

LİE GRUPLARI ve CEBİRLERİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

EBRU AÇIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Topoloji Tezli Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nülfir ÖZDEMİR

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Haziran 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Ebru AÇIK'ın " Lie Grupları ve Cebirlerinin Temel Özellikleri" başlıklı tezi 20/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği" nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Adı-Soyadı		İmza
Üye(Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR	
Üye	: Prof.Dr. Nedim DEĞİRMENCİ	
Üye	: Dr. Öğretim Üyesi Mehmet SOLGUN	

.....
Enstitü Müdürü

ÖZET

LİE GRUPLARI ve CEBİRLERİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Ebru AÇIK

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Haziran, 2019

Danışman : Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

Bu tez çalışmasında manifold kavramı açıklanmış ve temel bazı örneklerle yer verilmiştir. Manifold yapısı üzerinde, Lie Grup ve Lie Cebir yapısında kullanılmak üzere temel teoremler verilerek ispatlanmıştır. Lie Grubu tanımı ifade edilmiş ve bir Lie grubunun birindeki tanjant uzayı ve özellikleri incelenerek örnekler verilmiştir. Bir Lie grubunun tanjant uzayı üzerinde braket işlemi verilmiş ve tanjant uzayı üzerinde Lie Cebri inşaa edilmiştir. Bazı temel Lie grubu örnekleri ve bu grupların Lie Cebirleri ele alınmıştır.

Anahtar Sözcükler: Manifold, Tanjant vektör, Vektör alanı

ABSTRACT

Department of Mathematics

Eskişehir Technical University, Graduate School of Sciences, June, 2019

Supervisor: Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR

In this thesis, manifold is explained and some basic examples are given. On the manifold structure, the fundamental theorems are used and proved to be used in Lie Group and Lie Algebra structure. The definition of Lie Group is expressed and the tangent space of a Lie group at the identity and its properties are examined and examples are given. Bracket operation was given on the tangent space of a Lie group and Lie Algebra was constructed on the tangent space. Some basic Lie group examples and Lie Algebras of these groups are discussed.

Keywords: Manifolds, Tangent vector, Vector field

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, çalışmalarımın tamamlanmasını sağlayan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Nülfir ÖZDEMİR'e , yardım ve yol göstermelerinden dolayı Dr. Öğretim Üyesi Mehmet SOLGUN'a,aldığım her kararda ve yaptığım her çalışmada yanımda olup destek veren aileme ve hiçbir zaman beni yalnız bırakmayan Burak USLUCA'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ebru AÇIK
Haziran 2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.



Ebru AÇIK

İçindekiler

BAŞLIK SAYFASI	i
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1. C^∞ Manifoldlar ve Örnekleri	2
2.2. Tanjant Vektör	8
2.3. Alt Manifoldlar	13
2.4. Vektör Alanları	33
2.5. Lie Braket	37
2.6. İlintili Vektör Alanları	39
2.7. Matris Üstel Dönüşüm(Eksponensiyel)	40
3. LİE GRUP	45
3.1. Lie Grup	45
3.2. Lie Alt Gruplar	47
3.3. Bir Lie Grubunun Birimdeki Tanjant Uzayı	48
3.4. Bir Lie Grubunun Sol-invaryant Vektör Alanı	50

4. LİE CEBRİ	53
4.1. Lie Cebri	53
4.2. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ üzerindeki Lie Braket	54
KAYNAKÇA	57
ÖZGEÇMİŞ	58



Şekil Listesi

2.1. M manifoldunun p noktasını içeren (U, φ) kartı	2
2.2. $U \cap V \neq \emptyset$ olduğunda (U, φ) ve (V, ψ) kartlarının uyumluluğu	3
2.3. S^1 için C^∞ uyumlu kartlar	4
2.4. Manifold için ters fonksiyon teoremi	7
2.5. M manifoldundan $\mathbb{R}^n$ uzayına C^∞ bir dönüşüm	8
2.6. $p \in M$ noktasındaki tanjant vektör	11
2.7. (U, φ) kartının izdüşüm dönüşümleri	11
2.8. M manifoldunun regüler alt manifoldu	14
2.9. Uyarlanmış ve uyarlanmamış kart örnekleri	15
2.10. Regüler alt manifoldun bir manifold olması	16
2.11. Regüler Alt Manifold	19
2.12. Sabit rank teoremi	24
2.13. $\mathbb{R}^n$ için sabit rank teoremi	25
2.14. Birebir ve immersiyon olup embedding olmayan dönüşüm örneği	28
2.15. İmmersed alt manifold örneği(Sekiz fonksiyonu)	29
2.16. $\mathbb{R}^2$ üzerinde C^∞ bir vektör alanı	34

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Gerçek Sayılar Kümesi
M^m	: m-boyutlu Manifold
C^∞	: her mertebeden türevlenebilir ve türevleri sürekli fonksiyonların kümesi
$\mathcal{U}$	: Bir manifold için atlas olan aile
$\mathbb{R}^{n \times n}$	: $n \times n$ lik reel girdili matrisler uzayı
$GL(n, \mathbb{R})$	: Genel Lineer Grup
$SL(n, \mathbb{R})$	: Özel Lineer Grup
$O(n)$	: Ortogonal Grup
X_p	: p Noktasındaki Tanjant vektör
$T_p M$	: Bir M Manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı
$\chi(M)$	: M manifoldu üzerindeki vektör alanları kümesi
G	: Lie Grup
$[,]$	: Lie braket

1 GİRİŞ

Manifold ve tarihçesi hakkında bilgi ekle.Bunu Lie gruba bağla



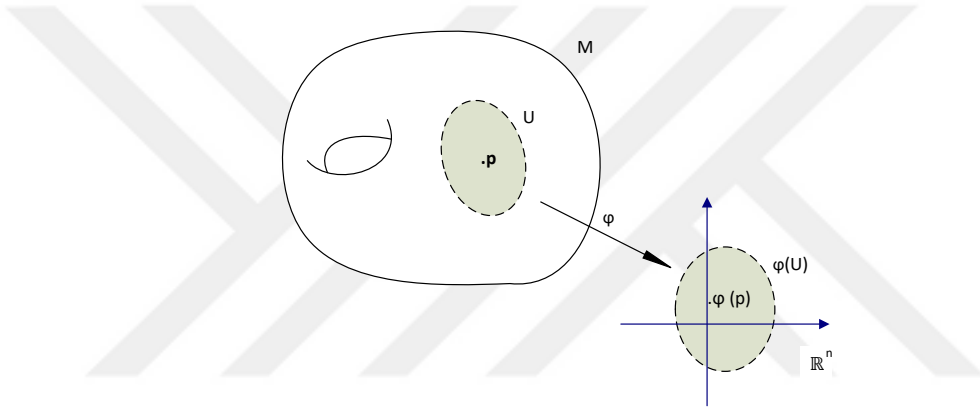
2 TEMEL KAVRAMLAR

2.1 C^∞ Manifoldlar ve Örnekleri

Tanım 2.1.1. M ikinci sayılabilir ve Hausdorff bir topolojik uzay olsun. Her $p \in M$ noktası için bu noktayı içeren bir U açığı ve bu açık üzerinde

$$\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

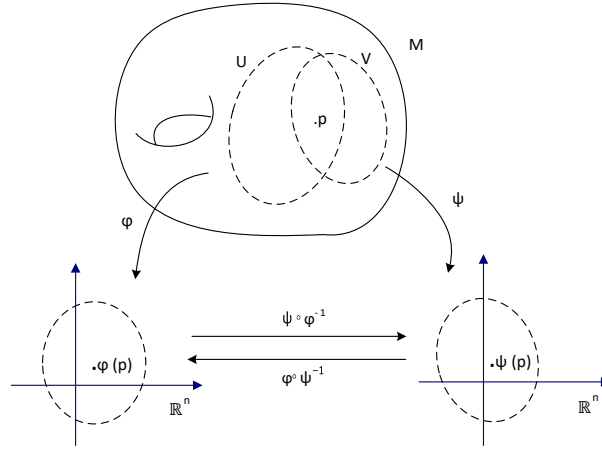
olacak şekilde bir φ homeomorfizması varsa M uzayına **n-boyutlu topolojik manifold** denir. (U, φ) ikilisine ise M uzayının p noktasını içeren bir kartı denir.



Şekil 2.1. M manifoldunun p noktasını içeren (U, φ) kartı

M bir topolojik manifold olsun. M uzayının (U, φ) ve (V, ψ) kartları olmak üzere;

- $U \cap V = \emptyset$
ya da
- $U \cap V \neq \emptyset$ iken $\varphi \circ \psi^{-1}$ ve $\psi \circ \varphi^{-1}$ dönüşümleri C^∞ , (her mertebeden türevi var ve türevleri sürekli)



Şekil 2.2. $U \cap V \neq \emptyset$ olduğunda (U, φ) ve (V, ψ) kartlarının uyumluluğu

koşulları sağlanıyorsa bu iki karta C^∞ uyumlu kartlar denir. $\varphi \circ \psi^{-1}$ ve $\psi \circ \varphi^{-1}$ dönüşümlerine de kartlar arasında geçiş fonksiyonları denir.

Tanım 2.1.2. M topolojik manifoldu üzerinde $\mathfrak{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, C^∞ uyumlu kartlar ailesi verilsin. Eğer

$$M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$$

ise bu aileye M manifoldu üzerinde bir C^∞ atlas denir.

$\mathfrak{U}_1$ ve $\mathfrak{U}_2$ aileleri M manifoldu için iki farklı atlas olsunlar. Eğer $\mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2$ ailesi de M manifoldu için bir atlas ise bu iki atlası uyumlu atlaslar denir ve iki atlasın uyumlu olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.1.3. $\mathfrak{U}$ ailesi M manifoldu için bir atlas olmak üzere, $\mathfrak{U}$ ailesi M manifoldunda kendinden başka herhangi bir atlas tarafından içerilmiyorsa bu atlası tam atlas denir.

M topolojik manifoldu üzerinde bir C^∞ tam atlas varsa M uzayına C^∞ manifold denir.

Teorem 2.1.4. M manifoldundaki her C^∞ atlası içeren bir tek tam atlas vardır.

Örnek 2.1.5. Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ bir C^∞ manifoldtur. Her $p \in \mathbb{R}^n$ için

$$I_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

birim dönüşümü bir homeomorfizmadır. Dolayısıyla $(\mathbb{R}^n, I_{\mathbb{R}^n})$ kartı Öklid uzayı için bir atlasıdır. $\mathbb{R}^n$ tek kartla örtülebilen C^∞ bir manifoldtur.

Örnek 2.1.6. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ kümesi 1-boyutlu C^∞ manifold örneğidir;

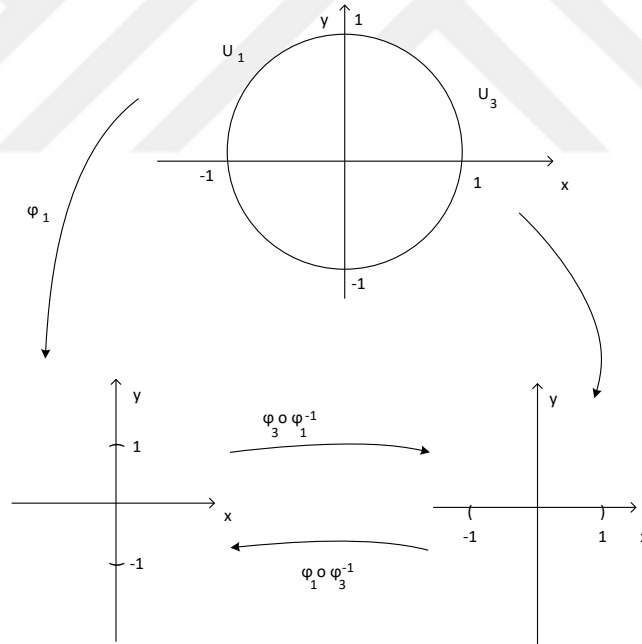
$$U_1 = \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\}, \varphi_1(x, y) = x$$

$$U_2 = \{(x, y) \in S^1 \mid y < 0\}, \varphi_2(x, y) = x$$

$$U_3 = \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}, \varphi_3(x, y) = y$$

$$U_4 = \{(x, y) \in S^1 \mid x < 0\}, \varphi_4(x, y) = y$$

kartlarının oluşturduğu $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^4$ ailesi S^1 için bir atlasıdır. Bu kartlar aynı zamanda C^∞ uyumlu kartlardır:



Şekil 2.3. S^1 için C^∞ uyumlu kartlar

$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ve $U_3 \cap U_4 = \emptyset$ olduğundan bu kümeler üzerindeki kartlar C^∞ uyumlu kartlardır.

$U_1 \cap U_3 \neq \emptyset$ için $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \varphi_3(x, \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2}$ olduğundan $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ dönüşümü C^∞ bir dönüşümdür.

$U_2 \cap U_4 \neq \emptyset$ için $\varphi_4 \circ \varphi_2^{-1}(x) = \varphi_4(x, -\sqrt{1-x^2}) = -\sqrt{1-x^2}$ olduğundan $\varphi_4 \circ \varphi_2^{-1}$ dönüşümü de C^∞ bir dönüşümdür.

Böylece herhangi iki kart için $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^4$ ailesi C^∞ uyumlu kartlar ailesi olup

$$S^1 = \bigcup_i U_i$$

sağladığından bu aile S^1 için C^∞ atlasıdır.

Örnek 2.1.7. S^1 kümesi için bir başka atlas daha bulunabilir: $N = (0, 1)$ noktası ve $U_N = S^1 - \{N\}$ açık kümesi olmak üzere $p \in U_N$ noktası ile N noktasını birleştiren doğrunun $\mathbb{R}^2$ içindeki $\mathbb{R} := \{(x, 0)\}$ düzlemini kestiği nokta $\varphi(p)$ olarak tanımlansın. Bu durumda bu dönüşüm;

$$\begin{aligned} \varphi_N : U_N &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{x}{1-y} \end{aligned}$$

şeklindedir. $q \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi^{-1}(q)$ ise q noktası ile N noktasını birleştiren doğrunun S^1 çemberini kestiği noktadır. O halde

$$\begin{aligned} \varphi_N^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow U_N \\ t &\mapsto \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $(\varphi_N^{-1} \circ \varphi_N)(x, y) = (x, y)$ ve $(\varphi_N \circ \varphi_N^{-1})(t) = t$ olup örtüşme fonksiyonlarıdır. Yani φ_N bir homeomorfizmdir. Benzer şekilde $S = (0, -1)$ alınarak da φ_S bulunur. Sonuç olarak $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ ailesi S^1 için bir atlas belirtir.

Örnek 2.1.8. $S^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$ kümesi için atlas;

$N = (0, 0, \dots, 1)$ noktası ve $U_N = S^n - \{N\}$ açık kümesi olmak üzere $p \in U_N$ noktası ile N noktasını birleştiren doğrunun $\mathbb{R}^{n+1}$ içindeki $\mathbb{R}^n \cong \{(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)\}$ düzlemini kestiği nokta $\varphi(p)$ olarak tanımlansın. Bu dönüşümün analitik ifadesi

$$\begin{aligned} \varphi_N : U_N &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $q = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \cong \{(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)\}$ olmak üzere $\varphi^{-1}(q)$ ise $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ noktası ile N noktasını birleştiren doğrunun S^n küresini kestiği noktadır. Açık olarak ifade edilecek olursa

$$\varphi^{-1}(q) = \left(\frac{2y_1}{\|q\|^2+1}, \frac{2y_2}{\|q\|^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{\|q\|^2+1}, \frac{\|q\|^2-1}{\|q\|^2+1} \right)$$

ve

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = I_{S^n} \text{ ve } \varphi \circ \varphi^{-1} = I_{\mathbb{R}^n}$$

olur. Dolayısıyla U_N açığı üzerindeki bu dönüşüm bir homeomorfizmadır ve (U_N, φ_N) , S^n kümesi için bir karttır.

Benzer şekilde $S = (0, 0, \dots, 0, -1)$ noktası ve $U_S = S^n - \{S\}$ açık kümesi olmak üzere $p \in U_S$ noktası ile S noktasını birleştiren doğrunun $\mathbb{R}^{n+1}$ içindeki $\mathbb{R}^n \cong \{(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)\}$ düzlemini kestiği nokta $\psi(p)$ olarak tanımlansın. Bu dönüşümün analitik ifadesi

$$\begin{aligned} \psi_S : U_S &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \frac{x_2}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. U_S açığı üzerindeki bu dönüşüm bir homeomorfizmadır ve (U_S, ψ_S) , S^n kümesi için bir karttır. Ayrıca $U_N \cap U_S \neq \emptyset$ olup $\psi_S \circ \varphi_N^{-1}$ ve $\varphi_N \circ \psi_S^{-1}$ dönüşümleri C^∞ dönüşümlerdir ve dolayısıyla bu kartlar uyumludur. Sonuç olarak $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \psi_S)\}$ ailesi S^n küresi için bir atlas belirtir.

Örnek 2.1.9. Bir manifoldun açık alt kümesi de manifoldtur. Örneğin; $\mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ manifoldunun $GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ alt kümesi için $\det : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü sürekli olduğundan $GL(n, \mathbb{R})$ açık bir alt küme olur. Böylece $GL(n, \mathbb{R})$ kümesinin C^∞ bir manifold olduğu görülür.

Önerme 2.1.10. $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ailesi M manifoldu için, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ ailesi N manifoldu için atlaslar olsunlar. Bu durumda;

$$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta) \mid \varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}\}$$

ailesi $M \times N$ için bir atlasdır.

Tanım 2.1.11. $p \in \mathbb{R}^n$ noktasının en az U komşuluğunda,

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

C^∞ f fonksiyonu bir C^∞ terse sahipse, f fonksiyonuna $p \in U$ noktasında lokal terslenebilir denir. $f_{*,p} : T_p U \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^n$ dönüşümünün matrisi ise f dönüşümünün Jacobien matrisidir.

Teorem 2.1.12 ($\mathbb{R}^n$ için Ters Fonksiyon Teoremi). $W \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir C^∞ fonksiyon olsun. Herhangi bir $p \in W$ noktasında f fonksiyonunun lokal olarak terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun p noktasındaki Jacobien matrisinin determinantının sıfırdan farklı olmasıdır.

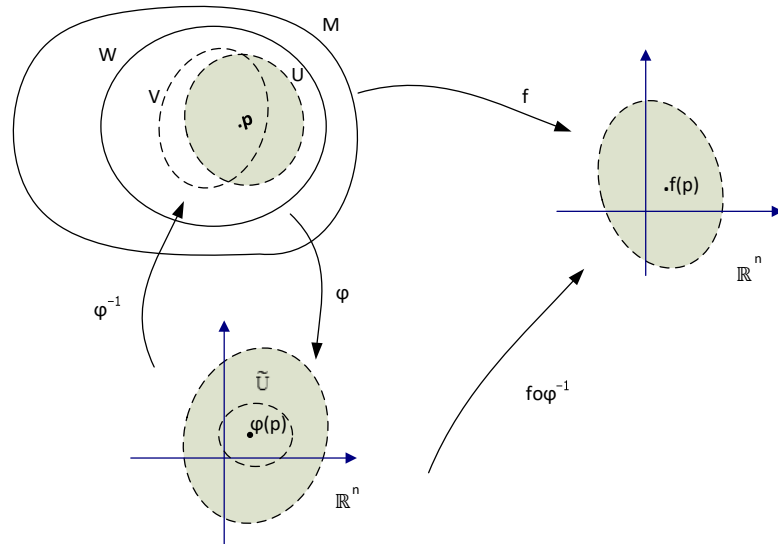
Teorem 2.1.13 (Bir Manifold için Ters Fonksiyon Teoremi). M^n bir manifold ve $p \in M$ noktasının W komşuluğunda tanımlı $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun koordinat fonksiyonları $f = (f_1, \dots, f_n)$ olsun.

p noktasını içeren en az bir $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ kartı için U açığı üzerinde f fonksiyonunun Jacobien matrisinin determinantı sıfırdan farklı ise p noktasının öyle bir V komşuluğu vardır ki f fonksiyonu bu komşulukta lokal olarak terslenebilirdir. Yani $f|_V : V \rightarrow f(V)$ bir diffeomorfizmdir. $((V, f|_V), M$ manifoldu için bir karttır.)

Kanıt. p noktasını içeren en az bir $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ kartı için f fonksiyonunun Jacobien matrisinin determinantı sıfırdan farklı olduğundan $\mathbb{R}^n$ için olan ters fonksiyon teoreminden $\varphi(p)$ noktasının öyle bir $\tilde{U}$ komşuluğu vardır ki

$$f \circ \varphi^{-1} : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow (f \circ \varphi^{-1})(\tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$$

dönüşümü bu komşulukta lokal olarak terslenebilirdir. O halde $f \circ \varphi^{-1}$ dönüşümü bu komşulukta bir diffeomorfizmdir.



Şekil 2.4. Manifold için ters fonksiyon teoremi

Buradan p noktasının bir V komşuluğunda

$$f|_V = (f|_V \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$$

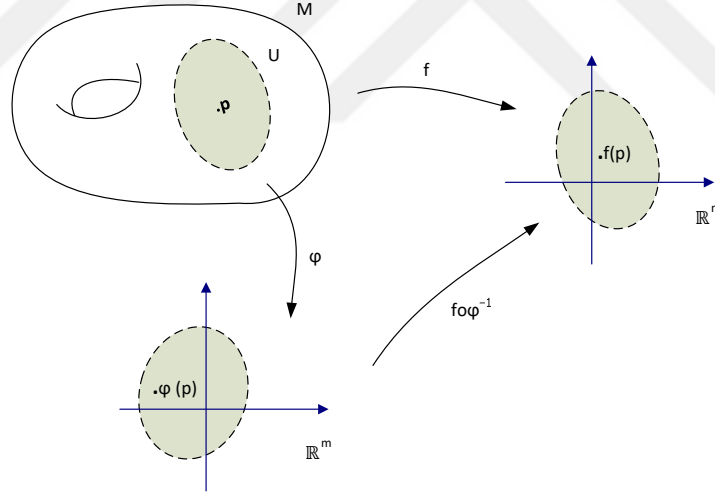
dönüşümünün de bir diffeomorfizm olduğu elde edilir. Yani $(V, f|_V)$, M manifoldunun bir kartıdır. $\square$

2.2 Tanjant Vektör

M^m bir C^∞ manifold olsun. $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu verildiğinde, her $p \in M$ noktası ve bu noktayı içeren en az bir (U, φ) kartı için

$$f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dönüşümü C^∞ ise f dönüşümüne M manifoldundan $\mathbb{R}^n$ uzayına C^∞ bir dönüşüm denir.



Şekil 2.5. M manifoldundan $\mathbb{R}^n$ uzayına C^∞ bir dönüşüm

Herhangi bir $p \in \mathbb{R}^n$ noktası için $\mathbb{R}_p^n = \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$ kümesi ve bu küme üzerinde;

$$\begin{aligned}
+ : \quad \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_p^n &\longrightarrow \mathbb{R}_p^n \\
((p, v_1), (p, v_2)) &\longrightarrow (p, v_1) + (p, v_2) := (p, v_1 + v_2) \\
\cdot : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}_p^n &\longrightarrow \mathbb{R}_p^n \\
(\lambda, (p, v)) &\longrightarrow \lambda(p, v) := (p, \lambda v)
\end{aligned}$$

işlemleri tanımlansın. Bu işlemler ile $\mathbb{R}_p^n$ kümesi bir vektör uzayı olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\psi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}_p^n \\
v &\mapsto \psi(v) := (p, v)
\end{aligned}$$

dönüşümü bir vektör uzayı izomorfizmasıdır ve $\mathbb{R}_p^n$ uzayının her bir elemanına bir **tanjant vektör** denir.

$C^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \mid f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, C^\infty \text{ dönüşümler} \}$ olmak üzere, herhangi bir $(p, v) := v_p$ tanjant vektörü kullanılarak;

$$\begin{aligned}
D_{v_p} : C^\infty(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R} \\
f &\mapsto D_{v_p}(f) := \left. \frac{d}{dt}(f(p + tv)) \right|_{t=0}
\end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın. Aslında burada $D_{v_p}(f)$, f fonksiyonunun p noktasında v vektörü yönündeki türevidir. Bu dönüşüm;

1. $D_{v_p}(\lambda f + g) = \lambda D_{v_p}(f) + D_{v_p}(g)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $D_{v_p}(fg) = D_{v_p}(f)g(p) + D_{v_p}(g)f(p)$

özelliklerini sağlar. Birinci özellik dönüşümün lineer olduğunu ifade eder, ikinci özelliğe ise Leibniz kuralı adı verilir.

Herhangi $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları verildiğinde $p \in \mathbb{R}^n$ noktasında

$$X : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

lineer dönüşümü

$$X[fg] = X[f]g(p) + f(p)X[g]$$

koşulunu sağlıyorsa X dönüşümüne bir derivasyon denir ve $p \in \mathbb{R}^n$ noktasındaki tüm derivasyonların kümesi $T_p\mathbb{R}^n$ ile gösterilir.

$X, Y \in T_p\mathbb{R}^n$ ve $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir C^∞ fonksiyon olmak üzere;

$$\begin{aligned}
(X + Y)[f] &:= X[f] + Y[f] \\
(\lambda X)[f] &:= \lambda X[f]
\end{aligned}$$

olarak tanımlanan işlemler ile $T_p\mathbb{R}^n$ bir vektör uzayıdır.

Herhangi $p \in \mathbb{R}^n$ noktası için;

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_p^n &\rightarrow T_p\mathbb{R}^n \\ v_p &\mapsto \varphi(v_p) := D_{v_p}\end{aligned}$$

olarak tanımlanan dönüşüm bir vektör uzayı izomorfizmasıdır. O halde herhangi $p \in \mathbb{R}^n$ noktası için $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}_p^n \cong \mathbb{R}^n$ olur.

Herhangi bir $p \in \mathbb{R}^n$ için $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_p\end{aligned}$$

dönüşümü $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p (f + g) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_p + \frac{\partial g}{\partial x_i}\bigg|_p$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p (fg) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_p g(p) + f(p) \frac{\partial g}{\partial x_i}\bigg|_p$$

olduğundan p noktasında bir derivasyondur ve

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p \right\}$$

kümesi lineer bağımsızdır. Bu nedenle bu küme $T_p\mathbb{R}^n$ için bir tabandır.

Tanım 2.2.1. M^m bir C^∞ manifold ve herhangi bir $p \in M$ noktası olmak üzere

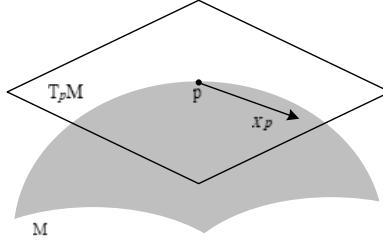
$$X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

lineer dönüşümü ve $f, g \in C^\infty(M)$ fonksiyonları için

$$X[fg] = X[f]g(p) + f(p)X[g]$$

Leibniz koşulunu sağlıyorsa bu dönüşüme $p \in M$ noktasında bir derivasyon denir.

p noktasındaki tüm derivasyonların kümesi bir vektör uzayıdır ve bu vektör uzayı M uzayının p noktasındaki tanjant uzayı olarak adlandırılır, T_pM olarak gösterilir. Bu derivasyonlara bu noktadaki **tanjant vektör** denir.

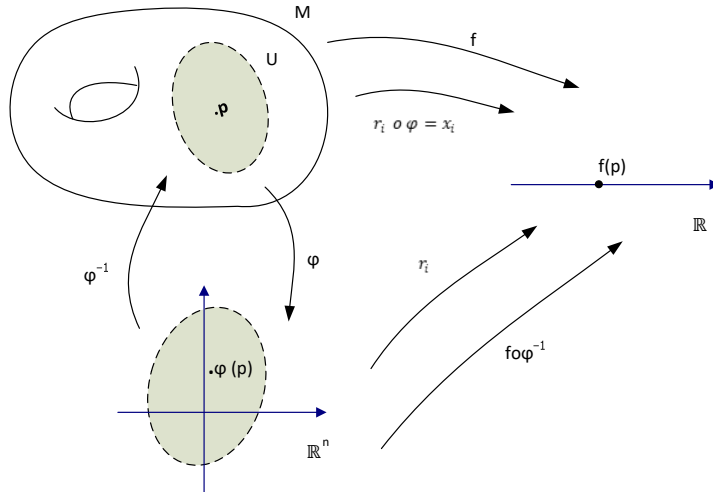


Şekil 2.6. $p \in M$ noktasındaki tanjant vektör

M^n bir C^∞ manifold, $p \in M$ ve (U, φ) p noktasını içeren bir koordinat kartı olsun. $r_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $r_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_i$, $\{i = 1, \dots, n\}$ izdüşüm dönüşümleri olmak üzere; (U, φ) kartı üzerinde $x_i := r_i \circ \varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümleri tanımlansın. f , p noktasını içeren bir açık küme üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon ise

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (f) := \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1})$$

şeklinde gösterilir.



Şekil 2.7. (U, φ) kartının izdüşüm dönüşümleri

Bir Dönüşümün Diferansiyeli

N^n ve M^m birer C^∞ manifoldlar ve $F : N \rightarrow M$ bir C^∞ fonksiyon olsun. $F(p)$ noktasını içeren bir U açığından $\mathbb{R}$ ye tanımlı herhangi bir $f \in C^\infty(U)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} F_{*,p} : T_p N &\rightarrow T_{F(p)} M \\ X_p &\mapsto F_{*,p}(X_p) := X_p[f \circ F] \end{aligned}$$

dönüşümüne F fonksiyonunun p noktasındaki türev dönüşümü denir. Bu dönüşüm lineer bir dönüşümdür.

Rank, Kritik ve Regüler Nokta

N^n ve M^m birer C^∞ manifoldlar ve $F : N \rightarrow M$ bir C^∞ fonksiyon olsun. Herhangi bir $p \in N$ noktası için

$$F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$$

lineer dönüşümünün rankına ($F_{*,p}$ lineer dönüşümünün görüntü uzayına boyutuna) p noktasında F **fonksiyonunun rankı** denir.

$p \in (U, \varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ ve $F(p) \in (V, \psi = (y_1, y_2, \dots, y_m))$ kartları ele alındığında $\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_p \right]$ Jacobien matrisinin rankı F fonksiyonunun p noktasındaki rankıdır.

Eğer bir $p \in N$ noktasında $F_{*,p}$ dönüşümü örten değilse p noktasına **kritik nokta**, örten ise p noktasına **regüler nokta** denir.

Eğer bir $q \in M$ noktası bir kritik noktanın görüntüsü ise bu noktaya **kritik değer**, M deki bir nokta kritik değer değil ise bu noktaya **regüler değer** denir. Diğer bir ifadeyle $q \in M$ noktasının ters görüntüsü olan $F^{-1}(q)$ kümesi N manifoldunun hiçbir kritik noktasını içermiyorsa q noktası bir regüler değerdir.

Önerme 2.2.2. M^n bir manifold ve $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bir C^∞ fonksiyon olsun. $p \in M$ noktasının kritik nokta olması için gerek ve yeter koşul p noktasını içeren en az bir $(U, \varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ kartı için

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_p = 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

olmasıdır.

Kanıt. $p \in M$ bir kritik nokta ise p noktasını içeren en az bir (U, φ) kartı için

$$f_{*,p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$$

dönüşümü örten değildir. Bu dönüşümün matrisi

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_p & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_p \end{array} \right]$$

şeklinededir. $\mathbb{R}$ 1-boyutlu bir vektör uzayı olduğundan $f_{*,p}$ dönüşümünün rankı ya birdir ya sıfırdır. Ancak $f_{*,p}$ dönüşümü örten olmadığından rankı 1 olamaz. Bu durumda bu dönüşüm sıfır dönüşümüdür.

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_p & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_p \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

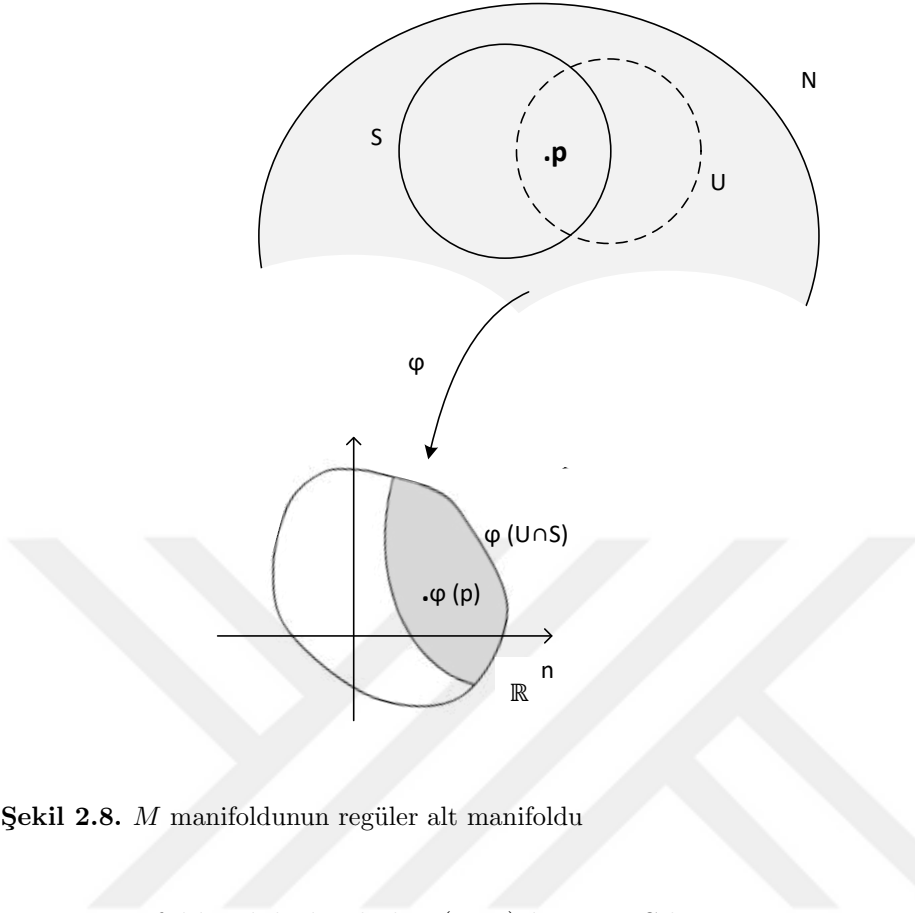
Tersine; p noktasını içeren bir $(U, \varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ kartı için $\frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_p = 0, 1 \leq j \leq n$ ise $f_{*,p}$ dönüşümü sıfır dönüşümüdür ve $f_{*,p}$ örten değildir, p bir kritik noktadır. $\square$

2.3 Alt Manifoldlar

N^n bir C^∞ manifold ve $S \subset N$ olsun. Her $p \in S$ noktası için N manifoldunda en az bir $(U, \varphi) = (U, (x_1, \dots, x_n))$ kartı

$$U \cap S = \left\{ p \in U : \varphi(p) = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_k(p), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n-k) \text{ tane}}) \right\}$$

koşulunu sağlayacak şekilde bulunabiliyorsa S alt kümesine N manifoldunun k -boyutlu regüler alt manifoldu denir.



Şekil 2.8. M manifoldunun regüler alt manifoldu

N manifoldundaki böyle bir (U, φ) kartına S kümesine göre uyarlanmış bir kart denir.

$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümünün $U \cap S$ kümesine kısıtlanmış;

$$\begin{aligned} \varphi|_{U \cap S} &:= \varphi_S : U \cap S \rightarrow \mathbb{R}^k \\ q &\mapsto \varphi_S = (x_1(q), x_2(q), \dots, x_k(q)) \end{aligned}$$

olarak ele alınabilir. Bu nedenle S kümesine N manifoldunun **k-boyutlu** regüler alt manifoldu denir. Burada S üzerindeki topoloji N manifoldundan devralınan alt uzay topolojisiidir.

N^n manifoldunun k -boyutlu regüler bir alt manifoldu S olsun. Regüler alt manifoldun boyutu manifoldun boyutuna eşit olabilir ($n = k$). Eğer $n = k$ ise bu durumda N manifoldunun en az bir (U, φ) kartı vardır öyleki

$$U \cap S = \{p \in U : \varphi(p) = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)), x_i(p) \neq 0, 1 \leq i \leq n\}$$

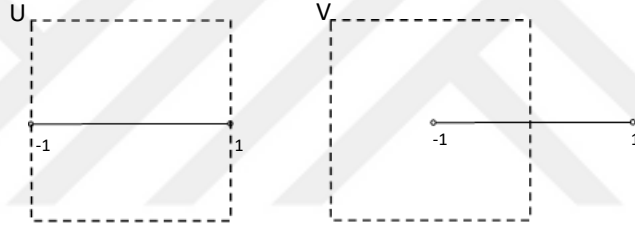
olur. (U, φ) kartı N manifoldunun bir kartı olduğundan U açığı üzerinde $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinat dönüşümlerinin her biri sıfır sabit fonksiyonundan farklıdır. Böylece $U \cap$

$S = U$ ve $U \subseteq S$ elde edilir. Buradan her $p \in S$ noktası için $U_p \subseteq S$ olacak şekilde bir U_p açığı için

$$\bigcup_{p \in S} U_p = S$$

olup S kümesinin açık olduğu bulunur. Tersine, N manifoldunun S regüler alt manifoldu açık olsun. Keyfi $p \in S$ noktası için (U, φ) bir uyarlanmış kartı olsun. S açık olduğundan $U \cap S$ de açıktır ve $(U \cap S, \varphi|_{U \cap S})$ ikilisi N manifoldunda p noktasının bir kartıdır. Bu durumda $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinat dönüşümlerinin her biri sıfır dönüşümünden farklıdır. Böylece $n = k$ elde edilir.

Örnek 2.3.1. $N = \mathbb{R}^2$ ve $S = (-1, 1) \times \{0\}$ olsun. Her $p \in S$ için bu noktayı içeren $\mathbb{R}^2$ de (U, φ) kartı vardır. Bu kart için $U = (-1, 1) \times (-1, 1)$ açığı ve aşağıda tanımlanan φ dönüşümü ele alınsın.



Şekil 2.9. Uyarlanmış ve uyarlanmamış kart örnekleri

$p = (p_1, p_2) \in U$ olmak üzere φ dönüşümü;

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$p \mapsto \varphi(p) = (\varphi_1(p), \varphi_2(p)) = (p_1, p_2)$$

olarak tanımlandığında $U \cap S = (-1, 1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} U \cap S &= \{p \in U : \varphi|_{U \cap S}(p) = (\varphi_1|_{U \cap S}(p), \varphi_2|_{U \cap S}(p))\} \\ &= \{p \in U : \varphi|_{U \cap S}(p) = (p_1, 0)\} = (-1, 1) \end{aligned}$$

olur. Burada $p \in S$ olduğundan $p = (p_1, 0)$ şeklindedir.

O halde $(U \cap S, \varphi|_{U \cap S})$ kartı S kümesi için bir uyarlanmış karttır ve S kümesi $\mathbb{R}^2$ manifoldunun bir regüler alt manifoldudur.

$V = (-2, 0) \times (-1, 1)$ açığı üzerinde

$$\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$p \mapsto \psi(p) = (\psi_1(p), \psi_2(p)) = (p_1, p_2)$$

olarak tanımlanan dönüşüm ile (V, ψ) , $\mathbb{R}^2$ manifoldu için bir karttır.

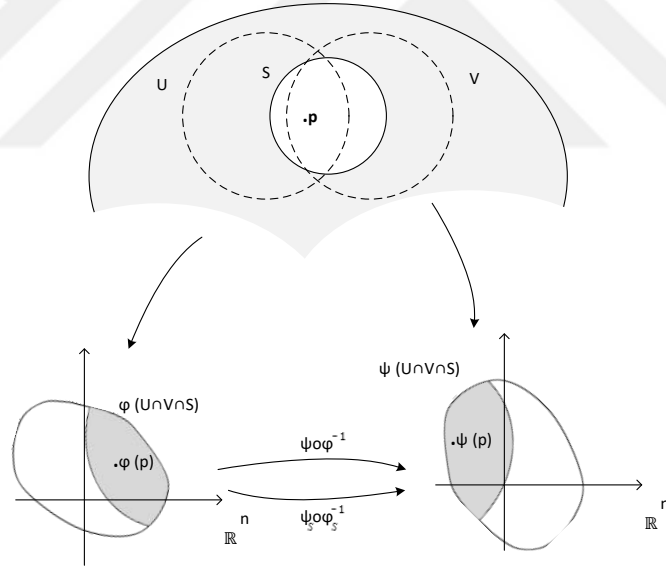
Ancak $V \cap S = (-1, 0)$ olup,

$$V \cap S \neq \{p \in S \mid \psi|_{V \cap S}(p) = (p_1, 0)\} = (-2, 0)$$

O halde $(V \cap S, \psi|_{V \cap S})$ kartı S kümesi için bir uyarlanmış kart olamaz.

Önerme 2.3.2. S kümesi N^n manifoldunun bir regüler alt manifoldu olsun. N manifoldunun uyumlu uyarlanmış kartlarının bir ailesi $\mathfrak{A} = \{(U, \varphi)\}$, S regüler alt manifoldunu örtüyor ise bu durumda $\{(U \cap S, \varphi_S)\}$ ailesi S regüler alt manifoldu için bir atlaktır. Eğer N manifoldunun S regüler alt manifoldu lokal olarak $(n - k)$ koordinat dönüşümünün sıfır olmasıyla tanımlı ise S manifoldunun boyutu k olur.

Kanıt. $(U, \varphi) = (U, (x_1, x_2, \dots, x_n))$ ve $(V, \psi) = (V, (y_1, y_2, \dots, y_n))$ N manifoldunda iki uyumlu uyarlanmış kart olsunlar. $U \cap V \neq \emptyset$ ise; $p \in U \cap V \cap S$ için



Şekil 2.10. Regüler alt manifoldun bir manifold olması

$$\varphi(p) = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_k(p), 0, 0, \dots, 0),$$

$$\psi(p) = (y_1(p), y_2(p), \dots, y_k(p), 0, 0, \dots, 0)$$

ve

$$\varphi_S(p) = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_k(p)),$$

$$\psi_S(p) = (y_1(p), y_2(p), \dots, y_k(p))$$

olur. Buradan $(\psi_S \circ \varphi_S^{-1})(x_1(p), x_2(p), \dots, x_k(p)) = (y_1(p), y_2(p), \dots, y_k(p))$ bulunur. $\psi \circ \varphi^{-1}$ bileşke fonksiyonu C^∞ bir dönüşüm olduğundan $\psi_S \circ \varphi_S^{-1}$ dönüşümü de C^∞ olur. O halde $\mathfrak{U}$ ailesinden alınan herhangi iki kart için $\psi_S \circ \varphi_S^{-1}$ dönüşümü de C^∞ bulunur.

$\mathfrak{U}$ ailesi S alt manifoldunun açık bir örtüsü olduğundan her $U \in \mathfrak{U}$ için $U \cap S$ kümesi açıktır (S kümesi üzerindeki alt uzay topolojisine göre) ve $\{(U \cap S, \varphi_S)\}_{U \in \mathfrak{U}}$ ailesi de S için bir atlas olur.

$$\begin{aligned} \varphi_S : U \cap S &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ p &\mapsto \varphi_S(p) = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_k(p)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ise S manifoldunun boyutu k olur. □

Tanım 2.3.3. $F : N \rightarrow M$ bir fonksiyon olmak üzere $c \in M$ noktası için;

$$F^{-1}(\{c\}) := \{p \in N \mid F(p) = c\}$$

şeklinde tanımlı kümeye bir **seviye kümesi** denir.

Eğer $f : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ ise $Z(f) := f^{-1}(0)$ kümesine f fonksiyonunun **sıfır kümesi** denir.

$F : N \rightarrow M$ fonksiyonunun bir $c \in M$ regüler değerinin $F^{-1}(c)$ seviye kümesine bir **regüler seviye kümesi** denir.

Teorem 2.3.4. N^n manifoldu üzerinde $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ bir C^∞ fonksiyon olsun. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere boştan farklı $f^{-1}(c) = S$ regüler seviye kümesi N manifoldunun $(n-1)$ -boyutlu regüler bir alt manifoldudur.

Kanıt. f fonksiyonu yerine $f - c$ fonksiyonunu alındığında $p \in f^{-1}(c)$ noktası için

$$(f - c)(p) = f(p) - c = 0$$

olur. f fonksiyonu C^∞ olduğundan $f - c$ fonksiyonu da C^∞ dir ve $(f - c)(p) = 0$ olur. Bu nedenle $c = 0$ alınabilir. ($S = f^{-1}(0)$)

$c = 0 \in \mathbb{R}$ regüler değer olsun. O halde $p \in S$ regüler nokta olduğundan bu noktayı içeren N manifoldunda en az bir $(U, \varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ kartı vardır öyle ki en az bir $i \in \{1, \dots, n\}$ için $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p \neq 0$ dir. Örneğin $\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p \neq 0$ ise;

$F = (f, x_2, \dots, x_n) : U \rightarrow F(U) \subset \mathbb{R}^n$ dönüşümünün Jacobien matrisi;

$$J_p[F] = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p & \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_p \\ \left. \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right|_p & \left. \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial x_2}{\partial x_n} \right|_p \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial x_n}{\partial x_1} \right|_p & \left. \frac{\partial x_n}{\partial x_2} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \right|_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p & \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_p \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

olur ve $\det J_p[F] = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p \neq 0$ dır. O halde ters fonksiyon teoremine göre p noktasının N manifoldunda öyle bir U_p komşuluğu vardır ki

$$\begin{aligned} U_p \cap S &= \{p \in S \mid \varphi(p) = (f(p), x_2(p), \dots, x_n(p))\} \\ &= \{p \in S \mid \varphi(p) = (0, x_2(p), \dots, x_n(p))\} \end{aligned}$$

olur. Böylece $(U_p, \varphi(p)) = (f, x_2, \dots, x_n)$ kartı S kümesi için uyarlanmış karttır. O halde S kümesi N manifoldunun $(n-1)$ -boyutlu regüler alt manifoldudur. $\square$

Teorem 2.3.5. N^n bir manifold ve $f : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir C^∞ dönüşüm olmak üzere $c \in \mathbb{R}^m$ noktası için boştan farklı $S = f^{-1}(c)$ regüler seviye kümesi N manifoldunun $(n-m)$ -boyutlu regüler bir alt manifoldudur.

Kanıt. $c = 0 \in \mathbb{R}^m$ regüler değer olsun. $p \in S$ noktası regüler nokta olduğundan bu noktayı içeren en az bir $(U, \varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ kartı vardır öyle ki

$$f_{*,p} : T_p U \rightarrow T_0 \mathbb{R}^m$$

dönüşümünün matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır. Ayrıca yine $p \in S$ regüler nokta olduğundan $f_{*,p}$ dönüşümü örtendir. Dolayısıyla

$$\text{boy}(\text{Gör} f_{*,p}) = \text{boy}(\mathbb{R}^m) = m$$

olur. O halde $\text{boy}(N) = \text{boy}(\text{Gör} f_{*,p}) + \text{boy}(\text{Çek} f_{*,p})$ olduğundan $n \geq m$ olacağı elde edilir. Buradan

$$f_{*,p} : T_p U \rightarrow T_0 \mathbb{R}^m$$

dönüşümünün matrisi

$$J_p[f] = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \right|_p & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_p \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \right|_p & \cdots & \cdots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_p \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \right|_p & \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_{m+1}} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \right|_p \end{bmatrix}_{m \times n}$$

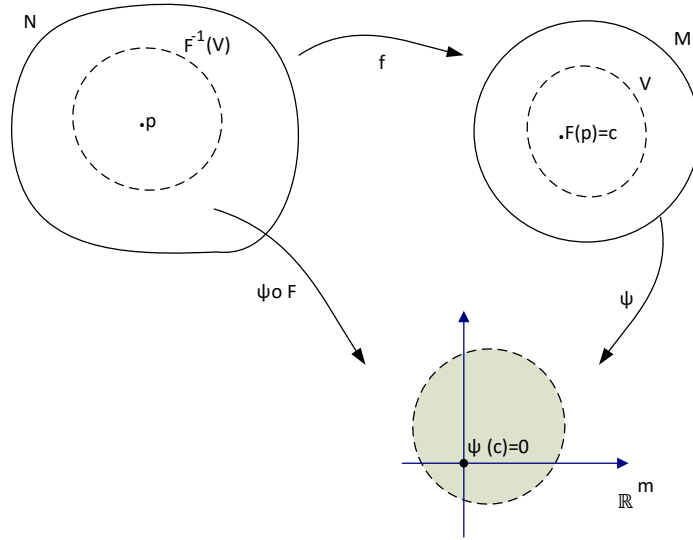
şeklindedir. Bu matrise göre ilk $m \times m$ lik matrisin determinanı sıfırdan farklı olsun. Bu durumda manifoldlar için ters fonksiyon teoreminden N manifoldunda p noktasını içeren bir U_p komşuluğu vardır öyle ki

$$\begin{aligned} U_p \cap S &= \{p \in S : \varphi(p) = (f_1(p), f_2(p), \dots, f_m(p), x_{m+1}(p), \dots, x_n(p))\} \\ &= \{p \in S : \varphi(p) = (0, 0, \dots, 0, x_{m+1}(p), \dots, x_n(p))\} \end{aligned}$$

olur. O halde (U_p, φ) kartı S kümesi için bir uyarlanmış karttır. Böylece S regüler seviye kümesi N manifoldunun $(n - m)$ -boyutlu regüler alt manifoldudur. $\square$

Teorem 2.3.6 (Regüler Seviye Kümesi Teoremi). N ve M boyutları sırası ile n ve m olan manifoldlar olmak üzere $F : N \rightarrow M$ bir C^∞ dönüşüm olsun. $c \in M$ noktası için boştan farklı $S = F^{-1}(c)$ regüler seviye kümesi N manifoldunun $(n - m)$ -boyutlu regüler bir alt manifoldudur.

Kanıt. $p \in N$ ve $F(p) = c$ olmak üzere $c \in M$ noktasını içeren (V, ψ) kartı $\psi(c) = 0$ olacak şekilde tanımlı olsun. $c \in M$ regüler değer olduğundan $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ dönüşümü örtendir. Dolayısıyla $\text{rank}(F_{*,p}) = m$ dir.



Şekil 2.11. Regüler Alt Manifold

$\psi \circ F : F^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$ dönüşümünü ele alalım. $(\psi \circ F)_* = \psi_* \circ F_*$ eşitliğinden ve

ψ_* bir izomorfizma olduğundan her $q \in F^{-1}(V)$ için

$$\text{rank} F_{*,q} = \text{rank}(\psi \circ F)_{*,q} = m$$

dir. Dolayısıyla $c \in M$ noktasının F fonksiyonunun regüler değeri olması için gerek ve yeter koşul $0 \in \mathbb{R}^m$ noktasının $\psi \circ F$ fonksiyonunun regüler değeri olmasıdır. Üstelik

$$(\psi \circ F)^{-1}(0) = (F^{-1} \circ \psi^{-1})(0) = F^{-1}(\psi^{-1}(0)) = F^{-1}(c)$$

olup $F^{-1}(c)$ regüler seviye kümesi $(\psi \circ F)^{-1}(0)$ kümesine eşit olduğundan regüler seviye kümesi teoreminden $(\psi \circ F)^{-1}(0)$ kümesi $F^{-1}(V)$ alt manifoldunun $(n - m)$ -boyutlu bir regüler alt manifoldudur. (Teorem 2.3.5) $F^{-1}(V)$ kümesi N manifoldunda bir açık olduğundan bu kümenin uyarlanmış kartları $F^{-1}(c)$ kümesini örter. Dolayısıyla bu kartlar N manifoldunda $F^{-1}(c)$ kümesi için de birer uyarlanmış karttır. Yani $F^{-1}(c)$, N manifoldunun $(n - m)$ -boyutlu regüler alt manifoldudur. $\square$

Örnek 2.3.7. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ olarak tanımlansın. f fonksiyonunun sıfır kümesi

$$f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\} = S^2$$

olur. S^2 alt kümesi regüler seviye kümesidir:

$c = 0 \in \mathbb{R}$ noktasında $f_{*,p} : T_p \mathbb{R}^3 \rightarrow T_0 \mathbb{R}$ dönüşümünün matrisi;

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}$$

olur. $0 \in \mathbb{R}$ noktasının regüler değer olabilmesi için $f^{-1}(0) = S^2$ kümesinin hiçbir kritik noktayı içermemesi gerekir. Kritik noktanın bulunabilmesi için $f_{*,p}$ dönüşümünün matrisinin sıfır matrisi olması gerekir. (Önerme 2.2.2 gereği) Bu matrisin sıfır matrisi olması için gerek ve yeter koşul $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ olmasıdır. Bu nedenle kritik nokta $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ noktasıdır ve $(0, 0, 0) \notin S^2$ olduğundan $f^{-1}(0) = S^2$ kümesi kritik noktayı içermez. Sonuç olarak 0 noktası bu dönüşümün regüler değeridir. Yani $f^{-1}(0) = S^2$ kümesi regüler seviye kümesidir.

$p \in S^2$ herhangi bir eleman olmak üzere $\frac{\partial f}{\partial x}|_p = (2x)|_p \neq 0$ olsun. Bu durumda $(f, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümünün Jacobien matrisi

$$J[(f, y, z)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrisin determinantı $\det(J[(f, y, z)]) = \frac{\partial f}{\partial x}|_p = (2x)|_p \neq 0$ dir. O halde ters fonksiyon teoreminden $\mathbb{R}^3$ manifoldunda p noktasını içeren en az bir U_p komşuluğu vardır öyle ki $(U_p, (f, y, z))$ bir karttır.

$$\begin{aligned} U_p \cap S^2 &= \{p \in S^2 : (f, y, z)(p) = (f(p), y(p), z(p))\} \\ &= \{p \in S^2 : (f, y, z)(p) = (0, y(p), z(p))\} \end{aligned}$$

olur ve böylece $(U_p, (f, y, z))$ kartı S^2 için bir uyarlanmış karttır.

Benzer şekilde $\frac{\partial f}{\partial y}|_p = (2y)|_p \neq 0$ alınarak da $(V_p, (x, f, z))$ uyarlanmış kartı bulunur. Bu durumda herhangi bir $p \in S^2$ noktasına karşılık $\mathbb{R}^3$ manifoldunda S^2 regüler alt manifolduna uyarlanmış kartlardan oluşan bir aile elde edilir. Bu aile S^2 regüler alt manifoldunu örteceğinden Teorem 2.3.4 gereği S^2 regüler alt manifoldu boyutu 2 olan bir manifold olur.

Örnek 2.3.8 (Özel lineer grup). $N = GL(n, \mathbb{R})$ manifoldu üzerinde;

$$f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(A) = \det A$$

determinant dönüşümü C^∞ bir fonksiyondur.

$$f^{-1}(1) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\} = SL(n, \mathbb{R})$$

seviye kümesi $GL(n, \mathbb{R})$ grubunun bir regüler alt manifoldudur:

$$B = [b_{ij}] \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ matrisinin determinantı}$$

$$f(B) = \det B = (-1)^{i+1}b_{i1}m_{i1} + (-1)^{i+2}b_{i2}m_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}b_{in}m_{in} \quad (2.1)$$

denklemleri ile bulunur. Bu denklemde m_{ij} matrisleri $[b_{ij}]$ elemanlarının minör matrisleridir. Buradan;

$$\frac{\partial f}{\partial b_{ij}} = (-1)^{i+j}m_{ij} \quad (2.2)$$

olur. Keyfi $B \in GL(n, \mathbb{R})$ noktasının, f dönüşümünün kritik noktası olması için gerek ve yeter koşul $1 \leq i, j \leq n$ için $(n-1) \times (n-1)$ lik m_{ij} minör matrislerinin 0 matrisleri olmasıdır. O halde (2.1) denkleminde göre B matrisi determinantı 0 olan bir matristir. Bu durumda $B \notin SL(n, \mathbb{R})$ olduğundan $SL(n, \mathbb{R})$ kümesi kritik noktayı içermez. Sonuç olarak $1 \in \mathbb{R}$ regüler değerdir. Teorem 2.3.4 gereği $SL(n, \mathbb{R})$ kümesi $GL(n, \mathbb{R})$ grubunun $(n^2 - 1)$ -boyutlu regüler alt manifoldudur.

Örnek 2.3.9. $N = \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x^3 + y^3 + z^3, x + y + z) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

$$S := F^{-1}((1, 0)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^3 + y^3 + z^3, x + y + z) = (1, 0)\}$$

kümesi $\mathbb{R}^3$ manifoldunun regüler alt manifoldudur:

F dönüşümünün Jacobien matrisi;

$$\begin{bmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan herhangi bir $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ noktasının kritik nokta olması için gerek ve yeter koşul Jacobien matrisinin rankının 2 den küçük olmasıdır. (Aksi takdirde dönüşüm örten olurdu.) Dönüşümün rankının 2 den küçük olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 3x^2 & 3z^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olmasıdır. Bunların sonucu olarak da

$$\begin{vmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olur. Buradan $y = \pm x$, $z = \pm x$ elde edilir. Ayrıca $x+y+z = 0$ denklemi de göz önüne alındığında $x = y = z = 0$ çözümü bulunur. $(0, 0, 0)$ kritik noktası $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ denklemini sağlamayacağından bu kritik nokta S kümesi içinde değildir. O halde $(1, 0)$ noktası regüler değer olup S kümesi regüler seviye kümesidir. Regüler seviye kümesi teoreminden S kümesi $\mathbb{R}^3$ manifoldunun 1 boyutlu regüler alt manifoldudur.

Tanım 2.3.10. $F : N \rightarrow M$, bir C^∞ dönüşüm olsun. Her $p \in N$ noktası için;

- $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ dönüşümü birebir ise F dönüşümüne **immersiyon**,
- $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ dönüşümü örten ise F dönüşümüne **submersiyon** denir.

C^∞ Manifoldların Rankı

Tanım 2.3.11. $F : N \rightarrow M$ bir C^∞ dönüşüm ve $p \in N$ olsun.

$$F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$$

lineer dönüşümünün rankına F dönüşümünün $p \in N$ noktasındaki rankı denir.

N ve M boyutları sırası ile n ve m olan iki manifold olsunlar. F fonksiyonu $p \in N$ noktasında maksimal ranka sahip ise aşağıdaki durumlar söz konusudur:

- $n = m$ ise $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ dönüşümü bir vektör uzayı izomorfizmi olur ve ters fonksiyon teoreminden F dönüşümü $p \in N$ noktasında bir lokal diffeomorfizmadır. [?]
- $n \leq m$ ise maksimal rank n dir ve F dönüşümü p noktasında bir immersiyondur:
 $n \leq m$ ise $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ lineer dönüşümü için $n = \text{boy}(\text{Çek}F_{*,p}) + \text{boy}(\text{Gör}F_{*,p})$ olduğundan ve F maksimal ranka sahip olduğundan $\text{boy}(\text{Gör}F_{*,p}) = n$ olur. Bu durumda $\text{Çek}F_{*,p} = \{0\}$ dır ve böylece $F_{*,p}$ dönüşümü birebirdir. Buradan F fonksiyonunun p noktasında bir immersiyon olduğu elde edilir.
- $n \geq m$ ise maksimal rank m dir ve F dönüşümü p noktasında submersiyondur:
 $n \geq m$ ise $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ lineer dönüşümü için $n = \text{boy}(\text{Çek}F_{*,p}) + \text{boy}(\text{Gör}F_{*,p})$ olduğundan ve F maksimal ranka sahip olduğundan $\text{boy}(\text{Gör}F_{*,p}) = m$ olur. Bu durumda $F_{*,p}$ dönüşümü örtendir, F dönüşümüne p noktasında bir submersiyon denir.

Teorem 2.3.12 (Sabit Rank Teoremi). N ve M boyutları sırasıyla n ve m olan iki manifold olsunlar. Herhangi bir $p \in N$ noktasının bir komşuluğunda $F : N \rightarrow M$ dönüşümünün rankı sabit ve k olsun. Bu durumda

$$\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n, \varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m, \psi(F(p)) = 0 \in \mathbb{R}^m$$

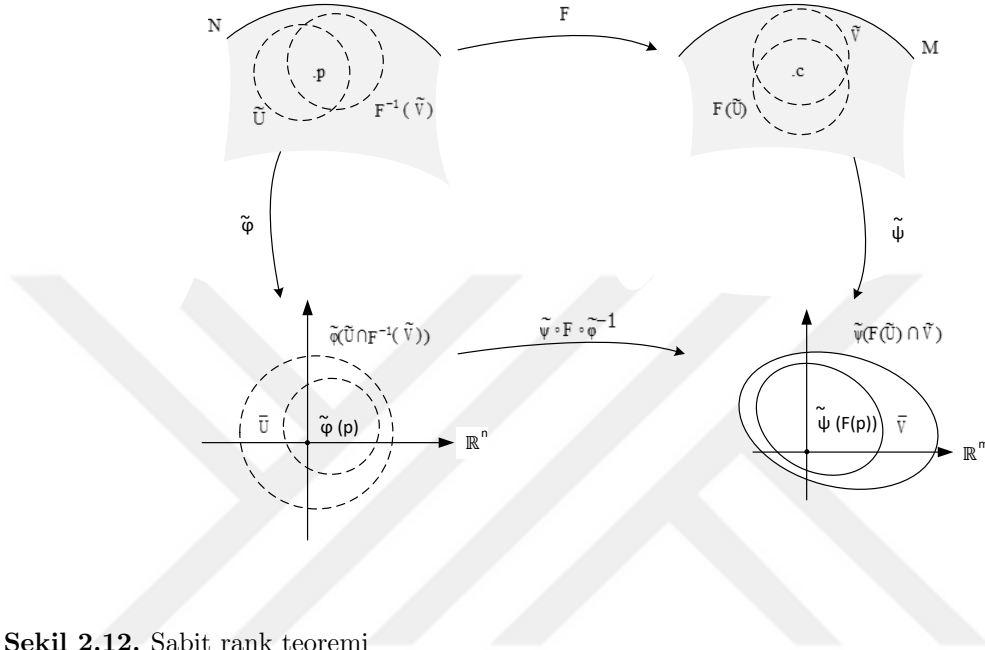
ve

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(F(U) \cap V) \subset \mathbb{R}^m$$

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x) = (r_1(x), r_2(x), \dots, r_n(x)) = (r_1(x), r_2(x), \dots, r_k(x), \underbrace{0, \dots, 0}_{(m-k)\text{ tane}})$$

olacak şekilde (U, φ) ve (V, ψ) kartları vardır.

Kanıt. $p \in N$ noktasını içeren herhangi bir $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ kartı ve $F(p) \in M$ noktasını içeren herhangi bir $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ kartı alınsın. p noktasını içeren bu $\tilde{U}$ açığı üzerinde F dönüşümü sabit ranka sahip olsun. (Yani herhangi bir $x \in \tilde{U}$ olmak üzere $F_{*,x} : T_x N \rightarrow T_{F(x)} M$ lineer dönüşümü için $\text{rank}(F_{*,x}) = \text{rank}(F_{*,p})$ olsun.)

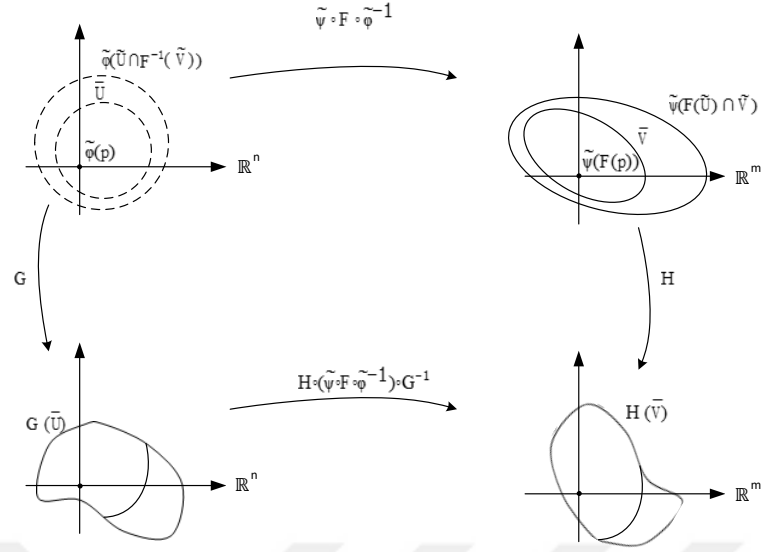


Şekil 2.12. Sabit rank teoremi

Burada $x \in \tilde{U}$ olmak üzere $\tilde{\varphi}(x) = y \in \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ noktası için $\tilde{\varphi}$ ve $\tilde{\psi}$ birer diffeomorfizm olduklarından

$$\text{rank} F_{*,p} = \text{rank}(\tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1})_{*,\tilde{\varphi}(p)} = \text{rank}(\tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1})_{*,y}$$

olur. O halde Öklidyen uzaylar için sabit rank teoremine göre $\tilde{\varphi}(p) \in \mathbb{R}^n$ noktasının öyle bir $\bar{U}$ komşuluğu üzerinde tanımlı G diffeomorfizmi ve $\tilde{\psi}(F(p))$ noktasının öyle bir $\bar{V}$ komşuluğu üzerinde tanımlı H diffeomorfizmi vardır ki



Şekil 2.13. $\mathbb{R}^n$ için sabit rank teoremi

$(H \circ (\tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \circ G^{-1})(x) = (r_1(x), r_2(x), \dots, r_n(x)) = (r_1(x), \dots, r_k(x), 0 \dots, 0)$ olur. O halde $U = \tilde{\varphi}^{-1}(\bar{U} \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U}))$ kümesi üzerinde $\varphi = G \circ \tilde{\varphi}$ dönüşümü, $V = \tilde{\psi}^{-1}(\bar{V} \cap \tilde{\psi}(\tilde{V}))$ kümesi üzerinde $\psi = H \circ \tilde{\psi}$ dönüşümü alındığında aranan kartlar bulunur.

□

Teorem 2.3.13 (Sabit Rank Seviye Kümesi Teoremi). N ve M boyutları sırasıyla n ve m olan manifoldlar olmak üzere $F : N \rightarrow M$ bir C^∞ dönüşüm olsun. $c \in M$ olmak üzere $p \in F^{-1}(c)$ noktasının en az bir komşuluğunda F dönüşümü sabit ranka sahip ve $\text{rank} F = k$ ise $F^{-1}(c)$ kümesi N manifoldunun bir regüler alt manifoldudur ve $F^{-1}(c)$ alt manifoldunun boyutu $(m - k)$ olur.

Kanıt. Herhangi bir $p \in F^{-1}(c)$ noktasının bir komşuluğunda F dönüşümü sabit ranka sahip olsun. Bu durumda sabit rank teoremine göre p noktasını içeren bir $(U, \varphi) = (U, (x_1, x_2, \dots, x_n))$, $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ kartı ve $F(p)$ noktasını içeren bir $(V, \psi) = (V, (y_1, y_2, \dots, y_m))$, $\psi(c) = 0 \in \mathbb{R}^m$ kartı vardır öyleki herhangi bir $x \in \varphi(U \cap F^{-1}(V))$ için

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x) = (r_1(x), r_2(x), \dots, r_k(x), \underbrace{0, \dots, 0}_{(m-k) \text{ tane}})$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^{-1}(0) &= \{x \in \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \mid (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x) = (0, \dots, 0)\} \\ &= \{x \in \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \mid (r_1(x), \dots, r_k(x), 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)\} \end{aligned}$$

olduğundan $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^{-1}(0)$ seviye kümesi öyle x noktalarından oluşur ki

$$r_1(x) = \dots = r_k(x) = 0$$

olur. Ayrıca $\varphi(F^{-1}(c)) = \varphi(F^{-1}(\psi^{-1}(0))) = (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^{-1}(0)$ bulunur ve böylece $(U \cap F^{-1}(V), \varphi|_{U \cap F^{-1}(V)})$ kartı p noktasını içeren $F^{-1}(c)$ seviye kümesi için bir uyarlanmış kart olur. Sonuç olarak $F^{-1}(c)$ seviye kümesi N manifoldunun regüler alt manifoldudur. $\square$

Örnek 2.3.14 (Ortogonal Grup). $\{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I\}$ kümesi $GL(n, \mathbb{R})$ grubunun bir alt grubudur. Bu gruba *ortogonal grup* denir ve $O(n)$ ile gösterilir. Sabit rank seviye küme teoremi kullanılarak $O(n)$ kümesinin $GL(n, \mathbb{R})$ manifoldunun bir regüler alt manifoldu olduğu şu şekilde gösterilebilir:

$$\begin{aligned} F : GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto F(A) := A^T A \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın. F dönüşümünün tanıma kullanıldığında;

$$O(n) = F^{-1}(I)$$

olur. Herhangi bir $C \in GL(n, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} \ell_C : GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto \ell_C(A) := CA \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r_C : GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto r_C(A) := AC \end{aligned}$$

sağdan ve soldan çarpma dönüşümleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} F(AC) &= (AC)^T(AC) \\ &= C^T A^T AC \\ &= C^T F(A)C \\ &= C^T(r_C \circ F(A)) \\ &= \ell_{C^T}(r_C(F(A))) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$F(r_C(A)) = \ell_{C^T}(r_C(F(A)))$$

olup, $A \in GL(n, \mathbb{R})$ keyfi bir eleman olduğundan

$$F \circ r_C = \ell_{C^T} \circ r_C \circ F$$

yazılabilir. Zincir kuralından;

$$F_{*,AC} \circ (r_C)_{*,A} = (\ell_{C^T})_{*,A^T AC} \circ (r_C)_{*,A^T A} \circ F_{*,A}$$

elde edilir. r_C ve ℓ_{C^T} dönüşümleri diffeomorfizmler olduklarından bu dönüşümlerin türev dönüşümleri izomorfizmdir.

Bu nedenle;

$$\text{rank}(F_{*,AC}) = \text{rank}(F_{*,A})$$

olur. A ve B , $GL(n, \mathbb{R})$ grubunun herhangi iki elemanı olmak üzere $B = AC$ olacak şekilde $C \in GL(n, \mathbb{R})$ vardır. O halde AC ve C matrisleri $GL(n, \mathbb{R})$ grubunun keyfi elemanları olduklarından F dönüşümü sabit ranka sahiptir. Böylece sabit-rank seviye kümesi teoreminden $O(n) = F^{-1}(I)$ ortogonal grubu $GL(n, \mathbb{R})$ manifoldunun bir regüler alt manifoldu olur.

Tanım 2.3.15. $F : N \rightarrow M$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Eğer

- F dönüşümü bire-bir ve bir immersiyon ise,
- $f(N) \subseteq M$ görüntü kümesi M manifoldundaki alt uzay topolojisiyle N manifolduna homeomorfik ise

F dönüşümüne bir embedding dönüşüm denir.

$F : N \rightarrow M$ dönüşümü kullanılarak

$$\tau := \{F(U) \subseteq F(N) \mid U \text{ kümesi } N' \text{de açık}\}$$

şeklinde tanımlanan kümeler ailesi $F(N)$ kümesi üzerinde bir topoloji belirtir. Bu şekilde tanımlanan τ topolojisi göz önüne alındığında; F dönüşümü bire-bir olduğundan N manifoldu $F(N)$ alt kümesine τ topolojisine göre homeomorfiktir. Dikkat edilecek olursa bu topoloji alt uzay topolojisinden farklıdır. $F(N)$ üzerindeki diferansiyellebilir yapı da bu topoloji ile kurulabilir. F fonksiyonundan devralınan bu topoloji

kullanıldığında, f birebir bir immersiyondur ve $F(N)$ uzayına M manifoldunun immersed alt manifoldu denir.

Örnek 2.3.16.

$$\begin{aligned} f &: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow f(t) = (t - t^3, 1 - t^2) \end{aligned}$$

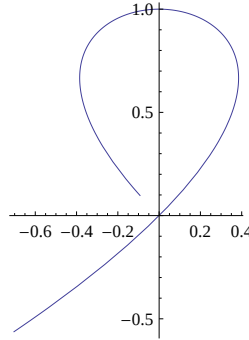
fonksiyonu birebirdir. Herhangi bir $t_0 \in (-1, \infty)$ noktasında

$$\begin{aligned} f_{*,t_0} : T_{t_0} &\rightarrow T_{f(t_0)}\mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto f_{*,t_0}(t) = (1 - 3t^2, -2t) \end{aligned}$$

türev dönüşümü her $t_0 \in (-1, \infty)$ için sıfır dönüşümünden farklıdır.

$$1 = \text{boy}(T_{t_0}\mathbb{R}) = \text{boy}\mathcal{C}ek(f_{*,t_0}) + \text{boy}\mathcal{G}ör(f_{*,t_0})$$

eşitliğinden $\text{boy}\mathcal{C}ek(f_{*,t_0}) = 0$ elde edilir. Aksi takdirde f_{*,t_0} dönüşümünün sıfır dönüşümünden farklı olması ile çelişirdi. Bu durumda f_{*,t_0} dönüşümü birebirdir. Yani f bir immersiyondur. Ancak $f((-1, \infty))$ görüntü uzayı bir regüler alt manifold değildir. Çünkü $1 \in (-1, \infty)$ noktasının bir U komşuluğunun görüntüsü



Şekil 2.14. Birebir ve immersiyon olup embedding olmayan dönüşüm örneği

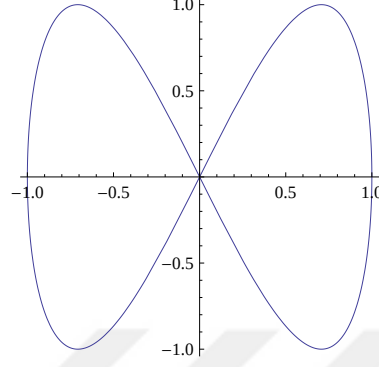
şeklindedir.

Alt uzay topolojisine göre $f(U) = B((0, 0), r) \cap f(-1, \infty)$ olacak şekilde hiçbir r bulunamaz. r ne kadar küçük seçilirse seçilsin $B((0, 0), r) \cap f(-1, \infty)$ kümesi $f(U)$ kümesinden daha fazla nokta içerir. Yani $f(U)$ kümesi $M = \mathbb{R}^2$ manifoldundaki alt uzay topolojisine göre $N = (-1, \infty) \subset \mathbb{R}$ manifolduna homeomorfik değildir. O halde bu dönüşüm birebir ve immersiyon olup embedding bir dönüşüm değildir.

Örnek 2.3.17.

$$\begin{aligned} f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto f(t) = (\cos t, \sin 2t) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ aralığında birebir bir dönüşümdür.



Şekil 2.15. İmmersed alt manifold örneği (Sekiz fonksiyonu)

Ayrıca keyfi $t_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ noktası için

$$\begin{aligned} f_{*,t_0} : T_{t_0}\mathbb{R} &\rightarrow T_{f(t_0)}\mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto f_{*,t_0}(t) = (-\sin t, 2\cos 2t) \end{aligned}$$

olup her $t_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ için bu dönüşüm sıfır dönüşümünden farklıdır. f_{*,t_0} dönüşümü lineer bir dönüşüm olduğundan $1 = \text{boy}(T_{t_0}\mathbb{R}) = \text{boy}\check{Cek}(f_{*,t_0}) + \text{boy}\check{Gör}(f_{*,t_0})$ eşitliğine göre $\text{boy}\check{Cek}(f_{*,t_0}) = 0$ olmalıdır. Bu durumda $\text{boy}\check{Cek}(f_{*,t_0}) = 0$ olup f_{*,t_0} birebir bir dönüşümdür. Yani f_{*,t_0} bire-bir immersiyondur. Ancak f_{*,t_0} embedding bir dönüşüm değildir. $t = \frac{\pi}{2}$ için $f(\frac{\pi}{2}) = (0,0)$ olur. $\frac{\pi}{2} \in U = (\frac{\pi}{2} - \epsilon, \frac{\pi}{2} + \epsilon)$ komşuluğu ele alındığında $f(\frac{\pi}{2}) = (0,0)$ noktasının herhangi bir V komşuluğu için $f^{-1}(V) = (-\frac{\pi}{2}, k) \cup (\frac{\pi}{2} - \epsilon, \frac{\pi}{2} + \epsilon) \cup (\tilde{k}, \frac{3\pi}{2})$ olacağından $f^{-1}(V) \subset U$ olamaz. Yani $t = \frac{\pi}{2}$ noktasının herhangi bir U komşuluğunda $f(\frac{\pi}{2}) = (0,0)$ noktasını içine alan ve $f^{-1}(V) \subset U$ olacak şekilde bir V komşuluğu bulunamaz. Dolayısıyla alt uzay topolojisine göre f^{-1} sürekli değildir. Sonuç olarak $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \not\cong f\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ bulunur.

f dönüşümü embedding bir dönüşüm olmasa da $\mathbb{R}^2$ manifoldunun immersed alt manifoldudur: Görüntü uzayı

$$f\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) = \{(\cos t, \sin 2t) \mid t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\}$$

üzerinde $\tau_f : \{f(U) \subset f\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \mid U \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ açık}\}$ topolojisi göz önüne alınsın. Herhangi bir $t_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ için $f(t_0) \in f\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ noktasının herhangi bir V açık

komşuluğu alındığında τ_f topolojisinin tanımı gereği $V = f(U)$ olacak şekilde bir U açığı vardır. f dönüşümü birebir olduğundan $f^{-1}(V) = f^{-1}(f(U)) = U$ olacağından bu f dönüşümünün τ_f topolojisine göre sürekli olduğu görülür.

$U \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ açık bir küme ise τ_f topolojisinin tanımı gereği $f(U)$ görüntü uzayında açıktır. Bu nedenle f^{-1} dönüşümü süreklidir. Sonuç olarak f dönüşümü τ_f topolojisine göre bir homeomorfizmadır. Yani $(\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cong f(\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ olur.

Bu adımda daha sonraki teoremlerin ispatında kullanılacak olan immersiyon teoremi ifade edilecektir.

Teorem 2.3.18 (İmmersiyon Teoremi). N ve M sırasıyla boyutları n ve m olan iki manifold olsunlar. Eğer $F : N \rightarrow M$ dönüşümü $p \in N$ noktasında bir immersiyon ise p noktasını içeren en az bir (U, φ) kartı ve $F(p)$ noktasını içeren en az bir (V, ψ) kartı

$$\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n, \varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m, \psi(F(p)) = 0 \in \mathbb{R}^m$$

için

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$$

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} = (r_1, r_2, \dots, r_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{(m-n) \text{ tane}})$$

olacak şekilde vardır.

Teorem 2.3.19. Eğer $F : N \rightarrow M$ dönüşümü bir embedding ise $F(N)$ görüntü kümesi M manifoldunun regüler alt manifoldudur.

Kanıt. F dönüşümü bir emdedding olduğundan immersiyon teoremi gereği $p \in N$ noktasını içeren bir $(U, \varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ kartı ve $F(p)$ noktasını içeren bir $(V, \psi = (y_1, y_2, \dots, y_m))$ kartı vardır öyle ki $x \in F^{-1}(V) \cap U$ için

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x) = (r_1(x), r_2(x), \dots, r_n(x), \underbrace{0, \dots, 0}_{(m-n) \text{ tane}})$$

olur. Ancak bu $F(N)$ kümesinin regüler alt manifold olduğunu söylemek için yeterli değildir.

$F(N)$ kümesi üzerindeki alt uzay topolojisine göre N manifolduna homeomorfik olduğundan herhangi bir $U \in N$ açığı için $F(U)$ kümesi de $F(N)$ üzerindeki alt uzay

topolojisine göre açıktır. Öyleyse $F(U) = F(N) \cap V'$ olacak şekilde M manifoldunda bir V' açık kümesi vardır.

$$V \cap V' \cap F(N) = V \cap F(U)$$

olur. Burada

$$V \cap F(U) = \{q \in F(U) : \psi|_{F(U)}(q) = (y_1(q), \dots, y_n(q), \underbrace{0, \dots, 0}_{(m-n) \text{ tane}})\}$$

olur. Böylece $(V \cap V', \psi|_{F(U)})$ kartı $F(N)$ için bir uyarlanmış kart olur. $\square$

Teorem 2.3.20. N kümesi M manifoldunun bir regüler alt manifoldu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} i : N &\rightarrow M \\ p &\mapsto i(p) = p \end{aligned}$$

*i*çerme (inclusion) dönüşümü embedding bir dönüşümdür.

Kanıt. N regüler alt manifoldu üzerindeki alt uzay topolojisi

$$\tau_N = \{U \cap N : U \in \tau_M\}$$

şeklinde ve $i(N)$ alt kümesi de bir alt uzay topolojisine sahiptir. Böylece $i : N \rightarrow i(N)$ dönüşümü bir homeomorfizmdir.

N kümesi M manifoldunun regüler alt manifoldu olduğundan her $p \in N$ noktasını içeren M manifoldunda öyle bir $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ uyarlanmış kartı vardır öyleki

$$U \cap N = \{p \in U : \varphi|_{U \cap N}(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p), 0, \dots, 0)\}$$

olur.

N regüler alt manifoldu için $(U \cap N, \varphi|_{U \cap N} = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0))$ kartı ve M manifoldu için $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m))$ kartı olmak üzere içerme dönüşümü

$$\begin{aligned} i : N &\rightarrow M \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

şeklinde ve böylece i dönüşümünün bir immersiyon olduğu görülür. $\square$

Literatürde, embedding bir dönüşümün görüntüsü embedded alt manifold olarak adlandırılır. Bu teoremler gereği embedded alt manifold ve regüler alt manifold aslında aynı şeylerdir.

Teorem 2.3.21. N ve M boyutları sırası ile n ve m olan iki manifold ve $F : N \rightarrow M$ bir C^∞ dönüşüm olmak üzere, S kümesi M manifoldunun s -boyutlu bir alt kümesi olsun. $F(N) \subseteq S$ olmak üzere, S kümesi M manifoldunun bir regüler alt manifoldu ise

$$\tilde{F} : N \rightarrow S$$

dönüşümü C^∞ bir dönüşümdür.

Kanıt. S kümesi M manifoldunun regüler alt manifoldu olduğundan $F(p) = q \in S$ noktasını içeren M manifoldunda $(V, \psi = (y_1, \dots, y_m))$ kartı vardır öyleki

$$V \cap S = \{q \in S \mid \psi(q) = (y_1(q), \dots, y_s(q), 0, \dots, 0)\}$$

olur. ψ dönüşümünün $V \cap S$ kümesine kısıtlanması;

$$\begin{aligned} \psi_S : V \cap S &\rightarrow \mathbb{R}^s \\ x &\mapsto (y_1, \dots, y_s) \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca F dönüşümü C^∞ olduğundan $p \in N$ noktasını içeren bir (U, φ) kartı $F(U) \subset V$ olacak şekilde seçilebilir. Burada $U \subset N$ için $F(U) \subset F(N)$ dir ve $F(U) \subset F(N) \subseteq S$ olduğundan ve $F(U) \subset V$ alındığından $F(U) \subset V \cap S$ elde edilir. Ayrıca F fonksiyonu C^∞ olduğundan

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x) = (y_1, \dots, y_s, 0, \dots, 0)$$

dönüşümü C^∞ dur. O halde $t \in \varphi(U)$ için

$$\begin{aligned} \psi_S \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) &\rightarrow \mathbb{R}^s \\ t &\mapsto (y_1, \dots, y_s) \end{aligned}$$

dönüşümü C^∞ olur. Sonuç olarak $\tilde{F}$ dönüşümü C^∞ bir dönüşümdür. $\square$

Örnek 2.3.22.

$$\begin{aligned} F : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto AB \end{aligned}$$

ile tanımlı F dönüşümü C^∞ bir dönüşümdür. (Çünkü $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ şeklindedir ve a_{ik}, b_{kj} koordinatları C^∞ fonksiyonlardır.) O halde

$$\tilde{F} : SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R}) \rightarrow SL(n, \mathbb{R})$$

dönüşümü de C^∞ bir dönüşümdür;

$SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R})$ kümesi $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R})$ manifoldunun bir regüler alt manifoldudur ve bu nedenle

$$i : SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R})$$

içerme dönüşümü C^∞ bir dönüşümdür. (Teorem 1.35)

$$\begin{array}{ccc} GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{F} & GL(n, \mathbb{R}) \\ \uparrow i & \nearrow F \circ i & \\ SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R}) & & \end{array}$$

$F \circ i$ dönüşümüne göre $(F \circ i)(SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R})) = SL(n, \mathbb{R})$ dir ve $SL(n, \mathbb{R})$ kümesi $GL(n, \mathbb{R})$ manifoldunun bir regüler alt manifoldu olduğundan $\tilde{F} := F \circ i$ dönüşümü bir C^∞ dönüşümdür.

2.4 Vektör Alanları

Tanım 2.4.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde U açığının her $p \in U$ noktasına bir $X_p \in T_p U$ tanjant vektörü karşılık getiren

$$\begin{aligned} X : U &\rightarrow T_p U \cong T_p \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto X_p \in T_p \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

dönüşümüne bir vektör alanı denir.

Her $p \in \mathbb{R}^n$ noktası için U kümesi bu noktayı içeren bir açık olmak üzere, U üzerinde tanımlı $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için, $T_p \mathbb{R}^n$ uzayı $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$ tabanına sahip olduğundan X vektör alanının p noktasındaki değeri (X_p tanjant vektörü)

$$X_p = \sum a_i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$$

olarak ifade edilir.

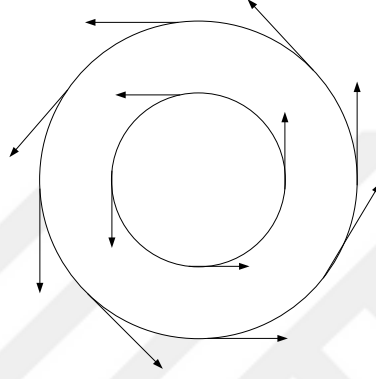
Eğer U üzerinde tanımlı a_i fonksiyonları C^∞ fonksiyonlar ise X vektör alanına U açığı üzerinde C^∞ bir vektör alanıdır denir.

Örnek 2.4.2. $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ üzerinde, $p = (x, y)$ noktası için

$$X = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial y}$$

bir vektör alanıdır.

$$\begin{aligned}
p = (0, 1) \text{ için} \quad X_{(0,1)} &= -\frac{\partial}{\partial x} \\
p = (0, -1) \text{ için} \quad X_{(0,-1)} &= \frac{\partial}{\partial x} \\
p = (-1, 0) \text{ için} \quad X_{(-1,0)} &= -\frac{\partial}{\partial y} \\
p = (1, 0) \text{ için} \quad X_{(1,0)} &= \frac{\partial}{\partial y} \\
p = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ için} \quad X_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$



Şekil 2.16. $\mathbb{R}^2$ üzerinde C^∞ bir vektör alanı

U açığı üzerindeki tüm C^∞ vektör alanlarının kümesi $X(U)$ ile gösterilir. Bu küme $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

$$\begin{aligned}
C^\infty(U) \times X(U) &\rightarrow X(U) \\
(f, X_p) &\mapsto (fX)(p) := f(p)X_p
\end{aligned}$$

olarak tanımlanan dönüşüm ile $X(U)$ kümesi $C^\infty(U)$ halkası üzerinde bir modül yapısına sahiptir.

$U \subset \mathbb{R}^n$ açığı üzerinde X bir vektör alanı ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
X : C^\infty(U) &\rightarrow C^\infty(U) \\
f &\mapsto X[f] : U \rightarrow \mathbb{R} \\
p &\mapsto (X[f])(p) := X_p[f]
\end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın.

X vektör alanı $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ olarak ifade edildiğinden herhangi bir $p \in U$ noktası için

$$X[f](p) = X_p[f] \sum a_i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$$

olarak yazılabilir. Ayrıca

$$X : C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U), f \mapsto X[f]$$

dönüşümü $\mathbb{R}$ - lineer bir dönüşümdür.

X vektör alanı

$$X[fg] = X[f]g + fX[g]$$

Leibniz kuralını sağlar. Gerçekten herhangi bir $p \in U$ için

$$\begin{aligned} X[fg](p) &= \sum a_i(p) \left. \frac{\partial(fg)}{\partial x_i} \right|_p \\ &= \sum a_i(p) \left(\left. \frac{\partial(f)}{\partial x_i} \right|_p g(p) + f(p) \left. \frac{\partial(g)}{\partial x_i} \right|_p \right) \\ &= X[f](p)g(p) + f(p)X[g](p) \end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.4.3. *Bir M manifoldu üzerinde her noktaya bir tanjant vektörü karşılık getiren*

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ f &\mapsto X[f] : M \rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto (X[f])(p) := X_p[f] \end{aligned}$$

bu dönüşüme M manifoldu üzerindeki vektör alanı denir. Eğer X , M manifoldu üzerinde bir vektör alanı ise herhangi bir $p \in M$ noktası için $X_p \in T_p M$ olur.

Bir M manifoldu üzerindeki tüm vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir. Her $p \in M$ noktası için bu küme üzerindeki toplama işlemi ve C^∞ bir $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile çarpımı şu şekilde tanımlıdır:

$$\begin{aligned} (X + Y)(p) &:= X_p + Y_p \\ (fX)(p) &:= f(p)X_p \end{aligned}$$

$\chi(M)$ vektör alanlarının kümesi C^∞ halkası üzerinde bir modül yapısına sahiptir.

X , M manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. Herhangi bir $p \in M$ noktası için, bu noktayı içeren bir $(U, \varphi) = (U, (x_1, \dots, x_n))$ koordinat kartında X vektör alanının p noktasındaki değeri

$$X_p = \sum a_i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ fonksiyonlardır.

Önerme 2.4.4. M manifoldu üzerindeki X vektör alanının C^∞ olması için gerek ve yeter koşul M üzerindeki tüm $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonları için $X[f]$ fonksiyonunun M üzerinde C^∞ olmasıdır.

Kanıt. X vektör alanı M üzerinde C^∞ olsun. O halde $p \in M$ olmak üzere bu noktayı içeren (U, φ) kartı için $a_i \in C^\infty(U)$ dönüşümleri vardır öyleki $X_p = \sum a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ olur. $f \in C^\infty(M)$ iken $X_p[f] = [Xf]_p$ olduğundan

$$X_p[f] = [Xf]_p = \sum a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p$$

elde edilir. Sonuç olarak $X[f]$ fonksiyonu M üzerinde C^∞ bir dönüşümdür.

Tersine herhangi bir $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonu için $X[f]$, M üzerinde C^∞ olsun. Herhangi bir $p \in M$ noktasını içeren bir $(U, \varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ koordinat kartı için

$$X_p = \sum a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

olsun. Bu durumda X vektör alanının C^∞ olduğunu göstermek için $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının C^∞ olduklarını göstermek gereklidir. Herhangi bir $p \in U$ noktası için $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ koordinat fonksiyonları bu noktayı içeren en az bir V komşuluğunda her $q \in V$ için

$$\tilde{x}_i(q) = x_i(q)$$

olacak şekilde $\tilde{x}_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ genişletilebilir [?]. Böylece

$$\begin{aligned} X(\tilde{x}_k) &= \left(\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (\tilde{x}_k) \\ &= \left(\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (x_k) \\ &= a_k \end{aligned}$$

ve $p \in U$ keyfi bir nokta olduğundan a_k dönüşümleri C^∞ olur. Sonuç olarak $X = \left(\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ vektör alanı M manifoldu üzerinde C^∞ bir vektör alanıdır. $\square$

Tanım 2.4.5 (İntegral Eğrisi). X , M manifoldu üzerinde C^∞ bir vektör alanı ve $p \in M$ herhangi bir nokta olmak üzere, X vektör alanının bu noktayı içeren $(-\epsilon, \epsilon)$ aralığı üzerinde tanımlı integral eğrisi

$$\begin{aligned} c : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow M \\ t &\mapsto c(t) \end{aligned}$$

$c(0) = p$ ve $c'(t) = X_{c(t)}$ şeklindedir.

Örnek 2.4.6. $\mathbb{R}^2$ üzerinde $X_{(x,y)} = (-y, x)$ vektör alanı olsun. Bu vektör alanı üzerindeki başlangıç noktası $p = (1, 0)$ olan integral eğrisi $c(t) = (x(t), y(t))$,

$$c(0) = (1, 0) \text{ ve } c'(t) = X_{c(t)} \text{ şartları sağlanacak şekilde olmalıdır.}$$

O halde $c'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-y(t), x(t))$ sisteminin çözümü ele alındığında

$$x = A \cos t + B \sin t$$

$$y = -x' = A \sin t - B \cos t$$

elde edilir. Başlangıç koşulu gereği $A = 1$ ve $B = 0$ olur. Bu durumda $c(t) = (\cos t, \sin t)$ bulunur. Yani X vektör alanı üzerindeki başlangıç noktası $p = (1, 0)$ olan integral eğrisi $c(t) = (\cos t, \sin t)$ şeklindedir.

2.5 Lie Braket

$U \subset M$ bir açık olmak üzere, X ve Y bu açık üzerinde C^∞ vektör alanları olsunlar. $f \in C^\infty(U)$ için Önerme 2.46 gereği $Y[f]$ de U üzerinde C^∞ vektör alanıdır. O halde

$$X : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$$

$$Y : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$$

dönüşümleri $\mathbb{R}$ -lineer dönüşümler olduğundan

$$XY : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$$

$$f \mapsto XY[f] := X[Yf]$$

şeklinde tanımlı dönüşüm $\mathbb{R}$ -lineer, C^∞ bir dönüşüm olur. Ancak XY dönüşümü Leibniz kuralını sağlamaz. Gerçekten her $f, g \in C^\infty(U)$ için,

$$\begin{aligned} XY[f g] &= X[Y(f g)] \text{ (Y bir vektör alanı olduğundan)} \\ &= X[(Y f)g + f(Y g)] \\ &= X[(Y f)g] + X[f(Y g)] \text{ (X bir vektör alanı olduğundan)} \\ &= (XY f)g + Y f[Xg] + X f[Yg] + f(XY g) \end{aligned}$$

olur. Leibniz koşulunun sağlanması için $Y f[Xg]$ ve $X f[Yg]$ terimlerinin olmaması gerekir. O halde $(XY - YX)[fg]$ dönüşümü Leibniz koşulunu sağlayan U açığı üzerinde C^∞ bir dönüşüm olacağından bir derivasyondur ve böylece $(XY - YX)$ bir vektör alanı olur.

X ve Y , $U \subset M$ açık kümesi üzerinde tanımlı C^∞ vektör alanları, $p \in U$ noktası ve $f \in C^\infty(U)$ olmak üzere ;

$$[X, Y]_p f = (X_p Y - Y_p X) f$$

şeklinde tanımlı dönüşüme Lie Braket denir ve $[X, Y]$ braket M manifoldu üzerinde bir vektör alanıdır.

Önerme 2.5.1. M manifoldu üzerinde X ve Y birer C^∞ vektör alanları olsunlar. Bu durumda $[X, Y]$ braket M üzerinde C^∞ bir vektör alanıdır.

Kanıt. Önerme 2.46 gereği $[X, Y]$ vektör alanının M manifoldu üzerinde C^∞ olması için gerek ve yeter koşul $f \in C^\infty(M)$ olmak üzere $[X, Y]f$ dönüşümünün C^∞ olmasıdır. $f \in C^\infty(M)$ için

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= (XY - YX)[f] \\ &= (XY)[f] - (YX)[f] \\ &= X(Y[f]) - Y(X[f]) \end{aligned}$$

olur. Burada $Y[f]$ ve $X[f]$ C^∞ dönüşümler olduğundan $X(Y[f])$ ve $Y(X[f])$ dönüşümleri de C^∞ dönüşümlerdir ve dolayısıyla $X(Y[f]) - Y(X[f])$ C^∞ bir dönüşüm olur. O halde $[X, Y]f$ dönüşümü C^∞ olduğundan $[X, Y]$ Lie Braket de C^∞ olur. $\square$

M manifoldu üzerinde C^∞ vektör alanları X ve Y olmak üzere, $f \in C^\infty(M)$ için

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= (XY - YX)[f] \\ &= (-YX + XY)[f] \\ &= -(YX - XY)[f] \\ &= -[Y, X]f \end{aligned}$$

olur. Yani $[X, Y] = -[Y, X]$ eşitliği sağlanır.

Ayrıca M manifoldu üzerinde C^∞ vektör alanları X, Y ve Z olmak üzere

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

olur. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] &= [X, YZ - ZY] + [Y, ZX - XZ] \\
&\quad + [Z, XY - YX] \\
&= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X \\
&\quad + Y(ZX - XZ) - (ZX - XZ)Y \\
&\quad + Z(XY - YX) - (XY - YX)Z \\
&= XYZ - XZY - YZX + ZYX \\
&\quad + YZX - YXZ - ZXY + XZY \\
&\quad + ZXY - ZYX - XYZ + YXZ \\
&= 0
\end{aligned}$$

X, Y ve Z, M manifoldu üzerinde C^∞ vektör alanları ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
[aX + bY, Z] &= (aX + bY)Z - Z(aX + bY) \\
&= aXZ + bYZ - ZaX - Zby \\
&= aXZ - aZX + bYZ - bZY \\
&= a(XZ - ZX) + b(YZ - ZY) \\
&= a[X, Z] + b[Y, Z]
\end{aligned}$$

bilineer olma özelliği de sağlanır.

2.6 İlintili Vektör Alanları

Tanım 2.6.1. $F : N \rightarrow M$ bir C^∞ dönüşüm olsun. N manifoldu üzerindeki vektör alanı X ve M manifoldu üzerindeki vektör alanı $\tilde{X}$ olmak üzere her $p \in N$ için

$$F_{*,p}(X_p) = \tilde{X}_{F(p)}$$

oluyorsa bu iki vektör alanına F -ilintili denir.

Önerme 2.6.2. $F : N \rightarrow M$ bir C^∞ dönüşüm olmak üzere, N manifoldu üzerindeki X vektör alanı ile M manifoldu üzerindeki $\tilde{X}$ vektör alanının F -ilintili olması için gerek ve yeter koşul her $g \in C^\infty(M)$ için

$$X(g \circ F) = \tilde{X}g \circ F$$

olmasıdır.

Kanıt. X ve $\tilde{X}$ vektör alanları F -ilintili olsunlar. Herhangi bir $p \in N$ noktası ve $g \in C^\infty(M)$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} F_{*,p}(X_p)g &= \tilde{X}_{F(p)}g \\ X_p(g \circ F) &= (\tilde{X}g)F(p) \end{aligned}$$

olur. O halde $p \in N$ herhangi bir nokta olduğundan

$$X(g \circ F) = (\tilde{X}g)F$$

elde edilir. □

Önerme 2.6.3. $F : N \rightarrow M$ bir C^∞ dönüşüm olsun. N manifoldu üzerindeki C^∞ vektör alanları X ve Y , M manifoldu üzerindeki C^∞ vektör alanları $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ olmak üzere; X vektör alanı ile $\tilde{X}$ vektör alanı F -ilintili ve Y vektör alanı ile $\tilde{Y}$ vektör alanı F -ilintili ise $[X, Y]$ vektör alanı ile $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ vektör alanı F -ilintili olur.

Kanıt. Herhangi bir $g \in C^\infty(M)$ için

$$\begin{aligned} [X, Y](g \circ F) &= (XY - YX)(g \circ F) \text{ (Lie Braket tanımından)} \\ &= XY(g \circ F) - YX(g \circ F) \text{ (Y ile } \tilde{Y} \text{ ve X ile } \tilde{X} \text{ F-ilintili)} \\ &= X(\tilde{Y}g \circ F) - Y(\tilde{X}g \circ F) \text{ (Önerme 2.48den)} \\ &= (\tilde{X}\tilde{Y}g) \circ F - (\tilde{Y}\tilde{X}g) \circ F \text{ (Önerme 2.48den)} \\ &= ((\tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X})g) \circ F \\ &= ([\tilde{X}, \tilde{Y}]g) \circ F \end{aligned}$$

elde edilir. O halde Önerme 2.6.2 gereği $[X, Y]$ vektör alanı ile $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ vektör alanı F -ilintili olur. □

2.7 Matris Üstel Dönüşüm(Eksponensiyel)

X herhangi bir $n \times n$ tipinde reel girdili bir matris olmak üzere reel sayılardakine benzer şekilde e^X tanımlanabilir;

$$e^X := I_n + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots$$

(Burada I_n ile $n \times n$ lik birim matris belirtilmektedir.) Bu sonsuz toplamdaki her bir matris

$$\|X\| = \left(\sum_{i,j} x_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

normu ile $\mathbb{R}^{n^2}$ normlu uzayının bir elemanı olarak ele alındığında, $\mathbb{R}^{n^2}$ deki bu serinin herbir bileşeni yakınsak ise bu seri yakınsak olur. Böylece elemanları matrisler olan bu sonsuz toplamın yakınsaklığı anlamlı hale gelir. e^X ifadesindeki herhangi bir ij girdisi

$$(e^X)_{ij} = \delta_{ij} + X_{ij} + \frac{1}{2!} (X^2)_{ij} + \frac{1}{3!} (X^3)_{ij} + \cdots + \frac{1}{n!} (X^n)_{ij} + \cdots$$

olur.

A ve B herhangi iki $n \times n$ tipinde reel girdili matris olmak üzere genellikle $e^A e^B \neq e^{A+B}$ olur.

Örneğin $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alınırsa

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} e & 1/e \\ 1 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/e^2 & 1 \\ e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e} + 1 & 1 + e \\ \frac{1}{e^2} + e^3 & 1 + e^3 \end{pmatrix}$$

olur. Diğer taraftan

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e} & \frac{1}{e} \\ e & e^3 \end{pmatrix}$$

olduğundan genel olarak $e^A e^B \neq e^{A+B}$ dir. Ancak $AB = BA$ ise $e^A e^B = e^{A+B}$ eşitliği sağlanır.

Önerme 2.7.1. X reel girdili $n \times n$ tipinde bir matris ise $f(t) = e^{tX}$ dönüşümünün türevi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{dt} e^{tX} = X e^{tX}$$

Kanıt.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{tX}) &= \frac{d}{dt}(I + tX + \frac{1}{2!}(tX)^2 + \frac{1}{3!}(tX)^3 + \cdots) \\ &= (X + \frac{1}{2!}2tX^2 + \frac{1}{3!}3t^2X^3 + \cdots) \\ &= X(I + tX + \frac{1}{2!}(tX)^2 + \frac{1}{3!}(tX)^3 + \cdots) \\ &= X e^{tX} \end{aligned}$$

□

$X = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ herhangi bir matris ise bu **matrisin izi**

$$izX = \sum_{i=1}^n x_{ii}$$

ile tanımlıdır.

Yardımcı Teorem 2.7.2. Herhangi A, B ve $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve olmak üzere,

- $iz(AB) = iz(BA)$ olur.

- Herhangi bir $C \in GL(n, \mathbb{R})$ için $iz(X) = iz(CXC^{-1})$ olur.

Teorem 2.7.3. X herhangi bir kompleks girdili matris olsun. Bu durumda AXA^{-1} üst üçgensel bir matris olacak şekilde $\det A \neq 0$ bir $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ vardır.

ATIF VER

Önerme 2.7.4. Reel yada kompleks girdili herhangi bir matrisin izi, kompleks özdeğerlerinin toplamına eşittir.

Kanıt. X matrisi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ kompleks özdeğerlerine sahip olsun. Bu durumda en az bir $A \in GL(n, \mathbb{R})$ matrisi vardır öyle ki $\det A \neq 0$ için

$$AXA^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

olur. O halde yardımcı teorem 2.7.2 gereği $iz(X) = iz(AXA^{-1}) = \sum \lambda_i$ dir. $\square$

Önerme 2.7.5. X reel girdili $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere,

$$\det(e^X) = e^{izX}$$

olur.

Kanıt. 1.Durum : X matrisi üst üçgensel bir matris ise

$$X = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned}
e^X &= I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots \\
&= I + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}^2 + \cdots \\
&= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{1}{2!}\lambda_1^2 + \cdots & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + \lambda_n + \frac{1}{2!}\lambda_n^2 + \cdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\det e^X &= e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \cdots e^{\lambda_n} \\
&= e^{\text{tr} X}
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.Durum : X herhangi bir matris olmak üzere özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olsun.

Bu durumda en az bir $A \in GL(n, \mathbb{R})$ matrisi vardır öyleki $\det A \neq 0$ için

$$AXA^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
e^{AXA^{-1}} &= I + AXA^{-1} + \frac{1}{2!}(AXA^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(AXA^{-1})^3 + \cdots \\
&= I + AXA^{-1} + \frac{1}{2!}AXA^{-1}AXA^{-1} + \frac{1}{2!}AXA^{-1}AXA^{-1}AXA^{-1} + \cdots \\
&= AA^{-1} + AXA^{-1} + A\frac{1}{2!}X^2A^{-1} + A\frac{1}{2!}X^3A^{-1} + \cdots \\
&= Ae^XA^{-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\det e^X &= \det(Ae^X A^{-1}) \quad (\text{Yardımcı teorem (i) şıkkı gereği}) \\
&= \det(e^{AXA^{-1}}) \quad (Ae^X A^{-1} = e^{AXA^{-1}}) \text{ olduğundan} \\
&= e^{iz(AXA^{-1})} \quad (AXA^{-1} \text{ üst üçgensel bir matris olduğundan } \underline{1.\text{durum}} \text{ gereği}) \\
&= e^{izX} \quad (\text{Yardımcı teorem (ii) şıkkı gereği})
\end{aligned}$$

bulunur. □

$\det e^X = e^{izX}$ bilgisini kullanarak e^X matris eksponensiyelin determinantının her zaman sıfırdan farklı olduğu görülür. Bu bilgiye dayanarak $GL(n, \mathbb{R})$ manifoldunda bir c eğrisi tanımlanabilir;

$$c(t) = e^{tX} : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

öyleki $c(0) = e^{0X} = e^0 = I$ ve $c'(0) = \frac{d}{dt}e^{tX} \Big|_{t=0} = X e^{tX} \Big|_{t=0} = X$ olur.

Determinant Dönüşümünün Birimdeki Tanjant uzayı

$\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ determinant dönüşümü olmak üzere bu dönüşümün birimdeki tanjant uzayı

$$\det_{*,I} : T_I GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow T_1 \mathbb{R}$$

şeklinededir. Ayrıca $T_I GL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $T_1 \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ olduğundan

$$\det_{*,I} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

olur.

Önerme 2.7.6. *Herhangi bir $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi için $\det_{*,I} X = izX$ olur.*

Kanıt. $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ için

$$c(t) = e^{tX} : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

eğrisi vardır öyle ki $c(0) = I$ ve $c'(0) = X$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\det_{*,I}(X) &= \frac{d}{dt} \det(e^{tX}) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} e^{tizX} \Big|_{t=0} \\
&= izX e^{tizX} \Big|_{t=0} \\
&= izX
\end{aligned}$$

elde edilir. □

3 LİE GRUP

3.1 Lie Grup

Tanım 3.1.1. G manifoldu, üzerindeki

$$\begin{aligned}\mu : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto \mu(a, b) = a.b \\ i : G &\rightarrow G \\ a &\mapsto i(a) = a^{-1}\end{aligned}$$

C^∞ dönüşümleri ile bir grup yapısına sahip ise G bir **Lie Gruptur** denir.

Örnek 3.1.2.

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

Genel lineer grubu, $\mathbb{R}^{n \times n}$ manifoldunun açık alt kümesi olup bir manifoldtur.

$$\begin{aligned}\mu : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\end{aligned}$$

bilinen matris çarpımı ve

$$\begin{aligned}i : GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{EK}\end{aligned}$$

bilinen matris tersi alma işlemleri C^∞ dönüşümlerdir ve $GL(n, \mathbb{R})$ manifoldu bu dönüşümler ile bir grup yapısına sahiptir. Bu da $GL(n, \mathbb{R})$ manifoldunun bir Lie Grup olduğunu gösterir.

Örnek 3.1.3. $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ kümesi $GL(n, \mathbb{R})$ grubunun bir alt grubudur. Aynı zamanda Örnek 2.3.8 gereği $GL(n, \mathbb{R})$ manifoldunun $(n^2 - 1)$ -boyutlu regüler alt manifoldudur. O halde Teorem 2.3.21 ve Örnek 2.3.22 gereği çarpım dönüşümü,

$$\tilde{\mu} : SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R}) \rightarrow SL(n, \mathbb{R})$$

C^∞ bir dönüşümdür.

Ayrıca $i : SL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, C^∞ içerme (inclusion) dönüşümü ve $1 : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, C^∞ ters işlem dönüşümü olmak üzere

$$\tilde{i} = 1 \circ i : SL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

bileşke dönüşümü yine Teorem 2.3.21 gereği C^∞ bir dönüşümdür. Sonuç olarak $SL(n, \mathbb{R})$ manifoldu üzerindeki bu C^∞ işlemler ile bir grup yapısına sahiptir. $SL(n, \mathbb{R})$ bir Lie grubudur.

Örnek 3.1.4. Sabit rank teoremine göre $O(n)$ Ortogonal grubu, $GL(n, \mathbb{R})$ manifoldunun regüler alt manifoldudur. Ancak bu teorem $O(n)$ grubunun boyutunu söylemek için yeterli değildir. Bu nedenle regüler seviye teoremi kullanılsın:

$$\begin{aligned} F : GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^T A \end{aligned}$$

dönüşümü göz önüne alındığında $F^{-1}(I) = O(n)$ olur. $A^T A$ simetrik bir matris olduğundan $F(A) \subset S_n$ olur. Yani $F(A)$, $n \times n$ lik reel girdili simetrik matrislerin bir alt kümesidir ve $\text{boy} S_n = \frac{n^2+n}{2}$ dir. O halde

$$\begin{aligned} F : GL(n, \mathbb{R}) &\rightarrow S_n \\ A &\mapsto A^T A \end{aligned}$$

dönüşümü ele alınsın. Regüler seviye kümesi teoreminin kullanılabilmesi için bu dönüşümün örten olduğunu görmek gerekir. F dönüşümünün örten olması için

$$F_{*,A} : T_A GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow T_{A^T A} S_n \cong S_n$$

dönüşümü örten olmalıdır.

$GL(n, \mathbb{R})$ kümesi $\mathbb{R}^{n \times n}$ manifoldunun açık bir alt kümesi olduğundan herhangi bir $A \in GL(n, \mathbb{R})$ noktasında $T_A GL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ olur. Bu durumda $F_{*,A}$ dönüşümünün örten olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $B \in S_n$ için $F_{*,A}(X) = B$ olacak şekilde bir $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin bulunmasıdır.

$X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ herhangi bir matris olmak üzere $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ ve $c(0) = A$, $c'(0) = X$ koşulunu sağlayan bir integral eğrisi vardır. Öyleyse

$$\begin{aligned} F_{*,A}(X) &= \frac{d}{dt} F(c(t))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} c(t)^T c(t)|_{t=0} \\ &= (c'(t)^T c(t) + c(t)^T c'(t))|_{t=0} \\ &= X^T A + A^T X \end{aligned}$$

bulunur. Dikkat edilirse $(X^T A)^T = A^T X$ olup, $2A^T X = B$ dir. O halde $X = \frac{1}{2}(A^T)^{-1}B$ öyle ki $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bulunur. Sonuç olarak $F_{*,A}$ dönüşümü örten olduğundan

F dönüşümü örtendir dolayısıyla F^{-1} vardır ve $F^{-1}(I) = O(n)$ dir. Regüler seviye kümesi teoreminden $\text{boy} O(n) = \text{boy} GL(n, \mathbb{R}) - \text{boy} S_n = n^2 - \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ olan $GL(n, \mathbb{R})$ manifoldunun bir regüler alt manifoldudur.

3.2 Lie Alt Gruplar

Tanım 3.2.1. G bir Lie grup olmak üzere;

- H kümesi G grubunun cebirsel bir alt grubu,
- $i : H \rightarrow i(H)$ dönüşümü ile $H \subset G$ kümesi bir immersed alt manifold,
- G Lie grubu üzerindeki $\mu : G \times G \rightarrow G$, $\mu(a, b) = ab$ ve $i : G \rightarrow G$, $i(a) = a^{-1}$ dönüşümlerinin kısıtlanmış olan

$$\tilde{\mu} : H \times H \rightarrow H, \quad (a, b) \mapsto ab$$

ve

$$\tilde{i} : H \rightarrow H, \quad a \mapsto a^{-1}$$

dönüşümleri immersed alt manifoldun topolojisine göre C^∞ dönüşümler

ise H kümesine G Lie grubunun bir Lie alt grubu denir.

Önerme 3.2.2. G bir Lie grup olmak üzere, G Lie grubunun H cebirsel alt grubu bir regüler alt manifold ise H grubu G Lie grubunun bir Lie alt grubudur.

Kanıt. H kümesi G Lie grubunun cebirsel bir alt grubu ve G manifoldunun bir regüler alt manifoldu olsun. H bir regüler alt manifold olduğundan Teorem() gereği

$$i : H \rightarrow G$$

içerme dönüşümü embedding bir dönüşümdür. O halde Teorem() gereği H bir immersed alt manifolddur. Bu durumda H üzerindeki grup olma işlemlerinin C^∞ olduğunu görmek H grubunun bir Lie alt grup olduğunu söylemek için yeterli olacaktır. G bir Lie grup olduğundan

$$\mu : G \times G \rightarrow G, \mu(a, b) = ab$$

dönüşümü C^∞ bir dönüşümdür. Dolayısıyla

$$\mu|_H : H \times H \rightarrow G$$

kısıtlanmış dönüşümü de C^∞ bir dönüşüm olur. H, G grubunun cebirsel bir alt grubu olduğundan $\mu|_H : H \times H \rightarrow H$ olur. Ayrıca H bir regüler alt manifold olduğundan $\tilde{\mu}|_H : H \times H \rightarrow H$ dönüşümü C^∞ bir dönüşümdür. Benzer şekilde ters işlem dönüşümünün de C^∞ olduğu görülür. Dolayısıyla H üzerindeki grup olma işlemleri C^∞ dönüşümlerdir. Sonuç olarak H, G Lie grubunun bir Lie alt grubudur. $\square$

Örnek 3.2.3. $SL(n, \mathbb{R})$ ve $O(n)$ grupları $GL(n, \mathbb{R})$ grubunun alt grupları olup aynı zamanda regüler alt manifoldlardır. O halde Önerme 3.8 gereği $SL(n, \mathbb{R})$ ve $O(n)$ birer Lie alt gruptur.

3.3 Bir Lie Grubunun Birimdeki Tanjant Uzayı

G bir Lie grup olsun. Herhangi bir $g \in G$ için soldan ve sağdan çarpma dönüşümleri;

$$\begin{aligned} \ell_g : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto \ell_g(x) = gx \\ r_g : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto r_g(x) = xg \end{aligned}$$

olarak tanımlıdır.

ℓ_g ve r_g dönüşümleri genelde birer grup homomorfizması değildir. Ancak ℓ_g ve r_g dönüşümleri diffeomorfizmlerdir ve ℓ_g nin tersi ℓ_g^{-1} ve r_g nin tersi r_g^{-1} dir.

$e \in G$ birim elemanı için;

$$\ell_g(e) = g.e = g$$

dir.

Öyleyse

$$(\ell_g)_{*,e} : T_e G \rightarrow T_g G$$

dönüşümü bir vektör uzayı izomorfizmasıdır. Eğer $T_e G$ vektör uzayının yapısı belirlenirse $(\ell_g)_{*,e}$ dönüşümü de bir izomorfizma olduğundan $T_g G$ uzayının yapısı belirlenmiş olur.

Aslında $T_e G$ uzayı bir Lie Cebri yapısına sahiptir. Bu bölümde bazı temel Lie gruplarının Lie cebirleri incelenecektir.

Örnek 3.3.1. $SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ Lie grubunun birimdeki tanjant uzayı:

M bir manifold ve $p \in M$ herhangi bir nokta olmak üzere;

$$c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$$

ve $c(0) = p$, $c'(0) = X_p$ olacak şekilde C^∞ bir eğri vardır. Buradan

$$\begin{aligned} c : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow SL(n, \mathbb{R}) \\ t &\mapsto c(t) \end{aligned}$$

ve $c(0) = I$ ve $c'(0) = A$ şeklinde tanımlı bir c eğrisinin var olduğu söylenir.

$$\begin{aligned} (-\epsilon, \epsilon) &\xrightarrow{c} SL(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R} \\ t &\mapsto c(t) \mapsto \det c(t) = 1 \end{aligned}$$

Burada $c(t) \in SL(n, \mathbb{R})$ olduğundan $\det(c(t)) = 1$ dir. O halde $\frac{d}{dt}(\det c(t))|_{t=0} = 0$ dir.

$$\begin{aligned} T_0(-\epsilon, \epsilon) &\xrightarrow{c_{*,0}} T_{c(0)}SL(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\det_{*,0}} T_1\mathbb{R} \\ \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} &\mapsto c_{*,0} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mapsto \det_{*,I} \left(c_{*,0} \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \right) \right) \end{aligned}$$

olur. Böylece;

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(\det(c(t))|_{t=0}) \\ &= (\det \circ c(t))_{*,0} \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \right) \\ &= \det_{*,I} \left(c_{*,0} \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \right) \right) \\ &= \det_{*,I} (c'(0)) \\ &= \det_{*,I} (A) \\ &= iz(A) \end{aligned}$$

Uyarı 3.3.2. Burada $\det_{*,I} X = iz(X)$ özelliği kullanılmıştır.

Böylece $SL(n, \mathbb{R})$ grubunun birimdeki tanjant uzayı;

$$T_I SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid iz(A) = 0\}$$

yani izi sıfır olan matrislerin kümesidir. $SL(n, \mathbb{R})$ kümesinin birimdeki tanjant uzayı boyutu $\dim(T_I SL(n, \mathbb{R})) = n^2 - 1$ bulunur.

Örnek 3.3.3 (Ortogonal grup). $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I\}$ ortogonal grubunun birimdeki tanjant uzayı: $O(n)$ üzerindeki integral eğrisi;

$$\begin{aligned} c : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow O(n) \\ t &\mapsto c(t) \end{aligned}$$

$c(0) = I$ ve $c'(0) = X$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} T_0(-\epsilon, \epsilon) &\xrightarrow{c_{*,0}} T_{c(0)}SL(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{det_{*,0}} \mathbb{R} \\ \frac{d}{dt}|_{t=0} &\longmapsto c_{*,0} \frac{d}{dt}|_{t=0} \longmapsto det_{*,I} \left(c_{*,0} \left(\frac{d}{dt}|_{t=0} \right) \right) \end{aligned}$$

Burada dikkat edilirse $c(t) \in O(n)$ olduğundan $c(t)^T c(t) = I$ vardır. Öyleyse;

$$\begin{aligned} 0 &= (c(t)^T c(t))'|_{t=0} \\ &= (c(t)^T)' c(t)|_{t=0} + c(t)^T c'(t)|_{t=0} \\ &= (c(t)')^T c(t)|_{t=0} + c(t)^T c'(t)|_{t=0} \\ &= X^T I + X I \end{aligned}$$

olup buradan

$$X^T I + X I = 0$$

eşitliği kullanılarak

$$X^T + X = 0$$

ve sonuç olarak

$$X = -X^T$$

bulunur.

Öyleyse $O(n)$ grubunun tanjant uzayı

$$T_I O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = -A^T\}$$

olarak bulunur. Bu küme aynı zamanda bir vektör uzayıdır ve boyutu da $\frac{n^2-n}{2}$ dir.

3.4 Bir Lie Grubunun Sol-invaryant Vektör Alanı

G bir Lie grup ve X de G üzerinde bir vektör alanı olsun. Herhangi bir $g \in G$ için

$$\begin{aligned}\ell_g &: G \longrightarrow G \\ h &\longmapsto \ell_g(h) = gh\end{aligned}$$

sol çarpım dönüşümü diffeomorfizm olduğundan

$$\begin{aligned}(\ell_g)_{*,h} &: T_h G \longrightarrow T_{gh} G \\ X_h &\longmapsto (\ell_g)_{*,h}(X)\end{aligned}$$

dönüşümü yazılabilir.

Eğer her $g \in G$ ve herhangi bir $h \in G$ için

$$(\ell_g)_{*,h}(X) = X_{gh}$$

eşitliği sağlanıyorsa G üzerindeki X vektör alanına sol-invariant vektör alanı denir.

Her $X_e \in T_e G$ tanjant vektörü için G üzerinde bir vektör alanı şu şekilde tanımlıdır:

$$\begin{aligned}\ell_g &: G \longrightarrow G \\ e &\longmapsto \ell_g(e) = g.e = g\end{aligned}$$

sol çarpım dönüşümü için

$$\begin{aligned}(\ell_g)_{*,e} &: T_e G \longrightarrow T_g G \\ X_e &\longmapsto (\ell_g)_{*,e}(X_e)\end{aligned}$$

olup buradan X vektör alanı

$$\begin{aligned}X &: G \longrightarrow TG \\ g &\longmapsto X_g := (\ell_g)_{*,e}(X_e)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca bu vektör alanı sol-invarianttır:

$$\begin{aligned}(\ell_g)_{*,e}(X_h) &= (\ell_g)_{*,e}((\ell_h)_{*,e}(X_e)) \\ &= (\ell_g \circ \ell_h)_{*,e} X_e \\ &= (\ell_{gh})_{*,e} X_e \\ &= X_{gh}\end{aligned}$$

Örnek 3.4.1 ($\mathbb{R}$ üzerinde sol-invariant vektör alanı). $\mathbb{R}$ Lie grubu üzerindeki işlem $(+)$ olup bu işleme göre birim elemanı sıfırdır. Öyleyse $\mathbb{R}$ üzerindeki sol çarpım;

$$\begin{aligned}\ell_g &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ell_g(x) = g + x\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

$x = 0$ birim elemanı için;

$$\begin{aligned}(\ell_g)_{*,0} &: T_o\mathbb{R} \longrightarrow T_g\mathbb{R} \\ \frac{d}{dx}\Big|_{x=0} &\longmapsto (\ell_g)_{*,0} \left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \right)\end{aligned}$$

Burada $(\ell_g)_{*,0} \left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \right) \in T_g\mathbb{R}$ ve $T_g\mathbb{R}$ uzayının taban elamanı $\frac{d}{dx}\Big|_{x=g}$ olduğundan bu eleman taban elamanının skaler bir katı olarak yazılır:

$$(\ell_g)_{*,0} \left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \right) = a \cdot \frac{d}{dx}\Big|_{x=g}$$

Eğer $a = 1$ olduğu gösterilirse dönüşüm $(\ell_g)_{*,0} \left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \right) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=g}$ bu yapısı ile sol-invaryant vektör alanı yapısına sahip olacaktır. Bu eşitliğe göre her iki tarafa da birim dönüşüm uygulansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}a \cdot \frac{d}{dx}\Big|_{x=g} x &= (\ell_g)_{*,0} \left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \right) x \\ a &= \left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=0} (x \circ \ell_g) \right) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=0} (g + x) \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $(\ell_g)_{*,0} \left(\frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \right) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=g}$ elde edilmiş olur. Bu da $\frac{d}{dx}$ nin $\mathbb{R}$ üzerinde bir sol-invaryant vektör alanı olduğunu söyler.

Örnek 3.4.2 ($GL(n, \mathbb{R})$ Lie grubunun sol-invaryant vektör alanları). $GL(n, \mathbb{R}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kümesinin açık alt kümesi olduğundan herhangi bir $g \in GL(n, \mathbb{R})$ noktasında $T_g GL(n, \mathbb{R}) \cong T_g \mathbb{R}^{n \times n}$ dir. Öyleyse sol çarpım dönüşümü

$$\begin{aligned}\ell_g &: GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ I &\longmapsto Ig = g\end{aligned}$$

şeklindedir ve bu dönüşümün tanjant uzay

$$\begin{aligned}(\ell_g)_{*,I} &: T_I GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow T_g GL(n, \mathbb{R}) \\ B &\longmapsto (\ell_g)_{*,I}(B)\end{aligned}$$

ile tanımlıdır. Ayrıca burada $(\ell_g)_{*,I}B = \tilde{B}_g$ olarak tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan $\tilde{B}$ vektör alanı sol-invaryanttır:

Ayrıca $\tilde{B}(I) = (\ell_g)_{*,I}(B) = B$ dir. Tüm bunları kullanarak;

$$\begin{aligned} (\ell_g)_{*,h}(\tilde{B}_h) &= (\ell_{gh})_{*,I}(B) \\ &= ((\ell_g)_{*,h})((\ell_h)_{*,I}(B)) \\ &= (\ell_{gh})_{*,I}(B) \\ &= \tilde{B}_{gh} \end{aligned}$$

Önerme 3.4.3. X ve Y bir G lie grubu üzerinde sol-invaryant vektör alanları olsunlar. Bu durumda $[X, Y]$ vektör alanı da G üzerinde bir sol-invaryant vektör alanıdır.

4 LİE CEBRİ

4.1 Lie Cebri

G bir Lie grubu olsun. $L(G)$ ile G Lie grubu üzerindeki sol-invaryant vektör alanlarının uzayı gösterilsin. Herhangi iki sol-invaryant vektör alanının braketleri de sol-invaryant vektör alanı olduğundan $L(G)$ uzayı, G üzerindeki tüm C^∞ vektör alanlarının kümesi olan $\chi(G)$ Lie cebri bir alt cebridir.

$e \in G$ grubunun birim elemanı olmak üzere $T_e G$ tanjant uzayı vektör uzayı olarak $L(G)$ uzayına izomorftur.

Herhangi bir $A \in T_e G$ için $\tilde{A}$ vektör alanı her $g \in G$ için şu şekilde tanımlıdır:

$$\tilde{A}_g = (\ell_g)_{*,e}(A)$$

O halde $A, B \in T_e G$ vektörlerinin braketleri ise

$$[A, B] := [\tilde{A}, \tilde{B}]_e$$

olarak tanımlıdır.

Önerme 4.1.1. $A, B \in T_e G$ vektörlerine karşılık $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ sol-invaryant vektör alanları olsunlar. Bu durumda

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = [A, B]^\sim$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. $[A, B] := [\tilde{A}, \tilde{B}]_e$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $\tilde{A} = (\ell_g)_{*,e}(A)$ ve $\tilde{B} = (\ell_g)_{*,e}(B)$ olduğundan

$$\begin{aligned} ([A, B]^\sim)_g &= (\ell_g)_{*,e}([A, B]) \\ &= (\ell_g)_{*,e}([\tilde{A}, \tilde{B}]_e) \\ &= [\tilde{A}, \tilde{B}]_g \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $g \in G$ herhangi bir eleman olduğundan

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = [A, B]^\sim$$

eşitliği sağlanır. □

4.2 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ üzerindeki Lie Braket

Önerme 4.2.1. $A = \sum a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big|_I$ ve $B = \sum b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big|_I \in T_I GL(n, \mathbb{R})$ olsunlar.
Eğer

$$[A, B] = [\tilde{A}, \tilde{B}]_I = \sum c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big|_I$$

ise bu durumda

$$c_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj} - b_{ik} a_{kj}$$

şeklindedir. Yani

$$[A, B] = AB - BA$$

olur.

Kanıt.

$$[\tilde{A}, \tilde{B}]_I = \sum c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big|_I$$

eşitliğinin her iki tarafına da $x_{ij} : Gl(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları girilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} c_{ij} &= [\tilde{A}, \tilde{B}]_I(x_{ij}) \\ &= \left(\tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A} \right)_I(x_{ij}) \\ &= \left(\tilde{A}\tilde{B}(x_{ij}) - \tilde{B}\tilde{A}(x_{ij}) \right)_I \\ &= \left(\tilde{A}\tilde{B}(x_{ij}) \right)_I - \left(\tilde{B}\tilde{A}(x_{ij}) \right)_I \\ &= \tilde{A}_I \tilde{B}(x_{ij}) - \tilde{B}_I \tilde{A}(x_{ij}) \\ &= A\tilde{B}(x_{ij}) - B\tilde{A}(x_{ij}) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $A\tilde{B}(x_{ij})$ ifadesini bulabilmek için

Uyarı 4.2.2. $\tilde{B}_g = (\ell_g)_{*,I}(B)$ şeklinde tanımlı olsun.

Herhangi bir $X \in T_I GL(n, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} c : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ t &\mapsto c(t) \end{aligned}$$

$c(0) = I$ ve $c'(0) = X$ olacak şekilde bir eğri vardır.

Bu durumda herhangi bir $g \in GL(n, \mathbb{R})$ için;

$$\begin{aligned} (\ell_g)_{*,I}(X) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\ell_g c(t)) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (gc(t)) \\ &= gc'(0) \\ &= gX \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\tilde{B}_g = (\ell_g)_{*,I}(B) = gB$ bulunur.

Yani $\tilde{B}_g = gB = \sum (gB)_{ij} \left. \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right|_g$ dir. $\tilde{B}(x_{ij})$ ifadesini bulabilmek için bu eşitliğin her iki tarafına da x_{ij} uygulayalım:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_g(x_{ij}) &= (gB)_{ij} \\ &= \sum_k g_{ik} b_{kj} \\ &= \sum_k b_{kj} x_{ik}(g) \end{aligned}$$

g herhangi bir eleman olduğundan

$$\tilde{B}(x_{ij}) = \sum_k b_{kj} x_{ik}$$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned} A\tilde{B}(x_{ij}) &= \left(\sum_{p,q} a_{pq} \left. \frac{\partial}{\partial x_{pq}} \right|_I \right) \left(\sum_k b_{kj} x_{ik} \right) \\ &= \sum_{p,q,k} a_{pq} b_{kj} \delta_{ip} \delta_{kq} \\ &= \sum_k a_{ik} b_{kj} \\ &= (AB)_{ij} \end{aligned}$$

Benzer yolla $B\tilde{A}(x_{ij}) = (BA)_{ij}$ bulunur ve böylece

$$c_{ij} = \sum a_{ik}b_{kj} - b_{ik}a_{kj} = (AB - BA)_{ij}$$

elde edilir.

□



Kaynaklar

- [1] Lang, Serge, Introduction to Differentiable Manifolds, Springer YIL.
- [2] Lee, John M., Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature, Springer, 1997.
- [3] Lang, Serge, Fundamentals of Differential Geometry , HANGİ YAYIN, YIL.
- [4] Lee, John M., Introduction to Smooth Manifolds , Springer, 2000.
- [5] Tu, Loring W., An Introduction to Manifolds , Springer, 2007.
- [6] Kolk, J.A.C., Duistermaat, J.J., Lie Groups, Springer, YIL.
- [7] Procesi, Claudio, Lie Groups, HANGİ YAYIN, YIL.
- [8] Bump, Daniel, Lie Groups, Springer, YIL.
- [9] Warner, Frank W., Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer, YIL.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Ebru AÇIK

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Geçmişi:

- 2006-2010, Çatalca Çok Programlı Anadolu Lisesi, Fen Bilimleri
- 2012-2016, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi , Matematik Bölümü
- 2017-2019, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Topoloji Tezli Yüksek Lisans Programı