

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR



DOKTORA TEZİ

Ecem KAVUK

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erol KILIÇ

ŞUBAT 2024

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR



DOKTORA TEZİ

Ecem KAVUK
(23616140002)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erol KILIÇ
Eş Danışman: Prof. Dr. Mehmet GÜLBAHAR

ŞUBAT 2024

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR

Tezi Hazırlayan: Ecem KAVUK
Doktora Tezi

TEŐEKKÖR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemedен beni her konuda yönlendiren danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Erol KILIÇ ve Prof. Dr. Mehmet GÜLBAHARA'a, tez yazım sürecinde her konuda bana yardımcı olan Prof. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR'e, İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakóltesi, Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine ve Elemanlarına, çalışmalarım ve tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışmalarım süresince de benden her türlü desteklerini esirgemeyen aileme, ayrıca 117F434 nolu 1001 projesi kapsamında verdikleri maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a, teşekkür ederim.



ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Lighlike Altmanifoldlar Üzerinde Ricci Solitonlar ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ecem KAVUK



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1 Yarı(Semi)-Riemann Manifoldlar ve Altmanifoldları	5
2.2 Lightlike Altmanifoldlar.....	17
2.2.1 Lightlike Hiperyüzeyler.....	17
2.2.2 Lightlike Altmanifoldlar.....	23
2.2.3 Ek Boyutu İki Olan Lightlike Altmanifoldlar	29
3. LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLER ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR	34
3.1 Lightlike Hiperyüzeyler Üzerinde Concurrent Vektör Alanları	34
3.2 Lightlike Hiperyüzeyler Üzerinde Potansiyel Vektör Alanı Concurrent Vektör Alanı Olan Ricci Solitonlar	42
3.3 Lightlike Hiperyüzeyler ÜzerindeTorse Forming Vector Alanları.....	48
3.4 Lightlike Hiperyüzeylerde Potansiyel Vektör Alanı Torse Forming Vektör Alanı Olan Ricci Solitonlar	54
3.5 Einstein Ricci Soliton Lightlike Hiperyüzeyler.....	57
4. LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR	61
4.1 Half-lightlike Alt Manifoldlar Üzerinde Ricci Solitonlar	61
4.2 Coisotropic Lightlike Alt Manifoldlar Üzerinde Ricci Solitonlar.....	69
4.3 r –Lightlike Altmanifoldlar Üzerinde Ricci Solitonlar.....	76
4.4 Rigged Metrikli Lightlike Alt Manifoldlar Üzerinde Bazı Karakterizasyonlar	82
KAYNAKLAR.....	87
ÖZGEÇMİŞ	89

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\tilde{M}, M$	: Manifold, altmanifold,
$\tilde{g}, g$	: Metrik Tensör, İndirgenmiş Metrik,
$T_p\tilde{M}, T_pM$	: p Noktasındaki Tanjant Uzaylar,
$\Gamma(TM)$	: Vektör Alanlarının Kümesi,
$\tilde{\nabla}, \nabla, \nabla^*, \nabla^t$	: Lineer Konneksiyonlar,
$K(\Pi)$	: Π Düzleminin Kesit Eğriliği,
$div X$	: X Vektör Alanının Divergensi,
∇f	: f Fonksiyonunun Gradienti,
$\mathcal{L}_v$	: v Doğrultusundaki Lie Türevi,
H_f	: f Fonksiyonunun Hessiani,
$[,]$	: Lie Parentez (Lie Braketi) Operatörü,
h	: İkinci Temel Form,
D	: Distribüsyon,
A_V	: V nin Şekil Operatörü, Weingarten Dönüşümü,
$Rad TM$	: M nin Radikal Distribüsyonu,
$S(TM)$	: M nin Screen (Ekran) Distribüsyonu,
$\perp$	: Ortogonal Direkt Toplam,
$\oplus$	: Ortogonal Olmayan Direkt Toplam,
B	: M Lightlike Hiperyüzeyinin İkinci Temel Formu,
h^*, C	: Screen Distribüsyonunun İkinci Temel Formu,
A_ξ^*	: Screen Distribüsyonunun Şekil Operatörü, Weingarten Dönüşümü.

ÖZET

Doktora Tezi

LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR

ECEM KAVUK

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

89+vi sayfa

2024

Danışman: Prof. Dr. Erol KILIÇ

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Giriş olarak verilen birinci bölümde, Ricci solitonlarla ilgili literatür bilgisi ve tezin genel içeriği hakkında kısa bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde ise, tezin anlaşılabilir olması için yarı-Riemann manifoldlar, altmanifoldlar ve yarı(semi)-Riemann manifoldların lightlike altmanifoldları ile ilgili temel kavramlar verildi. Üçüncü bölümde, ilk olarak bir yarı-Riemann manifoldun lightlike hiperyüzeyi üzerinde Ricci solitonlar, Rigged metrik yardımıyla incelendi ve bu bölümde potansiyel vektör alanı concurrent vektör alanı ve concircular vektör alanı olarak alınarak, lightlike hiperyüzeyler üzerinde Ricci solitonların var olması için gerekli ve yeterli koşullar ile karakterizasyon teoremler verildi. Son bölüm olan dördüncü bölümde ise lightlike altmanifoldlar üzerinde Ricci solitonlar en genel haliyle çalışıldı. Bu bölümde ilk önce ek boyutu iki olan half lightlike ve coisotropic altmanifoldlar üzerinde Ricci solitonlar çalışıldı ve potansiyel vektör alanları özel vektör alanları olarak alınarak karakterizasyonlar verildi. Bu son bölümde en son olarak r -lightlike altmanifoldlar üzerinde Ricci solitonlar incelendi ve potansiyel vektör alanlarının özel vektör alanları (concurrent, concircular, v.s.) olması durumunda karakterizasyonlar verildi.

Anahtar Kelimeler: Yarı-Riemann Manifoldlar, Lightlike Altmanifoldlar, Özel Vektör Alanları, Ricci Solitonlar

ABSTRACT

Phd. Thesis

RICCI SOLITONS ON LIGHTLIKE SUBMANIFOLDS

Ecem KAVUK

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

89+vi pages

2024

Supervisor: Prof. Dr. Erol KILIÇ

This study, prepared as a doctoral thesis, consists of four chapters. In the first chapter, which is given as an introduction, brief information about the literature on Ricci solitons and the general content of the thesis is given. In the second chapter, basic concepts about semi-Riemann manifolds, submanifolds and lightlike submanifolds of semi-Riemann manifolds are given to make the thesis understandable. In the third chapter, firstly, Ricci solitons on the lightlike hypersurface of a semi-Riemann manifold were examined with the help of the Rigged metric, and in this chapter, the potential vector field was taken as concurrent vector field and concircular vector field, and the necessary and sufficient conditions and characterizations were given for the existence of Ricci solitons on lightlike hypersurfaces and some theorems and results were obtained. In the last chapter, the fourth chapter, Ricci solitons were studied in their most general form on lightlike submanifolds. In this section, first Ricci solitons were studied on half lightlike and coisotropic submanifolds with additional dimension two, and characterizations were given by taking potential vector fields as special vector fields. In this last section, Ricci solitons on r-lightlike submanifolds were examined and characterizations were given in case potential vector fields are special vector fields (concurrent, concircular, etc.).

Keywords: Semi-Riemannian Manifolds, Lightlike Submanifolds, Special Vector Fields, Ricci Solitons

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometride Riemann manifoldlar ve altmanifoldları bir çok modellemede, uygulamada oldukça elverişli yapılardan birisidir. Riemann manifoldlar incelenirken, uzayı karakterize eden önemli araçlardan birisi Riemann manifoldun kesit eğriliğidir. Bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemann manifoldu sabit kesit eğriliği c ye sahip ise M ye bir uzay form denir ve $\tilde{M}(c)$ ile gösterilir. Bir n -boyutlu Riemann manifoldunda $c = 0$ olduğunda Riemann manifoldu n -boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ e, $c > 0$ olduğunda Öklidyen n -hiperküreye ve $c < 0$ olduğunda n -boyutlu hiperbolik uzaya diffeomorfiktir. Eğer $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemann manifoldu $Ric = \lambda \tilde{g}$ şartını sağlıyor ise $\tilde{M}$ ye Einstein uzay denir, burada Ric , $\tilde{M}$ nin ricci eğriliği ve λ da bir reel sabittir. İyi bilinirki Einstein uzaylar uzay formlarının bir genelleştirilmiştir, yani her uzay form aynı zamanda bir Einstein manifoldudur fakat tersi her zaman doğru değildir.

1904 yılında Henri Poincare, "bir kapalı, pürüzsüz (smooth) ve basit bağlantılı 3—manifold S^3 küresine diffeomorfiktir" varsayımını ortaya atmıştır ve bu varsayım Poincare Varsayımı olarak bilinir [1]. 3—kürenin topolojik karakterizasyonunu öneren Poincare Varsayımı yüz yılı aşkın bir süredir topolojideki temel soru olmuştur ve çeşitli topolojik yöntemler kullanılarak defalarca çözülmeye uğraşıldı ise de başarı sağlanamamıştır. Bu problem, Clay Matematik Enstitüsü'nün yedi Milenyum Ödüllü Problemlerinden biri olarak seçildiğinde önemi ve zorluğu vurgulanmıştır. 2002 ve 2003'te Grigory Perelman, Poincare Varsayımını olumlu bir şekilde oluşturmak için geometrik argümanların, özellikle de Hamilton [2] tarafından tanıtılan ve incelenen Ricci akışının nasıl kullanılacağını gösteren çalışmalar yayınladı [3] [4] [5]. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir Riemann manifoldu ve $u_1, \dots, u_n$ lokal koordinat sistemi olmak üzere $\tilde{g}$ metriği $ds^2 = \sum \tilde{g}_{ij} du_i du_j$ ile verilsin. Bu Riemann manifoldu ile ilişkili Ricci akışı

$$\frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij} \quad (1.0.1)$$

diferensiyel denklemini sağlayan $\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{ij}(t)$ Riemann metriklerinin bir-parametrelili ailesidir [2]. Bu kısmi diferensiyel denklemin çözümü $\tilde{M}$ üzerinde (1.0.1) denklemini sağlayan $\tilde{g}(t)$ metriklerinin bir-parametrelili ailesini verir, burada t parametresi reel sayıların bir non-dejenere aralığı I ya aittir [6, 7]. Eğer I aralığının başlangıç noktası t_0 ise $(\tilde{M}, \tilde{g}(t_0))$ a Ricci akışın başlangıç şartı veya $\tilde{g}(t_0)$ a Ricci akışın başlangıç metriği denir. Bir Ricci soliton, bir Ricci akış $(\tilde{M}, \tilde{g}(t))$, $0 \leq t < T \leq \infty$, de her $t \in [0, T]$ için $\varphi_t : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ bir diffeomorfizm olan ve bir sabit $\sigma(t)$ için $\sigma(t) \varphi_t^* \tilde{g}(0) = \tilde{g}(t)$ yi sağlayan bir yapıdır. Yani bir Ricci solitonda

bütün $(\tilde{M}, \tilde{g}(t))$ Riemann manifoldları bir sabit çarpanı ile birbirine izometriktir [7]. Perelman'ın [3] [4] [5] çalışmaları sonrası Poincare Varsayımının çözümü kabul gördü ve diferensiyel geometri alanında yeni bir çalışma alanı ortaya çıktı.

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde bir v vektör alanı için

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_v\tilde{g} + Ric = \lambda\tilde{g} \quad (1.0.2)$$

şartını sağlayacak şekilde bir λ reel sabiti var ise $\tilde{M}$ üzerinde bir Ricci soliton vardır veya $(\tilde{g}, \xi, \lambda)$ üçlüsüne $\tilde{M}$ üzerinde bir Ricci Soliton denir, burada $\mathcal{L}_v\tilde{g}$, v doğrultusunda $\tilde{g}$ metriğinin Lie türevidir ve v ye potansiyel vektör alanı denir . $\lambda < 0$ ise Ricci solitona genişleyen (expanded), $\lambda > 0$ ise daralan (shrinking), $\lambda = 0$ ise durağan (steady) denir [8] [9]. Bir Ricci soliton genel olarak $(\tilde{M}, \tilde{g}, v, \lambda)$ ile gösterilir ve Ricci solitonlar Einstein uzaylarının genelleştirilmiştir, yani her Einstein manifold üzerinde bir Ricci soliton vardır fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. (1.0.2) ile verilen denkleme $\tilde{M}$ üzerinde Ricci soliton denklemi denir ve bu denklem

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_v\tilde{g} + Ric + \lambda\tilde{g} = 0 \quad (1.0.3)$$

şeklinde de verilebilir, yani (1.0.2) ve (1.0.3) denklemleri birbirine denktir, sadece (1.0.3) denkleminde $\lambda > 0$ ise Ricci solitona genişleyen (expanded), $\lambda < 0$ ise daralan (shrinking) olur. η , $\tilde{M}$ Riemann manifoldu üzerinde bir 1-form ve μ bir reel sabit olmak üzere

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_v\tilde{g} + Ric = \lambda\tilde{g} + \mu\eta \otimes \eta \quad (1.0.4)$$

denklemini sağlanıyor ise $(\tilde{g}, v, \lambda, \mu)$ dördlüsüne $\tilde{M}$ üzerinde η -Ricci soliton denir. Bir η -Ricci soliton, Ricci solitonun bir genelleştirilmiştir, yani (1.0.4) de $\mu = 0$ alınırsa (1.0.2) elde edilir.

Son yıllarda Ricci solitonların geometrisi, bir çok geometricinin ilgi odağı olmuştur. Grigori Perelman'ın, 1904'te ortaya atılan uzun süredir devam eden Poincare varsayımını çözmek için Ricci solitonları kullandıktan sonra daha önemli hale geldi [7]. Böylece Ricci solitonlar diferensiyel geometride son yılların bir popüler çalışma konusu haline gelmiştir ve bir Riemann metriğine sahip olan farklı uzaylarda incelenmeye başlanmıştır (Riemann manifoldlar, Sasakian manifoldlar, para-Sasakian manifoldlar, Kaehler manifoldlar ve bu manifoldların altmanifoldları, v.s.) [10], [11], [12] [13], [8], [14], [15]. Potansiyel vektör alanı v yerine bazı özel vektör alanları alınarak Ricci solitonlarla ilgili yeni geometrik sonuçlar elde edilmiştir. v vektör alanı $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki bir f fonksiyonunun gradient vektör alanı olarak

alındığında Ricci solitona gradient Ricci soliton denir ve (1.0.2) denklemi

$$Ric + H_f = \lambda \tilde{g} \quad (1.0.5)$$

haline dönüşür ve $(\tilde{M}, \tilde{g}, f, \lambda)$ ile gösterilir, burada H_f , f fonksiyonunun Hessian tensörüdür. Bunların yanı sıra, potansiyel vektör alanı v nin concurrent, concircular veya torse forming vektör alanı olarak alındığında manifoldun incelenmesi sonucunda farklı ve elverişli geometrik sonuçlar elde edilmektedir. Ricci solitonların altmanifoldlar üzerinde davranışları, altmanifoldların geometrisin incelenmesine farklı bir bakış açısı getirmiş ve zenginlik katmıştır. Bir Riemann manifoldu $(\tilde{M}, \tilde{g})$ nin bir altmanifoldu (M, g) üzerinde bir Ricci solitonun var olması için gerekli şartların incelenmesi problemi önemli geometrik sonuçların ortaya çıkmasını sağlamıştır. Özellikle Öklidyen uzayın bir altmanifoldu Ricci solitona sahip ise bu altmanifoldların ne tür özelliklere sahip olduğu B. Y. Chen ve arkadaşları tarafından farklı makalelerde incelenmiş ve Ricci solitonlarla ilgili örnekler verilmiştir [10], [11], [12] .

Bir yarı (semi)-Riemann manifoldunun geometrisi, Riemann manifoldların geometrisine benzer olarak incelenir. Bunun yanı sıra yarı-Riemann manifoldların altmanifoldlarının geometrisi de, altmanifold üzerine indirgenen metrik non-dejenere olduğunda, Riemannian altmanifoldların geometrisine benzer şekilde incelenir ve benzer metodlar kullanılır. Eğer yarı(semi)-Riemann manifoldunun bir M altmanifoldu üzerine indirgenen g metriği dejenere ise o zaman durum oldukça farklıdır. Bu durumda lightlike geometri ortaya çıkar ve oldukça farklı metodlar kullanmak zorunda kalınır. Lightlike geometri 1990 lı yıllardan sonra, diferensiyel geometride önemli araştırma alanlarından birisi haline gelmiştir ve bu alanda çalışmaların faydalanabileceği bir çok önemli kaynak oluşturulmuştur [16], [17], [18]. Bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ yarı(semi)-Riemann manifoldunun bir lightlike (dejenere) altmanifoldu (M, g) üzerinde, g nin dejenere olmasından dolayı diferensiyel geometride kullanılan bazı operatörler tanımlanamaz (örneğin, gradient, laplasyan gibi). Bu durumu gidermek için, yani bu kullanışlı operatörleri lightlike yapılarda elde etmek için bir çok çalışma yapılmıştır [19], [20], [21].

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışmada esas problem lightlike altmanifoldlar üzerinde Ricci solitonları çalışmaktır ve bu problem daha önce lightlike altmanifoldlar üzerinde literatürde çalışılmamış olan bir problemdir, ilk olarak bu doktora tezinde gözönüne alındı. Tez dört bölüm halinde hazırlanmıştır. Giriş olarak verilen birinci bölümde, Ricci solitonların ortaya çıkışı hakkında literatür bilgisi ve tezin genel içeriği hakkında kısa bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde ise, tezin anlaşılabilir olması için yarı-Riemann manifoldlar, altmanifoldlar

ve yarı-Riemann manifoldların lightlike altmanifoldları ilgili temel kavramlar verildi. Üçüncü bölümde, ilk olarak bir yarı-Riemann manifoldun lightlike hiperyüzeyi üzerinde Ricci solitonlar, Rigged metrik yardımıyla incelendi ve bu bölümde potansiyel vektör alanı concurrent vektör alanı ve concircular vektör alanı olarak alınarak, lightlike hiperyüzeyler üzerinde Ricci solitonların var olması için gerekli ve yeterli koşullar ile karakterizasyon teoremleri verildi. Son bölüm olan dördüncü bölümde ise lightlike altmanifoldlar üzerinde Ricci solitonlar en genel haliyle çalışıldı. Bu bölümde ilk önce ek boyutu iki olan half lightlike ve coisotropic altmanifoldlar üzerinde Ricci solitonlar çalışıldı ve potansiyel vektör alanları özel vektör alanları olarak alınarak karakterizasyonlar verildi. Bu son bölümde en son olarak r -lightlike altmanifoldlar üzerinde Ricci solitonlar incelendi ve potansiyel vektör alanlarının özel vektör alanları (concurrent, concircular, v.s.) olması durumunda karakterizasyonlar verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Yarı(Semi)-Riemann Manifolddlar ve Altmanifolddlar

Bu alt bölümde skalar çarpım uzayları, yarı (semi)-Riemann manifolddlar ve altmanifolddlar ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}$ cisimi üzerinde boyutu n olan bir vektör uzayı V olsun. V üzerinde bir simetrik ve bilinear $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne simetrik bilinear form denir [22].

Tanım 2.1.2. Bir V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik, bilinear form g olmak üzere $\forall v \in V, v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ ise g ye pozitif tanımlı, $g(v, v) < 0$ ise g ye negatif tanımlı, $g(v, v) \geq 0$ ise g ye pozitif yarı-tanımlı (semi-definite) ve $g(v, v) \leq 0$ ise g ye negatif yarı-tanımlı (semi-definite) denir [23].

Tanım 2.1.3. Bir reel vektör uzayı V üzerinde tanımlı bir simetrik, bilinear form g olmak üzere $\forall u \in V$ için $g(u, v) = 0$ olduğunda $v = 0$ ise g ye non-dejenere, aksi halde g ye dejenere denir [24].

Tanım 2.1.4. g, V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear form olsun. $g|_W : W \subset V \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü negatif tanımlı olacak şekilde en geniş $W \subset V$ altuzayının boyutuna g bilinear formunun indeksi denir. Bu tanıma göre V üzerindeki g simetrik bilinear formunun indeksi, g yi negatif tanımlı yapan en geniş $W \subset V$ alt uzayının boyutudur ve $\text{index}g$ veya $\text{index}V$ ile gösterilir [22].

Tanım 2.1.5. V vektör uzayı üzerinde g simetrik bilinear formu non-dejenere ise g ye V üzerinde skalar çarpım ve (V, g) ikilisine de skalar çarpım uzayı denir [23].

Tanım 2.1.6. (V, g) bir skalar çarpım uzayı ve U da V nin bir altuzayı olsun. Eğer $g|_U : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü non-dejenere ise U ya V nin alt skalar çarpım uzayı denir [22].

Tanım 2.1.7. (V, g) bir skalar çarpım uzayı olsun. Eğer $u, v \in V$ için $g(u, v) = 0$ ise u ile v ortogonaldir (dikdir) denir ve $u \perp v$ ile gösterilir [23].

Tanım 2.1.8. (V, g) bir skalar çarpım uzayı U ve W da V nin iki altuzayı olsun. Eğer $\forall u \in U$ ve $\forall w \in W$ için $g(u, w) = 0$ ise U ile W altuzaylarına ortogonaldir (dikdir) denir ve $U \perp W$ ile gösterilir [22].

$U \subset V$ alt vektör uzayı için U nun dik uzayı $U^\perp = \{v \in V \mid g(u, v) = 0, \forall u \in U\}$ dir. Bu durumda $(U^\perp)^\perp = U$ dur.

Lemma 2.1.1. Bir skalar çarpım uzayı (V, g) olsun. $U \subset V$ alt vektör uzayının non-dejenere olması için gerekli ve yeterli koşul $V = U \oplus U^\perp$ dir [22].

Lemma 2.1.2. Her (V, g) skalar çarpım uzayının bir ortonormal bazı vardır. (V, g) skalar çarpım uzayının ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere

$$g(e_i, e_j) = \epsilon_i \delta_{ij}, \quad \epsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1$$

dir. Burada δ_{ij} Kronecker deltasıdır [25].

Teorem 2.1.1. (V, g) skalar çarpım uzayı ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V nin bir ortonormal bazı olsun. Her $v \in V$ vektörü

$$v = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(v, e_i) e_i$$

olarak yazılır ve bu ifade tek türdür [26].

V skalar çarpım uzayının bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal bazı için $\epsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1$ olmak üzere $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ sıralı n -lideki negatif işaretli terim sayısı V nin indeksidir [26].

Tanım 2.1.9. İki skalar çarpım uzayı (V, g) ve $(W, \tilde{g})$ olsun. $T : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm olmak üzere her $u, v \in V$ için $g(u, v) = \tilde{g}(T(u), T(v))$ oluyorsa T dönüşümüne lineer izometri denir [23].

İki skalar çarpım uzayının izometrik olması için gerekli ve yeterli koşul bu iki uzayın boyutlarıyla indekslerinin eşit olmasıdır [23].

Tanım 2.1.10. M bir n -boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. Her $p \in M$ için tanjant uzayı $T_p M$ üzerinde bir sabit indeksli g_p skalar çarpımı var ise g ye M manifoldu üzerinde $(0, 2)$ tipinde bir metrik tensör ve (M, g) ikilisine de bir yarı(semi)-Riemann manifold denir [25].

U bir n -boyutlu yarı-Riemann manifoldu M nin yerel koordinat komşuluğu olsun. U üzerinde bir lokal koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere g metrik tensörün bileşenleri

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

dir. Burada $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ dir. g metrik tensörü $(0, 2)$ tipten simetrik tensör alanı olduğundan $1 \leq i, j \leq n$ için $g_{ij} = g_{ji}$ dir. Dolayısıyla U üzerinde g metrik tensörü

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

olarak yazılabilir. Eğer $index M = 0$ ise (M, g) ye Riemann manifold denir [25].

Tanım 2.1.11. Boyutu n olan bir diferensiyellenebilir manifold M olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \xrightarrow{C^\infty} \Gamma(TM), \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

operatörü

- (1) $\nabla_X Y$, X bileşenine göre $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineerdir
- (2) $\nabla_X Y$, Y bileşenine göre $\mathbb{R}$ -lineerdir
- (3) $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

koşullarını sağlıyor ise ∇ operatörüne M de bir lineer konneksiyon denir. $\nabla_X Y$ vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanına göre kovaryant türevi denir [22].

Tanım 2.1.12. M bir diferensiyellenebilir manifold, ve ∇ da M de bir lineer konneksiyon olsun. Bu durumda

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

dönüşümü her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (2.1.1)$$

olarak tanımlı tensör alanı T ye ∇ lineer konneksiyonun torsiyon tensörü denir. Bu T tensörü $(1, 2)$ mertebeli tensör alanıdır. $T = 0$ olması durumunda ∇ lineer konneksiyonuna torsiyonsuz (simetrik konneksiyon) denir [22].

Eğer g metriği M yarı-Riemann manifoldu üzerindeki ∇ lineer konneksiyonuna göre paralel ise ∇ konneksiyonuna metrik konneksiyon denir. Yani, g metriği her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$$

eşitliğini sağlar. Torsiyonsuz ve metrik olan bir lineer konneksiyona Levi-Civita konneksiyonu denir [22].

Teorem 2.1.2. Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(4) [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

$$(5) X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

şartları sağlayan ∇ Levi-Civita konneksiyonu vardır ve tektir. Bu konneksiyon Koszul formülü olarak bilinen

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \quad (2.1.2)$$

ile karakterize edilir [22].

Tanım 2.1.13. M n -boyutlu bir yarı(semi)-Riemann manifoldu, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ M manifoldunun bir U açık komşuluğunda lokal koordinat sistemi ve bu koordinat sistemine göre ortonormal çatı $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n\}$ olsun. Bu durumda

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

olmak üzere U üzerinde

$$\Gamma_{ij}^k : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan reel değerli Γ_{ij}^k fonksiyonlarına Christoffel sembolleri denir [23].

Önerme 2.1.1. M , n -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi M manifoldunun bir U açık komşuluğundaki lokal koordinat sistemi ve bu koordinat sistemin belirlediği ortonormal çatı $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n\}$ olmak üzere

$$(1) \nabla_{\partial_i} Y = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n f_i g_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$(2) \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n g^{kr} \left\{ \frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \right\}$$

dir. Burada $Y = \sum_{j=1}^n g_j \partial_j$ ve $[g^{ij}]$ matrisi $[g_{ij}]$ matrisinin tersidir [22].

Tanım 2.1.14. Bir diferensiyellenebilir manifold M ve M de bir lineer konneksiyon ∇ olmak üzere

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

dönüşümü her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.1.3)$$

şeklinde tanımlanan R tensör alanına ∇ lineer konneksiyonun Riemann eğrilik tensörü denir. Riemann eğrilik tensörü R , mertebesi $(1, 3)$ olan bir tensör alanıdır. $R = 0$ olması durumunda M manifoldu flattr (düzlemseldir) denir. $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$g(R(X, Y)Z, W) = R(X, Y; Z, W)$$

ya Riemann eğriliği denir [25].

Önerme 2.1.2. (M, g) yarı(semi)-Riemann manifold ve ∇ da (M, g) nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda ∇ konneksiyonun eğrilik tensörü R olmak üzere her $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z \quad (2.1.4)$$

$$R(X, Y; Z, W) = -R(X, Y; W, Z) \quad (2.1.5)$$

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \quad (2.1.6)$$

$$R(X, Y; Z, W) = R(Z, W; X, Y) \quad (2.1.7)$$

dir. (2.1.6) eşitliğine Birinci Bianchi Özdeşliği denir [23].

Önerme 2.1.3. (M, g) yarı(semi)-Riemann manifoldu ve $\nabla, (M, g)$ manifoldu üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda ∇ konneksiyonun R eğrilik tensörü olmak üzere her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0 \quad (2.1.8)$$

dir. Burada $W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y, Z, W) &= ((\nabla_X R)(Y, Z))W = \nabla_X R(Y, Z)W - R(\nabla_X Y, Z)W \\ &\quad - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y, Z)(\nabla_X W) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

eşitliğiyle tanımlanır. (2.1.8) eşitliğine ikinci Bianchi özdeşliği denir [24].

$X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ vektör alanları olmak üzere $S, (1, 2)$ tensör alanı ve ω 1-formu için R eğrilik tensörü aşağıdaki özdeşlikleri de sağlar:

$$(\nabla_X \nabla_Y \omega)(Z) - (\nabla_Y \nabla_X \omega)(Z) - (\nabla_{[X, Y]} \omega)(Z) = -\omega(R(X, Y)Z) \quad (2.1.10)$$

ve

$$\begin{aligned} (\nabla_X \nabla_Y S)(Z, W) - (\nabla_Y \nabla_X S)(Z, W) - (\nabla_{[X, Y]} S)(Z, W) \\ = R(X, Y)S(Z, W) - S(R(X, Y)Z, W) - S(Z, R(X, Y)W). \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

(2.1.10) ve (2.1.11) formüllerine Ricci özdeşliği denir [24].

Tanım 2.1.15. (M, g) n -boyutlu yarı-Riemann manifoldu ve M manifoldunun bir p noktasındaki tanjant uzayı $T_p M$ olsun. $T_p M$ uzayının 2-boyutlu altuzayı π düzlemine kesit (tanjant düzlemi) denir. π düzleminin bir $\{e_1, e_2\}$ bazı için

$$Q(e_1, e_2) = g(e_1, e_1)g(e_2, e_2) - (g(e_1, e_2))^2$$

diyelim. $|Q(e_1, e_2)|$ reel sayısı, e_1 ve e_2 vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanını verir. $p \in M$ noktasındaki non-dejenere π düzleminin $\{e_1, e_2\}$ bir bazı olmak üzere

$$K(\pi) = K(e_1, e_2) = \frac{g(R(e_1, e_2)e_2, e_1)}{Q(e_1, e_2)} \quad (2.1.12)$$

sayısına M manifoldunun π düzlemine göre kesit eğriliği denir. $\{e_1, e_2\}$ bir ortonormal baz ise $Q(e_1, e_2) = 1$ ve $K(\pi) = g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) = R(e_1, e_2; e_1, e_2)$ olur [24].

Kesit eğriliği $K(\pi) = 0$ olan yarı-Riemann manifolduna flattır (düzlemseldir) denir. n -boyutlu ve s indeksli $\mathbb{R}_s^n$ yarı-Öklidyen uzayı flattır [22].

Tanım 2.1.16. (M, g) n -boyutlu yarı-Riemann manifoldu ve $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektör alanları M üzerinde bir ortonormal çatı olmak üzere

$$\begin{aligned} Ric : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ Ric(X, Y) &= \text{iz} R(., X)Y = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(R(e_i, X)Y, e_i) \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

şeklinde tanımlanan $(0, 2)$ -tipindeki tensöre Ricci tensörü denir ve Ric ile gösterilir. Eğer Ricci tensörü $Ric = 0$ ise M manifolduna Ricci flattır denir [23].

Eğer (2.1.13) eşitliğinde (2.1.4), (2.1.5) ve (2.1.7) kullanılırsa M manifoldunun Ricci tensörü her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(R(e_i, X)Y, e_i) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(R(Y, e_i)e_i, X) \\ &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(R(e_i, Y)X, e_i) = Ric(Y, X) \end{aligned}$$

olur ki bu da Ricci tensörünün simetrik olduğunu gösterir [22].

Tanım 2.1.17. (M, g) bir yarı-Riemann manifoldu ve λ da bir reel sabit olsun. Eğer

$$Ric = \lambda g \quad (2.1.14)$$

ise M manifolduna Einstein manifoldu denir. $u \in \Gamma(TM)$ birim vektör alanı için $Ric(u)$ Ricci eğriliği $Ric(u) = Ric(u, u)$ eşitliğiyle tanımlanır [22].

Tanım 2.1.18. (M, g) n -boyutlu yarı-Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de M üzerinde bir ortonormal çatı olmak üzere

$$\tau = \sum_{i < j} K(e_i, e_j) \quad (2.1.15)$$

ifadesine M manifoldunun skalar eğriliği denir. M manifoldunun skalar eğriliği, $p \in M$ noktasındaki $T_p M$ tanjant uzayının 2-boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamıdır [22].

Tanım 2.1.19. (M, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonun diferensiyeli df 1-formunun duali olan vektör alanına f nin gradienti denir ve ∇f veya $\text{grad } f$ ile gösterilir ve her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\nabla f, X) = df(X) = X(f) \quad (2.1.16)$$

şeklinde tanımlanır. M nin bir lokal koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, bu koordinat sistemine karşılık gelen ortonormal çatı $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ ve dual çatı $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ olsun. Bu durumda

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \quad \text{ve} \quad \nabla f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_j \quad (2.1.17)$$

dir [22].

Tanım 2.1.20. (M, g) bir n -boyutlu yarı-Riemann manifold ve $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ de M manifoldunun bir ortonormal çatısı olsun. $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\text{div} : \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}), \quad \text{div } X = \text{iz}(\nabla X) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(\nabla_{\partial_i} X, \partial_i) \quad (2.1.18)$$

şeklinde tanımlanan div dönüşüme M üzerinde X vektör alanının divergensi denir. $X = \sum_{j=1}^n X^j \partial_j$, $X_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} X^j$, olmak üzere

$$\text{div } X = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^n \Gamma_{jk}^i X^k \right\}$$

dır [23].

Tanım 2.1.21. (M, g) bir yarı-Riemann manifold ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$h_f : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM), \quad h_f(X) = \nabla_X \nabla f \quad (2.1.19)$$

şeklinde tanımlanan lineer dönüşüme (M, g) üzerinde f fonksiyonunun Hessiyan tensörü denir. $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $H_f(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y)$ şeklinde tanımlanan $(0, 2)$ tipindeki tensöre f nin Hessiyan formu denir [22].

Lemma 2.1.3. (M, g) bir yarı-Riemann manifold ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonunun Hessiyen tensörü h_f olsun. Bu durumda h_f tensörü self-adjointtir. Yani $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(h_f(X), Y) = g(X, h_f(Y)) \quad (2.1.20)$$

dir [24].

Tanım 2.1.22. (M, g) n -boyutlu yarı-Riemann manifold olsun. Bir $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonunun Laplasyanı $\Delta f = -\operatorname{div}(\nabla f)$ olarak tanımlanır. Bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ lokal koordinat sistemi için

$$\Delta f = - \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\}$$

dır [22].

$\mathbb{R}_s^n$ yarı-Öklidyen uzayının doğal koordinat sistemi $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ olsun. Bu durumda

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad \operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial u_i}, \quad \Delta f = - \sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} \quad (2.1.21)$$

olur.

(M, g) bir Riemann manifoldu ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere eğer $\Delta f = 0$ ise f fonksiyonuna (M, g) manifoldu üzerinde harmoniktir denir. Eğer $\Delta f \geq 0$ ise f fonksiyonuna (M, g) manifoldu üzerinde altharmoniktir denir. Eğer $\Delta f \leq 0$ ise f fonksiyonuna (M, g) manifoldu üzerinde süperharmoniktir denir [23].

Tanım 2.1.23. Bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir tensör alanının $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanı yönündeki Lie türevi $\mathcal{L}_X$, aşağıdaki dört aksiyomu sağlayan bir dönüşümdür;

(1) M manifoldu üzerinde f diferensiyellenebilir fonksiyonun X vektör alanına göre Lie türevi, f fonksiyonun X vektör alanı yönüne göre türevine eşittir, yani $\mathcal{L}_X f = X[f]$ dir.

(2) M manifoldu üzerinde her S ve T tensör alanları için Leibniz kuralı olarak bilenen

$$\mathcal{L}_X(S \otimes T) = (\mathcal{L}_X S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_X T)$$

eşitliğini sağlar.

(3) $\mathcal{L}_X$ dönüşümü (Lie türevi), T tensör alanı ve $X, X_1, \dots, X_n \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(T(X_1, X_2, \dots, X_n)) &= (\mathcal{L}_X T)(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &+ \sum_{i=1}^n T(X_1, \dots, (\mathcal{L}_X X_i), \dots, X_n) \end{aligned}$$

Leibniz kuralını sağlar.

(4) $\mathcal{L}_X$ dönüşümü (Lie türevi), fonksiyonlar üzerinde d dış türev operatörü ile birlikte değişimlidir, yani $[\mathcal{L}_X, d] = 0$ dir [22].

Lemma 2.1.4. (M, g) yarı-Riemann manifoldu olmak üzere her X, Y vektör alanları ve $v \in \Gamma(TM)$ için

$$(\mathcal{L}_v g)(X, Y) = g(\nabla_X v, Y) + g(X, \nabla_Y v) \quad (2.1.22)$$

dir [25].

Tanım 2.1.24. (M, g) bir yarı-Riemann manifold ve X de M üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer

$$\mathcal{L}_X g = 0 \quad (2.1.23)$$

ise X vektör alanına Killing vektör alanı denir [22].

Tanım 2.1.25. (M, g) yarı-Riemann manifoldu, $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve X, M manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer

$$\mathcal{L}_X g = \lambda g$$

ise X vektör alanına konformal vektör alanı denir [23].

Teorem 2.1.3. (M, g) bir yarı-Riemann manifold olmak üzere $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanı için aşağıdaki şartlar denktir.

- (1) X bir Killing vektör alanıdır.
- (2) $Xg(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z])$, $\forall Y, Z \in \Gamma(TM)$ dir.
- (3) ∇X , g metrik tensörüne göre anti-adjointtir. Yani $Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\nabla_Y X, Z) = -g(\nabla_Z X, Y)$$

dir [22].

Tanım 2.1.26. (M, g_M) ve (N, g_N) yarı-Riemann manifoldları ve $\psi : N \rightarrow M$ bir diffeomorfizm olsun. Eğer ψ metrik tersörleri koruyorsa, yani $\psi^*(g_M) = g_N$ ise ψ diffeomorfizmine izometri denir [22].

Tanım 2.1.27. (M, g_M) ve (N, g_N) yarı-Riemann manifoldları olsun. Her $u, v \in T_p N$, her $p \in N$, p nin bir U açık komşuluğu için $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ diffeomorfizmi var ve

$$g_N(u, v) = g_M(\phi_{*p}(u), \phi_{*p}(v))_{\phi(p)} \quad (2.1.24)$$

sağlanıyor ise $\phi : N \longrightarrow M$ dönüşüme $p \in N$ noktasındaki lokal izometri denir [24].

Eğer her $p \in N$ için p nin bir U komşuluğu ve $\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subset M$ lokal izometrisi var ise N yarı-Riemann manifoldu, M yarı-Riemann manifolduna lokal izometriktir denir [22].

Tanım 2.1.28. (M, g_M) ve (N, g_N) yarı-Riemann manifoldlar olsun. $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $f \neq 0$ bir pozitif fonksiyon olmak üzere

$$\phi^*(g_M) = f g_N \quad (2.1.25)$$

ise $\phi : N \longrightarrow M$ dönüşümüne konformal denir. Eğer f fonksiyonu sabit ise ϕ dönüşümüne homoteti denir [22].

Eğer $f = 1$ alınırsa ϕ homotetisi bir izometri olur, eğer $f = -1$ alınırsa ϕ homotetisine bir anti-izometri denir [22].

Tanım 2.1.29. M bir yarı-Riemann manifold, ∇ da M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu, $\mu \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, ψ bir 1-form olmak üzere, her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X v = \mu X + \psi(X) v \quad (2.1.26)$$

sağlanıyor ise v vektör alanına torse-forming vektör alanı denir. Eğer $\psi = 0$ ise, yani

$$\nabla_X v = \mu X \quad (2.1.27)$$

ise v vektör alanına concircular vektör alanı denir. Eğer $\mu = 1$ ve $\psi = 0$ ise, yani

$$\nabla_X v = X \quad (2.1.28)$$

ise v vektör alanına concurrent vektör alanı denir [22].

Tanım 2.1.30. M ve N , sırasıyla, n ve m -boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ($n \leq m$), $i : M \rightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer her $p \in M$ için $(i_*)_p : T_p M \rightarrow T_{i(p)} N$ dönüşümü birebir ise i dönüşümüne immersiyon M yede N nin altmanifoldu denir. Eğer i immersiyonu birebir ise, i ye imbeding denir [22].

$(N, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, M de N nin bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $g(X, Y) = \tilde{g}(i_* X, i_* Y)$ ile M üzerinde bir g metriği tanımlanır ve bu g metriğine indirgenmiş metrik denir. Ayrıca burada i ye izometrik immersiyon denir. Eğer g metriği M üzerinde non-dejenere ise (M, g) bir yarı-Riemann manifolddur. Buna göre TN de TM nin ortogonal tümleyeni $T^\perp M$ olmak üzere

$$\Gamma(T^\perp M) = \{V \in \Gamma(TN) \mid \tilde{g}(V, X) = 0, \forall X \in \Gamma(TM)\} \quad (2.1.29)$$

ile tanımlanır. Bu durumda

$$TN = TM \oplus T^\perp M \quad (2.1.30)$$

olarak yazılır.

$(N, \tilde{g})$, m -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu ve (M, g) de n -boyutlu non-dejenere altmanifoldu olsun. (M, g) ve $(N, \tilde{g})$ nin Levi-Civita konneksiyonları, sırasıyla, ∇ ve $\tilde{\nabla}$ olmak üzere $X, Y \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(T^\perp M)$ için, Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (2.1.31)$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + D_X N \quad (2.1.32)$$

olarak tanımlanır. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$, $\tilde{\nabla}_X Y$ nin sırasıyla, teğet ve normal bileşenleridir. Benzer şekilde, $-A_N X$ ve $D_X N$, $\tilde{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenidir. Burada h ya ikinci temel form, A_N e şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü ve D ye de normal konneksiyon denir.

$p \in M$, $N \in T_p^\perp M$ normal vektörü için

$$A_N : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

bir lineer dönüşümdür ve A_N bir self-adjoint endomorfizmdir. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(T^\perp M)$ vektör alanları için $\tilde{g}(Y, N) = 0$ olduğundan

$$\tilde{g}(h(X, Y), N) = g(A_N X, Y) \quad (2.1.33)$$

olarak elde edilir. Eğer $h = 0$ ise M ye total geodezik, $\forall N \in \Gamma(T^\perp M)$ için $A_N = \lambda I$ ise M ye total umbulic altmanifold denir. $\{e_1, \dots, e_n\}$, M üzerinde bir ortonormal çatı olmak üzere

$$H = \left(\frac{1}{n}\right) iz(h) = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n \epsilon_i h(e_i, e_i) \quad (2.1.34)$$

vektör alanına M nin ortalama eğrilik vektör alanı denir. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z$$

ifadesinde Gauss ve Weingarten formülleri kullanılırsa Gauss denklemi denilen

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - A_{h(Y, Z)}X + A_{h(X, Z)}Y + h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad - h([X, Y], Z) + D_X h(Y, Z) - D_Y h(X, Z) \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

ifadesine ulaşılır. Bu denklem teğet ve normal bileşenlerine ayrılırsa

$$\left(\tilde{R}(X, Y) Z\right)^{\top} = R(X, Y) Z + A_{h(X, Z)} Y - A_{h(Y, Z)} X \quad (2.1.36)$$

ve

$$\begin{aligned} \left(\tilde{R}(X, Y) Z\right)^{\perp} &= h(X, \nabla_Y Z) - h(Y, \nabla_X Z) + D_X h(Y, Z) \\ &\quad - D_Y h(X, Z) - h(\nabla_X Y, Z) + h(\nabla_Y X, Z) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.35) denklemi $W \in \Gamma(TM)$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{g}\left(\tilde{R}(X, Y) Z, W\right) &= g(R(X, Y) Z, W) + g(A_{h(X, Z)} Y, W) - g(A_{h(Y, Z)} X, W) \\ R(X, Y; Z, W) &= \tilde{R}(X, Y; Z, W) + g(A_{h(Y, Z)} X, W) - g(A_{h(X, Z)} Y, W) \end{aligned}$$

ve (2.1.33) eşitliğinden

$$R(X, Y; Z, W) = \tilde{R}(X, Y; Z, W) + \tilde{g}(h(X, W), h(Y, Z)) - \tilde{g}(h(Y, W), h(X, Z)) \quad (2.1.37)$$

olur.

$$\begin{aligned} \left(\tilde{R}(X, Y) Z\right)^{\perp} &= \{D_X h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)\} \\ &\quad - \{D_Y h(X, Z) - h(\nabla_Y X, Z) - h(X, \nabla_Y Z)\} \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\left(\tilde{R}(X, Y) Z\right)^{\perp} = \left(\tilde{\nabla}_X h\right)(Y, Z) - \left(\tilde{\nabla}_Y h\right)(X, Z) \quad (2.1.38)$$

elde edilir ki ve buna Codazzi denklemi denir. Burada $\left(\tilde{R}(X, Y) Z\right)^{\perp}$, $\tilde{R}(X, Y) Z$ nin normal bileşenidir ve $\tilde{\nabla} h$, h ikinci temel formun kovaryant türevidir. Yani

$$\left(\tilde{\nabla}_X h\right)(Y, Z) = D_X h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \quad (2.1.39)$$

dir [22].

Tanım 2.1.31. Boyutu m olan bir yarı(semi)-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ve M de $\tilde{M}$ nin n -boyutlu non-dejenere altmanifoldu olsun. Eğer M nin normal uzayı 1-boyutlu, yani $m - n = 1$ ise M ye $\tilde{M}$ de bir hiperyüzeyi denir [22].

M hiperyüzeyinin birim normali N olmak üzere Gauss ve Weingarten formülleri $X, Y \in \Gamma(TM)$ için, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \varepsilon g(A_N X, Y) N \text{ ve } \tilde{\nabla}_X N = -A_N X \quad (2.1.40)$$

dir, burada $\varepsilon = \tilde{g}(N, N) = \pm 1$ dir.

2.2 Lightlike Altmanifoldlar

Bu kısımda $(m + n)$ –boyutlu, q –indeksli bir yarı(semi)-Riemann manifoldu $(\tilde{M}, \tilde{g})$ nin lightlike (dejenere) altmanifoldları ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir. İlk önce lightlike hiperyüzeylerin ile ilgili ve daha sonra ise genel anlamda r –lightlike altmanifoldlarla ilgili temel kavramlar verilecektir.

2.2.1 Lightlike Hiperyüzeyler

Tanım 2.2.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$, $(m + 2)$ -boyutlu $q \in \{1, \dots, m + 1\}$ indeksli yarı-Riemann manifold ve M de $\tilde{M}$ da bir hiperyüzey olsun. $x \in M$ noktasında tanjant uzay $T_x M$ nin ortogonal tümleyeni

$$T_x M^\perp = \left\{ V \in T_x \tilde{M} \mid \tilde{g}(V, W) = 0, \quad \forall W \in T_x M \right\} \quad (2.2.1)$$

olarak tanımlanır. $Rad T_x M = T_x M \cap T_x M^\perp$ olmak üzere $\forall x \in M$ için $Rad T_x M \neq \{0\}$ ise M ye lightlike (dejenere) hiperyüzey denir [18].

Eğer M bir lightlike hiperyüzey ise $\tilde{g}$ den M üzerine indirgenen g metriği M üzerinde bir dejenere metriktir. Böylece $\xi \in Rad T_x M$, $\xi \neq 0$, ve her $X \in T_x M$ için $g(\xi, \xi) = g(\xi, X) = 0$ dır. $Rad TM$ ye M nin radikal distribüsyonu denir. Lightlike hiperyüzeyde TM ve $TM^\perp$ in herikiside dejenere dir. Her $V \in T_x M^\perp$ ve her $X \in T_x M$ için $g(V, X) = 0$ olduğundan $V \in Rad T_x M$ dir. Hiperyüzeylerde $T_x M^\perp$ 1–boyutlu olduğundan $TM^\perp = Rad TM$ olur. TM de $Rad TM$ nin ortogonal tümleyenini $S(TM)$ ile gösterecek olursak, $S(TM)$ bir non-dejenere distribüsyondur, yani $S(TM)$ yarı-Riemann dır. Buradan

$$TM = Rad TM \perp S(TM) \quad (2.2.2)$$

ayrışımına sahip oluruz ve $S(TM)$ ye screen (ekran) distribüsyonu denir. Ayrıca $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold olduğundan non-dejenere dir ve

$$T\tilde{M} = S(TM) \perp S(TM)^\perp \quad (2.2.3)$$

olacak şekilde bir non-dejenere $S(TM)^\perp$ distribüsyonu vardır ve $S(TM) \cap S(TM)^\perp = \{0\}$ dır. $S(TM)^\perp$ in rankı 2 dir [18].

Teorem 2.2.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. Bu durumda M üzerinde 1-ranklı bir tek vektör demeti $tr TM$ vardır, öyleki $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ için

$$\tilde{g}(\xi, N) = 1 \quad (2.2.4)$$

olacak şekilde bir $tr TM$ nin bir N kesiti vardır ve her $W \in \Gamma(S(TM))$ için

$$\tilde{g}(N, N) = \tilde{g}(N, W) = 0, \quad (2.2.5)$$

dir [18].

İspat: $S(TM)^\perp$, 2-ranklı ve non-dejenere vektör demeti olduğundan $TM^\perp, S(TM)^\perp$ in alt demetidir. $S(TM)^\perp$ de $TM^\perp$ in tümleyeni olan alt demeti F olmak üzere $V \in \Gamma(F), V \neq 0$ alalım. Bu durumda

$$\tilde{g}(\xi, V) \neq 0$$

dır, aksi halde $\tilde{M}$ dejenere olmak zorunda kalır. Bir N vektör alanı

$$N = \frac{1}{g(\xi, V)} \left\{ V - \frac{g(V, V)}{2g(\xi, V)} \xi \right\}$$

olarak tanımlanırsa, (2.2.4) ve (2.2.5) bağıntılarının kolay bir şekilde sağlandığı görülür.

Denklem (2.2.5) den $tr(TM)_x \cap T_x M = \{0\}$ dır. Bu durumda

$$T\tilde{M}|_M = S(TM) \perp (TM^\perp \oplus tr(TM)) \quad (2.2.6)$$

$$T\tilde{M}|_M = TM \oplus tr(TM) \quad (2.2.7)$$

$$T\tilde{M}|_M = S(TM) \perp (Rad TM \oplus tr(TM)) \quad (2.2.8)$$

elde edilir.

Şimdi $(\tilde{M}, \tilde{g})$ $(m+2)$ -boyutlu bir yarı-Riemann manifold ve $\tilde{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi de $(M, g, S(TM))$ olsun.

$\tilde{M}$ nin Levi Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ olmak üzere her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(tr(TM))$ için, (2.2.7) ayrışımına göre

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (2.2.9)$$

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^t V \quad (2.2.10)$$

olarak yazılabilir. Burada $\nabla_X Y, A_V X \in \Gamma(TM)$ ve $h(X, Y), \nabla_X^t V \in \Gamma(tr(TM))$ dir. Ayrıca $\nabla, \tilde{\nabla}$ dan M üzerine indirgenen bir lineer konneksiyon, $\nabla^t, ltr(TM)$ üzerinde bir lineer konneksiyon ve h da

$$h : TM \times TM \longrightarrow ltr(TM)$$

bir simetrik bilineer formdur ve (2.2.9) ifadesine Gauss formülü, (2.2.10) ifadesine Weingarten formülü, A_V ye M nin şekil operatörü, h ya da M nin ikinci temel formu denir. $TM^\perp = Rad TM$ ve $ltr(TM)$ nin her ikisinde 1-boyutlu olduğundan

$$TM^\perp = Rad TM = Sp\{\xi\}$$

$$ltr(TM) = tr(TM) = Sp\{N\}$$

olarak yazılır ve

$$\tilde{g}(\xi, \xi) = \tilde{g}(N, N) = 0, \quad \tilde{g}(\xi, N) = 1$$

dir. Buna göre, eğer

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \xi) \\ &= \tilde{g}(\nabla_X Y + h(X, Y), \xi) \\ &= \tilde{g}(h(X, Y), \xi) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau(X) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X V, \xi) \\ &= \tilde{g}(-A_V X + \nabla_X^t V, \xi) \\ &= \tilde{g}(\nabla_X^t V, \xi) \end{aligned}$$

denilirse

$$h(X, Y) = B(X, Y) N$$

$$\nabla_X^t = \tau(X) N$$

olarak yazılır. Buradan Gauss ve Weingarten formülleri sırasıyla

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y) N \quad (2.2.11)$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \tau(X) N \quad (2.2.12)$$

olarak ifade edilir. $B(X, Y)$ ye M lightlike hiperyüzeyinin ikinci temel formu denir ve $B(X, Y)$ screen distribüsyonu $S(TM)$ nin seçilişinden bağımsızdır. Lightlike hiperyüzeyinin ikinci temel formu dejeneredir, yani

$$B(X, \xi) = 0 \quad (2.2.13)$$

dır [18].

Şimdi TM den $S(TM)$ üzerine olan projeksiyon

$$P : TM \longrightarrow S(TM)$$

olmak üzere $X \in \Gamma(TM)$ için $PX \in \Gamma(S(TM))$ dir ve (2.2.2) ayrışımından

$$X = PX + \eta(X)\xi$$

olarak ifade edilir ve burada

$$\eta(X) = \tilde{g}(X, N)$$

dir ve η , M üzerinde 1-formdur. (2.2.2) ayrışımına göre $S(TM)$ nin TM üzerindeki Gauss ve Weingarten formülleri, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X PY = \nabla_X^* PY + h^*(X, PY) \quad (2.2.14)$$

$$\nabla_X \xi = -A_\xi^* X + \nabla_X^{*t} \xi \quad (2.2.15)$$

olarak ifade edilir. Burada ∇^* , $S(TM)$ üzerinde, ∇^{*t} de $Rad\ TM$ üzerinde lineer konneksiyonlar ve

$$h^* : \Gamma(S(TM)) \times \Gamma(S(TM)) \longrightarrow \Gamma(TM^\perp)$$

bir bilineer formdur. A_ξ^* ye $S(TM)$ nin şekil operatörü ve h^* a da $S(TM)$ nin ikinci temel formu denir. M lightlike hiperyüzeyi üzerinde $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(A_N X, PY) = \tilde{g}(h^*(X, PY), N), \quad (2.2.16)$$

$$\tilde{g}(A_N X, N) = 0, \quad (2.2.17)$$

$$\tilde{g}(A_\xi^* X, PY) = B(X, PY), \quad (2.2.18)$$

$$\tilde{g}(A_\xi^* X, N) = 0, \quad (2.2.19)$$

bağıntıları sağlanır [18]. $X, Y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere $C(X, PY) = \tilde{g}(h^*(X, PY), N)$ ve $\varepsilon(X) = \tilde{g}(\nabla_X \xi, N) = \tilde{g}(\nabla_X^{*t} \xi, N)$ denilirse (2.2.14) ve (2.2.15) formülleri, sırasıyla

$$\nabla_X PY = \nabla_X^* PY + C(X, PY)\xi, \quad (2.2.20)$$

$$\nabla_X \xi = -A_\xi^* X + \varepsilon(X) \xi \quad (2.2.21)$$

olarak yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \varepsilon(X) &= \tilde{g}(\bar{\nabla}_X \xi, N) \\ &= -\tilde{g}(\xi, \bar{\nabla}_X N) \\ &= -\tilde{g}(\xi, -A_N X + \tau(X) N) \\ \varepsilon(X) &= -\tau(X) \end{aligned}$$

olduğundan (2.2.21) ifadesi

$$\nabla_X \xi = -A_\xi^* X - \tau(X) \xi \quad (2.2.22)$$

olur. Burada $C(X, PY)$ ye $S(TM)$ nin screen ikinci temel formu denir. $X, Y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere $\tilde{g}(N, PY) = 0$ olduğundan

$$C(X, PY) = \tilde{g}(A_N X, PY) \quad (2.2.23)$$

elde edilir.

Önerme 2.2.1. *M lightlike hiperyüzeyi üzerinde aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(a) $\nabla^*, S(TM)$ üzerinde bir metrik konneksiyondur.

(b) Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için ∇, M üzerinde

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = B(X, Y) \eta(Z) + B(X, Z) \eta(Y) \quad (2.2.24)$$

dır [18].

Tanım 2.2.2. *Eğer TM üzerinde $B = 0$ ise M lightlike hiperyüzeyi $\tilde{M}$ da total geodezik olarak adlandırılır. Eğer her $X, Y \in T_p M$ için*

$$B(X, Y)_p = \lambda g_p(X, Y) \quad (2.2.25)$$

ise bir $p \in M$ noktasına umbilik nokta denir, burada λ bir sabittir. Ayrıca, eğer M nin her noktası umbilik ise $\tilde{M}$ da M lightlike hiperyüzeyi total umbilik olarak adlandırılır [18].

Tanım 2.2.3. A_N ve A_ξ^* şekil operatörleri arasında

$$A_N = \varphi A_\xi^* \quad (2.2.26)$$

bağıntısı var ise bir $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyine screen local konformal denir, burada φ, M nin bir U komşuluğunda diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Eğer φ sıfırdan farklı bir sabit ise M screen homotetik olarak adlandırılır [18].

Kabul edelim ki $\tilde{R}$ ve R , sırasıyla $\tilde{M}$ ve M nin Riemann eğrilik tensörleri olsun. Her $X, Y, Z, U \in \Gamma(TM)$ için Gauss Codazzi denklemleri

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, PU) &= g(R(X, Y)Z, PU) + B(X, Z)C(Y, PU) \\ &\quad - B(Y, Z)C(X, PU) \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, \xi) &= (\nabla_X B)(Y, Z) - (\nabla_Y B)(X, Z) + B(Y, Z)\tau(X) \\ &\quad - B(X, Z)\tau(Y) \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, N) = g(R(X, Y)Z, N) \quad (2.2.29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)PZ, N) &= (\nabla_X C)(Y, PZ) - (\nabla_Y C)(X, PZ) + \tau(Y)C(X, PZ) \\ &\quad - \tau(X)C(Y, PZ) \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

olarak verilir.

$\Pi = Sp\{X, Y\}$ bir $p \in M$ de $T_p M$ nin 2-boyutlu nondejenere düzlemi olsun. Buradan Π nin kesit eğriliği

$$K(\Pi) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

dir [18].

Teorem 2.2.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $S(TM)$ integrallenebilirdir.

(b) $h^*(X, Y) = h^*(Y, X)$ dir.

(c) M nin şekil operatörü A_N simetriktir yani

$$g(A_N X, Y) = g(X, A_N Y)$$

dir [18].

Tanım 2.2.4. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. $T\tilde{M}$ nin bir bir quasi-ortonormal çatısı $\{e_1, \dots, e_m, \xi, N\}$ olsun, burada $\{e_1, \dots, e_m\}$, $S(TM)$ nin bir ortonormal çatısıdır. $\tilde{M}$ nin Ricci tensörü tanımı (2.1.13) den M nin $\{e_1, \dots, e_m, \xi\}$ quasi-ortonormal çatısına göre indirgenen tensör $R^{(0,2)}$ olmak üzere $X, Y \in TM$ için

$$R^{(0,2)}(X, Y) = \sum_{j=1}^m \epsilon_j g(R(e_j, X)Y, e_j) + \tilde{g}(R(\xi, X)Y, N), \quad \epsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1 \quad (2.2.31)$$

olarak ifade edilir. Bu $R^{(0,2)}$ tensörüne M nin Ricci tensörü denir. Fakat bu tensör simetrik olmadığından bu $R^{(0,2)}$ tensörel büyüklük olarak da adlandırılır. $R^{(0,2)}$ simetrik olduğunda bu Ric ile, yani $R^{(0,2)}(X, Y) = Ric(X, Y)$ ile gösterilir ve buna M nin simetrik Ricci tensörü denir [16].

(2.2.27) ve Teorem 2.2.2 yardımıyla şu sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.1. $R^{(0,2)}$ Ricci tensörü screen distürbüsyonu integrallenebilir olan lightlike hiperyüzeyler üzerinde simetriktir [16].

Önerme 2.2.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. İndirgenmiş konneksiyon ∇ nın Ricci tensörü $R^{(0,2)}$ nin simetrik olması için gerekli ve yeterli koşul $\tau, 1$ -formunun kapalı, yani Ricci tensörü $d\tau = 0$ olmasıdır [16].

2.2.2 Lightlike Altmanifoldlar

$(\tilde{M}, \tilde{g})$, $(m+n)$ -boyutlu, $q \in \{1, \dots, m+n-1\}$ indeksli bir yarı-Riemann manifold olsun. $M, \tilde{M}$ nın m -boyutlu altmanifoldu olmak üzere, $\forall p \in M$ için $T_p M$ nin normal uzayı

$$T_p M^\perp = \left\{ V_p \in T\tilde{M} \mid \tilde{g}_p(V_p, W_p) = 0, \quad W_p \in T_p M \right\}$$

dir. Eğer

$$Rad T_p M = T_p M \cap T_p M^\perp \neq \{0\}$$

olmak üzere $rank(Rad TM) = r > 0$ ise M ye r -lightlike alt manifold denir [18]. Lightlike altmanifoldlar aşağıdaki şekilde dört kısma ayrılır;

- (a) $0 < r < \min\{m, n\}$ ise M ye r -lightlike,
- (b) $1 < r = n < m$ ise M ye coisotropic,
- (c) $1 < r = m < n$ ise M ye isotropic,
- (d) $1 < r = m = n$ ise M ye total lightlike

altmanifold denir. Açık olarak $Rad TM \subset TM^\perp$ dir. $TM^\perp$ de $Rad TM$ nin tamamlayan uzayı $S(TM^\perp)$ olmak üzere

$$TM^\perp = Rad TM \perp S(TM^\perp)$$

olarak yazılır. Benzer şekilde $S(TM) \subset TM \subset T\tilde{M}$ olduğundan $T\tilde{M}$ da $S(TM)$ nin tamamlayan distribüsyonu $S(TM)^\perp$ ise

$$T\tilde{M} = S(TM) \oplus S(TM)^\perp$$

ayrışımına sahip oluruz. $S(TM^\perp) \subset S(TM)^\perp$ olduğundan

$$S(TM)^\perp = S(TM^\perp) \oplus S(TM^\perp)^\perp$$

olacak şekilde $S(TM^\perp)^\perp \subset S(TM)^\perp$ alt demeti vardır. Bir lightlike manifold $(M, g, S(TM), S(TM)^\perp)$ ile gösterilir [18].

Teorem 2.2.3. $(M, g, S(TM), S(TM)^\perp), (\tilde{M}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldunun bir r -lightlike alt manifoldu olsun. $Rad TM$ nin bir bazı $\{\xi_i\}_{i=1, \dots, r}$ ise bu durumda $S(TM^\perp)^\perp$ demetine ait $\{N_i\}_{i=1, \dots, r}$ kesitleri vardır öyle ki $\tilde{g}(N_i, \xi_j) = \delta_{ij}$, $\tilde{g}(N_i, N_j) = 0$ $i, j = 1, \dots, r$ dir [18].

$\{N_1, \dots, N_r\}$ lineer bağımsız lightlike vektör alanlarının germiş olduğu demete lightlike transversal demet denir ve $ltr TM$ ile gösterilir.

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldu $(M, g, S(TM), S(TM)^\perp)$ olsun. $Rad TM$ nin bir bazı $\{\xi_i\}_{i=1, \dots, r}$, bu baza karşılık gelen lightlike transversal baz $\{N_i\}_{i=1, \dots, r}$, $S(TM)$ nin bir ortonormal bazı $\{X_{r+1}, \dots, X_m\}$ ve $S(TM^\perp)$ in bir ortonormal bazı $\{W_{r+1}, \dots, W_n\}$ olmak üzere

$$\{\xi_1, \dots, \xi_r, N_1, \dots, N_r, X_{r+1}, \dots, X_m, W_{r+1}, \dots, W_n\}$$

ifadesine $T\tilde{M}$ nin M boyunca quasi-ortonormal çatısı denir.

$M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldu ve $\tilde{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ olsun. Buna göre $\tilde{\nabla}$ dan M üzerine indirgenen lineer konneksiyon ∇ olmak üzere, ∇ bir Levi-Civita konneksiyonu değildir [18]. $tr TM = ltr TM \oplus S(TM^\perp)$ olmak üzere $tr(TM)$ ye M nin transversal demeti denir. Buna göre

$$T\tilde{M} = TM \oplus tr(TM)$$

ayrışımına sahip oluruz. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(TM), V \in \Gamma(tr(TM))$ için Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y),$$

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^t V$$

dır. $tr TM$ üzerinde

$$\begin{aligned} L &: tr TM \longrightarrow ltr TM, \\ S &: tr TM \longrightarrow S(TM^\perp) \end{aligned}$$

projeksiyonlarını tanımlayalım. Buna göre Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^l(X, Y) + h^s(X, Y), \quad (2.2.32)$$

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_V X + D_X^l V + D_X^s V \quad (2.2.33)$$

olarak yazılabilir. h^l ye lightlike ikinci temel form, h^s ye screen ikinci temel form denir. D^l ve D^s , $tr TM$ üzerinde birer lineer konneksiyon değildir. Bunlara Otsuki konneksiyonları denir [18].

$X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \nabla^l &: \Gamma(ltr TM) \longrightarrow \Gamma(ltr TM) \\ LV &\longrightarrow \nabla_X^l(LV) = D_X^l(LV), \quad V \in \Gamma(tr TM) \\ \nabla_X^s &: \Gamma(S(TM^\perp)) \longrightarrow \Gamma(S(TM^\perp)) \\ SV &\longrightarrow \nabla_X^s(SV) = D_X^s(SV), \quad V \in \Gamma(tr TM) \end{aligned}$$

dönüşümlerini tanımlayalım. ∇^l , $ltr(TM)$ üzerinde, ∇^s de $\Gamma(S(TM^\perp))$ üzerinde lineer konneksiyonlardır. Ayrıca burada D^l ve D^s dönüşümleri

$$\begin{aligned} D^l &: \Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM^\perp)) \longrightarrow \Gamma(ltr TM) \\ (X, SV) &\longrightarrow D^l(X, SV) = D_X^l(SV) \\ D^s &: \Gamma(TM) \times \Gamma(ltr TM) \longrightarrow \Gamma(S(TM^\perp)) \\ (X, LV) &\longrightarrow D^s(X, LV) = D_X^s(LV) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\mathcal{F}(M)$ - lineer dönüşümlerdir. Böylece Weingarten formülü

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^l(LV) + \nabla_X^s(SV) + D^l(X, SV) + D^s(X, LV)$$

olarak da ifade edilebilir. Eğer $V = N \in \Gamma(ltr TM)$ ise, Weingarten formülü

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^l N + D^s(X, N)$$

halini alır ve $V = W \in \Gamma(S(TM^\perp))$ ise de

$$\tilde{\nabla}_X W = -A_W X + D^l(X, W) + \nabla_X^s W$$

olur. Eğer M coisotropic veya total lightlike altmanifold ise

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^l(X, Y),$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^l N$$

olur. Kabul edelim ki $S(TM) \neq 0$, yani M , bir r -lightlike veya coisotropic alt manifold olsun. Bu durumda $TM = Rad\ TM \perp S(TM)$ ayrışımına sahip olduğumuzdan $S(TM)$ üzerinde Gauss ve Wengarten tipi formüller, $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(Rad\ TM)$ için, sırasıyla

$$\nabla_X PY = \nabla_X^* PY + h^*(X, PY),$$

$$\nabla_X \xi = -A_\xi^* X + \nabla_X^{*t} \xi$$

olarak ifade edilir. Burada ∇^* ve ∇^{*t} metrik konneksiyonlardır, yani $\nabla^* g = 0$ ve $\nabla^{*t} g = 0$ dir. $X, Y \in \Gamma(TM)$, $W \in S(TM^\perp)$ için $X\tilde{g}(Y, W) = 0$ olduğundan Gauss ve Weingarten formülleri kullanılacak olursa

$$\tilde{g}(h^s(X, Y), W) + \tilde{g}(Y, D^l(X, W)) = g(Y, A_W X)$$

ve $\xi \in \Gamma(Rad\ TM)$ için $X\tilde{g}(Y, \xi) = 0$ olduğundan

$$\tilde{g}(h^l(X, Y), \xi) + g(Y, \nabla_X \xi) + \tilde{g}(Y, h^l(X, \xi)) = 0$$

olduğu görülür. Benzer şekilde Gauss ve Weingarten formülleri kullanılarak

$$\tilde{g}(h^*(X, PY), N) = \tilde{g}(A_N X, PY),$$

$$g(A_\xi^* X, PY) = \tilde{g}(h^l(X, PY), \xi), \quad (2.2.34)$$

$$g(A_N X, PY) = \tilde{g}(\nabla_X PY, N),$$

$$\tilde{g}(h^l(X, \xi), \xi) = 0, \quad (2.2.35)$$

$$A_\xi^* \xi = 0$$

bağıntıları elde edilir, burada $N \in \Gamma(ltr\ TM)$ dir. $\{N_1, \dots, N_r\}$, $ltr\ TM$ nin bazı ve $\{W_{r+1}, \dots, W_m\}$ de $S(TM^\perp)$ in bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^l(X, Y) + h^s(X, Y) \quad (2.2.36)$$

$$= \nabla_X Y + \sum_{i=1}^r h_i^l(X, Y) N_i + \sum_{\alpha=r+1}^n h_\alpha^s(X, Y) W_\alpha$$

olarak yazılır ve burada

$$h_i^l(X, Y) = \tilde{g}(h^l(X, Y), \xi_i)$$

$$h_\alpha^s(X, Y) = \varepsilon_\alpha \tilde{g}(h^s(X, Y), W_\alpha), \quad \varepsilon_\alpha = \tilde{g}(W_\alpha, W_\alpha)$$

dir. h_i^l ye lokal lightlike ikinci temel form, h_α^s ye lokal screen ikinci temel form denir [18]. Ayrıca

$$\tilde{\nabla}_X N_k = -A_{N_k} X + \sum_{i=1}^r \gamma_{ki}(X) N_i + \sum_{\alpha=r+1}^n \gamma'_{k\alpha}(X) W_\alpha \quad (2.2.37)$$

$$\tilde{\nabla}_X W_\beta = -A_{W_\beta} X + \sum_{i=1}^r \theta_{\beta i}(X) N_i + \sum_{\alpha=r+1}^n \theta'_{\beta\alpha}(X) W_\alpha \quad (2.2.38)$$

ile verilir, burada ∇ , M üzerindeki indirgenmiş konneksiyon, A_{N_k} ve A_{W_β} M nin şekil operatörleri, γ, γ', θ ve θ' 1-formlardır. $P, \Gamma(TM)$ den $S(TM)$ ye projeksiyon olsun. $S(TM)$ üzerinde Gauss ve Weingarten formülleri

$$\nabla_X PY = \nabla_X^* PY + h^*(X, Y) \quad (2.2.39)$$

$$= \nabla_X^* PY + \sum_{i=1}^r C_i(X, PY) \xi_i$$

$$\nabla_X \xi_k = -A_{\xi_k}^* - \sum_{i=1}^r \gamma_{ki}(X) \xi_i \quad (2.2.40)$$

olarak yazılır, burada ∇^* , $S(TM)$ üzerine indirgenen konneksiyon ve $A_{\xi_k}^*$ da $S(TM)$ üzerindeki şekil operatörü dür.

Önerme 2.2.3. $(M, g, S(TM), S(TM)^\perp)$, $(\tilde{M}, \tilde{g})$ yarı-Riemann manifoldunun bir r -lightlike alt manifoldu olsun. Bu durumda $\text{Rad } TM$ üzerinde $h^l = 0$ dir [18].

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $(M, g, S(TM), S(TM)^\perp)$ de bir lightlike altmanifold olsun. $\tilde{\nabla}$, $\tilde{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu ve ∇ da M üzerindeki indirgenmiş konneksiyon olmak üzere ∇ bir Levi-Civita konneksiyonu değildir ve $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = \tilde{g}(h^l(X, Y), Z) + \tilde{g}(h^l(X, Z), Y) \quad (2.2.41)$$

dir [18].

Teorem 2.2.4. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve M de $\tilde{M}$ nin r -lightlike veya coisotropic alt manifoldu olsun. Bu durumda ∇ nin M üzerinde metrik konneksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki şartların birinin sağlanmasıdır:

- (a) $A_\xi^*, \Gamma(TM)$ üzerinde sıfırdır.
- (b) $Rad TM$ Killing distribüsyonudur.
- (c) $Rad TM, \nabla$ ya göre paralel distribüsyondur [18].

Teorem 2.2.5. M , bir r -lightlike veya coisotropic alt manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (a) $S(TM)$ integrallenebilirdir.
- (b) $h^*, S(TM)$ üzerinde simetriktir.
- (c) $A_N, S(TM)$ üzerinde self adjointtir [18].

Teorem 2.2.6. M , bir r -lightlike veya coisotropic alt manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (a) $S(TM) \nabla$ ya göre paraleldir.
- (b) h^*, M üzerinde sıfırdır.
- (c) $A_N, Rad TM$ değerlidir [18].

Teorem 2.2.7. M , bir r -lightlike veya coisotropic alt manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (a) $Rad TM$ integrallenebilirdir.
- (b) $h^l(PX, \xi) = 0$ dır $\forall \xi \in \Gamma(Rad TM), X \in \Gamma(TM)$.
- (c) Herhangi bir $\xi \in \Gamma(Rad TM)$ için $S(TM)$ nin A_ξ^* şekil operatörü $Rad TM$ üzerinde sıfırdır [18].

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $(M, g, S(TM), S(TM)^\perp)$ de bir lightlike altmanifold olsun. $\tilde{\nabla}, \tilde{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu ve ∇ da M üzerindeki indirgenmiş

konneksiyon olmak üzere $\tilde{\nabla}$ ve ∇ nın eğrilik tensörleri, sırasıyla, $\tilde{R}$ ve R olsun. Bu durumda (2.2.32) ve (2.2.33) kullanılarak, her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + A_{h^l(X, Z)}Y - A_{h^l(Y, Z)}X + A_{h^s(X, Z)}Y - A_{h^s(Y, Z)}X \\ &+ (\nabla_X h^l)(Y, Z) - (\nabla_Y h^l)(X, Z) + D^l(X, h^s(Y, Z)) - D^l(Y, h^s(X, Z)) \\ &+ (\nabla_X h^s)(Y, Z) - (\nabla_Y h^s)(X, Z) + D^s(X, h^l(Y, Z)) - D^s(Y, h^l(X, Z)) \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

olarak bulunur ve buna Gauss denklemi denir [18]. (2.2.36), (2.2.37) ve (2.2.38) denklemlerinden ve Gauss denklemi (2.2.42) dan, her $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)PZ, PW) &= g(R(X, Y)PZ, PW) \\ &+ \sum_{i=1}^l [h_i^l(X, PZ)C_i(Y, PW) - h_i^l(Y, PZ)C_i(X, PW)] \\ &+ \sum_{i=1}^m [D_i^s(X, PZ)D_i^s(Y, PW) - D_i^s(Y, PZ)D_i^s(X, PW)] \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

elde edilir. (2.2.43) eşitliğinde h^* düşünülürse kesit eğriliği dönüşümü bir lightlike altmanifold üzerinde simetrik olmak zorunda değildir. $S(TM)$ nin bir ortonormal çatısı $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve TM nin lightlike çatısı $\{e_1, \dots, e_n, \xi_1, \dots, \xi_r\}$ olmak üzere $R^{(0,2)}$ ile gösterilen indirgenmiş Ricci tensörü

$$R^{(0,2)}(X, Y) = \sum_{j=1}^m g(R(X, e_j)Y, e_j) + \sum_{\alpha=1}^r \bar{g}(R(X, \xi_\alpha)Y, N_\alpha) \quad (2.2.44)$$

ile verilir [18]. (2.2.44) eşitliğinde (2.2.43) yerine yazılırsa, h^* simetrik olmadığından, $R^{(0,2)}(X, Y) \neq R^{(0,2)}(Y, X)$ olduğu görülür ve $R^{(0,2)}$ simetrik değildir. Teorem 2.2.5 den görülür ki screen distribüsyon integrallenebilir ise $R^{(0,2)}$, r -lightlike altmanifold üzerinde simetriktir.

2.2.3 Ek Boyutu İki Olan Lightlike Altmanifoldlar

$(\tilde{M}, \tilde{g})$, $(m+2)$ -boyutlu, $q \geq 1$ indeksli bir yarı-Riemann manifold ve $(M, g, S(TM), S(TM)^\perp)$ de ek boyutu 2 olan bir lightlike altmanifold olsun. İndirgenmiş metrik g altmanifold üzerinde dejenere olduğundan her $p \in M$ için $T_p M$ ve $T_p M^\perp$ uzaylarının her ikisinde dejenere uzaylardır ve $T_p M^\perp, T_p \tilde{M}$ nin 2-boyutlu dejenere altuzayıdır. Bu durumda radikal distribüsyon $Rad TM$, ya 1-buyutludur ya da 2-buyutludur. $boy(Rad TM) = 1$ ise M ye half-lightlike altmanifold ve $boy(Rad TM) = 2$ ise M ye coisotropic altmanifold denir [18].

$(M, g, S(TM))$ half-lightlike alt manifoldu için temel özellikleri verelim. Bu durumda $TM^\perp$ demetine ait ξ dejenere vektör alanı ve bir non-null vektör alanı U birim vektör alanı vardır ve her $X \in \Gamma(TM)$ için $\mathcal{D}$ 1-boyutlu non-dejenere alt demeti mevcuttur ve 1-boyutlu dejenere $ltr(TM)$ alt demeti mevcuttur öyle ki, $ltr(TM) = Sp\{N\}$ ve

$$\tilde{g}(X, U) = 0, \quad \tilde{g}(U, U) = \varepsilon = \pm 1$$

sağlanır. $Rad\, TM = Sp\{\xi\}$ ve $\mathcal{D} = Sp\{U\}$ olmak üzere $\mathcal{D}$ distribüsyonu $TM^\perp$ de $Rad\, TM$ nin tümleyeni olan distribüsyondur. Bu durumda $S(TM)^\perp$ de $\mathcal{D}$ nin ortogonal tümleyeni $\mathcal{D}^\perp$ olmak üzere $S(TM)^\perp = \mathcal{D} \perp \mathcal{D}^\perp$ olarak yazılır. $\xi \in \Gamma(\mathcal{D}^\perp)$ ve $\mathcal{D}^\perp$ non-dejenere olduğundan bir tek $N \in \Gamma(\mathcal{D}^\perp)$ vardır ve

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\xi, U) &= \tilde{g}(N, U) = 0, \quad \tilde{g}(U, U) = \varepsilon = \pm 1 \\ \tilde{g}(\xi, N) &= 1, \quad \tilde{g}(N, N) = 0 \end{aligned}$$

sağlanır. Üstteki ifadelere göre, $ltr(TM) = Sp\{N\}$ olmak üzere

$$T\tilde{M} = S(TM) \perp \mathcal{D} \perp \{Rad\, TM \oplus ltr(TM)\}$$

ayrışımına sahip oluruz.

$\tilde{\nabla}, (\tilde{M}, \tilde{g})$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonunu gösterebiliriz ve $P, \Gamma(TM)$ den $\Gamma(S(TM))$ ye projeksiyonu gösterebiliriz. Gauss ve Weingarten formülleri

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y) N + D(X, Y) U, \quad (2.2.45)$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \rho_1(X) N + \rho_2(X) U, \quad (2.2.46)$$

$$\tilde{\nabla}_X U = -A_U X + \mu_1(X) N + \mu_2(X) U \quad (2.2.47)$$

ve

$$\nabla_X P Y = \nabla_X^* P Y + C(X, Y) \xi, \quad (2.2.48)$$

$$\nabla_X \xi = -A_\xi^* X - \rho_1(X) \xi \quad (2.2.49)$$

dir, burada $\nabla_X Y, A_N X, A_U X \in \Gamma(TM)$, $\nabla_X^* P Y, A_\xi^* X \in \Gamma(S(TM))$ ve A_N ile A_U, M üzerindeki şekil operatörleri, A_ξ^* ise $S(TM)$ üzerinde şekil operatörü, $B(X, Y)$ ve $D(X, Y)$ ikinci temel formun katsayıları, $\rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2$ ler ise 1-formlardır. (2.2.45) ve (2.2.49) den

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \xi) = B(X, Y)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} -\tilde{g}(X, \tilde{\nabla}_Y \xi) &= B(X, Y) \\ -g(X, -A_\xi^* Y - \rho_1(Y) \xi) &= B(X, Y) \end{aligned}$$

veya

$$B(X, Y) = g(A_\xi^* X, Y) \quad (2.2.50)$$

olur. (2.2.48) kullanılarak

$$g(\nabla_X P Y, N) = C(X, Y)$$

olduğu görülür.

$$-g(PY, \nabla_X N) = C(X, Y)$$

olup

$$C(X, Y) = g(A_N X, Y) \quad (2.2.51)$$

dir. (2.2.45) yardımıyla

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_X Y, U) &= D(X, Y) \\ -g(Y, \tilde{\nabla}_X U) &= D(X, Y) \end{aligned}$$

(2.2.47) kullanılarak

$$D(X, Y) = g(Y, A_U X) - \mu_1(X) g(Y, N) - \mu_2(X) g(Y, U)$$

$$D(X, Y) = g(A_U X, Y) - \mu_1(X) \eta(Y) \quad (2.2.52)$$

olduğu görülür, burada $\eta(Y) = \tilde{g}(Y, N)$ dir. B ve D simetriktir fakat C simetrik değildir. Bir half-lightlike altmanifoldu için

$$(\nabla_Z g)(X, Y) = B(Z, Y) \eta(X) + B(Z, X) \eta(Y) \quad (2.2.53)$$

olduğundan ∇ indirgenmiş konneksiyonu metrik konneksiyon değildir. R ve $\tilde{R}$, sırasıyla, $(M, g, S(TM))$ ve $(\tilde{M}, \tilde{g})$ nın Riemann eğrilik tensörleri olsun. R ve $\tilde{R}$ arasında

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y) P Z, P W) &= g(R(X, Y) P Z, P W) + B(X, P Z) C(Y, P W) \\ &\quad - B(Y, P Z) C(X, P W) + D(X, P Z) D(Y, P W) \\ &\quad - D(Y, P Z) D(X, P W) \end{aligned} \quad (2.2.54)$$

olacak şekilde bir ilişki vardır. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $S(TM)$ üzerinde bir ortonormal çatı olmak üzere M üzerinde bir lightlike çatı $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \xi\}$ olsun. Bu durumda M nin indirgenmiş $R^{(0,2)}$ Ricci tensörü

$$R^{(0,2)}(X, Y) = \sum_{j=1}^n g(R(e_j, X)Y, e_j) + \tilde{g}(R(\xi, X)Y, N) \quad (2.2.55)$$

ie tanımlanır [18]. $R^{(0,2)}$ simetrik değildir ve eğer $S(TM)$ integrallenebilir ise $R^{(0,2)}$ simetriktr. $B = D = 0$ ise bir half-lightlike altmanifold total geodezik olarak adlandırılır ve $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $B(X, \xi) = 0$ ise irrasyonel olarak adlandırılır. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X, Y)N + D(X, Y)U = g(X, Y)H \quad (2.2.56)$$

olacak şekilde bir H difarensiyellenebilir transversal vektör alanı mevcut ise half-lightlike altmanifold total umbilik olarak adlandırılır [18]. (2.2.56) yardımıyla bir total umbilik lightlike altmanifold üzerinde

$$B(X, Y) = H_1 g(X, Y) \quad \text{ve} \quad D(X, Y) = H_2 g(X, Y) \quad (2.2.57)$$

olacak şekilde H_1 ve H_2 fonksiyonları mevcuttur.

Şimdi $(\tilde{M}, \tilde{g})$, $(m+2)$ -boyutlu, $q \geq 1$ indeksli bir yarı-Riemann manifold ve $(M, g, S(TM), S(TM)^\perp)$ de ek boyutu 2 olan bir lightlike altmanifold olmak üzere $\dim(Rad TM) = 2$, yani $(M, g, S(TM), S(TM)^\perp)$ bir coisotropik altmanifold olsun. Bu durumda $T\tilde{M}$ nin M boyunca quasi-ortanormal bazı

$$\{e_1, \dots, e_n, \xi_1, \xi_2, N_1, N_2\}$$

olmak üzere

$$S(TM) = Sp\{e_1, \dots, e_n\}, \quad Rad(TM) = Sp\{\xi_1, \xi_2\}, \quad ltr(TM) = Sp\{N_1, N_2\}$$

dir. $i, j \in \{1, 2\}$ için

$$\tilde{g}(N_i, \xi_j) = \delta_{ij}, \quad \tilde{g}(N_i, N_j) = 0$$

dır. Gauss ve Weingarten formülleri

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum_{k=1}^2 D_k(X, Y) N_k \quad (2.2.58)$$

$$\tilde{\nabla}_X N_k = -A_{N_k} X + \sum_{l=1}^2 \rho_{kl}(X) N_l \quad (2.2.59)$$

$$\nabla_X Y = \nabla_X^* P Y + \sum_{k=1}^2 C_k(X, Y) \xi_k \quad (2.2.60)$$

$$\nabla_X \xi_k = -A_{\xi_k}^* X - \sum_{k=1}^2 \rho_{kl}(X) \xi_l \quad (2.2.61)$$

ile verilir, burada $\nabla_X Y, A_{N_k} X \in \Gamma(TM)$, $\nabla_X^* P Y, A_{\xi_k}^* X \in \Gamma(S(TM))$, $A_{N_k} \Gamma(TM)$ üzerinde bir şekil operatörü, $A_{\xi_k}^* \Gamma(S(TM))$ üzerinde şekil operatörü, $D_k(X, Y)$ ve $C_k(X, Y)$ ikinci temel formların katsayıları, $k, l \in \{1, 2\}$ için ρ_{kl} 1-formdur. (2.2.58)-(2.2.61) denklemlerinden $k \in \{1, 2\}$ için

$$D_k(X, Y) = g(A_{\xi_k}^* X, Y), \quad C_k(X, Y) = g(A_{N_k} X, Y) \quad (2.2.62)$$

olur. D_k simetriktir fakat C_k simetrik değildir. $\tilde{\nabla}$ nın metrik konneksiyon olduğu kullanılarak (2.2.58) den

$$\begin{aligned} (\nabla_Z g)(X, Y) &= D_1(Z, X) \eta_1(Y) + D_2(Z, X) \eta_2(Y) \\ &\quad + D_1(Z, Y) \eta_1(X) + D_2(Z, Y) \eta_2(X) \end{aligned} \quad (2.2.63)$$

olarak elde edilir ve ∇ metrik konneksiyon değildir [18]. R ve $\tilde{R}$, sırasıyla, $(M, g, S(TM))$ ve $(\tilde{M}, \tilde{g})$ nın Riemann eğrilik tensörleri olmak üzere $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için Gauss denklemi

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y) P Z, P W) &= g(R(X, Y) P Z, P W) + \sum_{k=1}^2 D_k(X, P Z) C_k(Y, P W) \\ &\quad - \sum_{k=1}^2 D_k(Y, P Z) C_k(X, P W) \end{aligned} \quad (2.2.64)$$

şeklinde ifade edilir. M nin bir lightlike çatısı $\{e_1, \dots, e_n, \xi_1, \xi_2\}$ olmak üzere $R^{(0,2)}$ Ricci tensörü

$$R^{(0,2)}(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X) Y, e_i) + \sum_{k=1}^2 \tilde{g}(R(X, \xi_k) Y, N_k) \quad (2.2.65)$$

ile tanımlıdır. $R^{(0,2)}$ simetrik değildir. Eğer $S(TM)$ integrallenebilir ise $R^{(0,2)}$ simetriktir. Bir coisotropic lightlike alt manifoldda eğer $D_1 = D_2 = 0$ ise total geodezik olarak adlandırılır. $k \in \{1, 2\}$ için $Rad(TM)$ üzerinde $D_k = 0$ ise irrasyonel olarak adlandırılır. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$D_1(X, Y) N_1 + D_2(X, Y) N_2 = g(X, Y) H$$

olacak şekilde bir diferansiyellenebilir transversal H vektör alanı mevcut ise coisotropic lightlike alt manifold total umbilik olarak adlandırılır. Bu durumda

$$D_i(X, Y) = H_i g(X, Y), \quad i \in \{1, 2\},$$

olacak şekilde M üzerinde diferansiyellenebilir iki H_1 ve H_2 fonksiyonları vardır [18].

3. LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLER ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR

Bu bölümde bir Lorentz manifold $(\tilde{M}, \tilde{g})$ nin bir $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyi üzerinde Ricci solitonlar incelenecektir. İlk önce bir lightlike hiperyüzeyin üzerinde bir concurrent vektör alanının bazı geometrik özellikleri incelenecek ve daha sonra ise rigged metrik kullanılarak lightlike hiperyüzey üzerinde Ricci solitonlar çalışılacaktır. Daha sonra ise yine lightlike hiperyüzey üzerinde torse-forming vektör alanının geometrik özellikleri ve bu vektör alanı potansiyel vektör alanı olarak alınarak Ricci solitonlar incelenecektir.

3.1 Lightlike Hiperyüzeyler Üzerinde Concurrent Vektör Alanları

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir Lorentz manifold ve $(M, g, S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. g indirgenmiş metriği M üzerinde dejenere olduğundan gradient, divergens ve Laplasyan gibi operatörler g metriği yardımıyla M üzerinde tanımlanamaz. Bundan dolayı rigging vektör alanı olarak adlandırılan bir ζ vektör alanı yardımıyla tanımlanan ve g ile birleşen metrik (associated metric) denilen, M üzerinde non-dejenere olan bir $\bar{g}$ metriğine göre bu operatörleri kullanacağız ve işlemlerimizi bu yeni metriğe göre yapacağız. Bu yeni metrik sayesinde ise lightlike hiperyüzey üzerinde Ricci solitonları inceleyeceğiz. Dolayısıyla lightlike hiperyüzeyi üzerinde bazı tanımlara ihtiyacımız vardır.

İlk önce bir lightlike hiperyüzey üzerinde Lie türevini hesaplayalım.

Lemma 3.1.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir Lorentz manifold ve $(M, g, S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(L_Z g)(X, Y) = (\nabla_Z g)(X, Y) + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) \quad (3.1.1)$$

dir.

İspat: $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için Lie türevi

$$(L_Z g)(X, Y) = Zg(X, Y) - g([Z, X], Y) - g(X, [Z, Y])$$

dir. (2.2.11) ve (2.2.12) den

$$(L_Z g)(X, Y) = B(Z, X)\eta(Y) + B(Z, Y)\eta(X) + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) \quad (3.1.2)$$

olur. (2.2.24) den (3.1.1) elde edilir.

Tanım 3.1.1. Bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentz manifoldunun lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. M de bir açık komşuluk üzerinde tanımlı her $p \in M$ için $\zeta_p \notin T_p M$ olacak şekildeki ζ vektör alanına Rigging vektör alanı denir [27].

Bu tanıma göre $N \in \Gamma(ltr(TM))$ vektör alanı M için bir rigging vektör alanıdır. $\eta, \forall X \in \Gamma(TM)$ için $\eta(X) = \tilde{g}(X, N)$ ile tanımlı bir 1-form olmak üzere bir $\bar{g}$ metrik tensörü $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{g}(X, Y) = g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \quad (3.1.3)$$

şeklinde tanımlanacak olursa, $\bar{g}$ metriği M üzerinde bir Riemann metriktir [27]. (2.2.5), (2.2.4) ve (3.1.3) yardımıyla, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$

$$\bar{g}(\xi, \xi) = 1, \quad \bar{g}(\xi, X) = \eta(X) \quad (3.1.4)$$

ve

$$\bar{g}(PX, PY) = g(X, Y), \quad \eta(PX) = 0 \quad (3.1.5)$$

olduğu görülür. Kabul edelim ki $f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $(x_1, x_2, \dots, x_n), U \subset M$ açık komşuluğu üzerinde bir koordinat sistemi olsun. f nin gradienti

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{g}_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (3.1.6)$$

şeklinde tanımlıdır. $[\bar{g}^{ij}]$, g ile birleşen $\bar{g}$ nin matrisinin inversidir ve bu g nin matrisi $[g_{ij}]$ nin pseudo-inversi olarak adlandırılır [27].

$v, \tilde{M}$ üzerinde bir concurrent vektör alanı olmak üzere teğet ve transversal bileşenlerine

$$v = v^T + v^N \quad (3.1.7)$$

olarak ayrılır, burada $v^T \in \Gamma(TM)$ ve $v^N \in tr(TM)$ dir. (3.1.3) ve (3.1.7) kullanılarak

$$\begin{aligned} \bar{g}(v^T, \zeta) &= g(v^T, \zeta) + \eta(v^T)\eta(\zeta) \\ &= \eta(v^T) \\ &= \tilde{g}(v^T, N) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

bulunur. $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} X\bar{g}(v^T, \xi) &= X\tilde{g}(v^T, N) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X v, N) + \tilde{g}(v, \tilde{\nabla}_X N) \\ &= \tilde{g}(X, N) - \tilde{g}(v, A_N X) + \tau(X)\tilde{g}(v, N) \end{aligned}$$

yazılabilir ve buradan

$$X\bar{g}(v^T, \xi) = \eta(X) + \tau(X)\eta(v) - \tilde{g}(v, A_N X) \quad (3.1.9)$$

olduğu görülür. Kabul edelim ki $v = v^T$ olsun, bu durumda

$$v = v^s + a\xi \quad (3.1.10)$$

yazılabilir, burada $v^s \in \Gamma(S(TM))$ ve $\eta(v) = a$ dır.

Lemma 3.1.2. *Bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentz manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. Eğer v , M üzerinde bir concurrent vektör alanı ise*

$$\tau(v) = \frac{1}{a} (\tilde{g}(v^s, A_N v)) - 1 \quad (3.1.11)$$

elde edilir.

İspat: (3.1.8), (3.1.9) ve (3.1.10) kullanılarak

$$\begin{aligned} (v^s + a\xi)\bar{g}(v^s + a\xi, \xi) &= \tilde{g}(v^s + a\xi, N) - \tilde{g}(v^s + a\xi, A_N(v^s + a\xi)) \\ &\quad + \tau(v^s + a\xi)\tilde{g}(v^s + a\xi, N) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise

$$\begin{aligned} (v^s + a\xi)[\bar{g}(v^s, \xi)] + a(v^s + a\xi)[\bar{g}(\xi, \xi)] &= a\tilde{g}(\xi, N) - \tilde{g}(v^s + a\xi, A_N v^s) \\ &\quad - \tilde{g}(v^s + a\xi, A_N a\xi) \\ &\quad + \tau(v^s + a\xi)(\eta(v^s) + a\eta(\xi)) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$0 = a - \tilde{g}(v^s, A_N v) - a\tilde{g}(v^s, A_N \xi) + a\tau(v)$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.3. *$(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentz manifoldu üzerinde bir concurrent vektör alanı v olsun. $\forall X \in \Gamma(TM)$ için*

$$\nabla_X v = X \quad \text{ve} \quad B(X, v) = 0 \quad (3.1.12)$$

dır.

İspat: v , $\tilde{M}$ üzerinde bir cocurrent vektör alanı olduğundan $\tilde{\nabla}_X v = X$ dir. Bu durumda (2.2.11) yardımıyla

$$\tilde{\nabla}_X v = \nabla_X v + B(X, v)N = X \quad (3.1.13)$$

elde edilir. (3.1.13) ifadesi teğet ve transversal kısımlarına ayrıştırılırsa (3.1.12) elde edilir.

Lemma 3.1.4. $(M, g, S(TM))$ bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentz manifoldunun screen conformal lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer v , M üzerinde bir concurrent vektör alanı ise

$$\tau(v) = -1 \quad (3.1.14)$$

dir.

İspat: (2.2.20), (3.1.10) ve (3.1.2) yardımıyla

$$\tau(v) = \frac{1}{a} C(v, v^s) - 1$$

olduğu görülür buradan

$$\tau(v) = \frac{1}{a} \frac{1}{\varphi} B(v, v^s) - 1 \quad (3.1.15)$$

elde edilir. (3.1.12) ve (3.1.15) ile (3.1.14) bulunur.

Lemma 3.1.5. Bir Lorentz manifoldun bir screen conformal lightlike hiperyüzeyi için

$$\nabla_{\xi}^* v = 0 \quad \text{ve} \quad C(\xi, v) = 1 \quad (3.1.16)$$

elde edilir, burada $v \in \Gamma(TM)$ concurrent vektör alanıdır.

İspat: (3.1.12), (3.1.13) ve (2.2.20) yardımıyla

$$\tilde{\nabla}_{\xi} v = \nabla_{\xi} v = \nabla_{\xi}^* v + C(\xi, v) \xi = \xi$$

olur. Bu son denklem screen ve radical kısımlarına ayrılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.1. $(M, g, S(TM))$ bir screen conformal lightlike hiperyüzey ve $v \in \Gamma(TM)$ bir concurrent vektör alanı olsun. Aşağıdaki ifadelerden en az biri gerçekleşir:

(a) $v, \Gamma(S(TM))$ de yatar,

(b) $\tau(\xi) = 0$.

İspat: Gauss ve Weingarten formülleri ve Lemma 3.1.4 kullanılarak

$$\nabla_v \xi = -A_{\xi}^* v + \xi \quad (3.1.17)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_v N = -A_N v - \xi \quad (3.1.18)$$

elde edilir. v concurrent vektör alanı olduğundan Lemma 3.1.3 yardımıyla

$$\nabla_{\xi} v = \xi \quad (3.1.19)$$

dir. (3.1.17) ve (3.1.19) kullanılarak

$$[\xi, v] = -A_{\xi}^* v \quad (3.1.20)$$

olarak bulunur. Eğer $v = v^s + a\xi$ yazılırsa

$$[\xi, v^s + a\xi] = -A_{\xi}^* (v^s + a\xi)$$

olduğu görülür. Böylece

$$[\xi, v^s] = -A_{\xi}^* v^s - aA_{\xi}^* \xi \quad (3.1.21)$$

elde edilir. Buradan

$$\nabla_{\xi} v^s - \nabla_{v^s} \xi = -A_{\xi}^* v^s - aA_{\xi}^* \xi$$

dir, bu gösterir ki

$$\nabla_{\xi}^* v^s + C(\xi, v^s) \xi - A_{\xi}^* v^s + \tau(v^s) \xi = -A_{\xi}^* v^s - aA_{\xi}^* \xi \quad (3.1.22)$$

dir. $A_{\xi}^*, S(TM)$ değerli olduğundan (3.1.22) yardımıyla

$$\tau(v^s) + C(\xi, v^s) = 0$$

olduğu görülür. Lemma 3.1.5 ve (3.1.22) ifadesinden

$$\tau(v^s) = -1$$

olarak bulunur. $\tau(v) = -1$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\tau(v) = \tau(v^s + a\xi) = -1$$

elde edilir ki bu

$$a\tau(\xi) = 0$$

olduğunu gösterir. Böylece

$$a = 0 \quad \text{ya da} \quad \tau(\xi) = 0$$

dan en az biri elde edilir ki buda teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.1.1. $(M, g, S(TM))$ bir screen conformal lightlike hiperyüzey ve v bir concurrent vektör alanı olmak üzere $v \notin \Gamma(S(TM))$ dir. Böylece $\tau(\xi) = 0$ dır.

Önerme 3.1.1. $(M, g, S(TM))$, c sabit eğriliği ile bir $\tilde{M}(c)$ indefinite uzay formunun bir screen homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$2\varphi\tau(\xi)B(X, PZ) = -cg(X, PZ)$$

eşitliği sağlanır.

Yukarıdaki önermenin hipotezi altında aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.2. $(M, g, S(TM))$ bir $\tilde{M}(c)$ Lorentz uzay formunun screen homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar geçerlidir:

Tanım 3.1.2. (a) Eğer $\tau = 0$ ise $\tilde{M}$ yarı-Öklid uzaydır.

(b) Eğer $\tau(\xi) \neq 0$ ise M total umbiliktir.

Sonuç 3.1.1 ve Sonuç 3.1.2 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.1.3. $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ nin bir screen homotetik lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ ve v bir concurrent vektör alanı, $v \notin \Gamma(S(TM))$ olsun. Bu durumda $\tilde{M}$ yarı-Öklid uzaydır. Eğer v concurrent vektör alanı $\Gamma(S(TM))$ ye ait ise M total umbiliktir.

Teorem 3.1.2. $\tilde{M}(c)$ Lorentz uzay form, $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzey ve v de M üzerinde bir concurrent vektör alanı olsun. Eğer M total umbilik screen homotetik lightlike hiperyüzey ise M total geodeziktir.

İspat: Teorem 3.1.1 yardımıyla $\tau(\xi) = 0$ dan

$$\nabla_{\xi}\xi = -A_{\xi}^*\xi \quad (3.1.23)$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$B(\xi, Y) = g(A_{\xi}^*\xi, Y)$$

kullanılarak $A_{\xi}^*\xi = 0$ elde edilir. (3.1.23) kullanılarak

$$\nabla_{\xi}\xi = 0$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} R(\xi, v)\xi &= \nabla_{\xi}\nabla_v\xi - \nabla_v\nabla_{\xi}\xi - \nabla_{[\xi, v]}\xi \\ &= \nabla_{\xi}\xi - \nabla_{[\xi, v]}\xi \end{aligned}$$

olur. (3.1.20) yardımıyla

$$R(\xi, v)\xi = \nabla_{A_\xi^* v}\xi$$

dir. M nin total umbilik olduğu gerçeği kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(\xi, v)\xi &= \nabla_{\lambda v}\xi \\ &= \lambda \nabla_v \xi \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.1.17) kullanılarak

$$R(\xi, v)\xi = \lambda(-A_\xi^* v + \xi) \quad (3.1.24)$$

olduğu görülür. (2.2.27) ve (3.1.24) ile

$$\tilde{g}(\tilde{R}(\xi, v)\xi, N) = \tilde{g}(R(\xi, v)\xi, N) = \lambda \quad (3.1.25)$$

bulunur. Önerme 3.1.1 ve (3.1.25) eşitliğinden $\lambda = 0$ elde edilir. Bu da gösterir ki M total geodeziktir.

Uyarı 3.1.1. *Teorem 3.1.1 den görülür ki $\tau(\xi)$ sıfıra eşit olmak zorunda değil. Böylece, Teorem 3.1.2, v concurrent vektör alanı $\Gamma(S(TM))$ üzerinde bulunduğu zaman doğru değildir. Benzer olarak v , $Rad(TM)$ üzerinde yattığı zaman da doğru değildir.*

Şimdi $\bar{g}$ metriğine bağlı olarak bir concurrent vektör alanının durumunu inceleyelim. (3.1.3) eşitliği ile verilen $\bar{g}$ metriği ile ilgili olarak $\tilde{M}$ nin Riemann konneksiyonu $\bar{\nabla}$, ve M üzerine $\bar{\nabla}$ dan indirgenen Riemann konneksiyon ∇^1 olsun.

Teorem 3.1.3. *$\bar{\nabla}$ ya göre v bir concurrent vektör alanı olsun. Bu durumda v de ∇^1 e göre concurrenttir.*

İspat: (3.1.3) yardımı ile her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} X\bar{g}(v, v) &= Xg(v, v) + X(\tilde{g}(v, N)^2) \\ &= 2\bar{g}(\nabla_X v, v) + 2\eta(v) \left[\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X v, N) + \tilde{g}(v, \tilde{\nabla}_X N) \right] \\ &= 2\bar{g}(\nabla_X v, v) + 2\eta(v) [\tilde{g}(X, N) + \tilde{g}(v, -A_N X + \tau(X)N)] \\ &= 2\bar{g}(\nabla_X v, v) + 2\eta(v) [\eta(X) - \tilde{g}(v, -A_N X) + \tau(X)\eta(v)] \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} X\bar{g}(v, v) &= 2\bar{g}(\nabla_X^1 v, v) \\ &= 2g(\nabla_X^1 v, v) + 2\eta(\nabla_X^1 v)\eta(v) \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

dır ve (3.1.26) ve (3.1.27) eşitliklerinden

$$\nabla_X^1 v + \eta(\nabla_X^1 v) N = X + [\eta(X) - \tilde{g}(v, A_N X) + \tau(X) \eta(v)] N \quad (3.1.28)$$

elde edilir. (3.1.28) denklemi teğet ve transversal bileşenlerine ayrılırsa

$$\nabla_X^1 v = X, \quad \eta(\nabla_X^1 v) = \eta(X) - \tilde{g}(v, A_N X) + \tau(X) \eta(v) \quad (3.1.29)$$

olduğu görülür ki bu da v nin ∇^1 e göre concurrent olması demektir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 3.1.4. v, ∇^1 e göre bir concurrent vektör alanı olsun. Buna göre v nin ∇ ya göre concurrent vektör alanı olması için gerek ve yeter şart, $\forall X \in \Gamma(TM)$ için,

$$\eta(\nabla_X^1 v) = \eta(X) - \tilde{g}(v, A_N X) + \tau(X) \eta(v) \quad (3.1.30)$$

olmasıdır.

Sonuç 3.1.5. $(M, g, S(TM))$ bir screen conformal lightlike hiperyüzey ve v de ∇^1 e göre bir concurrent vektör alanı olsun. ∇ ya göre v nin concurrent vektör alanı olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\eta(\nabla_v^1 v) = -\tilde{g}(v, A_N v) \quad (3.1.31)$$

olmasıdır.

Sonuç 3.1.6. ∇ ya göre $(M, g, S(TM))$ total geodezik screen conformal ve ∇^1 e göre v bir concurrent vektör alanı olsun. ∇ ya göre v concurrent ise ancak ve ancak

$$\eta(\nabla_v^1 v) = 0 \quad (3.1.32)$$

olur.

Sonuç 3.1.7. ∇ ya göre $(M, g, S(TM))$ total umbilik screen conformal olsun. Kabul edelim ki v, ∇^1 e göre bir concurrent vektör alanı olsun. ∇ ya göre v concurrent ise ancak ve ancak

$$\eta(\nabla_v^1 v) = -\lambda \tilde{g}(v, v), \quad \lambda \in R \quad (3.1.33)$$

olduğu görülür.

3.2 Lightlike Hiperyüzeyler Üzerinde Potansiyel Vektör Alanı Concurrent Vektör Alanı Olan Ricci Solitonlar

Bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. Kabul edelim ki v de $\tilde{M}$ üzerinde bir concurrent vektör alanı olsun. Böylece v vektörünün teğetsel ve transversal bileşenleri

$$v = v^T + fN \quad (3.2.1)$$

olarak yazılabilir burada, $v^T \in \Gamma(TM)$ ve $f = \tilde{g}(v, \xi)$ dir.

Lemma 3.2.1. Bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ ve v de $\tilde{M}$ üzerinde bir concurrent vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\nabla_X v^T = fA_N X + X \quad (3.2.2)$$

ve

$$B(X, v^T) = f\tau(X) - X(f) \quad (3.2.3)$$

dir.

İspat: $\tilde{\nabla}$ ya göre v concurrent vektör alanı olduğundan $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = \tilde{\nabla}_X v = \tilde{\nabla}_X v^T + \tilde{\nabla}_X (fN) \quad (3.2.4)$$

olur. Buradan

$$X = \nabla_X v^T + B(X, v^T)N + X(f)N - fA_N X - f\tau(X)N \quad (3.2.5)$$

elde edilir. (3.2.4) ve (3.2.5) kullanılarak (3.2.2) ve (3.2.3) eşitlikleri bulunur.

Önerme 3.2.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $(M, g, S(TM))$ de bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer ∇ nun $R^{(0,2)}$ tensörü simetrik ise M nin bir U komşuluğu üzerinde τ 1-formu sıfır olacak şekilde bir $\{\xi, N\}$ çifti vardır [16].

Teorem 3.2.1. $(M, g, S(TM))$, $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentz manifoldunun (3.2.1) ile tanımlı bir v concurrent vektör alanını bulunduran bir total geodezik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda f fonksiyonu sabittir.

İspat: Eğer $(M, g, S(TM))$ total geodezik ise (3.2.3) den

$$X(f) = f\tau(X), \quad \forall X \in \Gamma(TM) \quad (3.2.6)$$

olduğu görülür. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için (3.2.6) dan

$$[X, Y](f) = f(Y(\tau(X)) - X(\tau(Y))) \quad (3.2.7)$$

olur. Sonuç 2.2.1 ve Önerme 3.2.1 göz önüne alınırsa

$$[X, Y](f) = 0 \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

elde edilir ve böylece f bir sabittir.

Lemma 3.2.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentz manifoldunun bir $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyi v de $\tilde{M}$ üzerinde bir concurrent vektör alanı olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(L_{v^T}g)(X, Y) = B(v^T, X)\eta(Y) + B(v^T, Y)\eta(X) + fg(A_N X, Y) + fg(A_N Y, X) + 2g(X, Y) \quad (3.2.8)$$

ya da

$$(L_{v^T}g)(X, Y) = (\nabla_{v^T}g)(X, Y) + f[g(A_N X, Y) + g(A_N Y, X)] + 2g(X, Y) \quad (3.2.9)$$

dir.

İspat: (2.2.24) den

$$(L_{v^T}g)(X, Y) = B(v^T, X)\eta(Y) + B(v^T, Y)\eta(X) + g(\nabla_X v^T, Y) + g(\nabla_Y v^T, X) \quad (3.2.10)$$

veya

$$(L_{v^T}g)(X, Y) = (\nabla_{v^T}g)(X, Y) + g(\nabla_X v^T, Y) + g(\nabla_Y v^T, X) \quad (3.2.11)$$

elde edilir. (3.2.1) ve (3.2.2), (3.2.10) ve (3.2.11) için kullanılırsa (3.2.8) ve (3.2.9) bulunur.

Eğer $v \in \Gamma(TM)$ ise yani $v = v^T$ ($f = 0$) ise aşağıdaki özel sonuç elde edilir:

Lemma 3.2.3. $(M, g, S(TM))$ bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentz manifoldunun lightlike hiperyüzeyi ve v de $\tilde{M}$ üzerinde bir concurrent vektör alanı olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(L_v g)(X, Y) = (\nabla_v g)(X, Y) + 2g(X, Y) \quad (3.2.12)$$

dir.

Tanım 3.2.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentz manifoldu ve $(M, g, S(TM))$ de $\tilde{M}$ nın bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(L_v g)(X, Y) + 2R^{(0,2)}(X, Y) = 2\lambda g(X, Y) \quad (3.2.13)$$

olacak şekilde M üzerinde bir v vektör alanı ve $\lambda \in \mathbb{R}$ var ise bir (M, g, v, λ) dörtlüsüne bir Ricci soliton ve v ye de potansiyel vektör alanı denir. $\lambda > 0$ olduğunda Ricci solitona daralan (shrinking), $\lambda = 0$ olduğunda Ricci solitona durağan (steady) ve $\lambda < 0$ olduğunda Ricci solitona genişleyen (expanding) denir.

Önerme 3.2.2. $(M, g, S(TM))$ bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Buradan $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$2R^{(0,2)}(X, Y) = 2\lambda g(X, Y) - f[g(A_N X, Y) + g(A_N Y, X)] - 2g(X, Y) - (\nabla_{v^T} g)(X, Y) \quad (3.2.14)$$

veya buna denk olarak

$$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - 1)g(X, Y) - f[g(A_N X, Y) + g(A_N Y, X)] - \frac{1}{2}(\nabla_{v^T} g)(X, Y) \quad (3.2.15)$$

dir.

İspat: (3.2.13) eşitliğinden

$$(L_{v^T} g)(X, Y) + 2R^{(0,2)}(X, Y) = 2\lambda g(X, Y) \quad (3.2.16)$$

elde edilir. (3.2.16) de Lemma 3.2.2 gözönüne alınırsa (3.2.14) ve (3.2.15) elde edilir.

Örnek 3.2.1. (Light koni). $\mathbb{R}_1^4$ uzayında Lorenzt metriğin işareti $(-, +, +, +)$ olmak üzere standart kooordinat sistemi (x_1, x_2, x_3, x_4) e göre standart bazı $\{\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3, \partial x_4\}$ olsun. $\mathbb{R}_1^4$ in bir hiperyüzeyi M

$$\left\{ (t, t \cos u \cos v, t \cos u \sin v, t \sin u) : t > 0, u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), v \in [0, 2\pi] \right\}$$

ile tanımlı olsun. Böylece M üzerinde $\mathbb{R}_1^4$ in quasi-ortonormal çatısı

$$\begin{aligned} \partial u_0 &= \partial x_1 + \cos u \cos v \partial x_2 + \cos u \sin v \partial x_3 + \sin u \partial x_4 \\ N &= \frac{1}{2}(-\partial x_1 + \cos u \cos v \partial x_2 + \cos u \sin v \partial x_3 + \sin u \partial x_4) \\ \partial u_1 &= t(-\sin u \cos v \partial x_2 - \sin u \sin v \partial x_3 + \cos u \partial x_4) \\ \partial u_2 &= t(-\cos u \sin v \partial x_2 + \cos u \cos v \partial x_3) \end{aligned}$$

olarak bulunur ve M bir lightlike hiperyüzeydir, burada $\{u_0, u_1, u_2\}$, bir $U \subset M$ komşuluğu üzerinde bir lokal koordinat sistemidir. Kolayca gösterilebilirki $\text{Rad}(TM) = \text{Sp}\{\partial u_0\}$,

$S(TM) = Sp\{\partial u_1, \partial u_2\}$ ve $tr(TM) = Sp\{N\}$ dir. Bu durumda M üzerine indirgenen g metriğinin matrisi

$$[g] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \cos^2 u \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. $\bar{U} \subset M$ üzerinde başka bir koordinat sistemi $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ olmak üzere

$$\partial \bar{u}_0 = \partial u_0 \quad \partial \bar{u}_1 = t \sin u \partial u_0 + \cos u \partial u_1, \quad \partial \bar{u}_2 = t \cos u \partial u_2.$$

M üzerinde bir null çatıdır. Buna göre R_1^4 in $\{\partial u_0, N, \partial u_1, \partial u_2\}$ çatısına göre R_1^4 in metriğinin matrisi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \cos^2 u \end{pmatrix}$$

dir. M lightlike hiperyüzeyinin Ricci tensörünün $\{\partial u_0, N, \partial u_1, \partial u_2\}$ çatısına göre bileşenleri

$$R_{00} = R_{01} = R_{10} = R_{02} = R_{20} = 0, \quad R_{11} = -\frac{1}{2}, \quad R_{12} = R_{21} = 0, \quad R_{22} = -\frac{1}{2} \cos^2 u,$$

olarak bulunur ve M nin Ricci tensörü simetriktir [17]. M nin yer vektörü $v = v^\top = t\xi$ dir ve v bir concurrent vektör alanıdır. Yukarıdaki eşitlikler ve (3.2.16) kullanılarak $\lambda = -\frac{1}{2}$ olarak bulunur. Böylece $(M, g, v^\top = t\xi, \lambda = -\frac{1}{2})$ bir genişleyen (expanding) Ricci solitondur.

Lemma 3.2.4. $\mathbb{R}_q^{n+2}$ yarı-Öklid uzayının $(n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X, Y) = n \operatorname{iz} A_N B(X, Y) - B(A_N X, Y) \quad (3.2.17)$$

dir.

İspat: M nin bir lightlike çatısı $\{e_1, \dots, e_n, \xi\}$ olsun öyle ki $\{e_1, \dots, e_n\}$, $S(TM)$ nin bir ortonormal çatısıdır. $\tilde{M} = \mathbb{R}_q^{n+2}$ nin yarı-Öklid uzay olduğu gözönüne alınırsa, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için (2.2.27) den

$$R(X, Y)Z = B(Y, Z)A_N X - B(X, Z)A_N Y \quad (3.2.18)$$

olduğu görülür. M nin Ricci tensörünün

$$R^{(0,2)}(X, Y) = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i g(R(e_i, X)Y, e_i) + \tilde{g}(R(\xi, X)Y, N)$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre (3.2.18) den

$$R(e_i, X)Y = B(X, Y)A_N e_i - B(e_i, Y)A_N X$$

olur ve burada $e_i = \xi$ alınırsa

$$R(\xi, X)Y = B(X, Y)A_N\xi$$

olur. Ayrıca

$$\tilde{g}(R(\xi, X)Y, N) = B(X, Y)g(A_N\xi, N) = 0$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X, Y) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i B(X, Y)g(A_N e_i, e_i) - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i B(g(A_N X, e_i)e_i, Y) \\ &= B(X, Y)n \cdot iz A_N - B\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(A_N X, e_i)e_i, Y\right) \\ &= B(X, Y)n \cdot iz A_N - B(A_N X, Y) \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Önerme 3.2.3. $\mathbb{R}_q^{n+2}$ yarı-Öklid uzayının bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ ve (M, g, v, λ) Ricci soliton olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(S(TM))$ birim vektör alanı için

$$nB(X, X)iz A_N - B(A_N X, X) = \lambda - 1 - 2f[g(A_N X, X)] \quad (3.2.20)$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $S(TM)$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. (3.2.17) ifadesinden

$$R^{(0,2)}(e_i, e_i) = nB(e_i, e_i) \cdot iz A_N - B(A_N e_i, e_i) \quad (3.2.21)$$

elde edilir. (3.2.15) denkleminde $Y = X = e_i$ alınır ve (3.2.21) kullanılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.1. $\mathbb{R}_q^{n+2}$ yarı-Öklid uzayının bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ ve (M, g, v, λ) Ricci soliton olsun. Eğer $(M, g, S(TM))$ total umbilik ve konformal çarpanı φ olan screen konformal ise $\forall X \in \Gamma(S(TM))$ için

$$n^2 [B(X, X)]^2 \varphi - [B(X, X)]^2 = \lambda - 1 - 2fB(X, X) \quad (3.2.22)$$

dir.

Uyarı 3.2.1. (3.2.22) denklemi $B(X, X)$ e bağlı ikinci dereceden bir denklemdir ve $B(X, X)$ bir tek şekilde belirlendiğinden bir tek çözümü vardır, yani ikinci derece denklemin diskriminantı $\Delta = 0$ dır. Buradan ise

$$f^2 = (1 - \lambda)(\varphi n^2 - 1) \quad (3.2.23)$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.2. Yarı-Öklid uzayı $\mathbb{R}_q^{n+2}$ nin bir screen conformal total umbilik lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ ve v de $\mathbb{R}_q^{n+2}$ de concurrent vektör alanı olsun. Eğer (M, g, v, λ) bir durağan (steady) Ricci soliton ise v concurrent vektör alanı $\Gamma(TM)$ ye aittir.

Önerme 3.2.4. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifold, $(M, g, S(TM))$ $\tilde{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi, v, M üzerinde bir concurrent vektör alanı ve (M, g, v, λ) de bir Ricci soliton olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - 1)g(X, Y) - \frac{1}{2}[B(v, X)\eta(Y) + B(v, Y)\eta(X)] \quad (3.2.24)$$

dir.

İspat: $v \in \Gamma(TM)$ ve (M, g, v, λ) Ricci soliton olduğundan, (3.2.13) yardımıyla $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(L_v g)(X, Y) + 2R^{(0,2)}(X, Y) = 2\lambda g(X, Y) \quad (3.2.25)$$

dir. v concurrent vektör alanı $\Gamma(TM)$ ye ait olduğundan Lemma 3.2.3 den $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(L_v g)(X, Y) = (\nabla_v g)(X, Y) + 2g(X, Y) \quad (3.2.26)$$

olur. (3.2.25) ve (3.2.26) kullanılarak

$$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - 1)g(X, Y) - \frac{1}{2}(\nabla_v g)(X, Y) \quad (3.2.27)$$

elde edilir. (3.2.27) de (2.2.24) den $(\nabla_v g)(X, Y)$ yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Şimdi $\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olacak şekilde $\Gamma(TM)$ nin bir bazı $\{e_1, \dots, e_n, \xi\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(e_i, e_j) &= (\lambda - 1)g(e_i, e_j) - \frac{1}{2}[B(v, e_i)\eta(e_j) + B(v, e_j)\eta(e_i)] \\ &= (\lambda - 1) \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

olur. (3.2.28) eşitliğinde $X = Y = \xi$ alınırsa

$$R^{(0,2)}(\xi, \xi) = 0 \quad (3.2.29)$$

olduğu görülür.

(3.2.28) ve (3.2.29) gözönüne alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.2.3. $(M, g, S(TM))$ bir lightlike hiperyüzey ve M üzerinde bir concurrent vektör alanı v olsun. (M, g, v, λ) bir Ricci solitondur ancak ve ancak $S(TM)$ Einsteindir ve $R^{(0,2)}(\xi, \xi) = 0$ dır.

Şimdi screen homotetik lightlike hiperyüzeyler için [28] de verilen aşağıdaki teoremi hatırlatalım.

Teorem 3.2.2. $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$, $c \geq 0$, Lorentzian uzay formunun bir screen homotetic lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. Eğer M Einstein, yani $R^{(0,2)} = \gamma g$ (γ bir sabit) ise, γ negatif olamaz [28].

(3.2.28) ve (3.2.29) ve Teorem 3.2.2 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.2.4. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir Lorentz uzay form ve $(M, g, S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin bir screen homotetic lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer (M, g, v, λ) Ricci soliton ise $\lambda \geq 1$ ile bir daralan (shrinking) Ricci solitondur.

3.3 Lightlike Hiperyüzeyler Üzerinde Torse Forming Vector Alanları

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold olmak üzere her $X \in \Gamma(T\tilde{M})$ için $\tilde{\nabla}_X v = \mu X + \psi(X)v$ olacak şekilde μ fonksiyonu ve ψ 1-formu var ise v ye torse-forming vektör alanı denildiğini biliyoruz.

Örnek 3.3.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $(M, g, S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin bir total umbilik lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda ξ , M üzerinde bir torse-forming vektör alanıdır. Gerçekten de, (2.2.22) den

$$\nabla_X \xi = \lambda X - \tau(X)\xi$$

olarak yazılır ve ξ , M üzerinde $\mu = \lambda$ sabit, $\psi = -\tau(X)$ olan bir torse forming vektör alanıdır.

Örnek 3.3.2. $\mathbb{R}_1^4$ standart koordinatları (x_1, x_2, x_3, x_4) ve doğal bazı $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4\}$ olan $(-, +, +, +)$ işaretli dört boyutlu Minkowski uzayı olsun.

$$x_1 = u_1 \sec u_3 \quad x_2 = u_1 \cos(u_2 + u_3) \quad x_3 = u_1 \sin(u_2 + u_3) \quad x_4 = u_1 \tan u_3$$

ile verilen M hiperyüzeyi, $\mathbb{R}_1^4$ de bir warped çarpım lightlike hiperyüzeyidir, burada $u_1 \neq 0$; $u_2, u_3 \in (0, \frac{\pi}{2})$ dir. Bu durumda TM

$$Z_1 = \sec u_3 \partial_1 + \cos(u_2 + u_3) \partial_2 + \sin(u_2 + u_3) \partial_3 + \tan u_3 \partial_4$$

$$Z_2 = -u_1 \sin(u_2 + u_3) \partial_2 + u_1 \cos(u_2 + u_3) \partial_3$$

$$Z_3 = u_1 \sec u_3 \tan u_3 \partial_1 - u_1 \sin(u_2 + u_3) \partial_2 + u_1 \cos(u_2 + u_3) \partial_3 + u_1 \sec^2 u_3 \partial_4$$

ile gerilir ve $tr(TM)$

$$N = -\frac{1}{2} (\sec u_3 \tan u_3 \partial_1 - \cos(u_2 + u_3) \partial_2 - \sin(u_2 + u_3) \partial_3 + \tan u_3 \partial_4)$$

tarafından gerilir. $RadTM = Sp\{Z_1\}$ ve $S(TM) = Sp\{Z_2, Z_3\}$ dir. Basit bir hesaplama ile

$$\tilde{\nabla}_{Z_2} Z_1 = \nabla_{Z_2} Z_1 = u_1 Z_2, \quad \tilde{\nabla}_{Z_3} Z_1 = \nabla_{Z_3} Z_1 = u_1 Z_3,$$

ve

$$B(Z_2, Z_2) = -u_1, \quad B(Z_2, Z_3) = -u_1, \quad B(Z_3, Z_3) = -u_1 - \sec^2 u_3$$

elde edilir. Böylece Z_1 bir concircular vektör alanıdır, yani $\mu = u_1$ ve $\psi = 0$ dir.

Lemma 3.3.1. $(M, g, S(TM))$ bir Lorentz manifoldun lightlike hiperyüzeyi ve v de bir torse-forming vektör alanı olsun. Eğer $v \in \Gamma(TM)$ ise

$$\tilde{\nabla}_X v = \nabla_X v = \varphi X + \psi(X) v \quad (3.3.1)$$

ve $\forall X \in \Gamma(TM)$

$$B(X, v) = 0 \quad (3.3.2)$$

dir.

İspat: (2.1.26) ve (2.2.11) denklemlerinden, $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{\nabla}_X v = \nabla_X v + B(X, v) N = \varphi X + \psi(X) v$$

elde edilir. Bu son ifade teğet ve transversal bileşenlerine ayrıştırılır ise (3.3.1) ve (3.3.2) elde edilir.

M üzerinde bir torse-forming vektör alanı v ,

$$v = v^s + a\xi$$

olarak yazılabilir, burada $v^s \in \Gamma(S(TM))$ ve $\eta(v) = a$ dır.

Önerme 3.3.1. M lightlike hiperyüzeyi üzerinde bir torse-forming vektör alanı v olsun. Eğer $v = v^s + a\xi$ vektör alanında a sabit ise bu durumda

$$g(v^s, A_N v) = a\eta(\varphi\xi) + a[\psi(v) + \tau(v)] \quad (3.3.3)$$

dir .

İspat: (3.1.3) den

$$\begin{aligned} \bar{g}(v, \xi) &= g(v, \xi) + \eta(v)\eta(\xi) \\ &= \eta(v) = a \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} X[\bar{g}(v, \xi)] &= X[\tilde{g}(v, N)] \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X v, N) + \tilde{g}(v, \tilde{\nabla}_X N) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte v nin torse-forming vektör alanı olduğu uygulanırsa,

$$X[\bar{g}(v, \xi)] = \tilde{g}(\varphi X, N) + [\psi(X) + \tau(X)]\eta(v) - g(v, A_N X) \quad (3.3.4)$$

olur. (3.3.4) $\forall X \in \Gamma(TM)$ için doğru olduğundan bu eşitlik $X = v$ olması durumunda

$$v[\bar{g}(v, \xi)] = v[\eta(v)] = v[g(v^s + a\xi, N)] = 0 \quad (3.3.5)$$

ve böylece

$$0 = \eta(\varphi v) + [\psi(v) + \tau(v)]\eta(v) - g(v, A_N v) \quad (3.3.6)$$

bulunur ki bu da (3.3.3) ifadesinden başka bir şey değildir.

Önerme 3.3.2. $(M, g, S(TM))$ bir screen konformal lightlike hiperyüzey ve v de M üzerinde bir torse-forming vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\varphi = -\psi(v) - \tau(v) \quad (3.3.7)$$

dir.

İspat: Eğer M screen conformal ise ω konformal çarpanı ile (2.2.26) ve (2.2.23) dan

$$g(v^s, A_N v) = C(v^s, v) = \omega B(v^s, v) \quad (3.3.8)$$

olduğu görülür. (3.3.8) ifadesinde Lemma 3.3.1 gözönüne alınır

$$g(v^s, A_N v) = 0 \quad (3.3.9)$$

elde edilir. (3.3.3) de (3.3.9) kullanılırsa

$$\eta(\varphi\xi) + [\psi(v) + \tau(v)] = 0 \quad (3.3.10)$$

bulunur. Ayrıca

$$\eta(\varphi\xi) = \tilde{g}(\varphi\xi, N) = \varphi\eta(\xi) = \varphi \quad (3.3.11)$$

olduğu (3.3.10) da gözönüne alınır ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.1. $(M, g, S(TM))$ bir screen konformal lightlike hiperyüzey ve v de M üzerinde bir torse-forming vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\tilde{\nabla}_v v = \nabla_v v = -\tau(v)v \quad (3.3.12)$$

dir.

İspat: v , M üzerinde bir torse-forming vektör alanı olduğundan $\tilde{\nabla}_v v = \varphi v + \psi(v)v$ dır. (3.3.7) deki φ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_v v &= \varphi v + \psi(v)v \\ &= -\psi(v)v - \tau(v)v + \psi(v)v \\ &= -\tau(v)v \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Tanım 3.3.1. $(\tilde{M}, h)$ bir yarı-Riemann manifold ve $\tilde{M}$ üzerinde $(1, 1)$ tipli tensör alanı F olsun. Eğer

$$\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = F(\gamma'(t)) \quad (3.3.14)$$

ise $\gamma : I \rightarrow M$ diferensiyellenebilir eğrisi F -geodezik olarak adlandırılır.

Bir Riemann manifold üzerinde F geodezik eğrisi bir geodezik eğridir ancak ve ancak $F = I$ dır, burada I özdeşlik dönüşümüdür [29].

Sonuç 3.3.2. $(M, g, S(TM))$ screen konformal lightlike hiperyüzey ve $v \in \Gamma(TM)$ de bir torse-forming vektör alanı olsun. Bu durumda M üzerinde v nin her integral eğrisi bir F -geodezik eğridir.

Özel olarak Sonuç 3.3.1 içerisinde $\psi(v) = 0$ için aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.3.3. $(M, g, S(TM))$ bir screen konformal lightlike hiperyüzey ve $v \in \Gamma(TM)$ de torqued vektör alanı olsun. Bu durumda her v nin integral eğrisi M de bir geodezik eğridir.

Sonuç 3.3.1 içerisinde $\psi = 0$ özel durumu için aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.3.4. $(M, g, S(TM))$ bir screen konformal lightlike hiperyüzey ve $v \in \Gamma(TM)$ de bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\varphi = -\tau(v)$$

dir.

Sonuç 3.3.1 içinde $\varphi = 1$ ve $\psi = 0$ özel durumu için aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.3.5. $(M, g, S(TM))$ bir screen konformal lightlike hiperyüzey ve $v \in \Gamma(TM)$ de bir concurrent vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\tau(v) = -1$$

dir.

Sonuç 3.3.1 içinde $\varphi = 0$ için aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.3.6. $(M, g, S(TM))$ bir screen konformal lightlike hiperyüzey ve $v \in \Gamma(TM)$ de bir recurrent vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\psi(v) = -\tau(v)$$

dir.

Şimdi v yarı-Riemann manifold $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir torse-forming vektör alanı olsun. Bu durumda v vektör alanı teğet ve transversal bileşenlerine

$$v = v^T + fN \tag{3.3.15}$$

olarak ayrılır ve burada $v^T \in \Gamma(TM)$ ve $f = g(v, \xi)$ dir.

Önerme 3.3.3. $(M, g, S(TM))$ bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun lightlike hiperyüzeyi ve v de $\tilde{M}$ üzerinde bir torse-forming vektör alanı olsun. $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\varphi X + \psi(X) v^T = \nabla_X v^T - f A_N X \quad (3.3.16)$$

ve

$$\psi(X) f N = B(X, v^T) N + X[f] N - f \tau(X) N \quad (3.3.17)$$

dir.

İspat: v bir torse-forming vektör alanı olduğundan $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{\nabla}_X v = \varphi X + \psi(X) v^T + f \psi(X) N \quad (3.3.18)$$

dir. Ayrıca Gauss ve Weingarten formüllerinden

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X v &= \tilde{\nabla}_X v^T + \tilde{\nabla}_X f N \\ &= \nabla_X v^T + B(X, v^T) N + X[f] N - f A_N X - f \tau(X) N \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

elde edilir. (3.3.19) eşitliğinin teğet ve transversal bileşenleri göz önüne alınırsa (3.3.16) ve (3.3.17) bulunur.

Önerme 3.3.4. $(M, g, S(TM))$ bir lightlike hiperyüzey ve v bir torse-forming vektör alanı olsun. Eğer v ve $Rad(TM)$ radikal uzayı arasındaki açı sabitse $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\psi(X) f = B(X, v^T) \quad \text{ve} \quad \tau(X) = 0 \quad (3.3.20)$$

dır.

İspat: v ve $Rad(TM)$ radikal uzayı arasındaki açı'nın sabit olduğu varsayımından $X[f] = 0$ olduğu açıktır. Böylece (3.3.19) eşitliği

$$\psi(X) f = B(X, v^T) - f \tau(X) \quad (3.3.21)$$

halini alır. Ayrıca v nin bir torse-forming vektör alanı olduğu kullanılarak $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{\nabla}_X v = \varphi X + \frac{1}{f} B(X, v^T) v - \tau(X) v \quad (3.3.22)$$

yazılır. Böylece

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X v, \xi) = B(X, v^T) - f \tau(X) \quad (3.3.23)$$

olur. Diğer taraftan $\tilde{\nabla}$ nın Levi-Civita konneksiyonu olduğu kullanılarak

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X v, \xi) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \xi, v) = -g(\nabla_X \xi, v) \quad (3.3.24)$$

elde edilir. (2.2.22), (2.2.18), ve (3.3.24) kullanılarak

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X v, \xi) = B(X, v^T) + f\tau(X) \quad (3.3.25)$$

olduğu görülür. (3.3.23) ve (3.3.25) birlikte gözönüne alınırsa

$$2f\tau(X) = 0$$

olduğu görülür ki $f \neq 0$ olduğundan $\tau(X) = 0$ dır. (3.3.22) eşitliğinde $\tau(X) = 0$ alınırsa

$$\psi(X)f = B(X, v^T)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.3.7. $(M, g, S(TM))$ total geodezik lightlike hiperyüzey ve v bir torse-forming vektör alanı ve f sabit olsun. Bu durumda v bir concircular vektör alanıdır.

3.4 Lightlike Hiperyüzeylerde Potansiyel Vektör Alanı Torse Forming Vektör Alanı Olan Ricci Solitonlar

Bu kısımda lightlike hiperyüzeyler üzerinde potansiyel vektör alanı torse-forming vektör alanı olan Ricci solitonlar incelenecektir. Bunun içinde ilk önce daha sonra kullanacağımız lemmaları verelim.

Lemma 3.4.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifold, $\tilde{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ ve v de $\tilde{M}$ üzerinde bir torse-forming vektör alanı olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} (L_{v^T} g)(X, Y) &= \Phi(X)g(v, Y) + \Phi(Y)g(v, X) \\ &+ f[g(A_N X, Y) + g(A_N Y, X) + \tau(X)\eta(X) + \tau(Y)\eta(Y)] \\ &- X[f]\eta(Y) - Y[f]\eta(X) + 2\varphi g(X, Y) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

dir.

İspat: (3.3.16) den

$$g(\nabla_X v^T, Y) = g(\varphi X, Y) + \Psi(X)g(v^T, Y) + fg(A_N X, Y) \quad (3.4.2)$$

ve

$$g(\nabla_Y v^T, X) = g(\varphi Y, X) + \Psi(Y) g(v^T, X) + f g(A_N Y, X) \quad (3.4.3)$$

bulunur. (3.1.2) eşitliğinde, (3.4.2) ve (3.4.3) değerleri yerine yazılırsa (3.4.1) elde edilir.

Özel olarak $v = v^T$ (ya da $f = 0$) olması durumunda aşağıdaki Lemma elde edilir:

Lemma 3.4.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifold, $\tilde{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ ve v de M üzerinde bir torse-forming vektör alanı olsun. Buradan $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(L_v g)(X, Y) = \Phi(X) g(v, Y) + \Phi(Y) g(v, X) + 2\varphi g(X, Y) \quad (3.4.4)$$

dir.

Önerme 3.4.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifold, $\tilde{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ ve v de M üzerinde bir torse-forming vektör alanı olsun. Eğer (M, g, v^T, λ) bir Ricci soliton ise her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X, Y) &= (\lambda - \varphi) g(X, Y) - \frac{1}{2} (\Psi(X) g(v, Y) + \Psi(Y) g(v, X)) \\ &\quad - \frac{f}{2} [g(A_N X, Y) + g(A_N Y, X) + \tau(X) \eta(X) + \tau(Y) \eta(Y)] \\ &\quad + \frac{1}{2} (X[f] \eta(Y) + Y[f] \eta(X)) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

dir.

İspat: (3.4.1) deki $L_{v^T} g$ değeri (3.2.13) eşitliğinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Önerme 3.4.2. $(M, g, S(TM))$ bir lightlike hiperyüzey ve $v \in \Gamma(TM)$ de torse-forming vektör alanı olsun. Eğer (M, g, v, λ) Ricci soliton ise her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - \varphi) g(X, Y) - \frac{1}{2} (\Psi(X) g(v, Y) + \Psi(Y) g(v, X)) \quad (3.4.6)$$

dir.

İspat: Lemma 3.4.2 deki $L_v g$ değeri (3.2.13) eşitliğinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Şimdi bir örnek verelim.

Örnek 3.4.1. $\mathbb{R}^7$ de standart koordinatlar $\{x_1, \dots, x_n\}$ ve $\tilde{M} = \{x \in \mathbb{R}^7 : x_7 \neq 0\}$ olan 7-boyutlu manifold olsun. Bu durumda $\Gamma(T\tilde{M})$

$$\begin{aligned} e &= x_7 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad e_2 = x_7 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad e_3 = x_7 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad e_4 = x_7 \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad e_5 = x_7 \frac{\partial}{\partial x_5}, \\ e_6 &= -x_7 \frac{\partial}{\partial x_6}, \quad \varsigma = x_7 \frac{\partial}{\partial x_7} \end{aligned}$$

vektör alanları tarafından gerilir. $\tilde{M}$ üzerinde $\tilde{g}$ yarı-Riemann metriği

$$\tilde{g}(e_i, e_i) = \tilde{g}(\varsigma, \varsigma) = -\tilde{g}(e_6, e_6) = 1, \quad \tilde{g}(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ile tanımlı Lorentz metrik olsun. Ayrıca $\tilde{M}$ üzerinde $(1, 1)$ tensör alanı φ

$$\begin{aligned} \varphi e_1 &= -e_2, & \varphi e_2 &= e_1, & \varphi e_3 &= -e_4, & \varphi e_4 &= e_3, \\ \varphi e_5 &= -e_6, & \varphi e_6 &= e_5, & \varphi \varsigma &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\varphi^2 X = -X + \omega(X) e_7$$

ve

$$\tilde{g}(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \omega(X) \omega(Y)$$

dir, burada $\omega(X) = \tilde{g}(X, \varsigma)$ dir. Böylece $(\tilde{M}, \tilde{g}, \eta, \varsigma)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifolddur. $(\tilde{M}, \tilde{g}, \eta, \varsigma)$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ olmak üzere doğrudan hesaplamayla

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 &= \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = \tilde{\nabla}_{e_3} e_3 = \tilde{\nabla}_{e_4} e_4 = \tilde{\nabla}_{e_5} e_5 = -\tilde{\nabla}_{e_6} e_6 = -\varsigma, \\ \tilde{\nabla}_{e_1} \varsigma &= e_1, \quad \tilde{\nabla}_{e_2} \varsigma = e_2, \quad \tilde{\nabla}_{e_3} \varsigma = e_3, \quad \tilde{\nabla}_{e_4} \varsigma = e_4, \quad \tilde{\nabla}_{e_5} \varsigma = e_5, \quad \tilde{\nabla}_{e_6} \varsigma = e_6 \end{aligned}$$

ve

$$[e_k, \varsigma] = e_i, \quad [e_k, e_l] = 0 \quad \forall k \neq l \in \{1, 2, \dots, 6\}$$

elde edilir. Böylece $(\tilde{M}, \tilde{g}, \eta, \varsigma)$ bir indefinite Kenmotsu manifold ve ς da M üzerinde bir torse-forming vektör alanıdır. $(\tilde{M}, \tilde{g}, \eta, \varsigma)$ nın bir M hiperyüzeyi $M = \{x \in \tilde{M} : x_2 = x_5\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} \text{Rad}(TM) &= \text{Sp} \left\{ \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_2 - e_6) \right\}, \\ S(TM) &= \text{Sp} \{e_1, e_3, e_4, e_5, \varsigma\}, \\ \text{ltr}(TM) &= \text{Sp} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (e_2 + e_6) \right\}, \end{aligned}$$

olmak üzere M bir lightlike hiperyüzeydir. Gauss ve Weingarten formüllerinden

$$\nabla_{e_i} e_i = -\varsigma, \quad \nabla_{e_i} e_j = 0, \quad \nabla_{e_i} \varsigma = 0, \quad \nabla_\xi \xi = -\varsigma \quad \forall i \neq j \in \{1, 3, 4, 5\}$$

elde edilir [30]. Böylece ς , M üzerinde bir torse-forming vektör alanıdır. Üstde elde edilen kovaryant türev değerleri (2.2.31), (3.1.2) de yerine yazılır ve Ricci soliton denklemi (3.2.13) da gözönüne alınırsa potansiyel vektör alanı ς torse-forming vektör alanı olan bir durağan (steady) Ricci soliton elde edilir.

Önerme 3.4.1 ve Önerme 3.4.2 önermelerinden potansiyel vektör alanları torqued, concircular, concurrent ve recurrent vektör alanları olan Ricci solitonlar için lightlike hiperyüzün Ricci eğriliği aşağıdaki tablo verilebilir.

Önerme 3.4.3. $(M, g, S(TM))$ bir lightlike hiperyüzey ve (M, g, v, λ) bir Ricci soliton olsun. Bu durumda aşağıdaki tabloya sahip oluruz:

	v vektör alanı	Ricci Eğriliği
(1)	<i>Torqued</i>	$R^{(0,2)}(v, v) = (\lambda - \varphi) g(v, v) - f [g(A_N v, v) + \tau(v) \eta(v)]$
(2)	<i>Concircular</i>	$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - \varphi) g(X, Y)$ $-\frac{f}{2} [g(A_N X, Y) + g(A_N Y, X) + \tau(X) \eta(X) + \tau(Y) \eta(Y)]$ $+\frac{1}{2} (X[f] \eta(Y) + Y[f] \eta(X))$
(3)	<i>Concurrent</i>	$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - 1) g(X, Y)$ $-\frac{f}{2} [g(A_N X, Y) + g(A_N Y, X) + \tau(X) \eta(X) + \tau(Y) \eta(Y)]$ $+\frac{1}{2} (X[f] \eta(Y) + Y[f] \eta(X))$
(4)	<i>Recurrent</i>	$R^{(0,2)}(X, Y) = \lambda g(X, Y)$ $-\frac{f}{2} [g(A_N X, Y) + g(A_N Y, X) + \tau(X) \eta(X) + \tau(Y) \eta(Y)]$ $+\frac{1}{2} (X[f] \eta(Y) + Y[f] \eta(X))$

İspat: Eğer v bir torqued vektör alanı ise $\Psi(v) = 0$ dır. Lemma 3.4.1 den (1) elde edilir. v nin concircular vektör alanı olması durumunda $\Psi = 0$ olur ve (2) elde edilir. $\varphi = 1$ ve $\psi = 0$ olması durumunda (3) ve (4) ispatlanır.

$f = 0$ özel durumu için aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 3.4.4. $(M, g, S(TM))$ bir lightlike hiperyüzey ve (M, g, v, λ) bir Ricci soliton olsun. Eğer $v \in \Gamma(TM)$ ise aşağıdaki tabloya sahip oluruz:

	v vektör alanı	Ricci Eğriliği
(1)	<i>Torqued</i>	$R^{(0,2)}(v, v) = (\lambda - \varphi) g(v, v)$
(2)	<i>Concircular</i>	$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - \varphi) g(X, Y)$
(3)	<i>Concurrent</i>	$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - 1) g(X, Y)$
(4)	<i>Recurrent</i>	$R^{(0,2)}(X, Y) = \lambda g(X, Y) - \frac{1}{2} (\Psi(X) g(v, Y) + \Psi(Y) g(v, X))$

3.5 Einstein Ricci Soliton Lightlike Hiperyüzeyler

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir Lorentzian manifold ve $\tilde{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi de $(M, g, S(TM))$ olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X, Y) = kg(X, Y) \quad (3.5.1)$$

ise $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyine bir Einstein lightlike hiperyüzey denir. Bir Einstein lightlike hiperyüzeyin Ricci eğriliği aşikar olarak simetriktir. Einstein manifoldlar uzay formlarının genelleştirilmiştir ve Ricci solitonlarda Einstein manifoldlarının genelleştirilmiştir.

Dolayısıyla Einstein lightlike hiperyüzeyler üzerinde bir Ricci soliton vardır. Bu kısımda Einstein lightlike hiperyüzeyler üzerinde soliton özelliklerini inceleyeceğiz. Bunun içinde ilk önce Einstein lightlike hiperyüzeylerin bazı temel karakterizasyonlarını hatırlatalım.

Teorem 3.5.1. $(M, g, S(TM))$ bir $\tilde{M}(c)$ Lorentz manifoldunun Einstein screen conformal lightlike hiperyüzeyi olsun. Burada M bir $C \times M'$ çarpım manifoldudur. Burada C bir null eğri ve M' de $S(TM)$ nin integral manifoldudur [31].

Teorem 3.5.2. $(M, g, S(TM))$ bir $\tilde{M}(c)$ Lorentz manifoldunun Einstein homotetic lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $c = 0$ ve M bir $C \times M_\alpha \times M_\beta$ lightlike üçlü-çarpım manifoldudur öyle ki;

- i) Eğer $k \neq 0$ ise, M_α ve M_β lardan birisi bir küreye izometrik olan sabit eğrilikli total umbilik Riemann manifold ve diğeri ise bir noktadır.
- ii) Eğer $k = 0$ ise M_α bir total geodezik Öklidyen uzay ve M_β da bir non-null eğri veya $\tilde{M}$ da bir noktadır [31].

Önerme 3.5.1. $(M, g, S(TM))$, $(n + 2)$ –boyutlu bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n + 1)$ -boyutlu bir Einstein lightlike hiperyüzeyi ve v de M üzerinde bir torse-forming vektör alanı olmak üzere (M, g, v, λ) bir Ricci soliton olsun. Bu durumda

$$\operatorname{div}_{S(TM)}(v) = n(\lambda - k) \quad (3.5.2)$$

dır. Burada $\operatorname{div}_{S(TM)}, (\tilde{M}, \tilde{g})$ nin üzerindeki divergens tanımının $S(TM)$ ye kısıtlanmışını göstermektedir.

İspat: Eğer M bir Einstein lightlike hiperyüzeyi olmak üzere (M, g, v, λ) bir Ricci soliton ise Önerme 3.4.2 ve (3.5.1) den $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$kg(X, Y) = (\lambda - \varphi)g(X, Y) - \frac{1}{2}(\Psi(X)g(v, Y) + \Psi(Y)g(v, X)) \quad (3.5.3)$$

olur. Şimdi $S(TM)$ nin bir $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal bazını gözönüne alalım. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için (3.5.3) eşitliğinde her $i \in \{1, \dots, n\}$ için $X = Y = e_i$ alınsın. Bu durumda

$$\varphi = \lambda - k - \Psi(e_i)g(v, e_i) \quad (3.5.4)$$

elde edilir. Diğer taraftan v nin bir torse-forming vektör alanı olduğu kullanılarak

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_i}v, e_i) = \varphi + \Psi(e_i)g(v, e_i) \quad (3.5.5)$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.5.5) den

$$\operatorname{div}_{S(TM)}(v) = n\varphi + \sum_{i=1}^n \Psi(e_i) g(v, e_i) \quad (3.5.6)$$

olarak bulunur. (3.5.4) ve (3.5.6) kullanılarak ispat tamamlanır.

Bu önermeden aşağıdaki sonuca sahip oluruz:

Sonuç 3.5.1. $(M, g, S(TM))$, $(n+2)$ -boyutlu bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir Einstein lightlike hiperyüzeyi ve v de M üzerinde bir torse-forming vektör alanı olmak üzere (M, g, v, λ) bir Ricci soliton olsun. Eğer $k = 0$ ise aşağıdaki ifadelere sahip oluruz:

- i) $\operatorname{div}_{S(TM)} > 0$ olması için gerek ve yeter şart (M, g, v, λ) Ricci solitonunun daralan (shrinking) olmasıdır.
- ii) $\operatorname{div}_{S(TM)} = 0$ olması için gerek ve yeter şart (M, g, v, λ) Ricci solitonunun durağan (steady) olmasıdır.
- iii) $\operatorname{div}_{S(TM)} < 0$ olması için gerek ve yeter şart (M, g, v, λ) Ricci solitonunun genişleyen (expanding) olmasıdır.

Önerme 3.5.2. $(M, g, S(TM))$ bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun Einstein lightlike hiperyüzeyi, v de M üzerinde bir torqued ya da concircular vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\operatorname{div}_{S(TM)}(v) = n\varphi = n(\lambda - k) \quad (3.5.7)$$

dir.

İspat: Önerme 3.4.4 deki (1) ve (2) ifadeleri ve Önerme 3.5.1 den ispat tamamlanır.

Sonuç 3.5.2. $(M, g, S(TM))$, $(n+2)$ -boyutlu bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir Einstein lightlike hiperyüzeyi ve v de M üzerinde bir torqued ya da concircular vektör alanı olmak üzere (M, g, v, λ) bir Ricci soliton olsun. Eğer $k = 0$ ise aşağıdaki ifadelere sahip oluruz:

- i) (M, g, v, λ) bir daralan (shrinking) Ricci solitondur ancak ve ancak $\operatorname{div}_{S(TM)} > 0$ ve $\varphi > 0$ dir.
- ii) (M, g, v, λ) bir durağan (steady) Ricci solitondur ancak ve ancak $\operatorname{div}_{S(TM)} = \varphi = 0$ dir.

iii) (M, g, v, λ) bir genişleyen (*expanding*) Ricci solitondur ancak ve ancak $\operatorname{div}_{S(TM)} < 0$ ve $\varphi < 0$ dir.

Önerme 3.5.3. $(M, g, S(TM))$, $(n + 2)$ –boyutlu bir $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n + 1)$ -boyutlu bir Einstein lightlike hiperyüzeyi ve v de M üzerinde bir torse-forming vektör alanı olmak üzere (M, g, v, λ) bir Ricci soliton olsun. Bu durumda M bir Einstein lightlike hiperyüzeydir.

İspat: Önerme 3.4.4 deki (3) ifadesinden ispat tamamlanır.



4. LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE RİCCİ SOLİTONLAR

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde half-lightlike altmanifoldlar üzerinde Ricci solitonlar, ikinci altbölümde coisotropic altmanifoldlar üzerinde Ricci solitonlar ve son olarak da r -lightlike altmanifoldlar üzerinde Ricci solitonlar incelenmiştir. Lightlike altmanifoldlar üzerindeki Ricci solitonlar hakkında karakterizasyon teoremleri ve sonuçlar verilmiştir.

4.1 Half-lightlike Alt Manifoldlar Üzerinde Ricci Solitonlar

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifoldu ve $(M, g, S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için X e göre g nin Lie türevi

$$\begin{aligned} (L_Z g)(X, Y) &= Zg(X, Y) - g([Z, X], Y) - g([Z, Y], X) \\ &= Zg(X, Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_Z Y, X) + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

dir. (2.2.53) den üstteki ifade

$$(L_Z g)(X, Y) = B(Z, Y)\eta(X) + B(Z, X)\eta(Y) + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) \quad (4.1.2)$$

veya

$$(L_Z g)(X, Y) = (\nabla_Z g)(X, Y) + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) \quad (4.1.3)$$

olarak yazılır. Bir $v \in \Gamma(T\tilde{M})$ vektör alanı

$$v = v^\top + f_1 N + f_2 U \quad (4.1.4)$$

olarak ifade edilir, burada $v^\top \in \Gamma(TM)$, f_1 ve f_2 , M üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır ve bu fonksiyonlar

$$f_1 = \tilde{g}(v, \xi) \quad \text{ve} \quad f_2 = \varepsilon \tilde{g}(v, U)$$

şeklinde tanımlanır, burada $\varepsilon = \tilde{g}(U, U) = \pm 1$ dir.

Önerme 4.1.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\tilde{M}$ nin bir half-lightlike alt manifoldu $(M, g, S(TM))$ olsun. $\tilde{M}$ üzerinde bir concircular vektör alanı v olmak üzere

$$\nabla_X v^\top = \varphi X + f_1 A_N X + f_2 A_U X, \quad (4.1.5)$$

$$B(X, v^\top) = -X[f_1] - f_1 \rho_1(X) - f_2 \mu_1(X), \quad (4.1.6)$$

$$D(X, v^\top) = -X[f_2] - f_1\rho_2(X) - f_2\mu_2(X) \quad (4.1.7)$$

dir.

İspat: v bir concircular vektör alanı ise (4.1.4) den

$$\tilde{\nabla}_X v^\top = \varphi X = \tilde{\nabla}_X v^\top + \tilde{\nabla}_X(f_1 N) + \tilde{\nabla}_X(f_2 U)$$

olarak yazılır. (2.2.45), (2.2.46), (2.2.47) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \varphi X &= \nabla_X v + B(X, v^\top) N + D(X, v^\top) U + X[f_1] N + f_1 \tilde{\nabla}_X N + X[f_2] U + f_2 \tilde{\nabla}_X U \\ &= \nabla_X v + B(X, v^\top) N + D(X, v^\top) U + X[f_1] N - f_1 A_N X + f_1 \rho_1(X) N + f_1 \rho_2(X) U \\ &\quad + X[f_2] U - f_2 A_U X + f_2 \mu_1(X) N + f_2 \mu_2(X) U \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem, teğet, $ltr(TM)$ ve $\mathcal{D}$ kısımlarına ayrıştırılır ise ispat tamamlanır.

Önerme 4.1.1 de $\varphi = 1$ alınırsa v bir cocurrent vektör alanı olur ve aşağıdaki önermeye sahip oluruz.

Önerme 4.1.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\tilde{M}$ nın bir half-lightlike alt manifoldu $(M, g, S(TM))$ olsun. $\tilde{M}$ üzerinde bir concurrent vektör alanı v olmak üzere

$$\nabla_X v^\top = X + f_1 A_N X + f_2 A_U X \quad (4.1.8)$$

dir.

Eğer v vektör alanı M üzerinde ise, yani $v = v^\top$ ise aşağıdaki önermeye sahip oluruz.

Önerme 4.1.3. $(M, g, S(TM))$ half-lightlike altmanifoldu üzerinde bir concircular vektör alanı $v = v^\top$ olmak üzere

$$B(X, v^\top) = D(X, v^\top) = 0 \quad (4.1.9)$$

dır.

Önerme 4.1.3 ün bir sonucu olarak da aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.1.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\tilde{M}$ nın bir half-lightlike alt manifoldu $(M, g, S(TM))$ olsun. Eğer $v = v^\top \in \Gamma(TM)$ bir concircular veya bir concurrent vektör alanı ise g indirgenmiş metriği $v^\top$ ye göre paraleldir, yani $\nabla_{v^\top} g = 0$ dır.

Half-lightlike alt manifoldlar üzerinde Lie türevini hesaplayalım. (4.1.2) ve (4.1.5) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
(L_{v^\top} g)(X, Y) &= B(X, v^\top) \eta(Y) + B(Y, v^\top) \eta(X) + g(\nabla_X v^\top, Y) + g(\nabla_Y v^\top, X) \\
&= B(X, v^\top) \eta(Y) + B(Y, v^\top) \eta(X) \\
&\quad + g(\varphi X + f_1 A_N X + f_2 A_U X, Y) + g(\varphi Y + f_1 A_N Y + f_2 A_U Y, X) \\
&= B(X, v^\top) \eta(Y) + B(Y, v^\top) \eta(X) + 2\varphi g(X, Y) \\
&\quad + f_1 [g(A_N X, Y) + g(A_N Y, X)] + 2f_2 [(A_U X, Y)]
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

elde edilir. Eğer v concurrent vektör alanı ise

$$\begin{aligned}
(L_{v^\top} g)(X, Y) &= B(X, v^\top) \eta(Y) + B(Y, v^\top) \eta(X) + 2g(X, Y) \\
&\quad + f_1 [g(A_N X, Y) + g(A_N Y, X)] + 2f_2 [(A_U X, Y)]
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

olur. Eğer v vektör alanı M üzerinde, yani $v = v^\top$ ise (4.1.9) ve (4.1.10) den

$$(L_{v^\top} g)(X, Y) = 2\varphi g(X, Y) \tag{4.1.12}$$

sonucuna ulaşılır. Eğer v concurrent ve $v = v^\top$ ise de

$$(L_{v^\top} g)(X, Y) = 2g(X, Y) \tag{4.1.13}$$

dir.

Tanım 4.1.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $(M, g, S(TM))$ de $\tilde{M}$ nin bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(L_v g)(X, Y) + 2R^{(0,2)}(X, Y) = 2\lambda g(X, Y) \tag{4.1.14}$$

olacak şekilde M üzerinde bir v vektör alanı, bir $\lambda \in \mathbb{R}$ var ise (M, g, v, λ) dördlüsüne bir Ricci soliton ve v ye de potansiyel vektör alanı denir. $\lambda > 0$ olduğunda Ricci solitona daralan (shrinking), $\lambda = 0$ olduğunda Ricci solitona durağan (steady) ve $\lambda < 0$ olduğunda Ricci solitona genişleyen (expanding) denir.

Teorem 4.1.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ $\tilde{M}$ nin bir half-lightlike altmanifoldu ve v de $\tilde{M}$ üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda $v^\top$ potential

vektör alanı ile $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci solitondur ancak ve ancak her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X, Y) = & -\frac{1}{2}B(X, v^\top)\eta(Y) - \frac{1}{2}B(v^\top, Y)\eta(X) - \frac{f_1}{2}[g(A_N X, Y) + g(A_N Y, X)] \\ & - f_2 g(A_U X, Y) + (\lambda - \varphi)g(X, Y) \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

dir.

İspat: Ricci soliton denklemi (4.1.14) de (4.1.10) yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ de $\tilde{M}$ nun bir half-lightlike altmanifoldu ve v de $\tilde{M}$ üzerinde bir concurrent vektör alanı olsun. Bu durumda $v^\top$ potential vektör alanı ile $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci solitondur ancak ve ancak her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X, Y) = & -\frac{1}{2}B(X, v^\top)\eta(Y) - \frac{1}{2}B(v^\top, Y)\eta(X) - \frac{f_1}{2}[g(A_N X, Y) + g(A_N Y, X)] \\ & - f_2 g(A_U X, Y) + (\lambda - 1)g(X, Y) \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

dir.

İspat: Ricci soliton denklemi (4.1.14) de (4.1.11) yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ de $\tilde{M}$ nun bir half-lightlike altmanifoldu ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda $v^\top$ potential vektör alanı ile $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci solitondur ancak ve ancak her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - \varphi)g(X, Y) \quad (4.1.17)$$

dir. Bir başka ifade ile $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci solitondur ancak ve ancak M bir Einstein half-lightlike altmanifolddur.

İspat: Ricci soliton denklemi (4.1.14) de (4.1.12) yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.5. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ de $\tilde{M}$ nun bir half-lightlike altmanifoldu ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concurrent vektör alanı olsun. Bu durumda $v^\top$ potential vektör alanı ile $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci solitondur ancak ve ancak her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - 1)g(X, Y) \quad (4.1.18)$$

dir. Bir başka ifade ile $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci solitondur ancak ve ancak M bir Einstein half-lightlike altmanifolddur. Ayrıca eğer $(M, g, v^\top, \lambda)$ solitonu durağan (steady) ise M nin Ricci eğriliği negatif tanımlıdır.

İspat: Ricci soliton denklemi (4.1.14) de (4.1.13) yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Bu son dört teoremden aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 4.1.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ $\tilde{M}$ nin bir total geodezik half-lightlike altmanifoldu ve v de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Eğer (M, g, v, λ) bir Ricci soliton ise her $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X, Y) = & -\frac{f_1}{2}[g(A_N X, Y) + g(A_N Y, X)] \\ & - f_2 g(A_U X, Y) + (\lambda - \varphi) g(X, Y) \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

dir.

Sonuç 4.1.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ $\tilde{M}$ nin bir total geodezik half-lightlike altmanifoldu ve v de M üzerinde bir concurrent vektör alanı olsun. Eğer (M, g, v, λ) bir Ricci soliton ise her $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X, Y) = & -\frac{f_1}{2}[g(A_N X, Y) + g(A_N Y, X)] \\ & - f_2 g(A_U X, Y) + (\lambda - 1) g(X, Y) \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

dir.

Sonuç 4.1.3. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ $\tilde{M}$ nin bir irrasyonel half-lightlike altmanifoldu ve $v = \xi$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Eğer (M, g, v, λ) bir Ricci soliton ise her $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için

$$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - \varphi) g(X, Y) \quad (4.1.21)$$

dir.

Sonuç 4.1.4. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ $\tilde{M}$ nin bir irrasyonel half-lightlike altmanifoldu ve $v = \xi$ de M üzerinde bir concurrent vektör alanı olsun. Eğer (M, g, v, λ) bir Ricci soliton ise her $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için

$$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - 1) g(X, Y) \quad (4.1.22)$$

dir.

Örnek 4.1.1. 5-boyutlu yarı-Öklid uzayı $\mathbb{R}_2^5$ nin işareti $(-, -, +, +, +)$ olmak üzere bir altmanifoldu M ,

$$x_4 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x_3 = (1 - x_5^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x_5, x_1, x_2 > 0$$

ile tanımlansın. Altmanifoldun yer vektörü

$$\left(x_1, x_2, (1 - x_5^2)^{\frac{1}{2}}, (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}, x_5\right)$$

dir. Buna göre M nin tanjant demeti

$$X_1 = x_4 \partial x_1 + x_1 \partial x_4$$

$$X_2 = x_4 \partial x_2 + x_2 \partial x_4$$

$$X_3 = -x_5 \partial x_3 + x_3 \partial x_5$$

vektör alanları tarafından gerilir. Ayrıca

$$\xi = x_1 X_1 + x_2 X_2 = x_1 \partial x_1 + x_2 \partial x_2 + x_4 \partial x_4 \quad (4.1.23)$$

olmak üzere $g(\xi, \xi) = 0$ ve $g(\xi, X_i) = 0, i = 1, 2, 3$, dir, yani ξ bir dejenere vektördür. Böylece $V = (0, 1, 0, 0, 0)$ olmak üzere

$$N = \frac{1}{g(\xi, V)} \left\{ V - \frac{g(V, V)}{2g(V, \xi)} \xi \right\}$$

formülünden

$$N = \frac{1}{2x_2^2} (x_1, -x_2, 0, x_4, 0) = \frac{1}{2x_2^2} \{x_1 \partial x_1 - x_2 \partial x_2 + x_4 \partial x_4\}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$Rad(TM) = Sp\{\xi = x_1 \partial x_1 + x_2 \partial x_2 + x_4 \partial x_4\},$$

$$S(TM) = Sp\{X_1 = x_4 \partial x_1 + x_1 \partial x_4, X_2 = -x_5 \partial x_3 + x_3 \partial x_5\},$$

$$ltr(TM) = Sp\left\{N = \frac{1}{2x_2^2} \{x_1 \partial x_1 - x_2 \partial x_2 + x_4 \partial x_4\}\right\}$$

dir ve $U = x_3 \partial x_3 + x_5 \partial x_5$ olmak üzere

$$g(\xi, U) = 0, g(N, U) = 0, g(U, U) \neq 0$$

olur. Buradan

$$\mathcal{D} = Sp\{U = x_3 \partial x_3 + x_5 \partial x_5\}$$

elde edilir. Böylece $(M, g, S(TM))$ bir half-lightlike alt manifolddur ve

$$\tilde{\nabla}_{X_1} \xi = X_1, \quad \tilde{\nabla}_{X_2} \xi = 0, \quad \tilde{\nabla}_\xi \xi = 0 \quad (4.1.24)$$

olarak bulunur. Bu da gösterir ki ξ concircular vektör alanıdır. Ayrıca

$$B(X_1, \xi) = g(A_{\xi^*} X_1, \xi)$$

$$\nabla_{X_1} \xi = -A_{\xi^*} X_1 - \rho_1(X_1) \xi \text{ ve } \rho_1(X_1) = \bar{g}(\nabla_{X_1} N, \xi) = 0$$

olduğundan (4.1.24) yardımıyla

$$A_{\xi^*} X_1 = -X_1$$

olduğu görülür. Buradan

$$B(X_1, \xi) = g(-X_1, \xi) = 0$$

elde edilir. Benzer hesaplamalar yardımıyla

$$B(X_2, \xi) = B(X_1, X_2) = B(X_2, X_2) = 0, \quad B(X_1, X_1) = X_2^2$$

hesaplanır.

$$C(X_1, \xi) = g(A_N X_1, \xi)$$

$$\tilde{\nabla}_{X_1} N = -A_N X_1 + \rho_1(X_1) N + \rho_2(X_1) U, \quad \rho_1(X_1) = 0, \quad \rho_2(X_1) = 0$$

kullanılarak

$$A_N X_1 = -\frac{1}{2x_2^2} (x_4 \partial x_1 + x_1 \partial x_4)$$

bulunur. Yani

$$C(X_1, \xi) = 0$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$C(X_2, \xi) = C(X_1, X_2) = C(X_2, X_2) = 0, \quad C(X_1, X_1) = -\frac{1}{2}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} D(X_1, \xi) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X_1} \xi, U) \\ &= \tilde{g}(X_1, U) \end{aligned}$$

$$D(X_1, \xi) = 0$$

dır buradan

$$D(X_2, \xi) = D(X_1, X_2) = D(X_1, X_1) = 0, \quad D(X_2, X_2) = 1$$

elde edilir. (2.2.54) den

$$R^{(0,2)}(X_1, X_1) = R^{(0,2)}(X_2, X_2) = R^{(0,2)}(X_1, X_2) = 0$$

bulunur. φ , M üzerinde bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere $v = \varphi (\xi + U)$ ve $v^\top = \varphi \xi$ olmak üzere v bir concircular vektör alanıdır. Böylece $(M, g, v^\top, \lambda)$, $\lambda = 1$ ile bir daralan (shrinking) Ricci solitondur.

$(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ bir yarı-Riemann uzay form ve $(M, g, S(TM))$ de ek boyutu 2 olan bir total umbilik half-lightlike altmanifold olmak üzere M nin Riemann eğrilik tensörü

$$R(X, Y)Z = c \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} + H_1 \{g(Y, Z)A_N X - g(X, Z)A_N Y\} + H_2 \{g(Y, Z)A_U X - g(X, Z)A_U Y\} \quad (4.1.25)$$

dir [18]. Buna göre half-lightlike altmanifoldlar için aşağıdaki teoremlere sahip oluruz.

Teorem 4.1.6. $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ bir yarı-Riemann uzay form, $(M, g, S(TM))$ bir total umbilik half-lightlike altmanifold ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci solitondur ancak ve ancak

$$\lambda = c + \varphi + H_1 i z A_N + H_2 i z A_U \quad (4.1.26)$$

dir ve $\lambda = c + \varphi + H_1 i z A_N + H_2 i z A_U$ bir reel sabittir.

İspat: $S(TM)$ nin bir ortonormal çatısı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. (2.2.55) ve (4.1.25) den $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için

$$R^{(0,2)}(e_i, e_i) = c + H_1 i z A_N + H_2 i z A_U$$

elde edilir. (4.1.21) kullanılarak (4.1.26) elde edilir.

Teorem 4.1.7. $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ bir yarı-Riemann uzay form, $(M, g, S(TM))$ bir total umbilik half-lightlike altmanifold ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concurrent vektör alanı olsun. Bu durumda $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci solitondur ancak ve ancak

$$\lambda = c + 1 + H_1 i z A_N + H_2 i z A_U$$

dir.

4.2 Coisotropic Lightlike Alt Manifoldlar Üzerinde Ricci Solitonlar

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$, $\tilde{M}$ nın ek boyutu 2 bir coisotropic altmanifoldu olsun. İlk önce M üzerinde g nin Lie türevini hesaplayalım. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için (2.2.63) den

$$\begin{aligned} (L_Z g)(X, Y) &= Zg(X, Y) - g([Z, X], Y) - g([Z, Y], X) \\ &= Zg(X, Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_Z Y, X) \\ &\quad + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) \\ (L_Z g)(X, Y) &= D_1(Z, X)\eta_1(Y) + D_2(Z, X)\eta_2(Y) \\ &\quad + D_1(Z, Y)\eta_1(X) + D_2(Z, Y)\eta_2(X) \\ &\quad + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

veya

$$(L_Z g)(X, Y) = (\nabla_Z g)(X, Y) + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) \quad (4.2.2)$$

olarak elde edilir, burada $\eta_1(X) = \tilde{g}(X, N_1)$ ve $\eta_2(X) = \tilde{g}(X, N_2)$ dir.

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$, $\tilde{M}$ nın bir coisotropic altmanifoldu olsun. Herhangi bir $v \in \Gamma(T\tilde{M})$ vektör alanı

$$v = v^\top + f_1 N_1 + f_2 N_2$$

olarak yazılır, burada $v^\top \in \Gamma(TM)$ ve $f_1, f_2, \tilde{M}$ üzerinde $f_1 = g(v, \xi_1)$ ve $f_2 = g(v, \xi_2)$ şeklinde tanımlı diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

Önerme 4.2.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\tilde{M}$ nın bir coisotropic alt manifoldu $(M, g, S(TM))$ olsun. Eğer $v = v^\top + f_1 N_1 + f_2 N_2$ vektör alanı $\tilde{M}$ üzerinde bir concircular vektör alanı ise

$$\nabla_X v^\top = \varphi X + f_1 A_{N_1} X + f_2 A_{N_2} X, \quad (4.2.3)$$

$$D_1(X, v^\top) = -X[f_1] - f_1 \rho_{11}(X) - f_2 \rho_{21}(X), \quad (4.2.4)$$

$$D_2(X, v^\top) = -X[f_2] - f_1 \rho_{12}(X) - f_2 \rho_{22}(X) \quad (4.2.5)$$

dir.

İspat: $v \in \Gamma(T\tilde{M})$ bir concircular vektör alanı ise

$$\tilde{\nabla}_X v = \varphi X = \tilde{\nabla}_X v^\top + \tilde{\nabla}_X (f_1 N_1) + \tilde{\nabla}_X (f_2 N_2)$$

olur. (2.2.58) ve (2.2.59) den

$$\begin{aligned} \varphi X &= \nabla_X v^\top + D_1(X, v^\top) N_1 + D_2(X, v^\top) N_2 \\ &+ X[f_1] N_1 + f_1 \left(-A_{N_1} X + \sum_{l=1}^2 \rho_{1l}(X) N_l \right) \\ &+ X[f_2] N_2 + f_2 \left(-A_{N_2} X + \sum_{l=1}^2 \rho_{2l}(X) N_l \right) \\ \varphi X &= \nabla_X v^\top + D_1(X, v^\top) N_1 + D_2(X, v^\top) N_2 \\ &+ X[f_1] N_1 - f_1 A_{N_1} X + f_1 \rho_{11}(X) N_1 + f_1 \rho_{12}(X) N_2 \\ &+ X[f_2] N_2 - f_2 A_{N_2} X + f_2 \rho_{21}(X) N_1 + f_2 \rho_{22}(X) N_2 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

olduğu görülür. Bu son denklem teğet ve transversal kısımlarına ayrıştırılırsa (4.1.5), (4.1.6) ve (4.1.7) kullanılarak (4.2.3), (4.2.4) ve (4.2.5) eşitliklerinin sağlandığı görülür.

Concircular vektör alanında $\varphi = 1$ olması durumunda v concurrent vektör alanı olur ve bu durumda aşağıdaki önermeye sahip oluruz.

Önerme 4.2.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\tilde{M}$ nin bir coisotropic alt amanifoldu $(M, g, S(TM))$ olsun. Eğer $v = v^\top + f_1 N_1 + f_2 N_2$ vektör alanı $\tilde{M}$ üzerinde bir concurrent vektör alanı ise

$$\nabla_X v^\top = X + f_1 A_{N_1} X + f_2 A_{N_2} X$$

dir.

$v = v^\top$ özel durumu için aşağıdaki önermeye sahip oluruz.

Önerme 4.2.3. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\tilde{M}$ nin bir coisotropic alt amanifoldu $(M, g, S(TM))$ olsun. Eğer $v = v^\top$ vektör alanı M üzerinde concircular veya concurrent vektör alanı ise

$$D_1(X, v^\top) = D_2(X, v^\top) = 0 \quad (4.2.7)$$

dır.

Teorem 4.2.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\tilde{M}$ nin bir coisotropic alt amanifoldu $(M, g, S(TM))$ olsun. Eğer $v = v^\top$ vektör alanı M üzerinde concircular veya concurrent vektör alanı ise indirgenmiş metrik $g, v^\top$ ye göre paralaldır. yani $\nabla_{v^\top} g = 0$ dir.

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\tilde{M}$ nin bir coisotropic alt amanifoldu $(M, g, S(TM))$ olsun. $v = v^\top + f_1 N_1 + f_2 N_2$ vektör alanı $\tilde{M}$ üzerinde bir concircular vektör alanı ise, (4.2.1) ve (4.2.3) kullanılarak her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} (L_{v^\top} g)(X, Y) &= D_1(v^\top, Y) \eta_1(X) + D_1(v^\top, X) \eta_1(Y) \\ &\quad + D_2(v^\top, Y) \eta_2(X) + D_2(v^\top, X) \eta_2(Y) \\ &\quad + g(\nabla_X v^\top, Y) + g(\nabla_Y v^\top, X) \\ (L_{v^\top} g)(X, Y) &= D_1(v^\top, Y) \eta_1(X) + D_1(v^\top, X) \eta_1(Y) \\ &\quad + D_2(v^\top, Y) \eta_2(X) + D_2(v^\top, X) \eta_2(Y) \\ &\quad + 2g(\varphi X, Y) + f_1 g(A_{N_1} X, Y) + f_2 g(A_{N_2} X, Y) \\ &\quad + f_1 g(A_{N_1} Y, X) + f_2 g(A_{N_2} Y, X) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

elde edilir. $S(TM)$ nin integrallenebilir olması durumunda $A_{N_i}, i = 1, 2$, şekil operatörleri self adjoint olduğundan

$$\begin{aligned} (L_{v^\top} g)(X, Y) &= D_1(v^\top, Y) \eta_1(X) + D_1(v^\top, X) \eta_1(Y) \\ &\quad + D_2(v^\top, Y) \eta_2(X) + D_2(v^\top, X) \eta_2(Y) \\ &\quad + 2g(\varphi X, Y) + 2[f_1 g(A_{N_1} X, Y) + f_2 g(A_{N_2} X, Y)] \end{aligned}$$

olur. Eğer v concurrent vektör alanı ise

$$\begin{aligned} (L_{v^\top} g)(X, Y) &= D_1(v^\top, Y) \eta_1(X) + D_1(v^\top, X) \eta_1(Y) \\ &\quad + D_2(v^\top, Y) \eta_2(X) + D_2(v^\top, X) \eta_2(Y) \\ &\quad + 2g(X, Y) + 2[f_1 g(A_{N_1} X, Y) + f_2 g(A_{N_2} X, Y)] \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

elde edilir. $v \in \Gamma(TM)$ olmak üzere, yani concircular vektör alanı $v = v^\top$, M üzerinde ise

$$(L_{v^\top} g)(X, Y) = 2\varphi g(X, Y) \quad (4.2.10)$$

dir. Eğer $v = v^\top$ concurrent vektör alanı ise

$$(L_{v^\top} g)(X, Y) = 2g(X, Y) \quad (4.2.11)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.2.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $\tilde{M}$ nin bir coisotropic alt amanifoldu $(M, g, S(TM))$ ve v de $\tilde{M}$ üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda

$(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci solitondur ancak ve ancak her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X, Y) = & \frac{1}{2}[-D_1(v^\top, Y)\eta_1(X) - D_1(v^\top, X)\eta_1(Y) - D_2(v^\top, X)\eta_2(X) \\ & - D_2(v^\top, Y)\eta_2(Y) - 2(f_1g(A_{N_1}X, Y) + f_2(A_{N_2}X, Y))] \\ & + (\lambda - \varphi)g(X, Y) \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

dir.

İspat: Ricci soliton denklemi (3.2.13) de (4.2.8) kullanılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $\tilde{M}$ nin bir coisotropic alt amanifoldu $(M, g, S(TM))$ ve v de $\tilde{M}$ üzerinde bir concurrent vektör alanı olsun. Bu durumda $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci solitondur ancak ve ancak her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X, Y) = & \frac{1}{2}[-D_1(v^\top, Y)\eta_1(X) - D_1(v^\top, X)\eta_1(Y) - D_2(v^\top, X)\eta_2(X) \\ & - D_2(v^\top, Y)\eta_2(Y) - 2(f_1g(A_{N_1}X, Y) + f_2(A_{N_2}X, Y))] \\ & + (\lambda - 1)g(X, Y) \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

dir.

İspat: Ricci soliton denklemi (3.2.13) de (4.2.9) kullanılır ise ispat tamamlanır.

Üstteki bu teoremler kullanılarak v vektör alanının özel durumları için aşağıdaki teoremleri ve sonuçları elde ederiz.

Teorem 4.2.4. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $\tilde{M}$ nin bir coisotropic alt amanifoldu $(M, g, S(TM))$ ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci solitondur ancak ve ancak her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - \varphi)g(X, Y) \quad (4.2.14)$$

dir.

Teorem 4.2.5. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $\tilde{M}$ nin bir coisotropic alt amanifoldu $(M, g, S(TM))$ ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concurrent vektör alanı olsun. Bu durumda $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci solitondur ancak ve ancak her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - 1)g(X, Y) \quad (4.2.15)$$

dir, yani M bir Einstein lightlike altmanifolddur. Ayrıca eğer soliton durağan (steady) ise $(M, g, S(TM))$ nin Ricci eğriliği negatif tanımlıdır.

Sonuç 4.2.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ bir total geodezik coisotropic lightlike alt manifold ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Eğer $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci soliton ise

$$R^{(0,2)}(X, Y) = f_1 g(A_{N_1} X, Y) + f_2 g(A_{N_2} X, Y) + (\lambda - \varphi) g(X, Y)$$

dir.

Sonuç 4.2.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ bir total geodezik coisotropic lightlike alt manifold ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concurrent vektör alanı olsun. Eğer $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci soliton ise

$$R^{(0,2)}(X, Y) = f_1 g(A_{N_1} X, Y) + f_2 g(A_{N_2} X, Y) + (\lambda - 1) g(X, Y)$$

dir.

Örnek 4.2.1. $(-, -, -, +, +, +)$ işaretli yarı-Öklid uzayı $\mathbb{R}_3^6$ da bir M altmanifoldu

$$x_4 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x_3 = (x_5^2 + x_6^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$$

ile verisin. Bu durumda M nin yer vektörü

$$(x_1, x_2, (x_5^2 + x_6^2)^{\frac{1}{2}}, (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}, x_5, x_6)$$

dir. Buna göre M nin tanjant demeti TM

$$U_1 = \left(1, 0, 0, \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}, 0, 0 \right) \approx x_4 \partial x_1 + x_1 \partial x_4,$$

$$U_2 = \left(0, 1, 0, \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}, 0, 0 \right) \approx x_4 \partial x_2 + x_2 \partial x_4,$$

$$U_3 = \left(0, 0, \frac{x_5}{(x_5^2 + x_6^2)^{\frac{1}{2}}}, 0, 1, 0 \right) \approx x_5 \partial x_3 + x_3 \partial x_5,$$

$$U_4 = \left(0, 0, \frac{x_6}{(x_5^2 + x_6^2)^{\frac{1}{2}}}, 0, 0, 1 \right) \approx x_6 \partial x_3 + x_3 \partial x_6$$

vektör alanları tarafından gerilir. Ayrıca

$$\xi_1 = \frac{x_1}{x_4} U_1 + \frac{x_2}{x_4} U_2 = x_1 \partial x_1 + x_2 \partial x_2 + x_4 \partial x_4,$$

ve

$$\xi_2 = \frac{x_5}{x_3} U_3 + \frac{x_6}{x_3} U_4 = x_3 \partial x_3 + x_5 \partial x_5 + x_6 \partial x_6$$

vektör alanları dejenere vektör alanlarıdır, yani $g(\xi_i, U_j) = 0$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, dir. Böylece M bir coisotropic altmanifolddur ve

$$\text{Rad } TM = \text{Sp}\{\xi_1 = x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4, \xi_2 = x_3\partial x_3 + x_5\partial x_5 + x_6\partial x_6\}$$

$$S(TM) = \text{Sp}\{X_1 = x_4\partial x_1 + x_1\partial x_4, X_2 = x_5\partial x_3 + x_3\partial x_5\}$$

dir. Buna göre lightlike transversal demet

$$\text{ltr}(TM) = \text{Sp}\left\{N_1 = \frac{1}{2x_2^2}(x_1\partial x_1 - x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4), N_2 = \frac{1}{2x_5^2}(x_3\partial x_3 - x_5\partial x_5 + x_6\partial x_6)\right\}$$

olarak bulunur. Doğrudan hesaplamalarla

$$\tilde{\nabla}_{X_1}\xi_1 = X_1, \quad \tilde{\nabla}_{X_1}\xi_2 = 0, \quad \tilde{\nabla}_{X_2}\xi_1 = 0, \quad \tilde{\nabla}_{X_2}\xi_2 = X_2$$

$$\tilde{\nabla}_{\xi_1}\xi_1 = \xi_1, \quad \tilde{\nabla}_{\xi_1}\xi_2 = 0, \quad \tilde{\nabla}_{\xi_2}\xi_1 = 0, \quad \tilde{\nabla}_{\xi_2}\xi_2 = \xi_2$$

$$\tilde{\nabla}_{\xi_1}N_1 = N_1, \quad \tilde{\nabla}_{\xi_1}N_2 = 0, \quad \tilde{\nabla}_{\xi_2}N_1 = 0, \quad \tilde{\nabla}_{\xi_2}N_2 = N_2$$

elde edilir. (2.2.58) – (2.2.61) eşitliklerinden

$$D_1(\xi_1, \xi_1) = D_2(\xi_2, \xi_2) = D_1(\xi_1, \xi_2) = 0$$

bulunur. Bunlar kullanılacak olursa $R^{(0,2)}(X, Y) = 0$ olur. φ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere $v = \varphi(\xi_1 + \xi_2)$ olarak alınırsa $v = v^\top$ dir ve Buradan $(M, g, v^\top, \lambda)$, $\lambda = 1$ ile bir daralan (shrinking) Ricci solitondur.

Örnek 4.2.2. $(-, -, +, +, +)$ işaretli yarı-Öklid uzayı $\mathbb{R}_2^5$ de bir M alt manifoldu

$$M = \{u^2, u^2w, u^2 \cos v, u^2 \sin v, u^2w : v \in [0, 2\pi), u, w \in \mathbb{R}\}$$

olarak verilsin. Bu durumda TM ,

$$U_1 = (2u, 2uw, 2u \cos v, 2u \sin v, 2uw)$$

$$U_2 = (0, 0, -u^2 \sin v, u^2 \cos v, 0)$$

$$U_3 = (0, u^2, 0, 0, u^2)$$

vektörleri tarafından gerilir ve U_1, U_3 vektör alanları dejenere vektör alanlarıdır. Böylece

$$\text{Rad}(TM) = \text{Sp}\{\xi_1 = 2u(\partial x_1 + w\partial x_2 + \cos v\partial x_3 + \sin v\partial x_4 + w\partial x_5), \xi_2 = u^2(\partial x_2 + \partial x_5)\}$$

$$S(TM) = \text{Sp}\{X_1 = u^2(-\sin v\partial x_3 + \cos v\partial x_4)\}$$

$$ltr(TM) = Sp \left\{ N_1 = \frac{1}{2u} (-\partial x_1 + w\partial x_2 + \cos v\partial x_3 + \sin v\partial x_4 + w\partial x_5), N_2 = \frac{1}{2u^2} (-\partial x_2 + \partial x_5) \right\}$$

olarak bulunur ve $(M, g, S(TM))$ lightlike alt manifoldu $\mathbb{R}_2^5$ de bir coisotropic altmanifolddur.

Ayrıca doğrudan hesaplamalar yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_{X_1} \xi_1 = \frac{2}{u} X_1, \quad \tilde{\nabla}_{\xi_2} \xi_1 = \frac{2}{u} \xi_2, \quad \tilde{\nabla}_{\xi_1} \xi_1 = \frac{2}{u} \xi_1$$

dir ve buna göre ξ_1 vektör alanı M üzerinde bir concircular vektör alanıdır. ξ_1 doğrultusunda g nin Lie türevi

$$(L_{\xi_1} g)(X_1, X_1) = 2u^2$$

olarak bulunur. Riemann eğrilik tensörü ise

$$R(X_1, \xi_1) X_1 = X_1, \quad R(X_1, \xi_2) X_1 = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu hesaplamalardan $R^{(0,2)}(X, Y) = 0$ olur. Buradan görülür ki $\lambda = \frac{2}{u^2}$ ile $(M, g, v^\top, \lambda)$ hemen hemen Ricci solitondur, yani bu örnekte λ sabit değildir.

Şimdi [32] de Teorem 3.1 olarak verilen teoremi hatırlatalım ve bu teremden faydalanarak teorem ve sonuçları verelim.

Teorem 4.2.6. $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ bir yarı-Riemann uzay form ve $\tilde{M}(c)$ nin total umbilik lightlike alt manifoldu $(M, g, S(TM))$ olmak üzere M nin eğrilik tensörü

$$R(X, Y)Z = c \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} + \sum_{i=1}^2 [H_i \{g(Y, Z)A_{N_i}X - g(X, Z)A_{N_i}Y\}] \quad (4.2.16)$$

ile verilir, burada $H = H_1N + H_2U$ dir [32].

Teorem 4.2.7. $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ bir yarı-Riemann uzay form, $\tilde{M}(c)$ nin total umbilik lightlike alt manifoldu $(M, g, S(TM))$ ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci solitondur ancak ve ancak

$$\lambda = c + \varphi + H_i i z A_{N_i} \quad (4.2.17)$$

dır.

İspat: $\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal çatısı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. (2.2.65) ve (4.2.16) denklemlerinden, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ için,

$$R^{(0,2)}(e_j, e_j) = c + \sum_{i=1}^2 H_i i z A_{N_i} \quad (4.2.18)$$

elde edilir. (4.2.14) ve (4.2.18) den ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.8. $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ bir yarı-Riemann uzay form, $\tilde{M}(c)$ nin total umbilik lightlike alt manifoldu $(M, g, S(TM))$ ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concurrent vektör alanı olsun. Buna göre $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci solitondur ancak ve ancak

$$\lambda = c + 1 + \sum_{i=1}^2 H_i i_z A_{N_i} \quad (4.2.19)$$

dır.

4.3 r -Lightlike Altmanifoldlar Üzerinde Ricci Solitonlar

$(\tilde{M}, \tilde{g})$, $(m+n)$ -boyutlu bir yarı-Riemann manifold ve $\tilde{M}$ nin bir r -lightlike, m -boyutlu altmanifoldu $(M, g, S(TM))$ ve M boyunca $T\tilde{M}$ bir quasi-ortonormal çatısı $\{\xi_1, \dots, \xi_r, e_{r+1}, \dots, e_m, N_1, \dots, N_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ olsun. Bu durumda $\tilde{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ nin bir metrik konneksiyon olduğu gözönüne alınır, her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned} Zg(X, Y) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Z X, Y) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Z Y, X) \\ &= g(\nabla_Z X, Y) + g(\nabla_Z Y, X) + \sum_{i=1}^r h_i^l(X, Z) \eta_i(Y) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r h_i^l(Y, Z) \eta_i(X) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

olarak ifade edilir. Buna göre g nin Lie türevi,

$$\begin{aligned} (L_Z g)(X, Y) &= Zg(X, Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_Z Y, X) \\ &\quad + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

olduğundan, (4.3.2) eşitliğinde (4.3.1) yerine yazılırsa

$$(L_Z g)(X, Y) = \sum_{i=1}^r h_i^l(X, Z) \eta_i(Y) + \sum_{i=1}^r h_i^l(Y, Z) \eta_i(X) + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) \quad (4.3.3)$$

elde edilir.

Şimdi $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $\tilde{M}$ nin bir r -lightlike altmanifoldu $(M, g, S(TM))$ ve $\tilde{M}$ üzerinde bir vektör alanı v olsun. Transversal demet $tr(TM)$ nin bir bazı $\{N_1, \dots, N_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ olmak üzere

$$v = v^\top + \sum_{i=1}^r f_i N_i + \sum_{\alpha=r+1}^n \rho_\alpha u_\alpha \quad (4.3.4)$$

olarak yazılabilir, burada $i \in \{1, \dots, r\}$ ve $\alpha \in \{r+1, \dots, n\}$ için f_l ve ρ_α diferensiyellenebilir fonksiyonlardır ve (4.3.4) ile görülür ki

$$f_i = \tilde{g}(v, \xi_i) \quad \text{ve} \quad \rho_\alpha = \tilde{g}(v, u_\alpha) \quad (4.3.5)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 4.3.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $(M, g, S(TM))$ bir r -lightlike altmanifold olsun. Eğer v , $\tilde{M}$ üzerinde bir concircular vektör alanı ise

$$\nabla_X v^\top = \varphi X + \sum_{i=1}^r f_i A_{N_i} X + \sum_{\alpha=r+1}^n \rho_\alpha A_{u_\alpha}, \quad (4.3.6)$$

$$B^l(X, v^\top) = -\tilde{\nabla}_X f_l - \sum_{s=1}^r f_l \gamma_{ls}(X) - \sum_{\alpha=r+1}^n \rho_\alpha \theta'_{\alpha l}(X), \quad (4.3.7)$$

$$D^\alpha(X, v^\top) = -\tilde{\nabla}_X \rho_\alpha \theta_{\alpha\beta}(X) - \sum_{l=1}^r f_l \gamma'_{l\alpha}(X) \quad (4.3.8)$$

dir.

İspat: v bir concircular vektör alanı ise

$$\tilde{\nabla}_X v = \varphi X = \tilde{\nabla}_X v^\top + \tilde{\nabla}_X \left(\sum_{i=1}^r f_i N_i \right) + \tilde{\nabla}_X \left(\sum_{\alpha=r+1}^n \rho_\alpha u_\alpha \right)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \varphi X &= \nabla_X v^\top + \sum_{i=1}^r h_i^l(X, v^\top) N_i + \sum_{\alpha=r+1}^n D_\alpha^s(X, v^\top) u_\alpha \\ &+ \sum_{i=1}^r (\tilde{\nabla}_X f_i) N_i + \sum_{\alpha=r+1}^n (\tilde{\nabla}_X \rho_\alpha) u_\alpha \\ &- \sum_{i=1}^r f_i A_{N_i} X + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r f_i \gamma_{ij}(X) N_j + \sum_{l=1}^r f_l \sum_{\alpha=r+1}^n \gamma'_{l\alpha}(X) u_\alpha \\ &- \sum_{\alpha=r+1}^n \rho_\alpha A_{u_\alpha} X + \sum_{\alpha=r+1}^n \rho_\alpha \sum_{i=1}^r \theta_{\alpha i}(X) N_i + \sum_{\alpha=r+1}^n \rho_\alpha \sum_{\beta=r+1}^n \theta'_{\alpha\beta}(X) u_\beta \end{aligned}$$

dir. Bu son ifade teğet ve transversal kısımlarına ayrıştırılır ise (4.3.6), (4.3.7) ve (4.3.8) elde edilir.

Eğer $(M, g, S(TM))$ bir coisotropic altmanifold ise bu durumda v vektör alanı

$$v = v^\top + \sum_{i=1}^r f_i N_i \quad (4.3.9)$$

olarak yazılır. Buradan da aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 4.3.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $(M, g, S(TM))$ de bir coisotropic altmanifold olsun. Eğer v bir concircular vektör alanı ise

$$\nabla_X v^\top = \varphi X + \sum_{i=1}^r f_i A_{N_i} X, \quad (4.3.10)$$

$$h_i^l(X, v^\top) = -\tilde{\nabla}_X f_i - \sum_{s=1}^r f_i \gamma_{is}(X), \quad i \in \{1, \dots, r\} \quad (4.3.11)$$

dir.

Özel olarak $v = v^\top$ olması durumunda Önerme 4.3.2 dan aşağıdaki önermeler ve sonuca sahip oluruz.

Önerme 4.3.3. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $(M, g, S(TM))$ r -lightlike altmanifoldu için $v = v^\top$, M üzerinde bir concircular vektör alanı ise, $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X v^\top = \varphi X \quad (4.3.12)$$

ve

$$h_i^l(X, v^\top) = 0, \quad D_\alpha^s(X, v^\top) = 0 \quad (4.3.13)$$

elde edilir, burada $i \in \{1, \dots, r\}$ ve $\alpha \in \{r+1, \dots, n\}$ dir.

Sonuç 4.3.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $(M, g, S(TM))$ r -lightlike altmanifoldu için $v = v^\top$, M üzerinde bir concircular vektör alanı ise ∇ indirgenmiş konneksiyona göre de v bir concircular vektör alanıdır.

Önerme 4.3.4. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ bir coisotropic altmanifold ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(TM)$ ve $i \in \{1, \dots, r\}$ için

$$\nabla_X v^\top = \varphi X \quad \text{ve} \quad h_i^l(X, v^\top) = 0 \quad (4.3.14)$$

dır.

Örnek 4.3.1. İşareti $(-, -, +, +, -, -, +, +)$ olmak üzere $\mathbb{R}_4^8$ yarı-Öklid uzayında bir M alt manifoldu

$$x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x_4 = \sqrt{x_5^2 + x_6^2}, \quad x_7 = x_8 = 0$$

ile tanımlansın. Bu durumda M nin yer vektörü

$$\left(x_1, x_2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \sqrt{x_5^2 + x_6^2}, x_5, x_6, x_7, x_8 \right)$$

dir. Buna göre M nin tanjant demeti TM

$$\begin{aligned} U_1 &= \left(1, 0, \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, 0, 0, 0, 0, 0 \right) \approx (x_3, 0, x_1, 0, 0, 0, 0, 0) \\ U_2 &= \left(0, 1, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, 0, 0, 0, 0, 0 \right) \approx (0, x_3, x_2, 0, 0, 0, 0, 0) \\ U_3 &= \left(0, 0, 0, \frac{x_5}{\sqrt{x_5^2 + x_6^2}}, 1, 0, 0, 0 \right) \approx (0, 0, 0, x_5, x_4, 0, 0, 0) \\ U_4 &= \left(0, 0, 0, \frac{x_6}{\sqrt{x_5^2 + x_6^2}}, 0, 1, 0, 0 \right) \approx (0, 0, 0, x_6, 0, x_4, 0, 0) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{x_1}{x_3} U_1 + \frac{x_2}{x_3} U_2 = x_1 \partial x_1 + x_2 \partial x_2 + x_3 \partial x_3 \\ \xi_2 &= \frac{x_5}{x_4} U_3 + \frac{x_6}{x_5} U_4 = x_4 \partial x_4 + x_5 \partial x_5 + x_6 \partial x_6 \end{aligned}$$

vektör alanları dejenere vektör alanlarıdır ve M bir 4-boyutlu lightlike altmanifolddur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \text{Rad}(TM) &= \text{Span} \{ \xi_1 = x_1 \partial x_1 + x_2 \partial x_2 + x_3 \partial x_3, \quad \xi_2 = x_4 \partial x_4 + x_5 \partial x_5 + x_6 \partial x_6 \}, \\ S(TM) &= \text{Sp} \{ X_1 = x_3 \partial x_1 + x_1 \partial x_3, \quad X_2 = x_5 \partial x_4 + x_4 \partial x_5 \}, \\ \text{ltr}(TM) &= \text{Sp} \left\{ N_1 = \frac{1}{2x_3^2} (-x_1 \partial x_1 - x_2 \partial x_2 + x_3 \partial x_3), \quad N_2 = \frac{1}{2x_4^2} (x_4 \partial x_4 - x_5 \partial x_5 - x_6 \partial x_6) \right\}, \\ S(TM^\perp) &= \text{Span} \{ u_1 = \partial x_7, \quad u_2 = \partial x_8 \} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Eğer $v = \xi_1 + \xi_2$ olarak alınırsa bu vektör alanı M üzerinde $\varphi = 1$ olan bir concircular vektör alanıdır.

(4.3.1), (4.3.13) ve (4.3.14) denklemleri gözönüne alınırsa aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.3.1. $(M, g, S(TM))$ manifoldu $v = v^\top$ nin concircular vektör alanı olduğu bir r -lightlike ya da coisotropic lightlike altmanifold olsun. Bu durumda g ile $v^\top$ paraleldir.

Önerme 4.3.5. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $\tilde{M}$ üzerinde v bir concircular vektör alanı ve $(M, g, S(TM))$ de bir r -lightlike altmanifold olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} (L_{v^\top} g)(X, Y) &= \sum_{i=1}^r h_i^l(X, v^\top) \eta_i(Y) + \sum_{l=1}^r h_l^l(Y, v^\top) \eta_l(X) \\ &\quad + 2g(\varphi X, Y) + 2 \sum_{i=1}^r f_i g(A_{N_i} X, Y) \\ &\quad + 2 \sum_{\alpha=r+1}^n \rho_\alpha g(A_{u_\alpha} X, Y) \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

dir. Eğer v concurrent vektör alanı ise

$$\begin{aligned} (L_{v^\top} g)(X, Y) &= \sum_{i=1}^r h_i^l(X, v^\top) \eta_l(Y) + \sum_{i=1}^r h_i^l(Y, v^\top) \eta_i(X) \\ &+ 2g(X, Y) + 2 \sum_{i=1}^r f_i g(A_{N_i} X, Y) \\ &+ 2 \sum_{\alpha=r+1}^n \rho_\alpha g(A_{u_\alpha} X, Y) \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

dir.

İspat: (4.3.6) deki $\nabla_X v^\top$ değeri

$$(L_{v^\top} g)(X, Y) = \sum_{i=1}^r h_i^l(Y, v^\top) v \eta_i(X) + g(\nabla_X v^\top, Y) + g(\nabla_Y v^\top, X)$$

de yerine yazılırsa (4.3.15) elde edilir. Eğer v concurrent vektör alanı ise $\varphi = 1$ olur ve $\varphi = 1$ değeri (4.3.15) de yerine yazılırsa (4.3.16) elde edilir.

Lightlike altmanifoldun coisotropic altmanifold olması durumunda aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 4.3.6. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $\tilde{M}$ üzerinde v bir concircular vektör alanı ve $(M, g, S(TM))$ de bir coisotropic altmanifold olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} (L_{v^\top} g)(X, Y) &= \sum_{i=1}^r h_i^l(X, v^\top) \eta_i(Y) + \sum_{l=1}^r h_i^l(Y, v^\top) \eta_i(X) \\ &+ 2g(\varphi X, Y) + 2 \sum_{i=1}^r f_i g(A_{N_i} X, Y) \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

dir. Eğer v concurrent vektör alanı ise

$$\begin{aligned} (L_{v^\top} g)(X, Y) &= \sum_{i=1}^r h_i^l(X, v^\top) \eta_i(Y) + \sum_{l=1}^r h_i^l(Y, v^\top) \eta_i(X) \\ &+ 2g(X, Y) + 2 \sum_{i=1}^r f_i g(A_{N_i} X, Y) \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

dir.

Bu son iki önermeden aşağıdaki iki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.3.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ bir r -lightlike altmanifold ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} (L_{v^\top} g)(X, Y) &= 2g(\varphi X, Y) + 2 \sum_{i=1}^r f_i g(A_{N_i} X, Y) \\ &+ 2 \sum_{\alpha=r+1}^n \rho_\alpha g(A_{u_\alpha} X, Y) \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

dir. Eğer v bir concurrent vektör alanı ise

$$(L_{v^\top} g)(X, Y) = 2g(X, Y) + 2 \sum_{i=1}^r f_i g(A_{N_i} X, Y) + 2 \sum_{\alpha=r+1}^n \rho_\alpha g(A_{u_\alpha} X, Y) \quad (4.3.20)$$

dir.

Sonuç 4.3.3. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ bir coisotropic altmanifold ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda

$$(L_{v^\top} g)(X, Y) = 2g(\varphi X, Y) + 2 \sum_{i=1}^r f_i g(A_{N_i} X, Y) \quad (4.3.21)$$

dir. Eğer v bir concurrent vektör alanı ise

$$(L_{v^\top} g)(X, Y) = 2g(X, Y) + 2 \sum_{i=1}^r f_i g(A_{N_i} X, Y) \quad (4.3.22)$$

dir.

Teorem 4.3.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $\tilde{M}$ üzerinde v bir concircular vektör alanı ve $(M, g, S(TM))$ de bir r -lightlike altmanifold olsun. Bu durumda $(M, g, v^\top, \lambda)$ nin bir Ricci soliton olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X, Y) = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r h_i^l(X, v^\top) \eta_i(Y) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^r h_i^l(Y, v^\top) \eta_i(X) \\ & + (\lambda - \varphi) g(X, Y) - \sum_{i=1}^r f_i g(A_{N_i} X, Y) \\ & - \sum_{\alpha=r+1}^n \rho_\alpha g(A_{u_\alpha} X, Y) \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

olmasıdır.

İspat: Ricci soliton denklemi (3.2.13) de (4.3.15) kullanılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.3. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $\tilde{M}$ üzerinde v bir concircular vektör alanı ve $(M, g, S(TM))$ de bir coisotropic altmanifold olsun. Bu durumda $(M, g, v^\top, \lambda)$ nin bir Ricci soliton olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X, Y) = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r h_i^l(X, v^\top) \eta_i(Y) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r h_i^l(Y, v^\top) \eta_i(X) \\ & + (\lambda - \varphi) g(X, Y) - \sum_{i=1}^r f_i g(A_{N_i} X, Y) \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

olmasıdır.

İspat: Ricci soliton denklemi (3.2.13) de (4.3.17) kullanılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.4. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ bir r -lightlike altmanifold ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda $(M, g, v^\top, \lambda)$ nin bir Ricci soliton olması için gerek ve yeter şart

$$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - \varphi) g(X, Y) \quad (4.3.25)$$

olmasıdır.

İspat: Ricci soliton denklemi (3.2.13) de (4.3.19) kullanılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.5. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$ bir coisotropic altmanifold ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda $(M, g, v^\top, \lambda)$ nin bir Ricci soliton olması için gerek ve yeter şart

$$R^{(0,2)}(X, Y) = (\lambda - \varphi) g(X, Y) \quad (4.3.26)$$

olmasıdır.

İspat: Ricci soliton denklemi (3.2.13) de (4.3.21) kullanılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.4. $v = v^\top$ nin concircular vektör alanı olduğu her r -lightlike ve concircular lightlike alt manifold bir Einstein manifolddur.

4.4 Rigged Metrikli Lightlike Alt Manifoldlar Üzerinde Bazı Karakterizasyonlar

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $(M, g, S(TM))$ de $\tilde{M}$ nın bir r -lightlike altmanifoldu olsun. Lightlike hiperyüzeylerde olduğu gibi (3.1.3) dekine benzer olarak r -lightlike altmanifold M üzerinde bir non-dejenere $\bar{g}$ metriği tanımlayalım.

Tanım 4.4.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve $(M, g, S(TM))$ de $\tilde{M}$ nın bir r -lightlike altmanifoldu olsun. $(M, g, S(TM))$ bir r -lightlike alt manifold olsun. $(M, g, S(TM))$ manifoldu üzerinde bir $\bar{g}$ metriği, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{g}(X, Y) = g(X, Y) + \sum_{i=1}^r \eta_i(X) \eta_i(Y) \quad (4.4.1)$$

olarak tanımlanan metriğe *rigged metrik* denir.

Bu tanıma göre $Rad TM$ nin bir lightlike çatısı $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ olmak üzere (4.4.1) den

$$\bar{g}(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}, \quad \bar{g}(\xi_i, X) = \eta_i(X), \quad \forall X \in \Gamma(TM), \quad i, j = 1, \dots, r, \quad (4.4.2)$$

ve

$$\bar{g}(X, Y) = g(X, Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(S(TM)) \quad (4.4.3)$$

elde edilir.

Önerme 4.4.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$, $\tilde{M}$ nin bir r -lightlike altmanifoldu ve v de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$X\bar{g}(v, v) = 2g(\varphi X, v) + 2 \sum_{i=1}^r [\eta_i^2(v) - g(A_{N_i}X, v) \eta_i(v)] \quad (4.4.4)$$

dir.

İspat: $X \in \Gamma(TM)$ için (4.4.1) den

$$X\bar{g}(v, v) = X\bar{g}(v, v) + X \left(\sum_{i=1}^r \eta_i^2(v) \right) \quad (4.4.5)$$

yazılabilir. (4.4.5) de (2.2.36) ve (2.2.37) kullanılırsa (4.4.4) ifadesine ulaşılır.

Teorem 4.4.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$, $\tilde{M}$ nin bir r -lightlike altmanifoldu ve v de $S(TM)$ ye ait bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda $\bar{g}$ metriğine göre v nin boyu sabit olamaz.

İspat: Kabul edelim ki $\bar{g}$ metriğine göre v nin normu sabit olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(S(TM))$ için

$$X\bar{g}(v, v) = g(\varphi X, v) = 0$$

elde edilir. Bu da gösterir ki $v \in \Gamma(Rad(TM))$ ve $v \in \Gamma(S(TM))$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.4.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$, $\tilde{M}$ nin bir r -lightlike altmanifoldu ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} Y\bar{g}(X, v) &= g(\nabla_Y^* X, v) + g(X, \varphi Y) + \sum_{i=1}^r h_i^l(Y, X) \eta_i(v) \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r [\gamma_{ij}(Y) \eta_i(v) \eta_j(v) + \varphi \eta_i(Y) \\ &- g(A_{N_i}Y, v) + \gamma_{ij}(Y) \eta_i(v)] \eta_i(X) \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

dir.

İspat: (4.4.1) den

$$Y\bar{g}(X, v) = Yg(X, v) + Y \left[\sum_{l=1}^r \eta_l(X) \eta_l(v) \right] \quad (4.4.7)$$

olur. (2.2.36) ve (2.2.37) ifadeleri (4.4.7) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} Y\bar{g}(X, v) &= g(\nabla_Y X, v) + \sum_{i=1}^r h_i^l(Y, X) \eta_i(v) + g(X, \tilde{\nabla}_Y v) \\ &+ \sum_{i=1}^r \left[g(\nabla_Y X, N_i) - g(A_{N_i} Y, X) + \sum_{j=1}^r \gamma_{ij}(Y) \eta_j(X) \right] \eta_i(v) \\ &+ \sum_{i=1}^r \left[g(\tilde{\nabla}_Y v, N_i) - g(A_{N_i} Y, v) + \sum_{j=1}^r \gamma_{ij}(Y) \eta_j(v) \right] \eta_i(X) \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

bulunur. v nin concircular vektör alanı olduğu gözönüne alınır ve (2.2.39), (2.2.40) eşitlikleri (4.4.8) da yerine yazılırsa (4.4.6) elde edilir.

Teorem 4.4.2. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$, $\tilde{M}$ nin bir r -lightlike altmanifoldu ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. $S(TM)$ nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $v^\top \in \Gamma(Rad(TM))$ olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $v \in \Gamma(Rad(TM))$ ve $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ olsun. Bu durumda (4.4.6) eşitliğinden

$$Y\bar{g}(X, v) = g(\nabla_Y^* X, v) + g(X, \varphi Y) + \sum_{i=1}^r h_i^l(Y, X) \eta_i(v) \quad (4.4.9)$$

olduğu görülür. X ve Y nin (4.4.9) da rolleri değiştirilirse

$$X\bar{g}(Y, v) = g(\nabla_Y^* X, v) + g(Y, \varphi X) + \sum_{i=1}^r h_i^l(X, Y) \eta_i(v) \quad (4.4.10)$$

olarak yazılır. (4.4.9) ve (4.4.10) in farkları alınır

$$\bar{g}([Y, X], v) = Y\bar{g}(X, v) - X\bar{g}(Y, v) \quad (4.4.11)$$

elde edilir. $v \in \Gamma(Rad(TM))$ ve $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ olduğu göz önüne alınır

$$\bar{g}([Y, X], v) = 0 \quad (4.4.12)$$

bulunur. (4.4.12) eşitliğinden açıkça görülür ki $[Y, X] \in \Gamma(S(TM))$ ve bu da $S(TM)$ nin integrallenebilir olması demektir.

Diğer yandan kabul edelim ki $S(TM)$ integrallenebilir olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için (4.4.11) eşitliğinden

$$Y\bar{g}(X, v) = X\bar{g}(Y, v) \quad (4.4.13)$$

sağlanır. $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için X ile Y lineer bağımlı ve λ bir fonksiyon olmak üzere $Y = \lambda X$ olarak alalım. (4.4.13) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\lambda X \bar{g}(X, v) = X \bar{g}(\lambda X, v)$$

olur. Bu da gösterir ki λ bir sabit fonksiyon ya da $v \in \Gamma(Rad(TM))$ dir. $\Gamma(S(TM))$ de yazılan her $Y = \lambda X$ bir sabit fonksiyon olamayacağından $v \in \Gamma(Rad(TM))$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.3. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$, $\tilde{M}$ nin bir r -lightlike altmanifoldu ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Eğer $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci soliton ise $v \in \Gamma(Rad(TM))$ dir.

İspat: Ricci soliton denklemi (3.2.13) den $R^{(0,2)}$ simetriktir. Teorem 2.2.5 den $S(TM)$ integrallenebilir. Eğer $(M, g, v^\top, \lambda)$ bir Ricci soliton ise Teorem 4.4.2 gözönüne alınırsa $v \in \Gamma(Rad(TM))$ olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Önerme 4.4.3. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$, $\tilde{M}$ nin bir r -lightlike altmanifoldu ve $v = v^\top$ de M üzerinde bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda $k \in \{1, \dots, r\}$ için

$$g(A_{N_k} X, v) = X \bar{g}(\xi_k, v) - \varphi \eta_k(Y) - \sum_{l=1}^r \gamma_{kl}(X) \eta_l(v) \quad (4.4.14)$$

dir.

İspat: (4.4.1) ve (4.4.2) den

$$\begin{aligned} Y \bar{g}(\xi_k, v) &= Y \left[\sum_{i=1}^r \eta_i(\xi_k) \eta_i(v) \right] \\ &= Y \bar{g}(v, N_k) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_Y v, N_k) + \bar{g}(v, \bar{\nabla}_Y N_k) \\ &= \varphi \eta_k(Y) - g(A_{N_k} Y, v) + \sum_{i=1}^r \gamma_{ki}(X) \eta_i(v) \end{aligned}$$

elde edilir, böylece ispat tamamlanır.

Özel olarak $v = \xi_k$, $k \in \{1, \dots, r\}$ olmak üzere aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 4.4.4. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir yarı-Riemann manifold, $(M, g, S(TM))$, $\tilde{M}$ nin bir r -lightlike altmanifoldu ve $v \in \Gamma(Rad(TM))$ de bir concircular vektör alanı olsun. Bu durumda

i) $v = \xi_k$ ise $\gamma_{kk} = -1$,

ii) $v = \xi_k$ ise $k \neq \alpha$ için $\gamma_{k\alpha} = 0$ dir.



KAYNAKLAR

- [1] **Poincarè, H.** (1904). Cinquième complément à l'analysis situs, *Rend. Circ. Mat. Palermo, See Oeuvres, Tome VI, Paris, 1953, p. 498., 18, 45–110.*
- [2] **Hamilton, R.S.** (1993). The Harnack estimate for the Ricci flow, *J. Differential Geom.*, 37(1), 225–243.
- [3] **Perelman, G.** (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, *arXiv:math.DG/0211159 v1, 11 November.*
- [4] **Perelman, G.** (2003). Ricci flow with surgery on three-manifolds, *arXiv:math.DG/0303109 v1, 10 March.*
- [5] **Perelman, G.** (2003). Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, *arXiv:math.DG/0307245, 17 July.*
- [6] **Hamilton, R.S.** (1995). The formalation of singularities in the Ricci flow, *In: Surveys in Differential Geometry, Vol. II, 7–136.*
- [7] **Morgan, J.W. ve Tian, G.** *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture*, cilt 5.
- [8] **Chen, B.Y. ve Deshmukh, S.** (2014). Classification of Ricci solitons on Euclidean hypersurfaces, *International Journal of Mathematics*, 25(11).
- [9] **Chen, B.Y. ve Deshmukh, S.** (2014). Geometry of compact shrinking Ricci solitons, *Balkan J. Geom. Appl.*, 19(1), 13–21.
- [10] **Chen, B.Y. ve Deshmukh, S.** (2015). Ricci Solitons and Concurrent Vector Fields, *Balkan Journal of Geometry Its App.*, 29(1), 14–25.
- [11] **Chen, B.Y.** (2016). Conccircular Vector Fields and Pseudo-Kaehler Manifolds, *Kragujevac Journal of Mathematics*, 40(1), 7–14.
- [12] **Chen, B.Y.** (2015). Some results on concircular vector fields and their applications to Ricci solitons, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 52(5), 1535–1547.
- [13] **Ingalahalli, G. ve Bagewadi, C.** (2012). Ricci Solitons in α -Sasakian Manifolds, *ISRN Geometry*, 2012, 1–13.
- [14] **Chen, B.Y.** (2017). Classification Torqued Vector Fields and its Applications to Ricci Solitons, *Kragujevac Journal of Mathematics*.
- [15] **Al-Sodais, H., Alodan, H. ve Deshmukh, S.** (2014). Hypersurfaces of Euclidean Space as Gradient Ricci Solitons, *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat.(NS) DOI, 10.*
- [16] **Duggal, K.L. ve Bejancu, A.** (1996). *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Kluwer Academic Publishers.
- [17] **Duggal, K.L. ve Jin, D.H.** (2007). *Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds*, World Scientific.

- [18] **Duggal, K.L. ve Şahin, B.** (2010). *Differential Geometry of Lightlike Submanifolds*, Birkhauser Verlag AG.
- [19] **Atindogbe, C., E.J. ve Tossa, J.** (2003). Pseudo-inversion of degenerate metrics, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 55, 3479–3501.
- [20] **Gutierrez, M. ve Olea, B.** (2021). Null Hypersurfaces and the Rigged Metric, *Developments in Lorentzian Geometry, Conference paper*, 129–142.
- [21] **Gutierrez, M. ve Olea, B.** (2021). The Rigging Technique for Null Hypersurfaces, *The Rigging Technique for Null Hypersurfaces*, 10(284).
- [22] **Chen, B.Y.** (2017). *Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds*, World Scientific.
- [23] **Chen, B.Y.** (2011). *Pseudo-Riemannian Geometry, δ -Invariants and Applications*, World Scientific.
- [24] **O’neill, B.** (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic press.
- [25] **Sahin, B.** (2017). *Riemannian submersions, Riemannian maps in Hermitian geometry, and their applications*, Academic Press.
- [26] **Şahin, B.** (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Yayıncılık.
- [27] **Gutierrez, M. ve Olea, B.** (2015). Induced Riemannian structures on null hypersurfaces, *Math. Nachr.*
- [28] **Atindogbe, C., E.J. ve Tossa, J.** (2006). Lightlike Einstein Hypersurfaces in Lorentzian Manifolds with Constant Curvature, *Kodai Math. Journal*, 29, 58–71.
- [29] **Bejan, C. L., D.R.S.L.** (2015). F Geodesics on Manifolds, *Filomat*, 29(10), 2367–2379.
- [30] **Massamba, F.** (2011). Relative nullity Foliations and Lightlike Hypersurfaces in Indefinite Kenmotsu Manifolds, *Turkish Journal of Mathematics*, 35(1), 129–149.
- [31] **Duggal, K. L., J.D.H.** (2010). A classification of Einstein Lightlike Hypersurfaces of a Lorentzian Space Form, *Journal of Geometry and Physics*, 60(12), 1881–1889.
- [32] **Jin, D.H.** (2001). Geometry of coisotropic submanifolds, *Journal of Korean Math. Soc. Educ. Ser. B Pure Appl. Math.*, 8(1), 33–46.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Ecem KAVUK

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2012, İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** 2016, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Tezli Yüksek Lisans

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN ÇALIŞMALAR:

- **Erol Kılıç, Mehmet Gülbahar, Ecem Kavuk, (2020).** Concurrent Vector Fields on Lightlike Hypersurfaces, MDPI, Mathematics, 9(1), 59.
- **Erol Kılıç, Mehmet Gülbahar, Ecem Kavuk, Sadık Keleş, (2021).** Some notes on Ricci soliton lightlike hypersurfaces admitting concurrent vector Fields, 18-th International Geometry Symposium in Honour of Prof.Dr. Sadık KELEŞ, July 12-13, 2021 İnönü Üniversitesi, Malatya-TÜRKİYE.
- **Erol Kılıç, Mehmet Gülbahar, Ecem Kavuk, Esra Erkan, (2023).** Ricci Soliton Lightlike Submanifolds with Co-Dimension 2, FUJMA 6(2) 117-127.
- **Mehmet Gülbahar, Erol Kılıç, Esra Erkan, Ecem Kavuk, (2023).** Concircular Vector Fields on Lightlike Submanifolds, Caspian Journal of Mathematical Sciences, Kabul Edildi.