

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN
LAGUERRE KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Gamze YILDIRIM

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2018

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN
LAGUERRE KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Gamze YILDIRIM

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2018

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN
LAGUERRE KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Gamze YILDIRIM
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi
tarafından FYL-2018-3110 nolu proje ile desteklenmiştir.

HAZİRAN 2018

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN
LAGUERRE KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Gamze YILDIRIM
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 08/06/2018 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr. Şuayip YÜZBAŞI (Danışman)

Prof.Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

Doç.Dr. Ramazan KARATAŞ

ÖZET

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN LAGUERRE KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Gamze YILDIRIM

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Haziran 2018, 116 sayfa

Bu tezde, yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemlerini nümerik bir şekilde çözmek için Laguerre polinomlarını temel alan bir kollokasyon yöntemi sunulur. İlk olarak, Laguerre Polinomları ve türevleri matris formunda yazılır. Daha sonra matris bağıntıları ve kollokasyon noktaları aracılığıyla lineer diferansiyel denklem sistemi bir lineer cebirsel denklem sistemine indirgenir. Problemdaki koşullar Laguerre polinomları türünden matris formunda yazılır. Elde edilen cebirsel sistem ile koşulların matris formu kullanılarak yeni bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen yeni cebirsel denklem sistemi çözülerek, diferansiyel denklem sistemi probleminin yaklaşık çözümünün katsayıları belirlenir. Problem için rezidüel hata tahmini tekniği sunulup yaklaşık çözümler iyileştirilir. Sunulan metot ve hata tahmini tekniği, nümerik örnekler ile açıklanır. Önerilen yöntemin sonuçları başka yöntemlerin sonuçları ile karşılaştırılır.

ANAHTAR KELİMELELER: Kollokasyon noktaları, Kollokasyon yöntemi, Laguerre kollokasyon yöntemi, Laguerre polinomları, Lineer diferansiyel denklem sistemleri.

JÜRİ: Doç.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Prof.Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

Doç.Dr. Ramazan KARATAŞ

ABSTRACT

LAGUERRE COLLOCATION METHOD FOR SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Gamze YILDIRIM

MSc Thesis in Mathematics

Supervisor: Doç.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

June 2018, 116 pages

In this thesis, a collocation method based on Laguerre polynomials is presented to numerically solve systems of linear differential equations with variable coefficients of high order. Firstly, the Laguerre polynomials and their derivatives are written in matrix form. Then, the system of linear differential equations is reduced to a system of linear algebraic equations by means of matrix relations and collocation points. The conditions in the problem are written in the form of a matrix of Laguerre polynomials. A new system of linear algebraic equation is obtained by using the obtained algebraic system and the matrix form of the conditions. By solving the system of the obtained new algebraic equation, the coefficients of the approximate solution of the differential equation system problem are determined. For the problem, the residual error estimation technique is offered and approximate solutions are improved. The presented method and error estimation technique are explained by numerical examples. The results of the proposed method are compared with the results of other methods.

KEYWORDS: Collocation method, Collocation points, Laguerre collocation method, Laguerre polynomials, Systems of linear differential equations.

COMMITTEE: Doç.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Prof.Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

Doç.Dr. Ramazan KARATAŞ

ÖNSÖZ

Bu çalışma sırasında yöneticiliğimi üstlenip bilgisini, desteğini, tecrübesini, kıymetli zamanını, sevgi ve saygısını esirgemeyerek bana destek olan, çalışma azmi, anlayışı ve sabrı ile örnek olan değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Şuayip YÜZBAŞI'ya (Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), bugünlerime gelmemde katkısı olan tüm öğretmen ve hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Hayatım boyunca daima yanımda olan, benden sevgilerini ve desteklerini hiç esirgemeyen, her zaman maddi ve manevi desteğini hissettiğim en kıymetlilerim olan sevgili babam Hüseyin Yaşar YILDIRIM'a, annem Ayşe YILDIRIM'a, kardeşlerim Gaye YILDIRIM ve Ahmet YILDIRIM'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Son olarak, tez çalışmam boyunca bana desteği olan kıymetli arkadaşlarıma çok teşekkürler ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
1.1. Amaç ve Kapsam	1
1.2. Tarihi Gelişim	3
1.3. Laguerre Polinomlarıyla İlgili Çalışmalar	6
2. KAYNAK TARAMASI	8
2.1. Önbilgiler	8
2.2. Laguerre Polinomları	10
2.2.1. Laguerre diferansiyel denkleminin seri çözümü	12
2.2.2. Laguerre polinomlarının tümevarımsal tanımı	14
2.2.3. Laguerre polinomlarının üreten fonksiyon özelliği ve ortogonallığı	14
2.3. $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre Polinomları	16
2.3.1. $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarının özellikleri	16
2.3.2. $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarının dikliği	18
2.3.3. $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarının Hermite polinomlarıyla ilişkisi	19
3. MATERYAL VE METOT	21
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	22
4.1. Kollokasyon Noktalarının Tanımlanması	22
4.2. Temel Matris Bağlılıkları	22
4.3. Çözüm Yöntemi	25
4.4. Rezidüel Hata Tahmini ve Çözümlerin İyileştirilmesi	30
4.5. Nümerik Örnekler	32
5. SONUÇLAR	109
6. KAYNAKLAR	110
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN LAGUERRE KOLLOKASYON YÖNTEMİ ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

08/06/2018

Gamze YILDIRIM



SİMGELER VE KISALTMALAR

$a_{i,n}$	: Laguerre polinomunun katsayıları
$\mathbf{A}_j$	: Katsayılar matrisi
$e_{i,N}(x)$	: Gerçek hata fonksiyonu
$e_{i,N,M}(x)$	: Tahmini hata fonksiyonu
$E_{i,N,M}(x)$	: İyileştirilmiş hata fonksiyonu
$\tilde{\mathbf{G}}$	: Sağ taraftaki koşullar kullanılmış yeni arttırılmış matris
$L_n(x)$	: Laguerre polinomları
$L_n^{(\alpha)}(x)$	: Genelleştirilmiş Laguerre polinomları
N	: Kesme sınırı
$P_{i,j}(x)$	: Diferansiyel denklem sisteminin katsayıları
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbf{U}$	: Koşullar için arttırılmış matris
$\mathbf{W}$	: Arttırılmış matris
$\widetilde{\mathbf{W}}$	: Koşullar kullanılmış yeni arttırılmış matris
x_s	: Kollokasyon noktaları
$y_i(x)$	: Tam çözüm
$y_{i,N}(x)$	: Laguerre seri çözümü
$y_{i,N,M}(x)$	: İyileştirilmiş Laguerre seri çözümü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ tam çözümü ve $N = 2, 6, 10$ için yaklaşık çözümleri	51
Şekil 4.2. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ tam çözümü ve $N = 2, 6, 10$ için yaklaşık çözümleri	51
Şekil 4.3. Örnek 4.2'nin çözümlerinin $N = 6$ için diğer yöntemlerle yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	52
Şekil 4.4. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve $N = 5, M = 7, 10$ için iyileştirilmiş yaklaşık çözümleri	53
Şekil 4.5. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve $N = 5, M = 7, 10$ için iyileştirilmiş yaklaşık çözümleri	53
Şekil 4.6. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ çözümü için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları	54
Şekil 4.7. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ çözümü için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları	54
Şekil 4.8. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ çözümü için $N = 3, M = 4, 7$ olduğunda elde edilen iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması	55
Şekil 4.9. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ çözümü için $N = 3, M = 4, 7$ olduğunda elde edilen tahmini mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması	56
Şekil 4.10. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ çözümü için $N = 4, M = 5$ olduğunda elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması	57
Şekil 4.11. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ çözümü için $N = 4, M = 5$ olduğunda elde edilen gerçek ve iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması	57
Şekil 4.12. Örnek 4.3 için $y_1(x)$ tam çözümü ve $N = 2, 5, 10$ için yaklaşık çözümleri	69
Şekil 4.13. Örnek 4.3 için $y_2(x)$ tam çözümü ve $N = 2, 5, 10$ için yaklaşık çözümleri	69
Şekil 4.14. Örnek 4.3'ün $y_1(x)$ çözümü için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları	70
Şekil 4.15. Örnek 4.3'ün $y_2(x)$ çözümü için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları	70

Şekil 4.16. Örnek 4.3'ün $y_1(x)$ çözümü için $N = 4$ ve $M = 5, 8$ olduğunda elde edilen iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması	71
Şekil 4.17. Örnek 4.3'ün $y_2(x)$ çözümü için $N = 4$ ve $M = 5, 8$ olduğunda elde edilen tahmini mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması	72
Şekil 4.18. Örnek 4.3'ün $y_1(x)$ çözümü için $N = 5$ ve $M = 6$ olduğunda elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması	73
Şekil 4.19. Örnek 4.3'ün $y_2(x)$ çözümü için $N = 5$ ve $M = 6$ olduğunda elde edilen gerçek ve iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması . . .	73
Şekil 4.20. Örnek 4.4 için $y_1(x)$ tam çözümü ve $N = 3, 5, 7$ için yaklaşık çözümleri	87
Şekil 4.21. Örnek 4.4 için $y_2(x)$ tam çözümü ve $N = 3, 5, 7$ için yaklaşık çözümleri	87
Şekil 4.22. Örnek 4.4 için $y_3(x)$ tam çözümü ve $N = 3, 5, 7$ için yaklaşık çözümleri	88
Şekil 4.23. Örnek 4.4 için $e_{1,N}(x)$ gerçek hatasının çeşitli N değerleri için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları	88
Şekil 4.24. Örnek 4.4 için $e_{2,N}(x)$ gerçek hatasının çeşitli N değerleri için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları	89
Şekil 4.25. Örnek 4.4 için $e_{3,N}(x)$ gerçek hatasının çeşitli N değerleri için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları	89
Şekil 4.26. Örnek 4.4'ün $y_2(x)$ çözümü için $N = 4$ ve $M = 5, 6$ olarak alındığında elde edilen iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması .	90
Şekil 4.27. Örnek 4.4'ün $y_3(x)$ çözümü için $N = 4$ ve $M = 5, 6$ olarak alındığında elde edilen tahmini mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması . . .	91
Şekil 4.28. Örnek 4.4'ün $y_1(x)$ çözümü için $N = 5$ ve $M = 6$ olarak alındığında elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması	92
Şekil 4.29. Örnek 4.4'ün $y_1(x)$ çözümü için $N = 5$ ve $M = 6$ olarak alındığında elde edilen gerçek ve iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması	92
Şekil 4.30. Örnek 4.5'te $y_1(x)$ tam çözümü ve $N = 3, 5, 10$ için yaklaşık çözümleri	103

Şekil 4.31. Örnek 4.5'te $y_2(x)$ tam çözümü ve $N = 3, 5, 10$ için yaklaşık çö- zümleri	103
Şekil 4.32. Örnek 4.5'te $y_3(x)$ tam çözümü ve $N = 3, 5, 10$ için yaklaşık çö- zümleri	104
Şekil 4.33. Örnek 4.5'in $y_1(x)$ çözümü için $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ olarak alındı- ğında elde edilen gerçek mutlak hatalarının karşılaştırılması	104
Şekil 4.34. Örnek 4.5'in $y_2(x)$ çözümü için $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ olarak alındı- ğında elde edilenn gerçek mutlak hatalarının karşılaştırılması	105
Şekil 4.35. Örnek 4.5'in $y_3(x)$ çözümü için $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ olarak alındı- ğında elde edilen gerçek mutlak hatalarının karşılaştırılması	105
Şekil 4.36. Örnek 4.5'in $y_1(x)$ çözümü için $N = 4, M = 5, 9$ olarak alındı- ğında elde edilen iyileştirilmiş mutlak hatalarının karşılaştırılması	106
Şekil 4.37. Örnek 4.5'in $y_3(x)$ çözümü için $N = 4, M = 5, 8$ olarak alındı- ğında elde edilen tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	107
Şekil 4.38. Örnek 4.5'in $y_3(x)$ çözümü için $N = 4, M = 5$ olarak alındığında elde edilen gerçek ve iyileştirilmiş mutlak hatalarının karşılaştırılması	108
Şekil 4.39. Örnek 4.5'in $y_1(x)$ çözümü için $N = 4, M = 5$ olarak alındığında elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması	108

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. İlk 8 Laguerre polinomu	11
Çizelge 2.2. Laguerre polinomlarının başka bir gösterimi	12
Çizelge 4.3. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ tam çözümü, $N = 2$ ve $N = 6$ için yaklaşık çözümü ve gerçek mutlak hatası	44
Çizelge 4.4. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ tam çözümü, $N = 2$ ve $N = 6$ için yaklaşık çözümü ve gerçek mutlak hatası	45
Çizelge 4.5. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ tam çözümünün $N = 6$ için diğer yöntem- lerle yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	46
Çizelge 4.6. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ tam çözümünün $N = 6$ için diğer yöntem- lerle yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	46
Çizelge 4.7. Örnek 4.2 için $N = 6, 10$ olarak alındığında $e_{1,N}(x)$ gerçek hata- larının diğer yöntemlerle karşılaştırılması ve $N = 12$ için Laguerre kollokasyon yöntemi	47
Çizelge 4.8. Örnek 4.2 için $N = 6, 10$ olarak alındığında $e_{2,N}(x)$ gerçek hata- larının diğer yöntemlerle karşılaştırılması ve $N = 12$ için Laguerre kollokasyon yöntemi	48
Çizelge 4.9. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ çözümü için $N = 3, 5, 8$ ve $M = 4, 5, 6, 7, 9,$ 10 olarak alındığında gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hatalarının karşı- laştırılması	49
Çizelge 4.10. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ çözümü için $N = 3, 5, 8$ ve $M = 4, 5, 6, 7, 9,$ 10 olarak alındığında gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hatalarının karşı- laştırılması	50
Çizelge 4.11. Örnek 4.3'ün $y_1(x)$ tam çözümü, $N = 2$ ve $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve gerçek mutlak hatası	64
Çizelge 4.12. Örnek 4.3'ün $y_2(x)$ tam çözümü, $N = 2$ ve $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve gerçek mutlak hatası	65
Çizelge 4.13. Örnek 4.3 için $e_{1,N}(x)$ gerçek hatasının $N = 5$ olarak alındı- ğında diğer yöntemlerle karşılaştırılması	66
Çizelge 4.14. Örnek 4.3 için $e_{2,N}(x)$ gerçek hatasının $N = 5$ olarak alındı- ğında diğer yöntemlerle karşılaştırılması	66

Çizelge 4.15. Örnek 4.3'ün $y_1(x)$ çözümü için $N = 3, 5, 7$ ve $M = 4, 5, 6, 7, 8$ olarak alındığında elde edilen gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hatalarının karşılaştırılması	67
Çizelge 4.16. Örnek 4.3'ün $y_2(x)$ çözümü için $N = 3, 5, 7$ ve $M = 4, 5, 6, 7, 8$ olarak alındığında elde edilen gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hatalarının karşılaştırılması	68
Çizelge 4.17. Örnek 4.4'ün $y_1(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve gerçek mutlak hatası	81
Çizelge 4.18. Örnek 4.4'ün $y_2(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve gerçek mutlak hatası	82
Çizelge 4.19. Örnek 4.4'ün $y_3(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve gerçek mutlak hatası	82
Çizelge 4.20. Örnek 4.4 için $N = 5$ olarak alındığında elde edilen gerçek mutlak hataların Bessel yöntemiyle karşılaştırılması	83
Çizelge 4.21. Örnek 4.4'ün $y_1(x)$ çözümü için $N = 4, 5$ ve $M = 5, 6, 7$ olarak alındığında elde edilen gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hatalar	84
Çizelge 4.22. Örnek 4.4'ün $y_2(x)$ çözümü için $N = 4, 5$ ve $M = 5, 6, 7$ olarak alındığında elde edilen gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hatalar	85
Çizelge 4.23. Örnek 4.4'ün $y_3(x)$ çözümü için $N = 4, 5$ ve $M = 5, 6, 7$ olarak alındığında elde edilen gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hatalar	86
Çizelge 4.24. Örnek 4.5'in $y_1(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve mutlak hatası	100
Çizelge 4.25. Örnek 4.5'in $y_2(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve mutlak hatası	100
Çizelge 4.26. Örnek 4.5'in $y_3(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve mutlak hatası	101
Çizelge 4.27. Örnek 4.5'te $N = 6$ için elde edilen gerçek mutlak hataların DDM ile karşılaştırılması	101
Çizelge 4.28. Örnek 4.5'te $y_1(x)$, $y_2(x)$ ve $y_3(x)$ için $N = 5$ ve $M = 7$ olduğunda elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hataların karşılaştırılması	102

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Diferansiyel denklemler ve diferansiyel denklem sistemleri matematik, fizik ve dinamik gibi bilim ve elektrik, hidrolik ve mekanik gibi mühendisliğin birçok alanının önemli bir parçasıdır. Bu denklemlerin veya denklem sistemlerinin tam çözümlerinin hesaplanması bazen mümkün değildir, bu durumlarda denklemlerin veya denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri bizim için önemli bir rol oynar. Yaklaşık çözümlerin hesaplanması için çeşitli metotlar kullanılabilmektedir. Bugüne kadar, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için Runge-Kutta yöntemi (Runge 1895; Kutta 1901), Newmark-Beta yöntemi (Newmark 1959), Lax-Wendroff yöntemi (Lax 1960), Euler yöntemi (Atkinson 1989), Adomian ayrıştırma yöntemi (Adomian 1988), varyasyonel iterasyon yöntemi (He 1999), homotopi pertürbasyon yöntemi (He 1999), Taylor sıralama yöntemi (Wang 2014), Bernstein sıralama yöntemi (Akyüz-Daşcıoğlu vd. 2014), geliştirilmiş rasyonel Chebyshev kollokasyon yöntemi (Ramadan vd. 2014) ve Lucas sıralama yöntemi (Çetin vd. 2015) gibi birçok yöntem vardır. Bu yöntemler dışında literatürde birçok metot mevcuttur. Fakat tüm bu metotları uygularken de bilgisayar programlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Çünkü; denklemlerin veya denklem sistemlerinin çözümlerini daha kısa sürede elde etmek isteriz ve elde edilen sonuçların güvenilirliğinin artırılmasını amaçlarız. Kullanılan bilgisayar programlarına örnek olarak da Matlab, Mathematica, Maple, C++ ve Wolfram'ı verebiliriz.

Ayrıca, lineer Fredholm integral denklem sistemlerinin nümerik çözümleri için rasyonelleştirilmiş Haar fonksiyonları yöntemi (Maleknejad ve Mirzaee 2003), lineer integro-diferansiyel denklem sistemleri için rasyonelleştirilmiş Haar fonksiyonları yöntemi (Maleknejad vd. 2004), Fredholm integro-diferansiyel denklem sistemlerinin nümerik çözümleri için Tau yöntemi (Pour-Mahmoud vd. 2005), lineer Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklem sistemlerinin Chebyshev polinom yöntemi (Akyüz-Daşcıoğlu ve Sezer 2005), lineer Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri için Taylor kollokasyon yöntemi (Gülsu ve Sezer 2006), integro diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri için He'nin homotopi pertürbasyon yöntemi (Yusufoğlu 2007), in-

tegral ve integro-diferansiyel denklem sistemleri için diferansiyel dönüşüm metodu (Ari-koglu ve Ozkol 2008), lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemler için Taylor polinom yöntemi (Kurt ve Sezer 2008), integro-diferansiyel denklem sistemleri için varyasyonel iterasyon yöntemi (Saber-Nadjafi ve Tamamgar 2008), lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemlerinin Legendre polinom çözümleri (Yalçınbaş vd. 2009), lineer Fredholm integral denklem sistemleri için Modifiye homotopi pertürbasyon yöntemi (Javidi 2009), lineer Volterra integral denklem sistemlerinin Taylor polinomlarıyla nümerik çözümleri (Sorkun ve Yalçınbaş 2010), Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin Chebyshev polinom çözümleri (Yüksel vd. 2012), Fredholm integro-diferansiyel denklem sistemleri için modifiye ayrıştırma metodu (Zarali ve Rabbani 2012) ve karışık lineer integro-diferansiyel fark denklemlerine Taylor yaklaşım yöntemi (Aslan vd. 2015) üzerine çalışmalar da mevcuttur.

Bu çalışmada kullanılacak olan, lineer diferansiyel denklem sistemlerinin nümerik çözümleri ile ilgili; Chebyshev polinom çözümleri (Akyüz-Daşcıoğlu ve Sezer 2003), Adomian ayrışma yöntemi (Biazar vd. 2004), Taylor polinom çözümleri (Sezer vd. 2005), diferansiyel dönüşüm metodu (Abdel ve Hassan 2008), He'nin varyasyonel iterasyon yönteminin iyileştirilmesi (Tatari ve Dehghan 2009), diferansiyel dönüşüm yöntemi ve Laplace dönüşüm yöntemi (Thongmoon ve Pusjuso 2009), Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı vd. 2011) ve üstel Chebyshev kollokasyon yöntemi (Ramadan ve Abd El Salam 2016) üzerine çalışılmıştır.

Bunlara ek olarak, adi ve rasyonel diferansiyel denklem sistemleri için Revize Adomian ayrışma yöntemi (Jafari ve Daftardar-Gejji 2006), rasyonel diferansiyel denklem sistemleri için Homotopi analiz yöntemi (Zurigat vd. 2010), multi-pantograph denklem sistemleri için Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı 2012), diferansiyel-fark denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri için Taylor kollokasyon yöntemi (Gökmen 2014) ve lineer integral denklem sistemlerinin block-pulse fonksiyonlarının iyileştirilmesiyle nümerik çözümü (Mirzaee 2016) gibi denklem sistemleri için literatürde daha birçok çalışma vardır.

İlaveten, Laguerre kollokasyon yöntemi ile lineer olmayan Lane-Emden diferansiyel

denklemler (Parand ve Taghavi 2008), kararsız gaz denklemleri (Parand vd. 2009), diferansiyel denklemler (Sarı 2009), diferansiyel-cebirsal denklemler (Akçay 2010), lineer gecikmeli fark denklemleri (Gülsu vd. 2011), rasyonel diferansiyel denklemler (Khader vd. 2012), lineer integro-diferansiyel fark denklemleri (Gürbüz 2012), başlangıç sınır-değer problemleri (Tatari ve Haghighi 2014), germe yüzeyine bağlı akış ve ısı transferi (Khader 2014), Lane-Emden tipi fonksiyonel diferansiyel denklemler (Gürbüz ve Sezer 2014), pantograph tipi Volterra integro-diferansiyel denklemler (Yüzbaşı 2014) ve dik-dörtgensel bölgede lineer kompleks diferansiyel denklemler (Vural 2017) çözülmüştür. Biz de bu tezde lineer diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için Laguerre kollokasyon yöntemini uygulayacağız.

1.2. Tarihi Gelişim

Edmond Nicolas Laguerre, 9 Nisan 1834'te Fransa'nın Bar-le-Duc kentinde dünyaya gelmiştir. Edmond Laguerre çocukken sağlık sorunları yaşamış ve bu onun çalışmalarına engel teşkil etmiştir. Bu sağlık problemlerinden dolayı, ailesi onu bir devlet okulundan diğerine nakletmek zorunda kalmışlardır. Fakat Laguerre 1852'de Paris'te bulunan Fransa'nın en iyi üniversitesi ve askeri okulu olan *École Polytechnique*'ye girebilmiştir ama her gün yorgunluktan muzdarip olmuştur.

Laguerre modern diller ve matematikte yetenek gösterebilmesine rağmen sınıfında sadece 46. sıradaydı. Fakat bu hiçbir şekilde onun yeteneğini yansıtmamaktaydı, aksine sağlık sorunlarından çok kötü bir şekilde etkilendiğinin göstergesiydi. Zaten yetenekli bir matematikçi olduğunun bir göstergesi, bu süre içinde ilk eserini yayımlamasıyla verilir. *On the theory of foci* 1853'te ortaya çıktı ve bu karmaşık izdüşümsel çizgiler arasındaki açıyı araştıran en önemli çalışmalarından biridir. Laguerre 1854'te *École Polytechnique*'den mezun oldu ve askeri bir kariyer kararı aldı.

1854 ile 1864 yılları arasında Strasbourg yakınlarındaki Mutzig'de silah üretimi için çalışan bir topçu subayı olarak görevlendirildi. Fakat bu dönemde matematik çalışmalarına devam etti ve 1864 yılında komisyonundan istifa ettikten sonra *École Polytechnique*'ye öğretmen olarak geri döndü. Hayatının geri kalanında orada kaldı ama 1874'ten sonra *École*'de araştırmacıydı. Çalışmalarının büyük bir hayranı olan Bertrand, Bilimler

Akademisi seçimlerinde onu destekledi ve aynı zamanda ek bir göreve atanmasını da destekledi. Yani; Collège de France'deki matematiksel fizik profesörü olmasını da destekledi. Bu göreve 1883'te atandı ama her zaman kötü olan sağlığı, Şubat 1886'da tamamen kötü bir hal aldı. Bunun üzerine Bar-le-Duc'a geri döndü ve altı ay sonra da öldü.

Laguerre yaklaşım metodları üzerine çalıştı ve en çok Laguerre diferansiyel denklemlerinin çözümü olan özel fonksiyonlu Laguerre polinomlarıyla anılır. Bu çalışma denklem (1.1)'deki integralin x 'ten ∞ 'a kadar olduğu yerleri araştıran 1879'da yayımlanan çalışmasıyla ortaya çıkmıştır.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \quad (1.1)$$

İlk birkaç terimi integral için iyi bir yaklaşım sağlayan ıraksak bir seri buldu. Ayrıca bileşenleri Laguerre polinomlarını gerektiren yakınsak olan integral için gerekli sürekli kesir genişliğini de buldu. Dikeylik ilişkilerini kanıtladı ve keyfi bir fonksiyonun Laguerre polinomlarında bir "Fourier type" serisinde genişletilebileceğini göstererek polinomların özelliklerini araştırmaya devam etti.

Bernkopf şöyle düşünür;

Laguerre'nin bu incelemesi sadece Laguerre denklemlerinin ve polinomlarının ve onların özelliklerinin keşfinden dolayı değil, aynı zamanda yakınsak olduğu bilinen en eski sonsuz kesirlerden birini içerdiği için de önemlidir. İraksak bir seri ile geliştirilmiş olması özellikle dikkat çekicidir.

Matematikten başka, Laguerre'nin hayatında büyük rol oynayan sadece ailesiydi. Evli ve iki kızı vardı. Zamanının ve enerjisinin çoğunu bu iki kızının eğitime adadı.

Bernkopf şöyle der;

Laguerre, çağdaşları tarafından araştırmasına, öğretimine ve iki kızının eğitime tutkuyla bağlı olan sessiz, nazik bir adam olarak görülürdü.

En önemli çalışması analiz ve geometri alanlarında idi. Geometrideki çalışmaları o dö-

nemde önemliydi ama Cayley'in çalışması ve Klein'in çalışması olan "Lie grup teorisi" tarafından geride bırakılmıştı. Laguerre, o dönemin önde gelen dergilerinde yayınladığı 140 inceleme yazdı; bu nedenle niye sadece özellikle yukarıda belirtilen sonuçlarla tanındığını sormak mantıklıdır.

Bernkopf bu soruyu şöyle inceler;

O halde Laguerre'nin çalışmasını değerlendirmek için ne söylenebilir? Zeki ve yenilikçi olduğu kuşkusuz. Aslında 22 yıldan daha kısa olan çalışma hayatında birçok birinci sınıf eserler üretti. O halde neden onun adı çok az biliniyor ve eserleri çok nadir alıntı yapılır? Çünkü Laguerre o kadar zekiydi ki sadece detaylar üzerine çalıştı, önemli detaylar ama yine de detaylar. Bir kere bile çeşitli parçaları bir araya getirmek ve onları tek bir teoriye koymak için geri adım atmadı. Sonuç, eserleri çoğunlukla başkaları tarafından keşfedilen daha genel teorilerin birkaç ilginç özel durumları olarak ortaya çıkmış olmasıdır.

Oldukça sert olarak düşünülen bu değerlendirmeye rağmen, Laguerre'nin çalışmasına hala ilgi vardır ve aşağıda tartışılan örnek olarak görülebilir.

Darboux ve Laguerre tarafından verilen eliptik fonksiyonların ek teoreminin geometrik olarak kanıtlanmasıyla 1867'de eliptik fonksiyonlar ve kartezyen ovaler arasındaki derin ilişkiler de kuruldu. Darboux homofocal ovalerin sistemlerinin ortogonalliğini kanıtladığında, ovalerin ek teoremin geometrik bir yorumunu sağladığını ve integral çözümünün cebirsel formunu oluşturduğunu da göstermiştir. Öte yandan Laguerre, iki koninin içine ve dışına poligonlar yerleştirmesi hakkındaki Poncelet'in teoremini kullanarak anallagmatik eğrilerin yardımıyla ek teorisini kanıtladı.

Laguerre'nin bütün çalışmaları iki cilt halinde yayımlandı. İlk cilt 1898'de ve ikinci cilt 1905'te olmak üzere Hermite, Poincare ve Rouche her iki bölümü de yayınladı. Bunlar, yaklaşık yüzyıl sonra 1972'de yeniden basılması için ilginç olduğu düşünüldü. 1986'da Laguerre'nin ilk olarak 1885'te yayınladığı *Recherches sur la géométrie de direction*'un yeni baskısı *Research on the geometry of direction* ortaya çıktı. Tekrardan yeni baskı üretilmesi onun sonuçlarına hala büyük bir ilginin olduğunu gösteriyor.

Laguerre'nin altı makalesini içeren çalışma orijinal olarak *Nouvelles Annales de Mathématiques*'de basılmıştır. *Sur le règle des signes en géométrie* (1870); *Transformations par sémi-droites réciproques* (1882); *Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles* (1883); *Sur quelques propriétés des cycles* (1883); *Sur les courbures de direction de la troisième classe* (1883) ve *Sur les anticaustiques par réfraction de la parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe* (1885).

Biyografiyi Bonnet'in Laguerre için yaptığı değerlendirmesini alıntılararak bitirelim:

O çağımızın en keskin zekalı geometricilerinden biriydi. Geometrideki buluşları onu Chasles ve Poncelet'i takip edenler arasında ilk sıraya koydu (<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laguerre.html>).

1.3. Laguerre Polinomlarıyla İlgili Çalışmalar

Ortogonal polinomlar veya özel fonksiyonların çarpımını içeren integraller analizin, fiziğin ve mekaniğin çeşitli alanlarında kullanılan önemli bir materyaldir. Bu materyallerin matematiksel modelleri diferansiyel ya da integro-diferansiyel gibi denklemlerin veya denklem sistemlerinin çözümü için kullanılmaktadır. Laguerre polinomları da Hilbert uzayında tanımlanan ortogonal polinomlardır ve $[0, \infty)$ aralığındaki yaklaşımlarda kullanılır. Örneğin, 2, 3 veya N-boyutlu harmonik salınımla birlikte hidrojenin dalga fonksiyonları genelleştirilmiş Laguerre polinomlarını içerir. Bahsedilen tip denklemler elemanter metodlarla çözülebilir; fakat çoğu zaman tam çözümü bulmak zor olduğu için seri çözümlerine başvurulur. İşte bunlardan biri de Laguerre diferansiyel denklemlerinin veya denklem sistemlerinin çözümleri olan Laguerre polinomlarına dayalı serileridir.

Çoğu fiziksel problemler ve bunların fen ve mühendislik alanlarındaki uygulamaları sınırsız aralıklarda tanımlanan adi-kısmi diferansiyel ve integro-diferansiyel denklemleri içerir. Fakat, kıyı dalgalarının yayılımındaki gibi, kıyı hidrodinamiğinde daha çok görülür. Benzer tipteki problemler, meteorolojide de karşımıza çıkar. Sayısal çözüm yaklaşımı ve özellikle sonsuzda koşulların davranışı için kullanılan teknikler arasında spektral yöntemler bulunmaktadır. Spektral yöntemler bir azalan üstel ile çarpılan Laguerre fonksiyonları

veya polinomlarının açılımlarından kaynaklanır.

Laguerre polinomlarının düzensiz ışık değişimleri ve kuantum teorisinde önemi büyüktür. Özellikle karmaşık bir yapıya sahip kuantum teorisini formüle etmede, 2-boyutlu Hermit ve Laguerre polinomları uygun bir araçtır. Hermit polinomlar ailesi ile Laguerre polinomlarının birleştirilmesi derin bir matematik bilgisiyle birlikte faydalı olabilir. Datoli (2004) Laguerre ve tam olmayan Hermite polinomları arasındaki bu ilişkiyi incelemek için operasyonel bir metot ortaya koymuştur. Bu metot, klasik ve kuantum optik gibi araştırma alanlarında çok güçlü bir araştırma yöntemi olarak kullanılmaktadır. Laguerre polinomları kuantum mekaniğinde tek-elektronlu atomun (Hidrojen atomu) Schrödinger denkleminin radyal kısmının çözümlemesinde görülür.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Önbilgiler

Tanım 2.1. Bir bağımsız değişken ile bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini ifade eden denkleme adi diferansiyel denklem denilir. Bir bağımlı değişkenli diferansiyel denklem genel olarak

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

biçiminde gösterilir. Burada $y^{(n)}$, y 'nin x 'e göre n 'inci türevini temsil eder. (2.1) açık formda

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

şeklinde ifade edilir (Poole 1936).

Tanım 2.2. $a_i, b \in \mathbb{R}$ ve x_i 'ler de değişken olmak üzere ($i = 1, 2, \dots, n$),

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

biçimindeki bir ifadeye lineer denklem adı verilir (R. Boelkins 2009).

Tanım 2.3. $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ ve x_j bilinmeyenler olmak üzere ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.2)$$

biçimindeki bir ifadeye lineer denklem sistemi denir (R. Boelkins 2009).

Tanım 2.4. (2.2) lineer denklem sisteminin matris gösterimi $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ biçimindedir. Burada,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$[\mathbf{A} : \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & ; & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & ; & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & ; & b_m \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

(2.3)'e, sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi denir (Goode 2000).

Tanım 2.5. Bir lineer denklem sisteminde, sistemin genişletilmiş katsayılar matrisinde yapılan elementer satır ve sütun işlemleri sistemin çözümünü değiştirmeyeceğinden, $[\mathbf{A} : \mathbf{B}]$ genişletilmiş katsayılar matrisi indirgenmiş eşelon forma getirilerek çözümler bulunabilir. Bu yöntemle sistemi çözmeye Gauss-Jordan yok etme metodu denir (Goode 2000).

Tanım 2.6. $\mathbf{A}$, $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $|\mathbf{A}| \neq 0$ olduğunda $\mathbf{A}$ matrisine (tersi mevcut ise) non-singüler (regüler) matris, $|\mathbf{A}| = 0$ olduğu zaman da $\mathbf{A}$ matrisine (tersi mevcut olmayan) singüler (regüler olmayan) matris adı verilir.

Eğer, her $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ için, $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ lineer denklem sistemi tek bir çözüme sahipse, $\mathbf{A}$ tersinirdir. Bu çözüm de

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

ile gösterilir (R. Boelkins 2009).

Tanım 2.7. (2.2) lineer denklem sisteminin çözümü için; Δ , $\mathbf{A}$ matrisinin determinanı olmak üzere,

$$\Delta \mathbf{x}_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta \mathbf{x}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{x}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

determinantları hesaplanıp tek çözüm olan,

$$x_1 = \frac{\Delta \mathbf{x}_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta \mathbf{x}_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta \mathbf{x}_n}{\Delta}$$

değerleri elde edilir. $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ lineer denklem sistemini çözmek için uygulanan bu kurala Cramer Kuralı adı verilir (Goode 2000).

2.2. Laguerre Polinomları

Fen ve mühendislik problemlerinde matematiksel bir model olarak çok sık karşılaşılan

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad (2.4)$$

şeklindeki ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem Laguerre diferansiyel denklemi olarak adlandırılır. Sadece n negatif olmayan tamsayı olduğunda bu denklem tekil olmayan çözümlere sahiptir. Bu denklemi sağlayan polinom fonksiyonlara Laguerre polinomu denir ve $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere (2.5) ile gösterilir.

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{n!}{(r!)^2(n-r)!} x^r \quad (2.5)$$

Laguerre polinomları için bir başka gösterim Rodrigues formülü ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

Ayrıca, negatif indeks polinomları, pozitif indeks olanlar kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir (http://www.popflock.com/learn?s=Laguerre_polynomials).

$$L_{-n}(x) = e^x L_{n-1}(-x)$$

$L_n(x)$ Laguerre polinomlarını (2.5)'ten yararlanarak aşağıdaki çizelgedeki gibi gösterebiliriz.

Çizelge 2.1. İlk 8 Laguerre polinomu

n	$L_n(x)$
0	1
1	$-x + 1$
2	$\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$
3	$\frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$
4	$\frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$
5	$\frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120)$
6	$\frac{1}{720}(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720)$
7	$\frac{1}{5040}(-x^7 + 49x^6 - 882x^5 + 7350x^4 - 29400x^3 + 52920x^2 - 35280x + 5040)$
8	$\frac{1}{40320}(x^8 - 64x^7 + 1568x^6 - 18816x^5 + 117600x^4 - 376320x^3 + 564480x^2 - 322560x + 40320)$

$L_n(x)$ Laguerre polinomlarını (2.6)'dan yararlanarak aşağıdaki çizelgedeki gibi de gösterebiliriz.

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{n-i} L_i(x) \quad (2.6)$$

Çizelge 2.2. Laguerre polinomlarının başka bir gösterimi

1	$L_0(x)$
x	$L_0(x) - L_1(x)$
x^2	$2L_0(x) - 4L_1(x) + 2L_2(x)$
x^3	$6L_0(x) - 18L_1(x) + 18L_2(x) - 6L_3(x)$
x^4	$24L_0(x) - 96L_1(x) + 144L_2(x) - 93L_3(x) + 24L_4(x) - 120L_5(x)$
x^5	$120L_0(x) - 600L_1(x) + 1200L_2(x) - 1200L_3(x) + 600L_4(x) - 120L_5(x)$
x^6	$720L_0(x) - 4320L_1(x) + 10800L_2(x) - 14400L_3(x) + 10800L_4(x) - 4320L_5(x) + 720L_6(x)$
x^7	$5040L_0(x) - 35280L_1(x) + 105840L_2(x) - 176400L_3(x) + 176400L_4(x) - 105840L_5(x) + 35280L_6(x) - 5040L_7(x)$
x^8	$40320L_0(x) - 322560L_1(x) + 1128960L_2(x) - 2257920L_3(x) + 2822400L_4(x) - 2257920L_5(x) + 1128960L_6(x) - 322560L_7(x) + 40320L_8(x)$

2.2.1. Laguerre diferansiyel denkleminin seri çözümü

(2.4) Laguerre diferansiyel denkleminde $x = 0$ noktası, denklemin bir düzgün tekil noktası olduğundan Frobenius tekniği uygulanabilir ve Frobenius serisi olarak

$$y = x^s \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+s}$$

biçiminde bir çözümü elde edilebilir. Yöntem için y' ve y'' türevleri

$$y' = \sum_{r=0}^{\infty} (r+s) a_r x^{r+s-1}$$

ve

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} (r+s)(r+s-1) a_r x^{r+s-2}$$

olarak bulunur ve (2.4) Laguerre denkleminde y ve türevleri yerine koyulduğunda,

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{\infty} (r+s)(r+s-1) a_r x^{r+s-1} + \sum_{r=0}^{\infty} (r+s) a_r x^{r+s-1} \\ & + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)(r+s) a_r x^{r+s} + \sum_{r=0}^{\infty} n a_r x^{r+s} = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Denk olarak

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left[(r+s)(r+s-1) + (r+s) \right] a_r x^{r+s-1} + \sum_{r=0}^{\infty} (n-r-s) a_r x^{r+s} = 0$$

yazabiliriz. Düzenlersek,

$$\sum_{r=0}^{\infty} (r+s)^2 a_r x^{r+s-1} + \sum_{r=0}^{\infty} (n-r-s) a_r x^{r+s} = 0$$

buluruz. İkinci seride r yerine $r-1$ yazarsak,

$$\sum_{r=0}^{\infty} (r+s)^2 a_r x^{r+s-1} + \sum_{r=1}^{\infty} (n-r-s+1) a_{r-1} x^{r+s-1} = 0$$

buluruz ve düzenlersek

$$s^2 a_0 x^{s-1} + \sum_{r=1}^{\infty} \left[(r+s)^2 a_r + (n-r-s+1) a_{r-1} \right] x^{r+s-1} = 0 \quad (2.7)$$

elde ederiz. (2.7)'de $a_0 \neq 0$ olduğu için

$$s^2 = 0 \text{ ve } (r+s)^2 a_r + (n-r-s+1) a_{r-1} = 0, \quad r \geq 1$$

buluruz. Böylece, $s = 0$ olduğu için katsayılar arasında

$$a_r = -\frac{n-r+1}{r^2} a_{r-1}, \quad r \geq 1$$

rekürans (tekrarlama) bağıntısı bulunur. $r = 1, 2, 3, \dots$ için tekrarlama bağıntısından

$$a_1 = -\frac{n}{1^2} a_0, \quad (a_0 \text{ keyfi sabit})$$

$$a_2 = -\frac{n-1}{2^2} a_1 = \frac{n(n-1)}{1^2 2^2} a_0$$

$$\vdots$$

$$a_r = (-1)^r \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{(r!)^2} a_0$$

(2.8)

(2.8)'deki katsayılar $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere a_0 keyfi sabitine bağlı olarak elde edilir. Buradan Laguerre denkleminin bir çözümü ($s=0$ için)

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \dots \\ &= a_0 \left(1 - \frac{n}{(1!)^2} x + \frac{n(n-1)}{(2!)^2} x^2 + \dots + (-1)^r \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{(r!)^2} x^r + \dots \right) \end{aligned}$$

biçimindedir. Böylece $y(x)$ seri çözümü, verilen bir $n \in \mathbb{N}$ değeri için, n . mertebeden bir polinom olur. Bu polinom n . mertebeden Laguerre polinomu olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibidir (Bell 1967).

$$\sum_{r=0}^n L_n(x) = (-1)^r \frac{n!}{(r!)^2 (n-r)!} x^r$$

2.2.2. Laguerre polinomlarının tümevarımsal tanımı

Laguerre polinomlarının tanımını tümevarımsal olarak da yapabiliriz, tanımdaki ilk iki polinom:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x$$

biçimindedir ve her $k \geq 1$ için, aşağıdaki yineleme ilişkisini kullanabiliriz

(http://www.popflock.com/learn?s=Laguerre_polynomials).

$$L_{k+1}(x) = \frac{(2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x)}{k+1}$$

2.2.3. Laguerre polinomlarının üreten fonksiyon özelliği ve ortogonalliği

Laguerre polinomlarının üreten fonksiyon özelliği aşağıdaki gibidir (Bell 1967):

$$\frac{e^{\frac{-xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

Teorem 2.8. $L_n(x)$ Laguerre polinomları, $I = [0, \infty)$ aralığında $\omega(x) = e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir sistem oluşturur. Yani

$$(L_m, L_n) = \int_0^\infty e^{-x} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

ortogonalite özelliği sağlanmaktadır.

İspat Laguerre polinomlarının birbirine dik fonksiyonlar olduğunu ispatlayabilmek için,

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx \quad (2.9)$$

(2.9) integralinin $m \neq n$ için 0'a eşit olduğunu göstermemiz gerekir. Bu amaçla, (2.9)

integralini hesaplamak için önce Laguerre polinomlarının üreten fonksiyon özelliğini kullanarak;

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n \quad (2.10)$$

ve

$$\frac{e^{-\frac{xs}{1-s}}}{1-s} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x) s^m \quad (2.11)$$

yazabiliriz. (2.10) ve (2.11)'i ilk olarak birbirleriyle ve daha sonra da e^{-x} ile çarparak,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) t^n s^m = e^{-x} \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} \frac{e^{-\frac{xs}{1-s}}}{1-s} \quad (2.12)$$

buluruz. (2.12)'de sağ ve sol tarafın x 'e göre integralini aldığımızda,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx \right] t^n s^m = \int_0^\infty e^{-x} \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} \frac{e^{-\frac{xs}{1-s}}}{1-s} dx$$

buluruz. Bu integrali de

$$I = \frac{1}{(1-t)(1-s)} \int_0^\infty e^{-x \left(1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}\right)} dx$$

biçiminde yazarak kolayca alabiliriz ve

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x \left(1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}\right)} dx \\
&= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{-e^{-x \left(1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}\right)}}{1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}} \right]_0^n \\
&= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \left[\frac{1}{1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}} \right] \\
&= \frac{1}{1-st} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n s^n
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece Laguerre polinomlarının diklik ilişkisini,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{nm} \quad , \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \text{ ise} \\ 1, & n = m \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde buluruz. Sonuç olarak, Laguerre polinomlarının ağırlık fonksiyonu e^{-x} 'e göre dik olduğunu görürüz (Bell 1967). $\square$

2.3. $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre Polinomları

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$$

diferansiyel denkleminin $n, \alpha \in \mathbb{N}$ için polinom çözümlerine genelleştirilmiş Laguerre polinomları denir (Bell 1967).

2.3.1. $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarının özellikleri

- n . mertebeden genelleştirilmiş Laguerre polinomlarının kapalı formu aşağıdaki gibidir.

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+\alpha}{n-i} \frac{x^i}{i!}$$

Buradan ilk birkaç genelleştirilmiş Laguerre polinomunu aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$$

$$L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1$$

$$L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{x^2}{2} - (\alpha + 2)x + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$$

$$L_3^{(\alpha)}(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{(\alpha+3)x^2}{2} - \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)x}{2} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{6}$$

- Tümevarımsal olarak genelleştirilmiş Laguerre polinomlarının da tanımını yapabiliriz, tanımdaki ilk iki polinom:

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \quad L_1^{(\alpha)}(x) = 1 + \alpha - x$$

biçimindedir ve her $k \geq 1$ için, aşağıdaki yineleme ilişkisini kullanabiliriz.

$$L_{k+1}^{(\alpha)}(x) = \frac{(2k+1+\alpha-x)L_k^{(\alpha)}(x) - (k+\alpha)L_{k-1}^{(\alpha)}(x)}{k+1}$$

$\alpha = 0$ özel durumu için genelleştirilmiş Laguerre polinomlarını aşağıdaki gibi gösteririz.

$$L_n^{(0)}(x) = L_n(x)$$

- n nin büyük değerleri için α sabit ve $x > 0$ iken polinomun asimptotik davranışı

$$L_n^{(\alpha)}(x) \approx \frac{n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}} \cos\left(2\sqrt{x\left(n+\frac{\alpha+1}{2}\right)} - \frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$L_n^{(\alpha)}(-x) \approx \frac{n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}} e^{\left(2\sqrt{x\left(n+\frac{\alpha+1}{2}\right)}\right)}$$

olarak verilir ve J_a Bessel fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki gibi de gösterebiliriz.

$$\frac{L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{n}\right)}{n^\alpha} \approx e^{\frac{x}{2n}} \cdot \frac{J_a(2\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^\alpha}$$

- Genelleştirilmiş Laguerre polinomları için Rodrigues formülü aşağıdaki gibidir.

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha})$$

- Genelleştirilmiş Laguerre polinomları için üreten fonksiyon özelliği aşağıdaki gibidir (http://www.popflock.com/learn?s=Laguerre_polynomials).

$$\sum_n t^n L_n^{(\alpha)} = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-\frac{tx}{1-t}}$$

2.3.2. $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarının dikliği

Teorem 2.9. $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomları, $\alpha > -1$ olmak koşuluyla $I = [0, \infty)$ aralığında $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir sistem oluşturur. Yani

$$(L_i, L_j) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_i^{(\alpha)}(x) L_j^{(\alpha)}(x) dx = 0, \quad i \neq j$$

ortogonalite özelliği sağlanmaktadır.

İspat $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarının sağladığı diferansiyel denklem,

$$xD^2 L_n^{(\alpha)}(x) + (\alpha + 1 - x)DL_n^{(\alpha)}(x) + nL_n^{(\alpha)}(x) = 0 \quad (2.13)$$

biçimindedir. $L_m^{(\alpha)}(x)$ de bu denklemi sağlayacağı için,

$$xD^2 L_m^{(\alpha)}(x) + (\alpha + 1 - x)DL_m^{(\alpha)}(x) + mL_m^{(\alpha)}(x) = 0 \quad (2.14)$$

yazabiliriz. (2.13) ve (2.14) eşitliklerinin sağ ve sol tarafları $x^\alpha e^{-x}$ ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$D[x^{\alpha+1}e^{-x}DL_n^{(\alpha)}(x)] + nx^\alpha e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x) = 0 \quad (2.15)$$

$$D[x^{\alpha+1}e^{-x}DL_m^{(\alpha)}(x)] + mx^\alpha e^{-x}L_m^{(\alpha)}(x) = 0 \quad (2.16)$$

bulunur. (2.15) eşitliği $L_m^{(\alpha)}(x)$ ile, (2.16) eşitliği de $L_n^{(\alpha)}(x)$ ile çarpılıp, bulunan eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında,

$$\begin{aligned} (m-n)x^\alpha e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x) &= L_m^{(\alpha)}(x)D[x^{\alpha+1}e^{-x}DL_n^{(\alpha)}(x)] \\ &\quad - L_n^{(\alpha)}(x)D[x^{\alpha+1}e^{-x}DL_m^{(\alpha)}(x)] \\ (m-n)x^\alpha e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x) &= D[x^{\alpha+1}e^{-x}\{L_m^{(\alpha)}(x)DL_n^{(\alpha)}(x) \\ &\quad - L_n^{(\alpha)}(x)DL_m^{(\alpha)}(x)\}] \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin sağ ve sol tarafı $(0, \infty)$ aralığında integre edilirse,

$$\begin{aligned} (m-n) \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[x^{\alpha+1} e^{-x} \{ L_m^{(\alpha)}(x) DL_n^{(\alpha)}(x) \right. \\ &\quad \left. - L_n^{(\alpha)}(x) DL_m^{(\alpha)}(x) \} \right]_0^t \quad (2.17) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.17) eşitliğinin sağ tarafı 0 olduğundan $m \neq n$ için,

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

elde edilir. Sonuç olarak, $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomları $(0, \infty)$ 'da $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre dik bir sistem oluşturur (Bell 1967). $\square$

2.3.3. $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarının Hermite polinomlarıyla ilişkisi

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{(\frac{1}{2})}(x^2)$$

Burada $H_n(x)$, "fizikçi versiyonu" olarak adlandırılan ağırlık fonksiyonu e^{-x^2} 'ye dayalı Hermite polinomlarıdır. Bu nedenle, genelleştirilmiş Laguerre polinomları, kuantum harmonik osilatörün işleyişinde ortaya çıkar

(http://www.popflock.com/learn?s=Laguerre_polynomials).



3. MATERYAL VE METOT

Bu çalışmada, m . mertebeden k bilinmeyenli lineer değişken katsayılı

$$\sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k P_{i,j}^n(x) y_j^{(n)}(x) = g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad 0 \leq a \leq x \leq b \quad (3.1)$$

diferansiyel denklem sisteminin

$$\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j}^n y_n^{(j)}(a) + b_{i,j}^n y_n^{(j)}(b)) = \lambda_{n,i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad n = 1, 2, \dots, k \quad (3.2)$$

karışık koşulları altında yaklaşık çözümlerini elde etmek için Laguerre kollokasyon metodu oluşturulacaktır. Burada;

$y_j^{(0)}(x) = y_j(x)$, bilinmeyen fonksiyon,

$P_{i,j}^n(x)$ ve $g_i(x)$, $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyon,

$a_{i,j}^n$, $b_{i,j}^n$ ve $\lambda_{n,i}$, uygun reel sabitlerdir.

Laguerre kollokasyon metodunda amaç; (3.1) denklem sisteminin (3.2) koşulları altında

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^N a_{i,n} L_n(x), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlı N . mertebeden kesilmiş Laguerre serisi cinsinden yaklaşık çözümünü elde etmektir. Burada N pozitif tamsayı ve serinin kesme sınırı, $a_{i,n}$ 'ler belirlenecek olan Laguerre katsayıları ve $L_n(x)$ 'ler ise

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{r!} \binom{n}{r} x^r, \quad n \in N$$

ile tanımlı Laguerre polinomlarıdır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, ilk olarak kollokasyon noktaları tanımlanıp yöntemde gerekli olan temel matris bağıntıları yazılarak çözüm yönteminin işleyişi açıklandı ve rezidüel hata tahmini tekniği sunularak yaklaşık çözümler iyileştirildi. Daha sonra, yöntemin doğruluğunu ve etkililiğini test etmek için bazı sayısal örnekler sunularak belirlenen yaklaşık çözümler ve rezidüel düzeltmeler tablo ve grafiklerde gösterildi. Örneklerle ilgili hesaplamalar Matlab’da yazılan programlar kullanılarak bilgisayarda uygulandı. Ayrıca, nümerik örneklerde başka yöntemler ile karşılaştırmalar da yapıldı.

4.1. Kollokasyon Noktalarının Tanımlanması

(3.1) diferansiyel denklem sisteminin (3.2) koşullarına göre (3.3) biçiminde bir çözümünü elde etmek için;

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

ile tanımlı kollokasyon noktalarını kullanacağız. Burada;

$$a \leq x \leq b \quad \text{ve} \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

dır.

4.2. Temel Matris Bağıntıları

(3.1) ile ifade edilen m . mertebeden k bilinmeyenli lineer değişken katsayılı diferansiyel denklem sisteminin (3.3) formunda yaklaşık çözümünü elde etmek amacıyla, bilinmeyen Laguerre katsayılarının bulunması gerekmektedir. Bu amaçla ilk olarak (3.3) ile tanımlı çözüm fonksiyonu ve türevlerinin matris formunu bulalım. (3.3) çözüm fonksiyonunu matris formunda yazarsak;

$$y_j(x) = \mathbf{L}(x)\mathbf{A}_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (4.1)$$

elde ederiz. Burada;

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} a_{j,0} & a_{j,1} & \cdots & a_{j,N} \end{bmatrix}^T, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$\mathbf{L}(x) = \begin{bmatrix} L_0(x) & L_1(x) & \cdots & L_N(x) \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)}$$

dır. Daha sonra, $\mathbf{L}(x)$ Laguerre polinomları standart bazların vektörü cinsinden

$$\mathbf{L}^T(x) = \mathbf{D}\mathbf{X}^T(x) \iff \mathbf{L}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{D}^T \quad (4.2)$$

olarak yazılır. Burada;

$$\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^N \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{0!} \binom{0}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{(-1)^0}{0!} \binom{1}{0} & \frac{(-1)^1}{1!} \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{(-1)^0}{0!} \binom{2}{0} & \frac{(-1)^1}{1!} \binom{2}{1} & \frac{(-1)^2}{2!} \binom{2}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(-1)^0}{0!} \binom{N}{0} & \frac{(-1)^1}{1!} \binom{N}{1} & \frac{(-1)^2}{2!} \binom{N}{2} & \cdots & \frac{(-1)^N}{N!} \binom{N}{N} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

dır. (4.2)'deki $\mathbf{L}(x)$ Laguerre polinomlarının matris formunu (4.1)'de yerine koyarsak çözüm fonksiyonunun matris formunu aşağıdaki gibi bulmuş oluruz.

$$y_j(x) = \mathbf{L}(x)\mathbf{A}_j = \mathbf{X}(x)\mathbf{D}^T\mathbf{A}_j \quad (4.3)$$

Şimdi, $\mathbf{X}(x)$ ve k . türevi olan $\mathbf{X}^{(k)}(x)$ arasındaki ilişkinin matris formunu bulalım.

$$\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^N \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)} \quad (4.4)$$

(4.4)'ün türevi alındığında

$$\mathbf{X}'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & \cdots & Nx^{N-1} \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)} = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^T$$

elde edilir. Burada $\mathbf{B}^T$ aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad (\mathbf{B}^T)^0 = [\mathbf{I}]_{(N+1) \times (N+1)} \quad \text{birim matris}$$

Buradan, benzer şekilde $\mathbf{X}(x)$ ve $\mathbf{X}^{(k)}(x)$ arasındaki ilişki

$$\mathbf{X}'(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^T$$

$$\mathbf{X}''(x) = \mathbf{X}'(x)\mathbf{B}^T = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^T\mathbf{B}^T = \mathbf{X}(x)(\mathbf{B}^T)^2$$

$$\mathbf{X}'''(x) = \mathbf{X}'(x)(\mathbf{B}^T)^2 = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^T(\mathbf{B}^T)^2 = \mathbf{X}(x)(\mathbf{B}^T)^3 \quad (4.5)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)(\mathbf{B}^T)^k$$

olarak bulunur.

Şimdi, (4.5)'i kullanarak $y_j(x)$ in rekürans ilişkisini matris formunda bulalım. (4.3)'ten $y_j(x)$ aşağıdaki gibidir.

$$y_j(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{D}^T\mathbf{A}_j, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Buradan, $y_j^{(n)}(x)$

$$y_j'(x) = \mathbf{X}'(x)\mathbf{D}^T\mathbf{A}_j = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^T\mathbf{D}^T\mathbf{A}_j$$

$$y_j''(x) = \mathbf{X}'(x)\mathbf{B}^T\mathbf{D}^T\mathbf{A}_j = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^T\mathbf{B}^T\mathbf{D}^T\mathbf{A}_j = \mathbf{X}(x)(\mathbf{B}^T)^2\mathbf{D}^T\mathbf{A}_j$$

$$y_j'''(x) = \mathbf{X}'(x)(\mathbf{B}^T)^2\mathbf{D}^T\mathbf{A}_j = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^T(\mathbf{B}^T)^2\mathbf{D}^T\mathbf{A}_j = \mathbf{X}(x)(\mathbf{B}^T)^3\mathbf{D}^T\mathbf{A}_j$$

$$\vdots$$

$$y_j^{(n)}(x) = \mathbf{X}(x)(\mathbf{B}^T)^n\mathbf{D}^T\mathbf{A}_j$$

olarak bulunur. Burada, $j = 1, 2, \dots, k$ ve $n = 0, 1, 2, \dots, m$ dır. O halde, $\mathbf{y}^{(n)}(x)$, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\mathbf{y}^{(n)}(x) = \bar{\mathbf{X}}(x)(\bar{\mathbf{B}})^n \bar{\mathbf{D}}\mathbf{A}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4.6)$$

Burada,

$$\mathbf{y}^{(n)}(x) = \begin{bmatrix} y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(n)}(x) \\ \vdots \\ y_k^{(n)}(x) \end{bmatrix}_{k \times 1}, \quad \bar{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x) \end{bmatrix}_{k \times k},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}^T \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{D}^T \end{bmatrix}_{k \times k},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

dır (Yüzbaşı 2011).

4.3. Çözüm Yöntemi

İlk olarak (3.1) sistemini matris formunda aşağıdaki gibi gösterelim.

$$\sum_{n=0}^m \mathbf{P}_n(x) \mathbf{y}^{(n)}(x) = \mathbf{g}(x) \quad (4.7)$$

Burada,

$$\mathbf{P}_n(x) = \begin{bmatrix} P_{1,1}^n(x) & P_{1,2}^n(x) & \cdots & P_{1,k}^n(x) \\ P_{2,1}^n(x) & P_{2,2}^n(x) & \cdots & P_{2,k}^n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k,1}^n(x) & P_{k,2}^n(x) & \cdots & P_{k,k}^n(x) \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad \mathbf{y}^{(n)}(x) = \begin{bmatrix} y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(n)}(x) \\ \vdots \\ y_k^{(n)}(x) \end{bmatrix}_{k \times 1},$$

$$\mathbf{g}(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

dır. Yöntem için kollokasyon noktaları

$$x_s = a + \frac{b-a}{N}s, \quad s = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlandı. Şimdi, (4.7)'de (4.8)'deki gibi tanımlanan kollokasyon noktalarını kullanırsak;

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m \mathbf{P}_n(x_0) \mathbf{y}^{(n)}(x_0) &= \mathbf{g}(x_0) \\ \sum_{n=0}^m \mathbf{P}_n(x_1) \mathbf{y}^{(n)}(x_1) &= \mathbf{g}(x_1) \\ &\vdots \\ \sum_{n=0}^m \mathbf{P}_n(x_N) \mathbf{y}^{(n)}(x_N) &= \mathbf{g}(x_N) \end{aligned}$$

elde ederiz. Kısaca;

$$\sum_{n=0}^m \mathbf{P}_n(x_s) \mathbf{y}^{(n)}(x_s) = \mathbf{g}(x_s), \quad s = 0, 1, 2, \dots, N$$

matris denklem sistemini elde ederiz. Buradan temel matris formu aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{n=0}^m \mathbf{P}_n \mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{G} \quad (4.9)$$

Burada,

$$\mathbf{P}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_n(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_n(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{P}_n(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(n)}(x_0) \\ \mathbf{y}^{(n)}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n)}(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(x_0) \\ \mathbf{g}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(x_N) \end{bmatrix}$$

dır. Şimdi, (4.6)'da (4.8)'deki kollokasyon noktalarını kullanırsak;

$$\mathbf{y}^{(n)}(x_s) = \bar{\mathbf{X}}(x_s)(\bar{\mathbf{B}})^n \bar{\mathbf{D}} \mathbf{A}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, N$$

elde ederiz. Bunu

$$\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{X}(\bar{\mathbf{B}})^n \bar{\mathbf{D}} \mathbf{A} \quad (4.10)$$

biçiminde de yazabiliriz. Burada,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(x_0) \\ \bar{\mathbf{X}}(x_1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{X}}(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}}(x_s) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x_s) \end{bmatrix}_{k \times k}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, N$$

dır. Şimdi, (4.10)'u (4.9)'da yerine koyarsak;

$$\left\{ \sum_{n=0}^m \mathbf{P}_n \mathbf{X}(\bar{\mathbf{B}})^n \bar{\mathbf{D}} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.11)$$

temel matris denklem sistemini elde ederiz.

(4.11)'deki $\mathbf{P}_n$, $\mathbf{X}$, $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{D}}$, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{G}$ matrislerinin boyutları sırasıyla $k(N+1) \times k(N+1)$, $k(N+1) \times k(N+1)$, $k(N+1) \times k(N+1)$, $k(N+1) \times k(N+1)$, $k(N+1) \times 1$ ve $k(N+1) \times 1$ dir.

Böylece, (3.1) denklem sistemine karşılık gelen (4.11) temel matris denklem sistemini aşağıdaki formda yazabiliriz.

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G} \quad \text{veya} \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (4.12)$$

Bu da $k(N+1)$ bilinmeyen Laguerre katsayılarındaki $k(N+1)$ cebirsel denklemin bir lineer sistemine karşılık gelir. Burada,

$$\mathbf{W} = \sum_{n=0}^m \mathbf{P}_n \mathbf{X}(\bar{\mathbf{B}})^n \bar{\mathbf{D}} = [\omega_{p,q}], \quad p, q = 1, 2, \dots, k(N+1)$$

dır. Şimdi, koşullara karşılık gelen matris formunu bulalım. Bu amaçla, ilk olarak (4.6) yardımıyla,

$$\mathbf{y}^{(n)}(a) = \bar{\mathbf{X}}(a)(\bar{\mathbf{B}})^n \bar{\mathbf{D}}\mathbf{A}, \quad n = 0, 1, \dots, m \quad (4.13)$$

$$\mathbf{y}^{(n)}(b) = \bar{\mathbf{X}}(b)(\bar{\mathbf{B}})^n \bar{\mathbf{D}}\mathbf{A}, \quad n = 0, 1, \dots, m \quad (4.14)$$

yazabiliriz. Buradan, (3.2) koşullarında (4.13) ve (4.14)'ü yerine koyarak koşullara karşılık gelen matris formunu aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$\sum_{j=0}^{m-1} [a_j \bar{\mathbf{X}}(a) + b_j \bar{\mathbf{X}}(b)] (\bar{\mathbf{B}})^j \bar{\mathbf{D}}\mathbf{A} = \lambda \quad (4.15)$$

Burada,

$$a_j = \begin{bmatrix} a_j^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_j^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_j^k \end{bmatrix}, \quad b_j = \begin{bmatrix} b_j^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_j^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_j^k \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix},$$

$$a_j^i = \begin{bmatrix} a_{0,j}^i \\ a_{1,j}^i \\ \vdots \\ a_{m-1,j}^i \end{bmatrix}, \quad b_j^i = \begin{bmatrix} b_{0,j}^i \\ b_{1,j}^i \\ \vdots \\ b_{m-1,j}^i \end{bmatrix}, \quad \lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_{i,0} \\ \lambda_{i,1} \\ \vdots \\ \lambda_{i,m-1} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

dır. (4.15)'teki koşullara karşılık gelen matris formunu aşağıdaki gibi de yazabiliriz.

$$\mathbf{U}\mathbf{A} = \lambda \quad \text{veya} \quad [\mathbf{U}; \lambda] \quad (4.16)$$

Burada, $\mathbf{U}$

$$\mathbf{U} = \sum_{j=0}^{m-1} [a_j \bar{\mathbf{X}}(a) + b_j \bar{\mathbf{X}}(b)] (\bar{\mathbf{B}})^j \bar{\mathbf{D}}$$

biçimindedir. Son olarak, $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{G}$ matrislerinin satırlarını, sırasıyla, $\mathbf{U}$ ve λ matrislerinin satırlarıyla değiştireceğiz ve böylece yeni genişletilmiş matris formunu elde edeceğiz.

Yeni genişletilmiş matris formu

$$\widetilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{G}}$$

şeklinde. Kolaylık sağlamak için, (4.12) matrisinin son mk satırı (4.16) ile değiştirilirse, yukarıdaki sistemin genişletilmiş matris formu aşağıdaki gibidir.

$$[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,k(N+1)} & ; & g_1(x_0) \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \cdots & w_{2,k(N+1)} & ; & g_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{k,1} & w_{k,2} & \cdots & w_{k,k(N+1)} & ; & g_k(x_0) \\ w_{k+1,1} & w_{k+1,2} & \cdots & w_{k+1,k(N+1)} & ; & g_1(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{k(N-m+1),1} & w_{k(N-m+1),2} & \cdots & w_{k(N-m+1),k(N+1)} & ; & g_k(x_{N-m}) \\ u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,k(N+1)} & ; & \lambda_{1,0} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,k(N+1)} & ; & \lambda_{1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m,1} & u_{m,2} & \cdots & u_{m,k(N+1)} & ; & \lambda_{1,m-1} \\ u_{m+1,1} & u_{m+1,2} & \cdots & u_{m+1,k(N+1)} & ; & \lambda_{2,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{mk,1} & u_{mk,2} & \cdots & u_{mk,k(N+1)} & ; & \lambda_{k,m-1} \end{bmatrix}$$

Bununla birlikte, son satırları değiştirmek zorunda değiliz. Örneğin, $\mathbf{W}$ matrisi tekil ise, o zaman aynı katsayı veya hepsi 0 olan satırlar değiştirilebilir.

Eğer; $\text{rank} \widetilde{\mathbf{W}} = \text{rank}[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}] = N + 1$ ise, o zaman,

$$\mathbf{A} = (\widetilde{\mathbf{W}})^{-1} \widetilde{\mathbf{G}} \quad (4.17)$$

yazabiliriz.

Bilinmeyen Laguerre katsayılar matrisi $\mathbf{A}$, bu lineer sistem çözülerek belirlenir ve $a_{i,0}$, $a_{i,1}, \dots, a_{i,N}$ ($i = 1, 2, \dots, k$)'ler (3.3)'te yerine koyulur. Dolayısıyla, Laguerre polinom çözümlerini buluruz. Laguerre polinom çözümleri

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^N a_{i,n} L_n(x), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4.18)$$

dir.

Öte yandan, $\det(\widetilde{\mathbf{W}}) = 0$ olduğunda, eğer, $\text{rank} \widetilde{\mathbf{W}} = \text{rank}[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}] < N + 1$ ise, özel bir çözüm bulabiliriz. Aksi durumda, eğer, $\text{rank} \widetilde{\mathbf{W}} \neq \text{rank}[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}] < N + 1$ ise, bir çözüm bulamayız.

4.4. Rezidüel Hata Tahmini ve Çözümlerin İyileştirilmesi

Bu bölümde, lineer diferansiyel denklem sisteminin Laguerre yaklaşık çözümü için rezidüel fonksiyonu kullanarak bir hata problemi oluşturup hata tahmini yöntemi verilecektir. m . mertebeden k bilinmeyenli lineer değişken katsayılı

$$\sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k P_{i,j}^n(x) y_j^{(n)}(x) = g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad 0 \leq a \leq x \leq b \quad (4.19)$$

diferansiyel denklem sisteminin

$$\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j}^n y_n^{(j)}(a) + b_{i,j}^n y_n^{(j)}(b)) = \lambda_{n,i}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad n = 1, \dots, k \quad (4.20)$$

karışık koşulları altında

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^N a_{i,n} L_n(x), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4.21)$$

şeklinde tanımlı kesilmiş Laguerre serisi cinsinden yaklaşık çözümü olsun. y_i ve $y_{i,N}$ sırasıyla, tam ve yaklaşık çözümleri göstermek üzere gerçek hata fonksiyonları

$$e_{i,N}(x) = y_i(x) - y_{i,N}(x), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Şimdi, (4.21) çözümü (4.19)'da yazılarak $R_{i,N}$ rezidü fonksiyonu tanımlanır ve

$$R_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k P_{i,j}^n(x) y_{i,N}^{(n)}(x) - g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4.22)$$

elde edilir. Eğer, $y_{i,N}^{(n)}(x)$ tam çözüm ise, $R_{i,N}(x) = 0$ dir. (4.22) denklem sistemini

$$\sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k P_{i,j}^n(x) y_{i,N}^{(n)}(x) = R_{i,N}(x) + g_i(x) \quad (4.23)$$

biçiminde de yazabiliriz. (4.19)'dan (4.23) çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k P_{i,j}^n(x) [y_j^{(n)}(x) - y_{i,N}^{(n)}(x)] &= -R_{i,N}(x) \\ \sum_{n=0}^m \sum_{j=1}^k P_{i,j}^n(x) [e_{j,N}^{(n)}(x)] &= -R_{i,N}(x) \end{aligned} \quad (4.24)$$

hata diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (4.21) yaklaşık çözümü (4.20) koşullarını sağladığından,

$$\sum_{j=0}^{m-1} (a_{i,j}^n y_{n,N}^{(j)}(a) + b_{i,j}^n y_{n,N}^{(j)}(b)) = \lambda_{n,i}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad n = 1, \dots, k \quad (4.25)$$

yazabiliriz. (4.20)'den (4.25) çıkarılırsa,

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left[a_{i,j}^n [y_n^{(j)}(a) - y_{n,N}^{(j)}(a)] + b_{i,j}^n [y_n^{(j)}(b) - y_{n,N}^{(j)}(b)] \right] = 0$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{i,j}^n e_{j,N}^{(j)}(a) + b_{i,j}^n e_{j,N}^{(j)}(b) \right) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad n = 1, \dots, k \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.24) ve (4.26) hata probleminin

$$e_{i,N,M}(x) = \sum_{n=0}^M \widetilde{a_{i,n}}, L_n(x), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

formunda yaklaşık çözümleri bulunur. Burada, $M > N$ dir.

Son olarak, yaklaşık çözüm ve hata probleminin yaklaşık çözümünü toplayıp iyileştirilmiş yaklaşık çözümü

$$y_{i,N,M} = y_{i,N} + e_{i,N,M}$$

olarak elde ederiz. Buradan, iyileştirilmiş çözüm için hata fonksiyonu

$$E_{i,N,M} = y_{i,N} - y_{i,N,M}$$

olarak bulunur.

4.5. Nümerik Örnekler

Burada yöntemin uygulamasını yapıp tablolar ve şekiller üzerinde sonuçlar elde edeceğiz ve literatürde mevcut sonuçlar ile karşılaştıracacağız. Çizelgelerde ve şekillerde, $y_i(x)$, $y_{i,N}(x)$, $y_{i,N,M}(x)$, $e_{i,N}(x)$, $e_{i,N,M}(x)$ ve $E_{i,N,M}(x)$ çeşitli N, M ler için, sırasıyla, verilen aralığın seçilen noktadaki tam çözümlerin, yaklaşık çözümlerin, iyileştirilmiş yaklaşık çözümlerin, gerçek hata fonksiyonlarının, tahmini hata fonksiyonlarının ve iyileştirilmiş hata fonksiyonlarının değerlerini göstermektedir.

Örnek 4.1. İlk olarak

$$\begin{cases} y_1''(x) + xy_1(x) + xy_2(x) = 2 \\ y_2''(x) + 2xy_2(x) + 2xy_1(x) = -2 \end{cases}, 0 \leq x \leq 1 \quad (4.27)$$

ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sistemini

$$y_1(0) = y_1(1) = 0, \quad y_2(0) = y_2(1) = 0 \quad (4.28)$$

başlangıç koşulları ile birlikte ele alalım.

Burada;

$$k = 2, \quad m = 2, \quad g_1(x) = 2, \quad g_2(x) = -2,$$

$$P_{1,1}^0(x) = P_{1,2}^0(x) = x, \quad P_{2,1}^0(x) = P_{2,2}^0(x) = 2x,$$

$$P_{1,1}^1(x) = P_{1,2}^1(x) = P_{2,1}^1(x) = P_{2,2}^1(x) = 0,$$

$$P_{1,1}^2(x) = 1, \quad P_{1,2}^2(x) = P_{2,1}^2(x) = 0, \quad P_{2,2}^2(x) = 1.$$

dır.

Şimdi, $N = 2$ için kesilmiş Laguerre seri formunda

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^2 a_{i,n} L_n(x), \quad i = 1, 2$$

çözümlerini hesaplayalım. İlk olarak, $N = 2$ için kollokasyon noktalarının kümesini bulalım. $0 \leq x \leq 1$ olduğundan, $a = 0$, $b = 1$ ve $i = 0, 1, 2$ olur ve

$$x_0 = 0 + \frac{1-0}{2} 0 = 0$$

$$x_1 = 0 + \frac{1-0}{2} 1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 0 + \frac{1-0}{2} 2 = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla, $N = 2$ için kollokasyon noktalarının kümesi

$$\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1\}$$

dir. (4.11)'den problemin temel matris denklem sistemi

$$\left\{ \mathbf{P}_0 \mathbf{X} \bar{\mathbf{D}} + \mathbf{P}_1 \mathbf{X} \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{D}} + \mathbf{P}_2 \mathbf{X} (\bar{\mathbf{B}})^2 \bar{\mathbf{D}} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

dir. Burada,

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_0(\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_0(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_1(\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_1(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_2(\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_2(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(0) \\ \bar{\mathbf{X}}(\frac{1}{2}) \\ \bar{\mathbf{X}}(1) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(0) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(\frac{1}{2}) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}}(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(1) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^T \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(0) \\ \mathbf{g}(\frac{1}{2}) \\ \mathbf{g}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(0) = \mathbf{g}(\frac{1}{2}) = \mathbf{g}(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{bmatrix}$$

dır. Bu temel matris denklem sistemi için genişletilmiş matris Matlab'dan hesaplanır ve genişletilmiş matris aşağıdaki şekildedir.

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ; & -2 \\ 1/2 & 1/4 & 17/16 & 1/2 & 1/4 & 1/16 & ; & 2 \\ 1 & 1/2 & 1/8 & 1 & 1/2 & 9/8 & ; & -2 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & -1/2 & ; & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & ; & -2 \end{bmatrix}$$

Şimdi, koşulların matris formunu bulalım. (4.16)'dan çözüm fonksiyonunun matris formu

$$\mathbf{U} = \sum_{j=0}^{m-1} [a_j \bar{\mathbf{X}}(a) + b_j \bar{\mathbf{X}}(b)] (\bar{\mathbf{B}})^j \bar{\mathbf{D}}$$

idi.

Buradan koşulların matris formu

$$[\mathbf{U}; \lambda] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Böylece, koşullara bağlı yeni genişletilmiş matrisi bulmak için, $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ sistemindeki son dört satır yerine $[\mathbf{U}; \lambda]$ yazılarak $[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}]$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ; & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak, bu sistem çözülerek, Laguerre katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = (\widetilde{\mathbf{W}})^{-1} \widetilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T$$

elde edilir. Böylece, (4.3)'te

$$y_j(x) = \mathbf{L}(x)\mathbf{A}_j \quad j = 1, 2$$

$\mathbf{A}$ matrisi yerine koyulursa,

$$y_1(x) = x^2 - x \quad \text{ve} \quad y_2(x) = -x^2 + x$$

yaklaşık çözümlerini elde ederiz. Bu yaklaşık çözümler de (4.27) denklem sisteminin (4.28) başlangıç koşullarına göre tam çözümleridir.

Örnek 4.2.

$$\begin{cases} y_1'(x) + y_2'(x) + y_1(x) + y_2(x) = 1 \\ y_2'(x) - 2y_1(x) - y_2(x) = 0 \end{cases}, 0 \leq x \leq 1 \quad (4.29)$$

birinci mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sistemini

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1 \quad (4.30)$$

başlangıç koşulları ve

$$y_1(x) = e^{-x} - 1 \quad \text{ve} \quad y_2(x) = 2 - e^{-x}$$

tam çözümleri ile birlikte ele alalım.

Burada;

$$k = 2, \quad m = 1, \quad g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = 0,$$

$$P_{1,1}^0(x) = 1 \quad P_{1,2}^0(x) = 1, \quad P_{2,1}^0(x) = -2 \quad P_{2,2}^0(x) = -1,$$

$$P_{1,1}^1(x) = 1 \quad P_{1,2}^1(x) = 1 \quad P_{2,1}^1(x) = 0 \quad P_{2,2}^1(x) = 1$$

dır.

Şimdi, $N = 6$ için kesilmiş Laguerre seri formunda

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^6 a_{i,n} L_n(x), \quad i = 1, 2$$

çözümlerini hesaplayalım. İlk olarak, $N = 6$ için kollokasyon noktalarının kümesini bulalım. $0 \leq x \leq 1$ olduğundan, $a = 0$, $b = 1$ ve $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ olur ve

$$x_0 = 0 + \frac{1-0}{6}0 = 0$$

$$x_1 = 0 + \frac{1-0}{6}1 = \frac{1}{6}$$

$$x_2 = 0 + \frac{1-0}{6}2 = \frac{1}{3}$$

$$x_3 = 0 + \frac{1-0}{6}3 = \frac{1}{2}$$

$$x_4 = 0 + \frac{1-0}{6}4 = \frac{2}{3}$$

$$x_5 = 0 + \frac{1-0}{6}5 = \frac{5}{6}$$

$$x_6 = 0 + \frac{1-0}{6}6 = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla, $N = 6$ için kollokasyon noktalarının kümesi

$$\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{2}{3}, x_5 = \frac{5}{6}, x_6 = 1\}$$

dir. (4.11)'den problemin temel matris denklem sistemi

$$\{P_0XD + P_1XB\bar{D}\}A = G$$

dir. Burada,

$$P_0 = \begin{bmatrix} P_0(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_0(1/6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_0(1/3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_0(1/2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_0(2/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0(5/6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_1(1/6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_1(1/3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{P}_1(1/2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{P}_1(2/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{P}_1(5/6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{P}_1(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(0) \\ \bar{\mathbf{X}}(1/6) \\ \bar{\mathbf{X}}(1/3) \\ \bar{\mathbf{X}}(1/2) \\ \bar{\mathbf{X}}(2/3) \\ \bar{\mathbf{X}}(5/6) \\ \bar{\mathbf{X}}(1) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(0) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}}(1/6) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(1/6) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(1/6) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(1/3) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(1/3) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(1/3) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}}(1/2) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(1/2) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(1/2) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(2/3) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(2/3) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(2/3) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}}(5/6) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(5/6) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(5/6) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(1) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(1/6) = \begin{bmatrix} 1 & 1/6 & 1/36 & 1/216 & 1/1296 & 1/7776 & 1/46656 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(1/3) = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 & 1/81 & 1/243 & 1/729 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(1/2) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(2/3) = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 & 16/81 & 32/243 & 64/729 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(5/6) = \begin{bmatrix} 1 & 5/6 & 25/36 & 125/216 & 625/1296 & 3125/7776 & 15625/46656 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^T \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & 3 & 5 & 15/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/6 & -2/3 & -5/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 & 5/24 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/120 & -1/20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/720 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(0) \\ \mathbf{g}(1/6) \\ \mathbf{g}(1/3) \\ \mathbf{g}(1/2) \\ \mathbf{g}(2/3) \\ \mathbf{g}(5/6) \\ \mathbf{g}(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(0) = \mathbf{g}(1/6) = \mathbf{g}(1/3) = \mathbf{g}(1/2) = \mathbf{g}(2/3) = \mathbf{g}(5/6) = \mathbf{g}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \\ a_{1,4} \\ a_{1,5} \\ a_{1,6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{2,3} \\ a_{2,4} \\ a_{2,5} \\ a_{2,6} \end{bmatrix}$$

dır.

Bu temel matris denklem sistemi için genişletilmiş matris Matlab'dan hesaplanır. Koşulların matris formu da hesaplanır. Sonra genişletilmiş matrisin son iki satırı yerine koşulların matris formu yazılır ve böylece yeni genişletilmiş matris $[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}]$ bulunur. Buradan bu sistem çözülür ve Laguerre katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = (\widetilde{\mathbf{W}})^{-1} \widetilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} -99230/351007 \\ -441042/351007 \\ 1585847/351007 \\ -2405295/351007 \\ 2195640/351007 \\ -1069200/351007 \\ 233280/351007 \\ 450237/351007 \\ 441042/351007 \\ -1585847/351007 \\ 2405295/351007 \\ -2195640/351007 \\ 1069200/351007 \\ -233280/351007 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Son olarak, (4.3)'te

$$y_{j,N}(x) = \mathbf{L}(x) \mathbf{A}_j \quad j = 1, 2$$

A matrisi yerine koyulursa,

$$y_{1,6}(x) = 0.000923058514503x^6 - 0.00784599737327x^5 + 0.0414094305812x^4 \\ - 0.166599241611x^3 + 0.499992877635x^2 - x$$

ve

$$y_{2,6}(x) = -0.000923058514503x^6 + 0.00784599737327x^5 - 0.0414094305812x^4 \\ + 0.166599241611x^3 - 0.499992877635x^2 + x + 1$$

yaklaşık çözümlerini elde ederiz.

Buradan, $N = 6$ için gerçek hata fonksiyonları

$$e_{1,6}(x) = y_1(x) - y_{1,6}(x) \\ = e^{-x} - 1 - (0.000923058514503x^6 - 0.00784599737327x^5 \\ + 0.0414094305812x^4 - 0.166599241611x^3 + 0.499992877635x^2 - 1.0x)$$

ve

$$e_{2,6}(x) = y_2(x) - y_{2,6}(x) \\ = 2 - e^{-x} - (-0.000923058514503x^6 + 0.00784599737327x^5 \\ - 0.0414094305812x^4 + 0.166599241611x^3 - 0.499992877635x^2 + x + 1)$$

olur.

Şimdi, $R_{1,N}(x)$ ve $R_{2,N}(x)$ rezidü fonksiyonlarımızı bulalım:

$N = 6$ için bulunan yaklaşık çözümler (4.29)'da yazılarak $R_{1,6}(x)$ ve $R_{2,6}(x)$ rezidü fonksiyonları tanımlanır ve

$$R_{1,6}(x) = y'_{1,6}(x) + y'_{2,6}(x) + y_{1,6}(x) + y_{2,6}(x) - 1 \\ R_{2,6}(x) = y'_{2,6}(x) - 2y_{1,6}(x) - y_{2,6}(x) - 0 \quad (4.31)$$

elde edilir. (4.31)'i

$$R_{1,6}(x) + 1 = y'_{1,6}(x) + y'_{2,6}(x) + y_{1,6}(x) + y_{2,6}(x) \\ R_{2,6}(x) = y'_{2,6}(x) - 2y_{1,6}(x) - y_{2,6}(x) \quad (4.32)$$

şeklinde de yazabiliriz.

Buradan, (4.29)'dan (4.32) çıkarılırsa;

$$\begin{aligned} -R_{1,6}(x) &= [y_1'(x) - y_{1,6}'(x)] + [y_2'(x) - y_{2,6}'(x)] + [y_1(x) - y_{1,6}(x)] \\ &\quad + [y_2(x) - y_{2,6}(x)] \\ -R_{2,6}(x) &= [y_2'(x) - y_{2,6}'(x)] - 2[y_1(x) - y_{1,6}(x)] \\ &\quad - [y_2(x) - y_{2,6}(x)] \end{aligned} \quad (4.33)$$

hata diferansiyel denklem sistemini elde ederiz.

$N = 6$ için bulunan yaklaşık çözümler (4.30) koşullarını sağladığından;

$$y_{1,6}(0) = 0, \quad y_{2,6}(0) = 1 \quad (4.34)$$

yazılabilir ve (4.30)'dan (4.34) çıkarılırsa,

$$y_1(0) - y_{1,6}(0) = 0, \quad y_2(0) - y_{2,6}(0) = 0 \quad (4.35)$$

bulunur. Böylece, (4.33) ve (4.35) hata probleminin

$$e_{i,N,M}(x) = \sum_{n=0}^M \widetilde{a_{i,n}}, L_n(x) \quad , \quad i = 1, 2$$

formunda yaklaşık çözümleri bulunur. Burada, $N = 6$ ve $M = 8$ alınırsa,

$$\begin{aligned} e_{1,6,8}(x) &= 0.0000161071982352x^8 - 0.000185232779705x^7 + 0.000454610284555x^6 \\ &\quad - 0.000481675789317x^5 + 0.000255553792544x^4 - 0.000067150954037x^3 \\ &\quad + 0.00000710301019424x^2 - 2.58608757181e - 37x + 9.99170198199e - 38 \\ e_{2,6,8}(x) &= -0.0000161071982352x^8 + 0.000185232779705x^7 - 0.000454610284555x^6 \\ &\quad + 0.000481675789317x^5 - 0.000255553792544x^4 + 0.000067150954037x^3 \\ &\quad - 0.00000710301019424x^2 + 2.58608757181e - 37x - 9.99170198199e - 38 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $N = 6$ için yaklaşık çözüm ve $N = 6$, $M = 8$ için hata probleminin yaklaşık çözümü toplanırsa

$$\begin{aligned} y_{1,6,8}(x) &= 0.0000161071982352x^8 - 0.000185232779705x^7 + 0.00137766879906x^6 \\ &\quad - 0.00832767316259x^5 + 0.0416649843737x^4 - 0.166666392565x^3 \\ &\quad + 0.499999980645x^2 - 1.0x + 9.99170198199e - 38 \\ y_{2,6,8}(x) &= -0.0000161071982352x^8 + 0.000185232779705x^7 - 0.00137766879906x^6 \\ &\quad + 0.00832767316259x^5 - 0.0416649843737x^4 + 0.166666392565x^3 \\ &\quad - 0.499999980645x^2 + 1.0x + 1.0 \end{aligned}$$

iyileştirilmiş yaklaşık çözümleri bulunur.

Böylece, iyileştirilmiş hata fonksiyonları

$$\begin{aligned}
 E_{1,6,8}(x) &= 0.0000161071982352x^8 - 0.000185232779705x^7 + 0.00137766879906x^6 \\
 &\quad - 0.00832767316259x^5 + 0.0416649843737x^4 - 0.166666392565x^3 \\
 &\quad + 0.499999980645x^2 - 1.0x + 9.99170198199e - 38 \\
 E_{2,6,8}(x) &= -0.0000161071982352x^8 + 0.000185232779705x^7 - 0.000454610284555x^6 \\
 &\quad + 0.000481675789317x^5 - 0.00025553792544x^4 + 0.000067150954037x^3 \\
 &\quad - 0.00000710301019424x^2 + 2.58608757181e - 37x - 9.99170198199e - 38
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Şimdi, tam çözümler, yaklaşık çözümler, iyileştirilmiş yaklaşık çözümler ve mutlak hatalar tablo ve grafiklerde gösterilip literatürde mevcut diğer yöntemlerle karşılaştırılacaktır.

Çizelge 4.3. ve Çizelge 4.4.'te (4.29) denklem sisteminin tam çözümleri, $N = 2, 6$ için yaklaşık çözümleri ve gerçek mutlak hataları gösterilmiştir.

Çizelge 4.3. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ tam çözümü, $N = 2$ ve $N = 6$ için yaklaşık çözümü ve gerçek mutlak hatası

x_i	Tam Çözüm $y_1(x_i) = e^{-x_i} - 1$	Yaklaşık Çözüm $N = 2, \quad y_{1,2}(x_i)$	Mutlak Hata $N = 2, \quad e_{1,2}(x_i)$
0	0	0	0
0.2	-0.181269246922018	-0.1840000000000000	2.730753077981859e-03
0.4	-0.329679953964361	-0.3360000000000000	6.320046035639301e-03
0.6	-0.451188363905974	-0.4560000000000000	4.811636094026433e-03
0.8	-0.550671035882778	-0.5440000000000000	6.671035882778408e-03
1	-0.632120558828558	-0.6000000000000000	3.212055882855768e-02
	$y_1(x_i) = e^{-x_i} - 1$	$N = 6, \quad y_{1,6}(x_i)$	$N = 6, \quad e_{1,6}(x_i)$
0	0	0	0
0.2	-0.181269246922018	-0.181269275381973	2.84599549760234e-08
0.4	-0.329679953964361	-0.329679971784052	1.781969100056458e-08
0.6	-0.451188363905974	-0.451188376573745	1.266777099884209e-08
0.8	-0.550671035882778	-0.550671069420420	3.353764199687248e-08
1	-0.632120558828558	-0.632119872253567	6.865749909712449e-07

Çizelge 4.4. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ tam çözümü, $N = 2$ ve $N = 6$ için yaklaşık çözümü ve gerçek mutlak hatası

x_i	Tam Çözüm $y_2(x_i) = 2 - e^{-x_i}$	Yaklaşık Çözüm $N = 2, \quad y_{2,2}(x_i)$	Mutlak Hata $N = 2, \quad e_{2,2}(x_i)$
0	1	1	0
0.2	1.18126924692202	1.1840000000000000	2.730753077981859e-03
0.4	1.32967995396436	1.3360000000000000	6.320046035639301e-03
0.6	1.45118836390597	1.4560000000000000	4.811636094026433e-03
0.8	1.55067103588278	1.5440000000000000	6.671035882778408e-03
1	1.63212055882856	1.6000000000000000	3.212055882855768e-02
x_i	$y_2(x_i) = 2 - e^{-x_i}$	$N = 6, \quad y_{2,6}(x_i)$	$N = 6, \quad e_{2,6}(x_i)$
0	1	1	0
0.2	1.18126924692202	1.181269275381973	2.845995283884406e-08
0.4	1.32967995396436	1.329679971784052	1.781969194425415e-08
0.6	1.45118836390597	1.451188376573745	1.266777505115613e-08
0.8	1.55067103588278	1.550671069420420	3.353763999847104e-08
1	1.63212055882856	1.632119872253567	6.865749930806686e-07

Çizelge 4.5. ve Çizelge 4.6.’da (4.29) denklem sisteminin tam çözümleri verilmiştir ve $N = 6$ için yaklaşık çözümleri diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Çizelgelerde (DDM) diferansiyel dönüşüm metodu (Thongmoon ve Pusjuso 2009) ve Bessel kollokasyon metodundan (Yüzbaşı 2011) yararlanılarak nümerik sonuçlar Laguerre kollokasyon yöntemiyle karşılaştırıldı.

Çizelge 4.5. Örnek 4.2’nin $y_1(x)$ tam çözümünün $N = 6$ için diğer yöntemlerle yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

x_i	Tam Çözüm $y_1(x_i) = e^{-x_i} - 1$	Bessel $N = 6, y_{1,6}(x_i)$	DDM $N = 6, y_{1,6}(x_i)$	Laguerre $N = 6, y_{1,6}(x_i)$
0	0	0	0	0
0.2	-0.18126924692	-0.18126927538	-0.16569377777	-0.18126927538
0.4	-0.32967995396	-0.32967997178	-0.27847111111	-0.32967997178
0.6	-0.45118836390	-0.45118837657	-0.34969200000	-0.45118837657
0.8	-0.55067103588	-0.55067106942	-0.38436977777	-0.55067106942
1	-0.63212055882	-0.63211987225	-0.39861111111	-0.63211987225

Çizelge 4.6. Örnek 4.2’nin $y_2(x)$ tam çözümünün $N = 6$ için diğer yöntemlerle yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

x_i	Tam Çözüm $y_2(x_i) = 2 - e^{-x_i}$	Bessel $N = 6, y_{2,6}(x_i)$	DDM $N = 6, y_{2,6}(x_i)$	Laguerre $N = 6, y_{2,6}(x_i)$
0	1	1	1	1
0.2	1.18126924692	1.18126927538	1.18359546667	1.18126927538
0.4	1.32967995396	1.32967997178	1.34654720000	1.32967997178
0.6	1.45118836390	1.45118837657	1.50568720000	1.45118837657
0.8	1.55067103588	1.55067106942	1.68261546667	1.55067106942
1	1.63212055882	1.63211987225	1.91250000000	1.63211987225

Çizelge 4.7. ve Çizelge 4.8.'de (4.29) denklem sisteminin $N = 6, 10$ için gerçek hataları diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır ve $N = 12$ için Laguerre yönteminin gerçek mutlak hatası gösterilmiştir. Çizelgelerden $N = 6$ için Laguerre ve Bessel yöntemlerinde neredeyse aynı sonuçlar elde edilip diğer yöntemden daha iyi sonuçlar elde edildiği görülmektedir. $N = 10$ için elde edilen sonuçlar $N = 6$ için elde edilen sonuçlara kıyasla daha iyidir. Buradan, artan N değerleriyle birlikte yaklaşık çözümlerin gerçek çözüme daha yakın olduğu görülmektedir. Çizelgelerde (DDM) diferansiyel dönüşüm metodu (Thongmoon ve Pusjuso 2009) ve Bessel kollokasyon metodundan (Yüzbaşı 2011) yararlanılarak nümerik sonuçlar Laguerre kollokasyon yöntemiyle karşılaştırıldı.

Çizelge 4.7. Örnek 4.2 için $N = 6, 10$ olarak alındığında $e_{1,N}(x)$ gerçek hatalarının diğer yöntemlerle karşılaştırılması ve $N = 12$ için Laguerre kollokasyon yöntemi

x_i	Bessel $e_{1,6}(x_i)$	DDM $e_{1,6}(x_i)$	Laguerre $e_{1,6}(x_i)$	Laguerre $e_{1,10}(x_i)$	Bessel $e_{1,10}(x_i)$	Laguerre $e_{1,12}(x_i)$
0	0	0	0	0	0	0
0.2	2.8460e-008	1.5575e-002	2.8460e-08	3.0309e-14	2.6645e-014	0
0.4	1.7820e-008	5.1209e-002	1.7820e-08	2.5646e-14	2.0650e-014	0
0.6	1.2668e-008	1.0150e-001	1.2668e-08	2.0761e-14	3.1530e-014	1.1102e-16
0.8	3.3538e-008	1.6630e-001	3.3537e-08	1.2101e-14	7.1498e-014	0
1	6.8657e-007	2.3351e-001	6.8658e-07	1.7061e-12	1.5510e-012	1.4988e-15

Çizelge 4.8. Örnek 4.2 için $N = 6, 10$ olarak alındığında $e_{2,N}(x)$ gerçek hatalarının diğer yöntemlerle karşılaştırılması ve $N = 12$ için Laguerre kollokasyon yöntemi

x_i	Bessel $e_{2,6}(x_i)$	DDM $e_{2,6}(x_i)$	Laguerre $e_{2,6}(x_i)$	Laguerre $e_{2,10}(x_i)$	Bessel $e_{2,10}(x_i)$	Laguerre $e_{2,12}(x_i)$
0	0	0	0	0	0	0
0.2	2.8460e-008	2.3262e-003	2.8460e-08	3.0309e-14	2.9421e-014	0
0.4	1.7820e-008	1.6867e-002	1.7820e-08	2.5646e-14	3.6082e-014	0
0.6	1.2668e-008	5.4499e-021	1.2668e-08	2.0761e-14	7.4274e-014	1.1102e-16
0.8	3.3538e-008	1.3194e-001	3.3537e-08	1.2101e-14	1.6065e-013	0
1	6.8657e-007	2.8038e-001	6.8658e-07	1.7061e-12	1.3884e-012	1.4988e-15

Çizelge 4.9. ve Çizelge 4.10.'da (4.29) denklem sisteminin $N = 3, 5, 8$ ve $M = 4, 5, 6, 7, 9, 10$ için gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hataları karşılaştırılmıştır. Çizelgelerde gerçek mutlak hataları incelediğimizde N değeri arttıkça daha küçük sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Buradan, artan N değerleriyle birlikte yaklaşık çözümlerin gerçek çözüme daha yakın olduğu görülmektedir. Gerçek ve tahmini mutlak hataların nümerik sonuçlarına bakıldığında birbirine çok yakın olduğu görülmektedir. İyileştirilmiş mutlak hataların nümerik sonuçları ise, gerçek ve tahmini mutlak hatalardan daha iyi sonuç vermiştir ve gerçek hatalardan uzaklaşmamıştır. Buradan, rezidüel hata tahmini yönteminin etkili olduğu görülmektedir.

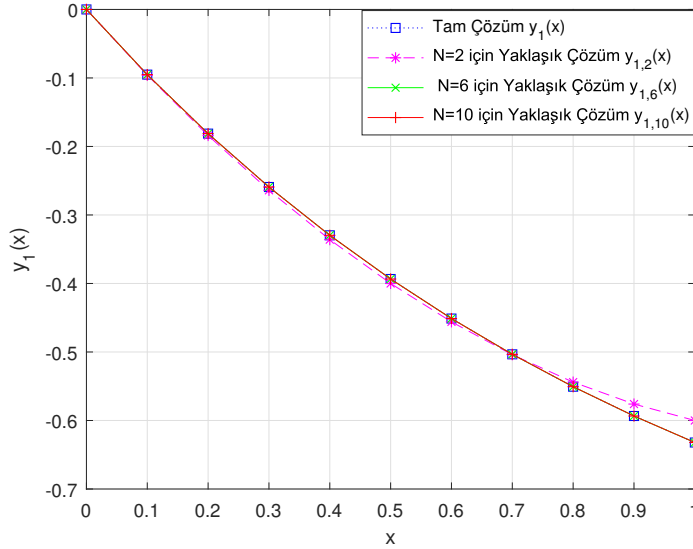
Çizelge 4.9. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ çözümü için $N = 3, 5, 8$ ve $M = 4, 5, 6, 7, 9, 10$ olarak alındığında gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hatalarının karşılaştırılması

	Gerçek Mutlak Hata	Tahmini Mutlak Hata	İyileştirilmiş Mutlak Hata
x_i	$ e_{1,3}(x_i) $	$ e_{1,3,5}(x_i) $	$ E_{1,3,4}(x_i) $
0	0	1.1020e-39	0
0.2	2.4427e-04	2.4354e-04	1.5250e-05
0.4	2.6599e-04	2.6570e-04	7.0814e-06
0.6	5.3229e-05	5.3772e-05	7.2843e-06
0.8	2.4788e-04	2.4818e-04	1.3280e-05
1	3.0146e-03	3.0012e-03	2.0759e-04
	$ e_{1,5}(x_i) $	$ e_{1,5,7}(x_i) $	$ E_{1,5,6}(x_i) $
0	0	4.3714e-38	0
0.2	7.2618e-07	7.2519e-07	2.8460e-08
0.4	2.9591e-07	2.9511e-07	1.7820e-08
0.6	5.4324e-07	5.4271e-07	1.2668e-08
0.8	3.0087e-07	3.0095e-07	3.3537e-08
1	1.3335e-05	1.3302e-05	6.8658e-07
	$ e_{1,8}(x_i) $	$ e_{1,8,10}(x_i) $	$ E_{1,8,9}(x_i) $
0	0	9.1101e-38	0
0.2	3.2050e-11	3.2020e-11	1.0056e-12
0.4	2.7746e-11	2.7720e-11	8.5747e-13
0.6	2.3806e-11	2.3785e-11	7.1331e-13
0.8	2.0218e-11	2.0206e-11	7.1421e-13
1	1.3378e-09	1.3361e-09	5.1067e-11

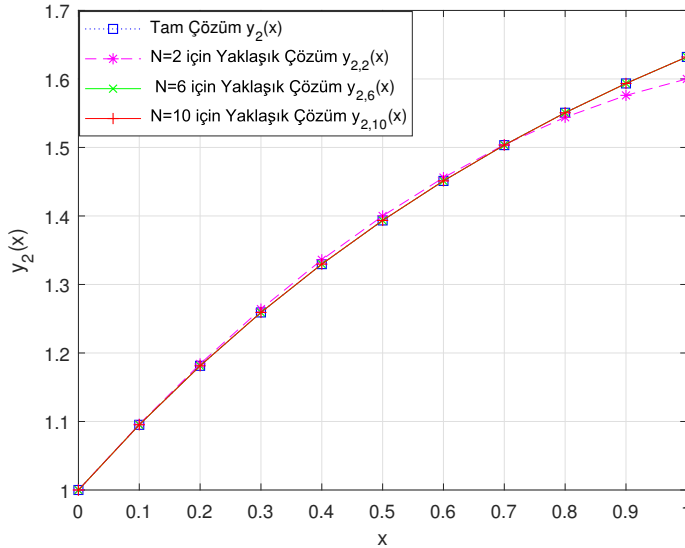
Çizelge 4.10. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ çözümü için $N = 3, 5, 8$ ve $M = 4, 5, 6, 7, 9, 10$ olarak alındığında gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hatalarının karşılaştırılması

	Gerçek Mutlak Hata	Tahmini Mutlak Hata	İyileştirilmiş Mutlak Hata
x_i	$ e_{2,3}(x_i) $	$ e_{2,3,5}(x_i) $	$ E_{2,3,4}(x_i) $
0	0	1.1020e-39	0
0.2	2.4427e-04	2.4354e-04	1.5250e-05
0.4	2.6599e-04	2.6570e-04	7.0814e-06
0.6	5.3229e-05	5.3772e-05	7.2843e-06
0.8	2.4788e-04	2.4818e-04	1.3280e-05
1	3.0146e-03	3.0012e-03	2.0759e-04
	$ e_{2,5}(x_i) $	$ e_{2,5,7}(x_i) $	$ E_{2,5,6}(x_i) $
0	0	4.3714e-38	0
0.2	7.2618e-07	7.2519e-07	2.8460e-08
0.4	2.9591e-07	2.9511e-07	1.7820e-08
0.6	5.4324e-07	5.4271e-07	1.2668e-08
0.8	3.0087e-07	3.0095e-07	3.3537e-08
1	1.3335e-05	1.3302e-05	6.8658e-07
	$ e_{2,8}(x_i) $	$ e_{2,8,10}(x_i) $	$ E_{2,8,9}(x_i) $
0	0	9.1101e-38	0
0.2	3.2050e-11	3.2020e-11	1.0056e-12
0.4	2.7746e-11	2.7720e-11	8.5747e-13
0.6	2.3806e-11	2.3785e-11	7.1331e-13
0.8	2.0218e-11	2.0206e-11	7.1421e-13
1	1.3378e-09	1.3361e-09	5.1067e-11

Şekil 4.1. ve Şekil 4.2.'de (4.29) denklem sisteminin tam çözümleri ve $N = 2, 6, 10$ için yaklaşık çözümleri karşılaştırılmıştır. Buradan, artan N değerleriyle birlikte yaklaşık çözümlerin gerçek çözüme daha yakın olduğu görülmektedir.

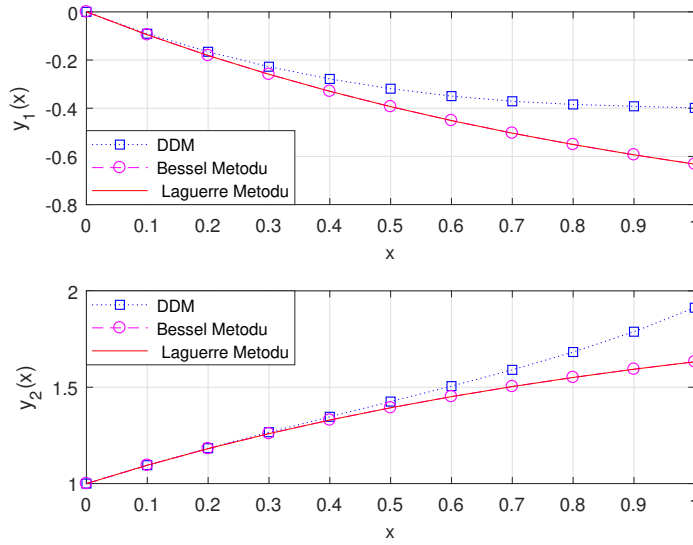


Şekil 4.1. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ tam çözümü ve $N = 2, 6, 10$ için yaklaşık çözümleri



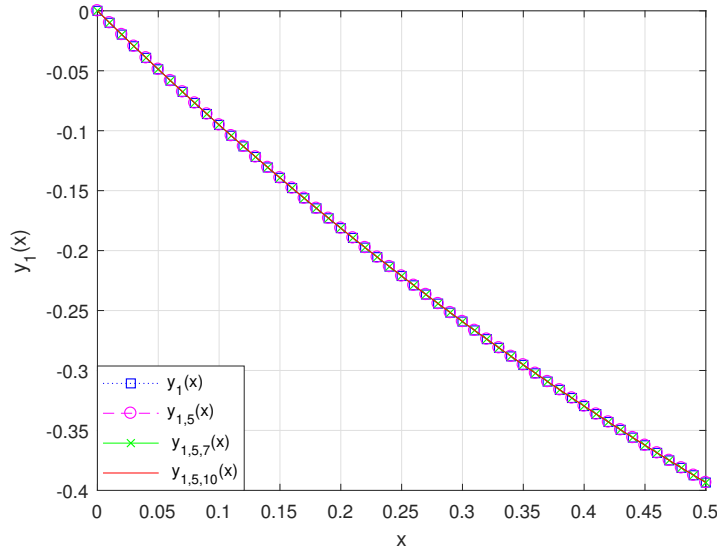
Şekil 4.2. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ tam çözümü ve $N = 2, 6, 10$ için yaklaşık çözümleri

Şekil 4.3.'te (4.29) denklem sisteminin $N = 6$ için yaklaşık çözümleri diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Şekillerden $N = 6$ için Laguerre ve Bessel yöntemlerinde neredeyse aynı sonuçlar elde edilip diğer yöntemden daha iyi sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Şekillerde, (DDM) diferansiyel dönüşüm metodu (Thongmoon ve Pusjuso 2009) ve Bessel kollokasyon metodundan (Yüzbaşı 2011) yararlanılarak sonuçlar Laguerre kollokasyon yöntemiyle karşılaştırıldı.

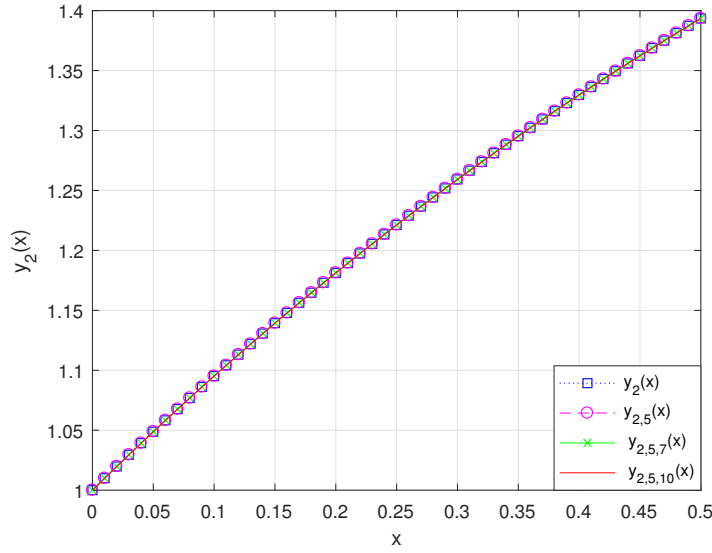


Şekil 4.3. Örnek 4.2'nin çözümlerinin $N = 6$ için diğer yöntemlerle yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Şekil 4.4. ve Şekil 4.5.'te (4.29) denklem sisteminin tam çözümleri, $N = 5$ için yaklaşık çözümleri ve $N = 5, M = 7, 10$ için iyileştirilmiş yaklaşık çözümleri karşılaştırılmıştır.

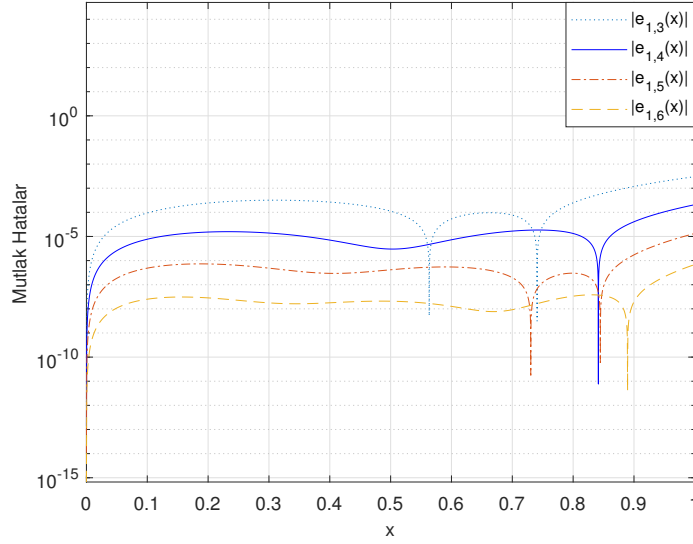


Şekil 4.4. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve $N = 5$, $M = 7, 10$ için iyileştirilmiş yaklaşık çözümleri

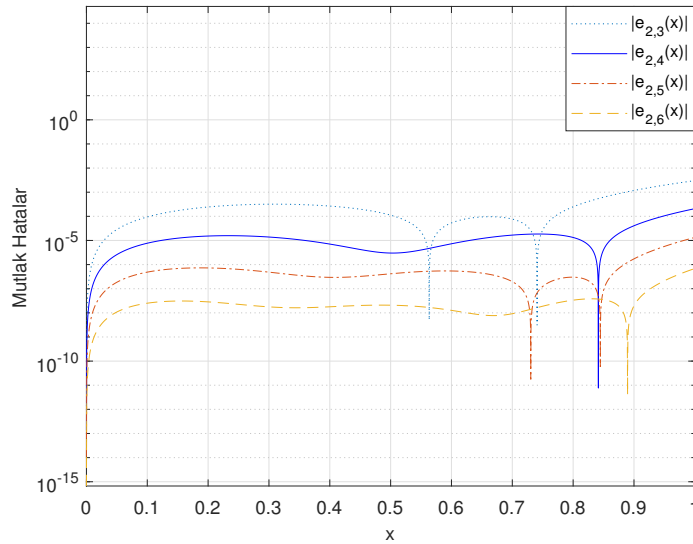


Şekil 4.5. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve $N = 5$, $M = 7, 10$ için iyileştirilmiş yaklaşık çözümleri

Şekil 4.6. ve Şekil 4.7.'de (4.29) denklem sisteminin $N = 3, 4, 5, 6$ için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır. Buradan, artan N değerleriyle birlikte daha iyi nümerik sonuçlar elde edildiği görülmektedir.

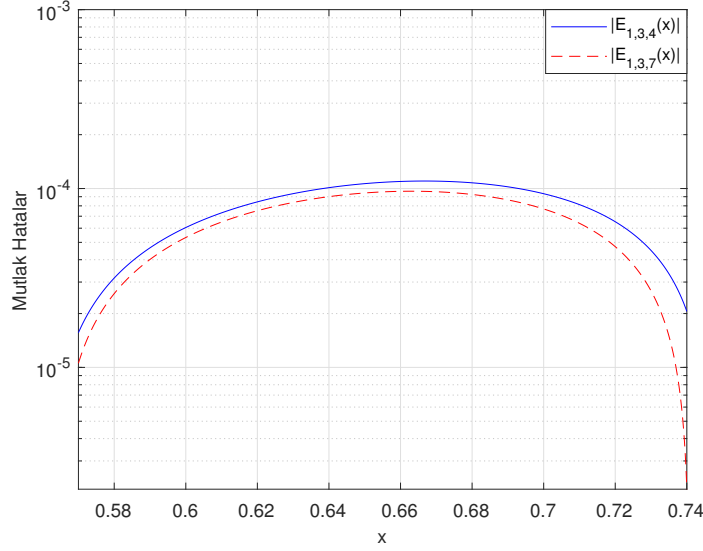


Şekil 4.6. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ çözümü için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları

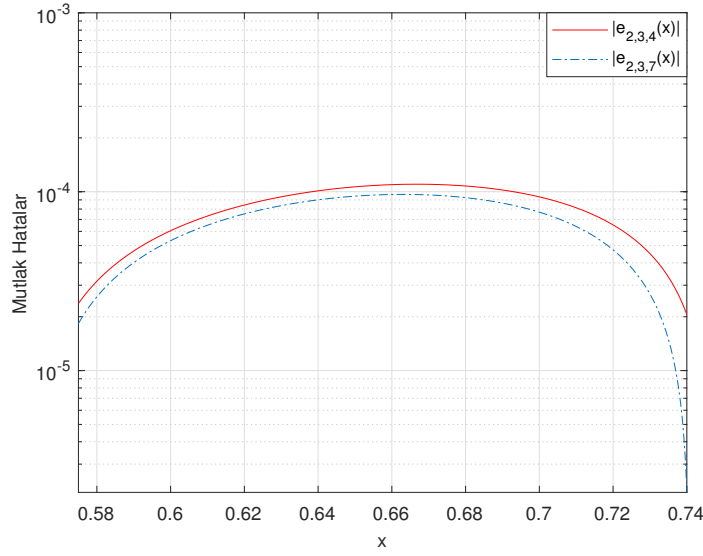


Şekil 4.7. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ çözümü için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları

(4.29) denklem sisteminin Şekil 4.8.'de iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonları ve Şekil 4.9.'da tahmini mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır.

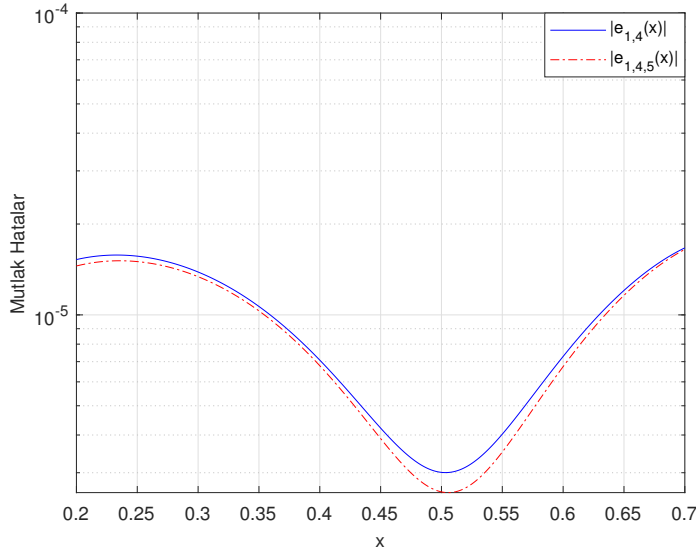


Şekil 4.8. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ çözümü için $N = 3$, $M = 4, 7$ olduğunda elde edilen iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

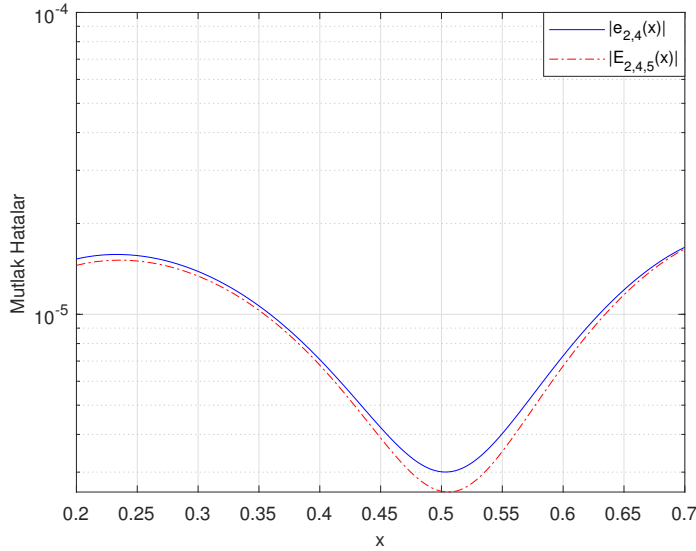


Şekil 4.9. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ çözümü için $N = 3$, $M = 4, 7$ olduğunda elde edilen tahmini mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

Şekil 4.10.'da (4.29) denklem sisteminin gerçek ve tahmini mutlak hata fonksiyonları ve Şekil 4.11.'de (4.29) denklem sisteminin gerçek ve iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır. Şekillerden yöntemin etkili olduğu görülmektedir.



Şekil 4.10. Örnek 4.2'nin $y_1(x)$ çözümü için $N = 4$, $M = 5$ olduğunda elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması



Şekil 4.11. Örnek 4.2'nin $y_2(x)$ çözümü için $N = 4$, $M = 5$ olduğunda elde edilen gerçek ve iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

Örnek 4.3.

$$\begin{cases} y_1'(x) + y_2'(x) + y_2(x) = x - e^{-x} \\ y_1'(x) + 4y_2'(x) + y_1(x) = 1 + 2e^{-x} \end{cases}, 0 \leq x \leq 1 \quad (4.36)$$

birinci mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sistemini

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0 \quad (4.37)$$

başlangıç koşulları

$$y_1(x) = e^{-x} + 3e^{-x/3} - 3 \quad \text{ve} \quad y_2(x) = -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{3e^{-x/3}}{2} - 1 + x$$

ve tam çözümleri ile birlikte ele alalım.

Burada;

$$k = 2, \quad m = 1, \quad g_1(x) = x - e^{-x}, \quad g_2(x) = 1 + 2e^{-x},$$

$$P_{1,1}^0(x) = 0 \quad P_{1,2}^0(x) = 1, \quad P_{2,1}^0(x) = 1 \quad P_{2,2}^0(x) = 0,$$

$$P_{1,1}^1(x) = 1 \quad P_{1,2}^1(x) = 1 \quad P_{2,1}^1(x) = 1 \quad P_{2,2}^1(x) = 4,$$

dır.

Şimdi, $N = 2$ için kesilmiş Laguerre seri formunda

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^2 a_{i,n} L_n(x), \quad i = 1, 2$$

çözümlerini hesaplayalım. İlk olarak, $N = 2$ için kollokasyon noktalarının kümesini bulalım. $0 \leq x \leq 1$ olduğundan, $a = 0$, $b = 1$ ve $i = 0, 1, 2$ olur ve

$$x_0 = 0 + \frac{1-0}{2} 0 = 0$$

$$x_1 = 0 + \frac{1-0}{2} 1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 0 + \frac{1-0}{2}2 = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla, $N = 2$ için kollokasyon noktalarının kümesi

$$\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1\}$$

dir. (4.11)'den problemin temel matris denklem sistemi

$$\{P_0 X \bar{D} + P_1 X \bar{B} \bar{D}\} A = G$$

dir. Burada,

$$P_0 = \begin{bmatrix} P_0(0) & 0 & 0 \\ 0 & P_0(\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & P_0(1) \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} P_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & P_1(\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & P_1(1) \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} \bar{X}(0) \\ \bar{X}(1/2) \\ \bar{X}(1) \end{bmatrix}, \quad \bar{X}(0) = \begin{bmatrix} X(0) & 0 \\ 0 & X(0) \end{bmatrix},$$

$$\bar{X}(1/2) = \begin{bmatrix} X(1/2) & 0 \\ 0 & X(1/2) \end{bmatrix}, \quad \bar{X}(1) = \begin{bmatrix} X(1) & 0 \\ 0 & X(1) \end{bmatrix},$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X(1/2) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad X(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B^T & 0 \\ 0 & B^T \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D^T & 0 \\ 0 & D^T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(0) \\ \mathbf{g}(1/2) \\ \mathbf{g}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(0) = \mathbf{g}(1/2) = \mathbf{g}(1) = \begin{bmatrix} x - e^{-x} \\ 1 + 2e^{-x} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{bmatrix}$$

dır.

Bu temel matris denklem sistemi için genişletilmiş matris Matlab'dan hesaplanır ve genişletilmiş matris aşağıdaki şekildedir.

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & ; & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -4 & -8 & ; & 3 \\ 0 & -1 & -3/2 & 1 & -1/2 & -11/8 & ; & -261/2450 \\ 1 & -1/2 & -11/8 & 0 & -4 & -6 & ; & 2711/1225 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -3/2 & ; & 921/1457 \\ 1 & -1 & -3/2 & 0 & -4 & -4 & ; & 1097/632 \end{bmatrix}$$

Koşulların matris formu

$$[\mathbf{U}; \lambda] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Buradan genişletilmiş matrisin son iki satırı yerine koşulların matris formu yazılır ve böylece yeni genişletilmiş matris

$$[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & ; & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -4 & -8 & ; & 3 \\ 0 & -1 & -3/2 & 1 & -1/2 & -11/8 & ; & -261/2450 \\ 1 & -1/2 & -11/8 & 0 & -4 & -6 & ; & 2711/1225 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Şimdi de bu sistem çözülerek, Laguerre katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = (\widetilde{\mathbf{W}})^{-1} \widetilde{\mathbf{G}}$$

$$= \begin{bmatrix} 167/2292 & -167/1146 & 1016/947 & 263/341 & -185/341 & -2695/11782 \end{bmatrix}^T$$

olarak elde edilir. Böylece, (4.3)'te

$$y_{j,N}(x) = \mathbf{L}(x) \mathbf{A}_j, \quad j = 1, 2$$

$\mathbf{A}$ matrisi yerine koyulursa,

$$y_{1,2}(x) = 0.536431061279x^2 - 2x + 1 \quad \text{ve} \quad y_{2,2}(x) = -0.114369376793x^2 + x$$

yaklaşık çözümlerini elde ederiz.

$N = 5$ için yaklaşık çözümler ise

$$y_{1,5}(x) = -0.00569482927687x^5 + 0.040951805279x^4 - 0.184340222499x^3 \\ + 0.666542960004x^2 - 2x + 1$$

ve

$$y_{2,5}(x) = 0.00275727613666x^5 - 0.0189435481094x^4 + 0.0736556629851x^3 \\ - 0.166605390222x^2 + x - 1.80411241502e - 16$$

dir.

Buradan, $N = 5$ için gerçek hata fonksiyonları

$$\begin{aligned} e_{1,5}(x) &= y_1(x) - y_{1,5}(x) \\ &= e^{-x} + 3e^{-x/3} - 3 - (-0.00569482927687x^5 + 0.040951805279x^4 \\ &\quad - 0.184340222499x^3 + 0.666542960004x^2 - 2x + 1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} e_{2,5}(x) &= y_2(x) - y_{2,5}(x) \\ &= -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{3e^{-x/3}}{2} - 1 + x - (0.00275727613666x^5 - 0.0189435481094x^4 \\ &\quad + 0.0736556629851x^3 - 0.166605390222x^2 + x - 1.80411241502e - 16) \end{aligned}$$

olur.

Şimdi, $R_{1,N}(x)$ ve $R_{2,N}(x)$ rezidü fonksiyonlarını bulalım:

$N = 5$ için bulunan yaklaşık çözümler (4.36)'da yazılarak $R_{1,5}(x)$ ve $R_{2,5}(x)$ rezidü fonksiyonları tanımlanır ve

$$\begin{aligned} R_{1,5}(x) &= y'_{1,5}(x) + y'_{2,5}(x) + y_{2,5}(x) - x + e^{-x} \\ R_{2,5}(x) &= y'_{1,5}(x) + 4y'_{2,5}(x) + y_{1,5}(x) - 1 - 2e^{-x} \end{aligned} \quad (4.38)$$

elde edilir. (4.38)'i

$$\begin{aligned} R_{1,5}(x) + x - e^{-x} &= y'_{1,5}(x) + y'_{2,5}(x) + y_{2,5}(x) \\ R_{2,5}(x) + 1 + 2e^{-x} &= y'_{1,5}(x) + 4y'_{2,5}(x) + y_{1,5}(x) \end{aligned} \quad (4.39)$$

şeklinde de yazabiliriz.

Buradan, (4.36)'dan (4.39) çıkarılırsa;

$$\begin{aligned} -R_{1,5}(x) &= [y'_1(x) - y'_{1,5}(x)] + [y'_2(x) - y'_{2,5}(x)] \\ &\quad + [y_2(x) - y_{2,5}(x)] \\ -R_{2,5}(x) &= [y'_1(x) - y'_{1,5}(x)] + 4[y'_2(x) - y'_{2,5}(x)] \\ &\quad + [y_1(x) - y_{1,5}(x)] \end{aligned} \quad (4.40)$$

hata diferansiyel denklem sistemini elde ederiz.

$N = 5$ için bulunan yaklaşık çözümler (4.37) koşullarını sağladığından;

$$y_{1,5}(0) = 1, \quad y_{2,5}(0) = 0 \quad (4.41)$$

yazılabilir ve (4.37)'den (4.41) çıkarılırsa,

$$y_1(0) - y_{1,5}(0) = 0, \quad y_2(0) - y_{2,5}(0) = 0 \quad (4.42)$$

bulunur. Böylece, (4.40) ve (4.42) hata probleminin

$$e_{i,N,M}(x) = \sum_{n=0}^M \widetilde{a_{i,n}}, L_n(x), \quad i = 1, 2$$

formunda yaklaşık çözümleri bulunur. Burada, $N = 5$ ve $M = 7$ alınırsa,

$$\begin{aligned} e_{1,5,7}(x) &= -0.000129930436026x^7 + 0.00130569691017x^6 - 0.00267936056158x^5 \\ &\quad + 0.00223393739295x^4 - 0.000839981621757x^3 + 0.000123264497461x^2 \\ &\quad - 0.0000000000101181285572x + 0.00000000000268229882749 \\ e_{2,5,7}(x) &= 0.000064729100541x^7 - 0.000647181635753x^6 + 0.0013269727579x^5 \\ &\quad - 0.00110612689063x^4 + 0.000415923337009x^3 - 0.0000610556031173x^2 \\ &\quad + 0.00000000000520472553944x - 0.00000000000141753275784 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $N = 5$ için yaklaşık çözüm ve $N = 5$, $M = 7$ için hata probleminin yaklaşık çözümü toplanırsa

$$\begin{aligned} y_{1,5,7}(x) &= -0.000129930436026x^7 + 0.00130569691017x^6 - 0.00837418983845x^5 \\ &\quad + 0.043185742672x^4 - 0.185180204121x^3 + 0.666666224502x^2 \\ &\quad - 2.00000000001x + 1 \\ y_{2,5,7}(x) &= 0.000064729100541x^7 - 0.000647181635753x^6 + 0.00408424889456x^5 \\ &\quad - 0.020049675x^4 + 0.0740715863222x^3 - 0.166666445825x^2 \\ &\quad + 1.00000000001x - 0.00000000000141771316908 \end{aligned}$$

iyileştirilmiş yaklaşık çözümleri bulunur.

Böylece, iyileştirilmiş hata fonksiyonları

$$\begin{aligned} E_{1,5,7}(x) &= 0.000129930436026x^7 - 0.00130569691017x^6 + 0.00267936056158x^5 \\ &\quad - 0.00223393739295x^4 + 0.000839981621757x^3 - 0.000123264497461x^2 \\ &\quad + 0.0000000000101181285572x - 0.00000000000268229882749 \\ E_{2,5,7}(x) &= -0.000064729100541x^7 + 0.000647181635753x^6 - 0.0013269727579x^5 \\ &\quad + 0.00110612689063x^4 - 0.000415923337009x^3 + 0.0000610556031173x^2 \\ &\quad - 0.00000000000520472553944x + 0.00000000000141753275784 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Şimdi, tam çözümler, yaklaşık çözümler, iyileştirilmiş yaklaşık çözümler ve mutlak hatalar tablo ve grafiklerde gösterilip literatürde mevcut diğer yöntemlerle karşılaştırılacaktır.

Çizelge 4.11. ve Çizelge 4.12.'de (4.36) denklem sisteminin tam çözümleri, $N = 2, 5$ için yaklaşık çözümleri ve gerçek mutlak hataları gösterilmiştir.

Çizelge 4.11. Örnek 4.3'ün $y_1(x)$ tam çözümü, $N = 2$ ve $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve gerçek mutlak hatası

x_i	Tam Çözüm $y_1(x_i) = e^{-x_i} + 3e^{-x_i/3} - 3$	Yaklaşık Çözüm $N = 2, \quad y_{1,2}(x_i)$	Mutlak Hata $N = 2, \quad e_{1,2}(x_i)$
0	1	1	0
0.2	0.625251708172835	0.621457242451165	3.7945e-03
0.4	0.295840003164482	0.285828969804661	1.0011e-02
0.6	0.005003895327973	-0.0068848179395127	1.1889e-02
0.8	-0.252886020788833	-0.256684120781356	3.7981e-03
1	-0.482526627107190	-0.463568938720869	1.8958e-02
x_i	$y_1(x_i) = e^{-x_i} + 3e^{-x_i/3} - 3$	$N = 5, \quad y_{1,5}(x_i)$	$N = 5, \quad e_{1,5}(x_i)$
0	1	1	0
0.2	0.625251708172835	0.625250697163263	1.0110e-06
0.4	0.295840003164482	0.295839150524119	8.5264e-07
0.6	0.005003895327973	0.00500250158139457	1.3937e-06
0.8	-0.252886020788833	-0.252886921731829	9.0094e-07
1	-0.482526627107190	-0.482540286492454	1.3659e-05

Çizelge 4.12. Örnek 4.3'ün $y_2(x)$ tam çözümü, $N = 2$ ve $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve gerçek mutlak hatası

x_i	Tam Çözüm $y_2(x_i) = -\frac{e^{-x_i}}{2} + \frac{3e^{-x_i/3}}{2} - 1 + x_i$	Yaklaşık Çözüm $N = 2, \quad y_{2,2}(x_i)$	Mutlak Hata $N = 2, \quad e_{2,2}(x_i)$
0	0	0	0
0.2	0.018730753077982	0.195425224928264	1.5301e-03
0.4	0.070320046035639	0.381700899713054	4.1009e-03
0.6	0.148811636094026	0.558827024354372	5.1367e-03
0.8	0.249328964117222	0.726803598852216	2.5756e-03
1	0.367879441171442	0.885630623206588	5.2266e-03
x_i	$y_2(x_i) = -\frac{e^{-x_i}}{2} + \frac{3e^{-x_i/3}}{2} - 1 + x_i$	$N = 5, \quad y_{2,5}(x_i)$	$N = 5, \quad e_{2,5}(x_i)$
0	0	-1.80411241501588e-16	1.8041e-16
0.2	0.018730753077982	0.193895602346391	5.0134e-07
0.4	0.070320046035639	0.377600379671574	4.2412e-07
0.6	0.148811636094026	0.553691004682296	6.9311e-07
0.8	0.249328964117222	0.7242284766452	4.5116e-07
1	0.367879441171442	0.890864000790473	6.7555e-06

Çizelge 4.13. ve Çizelge 4.14.'te (4.36) denklem sisteminin $N = 5$ için gerçek hataları diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Çizelgelerden $N = 5$ için Laguerre ve Bessel kollokasyon yöntemlerinde neredeyse aynı sonuçlar elde edilip diğer yöntemlerden daha iyi sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Çizelgelerde Chebyshev polinom çözümleri metodu (Akyüz-Daşcıoğlu ve Sezer 2003), Laplace dönüşüm metodu (LDM) (Davies ve Crann 1999) ve Bessel kollokasyon metodundan (Yüzbaşı 2011) yararlanılarak nümerik sonuçlar Laguerre kollokasyon metoduyla karşılaştırıldı.

Çizelge 4.13. Örnek 4.3 için $e_{1,N}(x)$ gerçek hatasının $N = 5$ olarak alındığında diğer yöntemlerle karşılaştırılması

x_i	Chebyshev $e_{1,5}(x_i)$	LDM $e_{1,5}(x_i)$	Bessel $e_{1,5}(x_i)$	Laguerre $e_{1,5}(x_i)$
0.1	4.510522e-5	6.7614e-5	5.9187e-007	5.9187e-07
0.2	7.985043e-5	8.4949e-5	1.0110e-006	1.0110e-06
0.5	9.719089e-5	3.18972e-3	1.0978e-006	1.0978e-06
0.8	8.006002e-5	5.20283e-3	9.0094e-007	9.0094e-07
1.0	1.067677e-4	1.193776e-2	1.3659e-005	1.3659e-05

Çizelge 4.14. Örnek 4.3 için $e_{2,N}(x)$ gerçek hatasının $N = 5$ olarak alındığında diğer yöntemlerle karşılaştırılması

x_i	Chebyshev $e_{2,5}(x_i)$	LDM $e_{2,5}(x_i)$	Bessel $e_{2,5}(x_i)$	Laguerre $e_{2,5}(x_i)$
0.1	2.247723e-5	8.4086e-6	2.9327e-007	2.9327e-07
0.2	3.984701e-5	1.9575e-5	5.0134e-007	5.0134e-07
0.5	4.890662e-5	2.242e-4	5.4596e-007	5.4596e-07
0.8	4.064222e-5	4.647e-4	4.5116e-007	4.5116e-07
1.0	5.390356e-5	4.710e-4	6.7555e-006	6.7555e-06

Çizelge 4.15. ve Çizelge 4.16.'da (4.36) denklem sisteminin $N = 3, 5, 7$ ve $M = 4, 5, 6, 7, 8$ için gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hataları karşılaştırılmıştır. Çizelgelerde gerçek mutlak hataları incelediğimizde N değeri arttıkça daha küçük sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Buradan, artan N değerleriyle birlikte yaklaşık çözümlerin gerçek çözüme daha yakın olduğu görülmektedir. Gerçek ve tahmini mutlak hataların nümerik sonuçlarına bakıldığında birbirine çok yakın olduğu görülmektedir. İyileştirilmiş mutlak hataların nümerik sonuçları ise, gerçek ve tahmini mutlak hatalardan daha iyi so-

nuş vermiştir ve gerçek hatalardan uzaklaşmamıştır. Buradan, rezidüel hata tahmini yönteminin etkili olduğu görülmektedir.

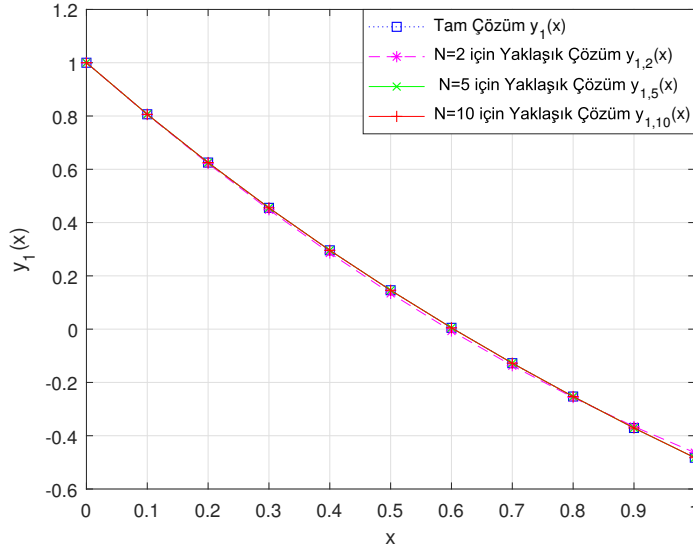
Çizelge 4.15. Örnek 4.3'ün $y_1(x)$ çözümü için $N = 3, 5, 7$ ve $M = 4, 5, 6, 7, 8$ olarak alındığında elde edilen gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hatalarının karşılaştırılması

	Gerçek Mutlak Hata	Tahmini Mutlak Hata	İyileştirilmiş Mutlak Hata
x_i	$ e_{1,3}(x_i) $	$ e_{1,3,5}(x_i) $	$ E_{1,3,4}(x_i) $
0	1.9516e-18	6.0185e-36	1.9516e-18
0.2	3.2982e-04	3.2881e-04	2.0715e-05
0.4	5.0742e-04	5.0657e-04	1.9419e-05
0.6	3.0431e-04	3.0291e-04	2.4041e-05
0.8	6.2354e-04	6.2264e-04	3.9209e-05
1	3.3007e-03	3.2871e-03	1.5281e-04
	$ e_{1,5}(x_i) $	$ e_{1,5,7}(x_i) $	$ E_{1,5,6}(x_i) $
0	3.3307e-16	1.5407e-33	3.3307e-16
0.2	1.0110e-06	1.0095e-06	4.1070e-08
0.4	8.5264e-07	8.5090e-07	4.1562e-08
0.6	1.3937e-06	1.3918e-06	5.0201e-08
0.8	9.0094e-07	8.9879e-07	8.3187e-08
1	1.3659e-05	1.3626e-05	5.6070e-07
	$ e_{1,7}(x_i) $	$ e_{1,7,8}(x_i) $	$ E_{1,7,8}(x_i) $
0	2.5260e-12	6.0397e-31	2.5260e-12
0.2	1.4761e-09	1.4299e-09	4.6185e-11
0.4	1.7442e-09	1.6865e-09	5.7704e-11
0.6	1.9778e-09	1.9070e-09	7.0793e-11
0.8	2.1495e-09	2.0640e-09	8.5469e-11
1	3.3211e-08	3.4372e-08	1.1607e-09

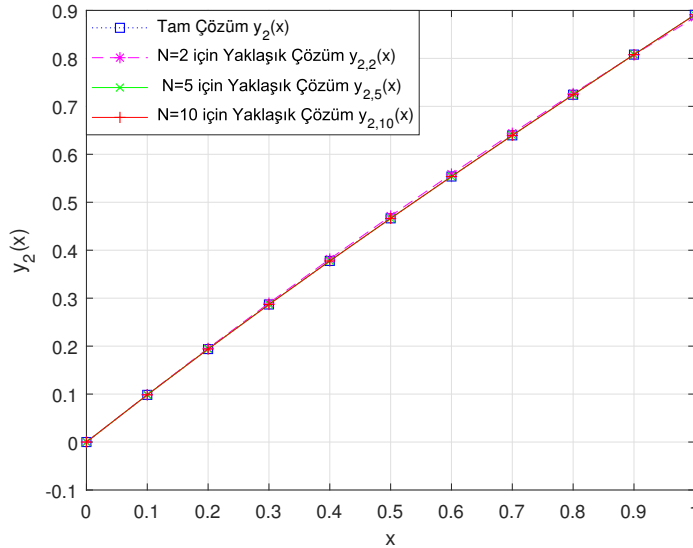
Çizelge 4.16. Örnek 4.3'ün $y_2(x)$ çözümü için $N = 3, 5, 7$ ve $M = 4, 5, 6, 7, 8$ olarak alındığında elde edilen gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hatalarının karşılaştırılması

	Gerçek Mutlak Hata	Tahmini Mutlak Hata	İyileştirilmiş Mutlak Hata
x_i	$ e_{2,3}(x_i) $	$ e_{2,3,5}(x_i) $	$ E_{2,3,4}(x_i) $
0	1.1384e-18	2.2569e-36	1.1384e-18
0.2	1.5318e-04	1.5268e-04	1.0103e-05
0.4	2.3929e-04	2.3887e-04	9.5581e-06
0.6	1.5178e-04	1.5108e-04	1.1860e-05
0.8	2.9797e-04	2.9752e-04	1.9323e-05
1	1.5029e-03	1.4962e-03	7.3101e-05
	$ e_{2,5}(x_i) $	$ e_{2,5,7}(x_i) $	$ E_{2,5,6}(x_i) $
0	1.8041e-16	1.3867e-32	1.8041e-16
0.2	5.0134e-07	5.0060e-07	2.0479e-08
0.4	4.2412e-07	4.2325e-07	2.0740e-08
0.6	6.9311e-07	6.9212e-07	2.5065e-08
0.8	4.5116e-07	4.5008e-07	4.1518e-08
1	6.7555e-06	6.7389e-06	2.7910e-07
	$ e_{2,7}(x_i) $	$ e_{2,7,8}(x_i) $	$ E_{2,7,8}(x_i) $
0	1.3696e-12	9.9224e-31	1.3696e-12
0.2	7.3734e-10	7.1436e-10	2.2985e-11
0.4	8.7153e-10	8.4278e-10	2.8752e-11
0.6	9.8849e-10	9.5318e-10	3.5302e-11
0.8	1.0746e-09	1.0319e-09	4.2646e-11
1	1.6585e-08	1.7165e-08	5.8014e-10

(4.36) denklem sisteminin Şekil 4.12. ve Şekil 4.13.'te tam çözümleri ve $N = 2, 5, 10$ için yaklaşık çözümleri karşılaştırılmıştır. Buradan, artan N değerleriyle birlikte yaklaşık çözümlerin gerçek çözüme daha yakın olduğu görülmektedir.

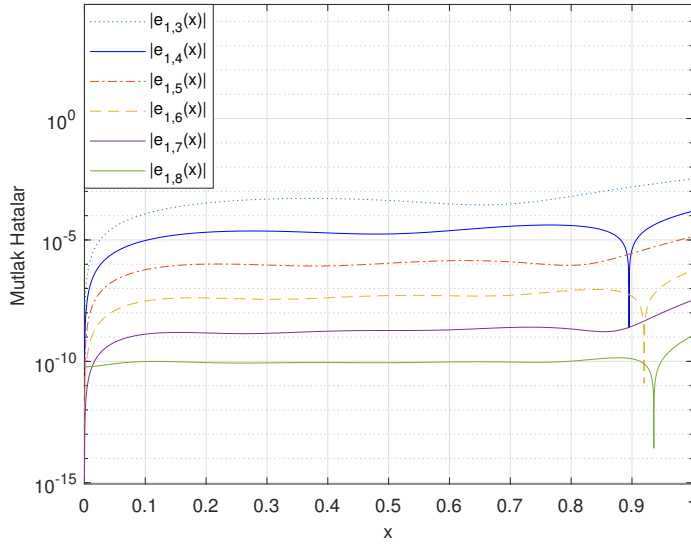


Şekil 4.12. Örnek 4.3 için $y_1(x)$ tam çözümü ve $N = 2, 5, 10$ için yaklaşık çözümleri

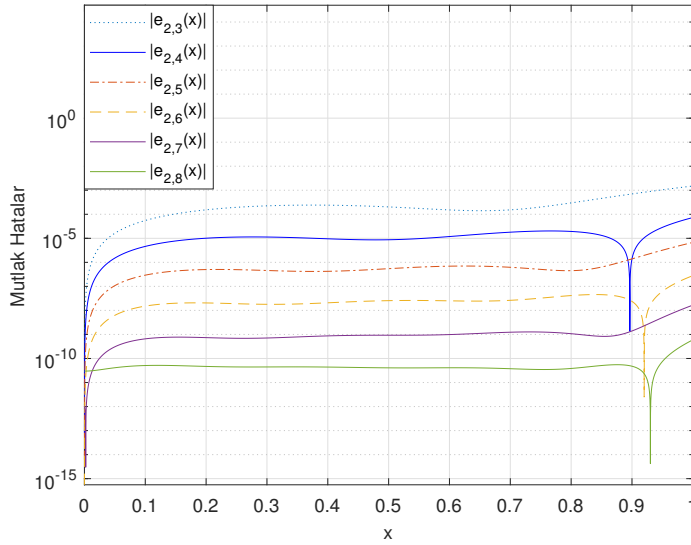


Şekil 4.13. Örnek 4.3 için $y_2(x)$ tam çözümü ve $N = 2, 5, 10$ için yaklaşık çözümleri

(4.36) denklem sisteminin Şekil 4.14. ve Şekil 4.15.'te $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır. Buradan, artan N değerleriyle birlikte daha iyi nümerik sonuçlar elde edildiği görülmektedir.

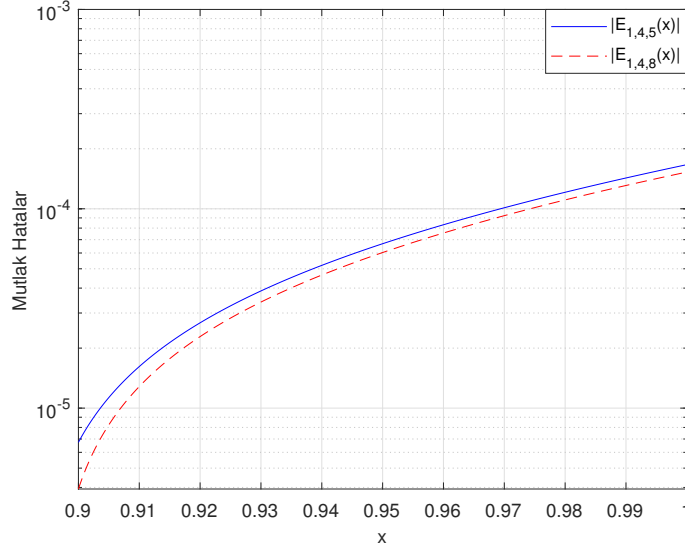


Şekil 4.14. Örnek 4.3'ün $y_1(x)$ çözümü için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları

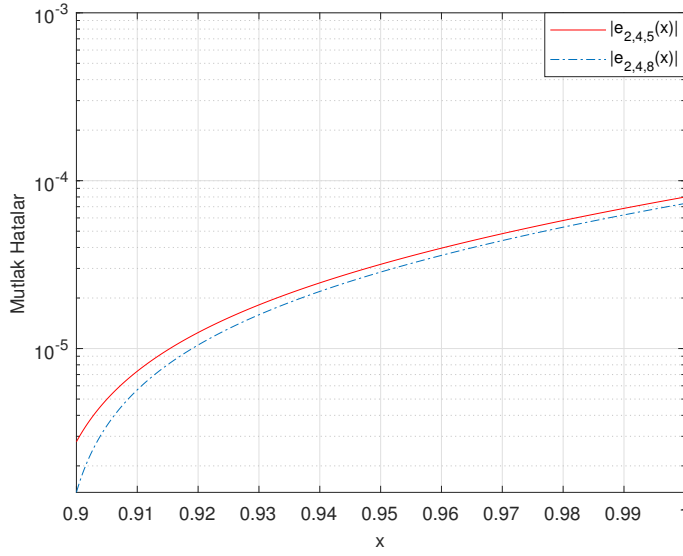


Şekil 4.15. Örnek 4.3'ün $y_2(x)$ çözümü için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları

(4.36) denklem sisteminin Şekil 4.16.'da $N = 4$, $M = 5, 8$ için elde edilen iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonları, Şekil 4.17.'de tahmini mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır.

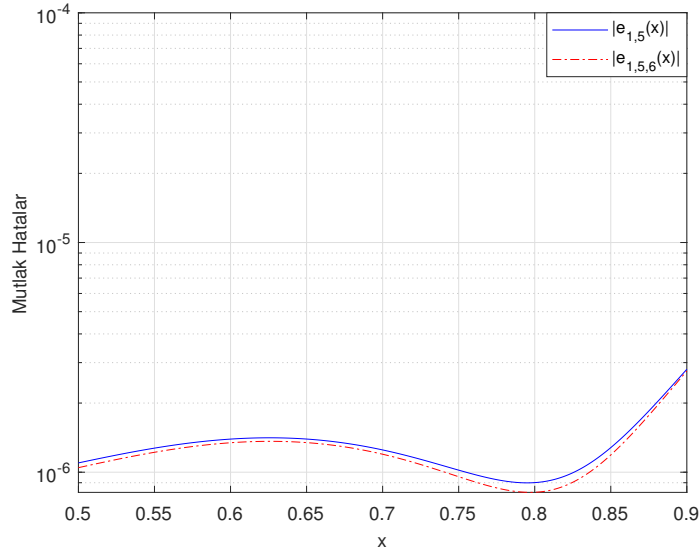


Şekil 4.16. Örnek 4.3'ün $y_1(x)$ çözümü için $N = 4$ ve $M = 5, 8$ olduğunda elde edilen iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

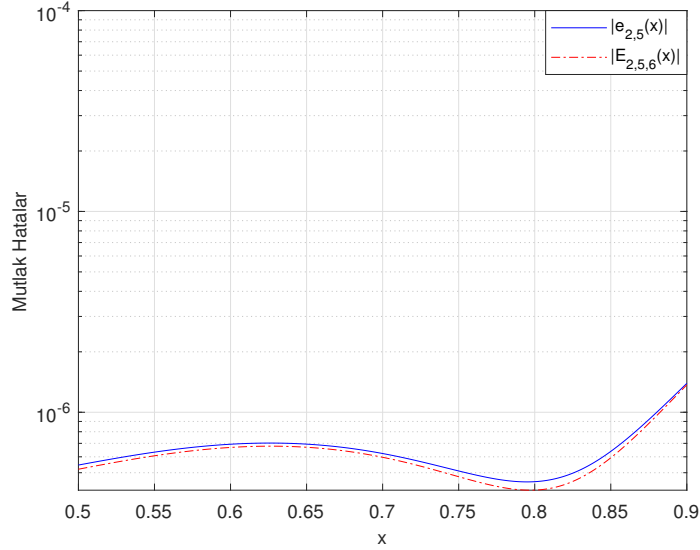


Şekil 4.17. Örnek 4.3'ün $y_2(x)$ çözümü için $N = 4$ ve $M = 5, 8$ olduğunda elde edilen tahmini mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

(4.36) denklem sisteminin Şekil 4.18.'de $N = 5$, $M = 6$ için elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hata fonksiyonları, Şekil 4.19.'da $N = 5$, $M = 6$ için elde edilen gerçek ve iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.18. Örnek 4.3'ün $y_1(x)$ çözümü için $N = 5$ ve $M = 6$ olduğunda elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması



Şekil 4.19. Örnek 4.3'ün $y_2(x)$ çözümü için $N = 5$ ve $M = 6$ olduğunda elde edilen gerçek ve iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

Örnek 4.4.

$$\begin{cases} y_1^{(4)}(x) - \cos(x)y_2^{(2)}(x) + xy_3^{(1)}(x) - y_1(x) = xe^x + \cos^2(x) \\ y_2^{(4)}(x) + \sin(x)y_1^{(3)}(x) + \cos(x)y_1(x) - \cos(x)y_3(x) = \cos(x)(1 - e^x) \\ e^{-x}y_3^{(4)}(x) + y_2^{(2)}(x) - \cos(x)y_1^{(1)}(x) + y_2(x) = \sin^2(x) \end{cases} \quad (4.43)$$

dördüncü mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sistemini $0 \leq x \leq 1$ aralığında

$$\begin{aligned} y_1(0) = 0, \quad y_1^{(1)}(0) = 1, \quad y_1^{(2)}(0) = 0, \quad y_1^{(3)}(0) = -1, \\ y_2(0) = 1, \quad y_2^{(1)}(0) = 0, \quad y_2^{(2)}(0) = -1, \quad y_2^{(3)}(0) = 0, \\ y_3(0) = 1, \quad y_3^{(1)}(0) = 1, \quad y_3^{(2)}(0) = 1, \quad y_3^{(3)}(0) = 1, \end{aligned} \quad (4.44)$$

başlangıç koşulları

$$y_1(x) = \sin(x), \quad y_2(x) = \cos(x) \quad \text{ve} \quad y_3(x) = e^x$$

ve tam çözümleri ile birlikte ele alalım.

Burada;

$$k = 3, \quad m = 4,$$

$$g_1(x) = xe^x + \cos^2(x), \quad g_2(x) = \cos(x)(1 - e^x), \quad g_3(x) = \sin^2(x),$$

$$P_{1,1}^0(x) = -1, \quad P_{1,2}^0(x) = 0, \quad P_{1,3}^0(x) = 0,$$

$$P_{2,1}^0(x) = \cos(x), \quad P_{2,2}^0(x) = 0, \quad P_{2,3}^0(x) = -\cos(x),$$

$$P_{3,1}^0(x) = 0, \quad P_{3,2}^0(x) = 1, \quad P_{3,3}^0(x) = 0,$$

$$P_{1,1}^1(x) = 0, \quad P_{1,2}^1(x) = 0, \quad P_{1,3}^1(x) = x,$$

$$P_{2,1}^1(x) = 0, \quad P_{2,2}^1(x) = 0, \quad P_{2,3}^1(x) = 0,$$

$$P_{3,1}^1(x) = -\cos(x), \quad P_{3,2}^1(x) = 0, \quad P_{3,3}^1(x) = 0,$$

$$P_{1,1}^2(x) = 0, \quad P_{1,2}^2(x) = -\cos(x), \quad P_{1,3}^2(x) = 0,$$

$$P_{2,1}^2(x) = 0, \quad P_{2,2}^2(x) = 0, \quad P_{2,3}^2(x) = 0,$$

$$P_{3,1}^2(x) = 0, \quad P_{3,2}^2(x) = 1, \quad P_{3,3}^2(x) = 0,$$

$$P_{1,1}^3(x) = 0, \quad P_{1,2}^3(x) = 0, \quad P_{1,3}^3(x) = 0,$$

$$P_{2,1}^3(x) = \sin(x), \quad P_{2,2}^3(x) = 0, \quad P_{2,3}^3(x) = 0,$$

$$P_{3,1}^3(x) = 0, \quad P_{3,2}^3(x) = 0, \quad P_{3,3}^3(x) = 0,$$

$$P_{1,1}^4(x) = 1, \quad P_{1,2}^4(x) = 0, \quad P_{1,3}^4(x) = 0,$$

$$P_{2,1}^4(x) = 0, \quad P_{2,2}^4(x) = 1, \quad P_{2,3}^4(x) = 0,$$

$$P_{3,1}^4(x) = 0, \quad P_{3,2}^4(x) = 0, \quad P_{3,3}^4(x) = e^{-x},$$

dır.

Şimdi, $N = 5$ için kesilmiş Laguerre seri formunda

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^5 a_{i,n} L_n(x), \quad i = 1, 2, 3$$

çözümlerini hesaplayalım. İlk olarak, $N = 5$ için kollokasyon noktalarının kümesini bulalım. $0 \leq x \leq 1$ olduğundan, $a = 0$, $b = 1$ ve $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ olur ve

$$x_0 = 0 + \frac{1-0}{5}0 = 0$$

$$x_1 = 0 + \frac{1-0}{5}1 = \frac{1}{5}$$

$$x_2 = 0 + \frac{1-0}{5}2 = \frac{2}{5}$$

$$x_3 = 0 + \frac{1-0}{5}3 = \frac{3}{5}$$

$$x_4 = 0 + \frac{1-0}{5}4 = \frac{4}{5}$$

$$x_5 = 0 + \frac{1-0}{5}5 = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla, $N = 5$ için kollokasyon noktalarının kümesi

$$\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \frac{3}{5}, x_4 = \frac{4}{5}, x_5 = 1\}$$

dir. (4.11)'den problemin temel matris denklem sistemi

$$\{P_0 X \bar{D} + P_1 X \bar{B} \bar{D}\} A = G$$

dir. Burada,

$$X = \begin{bmatrix} \bar{X}(0) \\ \bar{X}(1/5) \\ \bar{X}(2/5) \\ \bar{X}(3/5) \\ \bar{X}(4/5) \\ \bar{X}(1) \end{bmatrix},$$

$$\bar{X}(0) = \begin{bmatrix} X(0) & 0 & 0 \\ 0 & X(0) & 0 \\ 0 & 0 & X(0) \end{bmatrix}, \quad \bar{X}(1/5) = \begin{bmatrix} X(1/5) & 0 & 0 \\ 0 & X(1/5) & 0 \\ 0 & 0 & X(1/5) \end{bmatrix},$$

$$\bar{X}(2/5) = \begin{bmatrix} X(2/5) & 0 & 0 \\ 0 & X(2/5) & 0 \\ 0 & 0 & X(2/5) \end{bmatrix}, \quad \bar{X}(3/5) = \begin{bmatrix} X(3/5) & 0 & 0 \\ 0 & X(3/5) & 0 \\ 0 & 0 & X(3/5) \end{bmatrix},$$

$$\bar{X}(4/5) = \begin{bmatrix} X(4/5) & 0 & 0 \\ 0 & X(4/5) & 0 \\ 0 & 0 & X(4/5) \end{bmatrix}, \quad \bar{X}(1) = \begin{bmatrix} X(1) & 0 & 0 \\ 0 & X(1) & 0 \\ 0 & 0 & X(1) \end{bmatrix},$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X(1/5) = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/25 & 1/125 & 1/625 & 1/3125 \end{bmatrix},$$

$$X(2/5) = \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 4/25 & 8/125 & 16/625 & 32/3125 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(3/5) = \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 9/25 & 27/125 & 81/625 & 243/3125 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(4/5) = \begin{bmatrix} 1 & 4/5 & 16/25 & 64/125 & 256/625 & 1024/3125 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}^T \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}^T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1/6 & -2/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 & 5/24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/120 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(0) = \mathbf{g}(1/5) = \mathbf{g}(2/5) = \mathbf{g}(3/5) = \mathbf{g}(4/5) = \mathbf{g}(1) = \begin{bmatrix} \cos^2(x) + xe^x \\ -\cos(x)(e^x - 1) \\ \sin^2(x) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(0) \\ \mathbf{g}(1/5) \\ \mathbf{g}(2/5) \\ \mathbf{g}(3/5) \\ \mathbf{g}(4/5) \\ \mathbf{g}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \\ a_{1,4} \\ a_{1,5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{2,3} \\ a_{2,4} \\ a_{2,5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a_{3,0} \\ a_{3,1} \\ a_{3,2} \\ a_{3,3} \\ a_{3,4} \\ a_{3,5} \end{bmatrix}$$

dır.

Bu temel matris denklem sistemi için genişletilmiş matris Matlab'dan hesaplanır. Koşulların matris formu da hesaplanır. Sonra genişletilmiş matrisin son on iki satırı yerine koşulların matris formu yazılır ve böylece yeni genişletilmiş matris $[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}]$ bulunur. Buradan bu sistem çözülür ve Laguerre katsayılar matrisi $\mathbf{A}$ elde edilir. Son olarak,

$$y_{j,N}(x) = \mathbf{L}(x)\mathbf{A}_j, \quad j = 1, 2$$

çözümlerinde $\mathbf{A}$ matrisi yerine koyulursa,

$$y_{1,5}(x) = 0.00827514752066x^5 - 5.42101086243e - 20x^4 - 0.166666666667x^3 - 2.60208521397e - 18x^2 + x - 7.3035415877e - 19,$$

$$y_{2,5}(x) = -0.000829945789168x^5 + 0.0416666666667x^4 - 4.74338450462e - 19x^3 - 0.5x^2 - 3.36102673471e - 18x + 1$$

ve

$$y_{3,5}(x) = 0.0092284748542x^5 + 0.0416666666667x^4 + 0.166666666667x^3 + 0.5x^2 + x + 1$$

yaklaşık çözümlerini elde ederiz. Buradan, $N = 5$ için gerçek hata fonksiyonları

$$\begin{aligned} e_{1,5}(x) &= y_1(x) - y_{1,5}(x) \\ &= \sin(x) - (0.00827514752066x^5 - 5.42101086243e - 20x^4 - 0.166666666667x^3 - 2.60208521397e - 18x^2 + x - 7.3035415877e - 19), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{2,5}(x) &= y_2(x) - y_{2,5}(x) \\
&= \cos(x) - (-0.000829945789168x^5 + 0.0416666666667x^4 \\
&\quad - 4.74338450462e - 19x^3 - 0.5x^2 - 3.36102673471e - 18x + 1)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
e_{3,5}(x) &= y_3(x) - y_{3,5}(x) \\
&= e^x - (0.0092284748542x^5 + 0.0416666666667x^4 + 0.166666666667x^3 \\
&\quad + 0.5x^2 + x + 1)
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi, $R_{1,N}(x)$, $R_{2,N}(x)$ ve $R_{3,N}(x)$ rezidü fonksiyonlarını bulalım:

$N = 5$ için bulunan yaklaşık çözümler (4.43)'te yazılarak $R_{1,5}(x)$, $R_{2,5}(x)$ ve $R_{3,5}(x)$ rezidü fonksiyonları tanımlanır ve

$$\begin{aligned}
R_{1,5}(x) &= y_{1,5}^{(4)}(x) - \cos(x)y_{2,5}^{(2)}(x) + xy_{3,5}^{(1)}(x) - y_{1,5}(x) - xe^x - \cos^2(x) \\
R_{2,5}(x) &= y_{2,5}^{(4)}(x) + \sin(x)y_{1,5}^{(3)}(x) + \cos(x)y_{1,5}(x) - \cos(x)y_{3,5}(x) - \cos(x)(1 - e^x) \\
R_{3,5}(x) &= e^{-x}y_{3,5}^{(4)}(x) + y_{2,5}^{(2)}(x) - \cos(x)y_{1,5}^{(1)}(x) + y_{2,5}(x) - \sin^2(x)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

elde edilir. (4.45)'i

$$\begin{aligned}
R_{1,5}(x) + xe^x + \cos^2(x) &= y_{1,5}^{(4)}(x) - \cos(x)y_{2,5}^{(2)}(x) + xy_{3,5}^{(1)}(x) - y_{1,5}(x) \\
R_{2,5}(x) + \cos(x)(1 - e^x) &= y_{2,5}^{(4)}(x) + \sin(x)y_{1,5}^{(3)}(x) + \cos(x)y_{1,5}(x) - \cos(x)y_{3,5}(x) \\
R_{3,5}(x) + \sin^2(x) &= e^{-x}y_{3,5}^{(4)}(x) + y_{2,5}^{(2)}(x) - \cos(x)y_{1,5}^{(1)}(x) + y_{2,5}(x)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Buradan, (4.43)'ten (4.46) çıkarılırsa;

$$\begin{aligned}
-R_{1,5}(x) &= \left[y_1^{(4)}(x) - y_{1,5}^{(4)}(x) \right] - \cos(x) \left[y_2^{(2)}(x) - y_{2,5}^{(2)}(x) \right] + x \left[y_3^{(1)}(x) - y_{3,5}^{(1)}(x) \right] \\
&\quad - [y_1(x) - y_{1,5}(x)] \\
-R_{2,5}(x) &= \left[y_2^{(4)}(x) - y_{2,5}^{(4)}(x) \right] + \sin(x) \left[y_1^{(3)}(x) - y_{1,5}^{(3)}(x) \right] + \cos(x) [y_1(x) - y_{1,5}(x)] \\
&\quad - \cos(x) [y_3(x) - y_{3,5}(x)] \\
-R_{3,5}(x) &= e^{-x} \left[y_3^{(4)}(x) - y_{3,5}^{(4)}(x) \right] + \left[y_2^{(2)}(x) - y_{2,5}^{(2)}(x) \right] - \cos(x) \left[y_1^{(1)}(x) - y_{1,5}^{(1)}(x) \right] \\
&\quad + [y_2(x) - y_{2,5}(x)]
\end{aligned} \tag{4.47}$$

hata diferansiyel denklem sistemini elde ederiz.

$N = 5$ için bulunan yaklaşık çözümler (4.44) koşullarını sağladığından;

$$\begin{aligned} y_{1,5}(0) &= 0, & y_{1,5}^{(1)}(0) &= 1, & y_{1,5}^{(2)}(0) &= 0, & y_{1,5}^{(3)}(0) &= -1, \\ y_{2,5}(0) &= 1, & y_{2,5}^{(1)}(0) &= 0, & y_{2,5}^{(2)}(0) &= -1, & y_{2,5}^{(3)}(0) &= 0, \\ y_{3,5}(0) &= 1, & y_{3,5}^{(1)}(0) &= 1, & y_{3,5}^{(2)}(0) &= 1, & y_{3,5}^{(3)}(0) &= 1, \end{aligned} \quad (4.48)$$

yazılabilir ve (4.44)'ten (4.48) çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} y_1(0) - y_{1,5}(0) &= 0, & y_1^{(1)}(0) - y_{1,5}^{(1)}(0) &= 0, & y_1^{(2)}(0) - y_{1,5}^{(2)}(0) &= 0, \\ y_2(0) - y_{2,5}(0) &= 0, & y_2^{(1)}(0) - y_{2,5}^{(1)}(0) &= 0, & y_2^{(2)}(0) - y_{2,5}^{(2)}(0) &= 0, \\ y_3(0) - y_{3,5}(0) &= 0, & y_3^{(1)}(0) - y_{3,5}^{(1)}(0) &= 0, & y_3^{(2)}(0) - y_{3,5}^{(2)}(0) &= 0, \\ y_1^{(3)}(0) - y_{1,5}^{(3)}(0) &= 0, & y_2^{(3)}(0) - y_{2,5}^{(3)}(0) &= 0, & y_3^{(3)}(0) - y_{3,5}^{(3)}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.49)$$

bulunur. Böylece, (4.47) ve (4.49) hata probleminin

$$e_{i,N,M}(x) = \sum_{n=0}^M \widetilde{a_{i,n}}, L_n(x) \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

formunda yaklaşık çözümleri bulunur. Burada, $N = 5$ ve $M = 6$ alınırsa,

$$\begin{aligned} e_{1,5,6}(x) &= -0.000229858997729x^6 + 0.000134568809159x^5 + 1.93123511974e - 19x^4 \\ &\quad + 2.71050543121e - 20x^3 - 2.16840434497e - 19x^2 \\ &\quad + 5.01443504775e - 19x - 8.80914265144e - 20 \\ e_{2,5,6}(x) &= -0.00136595955254x^6 + 0.000819823385314x^5 - 4.33680868994e - 19x^2 \\ &\quad + 4.33680868994e - 19x + 4.06575814682e - 20 \\ e_{3,5,6}(x) &= 0.00164463751867x^6 - 0.000982738586165x^5 - 4.06575814682e - 20x^4 \\ &\quad - 7.04731412116e - 19x^3 + 3.46944695195e - 18x^2 \\ &\quad - 3.14418630021e - 18x + 8.13151629364e - 19 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $N = 5$ için yaklaşık çözüm ve $N = 5$, $M = 6$ için hata probleminin yaklaşık çözümü toplanırsa

$$\begin{aligned} y_{1,5,6}(x) &= -0.000229858997729x^6 + 0.00840971632982x^5 + 1.3891340335e - 19x^4 \\ &\quad - 0.166666666667x^3 - 2.81892564846e - 18x^2 + x - 8.18445585284e - 19 \\ y_{2,5,6}(x) &= -0.00136595955254x^6 - 0.0000101224038544x^5 + 0.0416666666667x^4 \\ &\quad - 4.74338450462e - 19x^3 - 0.5x^2 - 2.92734586571e - 18x + 1 \\ y_{3,5,6}(x) &= 0.00164463751867x^6 + 0.00824573626803x^5 + 0.0416666666667x^4 \\ &\quad + 0.166666666667x^3 + 0.5x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

iyileştirilmiş yaklaşık çözümleri bulunur.

Böylece, iyileştirilmiş hata fonksiyonları

$$\begin{aligned}
E_{1,5,6}(x) &= 0.000229858997729x^6 - 0.000134568809159x^5 - 1.93123511974e - 19x^4 \\
&\quad - 2.71050543121e - 20x^3 + 2.16840434497e - 19x^2 \\
&\quad 5.01443504775e - 19x + 8.80914265144e - 20 \\
E_{2,5,6}(x) &= 0.00136595955254x^6 - 0.000819823385314x^5 + 4.33680868994e - 19x^2 \\
&\quad - 4.33680868994e - 19x - 4.06575814682e - 20 \\
E_{3,5,6}(x) &= -0.00164463751867x^6 + 0.000982738586165x^5 + 4.06575814682e - 20x^4 \\
&\quad + 7.04731412116e - 19x^3 - 3.46944695195e - 18x^2 \\
&\quad + 3.14418630021e - 18x - 8.13151629364e - 19
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Şimdi, tam çözümler, yaklaşık çözümler, iyileştirilmiş yaklaşık çözümler ve mutlak hatalar tablo ve grafiklerde gösterilip literatürde mevcut diğer yöntemlerle karşılaştırılacaktır.

Çizelge 4.17., Çizelge 4.18. ve Çizelge 4.19.'da (4.43) denklem sisteminin tam çözümleri, $N = 5$ için yaklaşık çözümleri ve gerçek mutlak hataları gösterilmiştir.

Çizelge 4.17. Örnek 4.4'ün $y_1(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve gerçek mutlak hatası

x_i	Tam Çözüm $y_1(x_i) = \sin(x)$	Yaklaşık Çözüm $N = 5, \quad y_{1,5}(x_i)$	Mutlak Hata $N = 5, \quad e_{1,5}(x_i)$
0	0	-7.3035415877e-19	7.3035415877e-19
0.2	0.198669330795061	0.198669314713871	1.60811899907465e-08
0.4	0.389418342308651	0.389418070843924	2.71464727030768e-07
0.6	0.564642473395035	0.564643475471134	1.00207609898817e-06
0.8	0.717356090899523	0.717378267006066	2.21761065429815e-05
1	0.841470984807897	0.84160848085366	1.374960457630750e-04

Çizelge 4.18. Örnek 4.4'ün $y_2(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve gerçek mutlak hatası

x_i	Tam Çözüm $y_2(x_i) = \cos(x)$	Yaklaşık Çözüm $N = 5, \quad y_{2,5}(x_i)$	Mutlak Hata $N = 5, \quad e_{2,5}(x_i)$
0	1	1	0
0.2	0.980066577841242	0.980066401084014	1.76757227965396e-07
0.4	0.921060994002885	0.921058168021786	2.82598109901944e-06
0.6	0.825335614909678	0.825335463415439	1.51494239042371e-07
0.8	0.696706709347165	0.696794710030486	8.80006833209324e-05
1	0.54030230586814	0.540836720877532	5.344150093919971e-04

Çizelge 4.19. Örnek 4.4'ün $y_3(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve gerçek mutlak hatası

x_i	Tam Çözüm $y_3(x_i) = e^x$	Yaklaşık Çözüm $N = 5, \quad y_{3,5}(x_i)$	Mutlak Hata $N = 5, \quad e_{3,5}(x_i)$
0	1	1	0
0.2	1.22140275816017	1.22140295311196	1.94951789822539e-07
0.4	1.49182469764127	1.49182783291586	3.13527459017138e-06
0.6	1.82211880039051	1.82211760620474	1.19418577004815e-06
0.8	2.22554092849247	2.22542398664041	1.169418520601260e-04
1	2.71828182845905	2.7175618081879	7.200202711499240e-04

Çizelge 4.20.'de (4.43) denklem sisteminin $N = 5$ için gerçek mutlak hataları Bessel kollokasyon yöntemi (Yüzbaşı 2011) ile karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.20. Örnek 4.4 için $N = 5$ olarak alındığında elde edilen gerçek mutlak hataların Bessel yöntemiyle karşılaştırılması

x_i	Laguerre $ e_{1,5}(x_i) $	Bessel $ e_{1,5}(x_i) $	Laguerre $ e_{2,5}(x_i) $	Bessel $ e_{2,5}(x_i) $	Laguerre $ e_{3,5}(x_i) $	Bessel $ e_{3,5}(x_i) $
0	7.3035e-19	0	1.3010e-18	0	2.4395e-19	0
0.2	1.6081e-08	1.6081e-008	1.7676e-07	1.7676e-007	1.9495e-07	1.9495e-007
0.4	2.7146e-07	2.7146e-007	2.8260e-06	2.8260e-006	3.1353e-06	3.1353e-006
0.6	1.0021e-06	1.0021e-006	1.5149e-07	1.5149e-007	1.1942e-06	1.1942e-006
0.8	2.2176e-05	2.2176e-005	8.8001e-05	8.8001e-005	1.1694e-04	1.1694e-004
1	1.3750e-04	1.3750e-004	5.3442e-04	5.3442e-004	7.2002e-04	7.2002e-004

Çizelge 4.21., Çizelge 4.22. ve Çizelge 4.23.'te (4.43) denklem sisteminin gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır. Çizelgelerde gerçek mutlak hataları incelediğimizde N değeri arttıkça daha küçük sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Buradan, artan N değerleriyle birlikte yaklaşık çözümlerin gerçek çözüme daha yakın olduğu saptandı. Çizelgelerden gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hataların birbirine çok yakın olduğu görülmektedir. Buradan, yöntemin etkili olduğu söylenebilir.

Çizelge 4.21. Örnek 4.4'ün $y_1(x)$ çözümü için $N = 4, 5$ ve $M = 5, 6, 7$ olarak alındığında elde edilen gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hatalar

	Gerçek Mutlak Hata	İyileştirilmiş Mutlak Hata	
x_i	$ e_{1,4}(x_i) $	$ E_{1,4,5}(x_i) $	$ E_{1,4,6}(x_i) $
0	0	0	0
0.2	2.6641e-06	2.6480e-06	2.6764e-06
0.4	8.5009e-05	8.4738e-05	8.5174e-05
0.6	6.4247e-04	6.4348e-04	6.4322e-04
0.8	2.6894e-03	2.7116e-03	2.6954e-03
1	8.1377e-03	8.2751e-03	8.1799e-03
	Gerçek Mutlak Hata	Tahmini Mutlak Hata	
	$ e_{1,5}(x_i) $	$ e_{1,5,6}(x_i) $	$ e_{1,5,7}(x_i) $
0	7.3035e-19	1.8490e-49	8.4556e-47
0.2	1.6081e-08	2.8351e-08	1.6220e-08
0.4	2.7146e-07	4.3648e-07	2.7317e-07
0.6	1.0021e-06	2.6023e-07	9.9561e-07
0.8	2.2176e-05	1.6161e-05	2.2202e-05
1	1.3750e-04	9.5290e-05	1.3818e-04

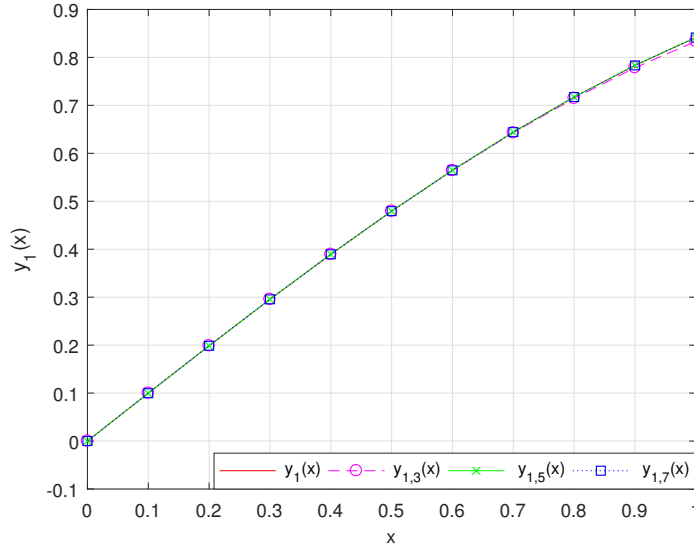
Çizelge 4.22. Örnek 4.4'ün $y_2(x)$ çözümü için $N = 4, 5$ ve $M = 5, 6, 7$ olarak alındığında elde edilen gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hatalar

	Gerçek Mutlak Hata	İyileştirilmiş Mutlak Hata	
x_i	$ e_{2,4}(x_i) $	$ E_{2,4,5}(x_i) $	$ E_{2,4,6}(x_i) $
0	0	8.8162e-39	1.7347e-18
0.2	8.8825e-08	2.6558e-07	9.0661e-08
0.4	5.6727e-06	8.4986e-06	5.6986e-06
0.6	6.4385e-05	6.4537e-05	6.4517e-05
0.8	3.5996e-04	2.7196e-04	3.6140e-04
1	1.3644e-03	8.2995e-04	1.3761e-03
	Gerçek Mutlak Hata	Tahmini Mutlak Hata	
	$ e_{2,5}(x_i) $	$ e_{2,5,6}(x_i) $	$ e_{2,5,7}(x_i) $
0	1.3010e-18	1.1414e-50	2.0432e-49
0.2	1.7676e-07	1.7492e-07	1.7750e-07
0.4	2.8260e-06	2.8000e-06	2.8350e-06
0.6	1.5149e-07	1.9258e-08	1.8439e-07
0.8	8.8001e-05	8.9438e-05	8.8062e-05
1	5.3442e-04	5.4614e-04	5.3649e-04

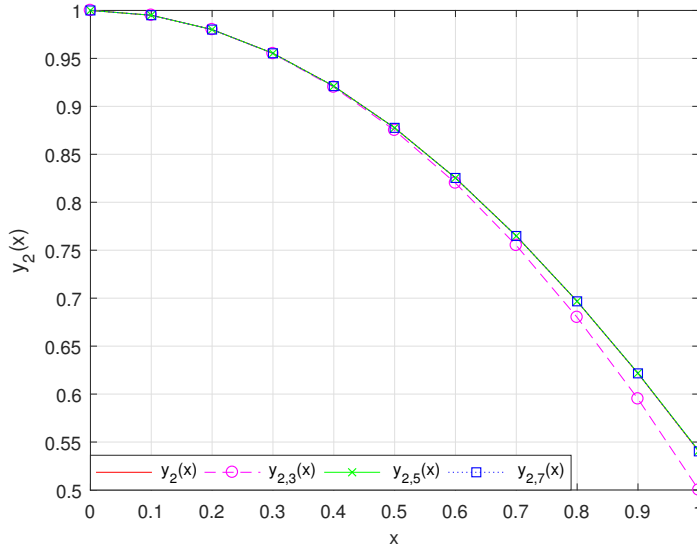
Çizelge 4.23. Örnek 4.4'ün $y_3(x)$ çözümü için $N = 4, 5$ ve $M = 5, 6, 7$ olarak alındığında elde edilen gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş mutlak hatalar

	Gerçek Mutlak Hata	İyileştirilmiş Mutlak Hata	
x_i	$ e_{3,4}(x_i) $	$ E_{3,4,5}(x_i) $	$ E_{3,4,6}(x_i) $
0	0	5.1428e-39	1.5613e-17
0.2	2.7582e-06	2.9531e-06	2.7439e-06
0.4	9.1364e-05	9.4500e-05	9.1173e-05
0.6	7.1880e-04	7.1761e-04	7.1792e-04
0.8	3.1409e-03	3.0240e-03	3.1331e-03
1	9.9485e-03	9.2285e-03	9.8904e-03
	Gerçek Mutlak Hata	Tahmini Mutlak Hata	
	$ e_{3,5}(x_i) $	$ e_{3,5,6}(x_i) $	$ e_{3,5,7}(x_i) $
0	2.4395e-19	2.9546e-48	2.7783e-47
0.2	1.9495e-07	2.0922e-07	1.9404e-07
0.4	3.1353e-06	3.3268e-06	3.1244e-06
0.6	1.1942e-06	3.1446e-07	1.2338e-06
0.8	1.1694e-04	1.0911e-04	1.1684e-04
1	7.2002e-04	6.6190e-04	7.1697e-04

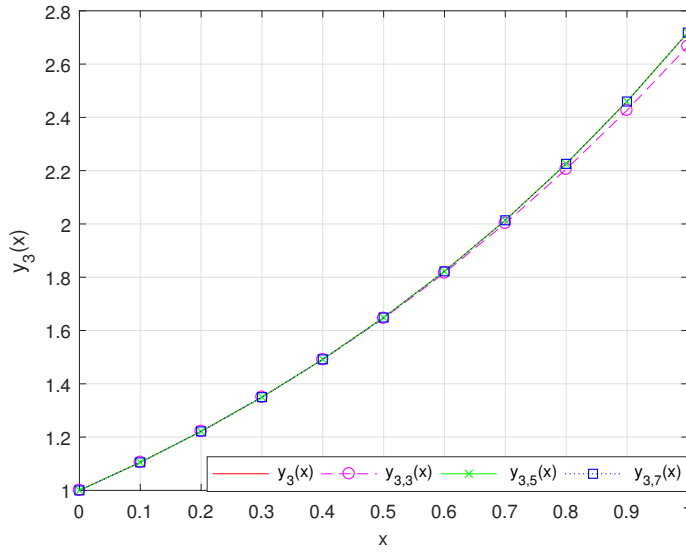
(4.43) denklem sisteminin Şekil 4.20., Şekil 4.21. ve Şekil 4.22.'de tam çözümleri ve $N = 3, 5, 7$ için yaklaşık çözümleri karşılaştırılmıştır. Buradan, artan N değerleriyle birlikte yaklaşık çözümlerin gerçek çözüme daha yakın olduğu görülmektedir.



Şekil 4.20. Örnek 4.4 için $y_1(x)$ tam çözümü ve $N = 3, 5, 7$ için yaklaşık çözümleri

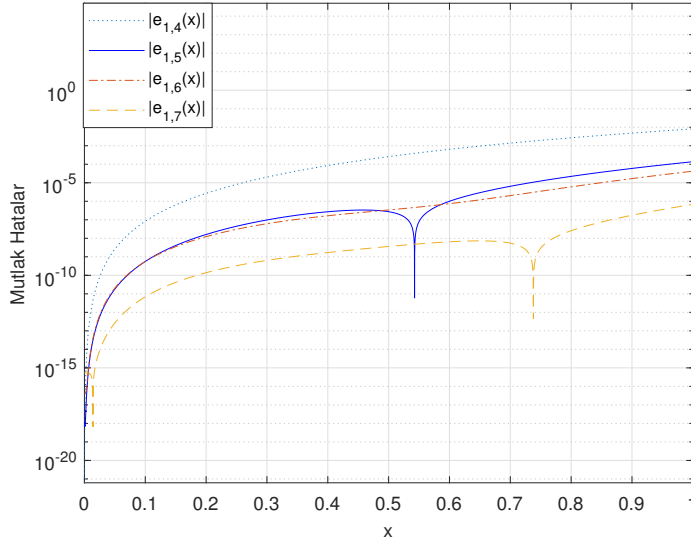


Şekil 4.21. Örnek 4.4 için $y_2(x)$ tam çözümü ve $N = 3, 5, 7$ için yaklaşık çözümleri

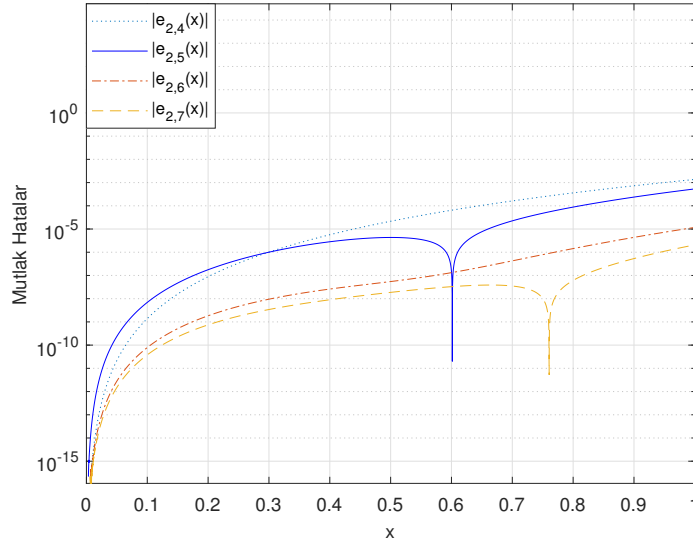


Şekil 4.22. Örnek 4.4 için $y_3(x)$ tam çözümü ve $N = 3, 5, 7$ için yaklaşık çözümleri

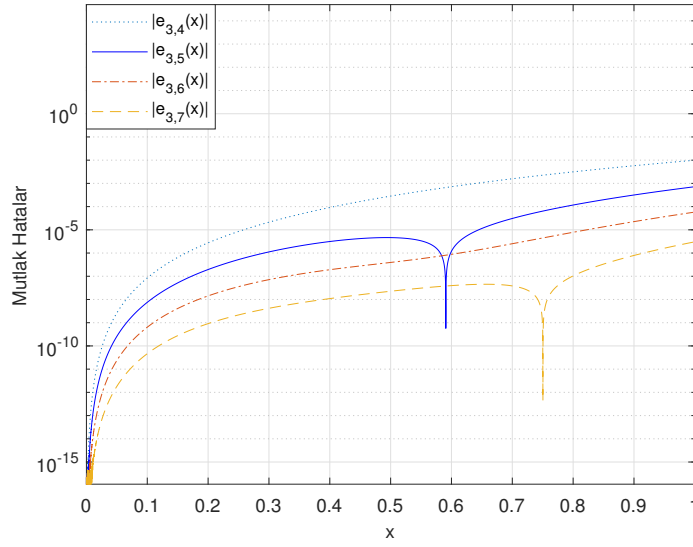
(4.43) denklem sisteminin Şekil 4.23., 4.24. ve Şekil 4.25.’te $N = 4, 5, 6, 7$ için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır. Şekillerden N değeri arttıkça hataların küçüldüğü görülmektedir.



Şekil 4.23. Örnek 4.4 için $e_{1,N}(x)$ gerçek hatasının çeşitli N değerleri için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları

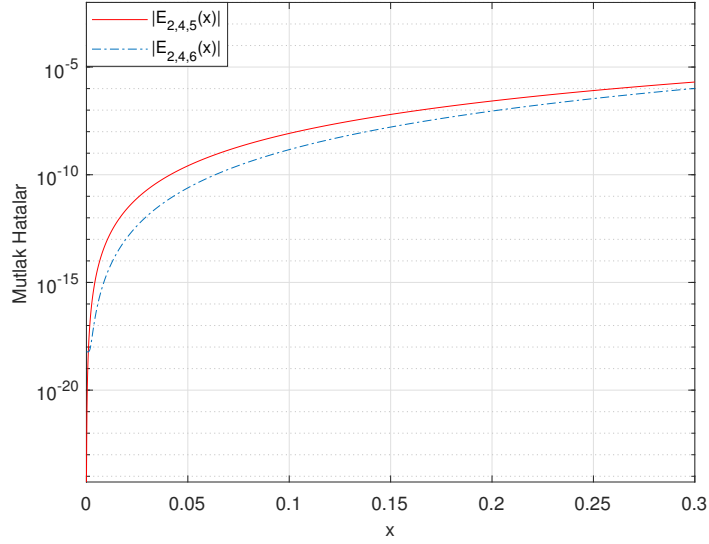


Şekil 4.24. Örnek 4.4 için $e_{2,N}(x)$ gerçek hatasının çeşitli N değerleri için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları

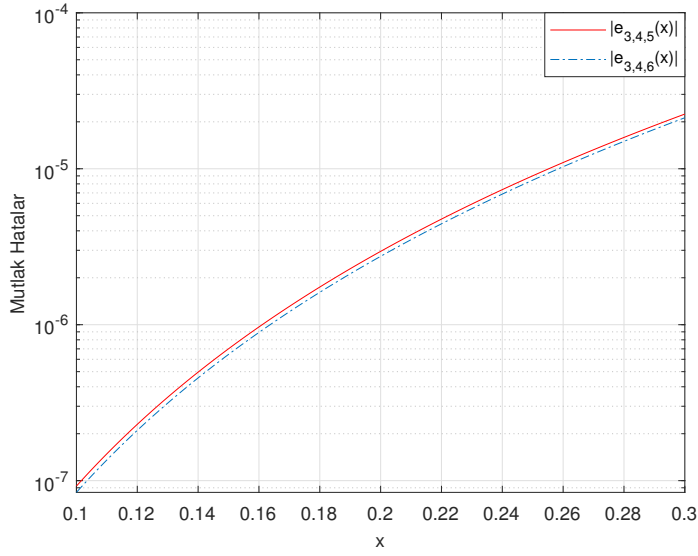


Şekil 4.25. Örnek 4.4 için $e_{3,N}(x)$ gerçek hatasının çeşitli N değerleri için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları

(4.43) denklem sisteminin Şekil 4.26.'da $N = 4$, $M = 5, 8$ için elde edilen iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonları, Şekil 4.27.'de $N = 4$, $M = 5, 8$ için elde edilen tahmini mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır.

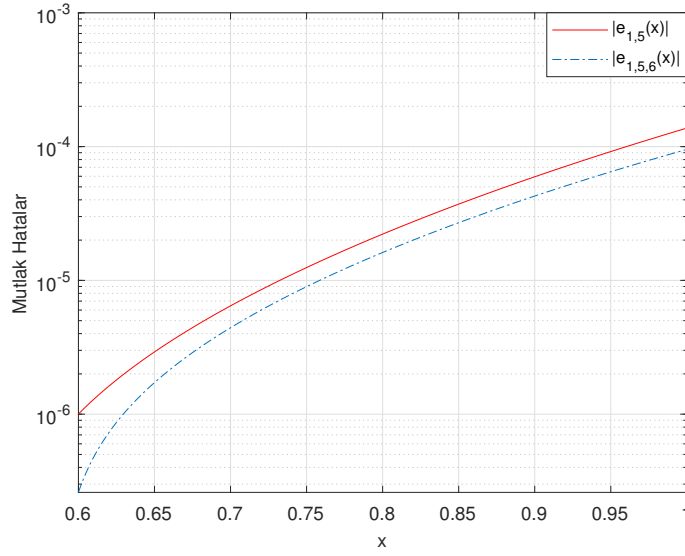


Şekil 4.26. Örnek 4.4'ün $y_2(x)$ çözümü için $N = 4$ ve $M = 5, 6$ olarak alındığında elde edilen iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

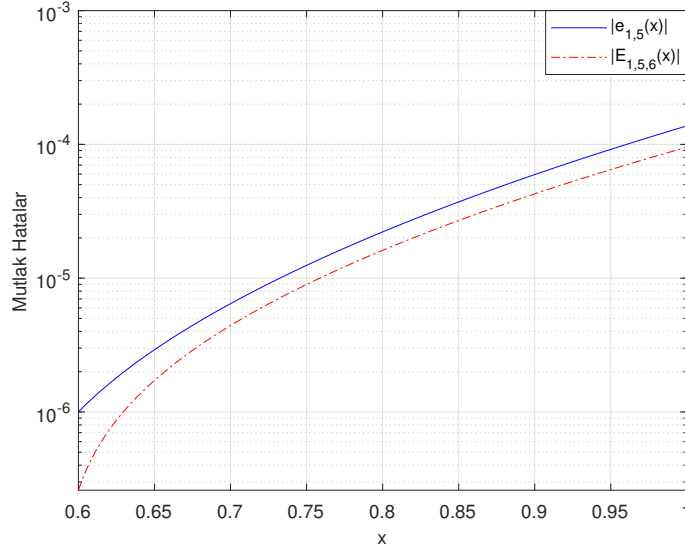


Şekil 4.27. Örnek 4.4'ün $y_3(x)$ çözümü için $N = 4$ ve $M = 5, 6$ olarak alındığında elde edilen tahmini mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

(4.43) denklem sisteminin Şekil 4.28.'de $N = 5$, $M = 6$ için elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hata fonksiyonları, Şekil 4.29.'da $N = 5$, $M = 6$ için elde edilen gerçek ve iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.28. Örnek 4.4'ün $y_1(x)$ çözümü için $N = 5$ ve $M = 6$ olarak alındığında elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması



Şekil 4.29. Örnek 4.4'ün $y_1(x)$ çözümü için $N = 5$ ve $M = 6$ olarak alındığında elde edilen gerçek ve iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

Örnek 4.5.

$$\begin{cases} y_1'(x) - y_3(x) = -\cos(x) \\ y_2'(x) - y_3(x) = -e^x \\ y_3'(x) - y_1(x) + y_2(x) = 0 \end{cases}, 0 \leq x \leq 1 \quad (4.50)$$

birinci mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sistemini

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 2 \quad (4.51)$$

başlangıç koşulları

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = \sin(x) \quad \text{ve} \quad y_3(x) = e^x + \cos(x)$$

ve tam çözümleri ile birlikte ele alalım.

Burada;

$$k = 3, \quad m = 1,$$

$$g_1(x) = -\cos(x), \quad g_2(x) = -e^x, \quad g_3(x) = 0,$$

$$P_{1,1}^0(x) = 0, \quad P_{1,2}^0(x) = 0, \quad P_{1,3}^0(x) = -1,$$

$$P_{2,1}^0(x) = 0, \quad P_{2,2}^0(x) = 0, \quad P_{2,3}^0(x) = -1,$$

$$P_{3,1}^0(x) = -1, \quad P_{3,2}^0(x) = 1, \quad P_{3,3}^0(x) = 0,$$

$$P_{1,1}^1(x) = 1, \quad P_{1,2}^1(x) = 0, \quad P_{1,3}^1(x) = 0,$$

$$P_{2,1}^1(x) = 0, \quad P_{2,2}^1(x) = 1, \quad P_{2,3}^1(x) = 0,$$

$$P_{3,1}^1(x) = 0, \quad P_{3,2}^1(x) = 0, \quad P_{3,3}^1(x) = 1,$$

dır.

Şimdi, $N = 5$ için kesilmiş Laguerre seri formunda

$$y_{i,N}(x) = \sum_{n=0}^5 a_{i,n} L_n(x), \quad i = 1, 2, 3$$

çözümlerini hesaplayalım. İlk olarak, $N = 5$ için kollokasyon noktalarının kümesini bulalım. $0 \leq x \leq 1$ olduğundan, $a = 0$, $b = 1$ ve $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ olur ve

$$x_0 = 0 + \frac{1-0}{5}0 = 0$$

$$x_1 = 0 + \frac{1-0}{5}1 = \frac{1}{5}$$

$$x_2 = 0 + \frac{1-0}{5}2 = \frac{2}{5}$$

$$x_3 = 0 + \frac{1-0}{5}3 = \frac{3}{5}$$

$$x_4 = 0 + \frac{1-0}{5}4 = \frac{4}{5}$$

$$x_5 = 0 + \frac{1-0}{5}5 = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla, $N = 5$ için kollokasyon noktalarının kümesi

$$\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \frac{3}{5}, x_4 = \frac{4}{5}, x_5 = 1\}$$

dir. (4.11)'den problemin temel matris denklem sistemi

$$\{P_0 X \bar{D} + P_1 X \bar{B} \bar{D}\} A = G$$

dir. Burada,

$$X = \begin{bmatrix} \bar{X}(0) \\ \bar{X}(1/5) \\ \bar{X}(2/5) \\ \bar{X}(3/5) \\ \bar{X}(4/5) \\ \bar{X}(1) \end{bmatrix},$$

$$\bar{X}(0) = \begin{bmatrix} X(0) & 0 & 0 \\ 0 & X(0) & 0 \\ 0 & 0 & X(0) \end{bmatrix}, \quad \bar{X}(1/5) = \begin{bmatrix} X(1/5) & 0 & 0 \\ 0 & X(1/5) & 0 \\ 0 & 0 & X(1/5) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}}(2/5) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(2/5) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(2/5) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}(2/5) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(3/5) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(3/5) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(3/5) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}(3/5) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}}(4/5) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(4/5) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(4/5) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}(4/5) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(1) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(1) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(1/5) = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/25 & 1/125 & 1/625 & 1/3125 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(2/5) = \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 4/25 & 8/125 & 16/625 & 32/3125 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(3/5) = \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 9/25 & 27/125 & 81/625 & 243/3125 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(4/5) = \begin{bmatrix} 1 & 4/5 & 16/25 & 64/125 & 256/625 & 1024/3125 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}^T \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}^T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1/6 & -2/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 & 5/24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/120 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(0) = \mathbf{g}(1/5) = \mathbf{g}(2/5) = \mathbf{g}(3/5) = \mathbf{g}(4/5) = \mathbf{g}(1) = \begin{bmatrix} -\cos(x) \\ -e^x \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(0) \\ \mathbf{g}(1/5) \\ \mathbf{g}(2/5) \\ \mathbf{g}(3/5) \\ \mathbf{g}(4/5) \\ \mathbf{g}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \\ a_{1,4} \\ a_{1,5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{2,3} \\ a_{2,4} \\ a_{2,5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a_{3,0} \\ a_{3,1} \\ a_{3,2} \\ a_{3,3} \\ a_{3,4} \\ a_{3,5} \end{bmatrix}$$

dır.

Bu temel matris denklem sistemi için genişletilmiş matris Matlab'dan hesaplanır. Koşulların matris formu da hesaplanır. Sonra genişletilmiş matrisin son üç satırı yerine koşulların matris formu yazılır ve böylece yeni genişletilmiş matris $[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}]$ bulunur. Buradan bu sistem çözülür ve Laguerre katsayılar matrisi $\mathbf{A}$ elde edilir. Son olarak,

$$y_{j,N}(x) = \mathbf{L}(x)\mathbf{A}_j \quad j = 1, 2, 3$$

çözümlerinde $\mathbf{A}$ matrisi yerine koyulursa,

$$y_{1,5}(x) = 0.0125314366248x^5 + 0.0377210999073x^4 + 0.168225455271x^3 \\ + 0.499768584831x^2 + x + 1,$$

$$y_{2,5}(x) = 0.00764092737182x^5 + 0.000782824607297x^4 - 0.16698894934x^3 \\ + 0.0000453276257103x^2 + x - 6.10622663544e - 16$$

ve

$$y_{3,5}(x) = 0.0093438587612x^5 + 0.0820919229142x^4 + 0.167226486969x^3 \\ - 0.0000938977776579x^2 + x + 2$$

yaklaşık çözümlerini elde ederiz.

Buradan, $N = 5$ için gerçek hata fonksiyonları

$$e_{1,5}(x) = y_1(x) - y_{1,5}(x) \\ = e^x - (0.0125314366248x^5 + 0.0377210999073x^4 + 0.168225455271x^3 \\ + 0.499768584831x^2 + x + 1),$$

$$e_{2,5}(x) = y_2(x) - y_{2,5}(x) \\ = \sin(x) - (0.00764092737182x^5 + 0.000782824607297x^4 - 0.16698894934x^3 \\ + 0.0000453276257103x^2 + x - 6.10622663544e - 16)$$

ve

$$e_{3,5}(x) = y_3(x) - y_{3,5}(x) \\ = e^x + \cos(x) - (0.0093438587612x^5 + 0.0820919229142x^4 \\ + 0.167226486969x^3 - 0.0000938977776579x^2 + x + 2)$$

olur.

Şimdi, $R_{1,N}(x)$, $R_{2,N}(x)$ ve $R_{3,N}(x)$ rezidü fonksiyonlarını bulalım:

$N = 5$ için bulunan yaklaşık çözümler (4.50)'de yazılarak $R_{1,5}(x)$, $R_{2,5}(x)$ ve $R_{3,5}(x)$ rezidü fonksiyonları tanımlanır ve

$$R_{1,5}(x) = y'_{1,5}(x) - y_{3,5}(x) + \cos(x) \\ R_{2,5}(x) = y'_{2,5}(x) - y_{3,5}(x) + e^x \\ R_{3,5}(x) = y'_{3,5}(x) - y_{1,5}(x) + y_{2,5}(x) \quad (4.52)$$

elde edilir. (4.52)'yi

$$R_{1,5}(x) - \cos(x) = y'_{1,5}(x) - y_{3,5}(x) \\ R_{2,5}(x) - e^x = y'_{2,5}(x) - y_{3,5}(x) \\ R_{3,5}(x) = y'_{3,5}(x) - y_{1,5}(x) + y_{2,5}(x) \quad (4.53)$$

şeklinde de yazabiliriz.

Buradan, (4.50)'den (4.53) çıkarılırsa;

$$\begin{aligned}
 -R_{1,5}(x) &= [y_1'(x) - y_{1,5}'(x)] - [y_3(x) - y_{3,5}(x)] \\
 -R_{2,5}(x) &= [y_2'(x) - y_{2,5}'(x)] - [y_3(x) - y_{3,5}(x)] \\
 -R_{3,5}(x) &= [y_3'(x) - y_{3,5}'(x)] - [y_1(x) - y_{1,5}(x)] \\
 &\quad + [y_2(x) - y_{2,5}(x)]
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

hata diferansiyel denklem sistemini elde ederiz.

$N = 5$ için bulunan yaklaşık çözümler (4.51) koşullarını sağladığından;

$$y_{1,5}(0) = 1, \quad y_{2,5}(0) = 0, \quad y_{3,5}(0) = 2 \tag{4.55}$$

yazılabilir ve (4.51)'den (4.55) çıkarılırsa,

$$y_1(0) - y_{1,5}(0) = 0, \quad y_2(0) - y_{2,5}(0) = 0, \quad y_3(0) - y_{3,5}(0) = 0 \tag{4.56}$$

bulunur. Böylece, (4.54) ve (4.56) hata probleminin

$$e_{i,N,M}(x) = \sum_{n=0}^M \widetilde{a_{i,n}} L_n(x) \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

formunda yaklaşık çözümleri bulunur. Burada, $N = 5$ ve $M = 7$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
 e_{1,5,7}(x) &= 0.000306959869631x^7 + 0.00122570193598x^6 - 0.00407544164392x^5 \\
 &\quad + 0.00389566946297x^4 - 0.00154817232484x^3 + 0.000230447473536x^2 \\
 &\quad - 0.00000000000976640990302x + 0.00000000000207300843158 \\
 e_{2,5,7}(x) &= -0.000178723544835x^7 - 0.0000370950201044x^6 + 0.000723152013254x^5 \\
 &\quad - 0.000796175465415x^4 + 0.000325300246516x^3 - 0.0000456286784924x^2 \\
 &\quad + 4.54747350886e - 13x + 6.78568312651e - 13 \\
 e_{3,5,7}(x) &= 0.000388549599926x^7 - 0.000273778004541x^6 - 0.000809684680823x^5 \\
 &\quad + 0.00116118287194x^4 - 0.000543050680386x^3 + 0.0000924116106393x^2 \\
 &\quad + 3.48165940522e - 13x - 7.59357854374e - 14
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $N = 5$ için yaklaşık çözüm ve $N = 5$, $M = 7$ için hata probleminin

yaklaşık çözümü toplanırsa

$$y_{1,5,7}(x) = 0.000306959869631x^7 + 0.00122570193598x^6 + 0.00845599498091x^5 \\ + 0.0416167693702x^4 + 0.166677282946x^3 + 0.499999032304x^2 \\ + 0.99999999999x + 1.0$$

$$y_{2,5,7}(x) = -0.000178723544835x^7 - 0.0000370950201044x^6 + 0.00836407938507x^5 \\ - 0.0000133508581183x^4 - 0.166663649093x^3 - 0.000000301052782134x^2 \\ + 1.0x + 6.77957689987e - 13$$

$$y_{3,5,7}(x) = 0.000388549599926x^7 - 0.000273778004541x^6 + 0.00853417408037x^5 \\ + 0.0832531057861x^4 + 0.166683436288x^3 - 0.00000148616701855x^2 \\ + 1.0x + 2.0$$

iyileştirilmiş yaklaşık çözümleri bulunur.

Böylece, iyileştirilmiş hata fonksiyonu

$$E_{1,5,7}(x) = -0.000306959869631x^7 - 0.00122570193598x^6 + 0.00407544164392x^5 \\ - 0.00389566946297x^4 + 0.00154817232484x^3 - 0.000230447473536x^2 \\ 0.0000000000976640990302x - 0.0000000000207300843158$$

$$E_{2,5,7}(x) = 0.000178723544835x^7 + 0.0000370950201044x^6 - 0.000723152013254x^5 \\ + 0.000796175465415x^4 - 0.000325300246516x^3 + 0.0000456286784924x^2 \\ - 4.54747350886e - 13x - 6.78568312651e - 13$$

$$E_{3,5,7}(x) = -0.000388549599926x^7 + 0.000273778004541x^6 + 0.000809684680823x^5 \\ - 0.00116118287194x^4 + 0.000543050680386x^3 - 0.0000924116106393x^2 \\ - 3.48165940522e - 13x + 7.59357854374e - 14$$

olarak bulunur.

Şimdi, tam çözümler, yaklaşık çözümler, iyileştirilmiş yaklaşık çözümler ve mutlak hatalar tablo ve grafiklerde gösterilip literatürde mevcut diğer yöntemlerle karşılaştırılacaktır.

Çizelge 4.24., Çizelge 4.25. ve Çizelge 4.26.'da (4.50) denklem sisteminin tam çözümleri, $N = 5$ için yaklaşık çözümleri ve gerçek mutlak hataları gösterilmiştir.

Çizelge 4.24. Örnek 4.5'in $y_1(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve mutlak hatası

x_i	Tam Çözüm $y_1(x_i) = e^x$	Yaklaşık Çözüm $N = 5, \quad y_{1,5}(x_i)$	Mutlak Hata $N = 5, \quad e_{1,5}(x_i)$
0	1	1	0
0.2	1.221402758160170	1.221400910854970	1.847305199862804e-06
0.4	1.491824697641270	1.491823384778939	1.312862331769250e-06
0.6	1.822118800390509	1.822116487937574	2.312452935093101e-06
0.8	2.225540928492467	2.225540191065770	7.374266971753343e-07
1	2.718281828459045	2.718246576634042	3.525182500358197e-05

Çizelge 4.25. Örnek 4.5'in $y_2(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve mutlak hatası

x_i	Tam Çözüm $y_2(x_i) = \sin(x)$	Yaklaşık Çözüm $N = 5, \quad y_{2,5}(x_i)$	Mutlak Hata $N = 5, \quad e_{2,5}(x_i)$
0	0	-6.10622663543836e-16	6.106226635438361e-16
0.2	0.198669330795061	0.198669599126442	2.683313805533364e-07
0.4	0.389418342308650	0.389418243068613	9.924003740269377e-08
0.6	0.564642473395035	0.56464231746944	1.559255952202472e-07
0.8	0.717356090899523	0.717355091658926	9.992405972177166e-07
1	0.841470984807897	0.841480130265226	9.145457329101270e-06

Çizelge 4.26. Örnek 4.5'in $y_3(x)$ tam çözümü, $N = 5$ için yaklaşık çözümü ve mutlak hatası

x_i	Tam Çözüm $y_3(x_i) = e^x + \cos(x)$	Yaklaşık Çözüm $N = 5, \quad y_{3,5}(x_i)$	Mutlak Hata $N = 5, \quad e_{3,5}(x_i)$
0	2	2	0
0.2	2.20146933600141	2.20146839309611	9.429053016268426e-07
0.4	2.41288569164416	2.41288470586189	9.857822643174806e-07
0.6	2.64745441530019	2.64745280965224	1.605647951360405e-06
0.8	2.92224763783963	2.9222465140148	1.123824833127563e-06
1	3.25858413432718	3.25856837086643	1.576346075300203e-05

Çizelge 4.27.'de (4.50) denklem sisteminin $N = 6$ için elde edilen gerçek mutlak hataları diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Çizelgelerde (DDM) diferansiyel dönüşüm metodundan (Thongmoon ve Pusjuso 2009) yararlanılarak nümerik sonuçlar Laguerre kollokasyon metoduyla karşılaştırıldı.

Çizelge 4.27. Örnek 4.5'te $N = 6$ için elde edilen gerçek mutlak hataların DDM ile karşılaştırılması

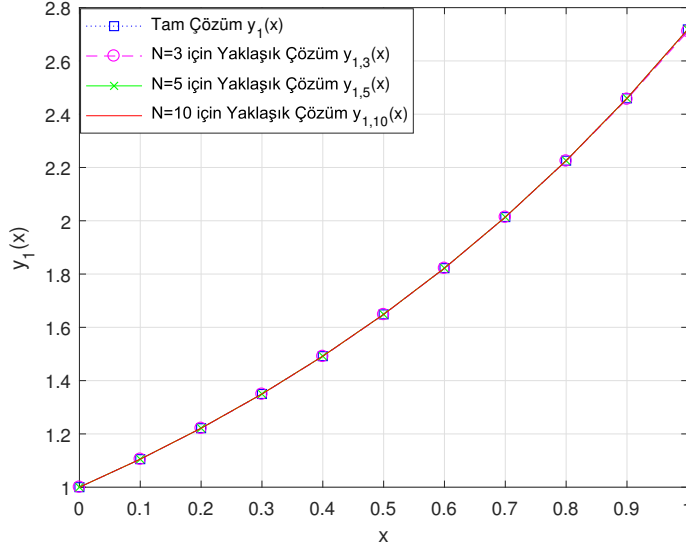
x_i	Laguerre $ e_{1,6}(x_i) $	DDM $ e_{1,6}(x_i) $	Laguerre $ e_{2,6}(x_i) $	DDM $ e_{2,6}(x_i) $	Laguerre $ e_{3,6}(x_i) $	DDM $ e_{3,6}(x_i) $
0	1.7319e-14	0	5.8398e-14	0	2.7756e-17	0
0.2	8.9691e-08	2.6046e-09	2.6784e-08	2.5383e-09	1.1003e-07	2.6681e-09
0.4	9.4300e-08	3.4209e-07	1.9940e-09	3.2436e-07	1.0917e-07	3.5831e-07
0.6	1.1665e-07	6.0004e-06	2.9723e-08	5.5266e-06	1.2560e-07	6.4153e-06
0.8	1.9907e-07	4.6173e-05	2.3020e-08	4.1242e-05	2.1407e-07	5.0305e-05
1	1.5209e-06	2.2627e-04	1.1272e-06	1.9568e-04	2.0229e-06	2.5080e-04

Çizelge 4.28.'de (4.50) denklem sisteminin $N = 5$ ve $M = 7$ için gerçek ve tahmini mutlak hataları karşılaştırılmıştır.

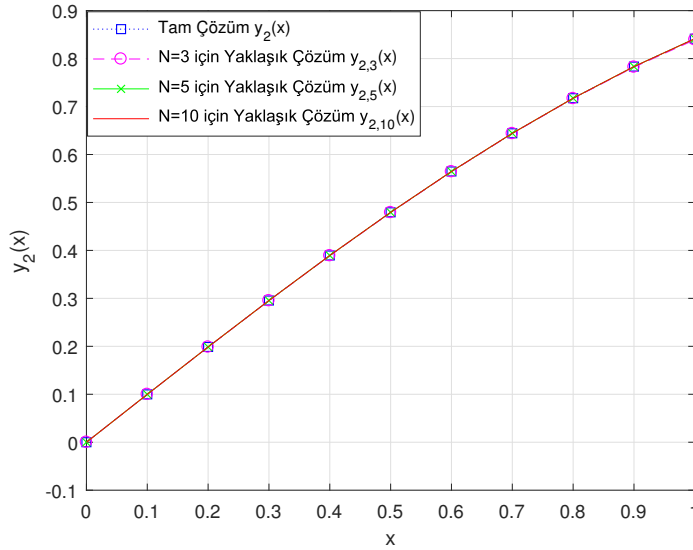
Çizelge 4.28. Örnek 4.5'te $y_1(x)$, $y_2(x)$ ve $y_3(x)$ için $N = 5$ ve $M = 7$ olduğunda elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hataların karşılaştırılması

x_i	Gerçek Mutlak Hata $ e_{1,5}(x_i) $	Tahmini Mutlak Hata $ e_{1,5,7}(x_i) $
0	7.4246e-16	2.3882e-32
0.2	1.8473e-06	1.8438e-06
0.4	1.3129e-06	1.3086e-06
0.6	2.3125e-06	2.3075e-06
0.8	7.3743e-07	7.3220e-07
1	3.5252e-05	3.5165e-05
	$ e_{2,5}(x_i) $	$ e_{2,5,7}(x_i) $
0	6.1062e-16	8.0119e-32
0.2	2.6833e-07	2.6988e-07
0.4	9.9240e-08	9.6850e-08
0.6	1.5593e-07	1.5267e-07
0.8	9.9924e-07	9.9507e-07
1	9.1455e-06	9.1704e-06
	$ e_{3,5}(x_i) $	$ e_{3,5,7}(x_i) $
0	6.9389e-18	8.3357e-34
0.2	9.4291e-07	9.3830e-07
0.4	9.8578e-07	9.8093e-07
0.6	1.6056e-06	1.6010e-06
0.8	1.1238e-06	1.1200e-06
1	1.5763e-05	1.5631e-05

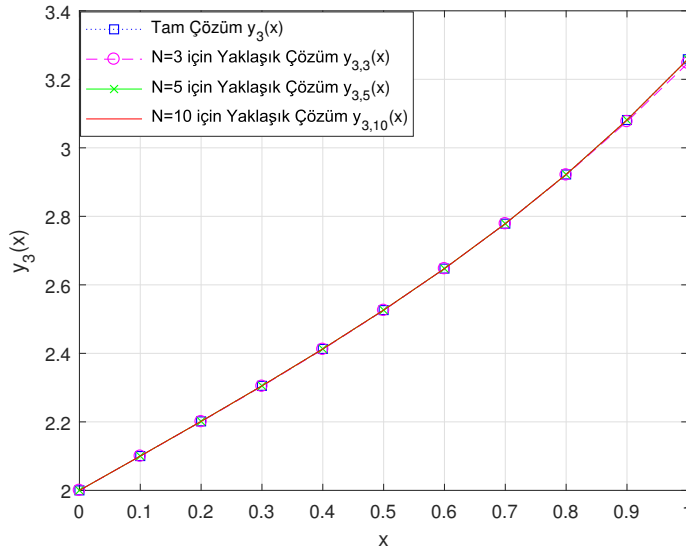
Şekil 4.30., Şekil 4.31. ve Şekil 4.32.'de (4.50) denklem sisteminin tam çözümleri ve $N = 3, 5, 10$ için yaklaşık çözümleri karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.30. Örnek 4.5'te $y_1(x)$ tam çözümü ve $N = 3, 5, 10$ için yaklaşık çözümleri

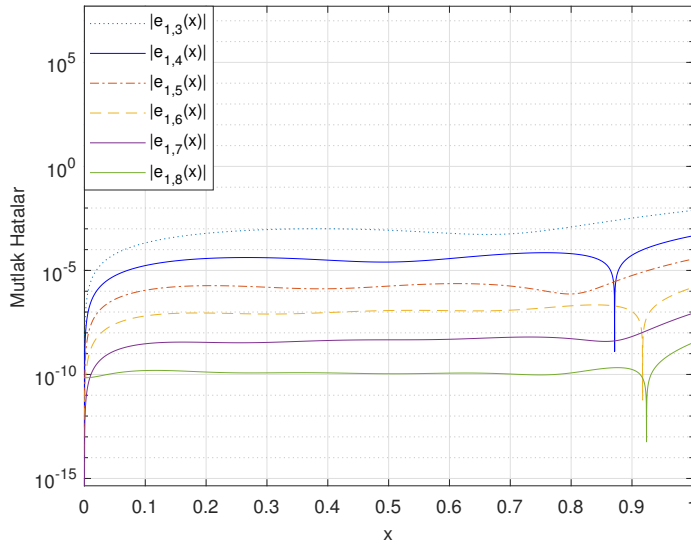


Şekil 4.31. Örnek 4.5'te $y_2(x)$ tam çözümü ve $N = 3, 5, 10$ için yaklaşık çözümleri

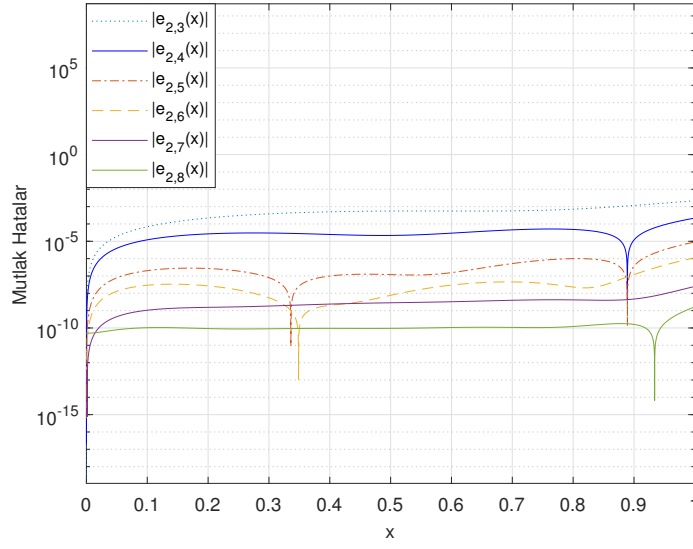


Şekil 4.32. Örnek 4.5'te $y_3(x)$ tam çözümü ve $N = 3, 5, 10$ için yaklaşık çözümleri

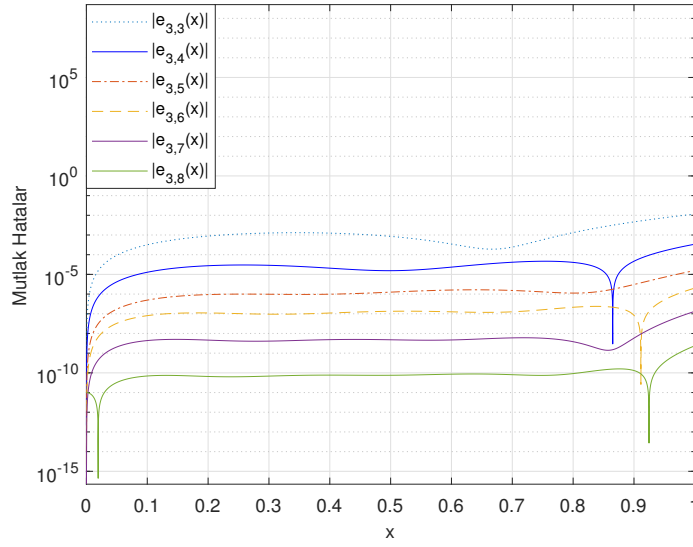
(4.50) denklem sisteminin Şekil 4.33., Şekil 4.34. ve Şekil 4.35.'te $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ için elde edilen gerçek mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır. Şekillerden N değeri arttıkça hataların küçüldüğü görülmektedir.



Şekil 4.33. Örnek 4.5'in $y_1(x)$ çözümü için $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ olarak alındığında elde edilen gerçek mutlak hatalarının karşılaştırılması

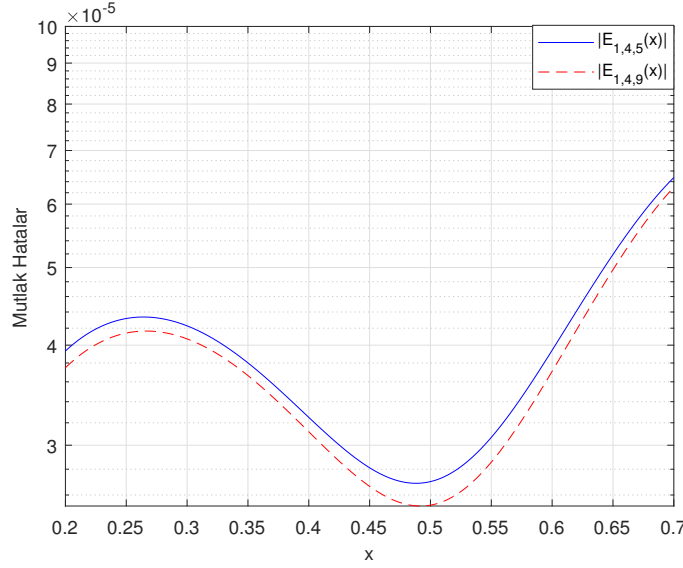


Şekil 4.34. Örnek 4.5'in $y_2(x)$ çözümü için $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ olarak alındığında elde edilen gerçek mutlak hatalarının karşılaştırılması

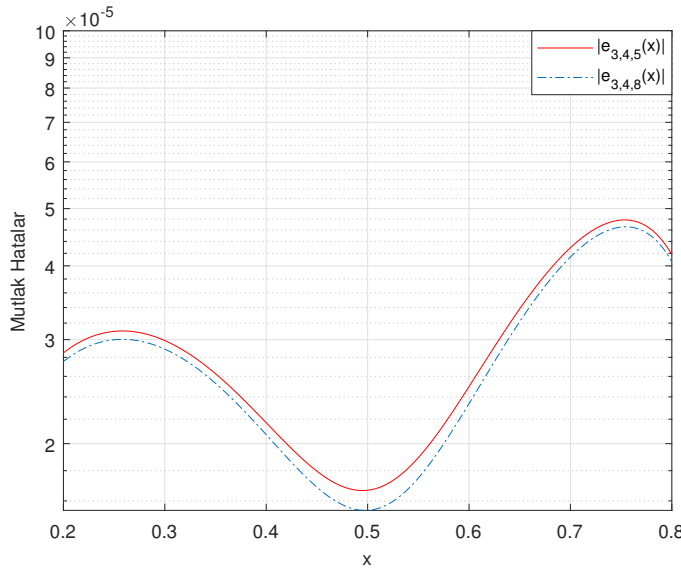


Şekil 4.35. Örnek 4.5'in $y_3(x)$ çözümü için $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ olarak alındığında elde edilen gerçek mutlak hatalarının karşılaştırılması

(4.50) denklem sisteminin Şekil 4.36.'da $N = 4$, $M = 5, 9$ için elde edilen iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonları, Şekil 4.37.'de $N = 4$, $M = 5, 8$ için elde edilen tahmini mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır.

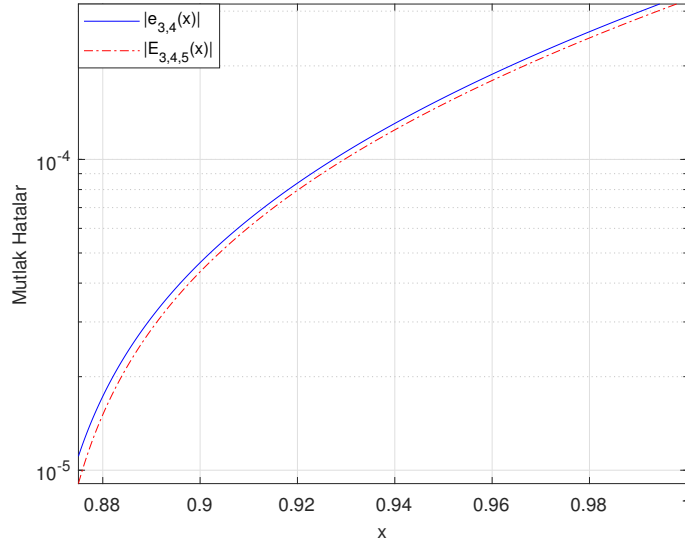


Şekil 4.36. Örnek 4.5'in $y_1(x)$ çözümü için $N = 4$, $M = 5, 9$ olarak alındığında elde edilen iyileştirilmiş mutlak hatalarının karşılaştırılması

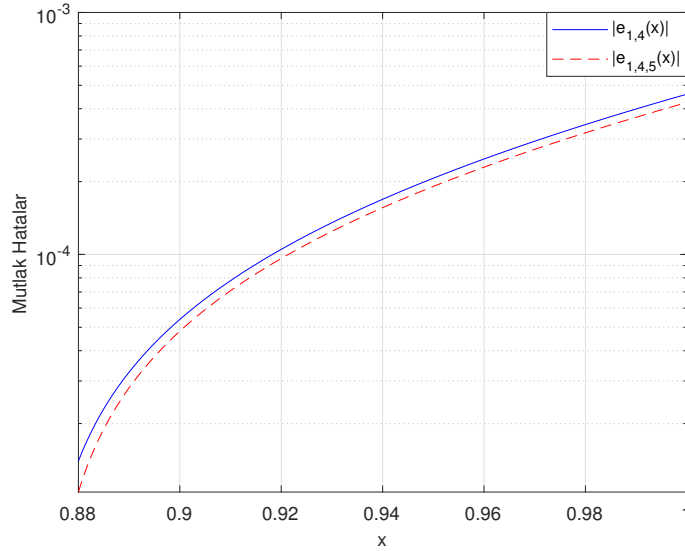


Şekil 4.37. Örnek 4.5'in $y_3(x)$ çözümü için $N = 4$, $M = 5, 8$ olarak alındığında elde edilen tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

(4.50) denklem sisteminin Şekil 4.38.'de $N = 4$, $M = 5$ için elde edilen gerçek ve iyileştirilmiş mutlak hata fonksiyonları, Şekil 4.39.'da $N = 4$, $M = 5$ için elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hata fonksiyonları karşılaştırılmıştır. Şekillerden yöntemin etkili olduğu görülmektedir.



Şekil 4.38. Örnek 4.5'in $y_3(x)$ çözümü için $N = 4$, $M = 5$ olarak alındığında elde edilen gerçek ve iyileştirilmiş mutlak hatalarının karşılaştırılması



Şekil 4.39. Örnek 4.5'in $y_1(x)$ çözümü için $N = 4$, $M = 5$ olarak alındığında elde edilen gerçek ve tahmini mutlak hatalarının karşılaştırılması

5. SONUÇLAR

Fizik ve mühendislik alanlarında karşılaşılan birçok önemli problemin matematik modelleri, yüksek mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemler ve denklem sistemleridir. Bunların tam çözümlerini bulmak genellikle zor olduğu durumlarda ya da tam çözümlerinin olmaması durumunda nümerik metodlara ihtiyaç duyulur. Bu yüzden yaklaşık çözümleri bulmamız gerekir. Bu çalışmada lineer diferansiyel denklem sistemleri ele alındı ve Laguerre kollokasyon yöntemi sunuldu. Ayrıca, rezidüel fonksiyonu temel alan hata tahmini verildi. Laguerre polinom çözümleri tahmini hata fonksiyonu yardımıyla iyileştirildi. Önerilen metod ile ilgili nümerik örnekler yapıldı. Ayrıca, çözümlerin doğruluğu ($R_{N,M}$ rezidüel fonksiyon) kullanılarak da ölçüm yapıldı. Belirlenen yaklaşık çözümler ve rezidüel düzeltmeler tablo ve grafiklerde gösterildi. Nümerik örneklerde başka yöntemler ile karşılaştırmalar da yapıldı ve Laguerre kollokasyon yöntemi ile oldukça iyi sonuçlar elde edildi.

Sonuçlardan N kesme sınırının arttırılması halinde daha iyi sonuçlara ulaşılabileceği anlaşılmaktadır. Fakat kesme sınırı N 'nin çok büyük seçilmesi durumunda, bilgisayarda işlem yükü artacağından bilgisayar programları daha yavaş sonuç verecektir. Ayrıca, N değeri artarken programdan kaynaklanan hesaplama hataları da büyür. Bu nedenle terim sayısını aşırı arttırmak çok kullanışlı olmayabilir. Bu sebeplerden, N değeri yeteri kadar büyük seçildiğinde tam çözüme oldukça yakın çözümler elde edilebilir. Buradan, herhangi bir N değerinden sonra yaklaşık çözümün tam çözümden uzaklaşabileceği ve herhangi bir M ($N < M$ ve N, M pozitif tam sayı) değerinden sonra tekrar tam çözüme yaklaşabileceği görüldü. Ek olarak, $y_i(x), i = 1, 2, \dots, k$ tam çözümleri polinom olduğunda, yöntemden anlaşıyor ki eğer, yöntemin kesme sınırı $N \geq \deg(y_i(x))$ seçilirse, tam çözüm elde edilir.

Yöntemdeki yaklaşık çözümler ise Matlab, Maple ve Mathematica gibi bilgisayar programları kullanılarak kolayca hesaplanabilir. Bu çalışmadaki örneklerde, Matlab programında yazılan kodlar çalıştırılarak yaklaşık çözümler kısa sürede hesaplandı. Bu yöntem, başka denklem sistemleri için geliştirilerek uygulanabilir.

6. KAYNAKLAR

- Runge, C. 1895. Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. *Math. Ann.*, 46: 167-178.
- Kutta, W. 1901. Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen. *Z. Math. Phys.*, 46: 435-453.
- Newmark, N.M. 1959. A method of computation for structural dynamics. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 85 (3): 67-94.
- Lax, P.D. and Wendroff, B. 1960. Systems of conservation laws. *Commun. Pure Appl Math.*, 13 (2): 217-237.
- Atkinson, K. 1989. Sayısal Analize Giriş (2. Baskı), New York: John Wiley & Sons, ISBN 978-0-471-50023-0.
- Adomian, G. 1988. A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of mathematical analysis and applications*, 135 (2): 501-544.
- He, J.H. 1999. Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: some examples. *International journal of non-linear mechanics*, 34 (4): 699-708.
- He, J.H. 1999. Homotopy perturbation technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 178 (3): 257-262.
- Wang, K. and Wang, Q. 2014. Taylor collocation method and convergence analysis for the Volterra-Fredholm integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 260: 294-300
- Akyüz-Daşcıoğlu, A., İşler Acar, N. and Güler, C. 2014. Bernstein collocation method for solving nonlinear Fredholm-Volterra integrodifferential equations in the most general form. *Journal of Applied Mathematics.*, 260: 294-300
- Çetin, M., Sezer, M. and Kocayiğit, H. 2015. An Efficient Method Based on Lucas Polynomials for Solving High-Order Linear Boundary Value Problems. *Gazi University Journal of Science*, 28 (3): 483-496.

- Akyüz-Daşcıoğlu, A. and Sezer, M. 2003. Chebyshev polynomial solutions of systems of high-order linear differential equations with variable coefficients. *Appl. Math. Comput.*, 144 (2-3): 237-247.
- Biazar, J., Babolian, E. and Islam, R. 2004. Solution of the system of ordinary differential equations by Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 147: 713-719.
- Sezer, M., Karamete, A. and Gülsu, M. 2005. Taylor polynomial solutions of systems of linear differential equations with variable coefficients. *Int. J. Comput. Math.*, 82 (6): 755-764.
- Abdel, I.H. and Hassan, H. 2008. Application to differential transformation method for solving systems of differential equations. *Appl. Math. Modell.*, 32 (12): 2552-2559.
- Tatari, M. and Dehghan, M. 2009. Improvement of He's variational iteration method for solving systems of differential equations. *Comput. Math. Appl.*, 58 (11-12): 2160-2166.
- Thongmoon, M. and Pusjuso, S. 2009. The numerical solutions of differential transform method and the Laplace transform method for a system of differential equations. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 4 (3): 425-431.
- Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. ve Sezer, M. 2011. A numerical approach for solving linear differential equation systems. *Journal of Advanced Research in Differential Equations*, 3: 8-32.
- Ramadan, M.A., Raslan, K.R. and Nassar, M.A. 2014. An approximate analytical solution of higher-order linear differential equations with variable coefficients using improved rational Chebyshev collocation method. *Applied and Computational Mathematics*, 3 (6): 315-322.
- Ramadan, M.A. and Abd El Salam, M.A. 2016. Solving systems of ordinary differential equations in unbounded domains by exponential Chebyshev collocation method. *Journal of Abstract and Computational Mathematics*, 1: 33-46.

- Maleknejad, K. and Mirzaee, F. 2003. Numerical solution of linear Fredholm integral equations system by rationalized Haar functions method. *Int. J. Comput. Math.*, 80 (11): 1397-1405.
- Maleknejad, K., Mirzaee, F. and Abbasbandy, S. 2004. Solving linear integro-differential equations system by using rationalized Haar functions method. *Appl. Math. Comput.*, 155 (2): 317-328.
- Pour-Mahmoud, J., Rahimi-Ardabili, M.Y. and Shahmorad, S. 2005. Numerical solution of the system of Fredholm integro-differential equations by the Tau method. *Appl. Math. Comput.*, 168 (1): 465-478.
- Akyüz-Daşcıoğlu, A. and Sezer, M. 2005. Chebyshev polynomial solutions of systems of higher-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations. *Journal of the Franklin Inst.*, 342 (6): 688-701.
- Gülsu, M. and Sezer, M. 2006. Taylor collocation method for solution of systems of high-order linear Fredholm Volterra integro-differential equations. *Intern. J. Computer Math.*, 83 (4): 429-448.
- Yusufoğlu, E. 2007. An efficient algorithm for solving integro-differential equations system. *Appl. Math. Comput.*, 192 (1): 51-55.
- Arikoglu, A. and Ozkol, I. 2008. Solutions of integral and integro-differential equation systems by using differential transform method. *Comput Math Appl.*, 56 (9): 2411-2417.
- Kurt, N. and Sezer, M. 2008. Polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with constant coefficients. *Journal of the Franklin Institute.*, 345 (8): 839-850.
- Saberi-Nadjafi, J. and Tamamgar, M. 2008. The variational iteration method: A highly promising method for solving the system of integro differential equations. *Comput. Math. Appl.*, 56 (2): 346-351.

- Yalçınbaş, S., Sezer, M. and Sorkun, H.H. 2009. Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations. *Appl. Math. Comput.*, 210 (2): 334-349.
- Javidi, M. 2009. Modified homotopy perturbation method for solving system of linear Fredholm integral equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 50: 159-165.
- Sorkun, H.H. and Yalçınbaş, S. 2010. Approximate solutions of linear Volterra integral equation systems with variable coefficients. *Appl. Math. Modell.*, 34 (11): 3451-3464.
- Yüksel, G., Gülsu, M. and Sezer, M. 2012. A Chebyshev polynomial approach for high-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations. *Gazi University Journal of Science*, 25 (2): 393-401.
- Zarali, B. and Rabbani, M. 2012. Solution of Fredholm integro-differential equations system by modified decomposition method. *The Journal of Mathematics and Computer Science*, 4: 258-264.
- Aslan, B.B., Gürbüz, B. and Sezer, M. 2015. A new collocation method for solution of mixed linear Integro-differential difference equations. *New Trends in Mathematical Sciences*, 2: 133-146.
- Jafari, H. and Daftardar-Gejji, V. 2006. Revised Adomian decomposition method for solving systems of ordinary and fractional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 181: 598-608.
- Zurigat, M., Momani, S., Odibat, Z. and Alawneh, A. 2010. The homotopy analysis method for handling systems of fractional differential equations. *Appl. Math. Modell.*, 34 (1): 24-35.
- Yüzbaşı, Ş. 2012. An efficient algorithm for solving multi-pantograph equation systems. *Computers and Mathematics with Applications*, 64: 589-603.
- Mirzaee, F. 2016. Numerical solution of system of linear integral equations via improvement of block-pulse functions. *Journal of Mathematical Modeling*, 2: 133-159.

- Parand, K. and Taghavi, A. 2008. Generalized Laguerre polynomials collocation method for solving Lane-Emden equation. *Applied Mathematical Sciences*, 2: 2955-2961.
- Parand, K., Shahini, M. and Taghavi, A. 2009. Generalized Laguerre polynomials and rational Chebyshev collocation method for solving unsteady gas equation. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 4: 1005-1011.
- Gülsu, M., Gürbüz, B., Öztürk, Y. and Sezer, M. 2011. Laguerre polynomial approach for solving linear delay difference equations. *Applied Mathematics and Computation*, 217 (15): 6765-6776.
- Gürbüz, B., Gülsu, M. and Sezer, M. 2011. Numerical approach of high-order linear delay difference equations with variable coefficients in terms of Laguerre polynomials. *Math. Comput. Appl.*, 16 (1): 267-278.
- Khader, M.M., El Danaf, T.S. and Hendy, A.S. 2012. Efficient spectral collocation method for solving multi-term fractional differential equations based on the generalized laguerre polynomials. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 3: 1-14.
- Tatari, M. and Haghghi, M. 2014. A generalized Laguerre-Legendre spectral collocation method for solving initial-boundary value problems. *Applied Mathematical Modelling*, 38 (4): 1351-1364.
- Khader, M.M. 2014. Laguerre collocation method for the flow and heat transfer due to a permeable stretching surface embedded in a porous medium with a second order slip and viscous dissipation. *Applied Mathematics and Computation*, 243: 503-513.
- Gürbüz, B. and Sezer, M. 2014. Laguerre polynomial approach for solving Lane-Emden type functional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 242: 255-264.
- Yüzbaşı, Ş. 2014. Laguerre approach for solving pantograph-type Volterra integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 232: 1183-1199.

- Gökmen, E. 2014. Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı Diferansiyel-Fark Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümleri İçin Taylor Sıralama Yöntemi. Doktora tezi, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla, 130 s.
- Sarı, H.E. 2009. Diferansiyel Denklemlerin Laguerre Polinom Çözümleri. Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, Muğla, 42 s.
- Akçay, M. 2010. Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Laguerre Polinomları Yaklaşımı ile Nümerik Çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 43 s.
- Gürbüz, B. 2012. Lineer İntegro-Diferansiyel Fark Denklemlerin Laguerre Polinom Çözümleri. Yüksek Lisans Tezi, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla, 116 s.
- Vural, H.N. 2017. Dikdörtgensel Bölgede Lineer Kompleks Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri İçin Laguerre Kollokasyon Yöntemi. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 60 s.
- Davies, A. and Crann, D. 1999. The solution of differential equations using numerical Laplace transforms. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 30 (1): 65-79.
- Dattoli, G. 2004. Laguerre and generalized Hermite polynomials: The point of the operational method. *Integral Transforms and Special Functions*, 15 (2): 93-99.
- Poole, E.G.C. 1936. Introduction to the theory of the linear differential equations. Fellow of New College, Oxford.
- R.Boelkins, M., Goldberg, J.L. and Potter, M.C. 2009. Differential Equations with Linear Algebra. Oxford University.
- Goode, S.W. 2000. Differential Equations and Linear Algebra. California State University, Fullerton.
- Bell, W.W. 1967. Special functions for scientists and engineers. Lecturer in Theoretical Physics, Department of Natural Philosophy, University of Aberdeen, pp. 168-185, Aberdeen, London.
- Anonymous 1: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laguerre.html> [Son erişim tarihi: 15.05.2018].

Anonymous 2: http://www.popflock.com/learn?s=Laguerre_polynomials [Son erişim tarihi: 15.05.2018].

Anonymous 3: <https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/laguerre-edmond-nicolas> [Son erişim tarihi: 15.05.2018].



ÖZGEÇMİŞ

GAMZE YILDIRIM

E-mail: yildirimgamze17@hotmail.com



ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2012-2016	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

ESERLER:

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

- 1- Yıldırım, G. and Yüzbaşı, Ş. Bessel collocation method to determinate the curves of constant breadth according to bishop frame in euclidean 3-Space. 15. International Geometry Symposium, Amasya, 3-6 Temmuz 2017.
- 2- Yıldırım, G. and Yüzbaşı, Ş. Laguerre collocation method for solutions of systems of linear differential equations. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2018), Ordu, 27-29 Haziran 2018.