

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

LİNEER BİGEOMETRİK VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ İÇİN
BAZI ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

YÜKSEK LİSANS

Emre DİNÇ

HAZİRAN-2023
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**LİNEER BİGEOMETRİK VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ İÇİN
BAZI ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ**

**SOME SOLUTION METHODS OF LINEAR BIGEOMETRIC VOLTERRA
INTEGRAL EQUATIONS**

YÜKSEK LİSANS

Emre DİNÇ

**HAZİRAN-2023
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**LİNEER BİGEOMETRİK VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ İÇİN
BAZI ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ**

**SOME SOLUTION METHODS OF LINEAR BIGEOMETRIC VOLTERRA
INTEGRAL EQUATIONS**

YÜKSEK LİSANS

Emre DİNÇ

Danışman: Doç. Dr. Nihan GÜNGÖR

**HAZİRAN-2023
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Lineer Bigeometrik Volterra İntegral Denklemleri İçin Bazı Çözüm Yöntemleri**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kistaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

16/06/2023

.....
Emre DİNÇ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde danışmanlık yaptığı süreç boyunca tez konusunun belirlenmesinden başlayarak, tez çalışmasının her aşamasında desteğini her zaman gösteren, her türlü sorumda bilgi ve deneyimiyle beni yönlendiren değerli danışman hocam Doç. Dr. Nihan GÜNGÖR' e çok teşekkür ederim. Ayrıca yüksek lisansa başlamama vesile olan değerli dostum Hasan EKER' e teşekkür ederim.

Hayatımın her anında her daim yanımda olan ve desteklerini hiç esirgemeyen aileme, bana inanıp bu yola beraber çıktığım en büyük destekçim eşime ve 6 yaşındaki sevgili kızım Elif Ceyda DİNÇ' e teşekkür ederim.

Emre DİNÇ
GÜMÜŞHANE-2023

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, lineer bigeometrik Volterra integral denklemleri için alternatif yeni çözüm yöntemleri kazandırmaktır.

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde, literatür taraması yapılarak konunun tarihsel gelişimi, önemi ve kullanım alanları hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde tez çalışması ile ilgili ihtiyaç duyulan temel tanım, teorem ve önermeler ifade edildi.

Üçüncü bölümde literatürde yer alan bigeometrik integral denklem tanımından faydalanılarak, integral denklemlerin sınıflandırmaları en genel haliyle bigeometrik kalkülüse aktarılarak literatüre kazandırıldı ve bigeometrik integral denklemler ile bigeometrik diferansiyel denklemler arasındaki ilişki irdelenip örneklerle ifade edildi.

Tez çalışmasını oluşturan asıl bulgulara dördüncü ve beşinci bölümde yer verildi. Dördüncü bölümde homotopi pertürbasyon metodu bigeometrik kalkülüse aktararak, oluşturulan bigeometrik homotopi pertürbasyon metodunun bigeometrik diferansiyel denklemlere ve lineer bigeometrik Volterra integral denklemlerine uygulaması verildi. Beşinci bölümde, bigeometrik kalkülüste bir fonksiyonun diferansiyel dönüşümü tanımlandı ve bigeometrik diferansiyel dönüşüm metodunu uygulamak için ihtiyaç duyulan temel teoremler ispatlandı. Elde edilen özellikler yardımıyla bigeometrik diferansiyel denklemler ve lineer bigeometrik Volterra integral denklemlerinin çözümleri örneklerle incelendi.

Son bölümde ise tez çalışmasında elde edilen sonuçlar ve değerlendirmelere yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Newtonyen olmayan kalkülüs, Bigeometrik kalkülüs, Bigeometrik integral denklemler, Lineer bigeometrik Volterra integral denklemleri, BG -Integral denklemler ile BG -Diferansiyel denklemler arasındaki ilişki, BG -Homotopi pertürbasyon metodu, BG -Diferansiyel dönüşüm metodu.

SUMMARY

The aim of this study is to provide new alternative solution methods for linear bigeometric Volterra integral equations.

In the first part of this study, which consists of six chapters, a literature review is made and information about the historical development, importance and application areas of the subject is given. In the second chapter, the basic definitions, theorems and propositions needed for the thesis are stated.

In the third chapter, by utilizing the definition of bigeometric integral equation in the literature, the classifications of integral equations are transferred to bigeometric calculus in its most general form and the relationship between bigeometric integral equations and bigeometric differential equations is examined and expressed with examples.

The main findings of the thesis are presented in the fourth and fifth chapters. In the fourth chapter, the homotopy perturbation method is transferred to bigeometric calculus and the application of the bigeometric homotopy perturbation method to bigeometric differential equations and linear bigeometric Volterra integral equations is given. In the fifth chapter, the differential transformation of a function in bigeometric calculus is defined and the basic theorems needed to apply the bigeometric differential transformation method are proved. With the help of the properties obtained, the solutions of bigeometric differential equations and linear bigeometric Volterra integral equations are analyzed with examples.

In the last chapter, the results and evaluations obtained in the thesis are given.

Keywords: Non-Newtonian calculus, Bigeometric calculus, Bigeometric integral equations, Linear bigeometric Volterra integral equations, Relationship between BG -Integral equations and BG -Differential equations, BG -Homotopy perturbation method, BG -Differential transformation method.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	IV
TEŞEKKÜR	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	4
2.1. Geometrik Aritmetik	4
2.2. Bigeometrik Kalkülüs	8
3. BİGEOMETRİK İNTEGRAL DENKLEMLER	22
3.1. BG -İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması	22
3.1.1. Lineer ve Lineer Olmayan BG -İntegral Denklemler	22
3.1.2. Singüler ve Singüler Olmayan BG -Lineer İntegral Denklemler	23
3.1.3. BG -İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması	23
3.1.4. Homojen ve Homojen Olmayan BG -İntegral Denklemler	24
3.1.5. BG -Volterra ve BG -Fredholm İntegral Denklemler	24
3.1.6. Exp-Parametrelili İntegral Denklemler	25
3.1.7. Konvolüsyon Çekirdekli BG -İntegral Denklemler	25
3.2. BG -İntegral Denklemler ile BG -Diferansiyel Denklemler Arasındaki İlişki	26
4. LİNEER BİGEOMETRİK VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN BG - HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU İLE ÇÖZÜMÜ	31
4.1. BG -Homotopi Kavramı, BG -Pertürbasyon Teorisi ve BG -Homotopi Pertürbasyon Metodu	31
4.1.1. BG -Homotopi Kavramı	31
4.1.2. BG -Pertürbasyon Teorisi	32
4.1.3. BG -Homotopi Pertürbasyon Metodu	34
4.2. Lineer Bigeometrik Volterra İntegral Denklemlerine BG -Homotopi Pertürbasyon Metodunun Uygulanması	46
5. LİNEER BİGEOMETRİK VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN BG - DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ	64

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	109
KAYNAKÇA	111
ÖZGEÇMİŞ.....	113



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{\text{exp}}$	: Geometrik reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{\text{exp}}^+$	: Geometrik pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{\text{exp}}^-$	: Geometrik negatif reel sayılar kümesi
$\oplus$	: Geometrik toplam
$\ominus$	: Geometrik çıkarma
$\odot$	: Geometrik çarpma
$\oslash$	: Geometrik bölme
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$<_{\text{exp}}$	: Geometrik küçüktür
$>_{\text{exp}}$	: Geometrik büyüktür
$\leq_{\text{exp}}$	: Geometrik küçük veya eşittir
$\geq_{\text{exp}}$	: Geometrik büyük veya eşittir
$\subset$	: Alt küme
$\supseteq$	: Kapsar veya eşit
$\in$	: Elemanıdır
n_{exp}	: n . geometrik kuvvet
$\sqrt{}^{\text{exp}}$	: Geometrik karekök
$()!_{\text{exp}}$	: Geometrik faktöriyel
$ _{\text{exp}}$	: Geometrik mutlak değer
$_{BG}\lim$	: Bigeometrik limit
$f^{(n)}_{BG}$	: f fonksiyonunun n . mertebeden bigeometrik türevi
$_{BG}\int$	: Bigeometrik integral
$_{\text{exp}}\Sigma$	: Geometrik toplam
$BG-$	: Bigeometrik

1. GİRİŞ

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmaktadır. İntegral denklemlerin çok sayıda çeşidi mevcut olduğundan, bu çeşitlerin her birini kapsayacak teori oluşturmak mümkün olamamaktadır. Farklı özelliklerdeki integral denklemlerin inceleme metotları da ayrı olacağından, integral denklemler konusu geniş bir araştırma alanına sahiptir.

İntegral denklemlerin günlük hayatta pek çok alanda uygulamalarından bahsedilebilir. Bunlar; matematik problemleri, fizik problemleri, mühendislik bilimleri, kuantum mekaniği, matematiksel ekonomi, elektrik ve manyetizma, jeofizik, gazların kinetik teorisi, biyolojideki kalıtım olayları ve kuyruk teorisi gibi alanlardır.

Yüksek mertebeden ve değişken katsayılı integral denklemlerin analitik çözümleri elde edilememekte ya da elde edilmesi oldukça zorlu olmaktadır. Bu sebeple bu tür problemlerin çözümünde nümerik metotların kullanılması etkili olur. Analitik metotlarla verilen problemin çözümü fonksiyon halinde ifade edilmektedir. Bazı problemlerin analitik çözüm metodu olmasına karşın birçoğunun da bilinen metotlardan faydalanılarak çözümünü bulmak mümkün değildir. Bu sebeple integral denklemlerin yaklaşık çözümleri ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda yaklaşık çözümlerin analitik çözümlere çok yakın sonuçlar olarak elde edildiği görülmüştür. Ayrıca günümüzde bilişim teknolojilerinin oldukça gelişmesi sebebiyle yaklaşık yöntemler analitik yöntemlere oranla daha fazla tercih edilmektedir.

İntegral denklemlerle ilgili ilk çalışmalar XIX. yüzyılda başlamıştır. Bu çalışmalar başlangıçta düzensiz ve gelişigüzel olarak yapılmışken, XIX. yüzyılın son dönemlerinde daha düzenli ve bilinçli çalışmaların yapıldığı ve bazı sonuçların elde edilmeye başlandığı görülmektedir. Joseph Fourier 1822 yılındaki çalışmasında, bazı özel integral dönüşümlerin inversiyon denklemlerini elde etmiştir. Abel'in, 1823 yılında ilk defa bir mekanik problemi araştırdığı esnada integral denklemle karşılaştığı bilinmektedir. Du Bois Reymond, 1888 yılında yayımlanan çalışmasında integral denklemi deyimini öne sürdüğü bilinmektedir. I. G. Petrovsky, Francesco Tricomi, ve William V. Lovitt' e ait integral denklemler konusuyla alakalı kaynak kitaplar vardır. Ayrıca 1860-1940 yılları arasında yaşamını sürdürmüş olan İtalyan matematikçi Vito Volterra tarafından, integral sınırlarından biri x değişkeni olarak alınıp lineer Volterra integral denklemleri tanımlanmış ve bu integral denklemler üzerine çalışmalar yapılmıştır. İntegral

denklemlerin analitik ve sayısal çözümlerine ulaşmak için Adomian ayrıştırma metodu, diferansiyel dönüşüm metodu, ardışık yaklaşımlar metodu, Runge-Kutta yöntemi, seri çözüm metodu, varyasyonel iterasyon metodu, homotopi analiz metodu gibi bir çok metot geliştirilmiştir (He, 2006; Arikoğlu ve Ozkol, 2008; Rahman, 2007; Wazwaz, 2011; Fındık, 2012; Khatip, 2016).

Grossman ve Katz, 1967-1970 yılları arasında Newton ve Leibniz tarafından oluşturulan klasik kalkülüse alternatif olarak yeni bir kalkülüs tanımlamışlardır ve bu konuda da bir dizi çalışmaları mevcuttur. Bu çalışmaların ardından 1972 yılında Newtonyen olmayan kalkülüsün temellerini oluşturan kitapları yayınlanmıştır (Grossman ve Katz, 1972). Önce geometrik, kuadratik ve harmonik kalkülüsü içeren kalkülüsün bir ailesini tanımlamışlar ve ardından bikuadratik, biharmonik ve bigeometrik kalkülüsü oluşturmuşlardır. Klasik kalkülüsten farklı olarak sınıfların tümünü içine alan bu yeni yapıya Newtonyen olmayan kalkülüs adı verilmiştir. Newtonyen olmayan kalkülüs yerine *-kalkülüs ifadesi de kullanılmaktadır. Klasik kalkülüste kullanılan tüm kavramların, Newtonyen olmayan kalkülüsün içinde karşılığı vardır. Newtonyen olmayan kalkülüsün mühendislik, fen bilimleri ve matematik gibi birçok uygulama alanı bulunmaktadır. Uygulama alanlarından bazıları, ekonomide esneklik teorisi, faiz oranları, kanın akışkanlığı, görüntü işleme ve yapay zekayı içeren bilgisayar bilimi, biyoloji, diferansiyel denklemler, fonksiyonel analiz ve olasılık teorisi şeklinde ifade edilebilir. Yapılacak çalışmaların, bu uygulama alanlarına aktarımıyla günlük hayatta karşılaşılan bazı problemlere farklı bakış açısı getirileceği düşünülmektedir. Newtonyen olmayan kalkülüsün en popüler olan sınıflarından biri olan bigeometrik kalkülüs birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

Grossman bigeometrik kalkülüste ölçüden bağımsız türevi incelemiştir (Grossman, 1983). Rybaczuk ve Stopel bigeometrik kalkülüs kullanarak malzeme bilimindeki fraktal büyümeyi araştırmıştır (Rybaczuk ve Stopel, 2000). Aniszewska ve Rybaczuk, çarpımsal bir Lorenz sisteminde bigeometrik kalkülüsü kullanmıştır (Aniszewska ve Rybaczuk, 2005). Córdova-Lepe, bigeometrik kalkülüs yardımıyla ekonomide esnekliğin ölçümü üzerine çalışmıştır (Córdova-Lepe, 2006). Boruah ve Hazarika, bigeometrik kalkülüsü G-kalkülüs olarak tanımlamış, bigeometrik anlamda türev ve integralin temel özelliklerini incelemiş ve nümerik analizdeki uygulamaları üzerine araştırma yapmışlardır (Boruah ve Hazarika, 2018a,b). Boruah vd, bigeometrik diferansiyel denklemlerin nümerik metotlar kullanarak çözülebilirliğini araştırmıştır (Boruah vd, 2021). Güngör bigeometrik Volterra integral denklemlerini tanımlamış ve bigeometrik diferansiyel denklem ile ilişkisini irdelemiştir (Güngör, 2020a). Güngör

ardışık yaklaşımlar metodu, ardışık çekirdek metodu ve çözücü çekirdek metodunu bigeometrik kalkülüse aktararak bigeometrik Volterra integral denklemlerinin çözümlerini incelemiştir (Güngör, 2021;2023). Güngör, bu çalışmalarını Newtonyen olmayan kalkülüse genişleterek, Newtonyen olmayan kalkülüste Volterra integral denklemlerini tanımlamış; çözücü çekirdek metodu, ardışık yaklaşım metodu ve Adomian ayrıştırma metodunu Newtonyen olmayan kalkülüse aktararak bu denklemlerin çözümünü irdilemiştir (Güngör, 2022).

Bu tez çalışmasında, bigeometrik integral denklemlerin sınıflandırmaları en genel haliyle verildi ve bigeometrik diferansiyel denklemler ile ilişkisi irdelendi. Bigeometrik kalkülüsteki temel kavramlar kullanılarak, homotopi pertürbasyon metodu ve diferansiyel dönüşüm metodu çözüm teorileri bigeometrik kalkülüse aktarıldı. Bigeometrik kalkülüse aktarılan bu metotlar ile bigeometrik diferansiyel denklemler ve lineer bigeometrik Volterra integral denklemlerinin çözümleri irdelendi ve nümerik örnekler verildi. Ayrıca, bigeometrik diferansiyel denklemler ve bigeometrik Volterra integral denklemler arasındaki ilişkiden faydalanılarak çözümlerin incelendiği örneklere yer verildi.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, geometrik aritmetiğin temel yapıları ele alınacak, Newtonyen olmayan kalkülüs teorisi özetlenecek ve çalışma boyunca kullanılacak olan bigeometrik kalkülüs tanıtılıp bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. Geometrik Aritmetik

Tanım 2.1.1. Tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi de $\mathbb{R}$ kümesinin bir alt kümesi olan birebir fonksiyona üreteç denir. I özdeşlik fonksiyonu, $\exp$ fonksiyonu üreteç fonksiyonuna örnek olarak gösterilebilir.

Görüntü kümesi A olan bir α üretici göz önüne alınırsa, $x, y \in A$ olmak üzere aşağıda verilen işlemler ve sıralama bağıntısıyla birlikte α -aritmetik olarak adlandırılır.

$$\alpha\text{-toplama} \quad x \dot{+} y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\}$$

$$\alpha\text{-çıkarma} \quad x \dot{-} y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\}$$

$$\alpha\text{-çarpma} \quad x \dot{\times} y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)\}$$

$$\alpha\text{-bölme } (y \neq 0 = \alpha(0)) \quad x \dot{/} y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \div \alpha^{-1}(y)\}$$

$$\alpha\text{-sıralama} \quad x \dot{<} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y).$$

α üretici özdeşlik fonksiyonu olarak seçilirse, $\forall x \in A$ için $\alpha(x) = x$ olur, bu da $\alpha^{-1}(x) = x$ olması anlamına gelir. Böylece,

$$\begin{aligned} \alpha\text{-toplama} \quad x \dot{+} y &= \alpha\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\} = \alpha\{x + y\} && \text{klasik toplama} \\ &= x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha\text{-çıkarma} \quad x \dot{-} y &= \alpha\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\} = \alpha\{x - y\} && \text{klasik çıkarma} \\ &= x - y \end{aligned}$$

$$\alpha\text{-çarpma} \quad x \dot{\times} y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)\} = \alpha\{x \times y\} \quad \text{klasik çarpma}$$

$$= x \times y$$

$$\alpha\text{-bölme}(y \neq 0) \quad x \dot{/} y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \div \alpha^{-1}(y)\} = \alpha\{x \div y\} \quad \text{klasik bölme}$$

$$= x \div y$$

şeklinde yazılır ve α -aritmetik, klasik aritmetiğe indirgenmiş olur.

α üretici, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}^+$ ya tanımlanan exp fonksiyonu olarak seçilirse, her $x \in A$ için $\alpha(x) = e^x$ olur, bu ise $\alpha^{-1}(x) = \ln x$ olması anlamına gelir. Buradan,

$$\text{Geometrik toplama} \quad x \oplus y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\} = e^{\{\ln x + \ln y\}} = x \cdot y$$

$$\text{Geometrik çıkarma} \quad x \ominus y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\} = e^{\{\ln x - \ln y\}} = x \div y$$

$$\text{Geometrik çarpma} \quad x \odot y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)\} = e^{\{\ln x \times \ln y\}} = x^{\ln y} = y^{\ln x}$$

$$\text{Geometrik bölme} \quad x \oslash y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \div \alpha^{-1}(y)\} = e^{\{\ln x \div \ln y\}} = x^{\frac{1}{\ln y}}, y \neq 1$$

$$\text{Geometrik sıralama} \quad x <_{\text{exp}} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) = \ln x < \alpha^{-1}(y) = \ln y$$

şeklinde yazılır ve α -aritmetik, geometrik aritmetiğe indirgenmiş olur (Grossman ve Katz, 1972; Boruah, 2017).

Tanım 2.1.2. exp üretic fonksiyonu ile üretilen aritmetiğe geometrik aritmetik denir.

Tanım 2.1.3. $\{e^x : x \in \mathbb{R}\}$ kümesine geometrik aritmetikte tanımlanan reel sayılar kümesi denir ve $\mathbb{R}_{\text{exp}}$ ile gösterilir. Geometrik pozitif reel sayılar ve geometrik negatif reel sayılar sırasıyla,

$$\mathbb{R}_{\text{exp}}^+ = \{x \in \mathbb{R}_{\text{exp}} : x >_{\text{exp}} 1\} \text{ ve } \mathbb{R}_{\text{exp}}^- = \{x \in \mathbb{R}_{\text{exp}} : x <_{\text{exp}} 1\}$$

şeklinde tanımlanır (Boruah, 2017; Boruah ve Hazarika, 2018).

Geometrik sıfır sayısı $e^0 = 1$ ve geometrik bir sayısı $e^1 = e$ dir. Geometrik tamsayılar, 1 sayısından ardışık olarak e sayısının geometrik toplanmasıyla ve 1 sayısından ardışık olarak e sayısının geometrik çıkarılmasıyla elde edilir. O halde geometrik tamsayılar,

$$\dots, e^{-2}, e^{-1}, 1, e, e^2, \dots$$

şeklindedir. Her bir n tamsayısı geometrik aritmetiği göre e^n ile ifade edilir. e^n bir geometrik pozitif tamsayı ise

$$e^n = \underbrace{e \oplus e \oplus \dots \oplus e}_{n \text{ tane}}$$

olur (Grossman ve Katz, 1972).

Sonuç 2.1.1. $\mathbb{R}_{\exp}$ üzerinde tanımlanan

$$\oplus : \mathbb{R}_{\exp} \times \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp},$$

$$(x, y) \rightarrow x \oplus y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\} = e^{\{\ln x + \ln y\}} = x \cdot y$$

toplama işlemi ve

$$\odot : \mathbb{R}_{\exp} \times \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp},$$

$$(x, y) \rightarrow x \odot y = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)\} = e^{\{\ln x \cdot \ln y\}} = x^{\ln y} = y^{\ln x}$$

çarpma işlemine göre $(\mathbb{R}_{\exp}, \oplus, \odot)$ bir cisimdir (Boruah ve Hazarika, 2018).

Tanım 2.1.4. $A \subset \mathbb{R}_{\exp}$ kümesindeki her $x <_{\exp} y$ sayısı için $x \leq_{\exp} t \leq_{\exp} y$ koşulunu gerçekleştiren $t \in A$ geometrik sayıların kümesi geometrik aralık olarak adlandırılır ve bu exp-aralığı $y \ominus x$, exp-uzunluğa sahiptir.

Önerme 2.1.1. $x, y, z, t \in \mathbb{R}_{\exp}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

- i) $x \leq_{\exp} y$ ise $x \oplus z \leq_{\exp} y \oplus z$ ve $x \ominus z \leq_{\exp} y \ominus z$,
- ii) $x \leq_{\exp} y$ ve $z \leq_{\exp} t$ ise $x \oplus z \leq_{\exp} y \oplus t$ ve $x \ominus z \leq_{\exp} y \ominus t$,
- iii) $x \leq_{\exp} y$ ve $1 \leq_{\exp} z$ ise $x \odot z \leq_{\exp} y \odot z$ ve $\frac{x}{z} \exp \leq_{\exp} \frac{y}{z} \exp$,
- iv) $1 <_{\exp} x, y$ ve $x \leq_{\exp} y$ ise $\frac{e}{y} \exp \leq_{\exp} \frac{e}{x} \exp$,
- v) $x \leq_{\exp} y$ ise $1 \ominus y \leq_{\exp} 1 \ominus x$

(Erdoğan, 2016; Boruah ve Hazarika, 2018).

Tanım 2.1.5. $x \in \mathbb{R}_{\exp}$ olmak üzere x sayısının geometrik karesi,

$$x^{2_{\text{exp}}} = x \odot x = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{(\ln x)^2} = x^{\ln x}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} x^{3_{\text{exp}}} &= x \odot x \odot x = (e^{\ln x \cdot \ln x})^{\ln x} = e^{(\ln x)^3} \\ &= (x^{\ln x})^{\ln x} = x^{\ln^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{4_{\text{exp}}} &= x \odot x \odot x \odot x = \left((e^{\ln x \cdot \ln x})^{\ln x} \right)^{\ln x} = e^{(\ln x)^4} \\ &= \left((x^{\ln x})^{\ln x} \right)^{\ln x} = x^{\ln^3 x} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{p_{\text{exp}}} &= x \odot x \odot x \odot \dots \odot x = \left(\left(\left((e^{\ln x \cdot \ln x})^{\ln x} \right)^{\ln x} \right)^{\dots} \right)^{\ln x} = e^{(\ln x)^p} \\ &= \left(\left(\left((x^{\ln x})^{\ln x} \right)^{\ln x} \right)^{\dots} \right)^{\ln x} = x^{\ln^{p-1} x} \end{aligned}$$

yazılır (Grossman ve Katz, 1972; Boruah ve Hazarika, 2018).

Tanım 2.1.6. $x \in \mathbb{R}_{\text{exp}}$ olmak üzere x sayısının geometrik karekökü $\sqrt{x}^{\text{exp}}$ ile gösterilir ve

$$\sqrt{x}^{\text{exp}} = e^{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}$$

şeklinde tanımlanır.

$x \in \mathbb{R}_{\text{exp}}$ olmak üzere x sayısının geometrik p . kökü

$$\sqrt[p]{x}^{\text{exp}} = e^{(\ln x)^{\frac{1}{p}}}$$

şeklinde tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972; Boruah ve Hazarika, 2018).

Tanım 2.1.7. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}_{\text{exp}}$ sayısının geometrik mutlak değeri

$$|x|_{\text{exp}} = \begin{cases} x & , x > 1 \\ 1 & , x = 1 \\ 1/x & , x < 1 \end{cases}$$

veya

$$e^{|y|} = |e^y|_{\text{exp}} = \begin{cases} e^y, & e^y > e^0 \\ 1, & e^y = e^0 \\ e^{-y}, & e^y < e^0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $|x|_{\text{exp}} \geq 1$ olur. Bu durumda,

$$\sqrt{x^{2_{\text{exp}}}}^{\text{exp}} = |x|_{\text{exp}} = e^{|\ln x|}$$

ile gösterilir (Grossman ve Katz, 1972; Boruah ve Hazarika, 2018).

Önerme 2.1.2. $x, y, z, t \in \mathbb{R}_{\text{exp}}$, $p \in \mathbb{N}$ ve $y, t \neq 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır:

- i) $\frac{x}{y} \text{exp} \oplus \frac{z}{t} \text{exp} = \frac{(x \odot t) \oplus (y \odot z)}{y \odot t} \text{exp},$
- ii) $\frac{x}{y} \text{exp} \ominus \frac{z}{t} \text{exp} = \frac{(x \odot t) \ominus (y \odot z)}{y \odot t} \text{exp},$
- iii) $\frac{x}{y} \text{exp} \odot \frac{z}{t} \text{exp} = \frac{x \odot z}{y \odot t} \text{exp},$
- iv) $z \neq 1$ olmak üzere $\frac{\frac{x}{y} \text{exp}}{\frac{z}{t} \text{exp}} \text{exp} = \frac{x}{y} \text{exp} \odot \frac{t}{z} \text{exp} = \frac{x \odot t}{y \odot z} \text{exp},$
- v) $\left(\frac{x}{y} \text{exp}\right)^{p_{\text{exp}}} = \frac{x^{p_{\text{exp}}}}{y^{p_{\text{exp}}}} \text{exp},$
- vi) $(x \odot y)^{p_{\text{exp}}} = x^{p_{\text{exp}}} \odot y^{p_{\text{exp}}}.$

Tanım 2.1.8. Geometrik faktöriyel $!_{\text{exp}}$ sembolüyle gösterilir ve

$$n!_{\text{exp}} = e^n \odot e^{n-1} \odot \dots \odot e^2 \odot e = e^{n!}$$

şeklinde tanımlanır (Boruah ve Hazarika, 2018a).

2.2. Bigeometrik Kalkülüs

Bu kısımda, öncelikle $*$ -kalkülüs tanıtılmış ve çalışmanın ana kısmını oluşturan bigeometrik kalkülüs ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Grossman ve Katz keyfi seçilen iki üreteç fonksiyon ile $*$ -kalkülüsü tanımlamıştır (Grossman ve Katz, 1972). $*$ -kalkülüste genellikle tanım kümesi için α -aritmetik, değer kümesi β -aritmetik kullanılmaktadır.

Tanım 2.2.1. α ve β keyfi seçilen üreteçler olsun. $*$ ise aritmetiklerin sıralı ikilisi olarak (α -aritmetik, β -aritmetik) gösterilsin. $*$ -kalkülüs aşağıdaki gibi ifade edilir:

	α -aritmetik	β -aritmetik
Evren	A	B
Toplama	$\dot{+}$	$\ddot{+}$
Çıkarma	$\dot{-}$	$\ddot{-}$
Çarpma	$\dot{\times}$	$\ddot{\times}$
Bölme	$\dot{/}$	$\ddot{/}$
Sıralama	$\dot{<}$	$\ddot{<}$

Burada seçilen üreteçler keyfi olduğundan α -aritmetik için gösterilen bütün tanımların β -aritmetik için de uygulanabileceği anlaşılabilir.

Fonksiyonların girdileri $*$ -kalkülüse göre α -aritmetik üzerinde, çıktıları ise β -aritmetik üzerindedir.

α ve β üreteçlerinin özel olarak seçilmesiyle, klasik, geometrik, bigeometrik ve anageometrik kalkülüs, $*$ -kalkülüsten elde edilir. Aşağıda üreteçlerin seçimine göre tanımlanan kalkülüsler belirtilmiştir.

Kalkülüs	α	β
Klasik	I	I
Geometrik	I	exp
Anageometrik	exp	I
Bigeometrik	exp	exp

Bu kısımdan sonra Newtonyen olmayan kalkülüs ailesinden biri olan bigeometrik kalkülüs ile ilgili temel tanım, teorem ve önermeler verilmiştir.

Tanım 2.2.2. $f: X \subset \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ fonksiyonu, $a \in X'^{\exp}$ ve $b \in \mathbb{R}_{\exp}$ verilsin. Her $\varepsilon >_{\exp} 1$ için $1 <_{\exp} |x \ominus a|_{\exp} <_{\exp} \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için $|f(x) \ominus b|_{\exp} <_{\exp} \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) >_{\exp} 1$ sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonunun a noktasındaki BG -limiti b dir denir ve ${}_{BG}\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ veya $f(x) \xrightarrow{BG} b$ şeklinde gösterilir. Buradan, $1 <_{\exp} |x \ominus a|_{\exp} <_{\exp} \delta \Rightarrow \frac{a}{\delta} < x < a\delta$ ve $|f(x) \ominus b|_{\exp} <_{\exp} \varepsilon \Rightarrow \frac{b}{\varepsilon} < f(x) < b\varepsilon$ olur (Grossman ve Katz, 1972; Grossman 1983; Boruah ve Hazarika, 2018a).

Tanım 2.2.3. $f: X \subset \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ biçimde tanımlı bir f fonksiyonu ve $a \in X$ verilsin. Her $\varepsilon >_{\exp} 1$ için $1 <_{\exp} |x \ominus a|_{\exp} <_{\exp} \delta$ olduğunda $|f(x) \ominus f(a)|_{\exp} <_{\exp} \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $\delta = \delta(\varepsilon) >_{\exp} 1$ sayısı varsa f fonksiyonu $a \in X$ noktasında BG -süreklidir denir. Yani, f fonksiyonu $a \in X$ noktasında BG -süreklidir gerekli ve yeterli koşul a noktası f fonksiyonun tanım kümesinin bir elemanıdır ve ${}_{BG}\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ dır (Grossman ve Katz, 1972; Grossman 1983).

Sonuç 2.2.1. ${}_{BG}\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ve $\lim_{t \rightarrow \ln a} \ln f(t)$ limitleri var olsun. ${}_{BG}\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow \ln a} \ln f(e^t) \right\}$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca f fonksiyonu $\ln a$ noktasında sürekli ise f fonksiyonu a noktasında BG -süreklidir.

Tanım 2.2.4. $f: (r, s) \subset \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ biçimde tanımlı bir f fonksiyonu verilsin ve $a \in (r, s)$ olsun. Eğer

$${}_{BG}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \ominus f(a)}{x \ominus a} \exp = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{f(a)} \right]^{\frac{1}{\ln x - \ln a}}$$

limiti mevcut ise, bu limit $f^{BG}(a)$ şeklinde gösterilir ve f fonksiyonunun a noktasındaki BG -türevi olarak tanımlanır. Buradan f , BG -diferansiyellenebilirdir.

Eğer f fonksiyonu, (r, s) exp-açık aralığının tüm noktalarında BG -diferansiyellenebilir ise f fonksiyonu (r, s) exp-açık aralığı üzerinde BG -diferansiyellenebilirdir. f fonksiyonunun BG -türevi, $h \in \mathbb{R}_{\exp}$ olmak üzere

$${}_{BG}\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x \oplus h) \ominus f(x)}{h} \exp = \lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(hx)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{\ln h}}$$

şeklinde tanımlanır ve f^{BG} veya $\frac{d^{BG}f}{dx^{BG}}$ şeklinde gösterilir (Grossman ve Katz, 1972; Grossman 1983; Boruah ve Hazarika, 2018a; Kadak ve Özlük, 2015).

Sonuç 2.2.2. $f^{BG}(a)$ ve $(\ln f(\ln a))'$ türevleri varsa

$$f^{BG}(a) = \exp \left[(\ln f(e^{\ln a}))' \right] = e^{a \frac{f'(a)}{f(a)}}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan BG -türev ve klasik türev arasındaki genel bağıntı ise

$$f^{BG}(x) = e^{\frac{x f'(x)}{f(x)}} = e^{x(\ln f(x))'}$$

şeklinde ifade edilir (Grossman ve Katz, 1972; Grossman 1983; Boruah ve Hazarika, 2018a,b).

$f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden BG -türevi,

$$\begin{aligned} \frac{d^{2BG}f}{dx^{2BG}} &= f^{(2)BG}(x) = {}_{BG}\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f^{BG}(x \oplus h) \ominus f^{BG}(x)}{h} \exp \\ &= \lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f^{BG}(hx)}{f^{BG}(x)} \right]^{\frac{1}{\ln h}} = \lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{e^{hx(\ln f(hx))'}}{e^{x(\ln f(x))'}} \right]^{\frac{1}{\ln h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 1} \left[e^{x[h(\ln f(hx))' - (\ln f(x))']} \right]^{\frac{1}{\ln h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 1} \left[e^{x \frac{1}{\ln h} \left[\left(\ln \frac{f(hx)}{f(x)} \right)' \right]} \right] = e^{x \lim_{h \rightarrow 1} \left[\left(\left(\ln \frac{f(hx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\ln h}} \right)' \right]} \\ &= e^{x[(\ln f^{BG}(x))']} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde $f(x)$ fonksiyonunun n . mertebeden BG -türevi,

$$\begin{aligned} \frac{d^{(n)BG}f}{dx^{nBG}} &= f^{(n)BG}(x) = {}_{BG}\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f^{(n-1)BG}(x \oplus h) \ominus f^{(n-1)BG}(x)}{h} \exp \\ &= e^{x[(\ln f^{(n-1)BG}(x))']} \end{aligned}$$

şeklindedir (Kadak ve Özlük, 2015; Güngör, 2020a).

Teorem 2.2.1. $f, g: (r, s) \subset \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ BG-diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve c keyfi sabit olmak üzere,

$$(1) \quad (f(x) \oplus g(x))^{BG} = f^{BG}(x) \oplus g^{BG}(x)$$

$$(2) \quad (f(x) \ominus g(x))^{BG} = f^{BG}(x) \ominus g^{BG}(x)$$

$$(3) \quad (f(x)^c)^{BG} = (f(x)^{BG})^c$$

olur (Grossman ve Katz, 1972; Grossman 1983; Boruah ve Hazarika, 2018a,b).

Önerme 2.2.1. $f: (r, s) \subset \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ BG-diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}_{\exp}$ olmak üzere,

$$\frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(a \odot f(x)) = a \odot \frac{d^{BG}}{dx^{BG}}f(x)$$

olur.

İspat. Bigeometrik türev tanımından ve bigeometrik kalkülüs ile klasik kalkülüs arasındaki ilişkiden faydalanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(a \odot f(x)) &= \frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(f(x)^{\ln a}) \\ &= e^{x \cdot \frac{(f(x)^{\ln a})'}{f(x)^{\ln a}}} \\ &= e^{x \cdot \frac{\ln a \cdot f(x)^{(\ln a - 1)} \cdot f'(x)}{f(x)^{\ln a}}} \\ &= e^{x \cdot \ln a \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}} \\ &= \left(e^{x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}} \right)^{\ln a} \\ &= a \odot \frac{d^{BG}}{dx^{BG}}f(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.2. $f, g: (r, s) \subset \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ BG-diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$[f(x) \odot g(x)]^{BG} = [f^{BG}(x) \odot g(x)] \oplus [f(x) \odot g^{BG}(x)]$$

olur.

İspat. Bigeometrik türev ve klasik türev arasındaki ilişkiden yararlanılarak,

$$\begin{aligned}
[f(x) \odot g(x)]^{BG} &= [f(x)^{\ln g(x)}]^{BG} = e^{x \frac{(f(x)^{\ln g(x)})'}{f(x)^{\ln g(x)}}} \\
&= e^{x \frac{f(x)^{\ln g(x)} \cdot [(\ln f(x))' \cdot \ln g(x) + \ln f(x) \cdot (\ln g(x))']}{f(x)^{\ln g(x)}}} \\
&= e^{x [(\ln f(x))' \cdot \ln g(x) + \ln f(x) \cdot (\ln g(x))']} \\
&= e^{x [(\ln f(x))' \cdot \ln g(x)]} \cdot e^{x [\ln f(x) \cdot (\ln g(x))']} \\
&= e^{[x (\ln f(x))']^{\ln g(x)}} \cdot e^{[x (\ln g(x))']^{\ln f(x)}} \\
&= [f^{BG}(x) \odot g(x)] \oplus [f(x) \odot g^{BG}(x)]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.5. Bigeometrik kalkülüste bazı temel fonksiyonların BG -türevleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(c) &= 1 & \frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(\sin x) &= e^{x \cot x} & \frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(\cot x) &= e^{-x \sec x \csc x} \\
\frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(cf(x)) &= f^{BG}(x) & \frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(\cos x) &= e^{-x \tan x} & \frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(\sec x) &= e^{x \tan x} \\
\frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(x^n) &= e^n & \frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(\tan x) &= e^{x \sec x \csc x} & \frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(\csc x) &= e^{-x \cot x}
\end{aligned}$$

(Boruah ve Hazarika, 2018a,b).

Tanım 2.2.6. $f(x, y)$, $\mathbb{R}_{\exp}$ değerli bir fonksiyon olmak üzere, kısmi BG -türevi

$$f_x^{BG}(x, y) = \frac{\partial^{BG}}{\partial x^{BG}} f(x, y) = {}_{BG} \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x \oplus h, y) \ominus f(x, y)}{h} \exp$$

ve

$$f_y^{BG}(x, y) = \frac{\partial^{BG}}{\partial y^{BG}} f(x, y) = {}_{BG}\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x, y \oplus h) \ominus f(x, y)}{h} \exp$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımdan faydalanılarak kısmi BG -türev ile klasik kısmi türev arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} {}_{BG}\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x \oplus h, y) \ominus f(x, y)}{h} \exp &= \lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(hx, y)}{f(x, y)} \right]^{\frac{1}{\ln h}} = \lim_{h \rightarrow 1} e^{\ln \left[\frac{f(hx, y)}{f(x, y)} \right]^{\frac{1}{\ln h}}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 1} e^{\frac{\ln f(hx, y) - \ln f(x, y)}{\ln h}} = e^{\lim_{h \rightarrow 1} \frac{\ln f(hx, y) - \ln f(x, y)}{\ln h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 1} h x \cdot \frac{f'(hx, y)}{f(hx, y)} = e^{x \cdot \frac{f'_x(x, y)}{f(x, y)}} \\ &= e^{x \cdot \frac{\partial^{BG}}{\partial x^{BG}} \ln f(x, y)} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece $f(x, y)$ fonksiyonun BG -kısmi türevleri,

$$f_x^{BG}(x, y) = e^{x \cdot \frac{\partial^{BG}}{\partial x^{BG}} \ln f(x, y)}$$

ve

$$f_y^{BG}(x, y) = e^{y \cdot \frac{\partial^{BG}}{\partial y^{BG}} \ln f(x, y)}$$

şeklinde tanımlanır (Güngör, 2020a).

Tanım 2.2.7. $[r, s] \subset \mathbb{R}_{\exp}$ aralığında tanımlı BG -sürekli pozitif f fonksiyonunun BG -aritmetik ortalaması $M_r^{BG^S} f$ şeklinde gösterilir ve $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kümesi $[r, s]$ aralığının n -katlı $\exp$ -parçalanışı olmak üzere n . terimi $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$ değerlerinin geometrik ortalaması olan $\exp$ -yakınsak dizisinin $\exp$ -limiti olarak tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972; Grossman 1983).

Tanım 2.2.8. $[r, s]$ aralığında tanımlı BG -sürekli f fonksiyonunun, bu aralık üzerindeki BG -integrali, $[M_r^{BG^S} f]^{\ln s - \ln r}$ biçiminde tanımlanır ve ${}_{BG}\int_r^s f(x) d^{BG}x$ şeklinde gösterilir (Grossman ve Katz, 1972; Grossman 1983).

Sonuç 2.2.3. $[r, s] \subset \mathbb{R}_{\exp}$ aralığında tanımlı BG -süreklı f fonksiyonu için,

$${}_{BG} \int_r^s f(x) d^{BG} x = \exp \left[\int_{\ln r}^{\ln s} \ln f(e^t) dt \right]$$

olur. Başka bir deyişle, $[r, s] \subset \mathbb{R}_{\exp}$ aralığında tanımlı BG -süreklı pozitif bir f fonksiyonunun BG -integrali,

$${}_{BG} \int_r^s f(x) d^{BG} x = e^{\int_r^s \frac{\ln f(x)}{x} dx}$$

şeklinde tanımlanır (Grossman ve Katz, 1972; Grossman 1983; Boruah ve Hazarika, 2018b).

Teorem 2.2.2. $f, g: [r, s] \subset \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ BG -süreklı fonksiyonlar ve c keyfi sabit olmak üzere,

$$(1) \quad {}_{BG} \int_r^s (f(x) \oplus g(x)) d^{BG} x = {}_{BG} \int_r^s f(x) d^{BG} x \oplus {}_{BG} \int_r^s g(x) d^{BG} x$$

$$(2) \quad {}_{BG} \int_r^s (f(x) \ominus g(x)) d^{BG} x = {}_{BG} \int_r^s f(x) d^{BG} x \ominus {}_{BG} \int_r^s g(x) d^{BG} x$$

$$(3) \quad {}_{BG} \int_r^s (f(x))^c d^{BG} x = \left({}_{BG} \int_r^s f(x) d^{BG} x \right)^c$$

$$(4) \quad {}_{BG} \int_r^s f(x) d^{BG} x = {}_{BG} \int_r^t f(x) d^{BG} x \oplus {}_{BG} \int_t^s f(x) d^{BG} x, r <_{\exp} t <_{\exp} s$$

olur (Grossman ve Katz, 1972; Grossman 1983; Boruah ve Hazarika, 2018b).

Tanım 2.2.9. Bigeometrik kalkülüste bazı temel fonksiyonların BG -integralleri aşağıdaki gibidir:

$${}_{BG} \int 1 d^{BG} x = c \quad {}_{BG} \int e^{x \cot x} d^{BG} x = \sin x \quad {}_{BG} \int e^{-x \sec x \csc x} d^{BG} x = \cot x$$

$$\begin{aligned}
{}_{BG} \int e^n d^{BG} x &= x^n & {}_{BG} \int e^{-x \tan x} d^{BG} x &= \cos x & {}_{BG} \int e^{x \tan x} d^{BG} x &= \sec x \\
{}_{BG} \int e^x d^{BG} x &= e^x & {}_{BG} \int e^{x \sec x \csc x} d^{BG} x &= \tan x & {}_{BG} \int e^{-x \cot x} d^{BG} x &= \csc x \\
{}_{BG} \int x^n d^{BG} x &= e^{n \frac{\ln^2 x}{2}}
\end{aligned}$$

(Boruah ve Hazarika, 2018b).

Teorem 2.2.3. (Bigeometrik Kalkülüsün Birinci Temel Teoremi) $f, [r, s] \subset \mathbb{R}_{\exp}$ aralığında tanımlı BG -sürekli bir fonksiyon ve her $x \in [r, s]$ için $g(x) = {}_{BG} \int_r^x f(t) d^{BG} t$ olsun. Buradan $[r, s]$ üzerinde $g^{BG} = f$ olur (Grossman ve Katz, 1972; Grossman 1983).

Teorem 2.2.4. (Bigeometrik Kalkülüsün İkinci Temel Teoremi) $f^{BG}, [r, s] \subset \mathbb{R}_{\exp}$ aralığında tanımlı BG -sürekli bir fonksiyon olsun. Buradan,

$${}_{BG} \int_r^s f^{BG}(x) d^{BG} x = f(s) \ominus f(r)$$

olur (Grossman ve Katz, 1972; Grossman 1983).

Tanım 2.2.10. $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$, $n \rightarrow a_n$ ile tanımlı a fonksiyonuna $\mathbb{R}_{\exp}$ geometrik reel sayılar kümesinde bir geometrik reel sayı dizisi (exp-dizi) denir. Herhangi bir $\varepsilon \geq_{\exp} 1$ sayısına karşılık her $n > n_0 = n_0(\varepsilon)$ olduğunda $|a_n \ominus a|_{\exp} \leq_{\exp} \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (a_n) exp-dizisi $a \in \mathbb{R}_{\exp}$ sayısına exp-yakınsar denir (Boruah, 2017).

Tanım 2.2.11. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \in \mathbb{R}_{\exp}$ olmak üzere bir (a_n) geometrik reel sayı dizisi için

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n \oplus \dots = {}_{\exp} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sonsuz exp-toplamına exp-reel sayı serisi veya exp-seri denir (Duyar ve Erdoğan, 2016).

Tanım 2.2.12. $A, \mathbb{R}_{\exp}$ kümesinin boş olmayan bir alt kümesi ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $f_n: A \subseteq \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ fonksiyonları için $(f_n) = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$ dizisine bir BG -fonksiyon dizisi denir (Sağır ve Erdoğan, 2019).

Tanım 2.2.13. $f_n: A \subseteq \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ olmak üzere (f_n) BG -fonksiyon dizisi verilsin. $x_0 \in A$ için $(f_n(x_0))$ dizisi $\exp$ -yakınsak ise (f_n) BG -fonksiyon dizisi x_0 noktasında BG -yakınsaktır denir. Her bir $x \in A$ için $(f_n(x))$ $\exp$ -yakınsak ve $\exp \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ise (f_n) BG -fonksiyon dizisi A kümesinde f fonksiyonuna BG -noktasal yakınsaktır veya BG -yakınsaktır denir. Böylece f fonksiyonuna (f_n) BG -fonksiyon dizisinin BG -limiti denir ve ${}_{BG} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ (BG -noktasal) veya $f_n \xrightarrow{BG} f$ (BG -noktasal) şeklinde gösterilir. O halde herhangi bir $\varepsilon \geq_{\exp} 1$ verildiğinde $n > n_0$ ve her bir $x \in A$ için $|f_n(x) \ominus f(x)|_{\exp} \leq_{\exp} \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (f_n) BG -fonksiyon dizisi f fonksiyonuna BG -noktasal yakınsaktır (Sağır ve Erdoğan, 2019).

Tanım 2.2.14. $f_n: A \subseteq \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ olmak üzere (f_n) BG -fonksiyon dizisi verilsin. Herhangi bir $\varepsilon \geq_{\exp} 1$ sayısına karşılık her $n > n_0 = n_0(\varepsilon)$ olduğunda her $x \in A$ için $|f_n(x) \ominus f(x)|_{\exp} \leq_{\exp} \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı olan fakat x değişkenine bağlı olmayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (f_n) , f fonksiyonuna A kümesinde BG -düzgün yakınsaktır denir ve ${}_{BG} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ (BG -düzgün) veya $f_n \xrightarrow{BG} f$ (BG -düzgün) ile gösterilir (Sağır ve Erdoğan, 2019).

Tanım 2.2.15. $f_n: A \subseteq \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ fonksiyonlarının (f_n) BG -fonksiyon dizisi verilsin.

$$\exp \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 \oplus f_2 \oplus \dots \oplus f_k \oplus \dots$$

$\exp$ -toplamına BG -fonksiyon serisi denir. $n \in \mathbb{N}$ için $S_n = \exp \sum_{k=1}^n f_k$ $\exp$ -toplamına $\exp \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisinin n . kısmi $\exp$ -toplamı denir (Sağır ve Erdoğan, 2019).

Tanım 2.2.16. $f_n: A \subseteq \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ olmak üzere $\exp \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ BG -fonksiyon serisi ve $f: A \subseteq \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ fonksiyonu verilsin. $S_k = \exp \sum_{n=1}^k f_n$ olmak üzere (S_k) $\exp$ -kısmi toplamlar dizisi f fonksiyonuna BG -noktasal yakınsar ise $\exp \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ BG -fonksiyon serisi A kümesinde f fonksiyonuna BG -noktasal yakınsaktır denir ve

$$\exp \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \text{ (BG-noktasal)}$$

şeklinde gösterilir. Bu durumda f fonksiyonuna BG -serisinin $\exp$ -toplamı denir.

Eğer $S_n \xrightarrow{BG} f$ (BG -düzgün) ise $\exp \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ BG -fonksiyon serisi A kümesinde f fonksiyonuna BG -düzgün yakınsaktır denir ve $\exp \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ (BG -düzgün) şeklinde yazılır.

$\exp \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ BG -fonksiyon serisinin BG -yakınsak olduğu x sayılarının kümesine $\exp \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ BG -fonksiyon serisinin BG -yakınsaklık kümesi denir (Sağır ve Erdoğan, 2019).

Tanım 2.2.17. $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{R}_{\exp}$ sabitler olmak üzere $x \ominus x_0$ ifadesinin BG -kuvvet serisinin genel hali,

$$\exp \sum_{n=0}^{\infty} a_n \odot (x \ominus x_0)^{n_{\exp}} = a_0 \oplus [a_1 \odot (x \ominus x_0)] \oplus [a_2 \odot (x \ominus x_0)^{2_{\exp}}] \oplus \dots$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $x_0 = 1$ ise BG -kuvvet serisi,

$$\exp \sum_{n=0}^{\infty} a_n \odot x^{n_{\exp}} = a_0 \oplus [a_1 \odot x] \oplus [a_2 \odot x^{2_{\exp}}] \oplus \dots$$

olur (Sağır ve Erdoğan, 2017).

Teorem 2.2.5. $\exp \sum_{n=0}^{\infty} a_n \odot (x \ominus x_0)^{n_{\exp}}$ BG -kuvvet serisi verilsin ve $\frac{e}{m} \exp = \lim \sqrt[n]{|a_n|_{\exp}}^{\exp}$ olsun. Bu durumda,

- 1) $|x \ominus x_0|_{\exp} \leq_{\exp} m$ ise seri BG -mutlak yakınsaktır,
 - 2) $|x \ominus x_0|_{\exp} \geq_{\exp} m$ ise seri BG -ıraksaktır,
 - 3) $|x \ominus x_0|_{\exp} \leq_{\exp} t$ ise seri BG -düzgün yakınsaktır ($1 \leq_{\exp} t \leq_{\exp} m$)
- (Sağır ve Erdoğan, 2017).

Tanım 2.2.18. Teorem 2.2.5’de bahsi geçen m sayısına $\exp \sum_{n=0}^{\infty} a_n \odot (x \ominus x_0)^{n_{\exp}}$ BG -kuvvet serisinin BG -yakınsaklık yarıçapı, $(x_0 \ominus m, x_0 \oplus m)$ aralığına da BG -yakınsaklık aralığı denir. Uç noktaların BG -yakınsaklık kümesine dahil olup olamayacağına kontrol edilerek karar verilir (Sağır ve Erdoğan, 2017).

Teorem 2.2.6. $\exp \sum_{n=0}^{\infty} a_n \odot (x \ominus x_0)^{n_{\exp}}$ BG -kuvvet serisinin BG -yakınsaklık yarıçapı $m >_{\exp} 1$ ve $f(x) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} a_n \odot (x \ominus x_0)^{n_{\exp}}$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonu $(x_0 \ominus m, x_0 \oplus m)$ aralığında her mertebeden BG -türevlenebilirdir ve

$$a_n = \frac{(D^{(n)BG} f)(x_0)}{n!_{\exp}} \exp$$

dır (Sağır ve Erdoğan, 2017).

Sonuç 2.2.4. Bir BG -kuvvet serisinin toplamı BG -yakınsaklık aralığının içinde her mertebeden BG -türevleri mevcut ve BG -sürekli bir fonksiyondur. Böyle bir BG -seri terim terime BG -türevlenebilirdir ve BG -türevi alınarak elde edilen BG -serinin BG -yakınsaklık yarıçapı ilk BG -serinin yakınsaklık yarıçapı ile aynıdır (Sağır ve Erdoğan, 2017).

Tanım 2.2.19. Yakınsaklık aralığı içerisinde BG -kuvvet serisi bir fonksiyon tanımlar. O halde $\exp \sum_{n=1}^{\infty} a_n \odot (x \ominus x_0)^{n_{\exp}}$ BG -serisi $x = x_0$ noktasının bir komşuluğunda bir $f(x)$ fonksiyonunu temsil etmek üzere, x_0 noktasının bu komşuluğunda

$$f(x) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} a_n \odot (x \ominus x_0)^{n_{\exp}}$$

olur. Bu komşulukta k defa BG -türev alınıp $x = x_0$ denilirse

$$f^{(k)BG}(x) = k!_{\exp} \odot a_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

elde edilir. Böylece

$$f(x) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)BG}(x_0)}{n!_{\exp}} \exp \odot (x \ominus x_0)^{n_{\exp}}$$

BG -kuvvet serisi elde edilir ki bu BG -seriye $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktası komşuluğundaki BG -Taylor serisi (bigeometrik Taylor serisi) denir.

Tanım 2.2.20. $\mathbb{R}_{\exp}$ değerli bir $f(x)$ fonksiyonunun $x_0 \in \mathbb{R}_{\exp}$ noktasında her mertebeden BG -türevi mevcut ise, başka bir ifade ile $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasının bir

komşuluğunda BG -Taylor seri açılımına sahip ise bu fonksiyona x_0 noktasında BG -analitik fonksiyon denir.

Örnek 2.2.1. e^x , $e^{\cos \ln x}$, $e^{\sin \ln x}$ fonksiyonları herhangi bir $x \in \mathbb{R}_{\exp} = \mathbb{R}^+$ noktasında BG -analitik fonksiyonlardır. 1 noktasındaki BG -Taylor seri açılımları;

$$e^x = \exp \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n_{\exp}}}{n!_{\exp}} \exp = e \oplus x \oplus \frac{x^{2_{\exp}}}{2!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{3_{\exp}}}{3!_{\exp}} \exp \oplus \dots$$

$$\begin{aligned} e^{\cos \ln x} &= \exp \sum_{n=0}^{\infty} (1 \ominus e)^{n_{\exp}} \odot \frac{x^{(2n)_{\exp}}}{(2n)!_{\exp}} \exp \\ &= e \ominus \frac{x^{2_{\exp}}}{2!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{4_{\exp}}}{4!_{\exp}} \exp \ominus \frac{x^{6_{\exp}}}{6!_{\exp}} \exp \oplus \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\sin \ln x} &= \exp \sum_{n=0}^{\infty} (1 \ominus e)^{n_{\exp}} \odot \frac{x^{(2n+1)_{\exp}}}{(2n+1)!_{\exp}} \exp \\ &= x \ominus \frac{x^{3_{\exp}}}{3!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{5_{\exp}}}{5!_{\exp}} \exp \ominus \frac{x^{7_{\exp}}}{7!_{\exp}} \exp \oplus \dots \end{aligned}$$

şeklindedir. Gerçekten $x \in \mathbb{R}^+$ için $e^{\ln x}$ fonksiyonu analitik fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} e^x &= e^{e^{\ln x}} = e^{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n!}} \\ &= e^{1 + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2!} + \frac{(\ln x)^3}{3!} + \dots} \\ &= e^1 \cdot e^{\ln x} \cdot e^{\frac{(\ln x)^2}{2!}} \cdot e^{\frac{(\ln x)^3}{3!}} \cdot \dots \\ &= e \oplus x \oplus (e^{(\ln x)^2})^{\frac{1}{\ln e^{2!}}} \oplus (e^{(\ln x)^3})^{\frac{1}{\ln e^{3!}}} \oplus \dots \\ &= e \oplus x \oplus \frac{x^{2_{\exp}}}{2!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{3_{\exp}}}{3!_{\exp}} \exp \oplus \dots \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde diğerleri de gösterilebilir.

Tanım 2.2.21. I , $\mathbb{R}_{\exp}$ üzerinde bir aralık olsun ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ fonksiyonu verilsin.

Her $x, y \in I$ ve $\gamma \in [1, e]$ için

$$f(\gamma \odot x \oplus (e \ominus \gamma) \odot y) \leq_{\exp} \gamma \odot f(x) \oplus (e \ominus \gamma) \odot f(y)$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna I aralığında BG -konveks fonksiyon denir (Güngör, 2020c).



3. BİGEOMETRİK İNTEGRAL DENKLEMLER

Bigeometrik integral denklemler, bilinmeyen $\mathbb{R}_{\exp}$ değerli bir fonksiyonun bigeometrik integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanabilir. Bu tanımdan yola çıkarak BG -integral denklemlerinin sınıfları detaylı bir şekilde aşağıda ifade edilecektir.

3.1. BG -İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

Tek değişkenli fonksiyonlarda bir BG -integral denkleminin genel durumu;

$$\psi(x) \odot \phi(x) = f(x) \oplus \lambda \odot \int_a^b K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada a ve b exp-sabit; $\lambda \in \mathbb{R}_{\exp}$; $\psi(x)$, $f(x)$ ve $K(x, t)$; tanım bölgesi, $a \leq_{\exp} x$, $t \leq_{\exp} b$ olan bilinen $\mathbb{R}_{\exp}$ değerli fonksiyonlar; $\phi(x)$ ise bilinmeyen $\mathbb{R}_{\exp}$ değerli bir fonksiyondur. Ayrıca $K(x, t)$ fonksiyonuna BG -integral denkleminin çekirdeği adı verilir.

3.1.1. Lineer ve Lineer Olmayan BG -İntegral Denklemler

$\phi(x)$ bilinmeyen $\mathbb{R}_{\exp}$ değerli bir fonksiyon olmak üzere;

$$\phi(x) = f(x) \oplus \int_a^b K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t$$

integral denkleminde, $\phi(x)$ fonksiyonu exp-lineer (yani exp-kuvveti 1) ise lineer BG -integral denklem adı verilir. Öte yandan,

$$\phi(x) = f(x) \oplus \int_a^b K(x, t) \odot \phi^{n_{\exp}}(t) d^{BG} t, n \neq 1$$

BG -integral denkleminde ise $\phi(x)$ bilinmeyen $\mathbb{R}_{\exp}$ değerli fonksiyonunun n . exp-kuvveti bulunduğundan bu BG -integral denklemi lineer olmayan bir BG -integral denklemdir.

3.1.2. Singüler ve Singüler Olmayan BG -Lineer İntegral Denklemler

BG -integral denklemler, $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonunun BG -süreklilik durumuna göre sınıflandırılabilirler. $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu $a \leq_{\exp} x \leq_{\exp} b$, $a \leq_{\exp} t \leq_{\exp} b$ aralığında BG -sürekli ise BG -integral denklem, singüler (tekil) olmayan BG -integral denklemdir. Eğer $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu $a \leq_{\exp} x \leq_{\exp} b$, $a \leq_{\exp} t \leq_{\exp} b$ aralığında BG -sürekli değil ise singüler BG -integral denklemdir.

3.1.3. BG -İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması

$\phi(x)$ bilinmeyen $\mathbb{R}_{\exp}$ değerli bir fonksiyon, $u(x)$, $f(x)$ ve $K(x, t)$ bilinen $\mathbb{R}_{\exp}$ değerli fonksiyonlar olmak üzere;

$$u(x) = {}_{BG} \int_a^b K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (1)$$

$$u(x) = f(x) \oplus {}_{BG} \int_a^b K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (2)$$

şeklinde verilen (1) ve (2) BG -integral denklemleri, birinci tip BG -integral denklemlerdir. Bu denklemlerde bilinmeyen fonksiyon sadece BG -integral içindedir.

$\phi(x)$ bilinmeyen $\mathbb{R}_{\exp}$ değerli bir fonksiyon, $f(x)$ ve $K(x, t)$ bilinen $\mathbb{R}_{\exp}$ değerli fonksiyonlar olmak üzere;

$$\phi(x) = {}_{BG} \int_a^b K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (3)$$

$$\phi(x) = f(x) \oplus {}_{BG} \int_a^b K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (4)$$

şeklinde verilen (3) ve (4) BG -integral denklemleri, ikinci tip BG -integral denklemlerdir. Bu denklemlerde, bilinmeyen fonksiyon BG -integralin hem içinde hem de dışındadır.

$\phi(x)$ bilinmeyen $\mathbb{R}_{\exp}$ değerli bir fonksiyon, $u(x)$, $f(x)$ ve $K(x, t)$ bilinen $\mathbb{R}_{\exp}$ değerli fonksiyonlar olmak üzere;

$$u(x) \odot \phi(x) = f(x) \oplus_{BG} \int_a^b K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (5)$$

BG -integral denklemi, üçüncü tip BG -integral denklemdir. (5) BG -integral denklemi, integral dışındaki bilinmeyen fonksiyonun katsayısına göre birinci ve ikinci tip BG -integral denkleme dönüştürülebilir.

3.1.4. Homojen ve Homojen Olmayan BG -İntegral Denklemler

Bir BG -integral denkleminde, integralin dışında ve bilinmeyen ϕ fonksiyonu haricinde f gibi bir fonksiyon bulundurmeyen BG -integral denklemlere, homojen BG -integral denklemi denir. f fonksiyonu bulunduran BG -integral denklemlere ise homojen olmayan BG -integral denklemi denir.

Buradan hareketle, (3) ile tanımlanan BG -integral denklemi, homojen BG -integral denklemi, (4) ile tanımlanan BG -integral denklemi ise homojen olmayan BG -integral denklemi olarak adlandırılır.

3.1.5. BG -Volterra ve BG -Fredholm İntegral Denklemler

BG -integral denklemler, BG -integral sınırlarının değişken ya da $\exp$ -sabit olmasına göre de sınıflandırılır.

$$f(x) = \int_a^x K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (6)$$

$$\phi(x) = f(x) \oplus_{BG} \int_a^x K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (7)$$

$$u(x) \odot \phi(x) = f(x) \oplus_{BG} \int_a^x K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (8)$$

şeklinde tanımlanan denklemlere, sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü tip BG -Volterra integral denklemleri denilmektedir (Güngör, 2020a). Bu tür denklemlerde, BG -integral işaretinin üst sınırında (veya sınırlarından birinde) x değişkeni bulunur. x değişkenin $x = b$ gibi bir exp-sabit değerine eşit olması halinde yazılabilecek;

$$f(x) = {}_{BG} \int_a^b K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (9)$$

$$\phi(x) = f(x) \oplus {}_{BG} \int_a^b K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (10)$$

$$u(x) \odot \phi(x) = f(x) \oplus {}_{BG} \int_a^b K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (11)$$

denklemler ise sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü tip BG -Fredholm integral denklemleri olarak tanımlanır (Güngör, 2020b).

3.1.6. Exp-Parametrelili İntegral Denklemler

$\lambda \in \mathbb{R}_{\exp}$, $\lambda \neq 1$ ve $\lambda \neq e$ koşullarını gerçekleştiren bir exp-parametre olmak üzere şu ana kadar ifade edilen BG -integral denklemlere, λ exp-parametresinin eklenmesiyle daha genel bir durum elde edilir. Örneğin;

$$\phi(x) = f(x) \oplus \lambda \odot {}_{BG} \int_a^x K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (12)$$

$$\phi(x) = f(x) \oplus \lambda \odot {}_{BG} \int_a^b K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (13)$$

denklemleri, λ exp-parametresiyle verilen sırasıyla ikinci tip BG -Volterra integral denklemleri ve ikinci tip BG -Fredholm integral denklemlerine birer örnektir.

3.1.7. Konvolüsyon Çekirdekli BG -İntegral Denklemler

$K(x, t)$ bilinen $\mathbb{R}_{\exp}$ değerli çekirdek fonksiyonu, $x \ominus t$ nin bir fonksiyonu olmak üzere;

$$f(x) = {}_{BG} \int_a^x K(x \ominus t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (14)$$

$$\phi(x) = f(x) \oplus {}_{BG} \int_a^x K(x \ominus t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (15)$$

$$u(x) \odot \phi(x) = f(x) \oplus {}_{BG} \int_a^x K(x \ominus t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (16)$$

şeklinde tanımlanan integral denklemleri sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü konvolüsyon tipi BG -Volterra integral denklemleri olarak tanımlanır.

$$f(x) = {}_{BG} \int_a^b K(x \ominus t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (17)$$

$$\phi(x) = f(x) \oplus {}_{BG} \int_a^b K(x \ominus t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (18)$$

$$u(x) \odot \phi(x) = f(x) \oplus {}_{BG} \int_a^b K(x \ominus t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (19)$$

denklemleri ise sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü konvolüsyon tipi BG -Fredholm integral denklemleri olarak tanımlanır.

3.2. BG -İntegral Denklemler ile BG -Diferansiyel Denklemler Arasındaki İlişki

Bigeometrik Volterra integral denklemler, BG -diferansiyel denklemlere dönüştürülebildiği gibi; benzer şekilde başlangıç koşullarıyla verilen BG -diferansiyel denklemler de BG -Volterra integral denklemlerine dönüştürülebilir. Buradan yola çıkarak bu kısımda gerekli olan tanım, teorem ve örnekler verilmiştir.

Tanım 3.2.1. Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun, x bağımsız değişkeni, y bağlı değişkeni ve y değişkeninin sınırlı sayıda herhangi bir mertebeye kadar BG -türevleri arasında kurulmuş olan bağıntıya bigeometrik diferansiyel denklem denir. Buna göre, BG -diferansiyel denklemin genel ifadesi,

$$F\left(x, y, \frac{d^{BG}y}{dx^{BG}}, \frac{d^{2BG}y}{dx^{2BG}}, \dots, \frac{d^{nBG}y}{dx^{nBG}}\right) = 0$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.2. $f, \mathbb{R}_{\exp}$ değerli fonksiyon olmak üzere,

$$y^{nBG} \oplus a_1(x) \odot y^{(n-1)BG} \oplus \dots \oplus a_{n-1}(x) \odot y^{BG} \oplus a_n(x) \odot y = f(x)$$

şeklinde yazılan denklem formu, n . mertebeden lineer BG -diferansiyel denklemi olarak tanımlanır. $a_n(x)$ katsayıları sabit ise denklem sabit katsayılı lineer BG -diferansiyel denklemi olur fakat $a_n(x)$ katsayıları sabit değil ise denklem değişken katsayılı lineer BG -diferansiyel denklemi olarak adlandırılır (Güngör, 2020a).

Tanımdan da görüldüğü üzere bir BG -diferansiyel denklemin lineer olabilmesi için bağımlı ve bağımsız değişkenlerinin hepsinin $\exp$ -kuvvetleri 1 olmalıdır. O halde bağımlı ya da bağımsız değişkenlerin $\exp$ -kuvvetleri 1 den farklı ise veya bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin BG -türevlerinin geometrik çarpımları mevcut ise BG -diferansiyel denklem lineer değildir.

Teorem 3.2.1. (BG-Leibnitz Kuralı) A, I $\exp$ -açık kümeleri olsun ve $f: A \times I \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ olacak şekilde BG -sürekli fonksiyonu verilsin. $A \times I$ kümesi üzerinde f_x^{BG} kısmi BG -türevi var ve $A \times I$ kümesi üzerinde BG -sürekli, ayrıca A dan I ya tanımlanan $u(x)$ ve $v(x)$ BG -sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{d^{BG}}{dx^{BG}} \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) d^{BG}t \right) \\ = \int_{u(x)}^{v(x)} f_x^{BG}(x, t) d^{BG}t \oplus [f(x, v(x)) \odot v_x^{BG}] \ominus [f(x, u(x)) \odot u_x^{BG}] \end{aligned}$$

olur (Güngör, 2020a).

Örnek 3.2.1.

$$\phi(x) = e^x \oplus \int_1^x \phi(t) d^{BG}t$$

BG -Volterra integral denkleminin karşılık gelen BG -diferansiyel denklemini bulunuz.

Verilen BG -integral denkleminin her iki tarafının x' e göre BG -türevi alınır ve BG -Leibnitz kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d^{BG}}{dx^{BG}} \phi(x) &= \frac{d^{BG}}{dx^{BG}} e^x \oplus \frac{d^{BG}}{dx^{BG}} \left({}_{BG} \int_1^x \phi(t) d^{BG} t \right) \\ \phi^{BG}(x) &= e^x \oplus {}_{BG} \int_1^x \frac{\partial^{BG}}{\partial x^{BG}} \phi(t) d^{BG} t \oplus [\phi(x) \odot x_x^{BG}] \ominus [\phi(1) \odot 1_x^{BG}] \\ &= e^x \oplus \phi(x)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece verilen BG -integral denkleminin uyan diferansiyel denklemin

$$\phi^{BG}(x) \ominus \phi(x) = e^x$$

olduğu görülür. Başlangıç koşulunu belirlemek için BG -integral denkleminde $x = 1$ yazılırsa $\phi(1) = e$ bulunur. Böylece

$$\phi^{BG}(x) \ominus \phi(x) = e^x, \phi(1) = e$$

başlangıç değer problemi elde edilir.

Teorem 3.2.2. n bir pozitif tam sayı ve $a \in \mathbb{R}_{\exp}$ olmak üzere $a \leq_{\exp} x$ için,

$$\begin{aligned}{}_{BG} \int_a^x \dots (n) \dots {}_{BG} \int_a^x \phi(t) d^{BG} t \dots d^{BG} t \\ = \frac{e}{(n-1)!_{\exp}} \exp \odot {}_{BG} \int_a^x (x \ominus t)^{(n-1)_{\exp}} \odot \phi(t) d^{BG} t\end{aligned}$$

olur (Güngör, 2020a).

Örnek 3.2.2.

$$y^{(2)BG} \oplus x \odot y^{BG} \oplus y = e^2$$

$y(1) = e$ ve $y^{BG}(1) = 1$ başlangıç koşullarıyla verilen BG -diferansiyel denkleminin karşılık gelen BG -Volterra integral denklemini bulunuz.

$$\frac{d^{2BG}}{dx^{2BG}} = y^{(2)BG} = \phi(x)$$

olarak alınsın. Buradan,

$$\frac{d^{2BG}}{dx^{2BG}} = \frac{d^{BG}}{dx^{BG}} y^{BG} = \phi(x)$$

yazılır. Her iki tarafın BG -integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} {}_{BG} \int_1^x d^{BG}(y^{BG}) &= {}_{BG} \int_1^x \phi(t) d^{BG} t \\ y^{BG}(x) \ominus y^{BG}(1) &= {}_{BG} \int_1^x \phi(t) d^{BG} t \\ y^{BG}(x) &= {}_{BG} \int_1^x \phi(t) d^{BG} t \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan eşitliğin her iki tarafının tekrar BG -integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} {}_{BG} \int_1^x d^{BG}(y) &= {}_{BG} \int_1^x {}_{BG} \int_1^x \phi(t) d^{BG} t d^{BG} t \\ y(x) \ominus y(1) &= \frac{e}{1!_{\exp}} \exp \odot {}_{BG} \int_1^x (x \ominus t) \odot \phi(t) d^{BG} t \\ y(x) &= e \oplus \left(e \odot {}_{BG} \int_1^x (x \ominus t) \phi(t) d^{BG} t \right) \end{aligned}$$

olur. Elde edilen ifadeler verilen BG -diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa,

$$\phi(x) \oplus x \odot \int_1^x \phi(t) d^{BG} t \oplus e \oplus \left(e \odot \int_1^x (x \ominus t) \odot \phi(t) d^{BG} t \right) = e^2$$

bulunur. Buradan,

$$\phi(x) = e \ominus \int_1^x (x^2 \ominus t) \odot \phi(t) d^{BG} t$$

BG -Volterra integral denklemi elde edilir.



4. LİNEER BİGEOMETRİK VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN *BG*-HOMOTOPI PERTÜRBASYON METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde homotopi pertürbasyon metodunun temel tanım ve teoremleri bigeometrik kalkülüse aktararak elde edilen *BG*-homotopi pertürbasyon yöntemiyle lineer bigeometrik Volterra integral denklemlerinin çözümleri incelenmiştir.

4.1. *BG*-Homotopi Kavramı, *BG*-Pertürbasyon Teorisi ve *BG*-Homotopi Pertürbasyon Metodu

Bu kısımda, bigeometrik kalkülüste homotopi kavramı ve bigeometrik kalkülüste pertürbasyon teorisi açıklanıp *BG*-homotopi pertürbasyon metodunun temel özelliklerine ve bu yöntemin bigeometrik diferansiyel denklemlere uygulaması ifade edilerek gerekli örneklendirmelere yer verilmiştir.

4.1.1. *BG*-Homotopi Kavramı

Tanım 4.1.1. $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Y$ ($X, Y \subseteq \mathbb{R}_{\exp}$) *BG*-sürekli dönüşümler ve $I = [1, e]$ olsun. Her $x \in X$ için $H(x, 1) = f(x)$, $H(x, e) = g(x)$ eşitliklerini sağlayan bir $H: X \times I \rightarrow Y$, *BG*-sürekli dönüşümü mevcut ise f ve g fonksiyonları *BG*-homotopiktir denir. H dönüşümüne ise f ve g fonksiyonları arasında bir *BG*-homotopidir denir.

Örnek 4.1.1. $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}_{\exp} \times \mathbb{R}_{\exp}$ *BG*-sürekli dönüşümler olsun. Bu takdirde,

$$H(x, t) = [(e \ominus t) \odot f(x)] \oplus [t \odot g(x)]$$

şeklinde tanımlanan $H: X \times I \rightarrow \mathbb{R}_{\exp} \times \mathbb{R}_{\exp}$ dönüşümü *BG*-sürekli olduğundan ve her $x \in X$ için,

$$H(x, 1) = f(x)$$

$$H(x, e) = g(x)$$

ifadeleri gerçekleştiğinden, H dönüşümü f ve g fonksiyonları arasında bir *BG*-homotopidir. Yani, f ve g fonksiyonları *BG*-homotopiktir.

4.1.2. *BG*-Pertürbasyon Teorisi

BG-pertürbasyon teorisi, tam olarak çözülemeyen bir problemin nümerik çözümünü elde etmek için faydalanılan matematiksel yöntemler içerir. Bir probleme küçük bir terim ilave edildiğinde tam çözümü elde edebilecek şekilde formül gösterilebiliyorsa, verilen probleme *BG*-pertürbasyon teorisi uygulanabilir. Bu teoriden faydalanılarak bir problemin çözümünü, tam çözümü bulunabilen probleminden yön değiştirmeyi ölçen küçük bir $\exp$ -parametrenin *BG*-kuvvet serisi türünden bulmayı amaçlar. *BG*-kuvvet serisinin ilk terimi, tam çözümü bulunabilen problemin çözümü olurken, diğer terimler ise çözümde başlangıç problemine göre ne derece yön değiştirdiğini belirtir.

ε küçük bir $\exp$ -parametre olmak üzere u çözümüne yaklaşım için;

$$u = u_0 \oplus \varepsilon^{1\exp} \odot u_1 \oplus \varepsilon^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots$$

BG-serisi yazılsın. Burada u_0 kesin çözümü elde edilebilen başlangıç probleminin bilinen tam çözümünü, $u_1, u_2, \dots$ belirli bir yöntemle tekrarlanarak bulunan daha yüksek dereceden çözümleri ifade eder. Yeterince küçük ε $\exp$ -parametresi için bu *BG*-serisinin *BG*-yakınsak olması yüksek dereceden çözümlerin daha az önemli olduğunu belirtir. ε küçük $\exp$ -parametresinin uygun olarak seçilmesi, *BG*-pertürbasyon teorisinin etkili sonuçlar verebilmesi açısından önemlidir.

Örnek 4.1.2.

$$u = e \oplus \varepsilon \odot u^{3\exp} \quad (20)$$

bigometrik cebirsel denklemi göz önüne alınsın. Bu denklemin *BG*-pertürbasyon teorisi ile yaklaşık çözümünü inceleyiniz.

(20) denkleminde $\varepsilon = 1$ için $u = e$ bulunur. Geometrik sıfırdan farklı yeterince küçük ε yani $\varepsilon \neq 1$ için,

$$u = e \oplus \varepsilon \odot u_1 \oplus \varepsilon^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots \quad (21)$$

BG-serisi göz önüne alınsın. Bu *BG*-serisi (20) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\varepsilon \odot u_1 \oplus \varepsilon^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots = \varepsilon \odot (e \oplus \varepsilon \odot u_1 \oplus \varepsilon^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots)^{3\exp}$$

olur. Böylece,

$$\varepsilon \odot u_1 \oplus \varepsilon^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots = \varepsilon \odot [e \oplus e^3 \odot \varepsilon \odot u_1 \oplus e^3 \odot \varepsilon^{2\exp} \odot (u_2 \oplus u_1^{2\exp}) \oplus \dots]$$

olup bu eşitlik ε değerlerinin aynı exp-kuvvetlerinin katsayılarına göre düzenlendiğinde

$$\varepsilon \odot (u_1 \ominus e) \oplus \varepsilon^{2\exp} \odot (u_2 \ominus e^3 \odot u_1) \oplus \varepsilon^{3\exp} \odot (u_3 \ominus e^3 \odot u_2 \ominus e^3 \odot u_1^{2\exp}) \oplus \dots = 1$$

elde edilir. Bu eşitlikten faydalanılarak;

$$u_1 \ominus e = 1 \tag{22}$$

$$u_2 \ominus e^3 \odot u_1 = 1 \tag{23}$$

$$u_3 \ominus e^3 \odot u_2 \ominus e^3 \odot u_1^{2\exp} = 1 \tag{24}$$

$\vdots$

denklem sistemi elde edilir. Buradan (22) denkleminin çözümü

$$u_1 = e$$

bulunur. Böylece (23) ve (24) denklemlerinin çözümlerinin sırasıyla

$$u_2 = e^3 \odot u_1 = e^3$$

ve

$$u_3 = e^3 \odot u_2 \oplus e^3 \odot u_1^{2\exp} = e^{12}$$

olduğu görülür. Bulunan bu değerler (21) ifadesindeki BG -kuvvet serisinde yerine yazılırsa;

$$u = e \oplus \varepsilon \oplus e^3 \odot \varepsilon^{2\exp} \oplus e^{12} \odot \varepsilon^{3\exp} \oplus \dots \tag{25}$$

olup buradaki üç nokta, $n \geq 4$ koşulunu sağlayan $\varepsilon^{n\exp}$ kuvvetlerine sahip tüm terimleri temsil eder. Dolayısıyla (25) denklemini $\varepsilon = 1$ için $u = e$ olmak üzere (20) ifadesinin yaklaşık çözümüdür.

4.1.3. *BG*-Homotopi Pertürbasyon Metodu

BG-homotopi pertürbasyon metodu, *BG*-homotopi ile *BG*-pertürbasyon teorisinin birleştirilmesiyle elde edilmiştir. Bu metodu açıklamak için, A genel *BG*-diferansiyel operatör, B *BG*-sınır operatörü, f *BG*-analitik fonksiyon ve Γ, Ω bölgesinin sınırı olmak üzere

$$A(y) \ominus f(x) = 1, \quad x \in \Omega \quad (26)$$

diferansiyel denklemi,

$$B\left(y, \frac{\partial^{BG} y}{\partial x^{BG}}\right) = 1, \quad x \in \Gamma \quad (27)$$

sınır koşulları ile ele alınsın. A genel *BG*-diferansiyel operatörü genellikle L , *BG*-lineer olan ve N , *BG*-lineer olmayan operatör olmak üzere ikiye ayrılır. Bu sebeple (26) denklemi çoğu zaman;

$$L(y) \oplus N(y) \ominus f(x) = 1, \quad x \in \Omega \quad (28)$$

biçiminde yazılır. $x \in \Omega$ ve *BG*-homotopi parametresi $p \in [1, e]$ olmak üzere $u(x, p): \Omega \times [1, e] \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ göz önüne alınsın. (26) denkleminin sınır koşullarını sağlayan başlangıç yaklaşımı olarak y_0 seçilirse;

$$\begin{aligned} H(u, p) &= (e \ominus p) \odot [L(u(x, p)) \ominus L(y_0(x))] \oplus p \odot [A(u(x, p)) \ominus f(x)] \\ &= 1 \end{aligned} \quad (29)$$

BG-homotopisi elde edilir. Bu *BG*-homotopiden;

$$H(u, 1) = L(u(x, 0)) \ominus L(y_0(x)) = 1, \quad H(u, e) = A(u(x, 1)) \ominus f(x) = 1$$

eşitliklerinin gerçekleştiği kolayca görülür. p parametresinin 1 sayısından e sayısına doğru değişmesi; $H(u, p)$ *BG*-homotopisinin, $L(u) \ominus L(y_0)$ ifadesinden $A(u) \ominus f(x)$ ifadesine yaklaşması olarak yorumlanır. Buna göre $L(u) \ominus L(y_0)$ ve $A(u) \ominus f(x)$ ifadeleri *BG*-homotopiktir. $p \in [1, e]$ sayısının küçük bir exp-parametre olmasından

dolayı BG -pertürbasyon tekniğinden faydalanılarak BG -homotopi denkleminin çözümü p exp-parametresinin bir BG -kuvvet serisi olarak;

$$u(x, p) = u_0(x) \oplus p \odot u_1(x) \oplus p^{2\text{exp}} \odot u_2(x) \oplus \dots \quad (30)$$

şeklinde ifade edilir. Bigeometrik limit ve klasik limit arasındaki ilişkiden yararlanılarak

$$\begin{aligned} {}_{BG}\lim_{p \rightarrow e} u(x, p) &= \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow \ln e} [\ln(u_0 \cdot e^{t \cdot \ln u_1} \cdot e^{t \cdot \ln e^t \cdot \ln u_2} \cdot \dots)] \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow 1} [\ln u_0 + \ln e^{t \cdot \ln u_1} + \ln e^{t \cdot \ln e^t \cdot \ln u_2} + \dots] \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow 1} [\ln u_0 + t \cdot \ln u_1 + t^2 \cdot \ln u_2 + \dots] \right\} \\ &= \exp \{ \ln u_0 + \ln u_1 + \ln u_2 + \dots \} \\ &= e^{\ln u_0} \cdot e^{\ln u_1} \cdot e^{\ln u_2} \cdot \dots \\ &= u_0(x) \cdot u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \dots \\ &= u_0(x) \oplus u_1(x) \oplus u_2(x) \oplus \dots \end{aligned}$$

yazılır. Böylece $p \xrightarrow{BG} e$ iken (26) denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} y(x) &= {}_{BG}\lim_{p \rightarrow e} u(x, p) = u_0(x) \oplus u_1(x) \oplus u_2(x) \oplus \dots \\ &= \exp \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \end{aligned} \quad (31)$$

olarak bulunur. (31) BG -kuvvet serisi çoğu durum için BG -yakınsaktır.

BG -homotopi pertürbasyon metodunun daha net anlaşılması için bazı bigeometrik diferansiyel denklemlere uygulaması aşağıda örneklerle ifade edilmiştir.

Örnek 4.1.3. BG -homotopi pertürbasyon yöntemini kullanarak,

$$\frac{d^{BG} y}{dx^{BG}} \oplus y^{2\text{exp}} = 1$$

homojen BG -diferansiyel denkleminin $y(1) = e$ başlangıç koşuluyla çözümünü inceleyiniz.

$x \in \Omega$ ve BG -homotopi parametresi $p \in [1, e]$ olmak üzere $u(x, p): \Omega \times [1, e] \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ göz önüne alınsın. BG -diferansiyel denkleminin başlangıç koşulu y_0 seçilerek,

$$H(u, p) = (e \ominus p) \odot [L(u(x, p)) \ominus L(y_0(x))] \oplus p \odot [A(u(x, p)) \ominus f(x)] = 1$$

şeklinde BG -konveks homotopi tanımlansın. Verilen denklemde $A(y) = \frac{d^{BG}y}{dx^{BG}} \oplus y^{2\exp}$ ve $f(x) = 1$ dir. A operatörü $L(y) = \frac{d^{BG}y}{dx^{BG}}$ ve $N(y) = y^{2\exp}$ olmak üzere BG -lineer olan ve BG -lineer olmayan operatörlerin toplamı olarak ifade edilir. Bu durumda değerler BG -konveks homotopide yerine yazılırsa;

$$H(u, p) = (e \ominus p) \odot \left(\frac{d^{BG}u}{dx^{BG}} \ominus \frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}} \right) \oplus p \odot \left(\frac{d^{BG}u}{dx^{BG}} \oplus u^{2\exp} \right) = 1 \quad (32)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} H(u, p) &= \left(\frac{e}{p} \right)^{\ln \left(\frac{\frac{d^{BG}u}{dx^{BG}}}{\frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}}} \right)} \cdot p^{\ln \left(\frac{d^{BG}u}{dx^{BG}} \cdot u^{\ln u} \right)} \\ &= \frac{e^{\ln \left(\frac{\frac{d^{BG}u}{dx^{BG}}}{\frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}}} \right)}}{p^{\ln \left(\frac{\frac{d^{BG}u}{dx^{BG}}}{\frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}}} \right)}} \cdot p^{\ln \left(\frac{d^{BG}u}{dx^{BG}} \right)} \cdot p^{\ln(u^{\ln u})} \\ &= \frac{\frac{\frac{d^{BG}u}{dx^{BG}}}{\frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}}}}{p^{\frac{\ln \left(\frac{d^{BG}u}{dx^{BG}} \right)}{\ln \left(\frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}} \right)}}} \cdot p^{\ln \left(\frac{d^{BG}u}{dx^{BG}} \right)} \cdot p^{\ln(u^{\ln u})} \\ &= \frac{\frac{d^{BG}u}{dx^{BG}}}{\frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}}} \cdot p^{\ln \left(\frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}} \right)} \cdot p^{\ln(u^{\ln u})} \\ &= \frac{d^{BG}u}{dx^{BG}} \ominus \frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}} \oplus p \odot \frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}} \oplus p \odot u^{2\exp} \end{aligned}$$

bulunur. (32) ifadesinden,

$$\frac{d^{BG}u}{dx^{BG}} \ominus \frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}} \oplus p \odot \frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}} \oplus p \odot u^{2\exp} = 1$$

yazılır. Böylece,

$$\frac{d^{BG}u}{dx^{BG}} = 1 \oplus \frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}} \ominus p \odot \frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}} \ominus p \odot u^{2\exp} \quad (33)$$

eşitliği elde edilir. $y = {}_{BG}\lim_{p \rightarrow e}(u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots)$ olmak üzere (33)

denkleminin çözümünün

$$u = u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots$$

BG -kuvvet serisi formunda olduğu kabul edilsin. Bu BG -serisi (33) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots) &= 1 \oplus \frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}} \ominus p \odot \frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}} \ominus p \\ &\odot (u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots)^{2\exp} \end{aligned}$$

olur. p exp-parametresinin aynı exp-kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek,

$$\begin{aligned} p^{0\exp} : \frac{d^{BG}u_0}{dx^{BG}} &= \frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}} \\ p^{1\exp} : \frac{d^{BG}u_1}{dx^{BG}} &= (1 \ominus e) \odot \frac{d^{BG}y_0}{dx^{BG}} \ominus u_0^{2\exp} \\ p^{2\exp} : \frac{d^{BG}u_2}{dx^{BG}} &= (1 \ominus e) \odot e^2 \odot u_0 \odot u_1 \\ p^{3\exp} : \frac{d^{BG}u_3}{dx^{BG}} &= (1 \ominus e) \odot e^2 \odot u_0 \odot u_2 \ominus u_1^{2\exp} \\ p^{4\exp} : \frac{d^{BG}u_4}{dx^{BG}} &= (1 \ominus e) \odot e^2 \odot u_0 \odot u_3 \ominus e^2 \odot u_1 \odot u_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

BG -diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu denklemlerin x' e göre BG -integrali alınır aşağıdaki ifadeler bulunur:

$p^{0\exp}$ için,

$${}_{BG} \int \left(\frac{d^{BG} u_0}{dx^{BG}} \right) d^{BG} x = {}_{BG} \int \left(\frac{d^{BG} y_0}{dx^{BG}} \right) d^{BG} x$$

olup başlangıç koşulu göz önüne alındığında

$$u_0(x) = y_0(x) = e$$

eşitliği elde edilir.

$p^{1\text{exp}}$ için,

$${}_{BG} \int \left(\frac{d^{BG} u_1}{dx^{BG}} \right) d^{BG} x = {}_{BG} \int \left((1 \ominus e) \odot \frac{d^{BG} y_0}{dx^{BG}} \ominus u_0^{2\text{exp}} \right) d^{BG} x$$

olup bigeometrik ve klasik integral arasındaki ilişkiden faydalanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= {}_{BG} \int ((1 \ominus e) \odot 1 \ominus e^{2\text{exp}}) d^{BG} x = {}_{BG} \int (1 \ominus e) d^{BG} x \\ &= e^{\int \frac{\ln(\frac{1}{e})}{x} dx} = e^{(\ln 1 - \ln e) \cdot \ln x} = e^{-\ln e \cdot \ln x} \\ &= \left((e^{\ln x})^{\ln e} \right)^{-1} = x^{\left(\ln \frac{1}{e} \right)} \\ &= (1 \ominus e) \odot x \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$p^{2\text{exp}}$ için,

$${}_{BG} \int \left(\frac{d^{BG} u_2}{dx^{BG}} \right) d^{BG} x = {}_{BG} \int ((1 \ominus e) \odot e^2 \odot u_0 \odot u_1) d^{BG} x$$

olup bigeometrik ve klasik integral arasındaki ilişkiden faydalanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} u_2(x) &= {}_{BG} \int ((1 \ominus e) \odot e^2 \odot e \odot ((1 \ominus e) \odot x)) d^{BG} x \\ &= {}_{BG} \int (e^{-2} \odot e \odot x^{-1}) d^{BG} x = {}_{BG} \int (x^{-1})^{\ln e^{-2}} d^{BG} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= {}_{BG} \int x^2 d^{BG} x = e^{2 \cdot \frac{\ln^2 x}{2}} \\
&= e^{\ln^2 x} = (e^{\ln x})^{\ln x} = x^{\ln x} \\
&= x^{2\exp}
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde BG -diferansiyel denklem sistemi çözülerek devam edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= e \\
u_1(x) &= (1 \ominus e) \odot x \\
u_2(x) &= x^{2\exp} \\
u_3(x) &= (1 \ominus e) \odot x^{3\exp} \\
u_4(x) &= x^{4\exp} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

çözümleri elde edilmiş olur. p exp-parametresi e noktasına BG -yakınsarken (33) denkleminin çözümü,

$$y = {}_{BG} \lim_{p \rightarrow e} (u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots)$$

olduğundan

$$y(x) = e \ominus x \oplus x^{2\exp} \ominus x^{3\exp} \oplus x^{4\exp} \oplus \dots$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
y(x) &= e \ominus x \oplus x^{2\exp} \ominus x^{3\exp} \oplus x^{4\exp} \oplus \dots \\
&= e \cdot (e^{\ln x})^{\ln \frac{1}{e}} \cdot (e^{\ln x})^2 \cdot (e^{(\ln x)^3})^{\ln \frac{1}{e}} \cdot \dots \\
&= e \cdot (e^{\ln x})^{-1} \cdot (e^{\ln x})^2 \cdot (e^{(\ln x)^3})^{-1} \dots \\
&= e^{1 - \ln x + (\ln x)^2 - (\ln x)^3 + \dots} \\
&= e^{\left(\frac{1}{1 + \ln x}\right)} = e^{\left(\frac{1}{\ln(e \cdot x)}\right)} \\
&= \frac{e}{e \oplus x} \exp
\end{aligned}$$

olduğundan bulunan bu BG -seri çözümünün kapalı formu olan

$$y(x) = \frac{e}{e \oplus x} \exp$$

eşitliği problemin tam çözümünü verir.

Bigeometrik kalkülüs ve klasik kalkülüs arasındaki ilişkiden faydalanılarak, verilen problem $y(1) = e$ başlangıç koşulu ile

$$xy'(x) + y(x)(\ln y(x))^2 = 0$$

diferansiyel denkleme dönüştür. O halde bu diferansiyel denklemin çözümü,

$$y(x) = e^{\frac{1}{1+\ln x}}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.2.5. BG -homotopi pertürbasyon yöntemini kullanılarak

$$y_t^{BG} \oplus y \odot y_x^{BG} = x$$

homojen olmayan BG -diferansiyel denkleminin, $y(x, 1) = e^2$ başlangıç koşuluyla çözümünü inceleyiniz.

$x \in \Omega$ ve BG -homotopi parametresi $p \in [1, e]$ olmak üzere $u(x, p): \Omega \times [1, e] \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ göz önüne alınsın. BG -diferansiyel denkleminin başlangıç koşulu y_0 seçilerek,

$$H(u, p) = (e \ominus p) \odot [L(u(x, p)) \ominus L(y_0(x))] \oplus p \odot [A(u(x, p)) \ominus f(x)] = 1$$

şeklinde BG -konveks homotopi tanımlansın. Verilen denklemde $A(y) = y_t^{BG} \oplus y \odot y_x^{BG}$ ve $f(x) = x$ dir. A operatörü $L(y) = y_t^{BG}$ ve $N(y) = y \odot y_x^{BG}$ olmak üzere BG -lineer olan ve BG -lineer olmayan operatörlerin toplamı olarak ifade edilir. Bu durumda değerler BG -konveks homotopide yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
H(u, p) &= (e \ominus p) \odot \left(\frac{\partial^{BG} u}{\partial t^{BG}} \ominus \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \right) \oplus p \odot \left(\frac{\partial^{BG} u}{\partial t^{BG}} \oplus u \odot \frac{\partial^{BG} u}{\partial x^{BG}} \ominus x \right) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{34}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
H(u, p) &= e \odot \left(\frac{\partial^{BG} u}{\partial t^{BG}} \ominus \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \right) \ominus p \odot \left(\frac{\partial^{BG} u}{\partial t^{BG}} \ominus \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \right) \oplus p \odot \frac{\partial^{BG} u}{\partial t^{BG}} \\
&\quad \oplus p \odot \left(u \odot \frac{\partial^{BG} u}{\partial x^{BG}} \ominus x \right) \\
&= \frac{\partial^{BG} u}{\partial t^{BG}} \ominus \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \ominus p \odot \frac{\partial^{BG} u}{\partial t^{BG}} \oplus p \odot \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \oplus p \odot \frac{\partial^{BG} u}{\partial t^{BG}} \\
&\quad \oplus p \odot \left(u \odot \frac{\partial^{BG} u}{\partial x^{BG}} \ominus x \right) \\
&= \frac{\partial^{BG} u}{\partial t^{BG}} \ominus \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \oplus p \odot \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \oplus p \odot \left(u \odot \frac{\partial^{BG} u}{\partial x^{BG}} \ominus x \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (34) ifadesinden,

$$\frac{\partial^{BG} u}{\partial t^{BG}} \ominus \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \oplus p \odot \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \oplus p \odot \left(u \odot \frac{\partial^{BG} u}{\partial x^{BG}} \ominus x \right) = 1$$

yazılır. Böylece,

$$\frac{\partial^{BG} u}{\partial t^{BG}} = 1 \oplus \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \ominus p \odot \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \ominus p \odot \left(u \odot \frac{\partial^{BG} u}{\partial x^{BG}} \ominus x \right) \tag{35}$$

eşitliği elde edilir. $y = {}_{BG}\lim_{p \rightarrow e}(u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots)$ olmak üzere (35)

denkleminin çözümünün,

$$u = u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots$$

BG -kuvvet serisi formunda olduğu kabul edilsin. Bu BG -serisi (35) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{BG}}{\partial t^{BG}} (u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots) &= 1 \oplus \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \ominus p \odot \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \ominus p \\
&\odot ((u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots) \\
&\odot \frac{\partial^{BG}}{\partial x^{BG}} (u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots) \ominus x)
\end{aligned}$$

olur. p exp-parametresinin aynı exp-kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek,

$$\begin{aligned}
p^{0\exp} : \frac{\partial^{BG} u_0}{\partial t^{BG}} &= \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \\
p^{1\exp} : \frac{\partial^{BG} u_1}{\partial t^{BG}} &= (1 \ominus e) \odot \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \ominus u_0 \odot \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial x^{BG}} \oplus x \\
p^{2\exp} : \frac{\partial^{BG} u_2}{\partial t^{BG}} &= (1 \ominus e) \odot u_0 \odot \frac{\partial^{BG} u_1}{\partial x^{BG}} \ominus u_1 \odot \frac{\partial^{BG} u_0}{\partial x^{BG}} \\
p^{3\exp} : \frac{\partial^{BG} u_3}{\partial t^{BG}} &= (1 \ominus e) \odot u_0 \odot \frac{\partial^{BG} u_2}{\partial x^{BG}} \ominus u_1 \odot \frac{\partial^{BG} u_1}{\partial x^{BG}} \ominus u_2 \odot \frac{\partial^{BG} u_0}{\partial x^{BG}} \\
p^{4\exp} : \frac{\partial^{BG} u_3}{\partial t^{BG}} &= (1 \ominus e) \odot u_0 \odot \frac{\partial^{BG} u_3}{\partial x^{BG}} \ominus u_1 \odot \frac{\partial^{BG} u_2}{\partial x^{BG}} \ominus u_2 \odot \frac{\partial^{BG} u_1}{\partial x^{BG}} \\
&\ominus u_3 \odot \frac{\partial^{BG} u_0}{\partial x^{BG}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

BG -diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu denklemlerin t değişkenine göre BG -integrali alınırsa aşağıdaki ifadeler bulunur:

p^{0exp} için,

$${}_{BG} \int \left(\frac{\partial^{BG} u_0}{\partial t^{BG}} \right) d^{BG} t = {}_{BG} \int \left(\frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \right) d^{BG} t$$

olup başlangıç koşulu göz önüne alındığında

$$u_0 = y_0 = e^2$$

eşitliği elde edilir.

p^{1exp} için,

$${}_{BG} \int \left(\frac{\partial^{BG} u_1}{\partial t^{BG}} \right) d^{BG} t = {}_{BG} \int \left((1 \ominus e) \odot \frac{\partial^{BG} y_0}{\partial t^{BG}} \ominus u_0 \odot \frac{\partial^{BG} u_0}{\partial x^{BG}} \oplus x \right) d^{BG} t$$

olup bigeometrik ve klasik integral arasındaki ilişkiden faydalanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= {}_{BG} \int ((1 \ominus e) \odot 1 \ominus e^2 \odot 1 \oplus x) d^{BG} t = {}_{BG} \int (1 \ominus 1 \oplus x) d^{BG} t \\ &= {}_{BG} \int x d^{BG} t = e^{\int \frac{\ln x}{t} dt} = e^{\ln x \cdot \ln t} \\ &= (e^{\ln x})^{\ln t} = x^{\ln t} \\ &= x \odot t \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$p^{2\exp}$ için,

$${}_{BG} \int \left(\frac{\partial^{BG} u_2}{\partial t^{BG}} \right) d^{BG} t = {}_{BG} \int \left((1 \ominus e) \odot u_0 \odot \frac{\partial^{BG} u_1}{\partial x^{BG}} \ominus u_1 \odot \frac{\partial^{BG} u_0}{\partial x^{BG}} \right) d^{BG} t$$

olup bigeometrik ve klasik integral arasındaki ilişkiden faydalanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} u_2(x) &= {}_{BG} \int ((1 \ominus e) \odot e^2 \odot e) \ominus (x \odot t \odot 1) d^{BG} t \\ &= {}_{BG} \int (e^{-2} \odot 1) d^{BG} t \\ &= {}_{BG} \int e^{-2} dt^{BG} = e^{\int \frac{\ln e^{-2}}{t} dt} = e^{-2 \cdot \ln t} \\ &= (e^{(\ln t)^2})^{-1} = ((e^{\ln t})^{\ln t})^{-1} = (t^{\ln t})^{-1} \\ &= (1 \ominus e) \odot t^{2\exp} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$p^{3\exp}$ için,

$$\begin{aligned}
& {}_{BG} \int \left(\frac{\partial^{BG} u_3}{\partial t^{BG}} \right) d^{BG} t \\
& = {}_{BG} \int \left((1 \ominus e) \odot u_0 \odot \frac{\partial^{BG} u_2}{\partial x^{BG}} \ominus u_1 \odot \frac{\partial^{BG} u_1}{\partial x^{BG}} \ominus u_2 \odot \frac{\partial^{BG} u_0}{\partial x^{BG}} \right) d^{BG} t
\end{aligned}$$

olup bigeometrik ve klasik integral arasındaki ilişkiden faydalanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
u_3(x) &= {}_{BG} \int \left(((1 \ominus e) \odot e^2 \odot 1) \ominus (x \odot t \odot t) \ominus ((1 \ominus e) \odot t^{2\exp} \odot 1) \right) d^{BG} t \\
&= {}_{BG} \int (1 \ominus (x \odot t \odot t) \ominus 1) d^{BG} t = {}_{BG} \int \frac{1}{t^{\ln x \cdot \ln t}} d^{BG} t \\
&= e^{\int \frac{\ln(t^{-\ln x \cdot \ln t})}{t} dt} = e^{\int \frac{-\ln x \cdot \ln^2 t}{t} dt} = e^{-\frac{\ln x \cdot \ln^3 t}{3}} \\
&= \left(\left((e^{\ln t})^{\ln^2 t} \right)^{\ln x} \right)^{\frac{1}{3}}^{-1} = \left((t^{\ln^2 t})^{\ln x} \right)^{\frac{1}{3}}^{-1} \\
&= (1 \ominus e) \odot e^{-\frac{1}{3}} \odot t^{3\exp} \odot x
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde BG -diferansiyel denklem sistemi çözülerek devam edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= e^2 \\
u_1(x) &= x \odot t \\
u_2(x) &= (1 \ominus e) \odot t^{2\exp} \\
u_3(x) &= (1 \ominus e) \odot e^{-\frac{1}{3}} \odot t^{3\exp} \odot x \\
&\vdots
\end{aligned}$$

çözümleri elde edilmiş olur. p exp-parametresi e noktasına BG -yakınsarken (35) denkleminin çözümü,

$$y = {}_{BG} \lim_{p \rightarrow e} (u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots)$$

olduğundan

$$y(x) = e^2 \oplus x \odot t \ominus t^{2\exp} \ominus \left(e^{-\frac{1}{3}} \odot t^{3\exp} \odot x \right) \oplus \left(e^{\frac{2}{15}} \odot t^{5\exp} \odot x \right) \oplus \dots$$

bulunur.

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(e^2 \ominus t^{2\exp} \oplus e^{\frac{5}{12}} \odot t^{4\exp} \oplus \dots \right) \oplus x \odot \left(t \ominus e^{-\frac{1}{3}} \odot t^{3\exp} \right. \\ &\quad \left. \oplus e^{\frac{2}{15}} \odot t^{5\exp} \oplus \dots \right) \\ &= \left[e^2 \cdot (e^{(\ln t)^2})^{-1} \cdot (e^{(\ln t)^4})^{\frac{5}{12}} \cdot \dots \right] \cdot \left[\left(e^{(\ln t)^{\ln x}} \right) \cdot \left((e^{(\ln t)^3})^{-\frac{1}{3}} \right)^{\ln x} \cdot \left((e^{(\ln t)^5})^{\frac{2}{15}} \right)^{\ln x} \cdot \dots \right] \\ &= \left[e^2 \cdot e^{-(\ln t)^2} \cdot e^{\frac{5}{12}(\ln t)^4} \cdot \dots \right] \cdot \left[e^{(\ln t)^{\ln x}} \cdot \left(e^{-\frac{1}{3}(\ln t)^3} \right)^{\ln x} \cdot \left(e^{\frac{2}{15}(\ln t)^5} \right)^{\ln x} \cdot \dots \right] \\ &= \left(e^{2-(\ln t)^2+\frac{5}{12}(\ln t)^4-\dots} \right) \cdot \left(e^{\ln t -\frac{1}{3}(\ln t)^3+\frac{2}{15}(\ln t)^5-\dots} \right)^{\ln x} \\ &= \left(e^2 \right)^{\left(1-\frac{1}{2}(\ln t)^2+\frac{5}{24}(\ln t)^4-\dots \right)} \cdot \left(e^{\ln t -\frac{1}{3}(\ln t)^3+\frac{2}{15}(\ln t)^5-\dots} \right)^{\ln x} \\ &= \left(e^2 \right)^{(\text{sech}(\ln t))} \cdot \left(e^{\tanh(\ln t)} \right)^{\ln x} \\ &= e^2 \odot e^{\text{sech}(\ln t)} \oplus x \odot e^{\tanh(\ln t)} \end{aligned}$$

olduğundan bulunan bu *BG*-seri çözümünün kapalı formu olan

$$y(x) = e^2 \odot e^{\text{sech}(\ln t)} \oplus x \odot e^{\tanh(\ln t)}$$

eşitliği problemin tam çözümünü verir.

Bigeometrik kalkülüs ve klasik kalkülüs arasındaki ilişkiden faydalanılarak, verilen problem $y(x, 1) = e^2$ başlangıç koşulu ile

$$t \cdot y_t + x \cdot \ln y \cdot y_x = y \cdot \ln x$$

diferansiyel denklemine dönüştür. O halde bu denklemin çözümü ise

$$y(x, t) = \left(e^2 \right)^{(\text{sech}(\ln t))} \cdot \left(e^{\tanh(\ln t)} \right)^{\ln x}$$

olarak bulunur.

4.2. Lineer Bigeometrik Volterra İntegral Denklemlerine BG-Homotopi Pertürbasyon Metodunun Uygulanması

Bu bölümde ikinci tip bigeometrik Volterra integral denklemlerinin BG-homotopi pertürbasyon metodu ile çözümü incelenecek ve metodun daha net kavranması için sayısal örneklendirmelere yer verilecektir.

$$\phi(x) = f(x) \oplus \lambda \odot \int_1^x K(x, t) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (36)$$

ikinci tip lineer BG-Volterra integral denklemi verilsin. BG-integral denkleminin çözümü $u(x) = \phi(x)$ olmak üzere $F(u)$ fonksiyonel operatörü;

$$F(u) = u(x) \ominus f(x) \quad (37)$$

ve $L(u)$ operatörü;

$$L(u) = u(x) \ominus f(x) \ominus \lambda \odot \int_1^x K(x, t) \odot u(t) d^{BG} t = 1 \quad (38)$$

eşitliği ile ifade edilsin. $p \in [1, e]$ olmak üzere $u(x, p): \Omega \times [1, e] \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ BG-homotopisi kurulsun. Bu durumda BG-konveks homotopi denklemi, $F(u)$ ve $L(u)$ operatörleri kullanılarak,

$$H(u, p) = (e \ominus p) \odot F(u) \oplus p \odot L(u) = 1 \quad (39)$$

şeklinde tanımlanır. Oluşturulan bu BG-homotopinin $p = 1$ ve $p = e$ için sırasıyla

$$H(u, 1) = F(u), \quad H(u, e) = L(u)$$

eşitliklerini sağladığı kolaylıkla görülür.

$H(u, p)$, BG-homotopisi tam olarak tanımlanmış bir eğri boyunca $H(u_0, 1)$ başlangıç noktasından, $H(\phi, e)$ bitiş noktasına kadar sürekli bir yol izler. BG-homotopiye yerleştirilmiş olan p exp-parametresi 1 sayısından e sayısına doğru monoton artarken, $F(u) = 1$ aşıkâr problemi de sürekli olarak $L(u) = 1$ orijinal

problemine dönüşür. $p \in [1, e]$ küçük bir exp-parametre olduğu için BG-pertürbasyon tekniği kullanılarak (39) BG-homotopi denkleminin çözümü p exp-parametresinin bir BG-kuvvet serisi olarak;

$$u(x, p) = u_0(x) \oplus p \odot u_1(x) \oplus p^{2\text{exp}} \odot u_2(x) \oplus \dots \quad (40)$$

şeklinde ifade edilir. (40) BG-kuvvet serisi (39) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} H(u, p) &= (e \ominus p) \odot ((u_0(x) \oplus p \odot u_1(x) \oplus p^{2\text{exp}} \odot u_2(x) \oplus \dots) \ominus f(x)) \\ &\oplus p \odot \left(u(x) \ominus f(x) \ominus \lambda \odot {}_{BG} \int_1^x K(x, t) \odot (u_0(x) \oplus p \odot u_1(x) \right. \\ &\left. \oplus p^{2\text{exp}} \odot u_2(x) \oplus \dots) d^{BG} t \right) = 1 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. p exp-parametresinin aynı exp-kuvvete sahip terimleri bir araya getirilerek düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} H(u, p) &= p^{0\text{exp}} \odot (u_0(x) \ominus f(x)) \\ &\oplus p^{1\text{exp}} \odot \left(u_1(x) \ominus {}_{BG} \int_1^x K(x, t) \odot u_0(t) d^{BG} t \right) \\ &\oplus p^{2\text{exp}} \odot \left(u_2(x) \ominus {}_{BG} \int_1^x K(x, t) \odot u_1(t) d^{BG} t \right) \oplus \dots = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} p^{0\text{exp}}: u_0(x) \ominus f(x) &= 1 \Rightarrow u_0(x) = f(x) \\ p^{1\text{exp}}: u_1(x) \ominus {}_{BG} \int_1^x K(x, t) \odot u_0(t) d^{BG} t &= 1 \\ u_1(x) &= {}_{BG} \int_1^x K(x, t) \odot u_0(t) d^{BG} t \\ p^{2\text{exp}}: u_2(x) \ominus {}_{BG} \int_1^x K(x, t) \odot u_1(t) d^{BG} t &= 1 \end{aligned}$$

$$u_2(x) = {}_{BG} \int_1^x K(x, t) \odot u_1(t) d^{BG} t$$

$$\vdots$$

elde edilir. Bu ifade genel olarak,

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_{n+1} = {}_{BG} \int_1^x K(x, t) \odot u_n(t) d^{BG} t, \quad n \geq 0$$

şeklinde yazılır. ${}_{BG} \lim_{p \rightarrow e} u = u_0 \oplus u_1 \oplus u_2 \oplus \dots$ olduğundan BG -integral denkleminin yaklaşık çözümü

$$\phi = {}_{BG} \lim_{p \rightarrow e} u = \exp \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \quad (41)$$

olarak bulunur. Çözüm varsa (41) ifadesi (36) denkleminin kesin çözümüne yakınsar. (41) BG -serisi genellikle BG -yakınsak olup yakınsama oranı $L(u)$ ifadesine göre değişir. Sonuç olarak (41) serisinden istenilen sonuca ulaşılabilir.

Aşağıda BG -homotopi pertürbasyon yönteminin daha net anlaşılması için lineer BG -Volterra integral denklemlere uygulaması örneklerle gösterilmiştir.

Örnek 4.2.1. BG -homotopi pertürbasyon yöntemini kullanarak

$$\phi(x) = e \oplus {}_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot \phi(t) d^{BG} t$$

lineer BG -Volterra integral denkleminin çözümünü inceleyiniz.

İlk olarak, $x \in \Omega$ ve BG -homotopi parametresi $p \in [1, e]$ olmak üzere $u(x, p): \Omega \times [1, e] \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ göz önüne alınsın. Verilen problemin çözümü $u(x) = \phi(x)$ olmak üzere BG -konveks homotopi denklemi

$$H(u, p) = (e \ominus p) \odot F(u) \oplus p \odot L(u) = 1$$

dir. Verilen BG -integral denklemi için $F(u)$ ve $L(u)$ operatörleri,

$$F(u) = u(x) \ominus e$$

ve

$$L(u) = u(x) \ominus e \ominus \int_1^x (t \ominus x) \odot u(t) d^{BG} t$$

şeklinde olup bu ifadeler BG -konveks homotopide yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} H(u, p) &= (e \ominus p) \odot (u(x) \ominus e) \\ &\oplus p \odot \left[u(x) \ominus e \ominus \int_1^x (t \ominus x) \odot u(t) d^{BG} t \right] = 1 \end{aligned} \quad (42)$$

olur. Böylece bigeometrik kalkülüs ve klasik kalkülüs arasındaki ilişkiden faydalanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned} H(u, p) &= \left(\frac{e}{p} \right)^{\ln\left(\frac{u(x)}{e}\right)} \cdot p^{\ln\left(\frac{u(x)}{e} \cdot \frac{1}{\int_1^x (t \ominus x) \odot u(t) d^{BG} t}\right)} \\ &= \frac{e^{\ln\left(\frac{u(x)}{e}\right)}}{p^{\ln\left(\frac{u(x)}{e}\right)}} \cdot p^{\left[\ln\left(\frac{u(x)}{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{\int_1^x (t \ominus x) \odot u(t) d^{BG} t}\right) \right]} \\ &= \frac{e^{\ln\left(\frac{u(x)}{e}\right)}}{p^{\ln\left(\frac{u(x)}{e}\right)}} \cdot p^{\ln\left(\frac{u(x)}{e}\right)} \cdot p^{\ln\left(\frac{1}{\int_1^x (t \ominus x) \odot u(t) d^{BG} t}\right)} \\ &= \frac{u(x)}{e} \cdot p^{\ln\left(\frac{1}{\int_1^x (t \ominus x) \odot u(t) d^{BG} t}\right)} \\ &= \frac{u(x)}{e} \cdot \left(p^{\ln\left(\int_1^x (t \ominus x) \odot u(t) d^{BG} t}\right)} \right)^{-1} \\ &= u(x) \ominus e \ominus p \odot \int_1^x (t \ominus x) \odot u(t) d^{BG} t \\ &= u(x) \ominus e \ominus p \odot \int_1^x (t \ominus x) \odot u(t) d^{BG} t \end{aligned}$$

olup (42) ifadesinden

$$u(x) = e \oplus p \odot \int_1^x (t \ominus x) \odot u(t) d^{BG} t \quad (43)$$

eşitliği elde edilir. $\phi = \lim_{p \rightarrow e} (u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots)$ olmak üzere (43) denkleminin çözümünün

$$u(x) = u_0(x) \oplus p \odot u_1(x) \oplus p^{2\exp} \odot u_2(x) \oplus \dots$$

BG -kuvvet serisi formunda olduğu kabul edilsin. Bu BG -serisi (43) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & u_0(x) \oplus p \odot u_1(x) \oplus p^{2\exp} \odot u_2(x) \oplus \dots \\ &= e \oplus p \odot \int_1^x (t \ominus x) \odot (u_0(t) \oplus p \odot u_1(t) \oplus p^{2\exp} \odot u_2(t) \oplus \dots) d^{BG} t \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadede p exp-parametresinin aynı exp-kuvvetlerine göre katsayılar eşitlendiğinde,

$$\begin{aligned} p^{0\exp} : u_0(x) &= e \\ p^{1\exp} : u_1(x) &= \int_1^x (t \ominus x) \odot u_0(t) d^{BG} t \\ p^{2\exp} : u_2(x) &= \int_1^x (t \ominus x) \odot u_1(t) d^{BG} t \\ &\vdots \end{aligned}$$

BG -integral denklem sistemi elde edilir. Bigeometrik ve klasik integral arasındaki ilişkiden faydalanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında elde edilen BG -integral denklemlerin çözümleri aşağıdaki gibi bulunur.

$p^{0\exp}$ için,

$$u_0(x) = e$$

olur.

$p^{1\text{exp}}$ için,

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= {}_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot u_0(t) d^{BG} t \\
&= {}_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot e d^{BG} t \\
&= e^{\int_1^x \frac{\ln\left(\left(\frac{t}{x}\right)^{\ln e}\right)}{t} dt} = e^{\int_1^x \frac{\ln t - \ln x}{t} dt} \\
&= e^{\left(\frac{-\ln^2 x}{2}\right)} = \left(\left((e^{\ln x})^{\ln x}\right)^{\frac{1}{2!}}\right)^{-1} \\
&= \left((x^{\ln x})^{\frac{1}{\ln e 2!}}\right)^{-1} \\
&= (1 \ominus e) \odot \frac{x^{2\text{exp}}}{2!_{\text{exp}}} \exp
\end{aligned}$$

elde edilir.

$p^{2\text{exp}}$ için,

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= {}_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot u_1(t) d^{BG} t \\
&= {}_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot \left((1 \ominus e) \odot \frac{t^{2\text{exp}}}{2!_{\text{exp}}} \exp \right) d^{BG} t \\
&= e^{\int_1^x \frac{\ln\left(\left(\frac{t}{x}\right)^{\ln\left(\frac{-\ln t}{2}\right)}\right)}{t} dt} = e^{\int_1^x \frac{\ln\left(\frac{-\ln t}{2}\right) \cdot \ln\left(\frac{t}{x}\right)}{t} dt} \\
&= e^{\int_1^x \frac{\frac{-\ln t}{2} \ln t (\ln t - \ln x)}{y} dt} = e^{\left(\frac{\ln^4(x)}{24}\right)} \\
&= \left((e^{\ln x})^{\ln^3 x}\right)^{\frac{1}{\ln e 4!}} = (x^{\ln^3 x})^{\frac{1}{\ln e 4!}} \\
&= \frac{x^{4\text{exp}}}{4!_{\text{exp}}} \exp
\end{aligned}$$

$\vdots$

bulunur. Böylece

$$u_0(x) = e$$

$$u_1(x) = (1 \ominus e) \odot \frac{x^{2\exp}}{2!_{\exp}} \exp$$

$$u_2(x) = \frac{x^{4\exp}}{4!_{\exp}} \exp$$

$$u_3(x) = (1 \ominus e) \odot \frac{x^{6\exp}}{6!_{\exp}} \exp$$

$$u_4(x) = \frac{x^{8\exp}}{8!_{\exp}} \exp$$

$\vdots$

çözümleri elde edilmiş olur. $p \xrightarrow{BG} e$ iken (43) denkleminin çözümü,

$$\phi = \lim_{p \rightarrow e} {}_{BG} (u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots)$$

olduğundan yaklaşık çözüm

$$\phi(x) = e \ominus \frac{x^{2\exp}}{2!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{4\exp}}{4!_{\exp}} \exp \ominus \frac{x^{6\exp}}{6!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{8\exp}}{8!_{\exp}} \exp \oplus \dots$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \phi(x) &= e \ominus \frac{x^{2\exp}}{2!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{4\exp}}{4!_{\exp}} \exp \ominus \frac{x^{6\exp}}{6!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{8\exp}}{8!_{\exp}} \exp \oplus \dots \\ &= \exp \sum_{n=0}^{\infty} (1 \ominus e)^{n\exp} \odot \frac{x^{(2n)\exp}}{(2n)!_{\exp}} \exp \end{aligned}$$

olup bu BG -serisi,

$$\phi(x) = e^{\cos \ln x}$$

kesin çözümüne yakınsar. Sonuç olarak, verilen BG -Volterra integral denkleminin BG -homotopi pertürbasyon metodu ile çözümü,

$$\phi(x) = e^{\cos \ln x}$$

olarak bulunur.

Bigeometrik kalkülüs ve klasik kalkülüs arasındaki ilişkiden faydalanılarak verilen problem,

$$\ln \phi(x) = 1 + \int_1^x \frac{1}{t} (\ln t - \ln x) \ln \phi(t) dt$$

integral denklemine dönüşür. O halde bu denklemin çözümü de

$$\phi(x) = e^{\cos \ln x}$$

olur.

Örnek 4.2.2. BG -homotopi pertürbasyon yöntemini kullanarak

$$\phi(x) = x \oplus_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot \phi(t) d^{BG} t$$

lineer BG -Volterra integral denkleminin çözümünü inceleyiniz.

İlk olarak, $x \in \Omega$ ve BG -homotopi parametresi $p \in [1, e]$ olmak üzere $u(x, p): \Omega \times [1, e] \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ göz önüne alınsın. Verilen problemin çözümü $u(x) = \phi(x)$ olmak üzere BG -konveks homotopi denklemi,

$$H(u, p) = (e \ominus p) \odot F(u) \oplus p \odot L(u) = 1$$

şeklinde tanımlansın. Verilen BG -integral denklemi için $F(u)$ ve $L(u)$ operatörleri,

$$F(u) = u(x) \ominus x$$

ve

$$L(u) = u(x) \ominus x \ominus_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot \phi(t) d^{BG} t$$

olup bu ifadeler tanımlanan BG -konveks homotopide yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} H(u, p) &= (e \ominus p) \odot (u(x) \ominus x) \oplus \\ & p \odot \left[u(x) \ominus x \ominus_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot \phi(t) dt^{BG} \right] = 1 \end{aligned} \quad (44)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned} H(u, p) &= e \odot (u(x) \ominus x) \ominus p \odot (u(x) \ominus x) \oplus p \odot (u(x) \ominus x) \\ & \ominus p \odot_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot \phi(t) dt^{BG} \\ &= u(x) \ominus x \ominus p \odot_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot \phi(t) dt^{BG} \end{aligned}$$

olup (44) ifadesinden,

$$u(x) = x \oplus p \odot_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot u(t) d^{BG} t \quad (45)$$

eşitliği elde edilir. $\phi = \lim_{p \rightarrow e} (u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots)$ olmak üzere (45)

denkleminin çözümünün,

$$u = u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots$$

BG -kuvvet serisi formunda olduğu kabul edilsin. Bu BG -kuvvet serisi (45) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$u_0(x) \oplus p \odot u_1(x) \oplus p^{2\exp} \odot u_2(x) \oplus \dots$$

$$= x \oplus p \odot \int_1^x (t \ominus x) \odot (u_0(t) \oplus p \odot u_1(t) \oplus p^{2\exp} \odot u_2(t) \oplus \dots) d^{BG} t$$

bulunur. Bu ifadede p exp-parametresinin aynı exp-kuvvetlerine göre katsayılar eşitlendiğinde,

$$p^{0\exp}: u_0(x) = x$$

$$p^{1\exp}: u_1(x) = \int_1^x (t \ominus x) \odot u_0(t) d^{BG} t$$

$$p^{2\exp}: u_2(x) = \int_1^x (t \ominus x) \odot u_1(t) d^{BG} t$$

⋮

BG -integral denklem sistemi elde edilir. Bigeometrik ve klasik integral arasındaki ilişkiden faydalanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında elde edilen BG -integral denklemlerin çözümleri aşağıdaki gibi bulunur.

$p^{0\exp}$ için,

$$u_0(x) = x$$

olur.

$p^{1\exp}$ için,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_1^x (t \ominus x) \odot u_0(t) d^{BG} t \\ &= \int_1^x (t \ominus x) \odot t d^{BG} t \\ &= e^{\int_1^x \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)^{\ln t}}{t} dt} = e^{\int_1^x \frac{x(\ln^2 t - \ln t \ln x)}{t} dt} \\ &= e^{\left(\frac{-\ln^3(x)}{6}\right)} = \left(\left(e^{(\ln x)}\right)^{\ln^2 x}\right)^{\frac{1}{3!}}^{-1} \\ &= \left(x^{\ln^2 x}\right)^{\frac{1}{\ln e 3!}}^{-1} \end{aligned}$$

$$= (1 \ominus e) \odot \frac{x^{3_{\text{exp}}}}{3!_{\text{exp}}} \exp$$

elde edilir.

$p^{2_{\text{exp}}}$ için,

$$\begin{aligned} u_2(x) &= {}_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot u_1(t) d^{BG} t \\ &= {}_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot \left((1 \ominus e) \odot \frac{t^{3_{\text{exp}}}}{3!_{\text{exp}}} \exp \right) d^{BG} t \\ &= e^{\int_1^x \frac{\ln \left(\frac{t}{x} \right) \ln \left(\left(t \ln^2 t \right)^{\frac{1}{6}} \right)^{-1}}{t} dt} = e^{\int_1^x \frac{\ln \left(\frac{-\ln^2 t}{6} \right) \ln \left(\frac{t}{x} \right)}{t} dt} \\ &= e^{\int_1^x \frac{-\ln^2 t}{6} \frac{\ln t (\ln t - \ln x)}{t} dt} = e^{\left(\frac{\ln^5(x)}{120} \right)} \\ &= \left((e^{\ln x})^{\ln^4 x} \right)^{\frac{1}{\ln e^{5!}}} = (x^{\ln^4 x})^{\frac{1}{\ln e^{5!}}} \\ &= \frac{x^{5_{\text{exp}}}}{5!_{\text{exp}}} \exp \\ &\vdots \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$u_0(x) = x$$

$$u_1(x) = (1 \ominus e) \odot \frac{x^{3_{\text{exp}}}}{3!_{\text{exp}}} \exp$$

$$u_2(x) = \frac{x^{5_{\text{exp}}}}{5!_{\text{exp}}} \exp$$

$$u_3(x) = (1 \ominus e) \odot \frac{x^{7_{\text{exp}}}}{7!_{\text{exp}}} \exp$$

$$u_4(x) = \frac{x^{9_{\text{exp}}}}{9!_{\text{exp}}} \exp$$

$\vdots$

çözümleri elde edilmiş olur. $p \xrightarrow{BG} e$ iken (45) denkleminin çözümü,

$$\phi = {}_{BG}\lim_{p \rightarrow e} (u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots)$$

olduğundan

$$\phi(x) = x \ominus \frac{x^{3\exp}}{3!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{5\exp}}{5!_{\exp}} \exp \ominus \frac{x^{7\exp}}{7!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{9\exp}}{9!_{\exp}} \exp \oplus \dots$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \phi(x) &= x \ominus \frac{x^{3\exp}}{3!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{5\exp}}{5!_{\exp}} \exp \ominus \frac{x^{7\exp}}{7!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{9\exp}}{9!_{\exp}} \exp \oplus \dots \\ &= \exp \sum_{n=0}^{\infty} (1 \ominus e)^{n\exp} \odot \frac{x^{(2n+1)\exp}}{(2n+1)!_{\exp}} \exp \end{aligned}$$

olup bigeometrik Taylor seri açılımından faydalanılarak bulunan bu BG -seri çözümünün kapalı formu olan

$$\phi(x) = e^{\sin \ln x}$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak, verilen BG -Volterra integral denkleminin BG -homotopi pertürbasyon metodu ile çözümü

$$\phi(x) = e^{\sin \ln x}$$

olarak bulunur.

Bigeometrik kalkülüs ve klasik kalkülüs arasındaki ilişkiden faydalanılarak verilen problem,

$$\ln \phi(x) = x + \int_1^x \frac{1}{t} (\ln t - \ln x) \ln \phi(t) dt$$

integral denklemine dönüşür. O halde bu denklemin çözümü de

$$\phi(x) = e^{\sin \ln x}$$

olur.

Örnek 4.2.3. *BG*-homotopi pertürbasyon yöntemini kullanarak

$$\phi(x) = (e \oplus x) \oplus_{BG} \int_1^x (x \ominus t) \odot \phi(t) d^{BG} t$$

lineer *BG*-Volterra integral denkleminin çözümünü inceleyiniz.

İlk olarak, $x \in \Omega$ ve *BG*-homotopi parametresi $p \in [1, e]$ olmak üzere $u(x, p): \Omega \times [1, e] \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ göz önüne alınsın. Verilen problemin çözümü $u(x) = \phi(x)$ olmak üzere *BG*-konveks homotopi denklemi

$$H(u, p) = (e \ominus p) \odot F(u) \oplus p \odot L(u) = 1$$

şeklinde tanımlansın. Verilen *BG*-integral denklemi için $F(u)$ ve $L(u)$ operatörleri,

$$F(u) = u(x) \ominus (e \oplus x)$$

ve

$$L(u) = u(x) \ominus (e \oplus x) \ominus_{BG} \int_1^x (x \ominus t) \odot \phi(t) d^{BG} t$$

olup bu ifadeler tanımlanan *BG*-konveks homotopide yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} H(u, p) &= (e \ominus p) \odot (u(x) \ominus (e \oplus x)) \oplus p \\ &\odot \left[u(x) \ominus (e \oplus x) \ominus_{BG} \int_1^x (x \ominus t) \odot u(t) d^{BG} t \right] = 1 \end{aligned} \quad (46)$$

olur. Böylece gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$H(u, p) = e \odot (u(x) \ominus (e \oplus x)) \ominus p \odot (u(x) \ominus (e \oplus x))$$

$$\begin{aligned}
& \oplus p \odot (u(x) \ominus (e \oplus x)) \ominus p \odot \int_1^x (x \ominus t) \odot u(t) d^{BG} t \\
& = u(x) \ominus e \ominus x \ominus p \odot \int_1^x (x \ominus t) \odot u(t) d^{BG} t
\end{aligned}$$

olup (46) ifadesinden

$$u(x) = e \oplus x \oplus p \odot \int_1^x (x \ominus t) \odot u(t) d^{BG} t \quad (47)$$

eşitliği elde edilir. $\phi = \lim_{p \rightarrow e} (u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2\exp} \odot u_2 \oplus \dots)$ olmak üzere (47) denkleminin çözümünün

$$u(x) = u_0(x) \oplus p \odot u_1(x) \oplus p^{2\exp} \odot u_2(x) \oplus \dots$$

BG -kuvvet serisi formunda olduğu kabul edilsin. Bu BG -serisi (47) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& u_0(x) \oplus p \odot u_1(x) \oplus p^{2\exp} \odot u_2(x) \oplus \dots = e \oplus x \oplus p \\
& \odot \int_1^x (x \ominus t) \odot (u_0(t) \oplus p \odot u_1(t) \oplus p^{2\exp} \odot u_2(t) \oplus \dots) d^{BG} t
\end{aligned}$$

bulunur. p exp-parametresinin aynı exp-kuvvetlerine göre katsayılar eşitlendiğinde,

$$\begin{aligned}
p^{0\exp}: u_0(x) &= e \oplus x \\
p^{1\exp}: u_1(x) &= \int_1^x (x \ominus t) \odot u_0(t) d^{BG} t \\
p^{2\exp}: u_2(x) &= \int_1^x (x \ominus t) \odot u_1(t) d^{BG} t \\
p^{3\exp}: u_3(x) &= \int_1^x (x \ominus t) \odot u_2(t) d^{BG} t \\
&\vdots
\end{aligned}$$

BG -integral denklem sistemi elde edilir. Bigeometrik kalkülüs ve klasik kalkülüs arasındaki ilişkiden faydalanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında elde edilen BG -integral denklemlerin çözümleri aşağıdaki gibi bulunur.

$p^{0\text{exp}}$ için,

$$u_0(x) = e \oplus x$$

olur.

$p^{1\text{exp}}$ için,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= {}_{BG} \int_1^x (x \ominus t) \odot u_0(t) d^{BG} t \\ &= {}_{BG} \int_1^x (x \ominus t) \odot (e \oplus t) d^{BG} t \\ &= 1 \cdot e^{\int_1^x \frac{\ln(\frac{x}{t}) \ln(e \cdot t)}{t} dt} = e^{\int_1^x \frac{\ln(e \cdot t) \cdot \ln(\frac{x}{t})}{t} dt} \\ &= e^{\int_1^x \frac{x(1+\ln t) \cdot (\ln x - \ln t)}{t} dt} = e^{\left(\frac{\ln^3 x}{6} + \frac{\ln^2 x}{2}\right)} \\ &= e^{\left(\frac{\ln^3 x}{6}\right)} \cdot e^{\left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)} \\ &= \left((e^{\ln x})^{\ln^2 x}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left((e^{\ln x})^{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(x^{\ln^2 x}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(x^{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(x^{\ln^2(x)}\right)^{\frac{1}{\ln e^{3!}}} \cdot \left(x^{\ln x}\right)^{\frac{1}{\ln e^{2!}}} \\ &= \frac{x^{2\text{exp}}}{2!_{\text{exp}}} \exp \oplus \frac{x^{3\text{exp}}}{3!_{\text{exp}}} \exp \end{aligned}$$

elde edilir.

$p^{2\text{exp}}$ için,

$$\begin{aligned} u_2(x) &= {}_{BG} \int_1^x (x \ominus t) \odot u_1(t) d^{BG} t = 1 \\ &= {}_{BG} \int_1^x (x \ominus t) \odot \left(\frac{t^{2\text{exp}}}{2!_{\text{exp}}} \exp \oplus \frac{t^{3\text{exp}}}{3!_{\text{exp}}} \exp \right) d^{BG} t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\int_1^{x \ln(\frac{x}{t})} \frac{\ln \left(t^{\left(\frac{\ln^2 t + \ln t}{6} + \frac{\ln t}{2} \right)} \right)}{t} dt} = e^{\int_1^x \frac{\ln \left(t^{\left(\frac{\ln^2 t + \ln t}{6} + \frac{\ln t}{2} \right)} \right) \cdot \ln \left(\frac{x}{t} \right)}{t} dt} \\
&= e^{\int_1^x \frac{\left(\frac{\ln^2 t + \ln t}{6} + \frac{\ln t}{2} \right) \cdot (\ln x \cdot \ln t - \ln^2 t)}{t} dt} = e^{\left(\frac{\ln^5 x}{120} + \frac{\ln^4 x}{24} \right)} \\
&= \left((e^{\ln x})^{\ln^4 x} \right)^{\frac{1}{120}} \cdot \left((e^{\ln x})^{\ln^3 x} \right)^{\frac{1}{24}} \\
&= (x^{\ln^4 x})^{\frac{1}{\ln e^{5!}}} \cdot (x^{\ln^3 x})^{\frac{1}{\ln e^{4!}}} \\
&= \frac{x^{4 \exp}}{4!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{5 \exp}}{5!_{\exp}} \exp
\end{aligned}$$

elde edilir.

$p^{3 \exp}$ için,

$$\begin{aligned}
u_3(x) &= {}_{BG} \int_1^x (x \ominus t) \odot u_2(t) d^{BG} t \\
&= {}_{BG} \int_1^x (x \ominus t) \odot \left(\frac{t^{4 \exp}}{4!_{\exp}} \exp \oplus \frac{t^{5 \exp}}{5!_{\exp}} \exp \right) d^{BG} t \\
&= e^{\int_1^{x \ln(\frac{x}{t})} \frac{\ln \left(t^{\left(\frac{\ln^4 t + \ln^3 t}{120} + \frac{\ln^3 t}{24} \right)} \right)}{t} dt} = e^{\int_1^x \frac{\ln \left(t^{\left(\frac{\ln^4 t + \ln^3 t}{120} + \frac{\ln^3 t}{24} \right)} \right) \cdot \ln \left(\frac{x}{t} \right)}{t} dt} \\
&= e^{\int_1^x \frac{\left(\frac{\ln^4 t + \ln^3 t}{120} + \frac{\ln^3 t}{24} \right) \cdot (\ln x \cdot \ln t - \ln^2 t)}{t} dt} = e^{\left(\frac{\ln^7 x}{5040} + \frac{\ln^6 x}{720} \right)} \\
&= \left((e^{\ln x})^{\ln^6 x} \right)^{\frac{1}{5040}} \cdot \left((e^{\ln x})^{\ln^5 x} \right)^{\frac{1}{720}} \\
&= (x^{\ln^6 x})^{\frac{1}{\ln e^{7!}}} \cdot (x^{\ln^5 x})^{\frac{1}{\ln e^{6!}}} \\
&= \frac{x^{6 \exp}}{6!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{7 \exp}}{7!_{\exp}} \exp \\
&\vdots
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= e \oplus x \\
u_1(x) &= \frac{x^{2 \exp}}{2!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{3 \exp}}{3!_{\exp}} \exp
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= \frac{x^{4_{\text{exp}}}}{4!_{\text{exp}}} \exp \oplus \frac{x^{5_{\text{exp}}}}{5!_{\text{exp}}} \exp \\
u_3(x) &= \frac{x^{6_{\text{exp}}}}{6!_{\text{exp}}} \exp \oplus \frac{x^{7_{\text{exp}}}}{7!_{\text{exp}}} \exp \\
&\vdots
\end{aligned}$$

çözümleri elde edilmiş olur. $p \xrightarrow{BG} e$ iken (47) denkleminin çözümü,

$$\phi = {}_{BG}\lim_{p \rightarrow e} (u_0 \oplus p \odot u_1 \oplus p^{2_{\text{exp}}} \odot u_2 \oplus \dots)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= e \oplus x \oplus \frac{x^{2_{\text{exp}}}}{2!_{\text{exp}}} \exp \oplus \frac{x^{3_{\text{exp}}}}{3!_{\text{exp}}} \exp \oplus \frac{x^{4_{\text{exp}}}}{4!_{\text{exp}}} \exp \oplus \frac{x^{5_{\text{exp}}}}{5!_{\text{exp}}} \exp \oplus \frac{x^{6_{\text{exp}}}}{6!_{\text{exp}}} \exp \\
&\quad \oplus \frac{x^{7_{\text{exp}}}}{7!_{\text{exp}}} \exp \oplus \dots \\
&= {}_{\text{exp}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n_{\text{exp}}}}{n!_{\text{exp}}} \exp
\end{aligned}$$

bulunur. ${}_{\text{exp}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n_{\text{exp}}}}{n!_{\text{exp}}} \exp$ sonsuz exp-toplamı e^x ifadesinin bigeometrik Taylor seri açılımı olduğundan

$$\phi(x) = e^x$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak, verilen BG -Volterra integral denkleminin BG -homotopi pertürbasyon metodu ile çözümü

$$\phi(x) = e^x$$

olarak bulunur.

Bigeometrik kalkülüs ve klasik kalkülüs arasındaki ilişkiden faydalanılarak verilen problem,

$$\ln \phi(x) = 1 + \ln x + \int_1^x \frac{1}{t} (\ln x - \ln t) \ln \phi(t) dt$$

integral denklemine dönüşür. O halde bu denklemin çözümü de

$$\phi(x) = e^x$$

olur.



5. LİNEER BİGEOMETRİK VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN BG-DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde diferansiyel dönüşüm metodunun temel tanım ve teoremleri bigeometrik kalküle aktararak elde edilen BG-diferansiyel dönüşüm yöntemiyle lineer bigeometrik Volterra integral denklemlerinin çözümleri incelenmiştir.

Tanım 5.1. Bir $f: \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$, $x \rightarrow f(x)$ fonksiyonunun, BG-diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} f(x)}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=x_0} \quad (48)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $k \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ orijinal fonksiyon ve $F(k)$ dönüşüm fonksiyonudur. $F(k)$, BG-diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun, BG-diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp \sum_{k=0}^{\infty} F(k) \odot (x \ominus x_0)^{k_{\exp}} \\ &\approx f_N(x) = \exp \sum_{k=0}^N F(k) \odot (x \ominus x_0)^{k_{\exp}} \end{aligned} \quad (49)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan (48) ifadesi (49) ifadesinde yerine yazılarak,

$$f(x) = \exp \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ominus x_0)^{k_{\exp}}}{k!_{\exp}} \exp \odot \frac{d^{k_{BG}} f(x)}{dx^{k_{BG}}} \Big|_{x=x_0} \quad (50)$$

elde edilir. (48) ve (50) ifadeleri $x = x_0$ için genel olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmada $x_0 = e^0 = 1$ durumu göz önüne alınacaktır.

Teorem 5.1. c , exp-sabit ve $g(x)$ BG-analitik fonksiyon olmak üzere, $f(x) = c \odot g(x)$ fonksiyonunun, BG-diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$F(k) = c \odot G(k)$$

olur.

İspat. $f(x)$ BG-analitik fonksiyonunun, BG-diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} f(x)}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1}$$

olarak yazılır. Burada $f(x) = c \odot g(x)$ alınıp bigeometrik türevin özelliklerinden faydalanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} (c \odot g(x))}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot [(c \odot g(x))^{(k)_{BG}}]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot [((c \odot g(x))^{BG})^{(k-1)_{BG}}]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot [(c \odot g^{BG}(x))^{(k-1)_{BG}}]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot [((c \odot g^{BG}(x))^{BG})^{(k-2)_{BG}}]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot [(c \odot g^{(2)_{BG}}(x))^{(k-2)_{BG}}]_{x=1} \\ &\vdots \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot [c \odot g^{(k)_{BG}}(x)]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot c \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} g(x)}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1} \\ &= c \odot \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} g(x)}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1} \\ &= c \odot G(k) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.2. $g(x)$ ve $h(x)$ BG-analitik fonksiyonlar olmak üzere, $f(x) = g(x) \oplus h(x)$ fonksiyonunun, BG-diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$F(k) = G(k) \oplus H(k)$$

olur.

İspat. $g(x)$ ve $h(x)$ BG -analitik fonksiyonlarının, BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonları, sırasıyla, $G(k)$ ve $H(k)$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} f(x)}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1}$$

şeklinde tanımlı olduğundan burada $f(x) = g(x) \oplus h(x)$ yazılıp bigeometrik türev özelliklerinden faydalanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} (g(x) \oplus h(x))}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot [(g(x) \oplus h(x))^{(k)_{BG}}]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot [((g(x) \oplus h(x))^{BG})^{(k-1)_{BG}}]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot [(g^{BG}(x) \oplus h^{BG}(x))^{(k-1)_{BG}}]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot [((g^{BG}(x) \oplus h^{BG}(x))^{BG})^{(k-2)_{BG}}]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot [(g^{(2)_{BG}}(x) \oplus h^{(2)_{BG}}(x))^{(k-2)_{BG}}]_{x=1} \\ &\vdots \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot [g^{(k)_{BG}}(x) \oplus h^{(k)_{BG}}(x)]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} g(x)}{dx^{k_{BG}}} \oplus \frac{d^{k_{BG}} h(x)}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} g(x)}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1} \oplus \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} h(x)}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1} \\ &= G(k) \oplus H(k) \end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde $f(x) = g(x) \ominus h(x)$ için $F(k) = G(k) \ominus H(k)$ ifadesi elde edilebilir.

Teorem 5.3. $f(x)$ ve $g(x)$ BG -analitik fonksiyonlar olmak üzere, $f(x) = \frac{d^{BG} g(x)}{dx^{BG}}$ fonksiyonunun, BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$F(k) = e^{(k+1)} \odot G(k+1)$$

olur.

İspat. $f(x)$ BG -analitik fonksiyonunun, BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} f(x)}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1}$$

şeklinde tanımlı olduğundan burada $f(x) = \frac{d^{BG} g(x)}{dx^{BG}}$ yazılırsa,

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}}}{dx^{k_{BG}}} \left(\frac{d^{BG} g(x)}{dx^{BG}} \right) \right]_{x=1}$$

olur. Böylece

$$\frac{e}{k!_{\exp}} \exp = e^{\frac{1}{k!}} = e^{\frac{(k+1)}{(k+1)!}} = \left(e^{\frac{1}{(k+1)!}} \right)^{k+1} = e^{(k+1)} \odot \frac{e}{(k+1)!_{\exp}} \exp$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned} F(k) &= e^{(k+1)} \odot \frac{e}{(k+1)!_{\exp}} \exp \odot \left[\frac{d^{(k+1)_{BG}} g(x)}{dx^{(k+1)_{BG}}} \right]_{x=1} \\ &= e^{(k+1)} \odot G(k+1) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu teorem genelleştirilerek aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 5.4. $f(x)$ ve $g(x)$ BG -analitik fonksiyonlar olmak üzere, $f(x) = \frac{d^{n_{BG}} g(x)}{dx^{n_{BG}}}$ fonksiyonunun, BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$F(k) = e^{\frac{(k+n)!}{k!}} \odot G(k+n)$$

olur.

İspat. BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tanımından,

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}}}{dx^{k_{BG}}} \left(\frac{d^{n_{BG}} g(x)}{dx^{n_{BG}}} \right) \right]_{x=1}$$

yazılır. O halde,

$$\begin{aligned} \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp &= e^{\frac{1}{k!}} = e^{\frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot (k+n)}{(k+n)!}} = \left(e^{\frac{1}{(k+n)!}} \right)^{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot (k+n)} \\ &= \left(e^{\frac{1}{(k+n)!}} \right)^{\frac{(k+n)!}{k!}} = e^{\frac{(k+n)!}{k!}} \odot \frac{e}{(k+n)!_{\text{exp}}} \exp \end{aligned}$$

eşitliği kullanılarak, $F(k)$ ifadesi

$$\begin{aligned} F(k) &= e^{\frac{(k+n)!}{k!}} \odot \frac{e}{(k+n)!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{(k+n)_{BG}} g(x)}{dx^{(k+n)_{BG}}} \right]_{x=1} \\ &= e^{\frac{(k+n)!}{k!}} \odot G(k+n) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 5.2. $n, k \in \mathbb{N}$ ve $k \leq n$ olmak üzere n nin k lı $\exp$ -kombinasyonlarının sayısı

$\binom{n}{k}_{\text{exp}}$ notasyonu ile gösterilir ve

$$\binom{n}{k}_{\text{exp}} = \frac{n!_{\text{exp}}}{(n-k)!_{\text{exp}} \odot k!_{\text{exp}}} \exp$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 5.1. $n, k \in \mathbb{N}$ ve $k < n$ olmak üzere,

$$\binom{n}{k}_{\text{exp}} \oplus \binom{n}{k-1}_{\text{exp}} = \binom{n+1}{k}_{\text{exp}}$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat. exp-kombinasyon tanımını gereğince,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}_{\text{exp}} \oplus \binom{n}{k-1}_{\text{exp}} &= \frac{n!_{\text{exp}}}{(n-k)!_{\text{exp}} \odot k!_{\text{exp}}} \text{exp} \\ &\oplus \frac{n!_{\text{exp}}}{(n-k+1)!_{\text{exp}} \odot (k-1)!_{\text{exp}}} \text{exp} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Buradan bigeometrik kalkülüs ve klasik kalkülüs arasındaki ilişkiden faydalanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}_{\text{exp}} \oplus \binom{n}{k-1}_{\text{exp}} &= \frac{e^{n!}}{e^{(n-k)!} \odot e^{k!}} \text{exp} \oplus \frac{e^{n!}}{e^{(n-k+1)!} \odot e^{(k-1)!}} \text{exp} \\ &= (e^{n!})^{\frac{1}{(n-k)! k!}} \cdot (e^{n!})^{\frac{1}{(n-k+1)! (k-1)!}} \\ &= e^{\left(\frac{n!}{(n-k)! k!} + \frac{n!}{(n-k+1)! (k-1)!}\right)} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{n!}{(n-k)! k!} + \frac{n!}{(n-k+1)! (k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k+1)! k!}$$

eşitliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}_{\text{exp}} \oplus \binom{n}{k-1}_{\text{exp}} &= e^{\left(\frac{(n+1)!}{(n-k+1)! k!}\right)} \\ &= \left(e^{(n+1)!}\right)^{\frac{1}{\ln\left((e^{k!})^{\ln e^{(n-k+1)!}}\right)}} \\ &= \frac{e^{(n+1)!}}{e^{k!} \odot e^{(n-k+1)!}} \text{exp} \\ &= \frac{(n+1)!_{\text{exp}}}{k!_{\text{exp}} \odot (n-k+1)!_{\text{exp}}} \text{exp} \\ &= \binom{n+1}{k}_{\text{exp}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 5.2. g ve h fonksiyonları $[a, b] \subset \mathbb{R}_{\exp}$ kümesinde n . mertebeden BG -türevlenebilen fonksiyonlar ise $g \odot h$ fonksiyonu da n . mertebeden BG -türevlenebilirdir ve

$$[g(x) \odot h(x)]^{(n)_{BG}} = \exp \sum_{r=0}^n \left[\binom{n}{r}_{\exp} \odot \frac{d^{r_{BG}} g(x)}{dx^{r_{BG}}} \odot \frac{d^{(n-r)_{BG}} h(x)}{dx^{(n-r)_{BG}}} \right] \quad (51)$$

dir.

İspat. (51) eşitliğinin gerçekleştiği tümevarım yöntemi kullanılarak gösterilecektir. Önerme 2.2.1 gereğince

$$[g(x) \odot h(x)]^{BG} = \left[g(x) \odot \frac{d^{BG} h(x)}{dx^{BG}} \right] \oplus \left[\frac{d^{BG} g(x)}{dx^{BG}} \odot h(x) \right]$$

olduğu biliniyor. Buradan,

$$\begin{aligned} [g(x) \odot h(x)]^{BG} &= \left[g(x) \odot \frac{d^{BG} h(x)}{dx^{BG}} \right]^{\ln e} \oplus \left[\frac{d^{BG} g(x)}{dx^{BG}} \odot h(x) \right]^{\ln e} \\ &= \left[e \odot g(x) \odot \frac{d^{BG} h(x)}{dx^{BG}} \right] \oplus \left[e \odot \frac{d^{BG} g(x)}{dx^{BG}} \odot h(x) \right] \\ &= \left[\frac{e^{1!}}{e^{1!} \odot e^{0!}} \exp \odot g(x) \odot \frac{d^{BG} h(x)}{dx^{BG}} \right] \\ &\quad \oplus \left[\frac{e^{1!}}{e^{0!} \odot e^{1!}} \exp \odot \frac{d^{BG} g(x)}{dx^{BG}} \odot h(x) \right] \\ &= \left[\frac{1!_{\exp}}{(1-0)!_{\exp} \odot 0!_{\exp}} \exp \odot g(x) \odot \frac{d^{BG} h(x)}{dx^{BG}} \right] \\ &\quad \oplus \left[\frac{1!_{\exp}}{(1-1)!_{\exp} \odot 0!_{\exp}} \exp \odot \frac{d^{BG} g(x)}{dx^{BG}} \odot h(x) \right] \\ &= \left[\binom{1}{0}_{\exp} \odot g(x) \odot \frac{d^{BG} h(x)}{dx^{BG}} \right] \oplus \left[\binom{1}{1}_{\exp} \odot \frac{d^{BG} g(x)}{dx^{BG}} \odot h(x) \right] \\ &= \exp \sum_{r=0}^1 \left[\binom{1}{r}_{\exp} \odot \frac{d^{r_{BG}} g(x)}{dx^{r_{BG}}} \odot \frac{d^{(1-r)_{BG}} h(x)}{dx^{(1-r)_{BG}}} \right] \end{aligned}$$

olup $n = 1$ için ifadenin doğruluğu görülür.

(51) ifadesinin $n = k$ için doğru olduğu kabul edilsin. Böylece,

$$[g(x) \odot h(x)]^{(k)BG} = \exp \sum_{r=0}^k \left[\binom{k}{r}_{\exp} \odot \frac{d^{rBG} g(x)}{dx^{rBG}} \odot \frac{d^{(k-r)BG} h(x)}{dx^{(k-r)BG}} \right] \quad (52)$$

yazılır. Şimdi ispatı tamamlamak için (51) ifadesinin $n = k + 1$ için doğru olduğu, yani

$$[g(x) \odot h(x)]^{(k+1)BG} = \exp \sum_{r=0}^{k+1} \left[\binom{k+1}{r}_{\exp} \odot \frac{d^{rBG} g(x)}{dx^{rBG}} \odot \frac{d^{(k+1-r)BG} h(x)}{dx^{(k+1-r)BG}} \right] \quad (53)$$

eşitliğinin doğruluğu gösterilmelidir. (52) ifadesinin her iki tarafının BG -türevi alınarak,

$$\begin{aligned} [g(x) \odot h(x)]^{(k+1)BG} &= \exp \sum_{r=0}^k \left[\binom{k}{r}_{\exp} \odot \frac{d^{rBG} g(x)}{dx^{rBG}} \odot \frac{d^{(k-r)BG} h(x)}{dx^{(k-r)BG}} \right]^{BG} \\ &= \exp \sum_{r=0}^k \binom{k}{r}_{\exp} \odot \left[\frac{d^{rBG} g(x)}{dx^{rBG}} \odot \frac{d^{(k-r)BG} h(x)}{dx^{(k-r)BG}} \right]^{BG} \\ &= \exp \sum_{r=0}^k \binom{k}{r}_{\exp} \odot \left[\frac{d^{rBG} g(x)}{dx^{rBG}} \odot \frac{d^{(k-r+1)BG} h(x)}{dx^{(k-r+1)BG}} \right. \\ &\quad \left. \oplus \frac{d^{(r+1)BG} g(x)}{dx^{(r+1)BG}} \odot \frac{d^{(k-r)BG} h(x)}{dx^{(k-r)BG}} \right] \\ &= \exp \sum_{r=0}^k \left[\binom{k}{r}_{\exp} \odot \frac{d^{rBG} g(x)}{dx^{rBG}} \odot \frac{d^{(k-r+1)BG} h(x)}{dx^{(k-r+1)BG}} \right] \\ &\quad \oplus \exp \sum_{r=1}^{k+1} \left[\binom{k}{r-1}_{\exp} \odot \frac{d^{(k-r+1)BG} h(x)}{dx^{(k-r+1)BG}} \odot \frac{d^{rBG} g(x)}{dx^{rBG}} \right] \end{aligned}$$

ifadesi bulunur.

$$\binom{n+1}{0}_{\exp} = \binom{n}{0}_{\exp} = \binom{n}{n}_{\exp} = \binom{n+1}{n+1}_{\exp} = e$$

olduğundan ve Önerme 5.1 den

$$[g(x) \odot h(x)]^{(k+1)BG} = \exp \sum_{r=0}^{k+1} \left[\binom{k+1}{r}_{\exp} \odot \frac{d^{rBG} g(x)}{dx^{rBG}} \odot \frac{d^{(k+1-r)BG} h(x)}{dx^{(k+1-r)BG}} \right]$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.5. $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ BG -analitik fonksiyonlar olmak üzere,

$$f(x) = g(x) \odot h(x)$$

fonksiyonunun, BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$F(k) = \exp \sum_{r=0}^k G(r) \odot H(k-r)$$

olur.

İspat. $f(x) = g(x) \odot h(x)$ olduğundan BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tanımı gereğince,

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}}(g(x) \odot h(x))}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1}$$

yazılır. Böylece Önerme 5.2 kullanılarak,

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot \left[\exp \sum_{r=0}^k \binom{k}{r}_{\exp} \odot \frac{d^{r_{BG}} g(x)}{dx^{r_{BG}}} \odot \frac{d^{(k-r)_{BG}} h(x)}{dx^{(k-r)_{BG}}} \right]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot \left[\exp \sum_{r=0}^k \frac{k!_{\exp}}{r!_{\exp} \odot (k-r)!_{\exp}} \exp \odot \frac{d^{r_{BG}} g(x)}{dx^{r_{BG}}} \odot \frac{d^{(k-r)_{BG}} h(x)}{dx^{(k-r)_{BG}}} \right]_{x=1} \\ &= \exp \sum_{r=0}^k \left(\left[\frac{e}{r!_{\exp}} \exp \odot \frac{d^{r_{BG}} g(x)}{dx^{r_{BG}}} \right]_{x=1} \odot \left[\frac{e}{(k-r)!_{\exp}} \exp \odot \frac{d^{(k-r)_{BG}} h(x)}{dx^{(k-r)_{BG}}} \right]_{x=1} \right) \\ &= \exp \sum_{r=0}^k G(r) \odot H(k-r) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu teoremin genelleştirilmiş hali aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Teorem 5.6. $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$ BG -analitik fonksiyonlar olmak üzere,

$$f(x) = g_1(x) \odot g_2(x) \odot \dots \odot g_n(x)$$

fonksiyonunun, BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$F(k) = \exp \sum_{k_{n-1}=0}^k \exp \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \exp \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1) \odot G_2(k_2 - k_1) \odot \dots \odot G_n(k - k_{n-1}) \quad (54)$$

şeklindedir.

İspat. Teoremin ispatında tümevarım yönteminden faydalanılacaktır. (54) ifadesinin $n = 2$ için gerçekleştiği, Teorem 5.5 den görülür. Şimdi (54) ifadesinin $n = m$ için doğru olduğu kabul edilerek, $n = m + 1$ için gerçekleştiği gösterilsin. $n = m + 1$ için,

$$f(x) = (g_1(x) \odot g_2(x) \odot \dots \odot g_m(x)) \odot g_{m+1}(x)$$

yazılır. Burada,

$$g(x) = g_1(x) \odot g_2(x) \odot \dots \odot g_m(x)$$

olarak alınırsa $G(k_m)$, $g(x)$ fonksiyonunun BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere Teorem 5.5 gereğince $f(x)$ fonksiyonunun BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$F(k) = \exp \sum_{k_m=0}^k G(k_m) \odot G_{m+1}(k - k_m) \quad (55)$$

şeklinde bulunur. Hipotez gereği,

$$G(k_m) = \exp \sum_{k_{m-1}=0}^{k_m} \exp \sum_{k_{m-2}=0}^{k_{m-1}} \dots \exp \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1) \odot G_2(k_2 - k_1) \odot \dots \odot G_m(k_m - k_{m-1})$$

olduğundan (55) eşitliği,

$$F(k) = \left[\exp \sum_{k_m=0}^k \exp \sum_{k_{m-1}=0}^{k_m} \exp \sum_{k_{m-2}=0}^{k_{m-1}} \cdots \exp \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1) \odot G_2(k_2 - k_1) \right. \\ \left. \odot \cdots \odot G_m(k_m - k_{m-1}) \right] \odot G_{m+1}(k - k_m)$$

şeklinde yazılır. Bu ise (54) ifadesinin $n = m + 1$ için doğruluğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 5.3. $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\frac{d^{k_{BG}}}{dx^{k_{BG}}}(x^{n_{\exp}}) = e^n \odot e^{(n-1)} \odot \cdots \odot e^{(n-k+1)} \odot x^{(n-k)_{\exp}}$$

dir.

İspat. Klasik türev ve bigeometrik türev arasındaki ilişkiden faydalanılarak $k = 1$ için,

$$\begin{aligned} \frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(x^{n_{\exp}}) &= \frac{d^{BG}}{dx^{BG}}(e^{(\ln x)^n}) \\ &= e^{x \cdot \frac{(e^{(\ln x)^n})'}{e^{(\ln x)^n}}} \\ &= e^{x \cdot \frac{e^{(\ln x)^n} \cdot n \cdot (\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}}{e^{(\ln x)^n}}} \\ &= e^{n \cdot (\ln x)^{n-1}} \\ &= (e^{(\ln x)^{n-1}})^n \\ &= e^n \odot x^{(n-1)_{\exp}} \end{aligned}$$

bulunur. $k = m - 1$ için,

$$\frac{d^{(m-1)_{BG}}}{dx^{(m-1)_{BG}}}(x^{n_{\exp}}) = e^n \odot e^{(n-1)} \odot \cdots \odot e^{(n-m)} \odot x^{(n-m+1)_{\exp}}$$

eşitliği gerçekleşsin. O halde bigeometrik türevin tanımı ve özellikleri kullanılarak

$$\frac{d^{m_{BG}}}{dx^{m_{BG}}}(x^{n_{\exp}}) = \frac{d^{BG}}{dx^{BG}} \left(\frac{d^{(m-1)_{BG}}}{dx^{(m-1)_{BG}}}(x^{n_{\exp}}) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d^{BG}}{dx^{BG}} (e^n \odot e^{(n-1)} \odot \dots \odot e^{(n-m)} \odot x^{(n-m+1)\exp}) \\
&= e^n \odot e^{(n-1)} \odot \dots \odot e^{(n-m)} \odot \frac{d^{BG}}{dx^{BG}} (x^{(n-m+1)\exp}) \\
&= e^n \odot e^{(n-1)} \odot \dots \odot e^{(n-m)} \odot \frac{d^{BG}}{dx^{BG}} (e^{(\ln x)^{n-m+1}}) \\
&= e^n \odot e^{(n-1)} \odot \dots \odot e^{(n-m)} \odot e^{x \cdot \frac{(e^{(\ln x)^{n-m+1}})' }{e^{(\ln x)^{n-m+1}}}} \\
&= e^n \odot e^{(n-1)} \odot \dots \odot e^{(n-m)} \odot e^{x \cdot \frac{e^{(\ln x)^{n-m+1}} \cdot (n-m+1) \cdot (\ln x)^{(n-m) \cdot \frac{1}{x}}}{e^{(\ln x)^{n-m+1}}}} \\
&= e^n \odot e^{(n-1)} \odot \dots \odot e^{(n-m)} \odot (e^{(\ln x)^{n-m}})^{n-m+1} \\
&= e^n \odot e^{(n-1)} \odot \dots \odot e^{(n-m)} \odot e^{(n-m+1)} \odot x^{(n-m)\exp}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece tümevarım yöntemi ile ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.7. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(x) = x^{n\exp}$ fonksiyonunun BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$F(k) = \delta(k - n) = \begin{cases} e, & k = n \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olur.

İspat. $f(x) = x^{n\exp}$ fonksiyonunun BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot \left[\frac{d^{kBG}(x^{n\exp})}{dx^{kBG}} \right]_{x=1}$$

dır. Önerme 5.3 gereğince

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot [e^n \odot e^{(n-1)} \odot \dots \odot e^{(n-k+1)} \odot x^{(n-k)\exp}]_{x=1}$$

yazılır. O halde $n = k$ için,

$$\begin{aligned}
F(k) &= \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot [e^k \odot e^{(k-1)} \odot \dots \odot e^1 \odot e] \\
&= \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot k!_{\exp}
\end{aligned}$$

$$= e$$

bulunur. $n \neq k$ ve $x = 1$ için,

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot [e^n \odot e^{(n-1)} \odot \dots \odot e^{(n-k+1)} \odot 1] \\ &= \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece istenen elde edilir.

Teorem 5.8. $f(x) = e^x$ fonksiyonunun BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\exp}} \exp$$

olur.

İspat. $\frac{d^{k_{BG}}(e^x)}{dx^{k_{BG}}} = e^x$ olduğundan $f(x) = e^x$ fonksiyonunun BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}}(e^x)}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot [e^x]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot e \\ &= \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 5.9. λ , $\exp$ -sabit olmak üzere, $f(x) = e^{\lambda \odot x}$ fonksiyonunun, BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$F(k) = \frac{\lambda^{k_{\exp}}}{k!_{\exp}} \exp$$

olur.

İspat. $f(x)$ BG -analitik fonksiyonunun, BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} f(x)}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1}$$

şeklinde tanımlı olduğundan burada $f(x) = e^{\lambda \odot x}$ yazılırsa,

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} (e^{\lambda \odot x})}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1}$$

olur.

$$\frac{d^{k_{BG}} (e^{\lambda \odot x})}{dx^{k_{BG}}} = \lambda^{k_{\text{exp}}} \odot e^{\lambda \odot x}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot [\lambda^{k_{\text{exp}}} \odot e^{\lambda \odot x}]_{x=1} \\ &= \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot \lambda^{k_{\text{exp}}} \\ &= \frac{\lambda^{k_{\text{exp}}}}{k!_{\text{exp}}} \exp \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.10. $f(x)$ BG -analitik fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = {}_{BG} \int_1^x g(t) d^{BG} t$$

fonksiyonunun $k \geq 1$ için BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$F(k) = \frac{G(k-1)}{e^k} \exp$$

olur.

İspat.

$$f(x) = {}_{BG} \int_1^x g(t) d^{BG} t$$

olduğundan BG -diferansiyel dönüşüm tanımından

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}}}{dx^{k_{BG}}} \left({}_{BG} \int_1^x g(t) d^{BG} t \right) \right]_{x=1}$$

yazılır. Böylece Teorem 2.2.3 gereğince,

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot \left[\frac{d^{(k-1)_{BG}} g(x)}{dx^{(k-1)_{BG}}} \right]_{x=1} \quad (56)$$

yazılır. O halde

$$\begin{aligned} \frac{e}{k!_{\exp}} \exp &= e^{\frac{1}{k \cdot (k-1)!}} = \left(e^{\frac{1}{(k-1)!}} \right)^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k}} \odot \frac{e}{(k-1)!_{\exp}} \exp \\ &= \frac{e}{e^k} \exp \odot \frac{e}{(k-1)!_{\exp}} \exp \end{aligned}$$

eşitliği kullanılırsa (56) ifadesi

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{e}{e^k} \exp \odot \frac{e}{(k-1)!_{\exp}} \exp \odot \left[\frac{d^{(k-1)_{BG}} g(x)}{dx^{(k-1)_{BG}}} \right]_{x=1} \\ &= \frac{e}{e^k} \exp \odot G(k-1) \\ &= \frac{G(k-1)}{e^k} \exp \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Theorem 5.11. $f(x)$ BG -analitik fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = g(x) \odot_{BG} \int_1^x h(t) d^{BG} t$$

fonksiyonunun BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$F(0) = 1$$

ve

$$F(k) = \exp \sum_{m=1}^k \frac{e}{e^m} \exp \odot G(k-m) \odot H(m-1), k \geq 1$$

şeklindedir.

İspat. $f(x)$ BG -analitik fonksiyonunun, BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} f(x)}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1}$$

şeklinde tanımlı olduğundan burada,

$$f(x) = g(x) \odot_{BG} \int_1^x h(t) d^{BG} t$$

yazılırsa

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}}}{dx^{k_{BG}}} \left(g(x) \odot_{BG} \int_1^x h(t) d^{BG} t \right) \right]_{x=1}$$

olur.

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned}
F(1) &= \frac{e}{1!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{BG}}{dx^{BG}} \left(g(x) \odot_{BG} \int_1^x h(t) d^{BG} t \right) \right]_{x=1} \\
&= e \odot \left[g^{BG}(x) \odot_{BG} \int_1^x h(t) d^{BG} t \oplus g(x) \odot h(x) \right]_{x=1} \\
&= G(0) \odot H(0)
\end{aligned}$$

olur.

$k = 2$ için,

$$\begin{aligned}
F(2) &= \frac{e}{2!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{2BG}}{dx^{2BG}} \left(g(x) \odot_{BG} \int_1^x h(t) d^{BG} t \right) \right]_{x=1} \\
&= \frac{e}{2!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[g^{(2)BG}(x) \odot \int_1^x h(t) d^{BG} t \oplus e^2 \odot g^{BG}(x) \odot h(x) \right. \\
&\quad \left. \oplus g(x) \odot h^{BG}(x) \right]_{x=1} \\
&= \frac{e}{2!_{\text{exp}}} \exp \odot [e^2 \odot G(1) \odot H(0) \oplus G(0) \odot H(1)] \\
&= e \odot G(1) \odot H(0) \oplus \frac{e}{2!_{\text{exp}}} \exp \odot G(0) \odot H(1) \\
&= G(1) \odot H(0) \oplus \frac{e}{2!_{\text{exp}}} \exp \odot G(0) \odot H(1)
\end{aligned}$$

olur.

$k = 3$ için,

$$\begin{aligned}
F(3) &= \frac{e}{3!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{3BG}}{dx^{3BG}} \left(g(x) \odot_{BG} \int_1^x h(t) d^{BG} t \right) \right]_{x=1} \\
&= \frac{e}{3!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[g^{(3)BG}(x) \odot_{BG} \int_1^x h(t) d^{BG} t \oplus e^3 \odot g^{(2)BG}(x) \odot h(x) \right. \\
&\quad \left. \oplus e^3 \odot g^{BG}(x) \odot h(x) \oplus g(x) \odot h^{(2)BG}(x) \right]_{x=1} \\
&= \frac{e}{3!_{\text{exp}}} \exp \odot [e^3 \odot g^{(2)BG}(x) \odot h(x) \oplus e^3 \odot g^{BG}(x) \odot h(x) \\
&\quad \oplus g(x) \odot h^{(2)BG}(x)]_{x=1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e}{3!_{\text{exp}}} \exp \odot [e^3 \odot e^2 \odot G(2) \odot H(0) \oplus e^3 \odot G(1) \odot H(1) \\
&\quad \oplus G(1) \odot H(2) \odot e^2] \\
&= e \odot G(2) \odot H(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot G(1) \odot H(1) \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot G(1) \odot H(2) \\
&= G(2) \odot H(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot G(1) \odot H(1) \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot G(1) \odot H(2)
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde devam edilerek genelleme yapılırsa istenen

$$F(k) = \exp \sum_{m=1}^k \frac{e}{e^m} \exp \odot G(k-m) \odot H(m-1)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 5.12. $f(x)$, BG -analitik fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = {}_{BG} \int_1^x g(t) \odot h(t) d^{BG} t$$

fonksiyonunun BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$F(0) = 1$$

ve $k \geq 1$ için,

$$F(k) = \frac{e}{e^k} \exp \odot \exp \sum_{m=0}^{k-1} G(m) \odot H(k-m-1)$$

şeklindedir.

İspat. $f(x)$ BG -analitik fonksiyonunun, BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu,

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}} f(x)}{dx^{k_{BG}}} \right]_{x=1}$$

şeklinde tanımlı olduğundan burada,

$$f(x) = {}_{BG} \int_1^x g(t) \odot h(t) d^{BG} t$$

yazılırsa

$$F(k) = \frac{e}{k!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{k_{BG}}}{dx^{k_{BG}}} \left({}_{BG} \int_1^x g(t) \odot h(t) d^{BG} t \right) \right]_{x=1}$$

olur.

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{e}{1!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{BG}}{dx^{BG}} \left({}_{BG} \int_1^x g(t) \odot h(t) d^{BG} t \right) \right]_{x=1} \\ &= e \odot [g(x) \odot h(x)]_{x=1} \\ &= G(0) \odot H(0) \end{aligned}$$

olur.

$k = 2$ için,

$$\begin{aligned} F(2) &= \frac{e}{2!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{2_{BG}}}{dx^{2_{BG}}} \left({}_{BG} \int_1^x g(t) \odot h(t) d^{BG} t \right) \right]_{x=1} \\ &= \frac{e}{2!_{\text{exp}}} \exp \odot [g^{BG}(x) \odot h(x) \oplus g(x) \odot h^{BG}(x)]_{x=1} \\ &= \frac{e}{e^2} \exp \odot [G(1) \odot H(0) \oplus G(0) \odot H(1)] \end{aligned}$$

olur.

$k = 3$ için,

$$\begin{aligned} F(3) &= \frac{e}{3!_{\text{exp}}} \exp \odot \left[\frac{d^{3_{BG}}}{dx^{3_{BG}}} \left({}_{BG} \int_1^x g(t) \odot h(t) d^{BG} t \right) \right]_{x=1} \\ &= \frac{e}{3!_{\text{exp}}} \exp \odot [g^{(2)_{BG}}(x) \odot h(x) \oplus e^2 \odot g^{BG}(x) \odot h^{BG}(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oplus g(x) \odot h^{(2)BG}(x) \Big|_{x=1} \\
&= \frac{e}{3!_{\exp}} \exp \odot [e^2 \odot G(2) \odot H(0) \oplus e^2 \odot G(1) \odot H(1) \\
&\quad \oplus G(0) \odot H(2) \odot e^2] \\
&= \frac{e}{e^3} \exp \odot [G(2) \odot H(0) \oplus G(1) \odot H(1) \oplus G(0) \odot H(2)]
\end{aligned}$$

olur.

$k = 4$ için,

$$\begin{aligned}
F(4) &= \frac{e}{4!_{\exp}} \exp \odot \left[\frac{d^{4BG}}{dx^{4BG}} \left({}_{BG} \int_1^x g(t) \odot h(t) d^{BG} t \right) \right]_{x=1} \\
&= \frac{e}{4!_{\exp}} \exp \odot [g^{(3)BG}(x) \odot h(x) \oplus e^3 \odot g^{(2)BG}(x) \odot h^{BG}(x) \\
&\quad \oplus e^3 \odot g^{BG}(x)(x) \odot h^{(2)BG}(x) \oplus g(x) \odot h^{(3)BG}(x)]_{x=1} \\
&= \frac{e}{4!_{\exp}} \exp \odot [e^2 \odot e^3 \odot G(3) \odot H(0) \oplus e^3 \odot e^2 \odot G(2) \odot H(1) \\
&\quad \oplus e^3 \odot e^2 \odot G(1) \odot H(2) \oplus G(0) \odot H(3) \odot e^3 \odot e^2] \\
&= \frac{e}{4!_{\exp}} \exp \odot e^2 \odot e^3 \odot [G(3) \odot H(0) \oplus G(2) \odot H(1) \\
&\quad \oplus G(1) \odot H(2) \oplus G(0) \odot H(3)] \\
&= \frac{e}{e^4} \exp \odot [G(3) \odot H(0) \oplus G(2) \odot H(1) \oplus G(1) \odot H(2) \\
&\quad \oplus G(0) \odot H(3)]
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde devam edilirse,

$$F(k) = \frac{e}{e^k} \exp \odot \exp \sum_{m=0}^{k-1} G(m) \odot H(k-m-1)$$

eşitliği elde edilir.

BG -diferansiyel dönüşüm metodunun daha net anlaşılması için ilk olarak diferansiyel denklemlere uygulaması örneklendirmelerle verilecektir.

Örnek 5.1.

$$e \ominus \frac{d^{BG}y}{dx^{BG}} \oplus y = 1 \quad (57)$$

$y(0) = e^a$ başlangıç koşulu ile verilen lineer BG -diferansiyel denklemin, BG -diferansiyel dönüşüm metodu ile çözümünü inceleyiniz.

(57) denklemine, BG -diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa, Teorem 5.2, Teorem 5.3 ve Teorem 5.7 den faydalanılarak, $Y(0) = e^a$ başlangıç koşulu ile

$$\delta(k) \ominus e^{(k+1)} \odot Y(k+1) \oplus Y(k) = 1 \quad (58)$$

ifadesi elde edilir. (58) ifadesi düzenlenirse,

$$\begin{aligned} 1 \oplus e^{(k+1)} \odot Y(k+1) &= \delta(k) \oplus Y(k) \\ e^{(k+1)} \odot Y(k+1) &= \delta(k) \oplus Y(k) \\ Y(k+1) &= \frac{e}{e^{(k+1)}} \exp \odot [\delta(k) \oplus Y(k)] \end{aligned} \quad (59)$$

bulunur. (59) ifadesinde $k = 0, 1, 2, 3$ değerleri yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$k = 0$ için,

$$\begin{aligned} Y(1) &= e \odot [\delta(0) \oplus Y(0)] \\ &= e \odot [e \oplus e^a] \\ &= \frac{e^{(a+1)}}{e} \exp \\ &= \frac{e^{(a+1)}}{1!_{\exp}} \exp \end{aligned}$$

bulunur.

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned} Y(2) &= \frac{e}{e^2} \exp \odot [\delta(1) \oplus Y(1)] \\ &= \frac{e}{e^2} \exp \odot [1 \oplus e^{(a+1)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{(a+1)}}{e^2} \exp \\
&= \frac{e^{(a+1)}}{2!_{\exp}} \exp
\end{aligned}$$

bulunur.

$k = 2$ için,

$$\begin{aligned}
Y(3) &= \frac{e}{e^3} \exp \odot [\delta(2) \oplus Y(2)] \\
&= \frac{e}{e^3} \exp \odot \left[1 \oplus \frac{e^{(a+1)}}{2!_{\exp}} \exp \right] \\
&= \frac{e}{e^3} \exp \odot \frac{e^{(a+1)}}{e^2} \exp \\
&= \frac{e^{(a+1)}}{e^6} \exp \\
&= \frac{e^{(a+1)}}{3!_{\exp}} \exp
\end{aligned}$$

bulunur.

$k = 3$ için,

$$\begin{aligned}
Y(4) &= \frac{e}{e^4} \exp \odot [\delta(3) \oplus Y(3)] \\
&= \frac{e}{e^4} \exp \odot \left[1 \oplus \frac{e^{(a+1)}}{3!_{\exp}} \exp \right] \\
&= \frac{e}{e^4} \exp \odot \frac{e^{(a+1)}}{3!_{\exp}} \exp \\
&= \frac{e^{(a+1)}}{4!_{\exp}} \exp
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece problemin çözümü,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \exp \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) \odot x^{k_{\exp}} \\
&= e^a \oplus \frac{e^{(a+1)}}{1!_{\exp}} \exp \odot x \oplus \frac{e^{(a+1)}}{2!_{\exp}} \exp \odot x^{2_{\exp}} \oplus \frac{e^{(a+1)}}{3!_{\exp}} \exp \odot x^{3_{\exp}}
\end{aligned}$$

$$\oplus \frac{e^{(a+1)}}{4!_{\text{exp}}} \exp \odot x^{4_{\text{exp}}} \oplus \dots$$

şeklinde elde edilir. Bu BG -kuvvet serisinin yakınsaklığından

$$\begin{aligned} y(x) &= e^a \oplus \frac{e^{(a+1)}}{1!_{\text{exp}}} \exp \odot x \oplus \frac{e^{(a+1)}}{2!_{\text{exp}}} \exp \odot x^{2_{\text{exp}}} \oplus \frac{e^{(a+1)}}{3!_{\text{exp}}} \exp \odot x^{3_{\text{exp}}} \\ &\quad \oplus \frac{e^{(a+1)}}{4!_{\text{exp}}} \exp \odot x^{4_{\text{exp}}} \oplus \dots \\ &= (1 \ominus e) \oplus e^{(a+1)} \oplus e^{(a+1)} \odot x \oplus e^{(a+1)} \odot \frac{x^{2_{\text{exp}}}}{2!_{\text{exp}}} \exp \\ &\quad \oplus e^{(a+1)} \odot \frac{x^{3_{\text{exp}}}}{3!_{\text{exp}}} \exp \oplus e^{(a+1)} \odot \frac{x^{4_{\text{exp}}}}{4!_{\text{exp}}} \exp \oplus \dots \\ &= (1 \ominus e) \oplus e^{(a+1)} \odot \left[e \oplus x \oplus \frac{x^{2_{\text{exp}}}}{2!_{\text{exp}}} \exp \oplus \frac{x^{3_{\text{exp}}}}{3!_{\text{exp}}} \exp \oplus \frac{x^{4_{\text{exp}}}}{4!_{\text{exp}}} \exp \oplus \dots \right] \\ &= (1 \ominus e) \oplus e^{(a+1)} \odot e^x \end{aligned}$$

olup

$$y(x) = (1 \ominus e) \oplus e^{(a+1)} \odot e^x$$

eşitliği problemin tam çözümünü verir.

Örnek 5.2.

$$\frac{d^{2BG}y}{dx^{2BG}} \oplus e^3 \odot \frac{d^{BG}y}{dx^{BG}} \oplus e^2 \odot y = e^{24} \quad (60)$$

$y(0) = e^{10}$ ve $y^{BG}(0) = 1$ başlangıç koşulları ile verilen lineer BG -diferansiyel denklemin BG -diferansiyel dönüşüm metodu ile çözümünü inceleyiniz.

Teorem 5.3, Teorem 5.4 ve Teorem 5.7 kullanılarak, (60) denkleminin BG -diferansiyel dönüşümü,

$$\begin{aligned} &e^{(k+1)} \odot e^{(k+2)} \odot Y(k+2) \oplus e^3 \odot e^{(k+1)} \odot Y(k+1) \oplus e^2 \odot Y(k) \\ &= e^{24} \odot \delta(k) \end{aligned} \quad (61)$$

olur. Ayrıca başlangıç koşulları $Y(0) = e^{10}$ ve $Y(1) = 1$ olarak elde edilir. (61) ifadesi düzenlenirse,

$$e^{(k+2).(k+1)} \odot Y(k+2) = e^{24} \odot \delta(k) \ominus e^3 \odot e^{(k+1)} \odot Y(k+1) \ominus e^2 \odot Y(k)$$

$$Y(k+2) = \frac{e}{e^{(k+2).(k+1)}} \exp \odot [e^{24} \odot \delta(k) \ominus e^3 \odot e^{(k+1)} \odot Y(k+1) \ominus e^2 \odot Y(k)] \quad (62)$$

bulunur. (62) ifadesinde $k = 0, 1, 2$ değerleri yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$k = 0$ için,

$$Y(2) = \frac{e}{e^{2.1}} \exp \odot [e^{24} \odot \delta(0) \ominus e^3 \odot e^1 \odot Y(1) \ominus e^2 \odot Y(0)]$$

$$= \frac{e}{e^2} \exp \odot [e^{24} \odot e \ominus e^3 \odot e \odot 1 \ominus e^2 \odot e^{10}]$$

$$= \frac{e}{e^2} \exp \odot e^4 = e^2$$

olur.

$k = 1$ için,

$$Y(3) = \frac{e}{e^{3.2}} \exp \odot [e^{24} \odot \delta(1) \ominus e^3 \odot e^2 \odot Y(2) \ominus e^2 \odot Y(1)]$$

$$= \frac{e}{e^6} \exp \odot [e^{24} \odot 1 \ominus e^3 \odot e^2 \odot e^2 \ominus e^2 \odot 1]$$

$$= \frac{e}{e^6} \exp \odot [1 \ominus e^{12}]$$

$$= (1 \ominus e) \odot e^2$$

olur.

$k = 2$ için,

$$Y(3) = \frac{e}{e^{4.3}} \exp \odot [e^{24} \odot \delta(2) \ominus e^3 \odot e^3 \odot Y(3) \ominus e^2 \odot Y(2)]$$

$$= \frac{e}{e^{12}} \exp \odot [e^{24} \odot 1 \ominus e^3 \odot e^3 \odot ((1 \ominus e) \odot e^2) \ominus e^2 \odot e^2]$$

$$= \frac{e}{e^{12}} \exp \odot e^{14} = e^{\frac{7}{6}}$$

olarak bulunur. Böylece problemin çözümü,

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \exp \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) \odot x^{k_{\exp}} \\
 &= e^{10} \oplus e \odot x \oplus e^2 \odot x^{2_{\exp}} \ominus e^2 \odot x^{3_{\exp}} \oplus e^{\frac{7}{6}} \odot x^{4_{\exp}} \oplus \dots
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bigeometrik Taylor seri açılımından,

$$\begin{aligned}
 y(x) &= e^{10} \oplus e \odot x \oplus e^2 \odot x^{2_{\exp}} \ominus e^2 \odot x^{3_{\exp}} \oplus e^{\frac{7}{6}} \odot x^{4_{\exp}} \oplus \dots \\
 &= e^{10} \oplus e^2 \ominus e^4 \oplus e^4 \odot x \ominus \frac{e^4}{e^2} \exp \odot x^{2_{\exp}} \oplus \frac{e^4}{e^6} \exp \odot x^{3_{\exp}} \\
 &\quad \ominus \frac{e^4}{e^{24}} \exp \odot x^{4_{\exp}} \oplus \dots \oplus e^2 \ominus e^4 \odot x \oplus e^4 \odot x^{2_{\exp}} \\
 &\quad \ominus \frac{e^{16}}{e^6} \exp \odot x^{3_{\exp}} \oplus \frac{e^{32}}{e^{24}} \exp \odot x^{4_{\exp}} \oplus \dots \\
 &= e^{12} \ominus e^4 \oplus e^4 \odot x \ominus \frac{e^4}{e^2} \exp \odot x^{2_{\exp}} \oplus \frac{e^4}{e^6} \exp \odot x^{3_{\exp}} \\
 &\quad \ominus \frac{e^4}{e^{24}} \exp \odot x^{4_{\exp}} \oplus \dots \oplus e^2 \ominus e^4 \odot x \oplus e^4 \odot x^{2_{\exp}} \\
 &\quad \ominus \frac{e^{16}}{e^6} \exp \odot x^{3_{\exp}} \oplus \frac{e^{32}}{e^{24}} \exp \odot x^{4_{\exp}} \oplus \dots \\
 &= e^{12} \ominus e^4 \oplus e^4 \odot x \ominus \frac{e^4}{e^2} \exp \odot x^{2_{\exp}} \oplus \frac{e^4}{e^6} \exp \odot x^{3_{\exp}} \oplus \dots \\
 &\quad \oplus e^2 \odot \left(e \ominus (e^2 \odot x) \oplus \frac{e^4}{e^2} \exp \odot x^{2_{\exp}} \ominus \frac{e^8}{e^6} \exp \odot x^{3_{\exp}} \oplus \dots \right) \\
 &= e^{12} \ominus e^4 \odot \left(e \ominus x \oplus \frac{x^{2_{\exp}}}{2!_{\exp}} \exp \ominus \frac{x^{3_{\exp}}}{3!_{\exp}} \exp \oplus \dots \right) \\
 &\quad \oplus e^2 \odot \left(e \ominus (e^2 \odot x) \oplus e^4 \odot \frac{x^{2_{\exp}}}{2!_{\exp}} \exp \ominus e^8 \odot \frac{x^{3_{\exp}}}{3!_{\exp}} \exp \oplus \dots \right) \\
 &= e^{12} \ominus e^4 \odot \left(e \ominus x \oplus \frac{x^{2_{\exp}}}{2!_{\exp}} \exp \ominus \frac{x^{3_{\exp}}}{3!_{\exp}} \exp \oplus \dots \right) \\
 &\quad \oplus e^2 \odot \left(e \ominus (e^2 \odot x) \oplus \frac{(e^2 \odot x)^{2_{\exp}}}{2!_{\exp}} \exp \ominus \frac{(e^2 \odot x)^{3_{\exp}}}{3!_{\exp}} \exp \oplus \dots \right) \\
 &= e^{12} \ominus e^4 \odot e^{\frac{1}{x}} \oplus e^2 \odot e^{\frac{1}{x^2}}
 \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$y(x) = e^{12} \ominus e^4 \odot e^{\frac{1}{x}} \oplus e^2 \odot e^{\frac{1}{x^2}}$$

eşitliği problemin tam çözümünü verir.

Örnek 5.3.

$$y^{(2)BG}(x) \oplus y(x) = e^x \quad (63)$$

$y(0) = e$ ve $y^{BG}(0) = e$ başlangıç koşulları ile verilen lineer BG -diferansiyel denkleminin BG -diferansiyel dönüşüm metodu ile çözümünü inceleyiniz.

Teorem 5.2, Teorem 5.4 ve Teorem 5.8 kullanılarak, (63) denkleminin BG -diferansiyel dönüşümü,

$$e^{(k+1)} \odot e^{(k+2)} \odot Y(k+2) \oplus Y(k) = \frac{e}{k!_{\exp}} \exp$$

olur. Ayrıca başlangıç koşulları $Y(0) = e$ ve $Y(1) = e$ olarak elde edilir. Elde edilen ifade düzenlenirse,

$$e^{(k+1)} \odot e^{(k+2)} \odot Y(k+2) = \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \ominus Y(k)$$

$$Y(k+2) = \frac{e}{(k+2)!_{\exp}} \exp \ominus \frac{Y(k)}{e^{(k+1).(k+2)}} \exp$$

bulunur. Elde edilen dönüşümde, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ değerleri yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$k = 0$ için,

$$\begin{aligned} Y(2) &= \frac{e}{2!_{\exp}} \exp \ominus \frac{Y(0)}{e^{1.2}} \exp \\ &= \frac{e}{e^2} \exp \ominus \frac{e}{e^2} \exp = 1 \end{aligned}$$

olur.

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned}
Y(3) &= \frac{e}{3!_{\text{exp}}} \exp \ominus \frac{Y(1)}{e^{2.3}} \exp \\
&= \frac{e}{e^6} \exp \ominus \frac{e}{e^6} \exp = 1
\end{aligned}$$

olur.

$k = 2$ için,

$$\begin{aligned}
Y(4) &= \frac{e}{4!_{\text{exp}}} \exp \ominus \frac{Y(2)}{e^{3.4}} \exp \\
&= \frac{e}{4!_{\text{exp}}} \exp \ominus \frac{1}{e^{3.4}} \exp \\
&= \frac{e}{4!_{\text{exp}}} \exp
\end{aligned}$$

olur.

$k = 3$ için,

$$\begin{aligned}
Y(5) &= \frac{e}{5!_{\text{exp}}} \exp \ominus \frac{Y(3)}{e^{4.5}} \exp \\
&= \frac{e}{5!_{\text{exp}}} \exp \ominus \frac{1}{e^{4.5}} \exp \\
&= \frac{e}{5!_{\text{exp}}} \exp
\end{aligned}$$

olur.

$k = 4$ için,

$$\begin{aligned}
Y(6) &= \frac{e}{6!_{\text{exp}}} \exp \ominus \frac{Y(4)}{e^{5.6}} \exp \\
&= \frac{e}{6!_{\text{exp}}} \exp \ominus \frac{\frac{e}{4!_{\text{exp}}} \exp}{e^{5.6}} \exp \\
&= \frac{e}{e^{6!}} \exp \ominus \frac{e}{e^{6!}} \exp = 1
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece problemin çözümü,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \exp \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) \odot x^{k_{\exp}} \\
&= e \oplus e \odot x \oplus 1 \odot x^{2_{\exp}} \oplus 1 \odot x^{3_{\exp}} \oplus \frac{e}{4!_{\exp}} \exp \odot x^{4_{\exp}} \oplus \frac{e}{5!_{\exp}} \exp \\
&\quad \odot x^{5_{\exp}} \oplus 1 \odot x^{6_{\exp}} \oplus \dots \\
&= e \oplus x \oplus \frac{x^{4_{\exp}}}{4!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{5_{\exp}}}{5!_{\exp}} \exp \oplus \dots
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bigeometrik Taylor seri açılımından

$$\begin{aligned}
y(x) &= e \oplus x \oplus \frac{x^{4_{\exp}}}{4!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{5_{\exp}}}{5!_{\exp}} \exp \oplus \dots \\
&= \frac{e}{e^2} \exp \odot \left[e^2 \odot \left(e \oplus x \oplus \frac{x^{4_{\exp}}}{4!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{5_{\exp}}}{5!_{\exp}} \exp \oplus \dots \right) \right] \\
&= \frac{e}{e^2} \exp \odot \left[\left(e \ominus \frac{x^{2_{\exp}}}{2!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{4_{\exp}}}{4!_{\exp}} \exp \ominus \frac{x^{6_{\exp}}}{6!_{\exp}} \exp \oplus \dots \right) \oplus \right. \\
&\quad \left(x \ominus \frac{x^{3_{\exp}}}{3!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{5_{\exp}}}{5!_{\exp}} \exp \ominus \frac{x^{7_{\exp}}}{7!_{\exp}} \exp \oplus \dots \right) \oplus \left(e \oplus x \oplus \frac{x^{2_{\exp}}}{2!_{\exp}} \exp \right. \\
&\quad \left. \oplus \frac{x^{3_{\exp}}}{3!_{\exp}} \exp \oplus \dots \right) \left. \right]
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$y(x) = \frac{e}{e^2} \exp \odot [e^{\cos \ln x} \oplus e^{\sin \ln x} \oplus e^x]$$

eşitliği problemin tam çözümünü verir.

Şimdi bu bölümün esas kısmını oluşturan lineer bigeometrik Volterra integral denklemlerinin, BG -diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanarak çözümlerinin elde edilmesi sayısal örneklendirmelerle gösterilecektir.

Örnek 5.4. BG -diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanılarak

$$\phi(x) = e \oplus_{BG} \int_1^x \phi(t) d^{BG} t$$

lineer BG -Volterra integral denkleminin, $\phi(0) = e$ başlangıç koşulu ile çözümünü inceleyiniz.

Denkleme, BG -diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanırsa, Teorem 5.7 ve Teorem 5.10 den faydalanılarak

$$\Phi(k) = \delta(k) \oplus \frac{\Phi(k-1)}{e^k} \exp, \quad k \geq 1$$

ifadesi $\Phi(0) = e$ başlangıç koşulu ile elde edilir. Bu dönüşümde $k = 1, 2, 3, 4$ değerleri yerine yazılarak aşağıdaki ifadeler bulunur.

$k = 1$ için,

$$\Phi(1) = \delta(1) \oplus \frac{\Phi(0)}{e^1} \exp = 1 \oplus \frac{e}{e} \exp = \frac{e}{1!_{\exp}} \exp$$

olur.

$k = 2$ için,

$$\Phi(2) = \delta(2) \oplus \frac{\Phi(1)}{e^2} \exp = 1 \oplus \frac{e}{e^2} \exp = \frac{e}{2!_{\exp}} \exp$$

olur.

$k = 3$ için,

$$\Phi(3) = \delta(3) \oplus \frac{\Phi(2)}{e^3} \exp = 1 \oplus \frac{\frac{e}{2!_{\exp}} \exp}{e^3} \exp = \frac{e^{1/2}}{e^3} \exp = \frac{e}{3!_{\exp}} \exp$$

olur.

$k = 4$ için,

$$\Phi(4) = \delta(4) \oplus \frac{\Phi(3)}{e^4} \exp = 1 \oplus \frac{\frac{e}{3!_{\exp}} \exp}{e^4} \exp = \frac{e^{1/6}}{e^4} \exp = \frac{e}{4!_{\exp}} \exp$$

çözümleri elde edilmiş olur. Böylece problemin çözümü,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \exp \sum_{k=0}^{\infty} \Phi(k) \odot x^{k_{\exp}} \\
&= e \oplus \frac{e}{1!_{\exp}} \exp \odot x \oplus \frac{e}{2!_{\exp}} \exp \odot x^{2_{\exp}} \oplus \frac{e}{3!_{\exp}} \exp \odot x^{3_{\exp}} \\
&\quad \oplus \frac{e}{4!_{\exp}} \exp \odot x^{4_{\exp}} \oplus \dots
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\phi(x) = e \oplus \frac{x}{1!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{2_{\exp}}}{2!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{3_{\exp}}}{3!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{4_{\exp}}}{4!_{\exp}} \exp \oplus \dots$$

olup bigeometrik Taylor seri açılımından faydalanılarak

$$\phi(x) = e^x$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 5.5. BG -diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanılarak $\phi(0) = 1$ başlangıç koşulu ile verilen,

$$\phi(x) = e^6 \odot x \ominus x^{3_{\exp}} \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \int_1^x t \odot \phi(t) d^{BG} t$$

lineer BG -Volterra integral denkleminin çözümünü inceleyiniz.

Denkleme BG -diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanırsa, Teorem 5.7 ve Teorem 5.12 den $k \geq 1$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(k) &= e^6 \odot \delta(k-1) \ominus \delta(k-3) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \frac{e}{e^k} \exp \\
&\quad \odot \exp \sum_{t=0}^{k-1} \delta(t-1) \odot \Phi(k-t-1)
\end{aligned}$$

ifadesi $\Phi(0) = 1$ başlangıç koşulu ile elde edilir. Elde edilen bu dönüşümde $k = 1, 2, 3, 4$ değerleri yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeler bulunur.

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(1) &= e^6 \odot \delta(0) \ominus \delta(-2) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \frac{e}{e^1} \exp \\
&\odot \exp \sum_{t=0}^0 \delta(t-1) \odot \Phi(1-t-1) \\
&= e^6 \odot e \ominus 1 \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot e \odot 1 = e^6
\end{aligned}$$

olur.

$k = 2$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(2) &= e^6 \odot \delta(1) \ominus \delta(-1) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \frac{e}{e^2} \exp \\
&\odot \exp \sum_{t=0}^1 \delta(t-1) \odot \Phi(1-t) \\
&= e^6 \odot 1 \ominus 1 \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \frac{e}{e^2} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(1) \oplus \delta(0) \odot \Phi(0)] \\
&= 1
\end{aligned}$$

olur.

$k = 3$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(3) &= e^6 \odot \delta(2) \ominus \delta(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \frac{e}{e^3} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^2 \delta(t-1) \odot \Phi(2-t) \\
&= e^6 \odot 1 \ominus e \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \frac{e}{e^3} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(2) \oplus \delta(0) \odot \Phi(1) \\
&\quad \oplus \delta(1) \odot \Phi(0)] \\
&= 1 \ominus e \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \frac{e}{e^3} \exp \odot e^6 \\
&= 1
\end{aligned}$$

olur.

$k = 4$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(4) &= e^6 \odot \delta(3) \ominus \delta(1) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \frac{e}{e^4} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^3 \delta(t-1) \odot \Phi(3-t) \\
&= e^6 \odot 1 \ominus 1 \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \frac{e}{e^4} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(3) \oplus \delta(0) \odot \Phi(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oplus \delta(1) \odot \Phi(1) \oplus \delta(2) \odot \Phi(0)] \\
& = 1 \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \frac{e}{e^4} \exp \odot 1 \\
& = 1
\end{aligned}$$

çözümleri elde edilmiş olur. Buradan problemin çözümü,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \exp \sum_{k=0}^{\infty} \Phi(k) \odot x^{k \exp} \\
&= 1 \oplus e^6 \odot x \oplus 1 \odot x^{2 \exp} \oplus 1 \odot x^{3 \exp} \oplus 1 \odot x^{4 \exp} \dots \\
&= e^6 \odot x
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 5.6. *BG*-diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanılarak $\phi(0) = e$ başlangıç koşulu ile verilen

$$\phi(x) = e \oplus x \oplus \int_1^x (t \ominus x) \odot \phi(t) d^{BG} t$$

lineer *BG*-Volterra integral denkleminin çözümünü inceleyiniz.

Denkleme, *BG*-diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanırsa, Teorem 5.7, Teorem 5.11 ve Teorem 5.12 den $k \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\Phi(k) &= \delta(k) \oplus \delta(k-1) \oplus \exp \sum_{t=1}^k \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(k-t-1) \odot \Phi(t-1) \\
&\ominus \frac{e}{e^k} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^{k-1} \delta(t-1) \odot \Phi(k-t-1)
\end{aligned}$$

ifadesi $\Phi(0) = e$ başlangıç koşulu ile elde edilir. Elde edilen bu dönüşümde $k = 1, 2, 3, 4$ değerleri yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeler bulunur.

$k = 1$ için,

$$\Phi(1) = \delta(1) \oplus \delta(0) \oplus \exp \sum_{t=1}^1 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(1-t-1) \odot \Phi(t-1)$$

$$\begin{aligned}
& \ominus \frac{e}{e^1} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^0 \delta(t-1) \odot \Phi(1-t-1) \\
& = 1 \oplus e \oplus 1 \ominus 1 = e \\
& = \frac{e}{1!_{\exp}} \exp
\end{aligned}$$

olur.

$k = 2$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(2) & = \delta(2) \oplus \delta(1) \oplus \exp \sum_{t=1}^2 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(1-t) \odot \Phi(t-1) \\
& \ominus \frac{e}{e^2} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^1 \delta(t-1) \odot \Phi(1-t) \\
& = 1 \oplus 1 \oplus \left[e \odot \delta(0) \odot \Phi(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(1) \right] \\
& \ominus \frac{e}{e^2} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(1) \oplus \delta(0) \odot \Phi(0)] \\
& = e \ominus \frac{e}{e^2} \exp = \frac{e}{2!_{\exp}} \exp
\end{aligned}$$

olur.

$k = 3$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(3) & = \delta(3) \oplus \delta(2) \oplus \exp \sum_{t=1}^3 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(2-t) \odot \Phi(t-1) \\
& \ominus \frac{e}{e^3} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^2 \delta(t-1) \odot \Phi(2-t) \\
& = 1 \oplus 1 \oplus \left[e \odot \delta(1) \odot \Phi(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(0) \odot \Phi(1) \right. \\
& \quad \left. \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(2) \right] \ominus \frac{e}{e^3} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(2) \\
& \quad \oplus \delta(0) \odot \Phi(1) \oplus \delta(1) \odot \Phi(0)] \\
& = \frac{e}{e^2} \exp \ominus \frac{e}{e^3} \exp = \frac{e}{e^6} \exp = \frac{e}{3!_{\exp}} \exp
\end{aligned}$$

olur.

$k = 4$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(4) &= \delta(4) \oplus \delta(3) \oplus \exp \sum_{t=1}^4 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(3-t) \odot \Phi(t-1) \\
&\quad \ominus \frac{e}{e^4} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^3 \delta(t-1) \odot \Phi(3-t) \\
&= 1 \oplus 1 \oplus \left[e \odot \delta(2) \odot \Phi(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(1) \odot \Phi(1) \right. \\
&\quad \left. \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot \delta(0) \odot \Phi(2) \oplus \frac{e}{e^4} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(3) \right] \\
&\quad \ominus \frac{e}{e^3} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(3) \oplus \delta(0) \odot \Phi(2) \oplus \delta(1) \odot \Phi(1) \\
&\quad \oplus \delta(2) \odot \Phi(0)] \\
&= \frac{e}{e^6} \exp \ominus \frac{e}{e^8} \exp = \frac{e}{e^{24}} \exp = \frac{e}{4!_{\exp}} \exp
\end{aligned}$$

çözümleri elde edilmiş olur. Böylece problemin çözümü,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \exp \sum_{k=0}^{\infty} \Phi(k) \odot x^{k_{\exp}} \\
&= e \oplus \frac{e}{1!_{\exp}} \exp \odot x \oplus \frac{e}{2!_{\exp}} \exp \odot x^{2_{\exp}} \oplus \frac{e}{3!_{\exp}} \exp \odot x^{3_{\exp}} \\
&\quad \oplus \frac{e}{4!_{\exp}} \exp \odot x^{4_{\exp}} \oplus \dots
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. O halde

$$\phi(x) = e \oplus \frac{x}{1!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{2_{\exp}}}{2!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{3_{\exp}}}{3!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{4_{\exp}}}{4!_{\exp}} \exp \oplus \dots$$

olup bigeometrik Taylor seri açılımından faydalanılarak

$$\phi(x) = e^x$$

elde edilir.

Örnek 5.7. BG -diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanılarak $\phi(0) = 1$ başlangıç koşulu ile verilen

$$\phi(x) = x \oplus_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot \phi(t) d^{BG} t$$

lineer BG -Volterra integral denkleminin çözümünü inceleyiniz.

Denkleme, BG -diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanırsa, Teorem 5.7, Teorem 5.11 ve Teorem 5.12 den $k \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \delta(k-1) \oplus \frac{e}{e^k} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^{k-1} \delta(t-1) \odot \Phi(k-t-1) \\ &\ominus \exp \sum_{t=1}^k \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(k-t-1) \odot \Phi(t-1) \end{aligned}$$

ifadesi $\Phi(0) = 1$ başlangıç koşulu ile elde edilir. Elde edilen bu dönüşümde $k = 1, 2, 3, 4, 5$ değerleri yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeler bulunur.
 $k = 1$ için,

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= \delta(0) \oplus \frac{e}{e^1} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^0 \delta(t-1) \odot \Phi(1-t-1) \\ &\ominus \exp \sum_{t=1}^1 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(1-t-1) \odot \Phi(t-1) \\ &= e \oplus 1 \ominus 1 = e \end{aligned}$$

olur.

$k = 2$ için,

$$\begin{aligned} \Phi(2) &= \delta(1) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^1 \delta(t-1) \odot \Phi(2-t-1) \\ &\ominus \exp \sum_{t=1}^2 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(2-t-1) \odot \Phi(t-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(1) \oplus \delta(0) \odot \Phi(0)] \\
&\quad \ominus \left[e \odot \delta(0) \odot \Phi(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(1) \right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

olur.

$k = 3$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(3) &= \delta(2) \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^2 \delta(t-1) \odot \Phi(2-t) \\
&\quad \ominus \exp \sum_{t=1}^3 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(2-t) \odot \Phi(t-1) \\
&= 1 \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(2) \oplus \delta(0) \odot \Phi(1) \oplus \delta(1) \odot \Phi(0)] \\
&\quad \ominus \left[e \odot \delta(1) \odot \Phi(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(0) \odot \Phi(1) \right. \\
&\quad \left. \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(2) \right] \\
&= \frac{e}{e^3} \exp \ominus \frac{e}{e^2} \exp = (1 \ominus e) \odot \frac{e}{3!_{\exp}} \exp
\end{aligned}$$

olur.

$k = 4$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(4) &= \delta(3) \oplus \frac{e}{e^4} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^3 \delta(t-1) \odot \Phi(3-t) \\
&\quad \ominus \exp \sum_{t=1}^4 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(3-t) \odot \Phi(t-1) \\
&= 1 \oplus \frac{e}{e^4} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(3) \oplus \delta(0) \odot \Phi(2) \oplus \delta(1) \odot \Phi(1) \\
&\quad \oplus \delta(2) \odot \Phi(0)] \ominus \left[e \odot \delta(2) \odot \Phi(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(1) \odot \Phi(1) \right. \\
&\quad \left. \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot \delta(0) \odot \Phi(2) \oplus \frac{e}{e^4} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(3) \right] \\
&= 1 \oplus \frac{e}{e^4} \exp \odot 1 = 1
\end{aligned}$$

olur.

$k = 5$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(5) &= \delta(4) \oplus \frac{e}{e^5} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^4 \delta(t-1) \odot \Phi(4-t) \\
&\quad \ominus \exp \sum_{t=1}^5 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(4-t) \odot \Phi(t-1) \\
&= 1 \oplus \frac{e}{e^5} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(4) \oplus \delta(0) \odot \Phi(3) \oplus \delta(1) \odot \Phi(2) \\
&\quad \oplus \delta(2) \odot \Phi(1) \oplus \delta(3) \odot \Phi(0)] \ominus [e \odot \delta(3) \odot \Phi(0) \\
&\quad \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(2) \odot \Phi(1) \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot \delta(1) \odot \Phi(2) \\
&\quad \oplus \frac{e}{e^4} \exp \odot \delta(0) \odot \Phi(3) \oplus \frac{e}{e^5} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(4)] \\
&= \left[\frac{e}{e^5} \exp \odot (1 \ominus e) \odot \frac{e}{e^{3!}} \exp \right] \oplus \left[\frac{e}{e^4} \exp \odot \frac{e}{e^{3!}} \exp \right] \\
&= \frac{e}{5!_{\exp}} \exp
\end{aligned}$$

çözümleri elde edilmiş olur. Böylece problemin çözümü,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \exp \sum_{k=0}^{\infty} \Phi(k) \odot x^{k_{\exp}} \\
&= 1 \oplus e \odot x \oplus 1 \odot x^{2_{\exp}} \oplus (1 \ominus e) \odot \frac{e}{3!_{\exp}} \exp \odot x^{3_{\exp}} \oplus 1 \odot x^{4_{\exp}} \\
&\quad \oplus \frac{e}{5!_{\exp}} \exp \odot x^{5_{\exp}} \oplus \dots
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\phi(x) = x \ominus \frac{x^{3_{\exp}}}{3!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{5_{\exp}}}{5!_{\exp}} \exp \ominus \frac{x^{7_{\exp}}}{7!_{\exp}} \exp \oplus \dots$$

olup bigeometrik Taylor seri açılımından faydalanılarak

$$\phi(x) = e^{\sin \ln x}$$

elde edilir.

Örnek 5.8. BG -diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanılarak $\phi(0) = e$ başlangıç koşulu ile verilen

$$\phi(x) = e \oplus_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot \phi(t) d^{BG} t$$

lineer BG -Volterra integral denkleminin çözümünü inceleyiniz.

Denkleme, BG -diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa, Teorem 5.7, Teorem 5.11 ve Teorem 5.12 den faydalanılarak $k \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \delta(k) \oplus \frac{e}{e^k} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^{k-1} \delta(t-1) \odot \Phi(k-t-1) \\ &\quad \ominus \exp \sum_{t=1}^k \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(k-t-1) \odot \Phi(t-1) \end{aligned}$$

ifadesi $\Phi(0) = e$ başlangıç koşulu ile elde edilir. Elde edilen bu dönüşümde $k = 1, 2, 3, 4, 5$ değerleri yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeler bulunur.

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= \delta(1) \oplus \frac{e}{e^1} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^0 \delta(t-1) \odot \Phi(1-t-1) \\ &\quad \ominus \exp \sum_{t=1}^1 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(1-t-1) \odot \Phi(t-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur.

$k = 2$ için,

$$\begin{aligned} \Phi(2) &= \delta(2) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^1 \delta(t-1) \odot \Phi(2-t-1) \\ &\quad \ominus \exp \sum_{t=1}^2 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(2-t-1) \odot \Phi(t-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(1) \oplus \delta(0) \odot \Phi(0)] \\
&\quad \ominus \left[e \odot \delta(0) \odot \Phi(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(1) \right] \\
&= \frac{e}{e^2} \exp \ominus e = (1 \ominus e) \odot \frac{e}{2!_{\exp}} \exp
\end{aligned}$$

olur.

$k = 3$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(3) &= \delta(3) \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^2 \delta(t-1) \odot \Phi(2-t) \\
&\quad \ominus \exp \sum_{t=1}^3 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(2-t) \odot \Phi(t-1) \\
&= 1 \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(2) \oplus \delta(0) \odot \Phi(1) \oplus \delta(1) \odot \Phi(0)] \\
&\quad \ominus \left[e \odot \delta(1) \odot \Phi(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(0) \odot \Phi(1) \right. \\
&\quad \left. \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(2) \right] \\
&= \frac{e}{e^3} \exp \odot 1 = 1
\end{aligned}$$

olur.

$k = 4$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(4) &= \delta(4) \oplus \frac{e}{e^4} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^3 \delta(t-1) \odot \Phi(3-t) \\
&\quad \ominus \exp \sum_{t=1}^4 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(3-t) \odot \Phi(t-1) \\
&= 1 \oplus \frac{e}{e^4} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(3) \oplus \delta(0) \odot \Phi(2) \oplus \delta(1) \odot \Phi(1) \\
&\quad \oplus \delta(2) \odot \Phi(0)] \ominus \left[e \odot \delta(2) \odot \Phi(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(1) \odot \Phi(1) \right. \\
&\quad \left. \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot \delta(0) \odot \Phi(2) \oplus \frac{e}{e^4} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(3) \right] \\
&= \left[\frac{e}{e^4} \exp \odot (1 \ominus e) \odot \frac{e}{e^2} \exp \right] \oplus \left[\frac{e}{e^3} \exp \odot \frac{e}{e^2} \exp \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 \ominus e) \odot \frac{e}{e^8} \exp \oplus \frac{e}{e^6} \exp \\
&= \frac{e}{e^{24}} \exp = \frac{e}{4!_{\exp}} \exp
\end{aligned}$$

olur.

$k = 5$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(5) &= \delta(5) \oplus \frac{e}{e^5} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^4 \delta(t-1) \odot \Phi(4-t) \\
&\ominus \exp \sum_{t=1}^5 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(4-t) \odot \Phi(t-1) \\
&= 1 \oplus \frac{e}{e^5} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(4) \oplus \delta(0) \odot \Phi(3) \oplus \delta(1) \odot \Phi(2) \\
&\quad \oplus \delta(2) \odot \Phi(1) \oplus \delta(3) \odot \Phi(0)] \ominus \left[e \odot \delta(3) \odot \Phi(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(2) \odot \Phi(1) \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot \delta(1) \odot \Phi(2) \right. \\
&\quad \left. \oplus \frac{e}{e^4} \exp \odot \delta(0) \odot \Phi(3) \oplus \frac{e}{e^5} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(4) \right] \\
&= \frac{e}{e^5} \exp \odot 1 = 1
\end{aligned}$$

çözümleri elde edilmiş olur. Böylece problemin çözümü,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \exp \sum_{k=0}^{\infty} \Phi(k) \odot x^{k_{\exp}} \\
&= e \oplus 1 \odot x \oplus (1 \ominus e) \odot \frac{e}{2!_{\exp}} \exp \odot x^{2_{\exp}} \oplus 1 \odot x^{3_{\exp}} \oplus \frac{e}{4!_{\exp}} \exp \\
&\quad \odot x^{4_{\exp}} \oplus 1 \odot x^{5_{\exp}} \oplus (1 \ominus e) \odot \frac{e}{6!_{\exp}} \exp \odot x^{6_{\exp}} \oplus \dots
\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\phi(x) = e \ominus \frac{x^{2_{\exp}}}{2!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{4_{\exp}}}{4!_{\exp}} \exp \ominus \frac{x^{6_{\exp}}}{6!_{\exp}} \exp \oplus \dots$$

olup bigeometrik Taylor seri açılımından faydalanılarak

$$\phi(x) = e^{\cos \ln x}$$

elde edilir.

Örnek 5.9. BG -diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanılarak $\phi(0) = e$ başlangıç koşulu ile verilen

$$\phi(x) = e^x \oplus_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (64)$$

lineer BG -Volterra integral denkleminin çözümünü inceleyiniz.

(64) denklemine, BG -diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa, Teorem 5.8, Teorem 5.11 ve Teorem 5.12 den faydalanılarak $k \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \frac{e}{k!_{\exp}} \exp \oplus \frac{e}{e^k} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^{k-1} \delta(t-1) \odot \Phi(k-t-1) \\ &\ominus \exp \sum_{t=1}^k \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(k-t-1) \odot \Phi(t-1) \end{aligned}$$

ifadesi $\Phi(0) = e$ başlangıç koşulu ile elde edilir. Elde edilen bu dönüşümde $k = 1, 2, 3, 4, 5$ değerleri yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeler bulunur.

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= \frac{e}{1!_{\exp}} \exp \oplus \frac{e}{e^1} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^0 \delta(t-1) \odot \Phi(1-t-1) \\ &\ominus \exp \sum_{t=1}^1 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(1-t-1) \odot \Phi(t-1) \\ &= e \oplus 1 \ominus 1 = e \end{aligned}$$

olur.

$k = 2$ için,

$$\Phi(2) = \frac{e}{2!_{\exp}} \exp \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^1 \delta(t-1) \odot \Phi(1-t)$$

$$\begin{aligned}
& \ominus \exp \sum_{t=1}^2 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(1-t) \odot \Phi(t-1) \\
&= \frac{e}{e^2} \exp \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(1) \oplus \delta(0) \odot \Phi(0)] \\
& \quad \ominus \left[e \odot \delta(0) \odot \Phi(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(1) \right] \\
&= \frac{e}{e^2} \exp \oplus \frac{e}{e^2} \exp \ominus e = 1
\end{aligned}$$

olur.

$k = 3$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(3) &= \frac{e}{3!_{\exp}} \exp \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^2 \delta(t-1) \odot \Phi(2-t) \\
& \quad \ominus \exp \sum_{t=1}^3 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(2-t) \odot \Phi(t-1) \\
&= \frac{e}{e^6} \exp \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(2) \oplus \delta(0) \odot \Phi(1) \oplus \delta(1) \odot \Phi(0)] \\
& \quad \ominus \left[e \odot \delta(1) \odot \Phi(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(0) \odot \Phi(1) \right. \\
& \quad \left. \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(2) \right] \\
&= \frac{e}{e^6} \exp \oplus \frac{e}{e^3} \exp \ominus \frac{e}{e^2} \exp = 1
\end{aligned}$$

olur.

$k = 4$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(4) &= \frac{e}{4!_{\exp}} \exp \oplus \frac{e}{e^4} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^3 \delta(t-1) \odot \Phi(3-t) \\
& \quad \ominus \exp \sum_{t=1}^4 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(3-t) \odot \Phi(t-1) \\
&= \frac{e}{e^{24}} \exp \oplus \frac{e}{e^4} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(3) \oplus \delta(0) \odot \Phi(2) \oplus \delta(1) \odot \Phi(1) \\
& \quad \oplus \delta(2) \odot \Phi(0)] \ominus \left[e \odot \delta(2) \odot \Phi(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(1) \odot \Phi(1) \right. \\
& \quad \left. \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot \delta(0) \odot \Phi(2) \oplus \frac{e}{e^4} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(3) \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{e}{e^{24}} \exp \oplus 1 \ominus 1 = \frac{e}{4!_{\exp}} \exp$$

olur.

$k = 5$ için,

$$\begin{aligned} \Phi(5) &= \frac{e}{5!_{\exp}} \exp \oplus \frac{e}{e^5} \exp \odot \exp \sum_{t=0}^4 \delta(t-1) \odot \Phi(4-t) \\ &\quad \ominus \exp \sum_{t=1}^5 \frac{e}{e^t} \exp \odot \delta(4-t) \odot \Phi(t-1) \\ &= \frac{e}{5!_{\exp}} \exp \oplus \frac{e}{e^5} \exp \odot [\delta(-1) \odot \Phi(4) \oplus \delta(0) \odot \Phi(3) \oplus \delta(1) \odot \Phi(2) \\ &\quad \oplus \delta(2) \odot \Phi(1) \oplus \delta(3) \odot \Phi(0)] \ominus \left[e \odot \delta(3) \odot \Phi(0) \oplus \frac{e}{e^2} \exp \odot \delta(2) \odot \Phi(1) \oplus \frac{e}{e^3} \exp \odot \delta(1) \odot \Phi(2) \oplus \frac{e}{e^4} \exp \odot \delta(0) \odot \Phi(3) \oplus \frac{e}{e^5} \exp \odot \delta(-1) \odot \Phi(4) \right] \\ &= \frac{e}{5!_{\exp}} \exp \oplus 1 \ominus 1 \\ &= \frac{e}{5!_{\exp}} \exp \end{aligned}$$

çözümleri elde edilir. Buradan problemin çözümü,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \exp \sum_{k=0}^{\infty} \Phi(k) \odot x^{k_{\exp}} \\ &= e \oplus e \odot x \oplus 1 \odot x^{2_{\exp}} \oplus 1 \odot x^{3_{\exp}} \oplus \frac{e}{4!_{\exp}} \exp \odot x^{4_{\exp}} \\ &\quad \oplus \frac{e}{5!_{\exp}} \exp \odot x^{5_{\exp}} \oplus \dots \\ &= e \oplus x \oplus \frac{x^{4_{\exp}}}{4!_{\exp}} \exp \oplus \frac{x^{5_{\exp}}}{5!_{\exp}} \exp \oplus \dots \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= e \oplus x \oplus \frac{x^{4_{\text{exp}}}}{4!_{\text{exp}}} \exp \oplus \frac{x^{5_{\text{exp}}}}{5!_{\text{exp}}} \exp \oplus \dots \\
&= \frac{e}{e^2} \exp \odot \left[e^2 \odot \left(e \oplus x \oplus \frac{x^{4_{\text{exp}}}}{4!_{\text{exp}}} \exp \oplus \frac{x^{5_{\text{exp}}}}{5!_{\text{exp}}} \exp \oplus \dots \right) \right] \\
&= \frac{e}{e^2} \exp \odot \left[\left(e \ominus \frac{x^{2_{\text{exp}}}}{2!_{\text{exp}}} \exp \oplus \frac{x^{4_{\text{exp}}}}{4!_{\text{exp}}} \exp \ominus \frac{x^{6_{\text{exp}}}}{6!_{\text{exp}}} \exp \oplus \dots \right) \oplus \right. \\
&\quad \left(x \ominus \frac{x^{3_{\text{exp}}}}{3!_{\text{exp}}} \exp \oplus \frac{x^{5_{\text{exp}}}}{5!_{\text{exp}}} \exp \ominus \frac{x^{7_{\text{exp}}}}{7!_{\text{exp}}} \exp \oplus \dots \right) \oplus \left(e \oplus x \oplus \frac{x^{2_{\text{exp}}}}{2!_{\text{exp}}} \exp \right. \\
&\quad \left. \oplus \frac{x^{3_{\text{exp}}}}{3!_{\text{exp}}} \exp \oplus \dots \right) \left. \right]
\end{aligned}$$

olup bigeometrik Taylor seri açılımından faydalanılarak

$$\phi(x) = \frac{e}{e^2} \exp \odot [e^{\cos \ln x} \oplus e^{\sin \ln x} \oplus e^x]$$

eşitliği elde edilir.

Verilen

$$\phi(x) = e^x \oplus {}_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot \phi(t) d^{BG} t \quad (64)$$

BG -Volterra integral denkleminin her iki tarafının x e göre BG -türevi alınırsa BG -Leibnitz kuralından,

$$\begin{aligned}
\phi^{BG}(x) &= e^x \oplus {}_{BG} \int_1^x \frac{\partial^{BG}}{\partial x^{BG}} ((t \ominus x) \odot \phi(t)) d^{BG} t \\
&\quad \oplus [(x \ominus x) \odot \phi(x) \odot x_x^{BG}] \ominus [(1 \ominus x) \odot \phi(1) \odot 1_x^{BG}] \\
&= e^x \oplus e^{-1} \odot {}_{BG} \int_1^x \phi(t) d^{BG} t \\
&= e^x \ominus {}_{BG} \int_1^x \phi(t) d^{BG} t
\end{aligned}$$

bulunur. İfade BG -integral işaretinden kurtulana kadar BG -türev almaya devam edilir. Tekrar BG -türevi alınırsa,

$$\phi^{(2)BG}(x) = e^x \ominus \phi(x)$$

bulunur. Böylece (64) BG -integral denkleminin uyan BG -diferansiyel denklemin

$$\phi^{(2)BG}(x) \oplus \phi(x) = e^x \tag{65}$$

olduğu görülür. Örnek 5.3 de bu bigeometrik diferansiyel denklemin çözümünün

$$\phi(x) = \frac{e}{e^2} \exp \odot [e^{\cos \ln x} \oplus e^{\sin \ln x} \oplus e^x]$$

olduğu gösterilmişti. Böylece (64) ve (65) denklemlerinin çözümlerinin aynı olduğu görülür.

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Yapılan bu çalışmada, bigeometrik integral denklemlerin sınıflandırmaları en genel haliyle tanımlandı ve BG -diferansiyel denklemlerle ilişkisi gösterildi. Homotopi pertürbasyon metodu bigeometrik kalkülüse aktararak oluşturulan BG -homotopi pertürbasyon metodunun hem BG -diferansiyel denklemlere hem de lineer BG -Volterra integral denklemlere uygulaması gösterildi ve uygulamalar nümerik örnekler ile pekiştirildi. Diferansiyel dönüşüm fonksiyonu bigeometrik türev yardımıyla bigeometrik kalkülüse aktararak BG -diferansiyel dönüşüm fonksiyonu tanımlandı ve temel özellikleri ispatlandı. Böylece BG -diferansiyel dönüşüm metodu oluşturularak bu metot yardımıyla BG -diferansiyel denklemlerin ve lineer BG -Volterra integral denklemlerin çözümleri incelendi. Ayrıca, bigeometrik kalkülüs ve klasik kalkülüs arasındaki ilişkiden yararlanılarak bu yöntemler yardımıyla bazı diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerin çözümlerinin elde edildiği sonucuna varıldı.

Güngör (2021) çalışmasında çözümü bigeometrik ardışık yaklaşım metodu ile elde edilen

$$\phi(x) = e \oplus_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot \phi(t) d^{BG} t$$

ve

$$\phi(x) = x \oplus_{BG} \int_1^x (t \ominus x) \odot \phi(t) d^{BG} t$$

lineer BG -Volterra integral denklemlerinin, BG -homotopi pertürbasyon metodu ile Örnek 4.2.1 ve Örnek 4.2.2 ve BG -diferansiyel dönüşüm metodu ile Örnek 5.7 ve Örnek 5.8’de çözümleri incelenmiş olup bu yöntemlerle de aynı sonuçlara ulaşıldığı görüldü.

Bigeometrik integral denklemler ve bigeometrik diferansiyel denklemler arasındaki ilişkiden faydalanılarak da çözümlerinin elde edilebileceği Örnek 5.3 ve Örnek 5.9’da irdelendi.

İntegral denklemlerin ve bigeometrik kalkülüsün matematik problemleri, fizik problemleri ve mühendislik bilimleri gibi birçok uygulama alanına sahip olması göz önünde bulundurularak yapılan bu çalışmanın, bahsi söz konusu olan alanlarda farklı bir alternatif oluşturacağı ve bakış açısı kazandıracağı düşünülmektedir.



KAYNAKÇA

- Aniszewska, D. ve Rybaczuk, M. (2005). Analysis of the Multiplicative Lorenz System. *Chaos Solitons Fractals*, 25, 79-90.
- Arikoglu, A. ve Ozkol, I. (2008). Solutions of Integral and Integro-Differential Equation Systems by Using Differential Transform Method. *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 2411-2417.
- Córdova-Lepe, F. (2006). The Multiplicative Derivative as a Measure of Elasticity in Economics. *TMAT Revista Latinoamericana de Ciencias e Ingeniería*, 2(3).
- Boruah, K. (2017). On Some Basic Properties of Geometric Real Sequences. *International Journal Mathematics Trends and Technology*, 46(2), 111-117.
- Boruah, K. ve Hazarika, B. (2017). Application of Geometric Calculus in Numerical Analysis and Difference Sequence Spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 449(2), 1265-1285.
- Boruah, K. ve Hazarika, B. (2018a). *G*-Calculus. *TWMS J. App. Eng. Math.*, V.8, N.2, 374-385.
- Boruah, K. ve Hazarika, B. (2018b). Bigeometric Integral Calculus. *TWMS J. App. Eng. Math.*, V.8, N.1, 94-105.
- Boruah, K., Hazarika, B. ve Bashirov A. E. (2021). Solvability of Bigeometric Differential Equations by Numerical Methods. *Sociedade Paranaense de Matemática*, 39(2), 203-222.
- Boruah, K. ve Hazarika, B. (2021). Some Basic Properties of Bigeometric Calculus and Its Applications in Numerical Analysis. *Afrika Matematika*, 32, 211-227.
- Duyar, C. ve Erdoğan M. (2016). On Non-Newtonian Real Number Series. *IOSR Journal of Mathematics*, 12(6), 34-48.
- Fındık, S. (2012). *Homotopi Pertürbasyon Metodu ile İntegral Denklemlerin Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- Grossman, M. ve Katz, R. (1972). *Non-Newtonian Calculus*. (1. Baskı), Pigeon Cove Massachussets: Lee Press.
- Grossman, M. (1983). *Bigeometric Calculus: A System with a Scale Free Derivative*. (First Edition), Rockport Massachussets: Archimedes Foundation.
- Güngör, N. (2020a). *BG*-Volterra Integral Equations and Relationship with *BG*-Differential Equations. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 10(3), 814-829.

- Güngör, N. (2020b). The Successive Approximations Method for Solving Non-Newtonian Fredholm Integral Equations of the Second Kind. *Conference Proceeding Science and Technology*, 3(1), 166-175.
- Güngör, N. (2020c). Some Geometric Properties of the Non-Newtonian Sequence Spaces $l_p(N)$. *Mathematica Slovaca*, 3, 689-696, Doi:10.1515/ms-2017-0382.
- Güngör, N. (2021). Solving Bigeometric Volterra Integral Equations by Using Successive Approximations Method. *Sakarya University Journal of Science*, 25(1), 150-162, Doi:10.16984/sofenbilder.779325.
- Güngör, N. (2022). A Note on Linear Non-Newtonian Volterra Integral Equations. *Mathematical Sciences*, 16(4), 373-387.
- Güngör, N. (2023). On Solution of BG-Volterra Integral Equations. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 13(1), 21-36.
- He, J. H. (2006). Homotopy Perturbation Method for Solving Boundary Problems. *Physics Letters A*, 350(1-2), 87-88.
- Kadak, U. ve Özlük, M. (2015). Generalized Runge-Kutta Method With Respect to the Non-Newtonian Calculus. *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2015, 1-10.
- Khatip, A. (2016). *Differential Transform Method for Differential Equations*, Yüksek Lisans Tezi, Palestine Polytechnic University, Hebron-Palestine.
- Rybackuk, M. ve Stoppel, P. (2000). The Fractal Growth of Fatigue Defects in Materials. *International Journal of Fracture*, 103, 71-94.
- Rahman, M. (2007). *Integral Equations and Their Applications*. Dalhousie University, Canada: WIT Press.
- Sağır, B. ve Erdoğan, F. (2017). On Non-Newtonian Power Series and Its Applications. *Konuralp Journal of Mathematics*, 8(2), 294-303.
- Sağır, B. ve Erdoğan, F. (2019). On The Function Sequences and Series in the Non-Newtonian Calculus. *Journal of Science of Arts*, 4(49), 915-936.
- Wazwaz, A. (2011). *Linear and Nonlinear Integral Equations*. Saint Xavier University, Chicago, USA: Higher Education Press.

ÖZGEÇMİŞ

Emre Dinç, Liseye 2002 yılında Ümraniye Lisesi'nde başladı. 2006 yılında ise Balıkesir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğrenim görmeye başladı. 2010 yılındaki mezuniyetinin ardından 2010-2011 yılları arasında İstanbul Üniversitesi Hasan Ali Yücel Eğitim Fakültesi'nde Pedagojik Formasyonunu tamamladı. 2020 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladı. 2014 Şubat ayından beri de Millî Eğitim Bakanlığı'nda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

