

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ASİMPOTİK SERİ ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esma ÇEVİK

HAZİRAN 2024

TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ASİMPOTOTİK SERİ ÇÖZÜMLERİ

Esma ÇEVİK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 02 / 05 / 2024

Tezin Savunma Tarihi : 04 / 06 / 2024

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Haskız COŞKUN

Trabzon 2024

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde, engin bilgi ve birikimleriyle yoluma ışık tutan, hayata farklı bir pencereden bakmamı sağlayan, üç yıl boyunca beni destekleyip, zora düştüğüm anlarda elimden tutup bana cesaret veren, öğrencisi olmaktan daima gurur duyacağım ve örnek alacağım; benim için yeri ve değeri kelimelerle ifade edilemeyecek olan biricik danışman hocam Prof. Dr. Haskız COŞKUN' a sonsuz şükranlarımı sunar ve teşekkür ederim.

Ayrıca başta Prof. Dr. Erhan COŞKUN hocam olmak üzere, derslerini aldığım Matematik Bölümü hocalarıma teşekkür ederim.

Son olarak hayatımın her anında yardımını esirgemeyerek, aldığım kararları her zaman destekleyen, beni cesaretlendirerek bu yolda yürümemi kolaylaştıran canım eşim Ahmet ÇEVİK' e ve biricik aileme sonsuz teşekkür ederim.

Esma ÇEVİK

Trabzon 2024

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Lineer Denklem Sistemlerinin Asimptotik Seri Çözümleri” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Haskız COŞKUN’un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 04/06/2024

Esma ÇEVİK

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
SEMBOLLER DİZİNİ	VIII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
2.YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME.....	5
2.1. Asimptotik Çözümler	5
2.2. $X' = (\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k})X$ Denklem Sisteminin Çözümü	6
2.3. Asimptotik Seri.....	17
2.4. $X' = (\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k+r})X$ Denklem Sisteminin Çözümü	36
2.5. Katsayı Matrisinin Özel Parametre İçermesi Durumu	58
2.6. $X' = (\sum_{k=0}^2 A_k \mu^{-k+1})X$ Denklem Sisteminin Çözümü.....	59
3. SONUÇLAR.....	84
4. ÖNERİLER.....	87
5. KAYNAKLAR	88
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ASİMPTOTİK SERİ ÇÖZÜMLERİ

Esmâ ÇEVİK

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Haskız COŞKUN
2024, 88 Sayfa

Bu çalışmada;

$$X' = A(z)X$$

sisteminin asimptotik seri çözümleri incelenmiştir. $A(z)$ matrisinin üç farklı durumu dikkate alınmıştır. İlk olarak;

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z)z^{-k},$$

z 'nin negatif kuvvetlerini içeren katsayı matrisi, daha genel olarak;

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z)z^{-k+r},$$

ve son olarak;

$$A(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z)\mu^{-k+1},$$

hem bağımsız değişken hem de μ parametresini içeren formu göz önünde bulundurulmuştur. Elde edilen sonuçlar, bağımsız değişkenin artan değerleri için çözümlerle ilgili bilgi içerdiğinden elde edilen çözümlerin yakınsaklığı da incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer Denklem Sistemleri, Asimptotik Çözümleri.

Master Thesis

SUMMARY

ASYMPTOTIC SERIES SOLUTIONS OF LINEAR EQUATIONS SYSTEMS

Esma ÇEVİK

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Haskız COŞKUN
2024, 88 Pages

In this thesis, asymptotic series solutions for the systems of the form;

$$X' = A(z)X$$

are obtained. Three different choices for $A(z)$ are considered. The first one is;

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z)z^{-k},$$

which includes powers of z . The second one is more general form;

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z)z^{-k+r},$$

and finally the matrix A depends on both independent variable z and a parameter μ that is

$$A(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z)\mu^{-k+1},$$

Since the resultant series yield information about the solution for large values of the independent variable, the convergence of the solutions are also analyzed.

Keywords: Linear Equation Systems, Asymptotic Solutions.

SEMBOLLER DİZİNİ

e	: Euler sayısı, yaklaşık değeri 2,71828183
$\exp(x)$	: $e^{(x)}$
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$Z \rightarrow \infty$	: z sonsuza yaklaşırken
μ	: Uyum sabiti
T^{-1}	: T matrisinin tersi
X'	: X in türevi
U	: İntegral çarpanı
A_0^*	: Uygun dönüşümlerle elde edilen yeni matris
λ	: Öz değer
V	: Öz vektör
$ A_0 $	: A_0 ın determinantı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Genel olarak;

$$X' = A(z)X \quad (1.1)$$

$$X(z_0) = X_0 \quad (1.2)$$

sisteminde $A(z)$ matrisinin analitik katsayılarla sahip olması durumunda $z_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k \quad (1.3)$$

şeklinde yazılabilir. Genelliği bozmadan koordinat ekseninin ötelenmesi sonucu $z_0 = 0$ alınabilir. (1.3) eşitliğinin (1.1) de yerine yazılması sonucunda;

$$X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k \right) X \quad (1.4)$$

elde edilir. (1.4) eşitliğini sağlayan bir seri çözümü;

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k \quad (1.5)$$

şeklinde araştırılabilir. Burada C_k lar belirlenecek olan sabit katsayılardır. C_k katsayılarının belirlenmesi için, (1.5) ile verilen X değerinin (1.4) de yerine yazılmasıyla ve benzer kuvvetli terimlerin katsayılarının eşitlenmesi sonucunda;

$$X(0) = C_0 = X_0$$

$$C_1 = A_0 C_0 = A_0 X_0$$

$$C_2 = \frac{1}{2} (A_0 C_1 + A_1 C_0) = \frac{1}{2} (A_0^2 + A_1) X_0$$

$$C_3 = \frac{1}{3} (A_0 C_2 + A_1 C_1 + A_2 C_0) = \frac{1}{6} A_0^3 + \frac{1}{6} A_0 A_1 + \frac{1}{3} A_1 A_0 + \frac{1}{3} A_2 X_0$$

elde edilir.

Örnek 1.1:

$$y'' + (z - 1)y' + y = 0$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

denklemini sisteme dönüştürerek $x_0 = 0$ noktasındaki seri çözümünün sıfırdan farklı ilk dört terimini bulunuz.

Çözüm:

$$x_1 = y, \quad x_2 = y' \quad \Rightarrow \quad x_1' = y' = x_2$$

$$\Rightarrow \quad x_2' = y'' = (1 - z)y' - y = (1 - z)x_2 - x_1$$

$$X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & (1 - z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$X' = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z \right] X, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistemi elde edilir. Burada,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

$$X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A(k)z^k \right) X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z \right] X \quad \text{sistemi için}$$

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$$

şeklinde çözüm araştıralım. X in bu değeri son eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & (C_1 + 2C_2z + 3C_3z^2 + 4C_4z^3 + \dots) \\ &= (A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \dots)(C_0 + C_1z + C_2z^2 + C_3z^3 + \dots) \end{aligned}$$

$$C_1 = A_0 C_0 = A_0 X_0 ,$$

$$C_2 = \frac{1}{2} (A_0 C_1 + A_1 C_0) ,$$

$$C_3 = \frac{1}{3} (A_0 C_2 + A_1 C_1 + A_2 C_0) ,$$

$$C_4 = \frac{1}{4} (A_0 C_3 + A_3 C_0 + A_1 C_2 + A_2 C_1)$$

elde edilir.

$$C_0 = X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olduğu dikkate alınır;

$$C_1 = A_0 C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$C_4 = \frac{1}{4} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4} \left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ 3/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1/12 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

....

katsayıları elde edilir ve denklemin bir çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} z^2 + \begin{pmatrix} 1/12 \\ 1/4 \end{pmatrix} z^3 + \dots$$

Yukarıdaki örnekte görüldüğü üzere z nin sonlu değeri için ($z_0 = 0$) seri çözümleri kullanılarak belirli sayıda terim hesaplanabilir. Bu tür çözümler z nin pozitif kuvvetlerini içerdiğinden ancak z nin küçük değerleri için anlamlıdır. Bu nedenle,

$$y' = e^{1/zy} \tag{1.6}$$

şeklindeki bir denklem için kullanışlı değildir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

2.1. Asimptotik Çözümler

Yukarıda verilen çözümler z nin pozitif kuvvetli terimlerini içerdiğinden sadece z nin küçük değerleri için anlamlıdır. z nin büyüyen değerleri için ($z \rightarrow \infty$) farklı yaklaşımlar belirlenmelidir. Örneğin;

$y' = e^{1/z}y$ şeklindeki bir denklemin çözümünün bulunabilmesi için mevcut yaklaşım uygulanabilir değildir. Bu denklemin çözümü elementer fonksiyonlara bağlı ifade edilemez. Eğer denklemin $z \rightarrow \infty$ için çözümü araştırılmak istenirse $e^{1/z}$ fonksiyonu $\frac{1}{z}$ nin terimlerini içeren seri açılımı kullanılarak;

$$y' = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \dots\right)y$$

yazılır. Daha genel olarak,

$$y' = \left(c_1 + \frac{c_2}{z} + \frac{c_3}{z^2} + \frac{c_4}{z^3} + \dots\right)y$$

için

$$\frac{dy}{y} = \left(c_1 + \frac{c_2}{z} + \frac{c_3}{z^2} + \frac{c_4}{z^3} + \dots\right) dz$$

iki tarafın integrali alınırsa;

$$\ln y = c_1 z + c_2 \ln z - \frac{c_3}{z} + \dots + c_0$$

ve denklem e üzerinde yazılırsa;

$$\begin{aligned}
y &= e^{c_0} e^{c_1 z} e^{c_2 \ln z} e^{-c_3/z} \dots \dots \\
&= e^{c_0} e^{c_1 z} z^{c_2} e^{-c_3/z} + \dots \\
&= d_0 e^{c_1 z} z^{c_2} \left(1 - \frac{c_3}{z} + \frac{1}{2} \frac{c_3^2}{z^2} - \dots \right), (e^{c_0} = d_0)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

elde edilir.

Sonsuz terim içeren bu seri formu çözümlerin $z \rightarrow \infty$ için nasıl davrandığını (çözümlerin yakınsak olup olmadığını) belirler. Benzer düşünce sistemlere de uygulanabilir.

2.2. $X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k} \right) X$ **Denklemin Sisteminin Çözümü**

Bu tür sistemler;

$$X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k} \right) X \tag{2.2}$$

formundadır, yani;

$$X' = \left(A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \dots \right) X \tag{2.3}$$

şeklindedir. (1.6) denkleminin (2.1) ile verilen çözümüne benzer olarak (2.3) sistemi için

$$X = e^{\lambda z} z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k} \tag{2.4}$$

şeklinde çözüm araştırılır. λ, μ uyum sabiti ve C_k sabitleri belirlenir. Bu çözümleri elde edebilmek için, (2.4) denklemi (2.3) de yerine yazılırsa ve benzer terimlerin katsayıları eşitlenirse;

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k} \left(e^{\lambda z} z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k} \right) \\ = \lambda e^{\lambda z} z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k} + \frac{\mu}{z} e^{\lambda z} z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k} - e^{\lambda z} z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} k C_k z^{-k-1} \end{aligned}$$

olur. Buradan;

$$\begin{aligned} & \left(A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \dots \right) \left(C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z^3} + \dots \right) \\ & = \lambda \left(C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z^3} + \dots \right) + \frac{\mu}{z} \left(C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z^3} + \dots \right) - \left(\frac{C_1}{z^2} + \frac{2C_2}{z^3} + \frac{3C_3}{z^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla;

$$\left. \begin{aligned} (A_0 - \lambda I)C_0 &= 0 \\ (A_0 - \lambda I)C_1 &= \mu C_0 - A_1 C_0 \\ (A_0 - \lambda I)C_2 &= (\mu - 1)C_1 - A_2 C_0 - A_1 C_1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ (A_0 - \lambda I)C_k &= (\mu - k + 1)C_{k-1} - \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} C_l, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

bulunur.

Ancak C_k ların bulunabilmesi için A_0 matrisinin özdeğerlerinin farklı olması gerekmektedir. A_0 matrisinin özdeğerlerinin çakışık olması durumunda uygun dönüşümler kullanılarak dönüştürülmüş sistem için farklı özdeğerlere sahip A_0^* matrisi kullanılır.

Örnek 2.1:

$$X' = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right] X$$

denkleminin lineer bağımsız seri çözümlerini bulunuz ve $z \rightarrow \infty$ için yakınsaklığını araştırınız.

Çözüm:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Öncelikle A_0 matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$|(A_0 - \lambda I)| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$-\lambda(-2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2.$$

Özdeğerler birbirinden farklı olduğundan

$$X = e^{\lambda z} z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k}$$

şeklinde çözüm araştırılır.

$\lambda_1 = 0$ için,

$$|(A_0 - \lambda I)C_0 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} C_0 = 0,$$

$C_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ olarak alınırsa;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow b = 0, (a \text{ keyfi})$$

elde edilir.

O halde $C_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dir.

$(A_0 - \lambda I)C_1 = \mu C_0 - A_1 C_0$ eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} C_1 = (\mu I - A_1) C_0 = \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu - 1 \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

olur. $C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ olarak seçilirse:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} y_1 = a\mu \\ -2y_1 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow y_1 = 0, \quad \mu = 0 \Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x_1 \text{ keyfi})$$

elde edilir. C_2 yi bulmak için; (2.5) eşitliğini kullanalım.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} C_2 = (-1) \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} C_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2a \end{pmatrix} \text{ bulunur. } C_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ olarak alınırsa,}$$

$$\left. \begin{matrix} y_2 = -x_1 \\ -2y_2 = 2a \end{matrix} \right\} \Rightarrow y_2 = -x_1, \quad x_1 = a \Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -a \end{pmatrix} \quad (x_2 \text{ keyfi})$$

Yine (2.5) eşitliğinden;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} C_3 = -2 \begin{pmatrix} x_2 \\ -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ 2a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ 2a + 2a + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ 5a \end{pmatrix},$$

elde edilir. $C_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ için,

$$\left. \begin{array}{l} y_3 = -2x_2 \\ -2y_3 = 5a \end{array} \right\} \Rightarrow y_3 = -\frac{5}{2}a, \quad x_2 = \frac{5}{4}a$$

$$\Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} \frac{5a}{4} \\ -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$$

bulunan değerler çözümde yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} X_1 &= ae^{0z} z^0 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -1 \end{pmatrix} + \dots \right] \\ &= a \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -1 \end{pmatrix} + \dots \right] \end{aligned}$$

lineer bağımsız bir çözümü elde edilmiş olur. Diğer lineer bağımsız çözümü elde etmek için;

$\lambda_2 = -2$ özdeğeri için,

$$|(A_0 - \lambda I)C_0 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_0 = 0, \quad C_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2a + b = 0, \quad b = -2a$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (a \text{ keyfi}) \text{ olarak bulunur.}$$

(2.5) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_1 &= (\mu I - A_1)C_0 = \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu - 1 \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \mu \\ -2\mu + 2 \end{pmatrix} \\ -2\mu + 2 &= 0 \Rightarrow 2\mu = 2 \Rightarrow \mu = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. $C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ olarak alınır ve elde edilen μ değeri bir önceki eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \cdot 1 + 2 \end{pmatrix}$$

$$2x_1 + y_1 = a \Rightarrow y_1 = a - 2x_1 \Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ a - 2x_1 \end{pmatrix}, (x_1 \text{ keyfi}) \text{ olur.}$$

Benzer şekilde (2.5) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_2 &= (1 - 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ a - 2x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ a - 2x_1 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a - 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a - a + 2x_1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a + 2x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla;

$$\begin{aligned} a + 2x_1 &= 0 \Rightarrow 2x_1 = -a \Rightarrow x_1 = -\frac{a}{2} \\ &\Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ a - 2\left(-\frac{a}{2}\right) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. $C_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ için,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a + 2\left(-\frac{a}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$y_2 + 2x_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -2x_2 \Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} (x_2 \text{ keyfi})$$

(2.5) eşitliğinden;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_3 &= (-1) \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} a - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} a - \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_2 - a + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 4x_2 - a \end{pmatrix},$$

$$4x_2 - a = 0 \Rightarrow 4x_2 = a \Rightarrow x_2 = \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} \frac{a}{4} \\ -2\left(\frac{a}{4}\right) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

bulunur ve lineer bağımsız çözümler elde edilmiş olur.

$$X_1 = a \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -1 \end{pmatrix} + \dots \right]$$

$$X_2 = ae^{-2zz} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \dots \right]$$

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2$$

$$= c_1 a \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -1 \end{pmatrix} + \dots \right] + c_2 ae^{-2zz} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \dots \right]$$

Çözümünden görüldüğü üzere $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ yakınsaktır.

Problem 2.1: $zy'' - (1+z)y' + zy = 0$ denkleminin $z \rightarrow \infty$ için asimptotik seri çözümlerini bulunuz.

Çözüm:

$$x_1 = y, \quad x_2 = y' \quad \Rightarrow \quad x_1' = y' = x_2$$

$$\Rightarrow x_2' = y'' = \left(\frac{1}{z} + 1\right)y' - y = \left(\frac{1}{z} + 1\right)x_2 - x_1$$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \left(\frac{1}{z} + 1\right) \end{pmatrix} X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{z} \right] X$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A_0 vektörünün özdeğerleri;

$$|(A_0 - \lambda I)| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda(1-\lambda) + 1 = 0 \quad \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

bulunur.

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

için;

$$|(A_0 - \lambda I)C_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} C_0 = 0, \quad C_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a + b &= 0 \\ -a + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1-\sqrt{3}i}{2}a = b$$

$$\Rightarrow C_0 = \begin{pmatrix} a \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2}a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \quad a \text{ keyfi}$$

elde edilir. (2.5) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} C_1 = \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu - 1 \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{3}i \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \mu \\ (\mu - 1) \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) \end{pmatrix}$$

$C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ için,

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) x_1 + y_1 = \mu a \quad (2.6)$$

$$-x_1 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right) y_1 = a(\mu - 1) \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)$$

(2.6) denklemi $\left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)$ ile çarpılır ve iki denklem taraf tarafa toplanırsa;

$$\left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right) \mu a = a(\mu - 1) \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right) \mu - \mu \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right) = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\mu = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

olur. Bu μ değeri (2.6) da yerine yazılırsa;

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) x_1 + y_1 = \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right) a$$

$$\Rightarrow y_1 = \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right) x_1 + \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right) a$$

$$\Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right) x_1 + \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right) a \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Yine (2.5) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} C_2 \\
 &= \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} - 1 \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right) x_1 + \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right) a \end{pmatrix} \\
 & \quad - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right) x_1 + \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right) a \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right) x_1 + \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right) a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right) x_1 + \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right) a \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} C_2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) x_1 \\ \left(-1 - \frac{(1-\sqrt{3}i)}{2} \right) x_1 + \left(-1 - \frac{(1-\sqrt{3}i)}{2} \right) a \end{pmatrix}$$

bulunur. $C_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ için,

$$\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) x_1 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \right) x_2 + y_2 \tag{2.8}$$

$$x_1 \left(\frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} \right) + a \left(\frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} \right) = -x_2 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right) y_2$$

(2.8) denklemi

$$\left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)$$

ile çarpılır ve iki denklem taraf tarafa toplanırsa;

$$\left(\frac{-4 + 2\sqrt{3}i}{2} \right) x_1 = a \left(\frac{3 - \sqrt{3}i}{2} \right)$$

$$\Rightarrow x_1 = a \left(\frac{-9 - \sqrt{3}i}{14} \right)$$

elde edilir. Be değer (2.7) de yerine yazılırsa;

$$C_1 = \left(\begin{array}{c} a \left(\frac{-9 - \sqrt{3}i}{14} \right) \\ \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right) a \left(\frac{-9 - \sqrt{3}i}{14} \right) + a \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right) \end{array} \right)$$

$$= a \left(\begin{array}{c} \left(\frac{-9 - \sqrt{3}i}{14} \right) \\ \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right) \left(\frac{5 - \sqrt{3}i}{14} \right) \end{array} \right) = a \left(\begin{array}{c} \left(\frac{-9 - \sqrt{3}i}{14} \right) \\ \left(\frac{1 - 3\sqrt{3}i}{14} \right) \end{array} \right)$$

elde edilir. Denklemin lineer bağımsız çözümleri;

$$X_1 = ae^{\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right) z} z^{\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \right)} \left[\left(\frac{1}{\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}} \right) + \frac{1}{z} \left(\begin{array}{c} \left(\frac{-9 - \sqrt{3}i}{14} \right) \\ \left(\frac{1 - 3\sqrt{3}i}{14} \right) \end{array} \right) + \dots \right]$$

$$X_2 = ae^{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)z} z^{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)} \left[\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}i} \right) + \frac{1}{z} \left(\frac{\left(\frac{-9+\sqrt{3}i}{14} \right)}{\left(\frac{1+3\sqrt{3}i}{14} \right)} \right) + \dots \right]$$

olur.

2.3. Asimptotik Seri

Tanım 2.1: Herhangi bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^n (f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{-k}) = a_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sağlanıyorsa $f(z)$ fonksiyonu asimptotik seriye sahiptir denir.

$$f(z): z \rightarrow \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^n (f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{-k}) = a_n$$

olduğunu gösterelim.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^n (f(z) - (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n-1} z^{-n+1}))$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^n (a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots - (a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}}))$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^n \left[\frac{a_n}{z^n} + \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} + \dots \right]$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{a_{n+1}}{z} + \frac{a_{n+2}}{z^2} + \dots \right) = a_n$$

Lemma.2.1:

$$X = e^{\lambda z} z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k}$$

bir asimptotiktir seri belirler.

İspat:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^n (e^{-\lambda z} z^{-\mu} X - \sum_{k=0}^{n-1} C_k z^{-k}) = C_n \quad n = 0, 1, \dots$$

olduğunu gösterelim.

$$X = e^{\lambda z} z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k}$$

olduğu göz önüne alınırsa;

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^n (e^{-\lambda z} z^{-\mu} e^{\lambda z} z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} C_k z^{-k})$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^n (C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \dots - (C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \dots + \frac{C_{n-1}}{z^{n-1}}))$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(C_n + \frac{C_{n+1}}{z} + \frac{C_{n+2}}{z^2} + \dots \right) = C_n$$

olduğu görülür.

Teorem 2.1. $z \rightarrow \infty$ için $n^2 = \frac{m^2}{4}$, $m = 2k + 1$, $k = \{0, 1, 2, \dots\}$

olmak üzere;

$$y'' + \frac{1}{z} y' + \left(\frac{z^2 - n^2}{z^2} \right) y = 0$$

denkleminin çözümleri sonlu sayıda terim içerir.

İspat: Öncelikle verilen ikinci mertebe denklemi sisteme dönüştürelim;

$$\begin{aligned} x_1 = y, \quad x_2 = y' &\quad \Rightarrow \quad x_1' = y' = x_2 \\ \Rightarrow \quad x_2' = y'' &= -\frac{1}{z}y' + \left(-1 + \frac{m^2}{4z^2}\right)y = -\frac{1}{z}x_2 + \left(-1 + \frac{m^2}{4z^2}\right)x_1. \end{aligned}$$

Buradan,

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \left(-1 + \frac{m^2}{4z^2}\right) & -\frac{1}{z} \end{pmatrix} X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{m^2}{4} & 0 \end{pmatrix} \right] X$$

sistemi elde edilir.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{m^2}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

A_0 matrisinin özdeğerleri hesaplanırsa;

$$|(A_0 - \lambda I)| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

olduğu görülür. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan

$$X = e^{\lambda z} z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k}$$

şeklinde çözüm araştırılır.

$\lambda_1 = i$ için,

$$|(A_0 - \lambda I)C_0| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} C_0 = 0, \quad C_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R},$$

gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{cases} -ia + b = 0 \\ -a - ib = 0 \end{cases} \Rightarrow ai = b \Rightarrow C_0 = \begin{pmatrix} a \\ ai \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad a \text{ keyfi}$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} (A_0 - \lambda I)C_1 &= \mu C_0 - A_1 C_0 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} C_1 &= (\mu I - A_1)C_0 = \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) a \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu + 1 \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \mu \\ \mu i + i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliğin her iki tarafı soldan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ ile çarpılırsa;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} \mu \\ \mu i + i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 - i & -i - i \end{pmatrix} C_1 = a \begin{pmatrix} \mu \\ \mu i + i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_1 = a \begin{pmatrix} \mu \\ 2\mu i + i \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$a(2\mu i + i) = 0 \Rightarrow 2\mu i + i = 0 \Rightarrow 2\mu i = -i \Rightarrow \mu = -\frac{1}{2}$$

olduğu görülür. Bulunan bu μ değeri (2.9) de yerine yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_1 = a \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -ix_1 + y_1 = a \left(-\frac{1}{2} \right) \quad \text{ve} \quad y_1 = -\frac{a}{2} + ix_1, \quad C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{a}{2} + ix_1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

(2.5) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} C_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 i - \frac{a}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{m^2}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} a - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 i - \frac{a}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} x_1 \\ -\frac{3}{2} x_1 i + \frac{3a}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{am^2}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 i + \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} x_1 \\ -\frac{3}{2} x_1 i + \frac{3a}{4} - \frac{am^2}{4} + x_1 i - \frac{a}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} x_1 \\ -\frac{1}{2} x_1 i + \frac{a}{4} - \frac{am^2}{4} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı soldan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} C_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} x_1 \\ -\frac{1}{2} x_1 i + \frac{a}{4} - \frac{am^2}{4} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} x_1 \\ -\frac{3}{2} x_1 i - \frac{1}{2} x_1 i + \frac{a}{4} - \frac{am^2}{4} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$-2x_1 i + \frac{a}{4} - \frac{am^2}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 i = \frac{a}{4} - \frac{am^2}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{a}{2i} \left(\frac{1}{4} - \frac{m^2}{4} \right) = \frac{ai}{8} (4m^2 - 1)$$

elde edilir ve bulunan bu değer C_1 de yerine yazılırsa;

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{ai}{8} (m^2 - 1) \\ -\frac{a}{2} + \frac{ai}{8} (m^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ai}{8} (m^2 - 1) \\ \frac{a}{8} (-3 - 4m^2) \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $C_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ olsun,

(2.10) eşitliğinde C_2 yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -ix_2 + y_2 = -\frac{3}{2}x_1 = -\frac{3}{2}\left(\frac{ai}{8}(m^2 - 1)\right)$$

$$\Rightarrow y_2 = ix_2 - \frac{3ai}{16}(m^2 - 1)$$

bulunan y_2 değeri C_2 de yerine yazılırsa;

$$C_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ ix_2 - \frac{3ai}{16}(m^2 - 1) \end{pmatrix}$$

elde edilir.

(2.5) eşitliğini göz önüne alalım;

$$(A_0 - \lambda I)C_3 = -\frac{5}{2}\begin{pmatrix} x_2 \\ ix_2 - \frac{3ai}{16}(m^2 - 1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{m^2}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ai}{8}(m^2 - 1) \\ \frac{a}{8}(-3 - m^2) \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ ix_2 - \frac{3ai}{16}(4m^2 - 1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}x_2 \\ -\frac{5}{2}ix_2 + \frac{15ai}{32}(m^2 - 1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{an^2i}{8}(m^2 - 1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -ix_2 + \frac{3ai}{16}(m^2 - 1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}x_2i + \frac{15ai}{32}(m^2 - 1) - \frac{am^2i}{32}(m^2 - 1) + ix_2 - \frac{3ai}{16}(m^2 - 1) \\ -\frac{5}{2}x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}x_2 \\ -\frac{3}{2}x_2i + \frac{ai}{32}(m^2 - 1)(15 - m^2 - 6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}x_2 \\ -\frac{3}{2}x_2i + \frac{ai}{32}(m^2 - 1)(9 - m^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur ve dolayısıyla

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}x_2 \\ -\frac{3}{2}x_2i + \frac{ai}{32}(m^2 - 1)(9 - m^2) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı tekrar $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ ile soldan çarpılırsa;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}x_2 \\ -\frac{3}{2}x_2i + \frac{ai}{32}(m^2 - 1)(9 - m^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}x_2 \\ -\frac{5}{2}x_2i - \frac{3}{2}x_2i + \frac{ai}{32}(m^2 - 1)(9 - m^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}x_2 \\ -4x_2i + \frac{ai}{32}(m^2 - 1)(9 - m^2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -4x_2i + \frac{ai}{32}(m^2 - 1)(9 - m^2) = 0$$

$$4x_2i = \frac{ai}{32}(m^2 - 1)(9 - m^2)$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{a(m^2 - 1)(9 - m^2)}{128}$$

ve elde edilen bu x_2 değeri C_2 de yerine yazılırsa;

$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{a(m^2 - 1)(9 - m^2)}{128} \\ \frac{ai(m^2 - 1)(9 - m^2)}{128} - \frac{3ai}{16}(m^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-(1 - m^2)(9 - m^2)}{128} \\ \frac{-i(1 - m^2)(-15 - m^2)}{128} \end{pmatrix}$$

bulunur. Bulunan bu katsayıların X de yerine yazılmasıyla denklemin lineer bağımsız X_1 ve X_2 çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir. Bu çözümlerin lineer kombinasyonu genel çözümü elde etmemizi sağlar.

$$X_1 = ae^{iz}z^{-1/2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} \frac{i}{8}(m^2 - 1) \\ \frac{1}{8}(-3 - m^2) \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} \frac{-(1 - m^2)(9 - m^2)}{128} \\ \frac{-i(1 - m^2)(-15 - m^2)}{128} \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \frac{1}{z^3} \begin{pmatrix} \frac{-i(1 - m^2)(9 - m^2)(m^2 - 25)}{3072} \\ \frac{(1 - m^2)(9 - m^2)(m^2 + 35)}{3072} \end{pmatrix} + \dots \right]$$

$$X_2 = ae^{-iz}z^{-1/2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -\frac{i}{8}(m^2 - 1) \\ \frac{1}{8}(-3 - m^2) \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} \frac{-(1 - m^2)(9 - m^2)}{128} \\ \frac{i(1 - m^2)(-15 - m^2)}{128} \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \frac{1}{z^3} \begin{pmatrix} \frac{i(1 - m^2)(9 - m^2)(m^2 - 25)}{3072} \\ \frac{(1 - m^2)(9 - m^2)(m^2 + 35)}{3072} \end{pmatrix} + \dots \right]$$

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2$$

$$= c_1(\cos z + i \sin z)az^{-1/2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} \frac{i}{8}(m^2 - 1) \\ \frac{1}{8}(-3 - m^2) \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} \frac{-(1 - m^2)(9 - m^2)}{128} \\ \frac{-i(1 - m^2)(-15 - m^2)}{128} \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \frac{1}{z^3} \begin{pmatrix} \frac{-i(1 - m^2)(9 - m^2)(m^2 - 25)}{3072} \\ \frac{(1 - m^2)(9 - m^2)(m^2 + 35)}{3072} \end{pmatrix} + \dots \right] \\ + c_2(\cos z - i \sin z)az^{-1/2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -\frac{i}{8}(m^2 - 1) \\ \frac{1}{8}(-3 - m^2) \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} \frac{-(1 - m^2)(9 - m^2)}{128} \\ \frac{i(1 - m^2)(-15 - m^2)}{128} \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \frac{1}{z^3} \begin{pmatrix} \frac{i(1 - m^2)(9 - m^2)(m^2 - 25)}{3072} \\ \frac{(1 - m^2)(9 - m^2)(m^2 + 35)}{3072} \end{pmatrix} + \dots \right]$$

şeklinde ifade edilir. Özel olarak $m=1$ alınırsa;

$$X = c_1(\cos z + i \sin z)az^{-1/2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \\ + c_2(\cos z - i \sin z)az^{-1/2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} c_1(\cos z + i \sin z) a z^{-1/2} \\ c_1(\cos z + i \sin z) a z^{-1/2} \left(i - \frac{1}{2z}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2(\cos z - i \sin z) a z^{-1/2} \\ c_2(\cos z - i \sin z) a z^{-1/2} \left(-i - \frac{1}{2z}\right) \end{pmatrix}$$

sonlu terimi elde edilir. $m=1,3,5\dots$ değerleri içinde sonlu terimlerin elde edileceği görülür.

Teorem 2.2:

$$y'' + \frac{b}{z}y' + c\left(\frac{z^2 - n^2}{z^2}\right)y = 0$$

denkleminin seri çözümlerinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $b > 0$ olmasıdır.

İspat: Öncelikle verilen denklemi sisteme dönüştürelim:

$$x_1 = y, x_2 = y' \Rightarrow x_1' = y' = x_2$$

$$\Rightarrow x_2' = y'' = -\frac{b}{z}y' + c\left(-1 + \frac{n^2}{z^2}\right)y = -\frac{b}{z}x_2 + c\left(-1 + \frac{m^2}{4z^2}\right)x_1$$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c\left(-1 + \frac{m^2}{4z^2}\right) & -\frac{b}{z} \end{pmatrix} X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{cm^2}{4} & 0 \end{pmatrix} \right] X$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{cm^2}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. A_0 matrisinin özdeğerleri;

$$|(A_0 - \lambda I)| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -c & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + c = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -c$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{c}i, \lambda_2 = -\sqrt{c}i$$

dir. Özdeğerler farklı olduğu için;

$$X = e^{\lambda z} z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k}$$

şeklinde çözüm araştıralım,

$\lambda_1 = \sqrt{c}i$ alalım,

$$|(A_0 - \lambda I)C_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{c}i & 1 \\ -c & -\sqrt{c}i \end{pmatrix} C_0 = 0 \quad , \quad C_0 = \begin{pmatrix} a \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\sqrt{c}i + a_1 = 0 \\ -ca - \sqrt{c}ia_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\sqrt{c} a i + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = \sqrt{c}ia,$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{c}ia \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{c}i \end{pmatrix} \quad a \text{ keyfi}$$

(2.5) eşitliğinden;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\sqrt{c}i & 1 \\ -c & -\sqrt{c}i \end{pmatrix} C_1 &= (\mu I - A_1)C_0 = \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \right) a \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{c}i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu + b \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{c}i \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \mu \\ \sqrt{c}\mu i + b\sqrt{c}i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eşitliğin her iki tarafı soldan $\begin{pmatrix} \sqrt{c}i & 1 \\ \sqrt{c}i & i \end{pmatrix}$ ile çarpılırsa;

$$\begin{pmatrix} \sqrt{c}i & 1 \\ \sqrt{c}i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{c}i & 1 \\ \sqrt{c}i & i \end{pmatrix} C_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{c}i & 1 \\ \sqrt{c}i & i \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} \mu \\ \sqrt{c}\mu i + b\sqrt{c}i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c - c & \sqrt{c}i - \sqrt{c}i \\ c - ci & \sqrt{c}i + \sqrt{c} \end{pmatrix} C_1 = a \begin{pmatrix} \sqrt{c}\mu i + \sqrt{c}\mu i + b\sqrt{c}i \\ \sqrt{c}\mu i - \sqrt{c}\mu - b\sqrt{c} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c(1-i) & \sqrt{c}(i+1) \end{pmatrix} C_1 = a \begin{pmatrix} 2\sqrt{c}\mu i + b\sqrt{c}i \\ \sqrt{c}\mu i - \sqrt{c}(\mu + b) \end{pmatrix}$$

$$2\sqrt{c}\mu ia + b\sqrt{c}ia = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{c}\mu ia = -b\sqrt{c}ia$$

$$\Rightarrow \quad 2\mu i = -ib \quad \Rightarrow \quad \mu = -\frac{b}{2}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ için,}$$

$$c(1-i)x_1 + \sqrt{c}(i+1)y_1 = \left(-\frac{b}{2}\sqrt{c}i - \sqrt{c}\left(-\frac{b}{2} + b\right) \right) a$$

$$= -\frac{b}{2}\sqrt{c}ia + \frac{b\sqrt{c}a}{2} - b\sqrt{c}a = -\frac{b\sqrt{c}a}{2}(i+1)$$

$$\sqrt{c}(i+1)y_1 = -c(1-i)x_1 - \frac{b\sqrt{c}a}{2}(i+1)$$

$$(i+1)y_1 = -\sqrt{c}(1-i)x_1 - \frac{ba}{2}(i+1)$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = \frac{-\sqrt{c}(1-i)x_1}{(i+1)} - \frac{ba(i+1)}{2(i+1)}$$

$$= \frac{-\sqrt{c}(-2i)x_1}{2} - \frac{ba}{2} = \sqrt{c}ix_1 - \frac{ba}{2}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sqrt{c}ix_1 - \frac{ba}{2} \end{pmatrix}$$

(2.5) eşitliğinde μ . C_0, C_1, A_1, A_2 değerleri yerine yazılırsa;

$$(A_0 - \lambda I)C_2 = \left(-\frac{b}{2} - 1\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \sqrt{c}ix_1 - \frac{ba}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{cm^2}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{c}i \end{pmatrix} a - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \sqrt{c}ix_1 - \frac{ba}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{-b-2}{2}\right)x_1 \\ \left(\frac{-b-2}{2}\right)\sqrt{c}ix_1 - \frac{ba}{2}\left(-\frac{b}{2}-1\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{cm^2}{4}a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -bx_1\sqrt{ci} + \frac{b^2a}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{-b-2}{2}\right)x_1 \\ \left(\frac{-b-2}{2}\right)\sqrt{c}ix_1 - \frac{ba}{2}\left(-\frac{b}{2}-1\right) - \frac{acm^2}{4} + -bx_1\sqrt{ci} - \frac{b^2a}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{-b-2}{2}\right)x_1 \\ \left(\left(\frac{-b-2}{2}\right) + b\right)\sqrt{c}ix_1 + \frac{ba}{2} - \frac{acm^2}{4} - \frac{b^2a}{4} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{ci} & 1 \\ -c & -\sqrt{ci} \end{pmatrix} C_2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{-b-2}{2}\right)x_1 \\ \left(\left(\frac{-b-2}{2}\right) + b\right)\sqrt{c}ix_1 + \frac{ba}{2} - \frac{acm^2}{4} - \frac{b^2a}{4} \end{pmatrix}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı soldan $\begin{pmatrix} \sqrt{ci} & 1 \\ \sqrt{ci} & i \end{pmatrix}$ ile çarpılırsa;

$$\begin{pmatrix} \sqrt{ci} & 1 \\ \sqrt{ci} & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{ci} & 1 \\ -c & -\sqrt{ci} \end{pmatrix} C_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{ci} & 1 \\ \sqrt{ci} & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{-b-2}{2}\right)x_1 \\ \left(\left(\frac{-b-2}{2}\right) + b\right)\sqrt{c}ix_1 + \frac{ba}{2} - \frac{acm^2}{4} - \frac{b^2a}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{ci}\left(\frac{-b-2}{2}\right)x_1 + \frac{(b-2)}{2}\sqrt{c}ix_1 + \frac{ba}{2} - \frac{acm^2}{4} - \frac{b^2a}{4} \\ \sqrt{ci}\left(\frac{-b-2}{2}\right)x_1 - \frac{(b-2)}{2}\sqrt{c}ix_1 + \frac{bai}{2} - \frac{iacm^2}{4} - \frac{b^2ai}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\sqrt{c}ix_1 + \frac{ba}{2}\left(-\frac{b}{2} + 1\right) - \frac{acm^2}{4} \\ \frac{\sqrt{c}}{2}((-b-2)i - b + 2)x_1 + \frac{bai}{2}\left(-\frac{b}{2} + 1\right) - \frac{iacm^2}{4} \end{pmatrix}$$

ise;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c(1-i) & \sqrt{c}(i+1) \end{pmatrix} C_2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{c}ix_1 + \frac{ba}{2}\left(-\frac{b}{2} + 1\right) - \frac{acm^2}{4} \\ \frac{\sqrt{c}}{2}((-b-2)i - b + 2)x_1 + \frac{bai}{2}\left(-\frac{b}{2} + 1\right) - \frac{iacm^2}{4} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$-2\sqrt{c}ix_1 + \frac{ba}{2}\left(-\frac{b}{2} + 1\right) - \frac{acm^2}{4} = 0$$

$$2\sqrt{c}ix_1 = \frac{ba}{2}\left(-\frac{b}{2} + 1\right) - \frac{acm^2}{4}$$

$$x_1 = \frac{ba}{4\sqrt{c}i}\left(-\frac{b}{2} + 1\right) - \frac{acm^2}{8\sqrt{c}i}$$

$$= \frac{\sqrt{c}bai}{4c}\left(\frac{b}{2} - 1\right) + \frac{a\sqrt{c}im^2}{8}$$

bulunur ve dolayısıyla;

$$\Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{c}bai}{4c}\left(\frac{b}{2} - 1\right) + \frac{a\sqrt{c}im^2}{8} \\ \frac{ba}{4}\left(-\frac{b}{2} + 1\right) - \frac{acm^2}{8} - \frac{ba}{2} \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

$C_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ için, (2.11) den;

$$c(1-i)x_2 + \sqrt{c}(i+1)y_2 = \frac{\sqrt{c}}{2}((-b-2)i - b + 2)x_1 + \frac{bai}{2}\left(-\frac{b}{2} + 1\right) - \frac{iacm^2}{4}$$

eşitliği elde edilir ve verilen eşitlikte x_1 değeri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{c}}{2}((-b-2)i - b + 2) \left(\frac{\sqrt{c}bai}{4c} \left(\frac{b}{2} - 1 \right) + \frac{a\sqrt{c}im^2}{8} \right) + \frac{bai}{2} \left(-\frac{b}{2} + 1 \right) - \frac{iacm^2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{bai}{4} \left(\frac{b}{2} - 1 \right) + \frac{iacm^2}{8} \right) ((-b-2)i - b + 2) + \frac{bai}{2} \left(-\frac{b}{2} + 1 \right) - \frac{iacm^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{c}(i+1)y_2 &= c(-1+i)x_2 + \left(\frac{bai}{8} \left(\frac{b}{2} - 1 \right) + \frac{iacm^2}{16} \right) ((-b-2)i - b + 2) \\ &\quad + \frac{bai}{2} \left(-\frac{b}{2} + 1 \right) - \frac{iacm^2}{4} \end{aligned}$$

her iki tarafı $\sqrt{c}(i+1)$ ile bölersek;

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{c(-1+i)}{\sqrt{c}(i+1)} x_2 + \frac{1}{\sqrt{c}(i+1)} \left(\frac{bai}{8} \left(\frac{b}{2} - 1 \right) + \frac{iacm^2}{16} \right) ((-b-2)i - b + 2) \\ &\quad + \frac{bai}{2\sqrt{c}(i+1)} \left(-\frac{b}{2} + 1 \right) - \frac{iacm^2}{4\sqrt{c}(i+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{c}ix_2 + \frac{(1-i)\sqrt{c}}{2c} \left(\frac{bai}{8} \left(\frac{b}{2} - 1 \right) + \frac{iacm^2}{16} \right) ((-b-2)i - b + 2) \\ &\quad + \frac{\sqrt{c}ba(i+1)}{4c} \left(-\frac{b}{2} + 1 \right) - \frac{(1+i)\sqrt{c}am^2}{8} \end{aligned}$$

$$\gamma := \frac{(1-i)\sqrt{c}}{2c} \left(\frac{bai}{8} \left(\frac{b}{2} - 1 \right) + \frac{iacm^2}{16} \right) ((-b-2)i - b + 2)$$

$$\beta := \frac{\sqrt{c}ba(i+1)}{4c} \left(-\frac{b}{2} + 1\right) - \frac{(1+i)\sqrt{c}am^2}{8}$$

olarak tanımlanırsa ;

$$C_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sqrt{c}ix_2 + \gamma + \beta \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

olur.

(2.5) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} (A_0 - \lambda I)C_3 &= \begin{pmatrix} -\frac{b}{2} - 2 \\ \frac{cm^2}{4} \end{pmatrix} C_2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{cm^2}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{c}bai}{4c} \left(\frac{b}{2} - 1\right) + \frac{a\sqrt{c}im^2}{8} \\ \frac{ba}{4} \left(-\frac{b}{2} + 1\right) - \frac{acm^2}{8} - \frac{ba}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} C_2 \\ &= \begin{pmatrix} \left(-\frac{b}{2} - 2\right)x_2 \\ \left(-\frac{b}{2} - 2\right)(\sqrt{c}ix_2 + \gamma + \beta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{aib\sqrt{c}m^2}{16} \left(\frac{b}{2} - 1\right) + \frac{aic\sqrt{c}m^4}{32} \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0 \\ -b(\sqrt{c}ix_2 + \gamma + \beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-b-4}{2}x_2 \\ \left(\frac{-b-4}{2}\right)(\sqrt{c}ix_2 + \gamma + \beta) - \frac{aib\sqrt{c}m^2}{16} \left(\frac{b-2}{2}\right) - \frac{aic\sqrt{c}m^4}{32} + b(\sqrt{c}ix_2 + \gamma + \beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-b-4}{2}x_2 \\ \left(\frac{b-4}{2}\right)(\sqrt{c}ix_2 + \gamma + \beta) - \frac{aib\sqrt{c}m^2}{16} \left(\frac{b-2}{2}\right) - \frac{aic\sqrt{c}m^4}{32} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliğin her iki tarafı soldan $\begin{pmatrix} \sqrt{ci} & 1 \\ \sqrt{ci} & i \end{pmatrix}$ ile çarpılırsa;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c(1-i) & \sqrt{c}(i+1) \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{ci}\left(\frac{-b-4}{2}\right)x_2 + \left(\frac{b-4}{2}\right)(\sqrt{ci}x_2 + \gamma + \beta) - \frac{aib\sqrt{cm}^2}{16}\left(\frac{b-2}{2}\right) - \frac{aic\sqrt{cm}^4}{32} \\ \sqrt{ci}\left(\frac{-b-4}{2}\right)x_2 + i\left(\frac{b-4}{2}\right)(\sqrt{ci}x_2 + \gamma + \beta) + \frac{ab\sqrt{cm}^2}{16}\left(\frac{b-2}{2}\right) + \frac{ac\sqrt{cm}^4}{32} \end{pmatrix}$$

gerekli işlemler yapılır ve matrislerin birinci satırları eşitlenirse;

$$\sqrt{ci}\left(\frac{-b-4}{2}\right)x_2 + \left(\frac{b-4}{2}\right)(\sqrt{ci}x_2 + \gamma + \beta) - \frac{aib\sqrt{cm}^2}{16}\left(\frac{b-2}{2}\right) - \frac{aic\sqrt{cm}^4}{32} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{ci}\left(\frac{b+4}{2}\right)x_2 + \left(\frac{-b+4}{2}\right)\sqrt{ci}x_2 = \left(\frac{b-4}{2}\right)(\gamma + \beta) - \frac{aib\sqrt{cm}^2}{16}\left(\frac{b-2}{2}\right) - \frac{aic\sqrt{cm}^4}{32}$$

$$4\sqrt{ci}x_2 = \left(\frac{b-4}{2}\right)(\gamma + \beta) - \frac{aib\sqrt{cm}^2}{16}\left(\frac{b-2}{2}\right) - \frac{aic\sqrt{cm}^4}{32}$$

$\Rightarrow$

$$x_2 = \frac{1}{4\sqrt{ci}}\left(\frac{b-4}{2}\right)(\gamma + \beta) - \frac{aib\sqrt{cm}^2}{64\sqrt{ci}}\left(\frac{b-2}{2}\right) - \frac{aic\sqrt{cm}^4}{128\sqrt{ci}}$$

$$= \frac{-\sqrt{ci}}{4c}\left(\frac{b-4}{2}\right)(\gamma + \beta) - \frac{abm^2}{64}\left(\frac{b-2}{2}\right) - \frac{acm^4}{128}$$

elde edilir. (2.12) den;

$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{c}i}{4c} \left(\frac{b-4}{2} \right) (\gamma + \beta) - \frac{abm^2}{64} \left(\frac{b-2}{2} \right) - \frac{acm^4}{128} \\ \frac{1}{4} \left(\frac{b-4}{2} \right) (\gamma + \beta) - \frac{ab\sqrt{c}im^2}{64} \left(\frac{b-2}{2} \right) - \frac{ac\sqrt{c}im^4}{128} + \gamma + \beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{c}i}{4c} \left(\frac{b-4}{2} \right) (\gamma + \beta) - \frac{abm^2}{64} \left(\frac{b-2}{2} \right) - \frac{acm^4}{128} \\ \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b-4}{2} \right) \right) (\gamma + \beta) - \frac{ab\sqrt{c}im^2}{64} \left(\frac{b-2}{2} \right) - \frac{ac\sqrt{c}im^4}{128} \end{pmatrix}$$

olur. Bulunan bu değerlerle denklemin lineer bağımsız çözümleri

$$X_1 = ae^{i\sqrt{c}z} z^{-b/2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{c} \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \left(\frac{\sqrt{c}bi}{4c} \left(\frac{b}{2} - 1 \right) + \frac{\sqrt{c}im^2}{8} \right) + \frac{1}{z^2} C_2 + \dots \right]$$

$$X_2 = ae^{-i\sqrt{c}z} z^{-b/2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{c} \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \left(\frac{-\sqrt{c}bi}{4c} \left(\frac{b}{2} - 1 \right) - \frac{\sqrt{c}im^2}{8} \right) + \frac{1}{z^2} C_2 + \dots \right]$$

$X = c_1 X_1 + c_2 X_2$ elde edilir. Denklemin seri çözümlerinin yakınsak olması için b nin pozitif olması gerekliliği gösterilmiş olur.

Aynı problem için;

Sonuç 2.1: $b=c=1$ olarak alırsa;

$$y'' + \frac{1}{z} y' + \left(\frac{z^2 - n^2}{z^2} \right) y = 0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri;

$$X_1 = ae^{iz}z^{-1/2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \left(\frac{i}{8}(m^2 - 1) \right) + \frac{1}{z^2} \left(\frac{-(1 - m^2)(9 - m^2)}{128} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{z^3} \left(\frac{-i(1 - m^2)(9 - m^2)(m^2 - 25)}{3072} \right) + \dots \right]$$

$$X_2 = ae^{-iz}z^{-1/2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \left(-\frac{i}{8}(m^2 - 1) \right) + \frac{1}{z^2} \left(\frac{-(1 - m^2)(9 - m^2)}{128} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{z^3} \left(\frac{i(1 - m^2)(9 - m^2)(m^2 - 25)}{3072} \right) + \dots \right]$$

elde edilir. Bu sonuçların teorem 2.1 deki çözümlerle uyumlu olduğu görülür.

Sonuç 2.2: $b=0$ için

$$y'' + c \left(\frac{z^2 - n^2}{z^2} \right) y = 0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri;

$$\begin{aligned} \gamma &:= \frac{(1-i)\sqrt{c}}{2c} \left(\frac{0ai}{8} \left(\frac{0}{2} - 1 \right) + \frac{iacm^2}{16} \right) ((-0-2)i - 0 + 2) \\ &= \frac{(1-i)\sqrt{c}}{2c} \left(\frac{iacm^2}{16} \right) (-2i + 2) \\ &= \frac{(i+1)am^2\sqrt{c}}{32} (-2i + 2) = \frac{am^2\sqrt{c}}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta &:= \frac{\sqrt{c}0a(i+1)}{4c} \left(-\frac{0}{2} + 1 \right) - \frac{(1+i)\sqrt{c}am^2}{8} \\
&= -\frac{(1+i)\sqrt{c}am^2}{8} \\
\gamma + \beta &= \frac{am^2\sqrt{c}}{8} - \frac{(1+i)\sqrt{c}am^2}{8} = -\frac{i\sqrt{c}am^2}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_1 &= ae^{i\sqrt{c}z} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{c} \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{c}im^2}{8} \\ -\frac{cm^2}{8} \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} \frac{m^2}{16} \left(1 - \frac{cm^2}{8} \right) \\ \frac{i\sqrt{c}m^2}{16} \left(-1 + \frac{cm^2}{8} \right) \end{pmatrix} + \dots \right] \\
X_2 &= ae^{-i\sqrt{c}z} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{c} \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{c}im^2}{8} \\ -\frac{cm^2}{8} \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} \frac{m^2}{16} \left(1 - \frac{cm^2}{8} \right) \\ \frac{-i\sqrt{c}m^2}{16} \left(-1 + \frac{cm^2}{8} \right) \end{pmatrix} + \dots \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $c > 0$ olması durumunda her iki çözümünde yakınsaktır.

$$2.4. \quad X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k+r} \right) X \text{ Denklem Sisteminin Çözümü}$$

Lemma 2.2:

$$y' = z^r \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \right) y$$

denkleminin çözümü $z \rightarrow \infty$ için;

$$y = e^{(a_0 z^{r+1} + a_1 z^r + \dots + a_r z)} z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k}$$

şeklindedir.

İspat:

$$y' = z^r \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_r}{z^r} + \frac{a_{r+1}}{z^{r+1}} + \frac{a_{r+2}}{z^{r+2}} + \dots \right) y$$

denklemini ele alalım.

$$\frac{dy}{dz} = z^r \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_r}{z^r} + \frac{a_{r+1}}{z^{r+1}} + \frac{a_{r+2}}{z^{r+2}} + \dots \right) y$$

$$\frac{dy}{y} = (z^r a_0 + a_1 z^{r-1} + a_2 z^{r-2} + \dots + a_r + a_{r+1} z^{-1} + a_{r+2} z^{-2} + \dots) dz$$

yazılır ve her iki tarafın integrali alınır;

$$\ln y = z^{r+1} \frac{a_0}{r+1} + z^r \frac{a_1}{r} + z^{r-1} \frac{a_2}{r-1} + \dots + a_r z + a_{r+1} \ln z - \frac{a_{r+2}}{z} - \frac{a_{r+3}}{z^2} + \dots + c$$

ifadesi elde edilir.

$$\frac{a_0}{r+1} := b_0, \quad \frac{a_1}{r} := b_1, \quad \frac{a_2}{r-1} = b_2, \quad \dots, \quad \frac{a_r}{r-(r-1)} = b_r$$

olarak alınır;

$$y = e^{b_0 z^{r+1} + b_1 z^r + \dots + b_r z} e^{\ln z^{a_{r+1}}} e^{-\frac{a_{r+2}}{z} - \frac{a_{r+3}}{z^2} + \dots} c_0$$

$e^{Az} = 1 + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$ açılımı kullanılırsa;

$$y = e^{b_0 z^{r+1} + b_1 z^r + \dots + b_r z} z^{a_{r+1}} \left(1 - \frac{a_{r+2}}{z} - \frac{a_{r+3}}{z^2} - \dots \right) c_0$$

$$y = e^{b_0 z^{r+1} + b_1 z^r + \dots + b_r z} z^{a_{r+1}} \left(c_0 - c_0 \frac{a_{r+2}}{z} - c_0 \frac{a_{r+3}}{z^2} - \dots \right)$$

$a_{r+1} := \mu$ alınır;

$$y = e^{(b_0 z^{r+1} + b_1 z^r + \dots + b_r z)} z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k}$$

olduğu görülür. Benzer çözümler belirli koşulların sağlanması durumunda sistemler için mevcuttur.

Teorem 2.3: A_0 matrisinin farklı özdeğerlere sahip olması durumunda

$$X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k+r} \right) X \quad (2.13)$$

denklem sisteminin çözümleri

$$X = e^{(a_0 z^{r+1} + a_1 z^r + \dots + a_r z)} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k+\mu}$$

şeklindedir.

İspat:

$$X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k+r} \right) X$$

$$X' = z^r \left(A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_r}{z^r} + \frac{A_{r+1}}{z^{r+1}} + \frac{A_{r+2}}{z^{r+2}} + \dots \right) X$$

sistemi ele alalım.

$$\frac{dX}{dz} = z^r \left(A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_r}{z^r} + \frac{A_{r+1}}{z^{r+1}} + \frac{A_{r+2}}{z^{r+2}} + \dots \right) X$$

$$\frac{dX}{X} = (z^r A_0 + A_1 z^{r-1} + A_2 z^{r-2} + \dots + A_r + A_{r+1} z^{-1} + A_{r+2} z^{-2} + \dots) dz$$

yazılır ve her iki tarafın integrali alınırsa;

$$\ln X = z^{r+1} \frac{A_0}{r+1} + z^r \frac{A_1}{r} + z^{r-1} \frac{A_2}{r-1} + \dots + A_r z + A_{r+1} \ln z - \frac{A_{r+2}}{z} - \frac{A_{r+3}}{z^2} + \dots + \ln C_0$$

ifadesi elde edilir.

$$\frac{A_0}{r+1} := B_0, \quad \frac{A_1}{r} := B_1, \quad \frac{A_2}{r-1} = B_2, \quad \dots, \quad \frac{A_r}{r-(r-1)} = B_r$$

olarak alınır;

$$X = e^{B_0 z^{r+1} + B_1 z^r + \dots + B_r z} e^{\ln z^{A_{r+1}}} e^{-\frac{A_{r+2}}{z} - \frac{A_{r+3}}{z^2} + \dots} C_0$$

$e^{Az} = 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$ açılımı kullanılırsa;

$$X = e^{B_0 z^{r+1} + B_1 z^r + \dots + B_r z} z^{A_{r+1}} \left(1 - \frac{A_{r+2}}{z} - \frac{A_{r+3}}{z^2} - \dots \right) C_0$$

$$= e^{B_0 z^{r+1} + B_1 z^r + \dots + B_r z} z^{A_{r+1}} \left(C_0 - \frac{a_{r+2}}{z} C_0 - \frac{a_{r+3}}{z^2} C_0 - \dots \right)$$

$A_{r+1} := \mu$ alınır;

$$X = e^{(a_0 z^{r+1} + a_1 z^r + \dots + a_r z)} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k+\mu}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Lemma 2.3:

$$X = e^{(a_0 z^{r+1} + a_1 z^r + \dots + a_r z)} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k+\mu}$$

bir asimptotik seri çözümüdür.

İspat:

$$X = e^{(a_0 z^{r+1} + a_1 z^r + \dots + a_r z)} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k+\mu}$$

olarak tanımlanırsa:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^n e^{-(a_0 z^{r+1} + a_1 z^r + \dots + a_r z)} z^{-\mu} X - \sum_{k=0}^{n-1} C_k z^{-k} = C_n$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow \infty} z^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} C_k z^{-k} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^n \left(C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \cdots - \left(C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{z^{n-1}} \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(C_n + \frac{C_{n+1}}{z} + \frac{C_{n+2}}{z^2} + \cdots \right) = C_n$$

böylece

$$X = e^{(a_0 z^{r+1} + a_1 z^r + \cdots + a_r z)} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k+\mu}$$

bir asimptotik seri çözümdür.

Teorem 2.3 ün bir uygulaması olarak aşağıdaki problemi göz önüne alalım.

Problem 2.2: $y'' - zy = 0$ denkleminin $z \rightarrow \infty$ için asimptotik seri çözümlerini bulunuz ve yakınsaklığını araştırınız.

Çözüm:

$$x_1 = y, \quad x_2 = y' \quad \Rightarrow \quad x_1' = y' = x_2$$

$$\Rightarrow \quad x_2' = y'' = zy = zx_1$$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] X$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|(A_0 - \lambda I)| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

özdeğerler eşit çıktığı için farklı bir seçim yapalım.

$$x_1 = y \quad \Rightarrow \quad x_1' = y' = x_2 z^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} x_2 = z^{-\frac{1}{2}} y' &\Rightarrow x_2' = z^{-\frac{1}{2}} y'' - \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} y' = z^{-\frac{1}{2}} z y - \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} y' \\ &= z^{\frac{1}{2}} x_1 - \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} x_2 z^{\frac{1}{2}} = z^{\frac{1}{2}} x_1 - \frac{1}{2} x_2 z^{-1} \end{aligned}$$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & z^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} & -\frac{1}{2} x_2 \end{pmatrix} X$$

$$z^{\frac{1}{2}} := t \quad \Rightarrow \quad z := t^2 \quad \Rightarrow \quad z^{-1} = t^{-2}$$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & -\frac{1}{2} \frac{1}{t^2} \end{pmatrix} X, \quad \dot{X} = \frac{d}{dt} X$$

$$x_1' = x_2 z^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2' = z^{\frac{1}{2}} x_1 - \frac{1}{2} x_2 z^{-1}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1}{dz} \frac{dz}{dt} = x_2 z^{\frac{1}{2}} 2t = 2 t^2 x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2}{dz} \frac{dz}{dt} = z^{\frac{1}{2}} x_1 - \frac{1}{2} x_2 z^{-1} 2t = 2 t^2 x_1 - x_2 t^{-1}$$

$$\dot{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 2t^2 \\ 2t^2 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{t} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} t^2 \right] \quad (2.14)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} , \quad A_1 = A_2 = 0 , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olduğundan, (2.14) ile verilen denklem sistemi (2.13) formundadır.

$$|(A_0 - \lambda I)| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \lambda^2 = 4$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 , \quad \lambda_2 = -2 \quad \text{olur. Teorem 2.3 den}$$

$$X = e^{(a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t)t^\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{-k} \quad (2.15)$$

şeklinde çözüm araştıralım. (2.15), (2.14) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \dot{X}' &= (3a_0 t^3 + 2a_1 t + a_2) e^{(a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t)t^\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{-k} + e^{(a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t)t^\mu} \frac{\mu}{t} t^\mu \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{-k} \\ &\quad - e^{(a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t)t^\mu} \sum_{k=0}^{\infty} k C_k t^{-k-1} \end{aligned}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{t} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} t^2 \right] e^{(a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t)t^\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{-k}$$

$\Rightarrow$

$$(3a_0 t^3 + 2a_1 t + a_2) \left(C_0 + \frac{C_1}{t} + \frac{C_2}{t^2} + \frac{C_3}{t^3} + \dots \right) + \frac{\mu}{t} \left(C_0 + \frac{C_1}{t} + \frac{C_2}{t^2} + \frac{C_3}{t^3} + \dots \right)$$

$$-\left(\frac{C_1}{t^2} + \frac{2C_2}{t^3} + \frac{3C_3}{t^4} \dots\right) = (A_0 t^2 + A_3 t^{-1}) \left(C_0 + \frac{C_1}{t} + \frac{C_2}{t^2} + \frac{C_3}{t^3} + \dots\right).$$

Aynı dereceli t lerin katsayıları eşitlenirse;

$$\left. \begin{aligned} a_2 C_0 + 2a_1 C_1 + 3a_0 C_2 &= A_0 C_2 \\ 2a_1 C_0 + 3a_0 C_1 &= A_0 C_1 \\ 3a_0 C_0 &= A_0 C_0 \\ a_2 C_1 + 2a_1 C_2 + 3a_0 C_3 + \mu C_0 &= A_0 C_3 + A_3 C_0 \\ a_2 C_2 + 2a_1 C_3 + 3a_0 C_4 + (\mu - 1)C_1 &= A_0 C_4 + A_3 C_1 \\ a_2 C_3 + 2a_1 C_4 + 3a_0 C_5 + (\mu - 2)C_2 &= A_0 C_5 + A_3 C_2 \\ a_2 C_4 + 2a_1 C_5 + 3a_0 C_6 + (\mu - 3)C_3 &= A_0 C_6 + A_3 C_3 \\ a_2 C_5 + 2a_1 C_6 + 3a_0 C_7 + (\mu - 4)C_4 &= A_0 C_7 + A_3 C_4 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.16) eşitliğinden;

$$(A_0 - 3a_0 I)C_0 = 0 \quad , \quad C_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3a_0 & 0 \\ 0 & 3a_0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3a_0 & 2 \\ 2 & -3a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-3a_0 x_1 + 2x_2 = 0 \quad (2.17)$$

$$2x_1 - 3a_0 x_2 = 0 \quad (2.18)$$

(2.17) eşitliği 2 ile ve (2.18) eşitliği $3a_0$ ile çarpılır ve iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa;

$$(4 - 9a_0^2)x_2 = 0$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{2}{3} \text{ veya } a_0 = -\frac{2}{3}$$

bulunur. $a_0 = -\frac{2}{3}$ seçelim. (2.17) den;

$$-3\left(-\frac{2}{3}\right)x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\Rightarrow -x_1 = x_2 \Rightarrow C_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$C_1 = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ alınır ve (2.16) eşitliği kullanılırsa;

$$2a_1a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$2a_1a = 2x_3 + 2x_4 = 0 \quad (2.19)$$

$$-2a_1a = 2x_3 + 2x_4 = 0$$

eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$4a_1a = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ bulunur. a_1 değeri (2.19) da yerine yazılırsa;

$$-x_3 = x_4 \Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$C_2 = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$ ve tekrar (2.16) dan;

$$a_2a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 a &= 2x_5 + 2x_6 = 0 \\ -a_2 a &= 2x_5 + 2x_6 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa;

$2a_2 a = 0 \Rightarrow a_2 = 0$ olur ve (2.20) de yerine yazılırsa;

$$-x_5 = x_6, \quad C_2 = \begin{pmatrix} x_5 \\ -x_6 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

(2.16) eşitliği ve $C_3 = \begin{pmatrix} x_7 \\ x_8 \end{pmatrix}$ kullanılırsa;

$$\mu a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_7 \\ x_8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu a \\ -\mu a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_7 + x_8) \\ 2(x_7 + x_8) \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \mu a &= 2(x_7 + x_8) \\ -\mu a - a &= 2(x_7 + x_8) \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa;

$$\mu a = -\mu a - a \Rightarrow \mu = -\frac{1}{2}$$

bulunur. Bu değer (2.21) de yazılırsa;

$$-\frac{1}{2} a = 2(x_7 + x_8) \Rightarrow -\frac{1}{4} a - x_7 = x_8$$

ve buradan da;

$$\Rightarrow C_3 = \begin{pmatrix} x_7 \\ -\frac{1}{4}a - x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -\frac{1}{4}a - d \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. (2.16) eşitliğinden ;

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} C_4$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} C_4$$

$$b \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} C_4$$

$$\frac{-3}{2}b = \frac{1}{2}b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_4 = e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

olur. Tekrar (2.16) kullanılırsa;

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-5}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} C_5$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} C_5$$

$$c \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} C_5$$

$$\frac{-5}{2}c = \frac{3}{2}c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_5 = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

elde edilir .(2.16) eşitliğinden;

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{-7}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-7}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} d \\ -\frac{1}{4}a - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} C_6$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-7}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -\frac{1}{4}a - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} C_6$$

ise

$$\begin{pmatrix} \frac{-7d}{2} \\ \frac{5a}{8} + \frac{5d}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} C_6$$

gerekli işlemler yapılırsa;

$$\frac{-7d}{2} = \frac{5a}{8} + \frac{5d}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{-12d}{2} = \frac{5a}{8} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{-5a}{48}$$

olur.

$$\Rightarrow C_3 = \begin{pmatrix} d \\ -\frac{1}{4}a - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5a}{48} \\ -\frac{a}{4} + \frac{5a}{48} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5a}{48} \\ \frac{7a}{48} \end{pmatrix}$$

bulunur. Bulunan bu değerlerin yerine yazılmasıyla lineer bağımsız çözümler elde edilir.

$$X = ae^{-\frac{2}{3}t^3} t^{\frac{-1}{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-5}{48} \\ \frac{7}{48} \end{pmatrix} \frac{1}{t^3} + \dots \right]$$

$$X_1 = ae^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}z^{\frac{-1}{4}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-5}{48} \\ \frac{7}{-48} \end{pmatrix} z^{\frac{3}{2}} + \dots \right]$$

Benzer adımlar takip edilerek $a_0 = \frac{2}{3}$ seçilirse;

$$X_2 = be^{\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}z^{\frac{-1}{4}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{48} \\ \frac{7}{-48} \end{pmatrix} z^{\frac{3}{2}} + \dots \right]$$

elde edilir. X_2 çözümünün yakınsak olması için $b=0$ alınmalıdır.

Teorem 2.3 ün uygulamasına başka bir örnek için aşağıdaki problemi inceleyelim.

Problem 2.3: $zy'' - (1+z)y' + z^3y = 0$ denkleminin $z \rightarrow \infty$ için asimptotik seri çözümlerini bulunuz ve yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm:

$$x_1 = y, x_2 = y' \Rightarrow x_1' = y' = x_2$$

$$\Rightarrow x_2' = y'' = \left(\frac{1}{z} + 1\right)y' - z^2y = \left(\frac{1}{z} + 1\right)x_2 - z^2x_1$$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -z^2 & \left(\frac{1}{z} + 1\right) \end{pmatrix} X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{z} \right] X$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A_0 vektörünün özdeğerleri hesaplanırsa;

$$|(A_0 - \lambda I)| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

çift katlı kök elde edilir. Bu durumda verilen denklem sisteme dönüştürülürken aşağıdaki gibi farklı dönüşümler kullanılarak farklı özdeğerler elde edilir.

$$x_1 = y \quad , \quad x_2 = z^{-1}y' \quad \Rightarrow \quad x_1' = y' = zx_2$$

$$\Rightarrow \quad x_2' = y'' = -z^{-2}y' + z^{-1}y''$$

$$= -z^{-1}x_2 + z^{-1}(1+z)x_2 - zx_1 = x_2 - zx_1$$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 1 \end{pmatrix} X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] X \quad (2.22)$$

$$A_0^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A_0^* vektörünün özdeğerleri;

$$|(A_0^* - \lambda I)| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = i \quad , \quad \lambda_2 = -i$$

elde edilir.

$\lambda_1 = i$ için

$$X = e^{(a_0 z^2 + a_1 z)} z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k} \quad (2.23)$$

şeklinde çözüm arayalım. (2.23), (2.22) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & (2a_0 z + a_1) e^{(a_0 z^2 + a_1 z)} z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k} \\ & + \frac{\mu}{z} e^{(a_0 z^2 + a_1 z)} z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k} - e^{(a_0 z^2 + a_1 z)} z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} k C_k z^{-k-1} \\ & = (A_0^* z + A_1) e^{(a_0 z^2 + a_1 z)} z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k} \\ \Rightarrow & (2a_0 z + a_1) \left(C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z^3} + \dots \right) + \frac{\mu}{z} \left(C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z^3} + \dots \right) \\ & - \left(\frac{C_1}{z^2} + \frac{2C_2}{z^3} + \frac{3C_3}{z^4} + \dots \right) = (A_0^* z + A_1) \left(C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z^3} + \dots \right) \end{aligned}$$

aynı dereceli z lerin katsayıları eşitlenirse;

$$\left. \begin{aligned} 2a_0 C_0 &= A_0^* C_0 \\ 2a_0 C_1 + a_1 C_0 &= A_0^* C_1 + A_1 C_0 \\ 2a_0 C_2 + a_1 C_1 + \mu C_0 &= A_0^* C_2 + A_1 C_1 \\ 2a_0 C_3 + a_1 C_2 + (\mu - 1) C_1 &= A_0^* C_3 + A_1 C_2 \\ 2a_0 C_4 + a_1 C_3 + (\mu - 2) C_2 &= A_0^* C_4 + A_1 C_3 \\ 2a_0 C_5 + a_1 C_4 + (\mu - 3) C_3 &= A_0^* C_5 + A_1 C_4 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Eşitlikleri elde edilir. $C_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ alınır ve bu eşitlik kullanılırsa;

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a_0 & 0 \\ 0 & 2a_0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2a_0 & 1 \\ -1 & -2a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$$

bulunur.

$$\left. \begin{aligned} -2a_0x_0 + y_0 &= 0 \\ -x_0 - 2a_0y_0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} -4a_0^2x_0 + 2a_0y_0 &= 0 \\ -x_0 - 2a_0y_0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$(-1 - 4a_0^2)x_0 = 0 \Rightarrow a_0 = \frac{i}{2} \text{ veya } a_0 = -\frac{i}{2}$$

elde edilir. $a_0 = \frac{i}{2}$ seçelim

$$-2\frac{i}{2}x_0 + y_0 = 0 \Rightarrow ix_0 = y_0 \Rightarrow C_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ ix_0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ a keyfi}$$

$C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ve (2.24) kullanılırsa;

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) a \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} C_1$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 - 1 \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$a \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 i - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ix_1 + y_1 \\ -x_1 - iy_1 \end{pmatrix}$$

$$a_1 a = -ix_1 + y_1$$

(2.25)

$$aa_1i - ia = -x_1 - iy_1$$

(2.25) denklemi i ile çarpılır ve iki denklem taraf tarafa toplanırsa;

$$2aa_1i - ia = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} \text{ bulunur. Bu değer (2.25) eşitliğinde yerine yazılırsa;}$$

$$\frac{1}{2}a = -ix_1 + y_1 \Rightarrow \frac{1}{2}a + ix_1 = y_1$$

$$\Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{a}{2} + ix_1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

olarak elde edilir. (2.24) eşitliği kullanılır ve $C_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ alınırsa;

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{a}{2} + ix_1 \end{pmatrix} + \mu a \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{a}{2} + ix_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} C_2$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} \\ \frac{a}{4} + \frac{ix_1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a \\ \mu ai \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} + ix_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} + \mu a \\ \frac{a}{4} + \frac{ix_1}{2} + \mu ai - \frac{a}{2} - ix_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{x_1}{2} + \mu a = -ix_2 + y_2 \quad (2.27)$$

$$\frac{a}{4} + \frac{ix_1}{2} + \mu ai - \frac{a}{2} - ix_1 = -x_2 - iy_2$$

(2.27) denklemi i ile çarpılır ve iki denklem taraf tarafa toplanırsa;

$$2a\mu i = \frac{a}{4} \Rightarrow \mu = -\frac{i}{8}$$

bulunur. Bu değ er (2.27) da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{2} - \frac{i}{8}a &= -ix_2 + y_2 \\ \Rightarrow \frac{x_1}{2} - \frac{i}{8}a + ix_2 &= y_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$C_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{x_1}{2} - \frac{i}{8}a + ix_2 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

elde edilir. (2.24) tekrar kullanılır ve $C_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ alınırsa;

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{x_1}{2} - \frac{i}{8}a + ix_2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{i}{8} - 1\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{a}{2} + ix_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{x_1}{2} - \frac{i}{8}a + ix_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} C_3$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_1}{4} - \frac{ia}{16} + \frac{ix_2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \left(-\frac{i}{8} - 1\right) \\ \frac{x_1}{8} - \frac{ia}{16} - \frac{a}{2} - ix_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_1}{2} - \frac{ia}{8} + ix_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} + x_1 \left(-\frac{i}{8} - 1\right) \\ \frac{x_1}{4} - \frac{ia}{16} + \frac{ix_2}{2} + \frac{x_1}{8} - \frac{ia}{16} - \frac{a}{2} - ix_1 - \frac{x_1}{2} + \frac{ia}{8} - ix_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

gerekli işlemler yapılırsa;

$$\frac{x_2}{2} + x_1 \left(-\frac{i}{8} - 1\right) = -ix_3 + y_3 \quad (2.29)$$

$$-\frac{x_1}{8} + \frac{ai}{16} - \frac{ix_2}{2} - \frac{a}{2} - ix_1 = -x_3 - iy_3$$

(2.29) denklemi i ile çarpılır ve iki denklem taraf tarafa toplanırsa;

$$-\frac{x_1}{8} + \frac{ai}{16} - \frac{ix_2}{2} - \frac{a}{2} - ix_1 + \frac{x_2i}{2} + \frac{x_1}{8} - ix_1 = 0$$

$$2ix_1 = \frac{ai}{16} - \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{ai}{4} + \frac{a}{32}$$

elde edilir ve bu değer (2.26) de yerine yazılırsa;

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{ai}{4} + \frac{a}{32} \\ \frac{a}{2} + \frac{ai}{32} - \frac{a}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\left(\frac{i}{4} + \frac{1}{32}\right) \\ a\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{32}\right) \end{pmatrix}$$

elde edilir. x_1 değeri (2.28) de yerine yazılırsa;

$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{ai}{8} + \frac{a}{64} - \frac{i}{8}a + ix_2 \\ \frac{a}{64} + ix_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{64} + ix_2 \\ \frac{a}{64} + ix_2 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

eşitliği bulunur. (2.29) denkleminde;

$$\frac{x_2}{2} + \left(\frac{ai}{4} + \frac{a}{32}\right)\left(-\frac{i}{8} - 1\right) + ix_3 = y_3$$

$\Rightarrow$

$$C_3 = \left(\frac{x_2}{2} + \left(\frac{ai}{4} + \frac{a}{32} \right) \left(-\frac{i}{8} - 1 \right) + ix_3 \right) = \left(-\frac{65ia}{256} + \frac{x_2}{2} + ix_3 \right) \quad (2.31)$$

bulunur.

(2.24) eşitliği tekrar kullanılır ve $C_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$ alınır;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(-\frac{65ia}{256} + \frac{x_2}{2} + ix_3 \right) + \left(-\frac{i}{8} - 2 \right) \left(\frac{a}{64} + ix_2 \right) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(-\frac{65ia}{256} + \frac{x_2}{2} + ix_3 \right) \\ & = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} C_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{65ia}{512} + \frac{x_2}{4} + \frac{ix_3}{2} \right) + \left(\begin{pmatrix} -\frac{i}{8} - 2 \\ -\frac{i}{8} - 2 \end{pmatrix} \frac{a}{64} + \left(\frac{1}{8} - 2i \right) x_2 \right) - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{65ia}{256} + \frac{x_2}{2} + ix_3 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} C_4 \end{aligned}$$

gerekli işlemler yapılırsa;

$$\frac{x_3}{2} - \frac{i}{8}x_2 - 2x_2 = -ix_4 + y_4 \quad (2.32)$$

$$-\frac{65ia}{512} + \frac{x_2}{4} + \frac{ix_3}{2} + \left(-\frac{i}{8} - 2 \right) \frac{a}{64} + \left(\frac{1}{8} - 2i \right) x_2 + \frac{65ia}{256} + \frac{x_2}{2} + ix_3 = -x_4 - iy_4$$

(2.32) eşitliği i ile çarpılır ve iki eşitlik taraf tarafa toplanır;

$$\frac{ai}{8} - \frac{a}{32} = 4ix_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{ai}{128} + \frac{a}{32}$$

bu değer (2.30) de yerine yazılırsa;

$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{ai}{128} + \frac{a}{32} \\ \frac{ai}{8} + \frac{a}{64} - \frac{i}{8}a - \frac{a}{128} + \frac{ai}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{32} \left(1 + \frac{i}{4}\right) \\ \frac{a}{32} \left(i + \frac{1}{4}\right) \end{pmatrix}$$

(2.31) de yerine yazılırsa;

$$C_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ -\frac{65ia}{256} + \frac{ai}{256} + \frac{a}{64} + ix_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -\frac{ai}{4} + \frac{a}{64} + ix_3 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.32) eşitliğinde x_2 yerine yazılırsa;

$$\frac{x_3}{2} - \frac{i}{8} \left(\frac{ai}{128} + \frac{a}{32} \right) - 2 \left(\frac{ai}{128} + \frac{a}{32} \right) + ix_4 = y_4$$

ve bu sayede

$$C_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ \frac{x_3}{2} - \frac{i}{8} \left(\frac{ai}{128} + \frac{a}{32} \right) - 2 \left(\frac{ai}{128} + \frac{a}{32} \right) + ix_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ -\frac{5ai}{256} - \frac{63a}{1024} + \frac{x_3}{2} + ix_4 \end{pmatrix}$$

elde edilir. (2.24) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} C_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_4 \\ -\frac{5ai}{256} - \frac{63a}{1024} + \frac{x_3}{2} + ix_4 \end{pmatrix} + \left(-\frac{i}{8} - 3 \right) \begin{pmatrix} x_3 \\ -\frac{ai}{4} + \frac{a}{64} + ix_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_4}{2} \\ -\frac{5ai}{256} - \frac{63a}{1024} + \frac{x_3}{2} + ix_4 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} \frac{x_4}{2} \\ -\frac{5ai}{512} - \frac{63a}{2048} + \frac{x_3}{4} + \frac{ix_4}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(-\frac{i}{8} - 3\right)x_3 \\ \left(-\frac{i}{8} - 3\right)\left(-\frac{ai}{4} + \frac{a}{64} + ix_3\right) \end{pmatrix} \\
& \quad - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5ai}{256} - \frac{63a}{1024} + \frac{x_3}{2} + ix_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$-ix_5 + y_5 = \frac{x_4}{2} - \frac{i}{8}x_3 - 3x_3 \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}
-x_5 - iy_5 = & -\frac{5ai}{512} - \frac{63a}{2048} + \frac{x_3}{4} + \frac{ix_4}{2} + \left(-\frac{i}{8} - 3\right)\left(-\frac{ai}{4} + \frac{a}{64} + ix_3\right) \pm \frac{5ai}{256} \\
& + \frac{63a}{1024} + \frac{x_3}{2} - ix_4
\end{aligned}$$

(2.34) denklemi i ile çarpılır ve iki denklem taraf tarafa toplanırsa;

$$\frac{97ai}{128} - \frac{97a}{2048} = 6ix_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{97ai}{12288} + \frac{97a}{768} = x_3$$

elde edilir. x_3 değeri (2.33) de yerine yazılırsa;

$$C_3 = \begin{pmatrix} \frac{97ai}{12288} + \frac{97a}{768} \\ \frac{a}{64} - \frac{ai}{4} + \frac{97ai}{768} - \frac{97a}{12288} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{256} \left(\frac{97}{3} + \frac{97i}{48}\right) \\ \frac{a}{256} \left(\frac{95}{48} - \frac{95i}{3}\right) \end{pmatrix}$$

bulunur. Bulunan tüm katsayılar çözümde yerine yazılırsa denklemin lineer bağımsız çözümleri;

$$X_1 = ae^{\frac{i}{2}z^2 + \frac{1}{2}z} z^{\frac{-i}{8}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i}{4} + \frac{1}{32} \\ \frac{1}{4} + \frac{i}{32} \end{pmatrix} \frac{1}{z} + \begin{pmatrix} \frac{1}{32} \left(1 + \frac{i}{4}\right) \\ \frac{1}{32} \left(i + \frac{1}{4}\right) \end{pmatrix} \frac{1}{z^2} + \begin{pmatrix} \frac{1}{256} \left(\frac{97}{3} + \frac{97i}{48}\right) \\ \frac{1}{256} \left(\frac{95}{48} - \frac{95i}{3}\right) \end{pmatrix} \frac{1}{z^3} + \dots \right]$$

$$X_2 = ae^{\frac{i}{2}z^2 + \frac{1}{2}z} z^{\frac{-i}{8}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-i}{4} + \frac{1}{32} \\ \frac{1}{4} - \frac{i}{32} \end{pmatrix} \frac{1}{z} + \begin{pmatrix} \frac{1}{32} \left(1 - \frac{i}{4}\right) \\ \frac{1}{32} \left(-i + \frac{1}{4}\right) \end{pmatrix} \frac{1}{z^2} + \begin{pmatrix} \frac{1}{256} \left(\frac{97}{3} - \frac{97i}{48}\right) \\ \frac{1}{256} \left(\frac{95}{48} + \frac{95i}{3}\right) \end{pmatrix} \frac{1}{z^3} + \dots \right]$$

olur. Üstel terim z nin pozitif kuvvetlerini içerdiğinden $z \rightarrow \infty$ için çözümlerin ıraksak olduğu görülmektedir.

2.5. Katsayı Matrisinin Özel Parametre İçermesi Durumu

Asimptotik seri çözümlerinin önemli bir diğer sınıfı ise katsayı matrisinin özel bir parametre içermesi durumudur. Yani;

$$X' = A(z, \mu)X.$$

Burada A matrisi hem z bağımsız değişkenine hem μ parametresine bağlıdır. Genel olarak $A(z, \mu)$ matrisi aşağıdaki formdadır.

$$A(z, \mu) = \mu \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \mu^{-k} \right) = \mu \left(A_0(z) + \frac{A_1(z)}{\mu} + \frac{A_2(z)}{\mu^2} + \frac{A_3(z)}{\mu^3} + \dots \right)$$

burada matris katsayıları z nin fonksiyonudur. A_0 matrisinin özel olarak diyagonal olması durumunda ;

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

$$X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \mu^{-k+1} \right) X$$

sisteminin bir çözümü;

$$X = e^{\mu \int a_1(z) dz} \sum_{k=0}^{\infty} V_k \mu^{-k}$$

şeklindedir. Bu durum $n=2$ olması durumunda aşağıdaki teoremden incelenmiştir.

$$2.6. \quad X' = \left(\sum_{k=0}^2 A_k \mu^{-k+1} \right) X \quad \text{Denklemin Sisteminin Çözümü}$$

Teorem 2.4: $z \rightarrow \infty$ için,

$$X' = \left(\sum_{k=0}^2 A_k \mu^{-k+1} \right) X$$

A_0 matrisinin diagonal olması halinde denkleminin bir çözümü;

$$X = e^{\mu \int a_1(z) dz} \sum_{k=0}^2 V_k \mu^{-k}$$

şeklindedir.

İspat:

$$X' = \mu \left(A_0 + \frac{A_1}{\mu} + \frac{A_2}{\mu^2} \right) X$$

$$A(z, \mu) = \mu \left(A_0 + \frac{A_1}{\mu} + \frac{A_2}{\mu^2} \right)$$

daha açık halde yazılırsa;

$$X' = \mu \left(A_0(z) + \frac{A_1(z)}{\mu} + \frac{A_2(z)}{\mu^2} \right) X$$

$$\frac{X'}{X} = \left(\mu A_0(z) + A_1(z) + \frac{A_2(z)}{\mu} \right)$$

her iki tarafın integrali alınır;

$$\int \frac{X'}{X} = \int \mu A_0(z) dz + \int A_1(z) dz + \int \frac{A_2(z)}{\mu} dz$$

$$\ln(X) = \int \begin{pmatrix} \mu a_1(x) & 0 \\ 0 & \mu a_2(x) \end{pmatrix} dz + \int A_1(z) dz + \frac{1}{\mu} \int A_2(z) dz + \ln c$$

eşitliğin her iki tarafı e üzerinde yazılırsa;

$$X = e^{\begin{bmatrix} \mu \int a_1(x) dz & 0 \\ 0 & \mu \int a_2(x) dz \end{bmatrix}} \cdot e^{\int A_1(z) dz} \cdot e^{\frac{1}{\mu} \int A_2(z) dz} \cdot e^{\ln c}$$

$$X = \begin{bmatrix} e^{\mu \int a_1(x) dz} & 0 \\ 0 & e^{\mu \int a_2(x) dz} \end{bmatrix} \cdot e^{\int A_1(z) dz} \cdot e^{\frac{1}{\mu} \int A_2(z) dz} \cdot C$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\mu \int a_1(x) dz} & 0 \\ 0 & e^{\mu \int a_2(x) dz} \end{bmatrix} \left[I + \int A_1(z) dz + \frac{1}{2} \int (A_1(z) dz)^2 + \dots \right] e^{\frac{1}{\mu} \int A_2(z) dz} \cdot C$$

$$B(z) := \left[I + \int A_1(z) dz + \frac{1}{2} \left(\int A_1(z) dz \right)^2 + \dots \right]$$

olarak tanımlanırsa;

$$X = \begin{bmatrix} e^{\mu \int a_1(x) dz} & 0 \\ 0 & e^{\mu \int a_2(x) dz} \end{bmatrix} B(z) \left[I + \frac{1}{\mu} \int A_2(z) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} \int A_2(z) dz \right)^2 + \dots \right] \cdot C$$

$$X = \begin{bmatrix} e^{\mu \int a_1(x) dz} & 0 \\ 0 & e^{\mu \int a_2(x) dz} \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} V_k(z) \mu^{-k} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan;

$$x_1 = e^{\mu \int a_1(x) dz} \sum_{k=0}^{\infty} V_k(z) \mu^{-k}$$

şeklinde bir çözüm elde edilmiş olur.

Teoremin bir uygulaması olarak aşağıdaki problemi ele alalım.

Problem 2.4: $y'' + (\lambda - q(z))y = 0$ denkleminin $\lambda \rightarrow \infty$ için asimptotik seri çözümlerini bulunuz ve çözümlerin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: $\lambda = \mu^2$

$$x_1 = y, \quad x_2 = y' \mu^{-1} \Rightarrow x_1' = y' = \mu x_2$$

$$\Rightarrow x_2' = y'' \mu^{-1} = [(-\lambda + q(z))y] \mu^{-1} = [(-\lambda + q(z))x_1] \mu^{-1}$$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \frac{q(z) - \lambda}{\mu} & 0 \end{pmatrix} X = \left[\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \frac{q(z) - \mu^2}{\mu} & 0 \end{pmatrix} \right] X$$

$$A_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = 0, \quad A_2(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q(z) & 0 \end{pmatrix}$$

$A_0(z)$ diyagonal değil, öncelikle diyagonal hale getirelim.

$$|(A_0 - \lambda I)| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -i, \quad \lambda_2 = i$$

$\lambda_1 = -i$ için,

$$|(A_0 - \lambda_1 I)|V_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} V_1 = 0 \quad , \quad V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ia + b = 0 \\ -a + ib = 0 \end{cases} \Rightarrow -ai = b \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} a \\ -ai \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad a \text{ keyfi}$$

$\lambda_2 = i$ için,

$$|(A_0 - \lambda_2 I)|V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} V_2 = 0 \quad , \quad V_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -ic + d = 0 \\ -c - id = 0 \end{cases} \Rightarrow ci = d \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} c \\ ci \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad c \text{ keyfi}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad , \quad T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}A_0T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = A_0^*$$

$$X = TY \Rightarrow X' = T'Y + TY' \Rightarrow X' = TY'$$

$\Rightarrow$

$$TY' = \left[\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q(z) & 0 \end{pmatrix} \right] TY$$

her iki tarafı , T^{-1} ile soldan çarpalım.

$$\Rightarrow T^{-1}TY' = T^{-1} \left[\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q(z) & 0 \end{pmatrix} \right] TY$$

$$Y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \left[\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q(z) & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} Y$$

$$= \left[\mu \begin{pmatrix} \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \frac{q(z)i}{2} & 0 \\ -\frac{q(z)i}{2} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} Y$$

$$= \left[\mu \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \frac{q(z)i}{2} & \frac{q(z)i}{2} \\ -\frac{q(z)i}{2} & -\frac{q(z)i}{2} \end{pmatrix} \right] Y$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{q(z)i}{2} & \frac{q(z)i}{2} \\ -\frac{q(z)i}{2} & -\frac{q(z)i}{2} \end{pmatrix}$$

$$Y = e^{-i\mu z} \sum_{k=0}^{\infty} V_k(z) \mu^{-k}$$

şeklinde çözüm araştıralım.

$$Y' = -i\mu e^{-i\mu z} \sum_{k=0}^{\infty} V_k(z) \mu^{-k} + e^{-i\mu z} \sum_{k=0}^{\infty} V'_k(z) \mu^{-k}$$

$$= \left[\mu \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \frac{q(z)i}{2} & \frac{q(z)i}{2} \\ -\frac{q(z)i}{2} & -\frac{q(z)i}{2} \end{pmatrix} \right] e^{-i\mu z} \sum_{k=0}^{\infty} V_k(z) \mu^{-k}$$

$$\begin{aligned}
& -i\mu \left(V_0(z) + \frac{V_1(z)}{\mu} + \frac{V_2(z)}{\mu^2} + \dots \right) + \left(V_0'(z) + \frac{V_1'(z)}{\mu} + \frac{V_2'(z)}{\mu^2} + \dots \right) \\
& = \left[A_0\mu + A_2 \frac{1}{\mu} \right] \left(V_0(z) + \frac{V_1(z)}{\mu} + \frac{V_2(z)}{\mu^2} + \dots \right)
\end{aligned}$$

aynı dereceli μ lerin katsayıları eşitlenirse;

$$\left. \begin{aligned}
-iV_0(z) &= A_0 V_0(z) \Rightarrow (A_0 + iI)V_0(z) = 0 \\
-iV_1(z) + V_0'(z) &= A_0 V_1(z) \Rightarrow V_0'(z) = (A_0 + iI)V_1 \\
-iV_2(z) + V_1'(z) &= A_0 V_2(z) + A_2 V_0(z) \Rightarrow V_1'(z) = (A_0 + iI)V_2 + A_2 V_0 \\
V_2(z) &= (A_0 + iI)V_3 + A_2 V_1 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
V_{k-1}'(z) &= (A_0 + iI)V_k + A_2 V_{k-2} \quad k = 2, 3, \dots
\end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliği kullanırsak;

$$(A_0 + iI)V_0(z) = 0 \quad , \quad V_0 = \begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right) V_0 = 0$$

$$\Rightarrow V_0 = \begin{pmatrix} p_0(z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

bulunur. (2.35) eşitliği kullanılırsa;

$$V_0'(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} V_1(z)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} p_0'(z) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} V_1(z) \quad (2.37)$$

$$p_0'(z) = 0 \Rightarrow \int p_0'(z) dz = \int 0 dz \Rightarrow p_0(z) = a \quad (a \text{ sabit})$$

olur ve bu değer (2.36) da yerine yazılırsa;

$\Rightarrow V_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ elde edilir ve (2.37) den

$$V_1 = \begin{pmatrix} p_1(z) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ olduğu görülür.} \quad (2.38)$$

elde edilir. (2.35) eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} p_1'(z) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{q_{ai}}{2} \\ -\frac{q_{ai}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} V_2(z)$$

$$\begin{pmatrix} p_1'(z) - \frac{q_{ai}}{2} \\ \frac{q_{ai}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} V_2(z) \quad (2.39)$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} p_2(z) \\ p_2(z_0) \end{pmatrix} \text{ olarak alınırsa;}$$

$$p_1'(z) - \frac{q_{ai}}{2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\int p_1'(z) dz = \int \frac{q_{ai}}{2} dz$$

$$\Rightarrow p_1(z) = \frac{a_i}{2} \int q(z) dz$$

bulunur. Bu değer (2.38) de yerine yazılırsa;

$$V_1 = \left(\frac{ai}{2} \int_0^{\infty} q(z) dz \right)$$

olur.

(2.39) da gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{qai}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2ip_2(z_0) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{qai}{2} = 2ip_2(z_0)$$

$$\Rightarrow p_2(z_0) = \frac{qa}{4}$$

elde edilir ve dolayısıyla;

$$V_2 = \begin{pmatrix} p_2(z) \\ \frac{qa}{4} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

olur.

(2.35) eşitliği tekrar kullanılırsa;

$$\begin{pmatrix} p_2'(z) \\ \frac{q'(z)a}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} V_3 + \begin{pmatrix} \frac{q(z)i}{2} & \frac{q(z)i}{2} \\ -\frac{q(z)i}{2} & -\frac{q(z)i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ai}{2} \int_0^{\infty} q(z) dz \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_2'(z) = \frac{q(z)i}{2} \left(\frac{ai}{2} \int_0^{\infty} q(z) dz \right) = -\frac{qa}{4} \int_0^{\infty} q(z) dz$$

$$p_2(z) = \int -\frac{qa}{4} \left(\int_0^{\infty} q(z) dz \right) dz = -\frac{a}{8} \left(\int_0^{\infty} q(z) dz \right)^2$$

ifadesi elde edilir ve (2.40) da yerine yazılırsa;

$$V_2 = \left(-\frac{a}{8} \left(\int q(z) dz \right)^2, \frac{qa}{4} \right)$$

olur.

$$Y = ae^{-i\mu z} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} \int_0 q(z) dz + \frac{1}{\mu^2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \left(\int q(z) dz \right)^2 \\ \frac{q}{4} \end{pmatrix} + \dots \right]$$

$$y_1 = ae^{-i\sqrt{\lambda}z} \left[1 + \lambda^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{i}{2} \int q(z) dz \right) + \lambda^{-1} \left(-\frac{1}{8} \left(\int q(z) dz \right)^2 + \frac{q}{4} \right) + \dots \right]$$

$$y_2 = ae^{i\sqrt{\lambda}z} \left[-i + \lambda^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \int q(z) dz \right) + \lambda^{-1} \left(\frac{i}{8} \left(\int q(z) dz \right)^2 + \frac{qi}{4} \right) + \dots \right]$$

q fonksiyonunun sınırlı olması durumunda y_1 ve y_2 çözümlerinin yakınsak olduğu sonucunu ortaya koyar.

Bu sonucun bir uygulaması olarak $q(z)=\cos z$ olarak alınırsa;

$$y_1 = ae^{-i\sqrt{\lambda}z} \left[1 + \lambda^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{i}{2} \sin z \right) + \lambda^{-1} \left(-\frac{1}{8} (\sin z)^2 + \frac{q}{4} \right) + \dots \right]$$

$$y_2 = ae^{i\sqrt{\lambda}z} \left[-i + \lambda^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin z \right) + \lambda^{-1} \left(\frac{i}{8} (\sin z)^2 + \frac{qi}{4} \right) + \dots \right]$$

olarak bulunur.

Problem 2.5: $y'' - \mu e^z y' - \mu y = 0$ denkleminin μ nın büyük değerleri için asimptotik seri çözümlerini bulunuz ve çözümlerin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm:

$$x_1 = y, \quad x_2 = y' \mu^{-1} \quad \Rightarrow \quad x_1' = y' = \mu x_2$$

$$\Rightarrow x_2' = y''\mu^{-1} = [\mu e^z y' + \mu y]\mu^{-1} = e^z \mu x_2 + x_1$$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1 & e^z \mu \end{pmatrix} X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} \mu \right] X$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A_0 diyagonal değil. Diyagonal hale getirelim;

$$|(A_0 - \lambda I)| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & e^z - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$-\lambda(e^z - \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = e^z$$

$\lambda_1 = 0$ için;

$$|(A_0 - \lambda_1 I)|V_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} V_1 = 0, \quad V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} b = 0 \\ e^z b = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 0 = b \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a \text{ keyfi}$$

$\lambda_2 = e^z$ için;

$$|(A_0 - \lambda_2 I)|V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -e^z & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_2 = 0, \quad V_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$-e^z c + d = 0 \Rightarrow e^z c = d \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} c \\ e^z c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ e^z \end{pmatrix} \quad c \text{ keyfi.}$$

Öz vektörlerin yazılmasıyla elde edilen T matrisini ve T nin tersini bulalım;

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} e^z & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -e^{-z} \\ 0 & e^{-z} \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}A_0T = \begin{pmatrix} 1 & -e^{-z} \\ 0 & e^{-z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} = A_0^*$$

$X=TY$ olarak tanımlanır ve iki tarafın türevi alınır;

$X' = T'Y + TY'$ elde edilir. Her iki taraf T nin tersiyle çarpılırsa;

$T^{-1}X' = T^{-1}T'Y + T^{-1}TY'$ olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$T^{-1}X' - T^{-1}T'Y = Y' \text{ elde edilir.} \quad (2.41)$$

$X' = [A_1 + A_0\mu]X$ ve $X=TY$ (2.41) de yerine yazılırsa;

$$T^{-1}([A_1 + A_0\mu]TY) - T^{-1}T'Y = Y'$$

$$[T^{-1}[A_1 + A_0\mu]T - T^{-1}T']Y = Y' \quad (2.42)$$

elde edilir.

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix}$$

A_0, A_1, T, T^{-1}, T' (2.42) de yazılırsa;

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -e^{-z} \\ 0 & e^{-z} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} \mu \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -e^{-z} \\ 0 & e^{-z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} \right] Y = Y'$$

olur. Gerekli işlemlerin yapılmasıyla;

$$\left[\begin{pmatrix} -e^{-z} & 0 \\ e^{-z} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] Y = Y'$$

$$\left[\begin{pmatrix} -e^{-z} & -e^{-z} \\ e^{-z} & e^{-z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} \mu - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] Y = Y'$$

$$\left[\begin{pmatrix} -e^{-z} & 1-e^{-z} \\ e^{-z} & e^{-z}-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} \mu \right] Y = Y' \quad (2.43)$$

elde edilir. Yeni A_0^* diyagonal matrisi elde edildi.

$$A_0^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -e^{-z} & 1-e^{-z} \\ e^{-z} & e^{-z}-1 \end{pmatrix}$$

$$Y = e^{\mu \int_0^z dz} \sum_{k=0}^{\infty} V_k \mu^{-k}$$

şeklinde çözüm araştıralım.

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} V_k \mu^{-k} \quad (2.44)$$

(2.44) , (2.43) de yerine yazılırsa;

$$Y' = \sum_{k=0}^{\infty} V'_k \mu^{-k} = [A_0^* \mu + A_1] \sum_{k=0}^{\infty} V_k \mu^{-k}$$

$$\left(V_0' + \frac{V_1'}{\mu} + \frac{V_2'}{\mu^2} + \dots \right) = [A_0^* \mu + A_1] \left(V_0 + \frac{V_1}{\mu} + \frac{V_2}{\mu^2} + \dots \right).$$

Aynı dereceli μ lerin katsayıları eşitlenirse;

$$\left. \begin{aligned} A_0^* V_0 &= 0 \\ V_0' &= A_0^* V_1 + A_1 V_0 \\ V_1' &= A_0^* V_2 + A_1 V_1 \\ V_2' &= A_0^* V_3 + A_1 V_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

(2.45) eşitliği kullanılır ve $V_0 = \begin{pmatrix} p_0^1(z) \\ p_0^2(z) \end{pmatrix}$ alınır;sa;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0^1(z) \\ p_0^2(z) \end{pmatrix} &= 0 \Rightarrow e^z p_0^2(z) = 0 \\ &\Rightarrow p_0^2(z) = 0, \quad p_0^1(z) \text{ keyfi} \\ &\Rightarrow V_0 = \begin{pmatrix} p_0^1(z) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bulunur.} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Yeniden (2.45) eşitliği kullanılır ve $V_1 = \begin{pmatrix} p_1^1(z) \\ p_1^2(z) \end{pmatrix}$ olarak alınır;sa;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_0^1(z)' \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1(z) \\ p_1^2(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{-z} & 1-e^{-z} \\ e^{-z} & e^{-z} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0^1(z) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_0^1(z)' \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^z p_1^2(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{-z} p_0^1(z) \\ e^{-z} p_0^1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-z} p_0^1(z) \\ e^z p_1^2(z) + e^{-z} p_0^1(z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.47)$$

elde edilir. Vektörlerin 1. bileşenlerinin eşitlenmesiyle;

$$p_0^1(z)' = -e^{-z} p_0^1(z)$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınır;sa;

$$\int \frac{p_0^1(z)'}{p_0^1(z)} dz = \int -e^{-z} dz$$

$$\Rightarrow \ln|p_0^1(z)| = -e^{-z} + c$$

olur. İki tarafın üstelinin alınmasıyla;

$$p_0^1(z) = \exp(e^{-z}) c_1$$

elde edilir. Bu değer (2.46) da yerine yazılırsa;

$$V_0 = \begin{pmatrix} \exp(e^{-z}) c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olur. (2.47) deki vektörlerin 2. bileşenleri eşitlenirse

$$e^z p_1^2(z) + e^{-z} p_0^1(z) = 0$$

$$\Rightarrow p_1^2(z) = -e^{-2z} \exp(e^{-z}) c_1$$

o halde;

$$V_1 = \begin{pmatrix} p_1^1(z) \\ -e^{-2z} \exp(e^{-z}) c_1 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

bulunur.

(2.45) eşitliği kullanılır ve $V_2 = \begin{pmatrix} p_2^1(z) \\ p_2^2(z) \end{pmatrix}$ alınırsa;

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} p_1^1(z)' \\ 2e^{-2z} \exp(e^{-z}) c_1 - e^{-2z} (-e^{-z}) \exp(e^{-z}) c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2^1(z) \\ p_2^2(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{-z} & 1-e^{-z} \\ e^{-z} & e^{-z} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1(z) \\ -e^{-2z} \exp(e^{-z}) c_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gerekli işlemler yapılırsa;

$$p_1^1(z)' = (-e^{-z})p_1^1(z) + (1-e^{-z})(-e^{-2z} \exp(e^{-z}) c_1)$$

$$p_1^1(z)' + e^{-z}p_1^1(z) = (-1+e^{-z})(e^{-2z} \exp(e^{-z}) c_1) \quad (2.49)$$

U integral çarpanı hesaplanırsa;

$$U = e^{\int(e^{-z})dz} = e^{-e^{-z}} = \exp(-e^{-z})$$

(2.49) denklemini U ile çarparsak;

$$\exp(-e^{-z}) (p_1^1(z)' + e^{-z}p_1^1(z)) = \exp(-e^{-z}) (-1+e^{-z})(e^{-2z} \exp(e^{-z}) c_1)$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$(\exp(-e^{-z}) p_1^1(z))' = (-e^{-2z} + e^{-3z})c_1$$

elde edilir. Her iki tarafın integrali alınır;

$$\int (\exp(-e^{-z}) p_1^1(z))' dz = \int (-e^{-2z} + e^{-3z})c_1 dz$$

$$\exp(-e^{-z}) p_1^1(z) = \left(\frac{1}{2}e^{-2z} - \frac{1}{3}e^{-3z}\right)c_1$$

ve her iki taraf $\exp(-e^{-z})$ ile bölünürse;

$$p_1^1(z) = \left(\frac{1}{2}e^{-2z} - \frac{1}{3}e^{-3z}\right)\exp(e^{-z}) c_1$$

elde edilir. bu değer (2.48) de yazılırsa;

$$V_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}e^{-2z} - \frac{1}{3}e^{-3z}\right)\exp(e^{-z}) c_1 \\ -e^{-2z} \exp(e^{-z}) c_1 \end{pmatrix}$$

olur. O halde (2.44) den;

$$Y = \left[\begin{pmatrix} \exp(e^{-z}) c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-2z} - \frac{1}{3} e^{-3z} \\ -e^{-2z} \exp(e^{-z}) c_1 \end{pmatrix} + \dots \right) \right]$$

$X = TY$ olduğundan,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \exp(e^{-z}) c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-2z} - \frac{1}{3} e^{-3z} \\ -e^{-2z} \exp(e^{-z}) c_1 \end{pmatrix} + \dots \right) \right]$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} \exp(e^{-z}) c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} e^{-2z} - \frac{1}{3} e^{-3z} \\ -e^{-z} \exp(e^{-z}) c_1 \end{pmatrix} + \dots \right) \right]$$

denkleminin bir çözümü elde edilir. $\mu \rightarrow \infty$ için çözümün yakınsak olduğu görülür.

Teorem 2.4 ün başka bir uygulaması aşağıdaki örnekte verilmiştir.

Problem 2.6:

$$y'' + (\sqrt{\lambda} - q)y' + (\lambda - q)y = 0$$

denkleminin $z \rightarrow \infty$ için asimptotik seri çözümlerini bulunuz.

Çözüm:

$$\lambda = \mu^2$$

$$x_1 = y, \quad x_2 = y' \mu^{-1} \quad \Rightarrow \quad x_1' = y' = \mu x_2$$

$$\Rightarrow \quad x_2' = y'' \mu^{-1} = [(-\sqrt{\lambda} + q)y' + (-\lambda + q)y] \mu^{-1}$$

$\lambda = \mu^2$ alınırsa;

$$x_2' = [(-\mu + q)y' + (-\mu^2 + q)y] \mu^{-1}$$

$$= (q - \mu)x_2 + \left(\frac{q}{\mu} - \mu\right)x_1$$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \frac{q}{\mu} - \mu & q - \mu \end{pmatrix} X = \left[\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \right] X$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}$$

A_0 diyagonal değil. Diyagonal hale getirelim;

$$|(A_0 - \lambda I)| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$-\lambda(-1-\lambda) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

için,

$$|(A_0 - \lambda_1 I)|V_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} & 1 \\ -1 & \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} V_1 = 0, \quad V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right) a + b = 0 \\ -a + \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right) a = b$$

$$\Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} a \\ \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{3}i \end{pmatrix} \quad a \text{ keyfi}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

için,

$$|(A_0 - \lambda_2 I)|V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}i}{2} & 1 \\ -1 & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} V_2 = 0 \quad , \quad V_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)c + d = 0 \\ -c + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)d = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)c = d$$

$$\Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} c \\ \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{3}i \end{pmatrix} \quad c \text{ keyfi}$$

özvektörlerin yazılmasıyla elde edilen T matrisini ve T nin tersini bulalım;

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1-\sqrt{3}i & -1+\sqrt{3}i \end{pmatrix} ,$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3}i & -2 \\ 1+\sqrt{3}i & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{3}i} \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3}i & -2 \\ 1+\sqrt{3}i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{3}i}{12} & \frac{\sqrt{3}i}{6} \\ \frac{3-\sqrt{3}i}{12} & \frac{-\sqrt{3}i}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
T^{-1}A_0T &= \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{3}i}{12} & \frac{\sqrt{3}i}{6} \\ \frac{3-\sqrt{3}i}{12} & \frac{-\sqrt{3}i}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1-\sqrt{3}i & -1+\sqrt{3}i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}i}{6} & \frac{3-\sqrt{3}i}{12} \\ \frac{\sqrt{3}i}{6} & \frac{3+\sqrt{3}i}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1-\sqrt{3}i & -1+\sqrt{3}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} = A_0^*
\end{aligned}$$

$X=TY$ olarak tanımlanır ve iki tarafın türevi alınırsa;

$$X' = T'Y + TY'$$

$T' = 0$ olduğu göz önüne alınırsa:

$X' = TY'$ elde edilir. Her iki taraf T nin tersiyle çarpılırsa;

$T^{-1}X' = T^{-1}TY'$ olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$T^{-1}X' = Y' \quad \text{elde edilir.} \quad (2.50)$$

$$X' = \left[A_0\mu + A_1 + \frac{1}{\mu}A_2 \right] X$$

ve $X=TY$ (2.50) de yerine yazılırsa;

$$T^{-1} \left(\left[A_0\mu + A_1 + \frac{1}{\mu}A_2 \right] TY \right) = Y'$$

$$\left[T^{-1} \left[A_0\mu + A_1 + \frac{1}{\mu}A_2 \right] T \right] Y = Y' \quad (2.51)$$

elde edilir.

A_0, A_1, A_2, T, T^{-1} (2.51) de yazılırsa;

$$Y' = \left[\begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{3}i}{12} & \frac{\sqrt{3}i}{6} \\ \frac{3-\sqrt{3}i}{12} & \frac{-\sqrt{3}i}{6} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1-\sqrt{3}i & -1+\sqrt{3}i \end{pmatrix} \right] Y$$

olur. Gerekli işlemlerin yapılmasıyla;

$$Y' = \left[\left[\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}i}{6} & \frac{3-\sqrt{3}i}{12} \\ \frac{\sqrt{3}i}{6} & \frac{3+\sqrt{3}i}{12} \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} 0 & \frac{q\sqrt{3}i}{6} \\ 0 & \frac{-q\sqrt{3}i}{6} \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \frac{q\sqrt{3}i}{6} & 0 \\ \frac{-q\sqrt{3}i}{6} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1-\sqrt{3}i & -1+\sqrt{3}i \end{pmatrix} \right] Y$$

$$Y' = \left[\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} \frac{q(3-\sqrt{3}i)}{6} & \frac{q(-3-\sqrt{3}i)}{6} \\ \frac{-q(3-\sqrt{3}i)}{6} & \frac{-q(-3-\sqrt{3}i)}{6} \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \frac{q\sqrt{3}i}{3} & \frac{q\sqrt{3}i}{3} \\ \frac{-q\sqrt{3}i}{3} & \frac{-q\sqrt{3}i}{3} \end{pmatrix} \right] Y \quad (2.52)$$

elde edilir. Yeni A_0^* diagonal matrisi bulundu.

$$A_0^* = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \frac{q(3-\sqrt{3}i)}{6} & \frac{q(-3-\sqrt{3}i)}{6} \\ \frac{-q(3-\sqrt{3}i)}{6} & \frac{-q(-3-\sqrt{3}i)}{6} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{q\sqrt{3}i}{3} & \frac{q\sqrt{3}i}{3} \\ \frac{-q\sqrt{3}i}{3} & \frac{-q\sqrt{3}i}{3} \end{pmatrix}$$

$$Y = e^{\mu \int \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) dz} \sum_{k=0}^{\infty} V_k \mu^{-k}$$

$$= e^{\mu \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) z} \sum_{k=0}^{\infty} V_k \mu^{-k} \quad (2.53)$$

şeklinde çözüm araştırılım. (2.53), (2.52) de yerine yazılırsa;

$$Y' = \mu \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) e^{\mu \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) z} \sum_{k=0}^{\infty} V_k \mu^{-k} + e^{\mu \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) z} \sum_{k=0}^{\infty} V'_k \mu^{-k}$$

$$= \left[A_0^* \mu + A_1 + \frac{1}{\mu} A_2 \right] e^{\mu \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) z} \sum_{k=0}^{\infty} V_k \mu^{-k}$$

$$\begin{aligned} & \mu \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) \left(V_0 + \frac{V_1}{\mu} + \frac{V_2}{\mu^2} + \dots \right) + \left(V_0' + \frac{V_1'}{\mu} + \frac{V_2'}{\mu^2} + \dots \right) \\ &= \left[A_0^* \mu + A_1 + \frac{1}{\mu} A_2 \right] \left(V_0 + \frac{V_1}{\mu} + \frac{V_2}{\mu^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Aynı dereceli μ lerin katsayıları eşitlenirse;

$$\left. \begin{aligned} A_0^* V_0 &= \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) V_0 \\ V_0' &= A_0^* V_1 + A_1 V_0 - \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) V_1 \\ V_1' &= A_0^* V_2 + A_1 V_1 + A_2 V_0 - \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) V_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliği kullanırsak;

$$\left(A_0^* + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) I \right) V_0(z) = 0, \quad V_0 = \begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \right) V_0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}i \end{pmatrix} V_0 \text{ ise } \sqrt{3}i b(z) = 0 \text{ ve } b(z) = 0$$

$\Rightarrow$

$$V_0 = \begin{pmatrix} p_0(z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

bulunur. (2.54) eşitliği kullanılırsa;

$$V_0' - A_1 V_0 = \left(A_0^* - \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right) I \right) V_1$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} c(z) \\ d(z) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} p_0'(z) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{q(3 - \sqrt{3}i)}{6} & \frac{q(-3 - \sqrt{3}i)}{6} \\ \frac{-q(3 - \sqrt{3}i)}{6} & \frac{-q(-3 - \sqrt{3}i)}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(z) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}i \end{pmatrix} V_1. \quad (2.56)$$

Vektörlerin 1. bileşenleri eşitlenirse;

$$p_0'(z) - \left(\frac{q(3 - \sqrt{3}i)}{6} \right) p_0(z) = 0$$

$$\frac{p_0'(z)}{p_0(z)} = \left(\frac{q(3 - \sqrt{3}i)}{6} \right)$$

olur ve iki tarafın integrali alınırsa;

$$\int \frac{p_0'(z)}{p_0(z)} dz = \int \left(\frac{q(3 - \sqrt{3}i)}{6} \right) dz$$

$$\ln p_0(z) = \left(\frac{(3 - \sqrt{3}i)}{6} \right) \int q dz$$

olur. Her iki taraf e üzerinde yazılırsa;

$$p_0(z) = e^{\left(\frac{(3 - \sqrt{3}i)}{6} \right) \int q dz}$$

bulunur, (2.55) den

$$V_0 = \begin{pmatrix} e^{\left(\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6}\right) \int q dz} \\ 0 \end{pmatrix}$$

olur. (2.56) eşitliğinin ikinci bileşenlerinin eşitlenmesiyle;

$$\left(\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6}\right) p_0(z) = \sqrt{3}id$$

$P_0(z)$ yerine yazılır ve eşitlik düzenlenirse;

$$\left(\frac{-q(1+\sqrt{3}i)}{6}\right) e^{\left(\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6}\right) \int q dz} = d$$

ise

$$V_1 = \begin{pmatrix} p_1(z) \\ \left(\frac{-q(1+\sqrt{3}i)}{6}\right) e^{\left(\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6}\right) \int q dz} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

elde edilir. (2.54) eşitliği tekrar kullanılırsa;

$$V_1' - A_1 V_1 - A_2 V_0 = \left(A_0^* - \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) I\right) V_2$$

$$\begin{aligned} & \left(\left(\left(\frac{-q(1+\sqrt{3}i)}{6} \right) e^{\left(\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6}\right) \int q dz} \right)' \right) \\ & - \begin{pmatrix} \frac{q(3-\sqrt{3}i)}{6} & \frac{q(-3-\sqrt{3}i)}{6} \\ \frac{-q(3-\sqrt{3}i)}{6} & \frac{-q(-3-\sqrt{3}i)}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(z) \\ \left(\frac{-q(1+\sqrt{3}i)}{6}\right) e^{\left(\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6}\right) \int q dz} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$-\begin{pmatrix} \frac{q\sqrt{3}i}{3} & \frac{q\sqrt{3}i}{3} \\ -\frac{q\sqrt{3}i}{3} & -\frac{q\sqrt{3}i}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\left(\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6}\right) \int q dz} & \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}i \end{pmatrix} V_2$$

vektörlerin 1. bileşenleri eşitlenirse;

$$p_1'(z) - \frac{q(3-\sqrt{3}i)}{6} p_1(z) - \frac{q(-3-\sqrt{3}i)}{6} \left(\frac{-q(1+\sqrt{3}i)}{6} \right) e^{\left(\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6}\right) \int q dz} \\ - \frac{q\sqrt{3}i}{3} e^{\left(\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6}\right) \int q dz}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$p_1'(z) - \frac{q(3-\sqrt{3}i)}{6} p_1(z) - \frac{q\sqrt{3}i}{3} e^{\left(\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6}\right) \int q dz} \left(\frac{q}{6} + 1 \right) = 0$$

$$p_1'(z) - \frac{q(3-\sqrt{3}i)}{6} p_1(z) = \frac{q\sqrt{3}i}{3} e^{\left(\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6}\right) \int q dz} \left(\frac{q}{6} + 1 \right) \quad (2.58)$$

U integral çarpanı hesaplanırsa;

$$U = e^{-\int \frac{q(3-\sqrt{3}i)}{6} dz} = e^{\frac{(-3+\sqrt{3}i)}{6} \int q dz}$$

bulunur. (2.58) denklemi U ile iki taraftan çarpılırsa;

$$\left(p_1'(z) - \frac{q(3-\sqrt{3}i)}{6} p_1(z) \right) e^{\frac{(-3+\sqrt{3}i)}{6} \int q dz} \\ = e^{\frac{(-3+\sqrt{3}i)}{6} \int q dz} \cdot \frac{q\sqrt{3}i}{3} e^{\left(\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6}\right) \int q dz} \left(\frac{q}{6} + 1 \right)$$

$$\left(p_1(z) e^{\frac{(-3+\sqrt{3}i)}{6} \int q dz} \right)' = \frac{q\sqrt{3}i}{3} \left(\frac{q}{6} + 1 \right)$$

elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa;

$$\int \left(p_1(z) e^{\frac{(-3+\sqrt{3}i)}{6} \int q dz} \right)' dz = \int \frac{q\sqrt{3}i}{3} \left(\frac{q}{6} + 1 \right) dz$$

$$p_1(z) e^{\frac{(-3+\sqrt{3}i)}{6} \int q dz} = \int \frac{q\sqrt{3}i}{3} \left(\frac{q}{6} + 1 \right) dz$$

$$p_1(z) = e^{\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6} \int q dz} \int \frac{q\sqrt{3}i}{3} \left(\frac{q}{6} + 1 \right) dz$$

bulunur. Bu değer (2.57) de yerine yazılırsa;

$$V_1 = \begin{pmatrix} e^{\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6} \int q dz} \int \frac{q\sqrt{3}i}{3} \left(\frac{q}{6} + 1 \right) dz \\ \left(\frac{-q(1+\sqrt{3}i)}{6} \right) e^{\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6} \int q dz} \end{pmatrix}$$

elde edilir. (2.53) den;

$$Y = e^{\mu \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right) z} \left(\begin{pmatrix} e^{\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6} \int q dz} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} e^{\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6} \int q dz} \int \frac{q\sqrt{3}i}{3} \left(\frac{q}{6} + 1 \right) dz \\ \left(\frac{-q(1+\sqrt{3}i)}{6} \right) e^{\frac{(3-\sqrt{3}i)}{6} \int q dz} \end{pmatrix} + \dots \right)$$

bir çözümü elde edilir. Çözümün yakınsaklığı μ parametresinin pozitif veya negatif olmasına ve q fonksiyonunun özelliklerine göre incelenebilir. Örneğin q fonksiyonu sınırlı veya integrali mevcut ve sınırlı olması durumunda çözümün yakınsak olduğu görülür.

3. SONUÇLAR

Bu çalışmanın literatüre katkıları aşağıdaki şekilde özetlenebilir;

1. Genel olarak $X' = A(z)X$, denklem sisteminde $A(z)$ katsayılar matrisinin analitik olması durumunda, yani;

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z - z_0)^k$$

olmak üzere, $z_0 \in \mathbb{R}$ için,

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(z - z_0)^k$$

şeklinde çözümleri mevcuttur. Ancak bu çözümler z nin pozitif kuvvetlerini içerdiğinden z nin sadece sonlu değerleri için anlamlıdır. Eğer denklem sisteminin $z \rightarrow \infty$ için çözümleri araştırılmak istenirse farklı yaklaşımlar belirlenmelidir.

Bu çalışmada esas olarak $z \rightarrow \infty$ için farklı durumlarda asimptotik çözümler incelenmiştir. Bu amaçla ilk olarak

$$X' = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k} X \quad (1)$$

sistemi için A_0 matrisinin farklı özdeğerlere sahip olması durumunda,

$$X = e^{\lambda z} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k+\mu}$$

şeklinde çözüm araştırılmıştır. Burada λ, μ “uyum sabitleri” ve C_k katsayıları hesaplanmıştır.

2. Asimptotik seri çözümleri kullanılarak yakınsaklık incelenmiştir.

3. Bazı özel ikinci mertebe değişken katsayılı denklemler için asimptotik seri çözümlerinin belirli varsayımlar altında sonlu terim içediği gözlemlenmiştir. (Teorem 2.1, 2.2)
4. A_0 matrisinin farklı özdeğerlere sahip olması durumunda,

$$X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k+r} \right) X$$

denklem sisteminin

$$X = e^{(a_0 z^{r+1} + a_1 z^r + \dots + a_r z)} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k+\mu}$$

şeklinde çözümleri araştırılmıştır. (Teorem 2.3)

özellikle $r=1$ için örnekler incelenmiştir. Problem 2.2 de ele alınan örnekte A_0 katsayılar matrisinin özdeğerleri katlı olmasına rağmen uygun dönüşümler kullanılarak elde edilen yeni sistemdeki A_0^* farklı özdeğerlere sahiptir.

Bu tür asimptotik çözümler fiziksel bazı problemlerde oldukça önemli bir yere sahiptir. Örneğin çözümün $z \rightarrow \infty$ için yakınsak olması istenirse örnek 2.1 de pozitif kuvvetli terimin katsayısı sıfır olarak seçilmelidir. Dolayısıyla çözümün sadece X_1 e bağlı olması durumunda yakınsaktır.

5. (1) deki katsayı matrisinin özel bir parametre içeren durumu, yani;

$$A(z, \mu) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \mu^{-k+1} \right)$$

ele alınarak

$$X' = A(z, \mu)X$$

denklem sisteminin $z \rightarrow \infty$ için asimptotik seri çözümleri incelenmiştir.

Burada A_0 matrisi diagonal formda bir matristir.

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

olması durumunda

$$X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \mu^{-k+1} \right) X$$

sisteminin bir çözümü;

$$X = e^{\mu \int a_1(z) dz} \sum_{k=0}^{\infty} V_k \mu^{-k}$$

olarak araştırılmıştır. (Teorem 2. 4)

İlgili problemler ayrıca verilmiştir.

6. Teorem (2.4) yardımıyla ;

$$y'' + (\lambda - q(z))y = 0$$

denkleminin çözümleri $\lambda \rightarrow \infty$ için ayrıca hesaplanmıştır.

$q(z) = 0$ durumu denklemin çözümüyle uyumludur.

7. Özel olarak ikinci mertebeden

$$y'' - \mu e^z y' - \mu y = 0$$

denkleminin asimptotik seri çözümleri $\mu \rightarrow \infty$ için incelenmiştir.

4. ÖNERİLER

1. (1) deki A_0 matrisinin özdeğerinin katlı olması durumu incelenebilir.
2. Teorem 2.3 deki r değerinin, $r > 1$ olması durumunda özel denklem sistemi incelenebilir.
3. Teorem 2.4 de verilen

$$X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \mu^{-k+1} \right) X$$

sistemi için asimptotik çözümler

$$X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \mu^{-k+r} \right) X$$

sistemine genelleştirilebilir ve çözümlerin yakınsaklığı q fonksiyonuna bağlı olarak araştırılabilir.

4.

$$X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \mu^{-k+1} \right) X$$

denklem sisteminde A_k matrisi diyagonal olmayan duruma genişletilebilir.

5. Yine aynı sistemde A_k matrisinin nilpotent olması durumunda çözümler araştırılabilir.
6. Yukarıdaki sonuçlar kullanılarak $y'' + (\lambda - q)y = 0$ denkleminin asimptotik seri çözümleri farklı q fonksiyonları için bulunabilir.
7. Uygulama olarak belirli q değerleriyle hesaplamalar gerçekleştirilir. Çözümlerin yakınsak olması için q fonksiyonuna bazı hipotezler yüklenebilir.

5. KAYNAKLAR

Cesari, L. (1963). Asymptotik Behaviour and Stability Problems in ordinary Differential Equations: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer.

Coddington, E. A., & Levinson, N. (1955). Theory of ordinary differential equations (Vol. 158). New York: McGraw-Hill.

COŞKUN, H. (2006). Asymptotic approximations of eigenvalues and eigenfunctions for regular Sturm-Liouville problems. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 867-883.

Coşkun, H., & Bayram, N. (2005). Asymptotics of eigenvalues for regular Sturm–Liouville problems with eigenvalue parameter in the boundary condition. Journal of mathematical analysis and applications, 306(2), 548-566.

Eastham, MSP, Theory of Ordinary Differential Equations, Van Nostand Reinhold Company, London, 1970.

Hochstadt, H., Differential Equations: A Modern Approach, Dover Publications Inc., New York, 1963

Martin, W. T., & Reissner, E. (1961). Elementary differential equations. (No Title).

McLachlan, N. W. (1956). Ordinary non-linear differential equations in engineering and physical sciences. University of Illinois, Oxford University Press, Publisher of the University Geoffrey Cumberlege.

Swanson, C. A. (1965). Differential Equations, A Modern Approach, by Harry Hochstadt. Holt, Rinehart, and Winston, Inc., New York, Toronto, London, 1963. viii+ 294 pages. Canadian Mathematical Bulletin, 8(1), 134-134.

Titchmarsh, E. C. (2011). Elgenfunction Expansions Associated With Second Order Differential Equations. Read Books Ltd.

ÖZGEÇMİŞ

Esma ÇEVİK, ilk ve orta öğrenimini Giresun Espiye Güzelyurt Köyü İlkokulu'nda, lise öğrenimini ise Kocaeli Darıca Ülkün Yalçın Anadolu Lisesi'nde tamamladı.

2009-2010 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başladı. 2014 yılında bölümden mezun oldu. 2014-2015 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesinde Pedagojik Formasyon Eğitimini tamamladı.

3 Mart 2016 da ilk görev yeri olan Diyarbakır Lice Ahmet Toprak Çok Programlı Lisesi'ne Matematik Öğretmeni olarak atandı. Daha sonra Trabzon Of Taşhan Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesinde 4 sene çalıştı. Buradan Trabzon Ortahisar Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesine tayin oldu. Halen buradaki görevine devam etmektedir. Evli ve üç çocuk annesidir.