın sıfırdan farklı bazı $m \in M$ veya $l \in L$ elemanlarının sonucun şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Eğer (M, L, ∂) kapabil değilse, o halde Sonuç 4.1.4 den faydalanarak,

$Z^*(M, L, \partial) = (M^*, L^*, \partial)$ merkezselsel ideali sıfırdan farklıdır. Eğer $L^* \neq \langle 0 \rangle$ ise herhangi bir $l \in L^* \subseteq st_L(M) \cap Z(L)$ seçilebilir öyle ki, Teorem 5.2.2 yardımıyla, $(0, \langle l \rangle, \partial)$ şartları sağlar. O halde $M^* \neq \langle 0 \rangle$ ve $m \in M^*$ olduğu iddia edilebilir. Böylece ya $m \in \ker(\partial)$ ya da $m \notin \ker(\partial)$ dır. İlk durumda $(\langle m \rangle, 0, \partial)$ ve ikinci durumda da $(0, \langle \partial(m) \rangle, \partial)$, $Z^*(M, L, \partial)$ yı içeren uygun çaprazlanmış alt modüllerdir.

Sonuç 5.2.4. (M, L, ∂) çaprazlanmış modül ve ∂ örten olsun. (M, L, ∂) nin kapabil olması için gerek ve yeter şart L nin kapabil ve $M \cong L$ olmasıdır.

İspat: $\ker(\partial) \subseteq C_L(M)$ olduğundan $(\ker(\partial), 0, \partial)$, (M, L, ∂) nin bir merkezselsel genişlemesidir. Sonuç 4.1.1 ve Teorem 5.2.2 yi kullanarak, (M, L, ∂) nin kapabil olması için $\ker(\partial)$ nin sıfır olması gerektiğini söylenir. Böylece $L \cong M$ olur. İspatın geri kalanı Sonuç 5.2.2 dan kolaylıkla görülebilir.

Şimdi Lie cebirlerine göre farklı özelliklere sahip olan kapabil ve kapabil olmayan çaprazlanmış modüllerle ilgili bir örneği inceleyelim.

Örnek 5.2.1. Herhangi bir 1-boyutlu Lie cebiri kapabil değildir. Fakat 1-boyutlu bir Lie cebiri $\langle t \rangle$ nin $\langle x \rangle$ üzerine $'x = x$ gibi bir etki ettiği tanımlanabilir ve bu durumda $(\langle x \rangle, \langle t \rangle, 0)$ kapabil çaprazlanmış modül olur. Çünkü

$$(\langle x \rangle, \langle t \rangle, 0) \cong (M, L, 0) / Z(M, L, 0)$$

dır. Burada $M = \langle u \rangle$ ve $L = \langle v, w \rangle$ abelyan Lie cebirleridir ve M üzerine L nin etkisi ${}^v u = 0$, ${}^w u = u$ gibi üreteçler olarak tanımlanır.

6. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN ÖRTÜLERİ VE KAPABİLİTESİ

Bu bölümde bir çaprazlanmış modül için örtü kavramı ve bir örtünün merkezi ile bir önceki bölümde verilen Z^* ideali arasındaki ilişki verilecektir.

6.1 Örtü Çaprazlanmış Modülü

Tanım 6.1.1. (M, L, ∂) , (M^*, L^*, ω) birer çaprazlanmış modül olsun. Eğer (M^*, L^*, ω) aşağıdaki şartları sağlayan (A, K, ω) gibi bir ideale sahipse (M^*, L^*, ω) çaprazlanmış modülüne (M, L, ∂) nın bir *örtüsü* denir.

- i) (A, K, ω) , (M^*, L^*, ω) nın komütatörünü ve merkezini içerir.
- ii) $(A, K, \omega) \cong H_2(M, L, \partial)$
- iii) $0 \rightarrow (A, K, \omega) \rightarrow (M^*, L^*, \omega) \rightarrow (M, L, \partial) \rightarrow 0$ dizisi tamdır.

(M_1, L_1, ∂_1) ve (M_2, L_2, ∂_2) çaprazlanmış modüllerinin direkt toplamlarının da bir çaprazlanmış modül olduğunu hatırlayalım.

$$(M_1, L_1, \partial_1) \oplus (M_2, L_2, \partial_2) = (M_1 \oplus M_2, L_1 \oplus L_2, \partial_1 \oplus \partial_2)$$

Burada L_1 ve L_2 sırasıyla M_2 ve M_1 üzerine aşık etki eder.

Teorem 6.1.1. (M, L, ∂) bir çaprazlanmış modül ve (M, L, ∂) nın bir projektif sunumu $0 \rightarrow (R_2, R_1, \delta) \rightarrow (F_2, F_1, \delta) \xrightarrow{(\pi_1, \pi_2)} (M, L, \partial) \rightarrow 0$ olsun. (M^*, L^*, ω) çaprazlanmış modülünün (M, L, ∂) nın bir örtüsü olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{R_2}{[F_1, R_2] + [R_1, F_2]}, \frac{R_1}{[F_1, R_1]}, \bar{\delta} \right) \cong \left(\frac{R_2 \cap [F_1, F_2]}{[F_1, R_2] + [R_1, F_2]}, \frac{F_1^2 \cap R_1}{[F_1, R_1]}, \bar{\delta} \right) \\ \oplus \left(\frac{S_2}{[F_1, R_2] + [R_1, F_2]}, \frac{S_1}{[F_1, R_1]}, \bar{\delta} \right)$$

ve

$$(M^*, L^*, \omega) \cong \left(\frac{F_2}{S_2}, \frac{F_1}{S_1}, \bar{\delta} \right), \quad (A, K, \omega) \cong \left(\frac{R_2}{S_2}, \frac{R_1}{S_1}, \bar{\delta} \right)$$

olacak şekilde (F_2, F_1, δ) nın (S_2, S_1, δ) idealinin mevcut olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki (S_2, S_1, δ) teoremin şartlarını sağlasın. O halde

$$\left(\frac{R_2}{S_2}, \frac{R_1}{S_1}, \bar{\delta} \right) \cong \left(\frac{R_2 \cap [F_1, F_2]}{[F_1, R_2] + [R_1, F_2]}, \frac{F_1^2 \cap R_1}{[F_1, R_1]}, \bar{\delta} \right) \cong H_2(L, M, \partial)$$

dır. Çünkü $[F_1, R_2] + [R_1, F_2] \subseteq S_2$ ve $[F_1, R_1] \subseteq S_1$ olduğundan

$$\left[\left(\frac{F_2}{S_2}, \frac{F_1}{S_1}, \bar{\delta} \right), \left(\frac{R_2}{S_2}, \frac{R_1}{S_1}, \bar{\delta} \right) \right] = 0 \text{ olur. Böylece } \left(\frac{R_2}{S_2}, \frac{R_1}{S_1}, \bar{\delta} \right), \left(\frac{F_2}{S_2}, \frac{F_1}{S_1}, \bar{\delta} \right) \text{ nin}$$

merkezini içerir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} \left(\frac{R_2}{S_2}, \frac{R_1}{S_1}, \bar{\delta} \right) &= \left(\frac{(R_2 \cap [F_1, F_2]) + S_2}{S_2}, \frac{(F_1^2 \cap R_1) + S_1}{S_1}, \bar{\delta} \right) \\ &\subseteq \left(\frac{[F_1, F_2] + S_2}{S_2}, \frac{F_1^2 + S_1}{S_1}, \bar{\delta} \right) = \left(\frac{F_2}{S_2}, \frac{F_1}{S_1}, \bar{\delta} \right)' \end{aligned}$$

dır. Böylece $\left(\frac{F_2}{S_2}, \frac{F_1}{S_1}, \bar{\delta} \right), (M, L, \partial)$ nın bir örtüsüdür.

Tersine olarak, kabul edelim ki $(M^*, L^*, \omega), (M, L, \partial)$ nın bir örtüsü ve

$$0 \rightarrow (A, K, \omega) \rightarrow (M^*, L^*, \omega) \rightarrow (M, L, \partial) \rightarrow 0$$

bir merkezsiz genişleme olsun. Burada $(A, K, \omega), H_2(M, L, \partial)$ ile izomorftur.

Lemma 5.2.1 yardımıyla

$$A + \overline{\beta_1}(\overline{F_2}) = M^*, \quad K + \overline{\beta_2}(\overline{F_1}) = L^*$$

olacak şekilde $(\overline{\beta_1}, \overline{\beta_2}): (\overline{F_2}, \overline{F_1}, \bar{\delta}) \rightarrow (M^*, L^*, \omega)$ olduğunu söyleyebiliriz.

$(A, K, \omega), (M^*, L^*, \omega)$ nın komütatörünü ve merkezini içerdiğinden $(\overline{\beta_1}, \overline{\beta_2})$ nin

örten olduğu sonucuna varabiliriz. Aynı zamanda benzer şekilde

$(\overline{\beta_1}|, \overline{\beta_2}|): (\overline{R_2}, \overline{R_1}, \bar{\delta}) \rightarrow (A, K, \omega)$ kısıtlanmış morfizmi de örtendir. Eğer

$$\ker(\overline{\beta_1}, \overline{\beta_2}) = \ker(\overline{\beta_1}|, \overline{\beta_2}|) = (\overline{S_2}, \overline{S_1}, \bar{\delta}) \text{ yazarsak}$$

$$0 \rightarrow (\overline{S_2}, \overline{S_1}, \bar{\delta}) \rightarrow (\overline{R_2}, \overline{R_1}, \bar{\delta}) \rightarrow (A, K, \omega) \rightarrow 0$$

abelyan çaprazlanmış modüllerin tam dizisini elde ederiz.

Teorem 6.1.2. (M, L, ∂) bir çaprazlanmış modül, $(M^*, L^*, \omega), (M, L, \partial)$ nın bir

örtüsü ve $0 \rightarrow (A, K, \omega) \rightarrow (M^*, L^*, \omega) \xrightarrow{(\phi_1, \phi_2)} (M, L, \partial) \rightarrow 0$ bunların bir bağlantılı

genişlemesi olsun. O halde $Z^*(M, L, \partial) = (\phi_1, \phi_2)(Z(M^*, L^*, \omega))$ dir.

İspat: Tanım 3.2.1 ü kullanarak, $Z^*(M, L, \partial)$, $(\phi_1, \phi_2)(Z(M^*, L^*, \omega))$ nın alt modülüdür. Aksini ispatlamak için,

$$0 \rightarrow (R_2, R_1, \delta) \rightarrow (F_2, F_1, \delta) \xrightarrow{(\pi_1, \pi_2)} (M, L, \partial) \rightarrow 0$$

(M, L, ∂) nın bir projektif sunumu olsun. Teorem 6.1.1 yardımıyla,

$(M^*, L^*, \omega) \cong \left(\frac{F_2}{S_2}, \frac{F_1}{S_1}, \bar{\delta} \right)$ olacak şekilde (F_2, F_1, δ) nın (S_2, S_1, δ) ideali mevcuttur.

(F_2, F_1, δ) nın (T_2, T_1, δ) uygun ideali için Lemma 5.2.1 deki notasyonlar kullanılarak

$$Z\left(\frac{F_2}{S_2}, \frac{F_1}{S_1}, \bar{\delta}\right) = \left(\frac{T_2}{S_2}, \frac{T_1}{S_1}, \bar{\delta}\right)$$

yazılarak

$$(\bar{T}_2, \bar{T}_1, \bar{\delta}) = \frac{(T_2, T_1, \delta)}{[(F_2, F_1, \delta), (R_2, R_1, \delta)]}$$

elde edilir. Çünkü $[(\bar{F}_2, \bar{F}_1, \bar{\delta}), (\bar{T}_2, \bar{T}_1, \bar{\delta})] \subseteq (\bar{S}_2, \bar{S}_1, \bar{\delta}) = 0$ dır. Böylece

$Z(\bar{F}_2, \bar{F}_1, \bar{\delta}) \supseteq (\bar{T}_2, \bar{T}_1, \bar{\delta})$ olur. Teorem 5.2.1 i kullanarak

$$Z^*(M, L, \partial) = (\pi_1, \pi_2)(Z(\bar{F}_2, \bar{F}_1, \bar{\delta}) \supseteq (\pi_1, \pi_2)(\bar{T}_2, \bar{T}_1, \bar{\delta}) \supseteq (\pi_1, \pi_2)\left(\left(\frac{T_2}{S_2}, \frac{T_1}{S_1}, \bar{\delta}\right)\right)$$

Son eşitsizlik vardır. Çünkü $[(F_2, F_1, \delta), (R_2, R_1, \delta)] \subseteq (S_2, S_1, \delta)$ dir. Bu da sonucu verir.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Literatürde çaprazlanmış modüllerin teorik cebirsel yapısı ile ilgili çalışmalar mevcuttur. Bu bilgiler dahilinde Lie cebirlerindeki kapabilite kavramı Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin kapabilitesi kavramına genelleştirilmiştir. Ayrıca kapabilite ile ilgili bazı kriterler verilmiştir. Dördüncü bölümde Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin bir merkezsiz genişlemesi $0 \rightarrow (N, K, \partial) \rightarrow (M, L, \partial) \xrightarrow{(\tau_1, \tau_2)} (T, Q, \omega) \rightarrow 0$ verildiğinde abelyan çaprazlanmış modüllerin

$(N, K, \partial) \otimes Ab(M, L, \partial) \xrightarrow{(\gamma_1, \gamma_2)} H_2(M, L, \partial) \xrightarrow{(\sigma_1, \sigma_2)} H_2(T, Q, \omega) \rightarrow (N, K, \partial) \rightarrow H_1(M, L, \partial) \rightarrow H_1(T, Q, \omega) \rightarrow 0$ dizisinin tam olduğu ve buradan ∂ örten olmak üzere (M, L, ∂) çaprazlanmış modülünün $(N, 0, \partial)$ merkezsiz ideali

$$(\sigma_1, \sigma_2) : H_2(M, L, \partial) \rightarrow H_2(T, Q, \omega)$$

morfizmi ile bir monik olduğu gösterilmiştir. Böylece (T, Q, ω) ile $(M, L, \partial) / (N, 0, \partial)$ izomorftur.

Beşinci bölümde kapabil çaprazlanmış modül tanımlanarak bir (M, L, ∂) çaprazlanmış modülünün herhangi bir

$$0 \rightarrow (R_2, R_1, \delta) \rightarrow (F_2, F_1, \delta) \xrightarrow{(\pi_1, \pi_2)} (M, L, \partial) \rightarrow 0$$

projektif sunumu için $Z^*(M, L, \partial) = (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)(Z(\bar{F}_2, \bar{F}_1, \bar{\delta}))$ olduğu gösterilmiştir. Buradan (M, L, ∂) nin kapabil olması için gerek ve yeter şartın $Z^*(M, L, \partial) = 0$ olması sonucu elde edilmiştir. Herhangi bir L Lie cebiri için $Z^*(L, L, Id) = (Z^*(L), Z^*(L), Id)$ ve $Z^*(0, L, 0) = (0, Z^*(L), 0)$ olduğundan L nin kapabil olması için gerek ve yeter şartın ise (L, L, Id) nin kapabil olması olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bir (M, L, ∂) çaprazlanmış modülü için ∂ örten olmak üzere (M, L, ∂) nin kapabil olması için gerek ve yeter şartın L nin kapabil ve $M \cong L$ olması olduğu sonucu elde edilmiştir.

Altıncı bölümde ise bir (M, L, ∂) çaprazlanmış modülünün bir

$$0 \rightarrow (R_2, R_1, \delta) \rightarrow (F_2, F_1, \delta) \xrightarrow{(\pi_1, \pi_2)} (M, L, \partial) \rightarrow 0$$

projektif sunumu verildiğinde (M^*, L^*, ω) çaprazlanmış modülünün (M, L, ∂) nın bir örtüsü olması için gerek ve yeter şart elde edilmiştir. Son olarak

$$0 \rightarrow (A, K, \omega) \rightarrow (M^*, L^*, \omega) \xrightarrow{(\phi_1, \phi_2)} (M, L, \partial) \rightarrow 0$$

bunların bir bağlantılı genişlemesi olmak üzere $Z^*(M, L, \partial) = (\phi_1, \phi_2)(Z(M^*, L^*, \omega))$ dir.

Daha sonra yapılacak çalışmalar olarak bu tezde tanımlanan kavramlar ve elde edilen sonuçlar daha genel bir cebirsel kategori olan çok işlemli grupların kategorisinde incelenebilir.



KAYNAKLAR

- [1] Whitehead, J. H. C. 1949. Combinatorial homotopy II. Bull. Amer. Math. Soc. 55: 453-496.
- [2] Lavendhomme, R. ve Roisin, J. R. 1980. Cohomologie non abélienne de structures algébriques. J. Algebra 67: 385-414.
- [3] Kassel, C. ve Loday, J. L. 1982. Extensions centrales d'algèbres de Lie. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 32: 119-142.
- [4] Casas, J. M., Inassaridze, N. ve Ladra, M. 2010. Homological aspects of Lie algebra crossed modules. Manuscripta Math. 131: 385-401.
- [5] Moneyhun, K. 1994. Isoclinisms in Lie algebras. Algebra, Groups and Geometries 11: 9-22.
- [6] Salemkar, A. R., Alamian, V. ve Mohammadzadeh, H. 2008. Some properties of the Schur multiplier and covers of Lie algebras. Comm. Algebra 36(2): 697-707.
- [7] Batten, P. ve Stitzinger, E. 1996. On covers of Lie algebras. Comm. Alg. 24: 4301-4317.
- [8] Aytekin, A., 2005. Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülleri, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya.
- [9] Edalatzadeh, B., 2014. Capability of crossed modules of Lie algebras. Comm. Algebra. 42(8): 3366-3380.
- [10] Aytekin, A., 2010. Lie-Rinehart cebirlerin çaprazlanmış modülleri, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- [11] Casas, J. M. ve Ladra, M., 1995. Perfect crossed modules in Lie algebras. Comm. Algebra 23(5): 1625-1644.
- [12] Casas, J. M. 1999. Universal central extension and the second invariant of homology of crossed modules in Lie algebras. Com. Algebra 27(8): 3811-3821.
- [13] Casas, J. M. ve Ladra, M. 1993. Homology of crossed modules in Lie algebras. Bull. Soc. Math. Belgique Ser. A 45: 59-84.

- [14] Everaert, T. ve Van der Linden, T. 2004. Baer invariants in semi-abelian categories II. *Theory and Applications of Categories* 12(4): 195-224.
- [15] Weibel, C. A. 1994. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [16] Casas, J. M. ve Ladra, M., 1998. The actor of a crossed module in Lie algebras. *Comm. Algebra* 26(7): 2065-2089.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Eda ŞAHİN
Doğum Tarihi ve Yeri : 22.09.1991 / KAYSERİ
E-posta adresi : edaaltinoluk2@gmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümü, 2013
Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı, 2017

