



**LİNEER GECİKMELİ DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şemseddin DOĞAN

Danışman

Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat 2019

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER GECİKMELİ DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Şemseddin DOĞAN

Danışman
Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat 2019

TEZ ONAY SAYFASI

Şemseddin DOĞAN tarafından hazırlanan “Lineer Gecikmeli Denklemlerin Çözümlerinin Salınımlılığı” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 01/02/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

Başkan : Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Hafize GÜMÜŞ
Necmettin Erbakan Üniversitesi,
Ereğli Eğitim Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi



Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

**Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım
bu tez çalışmada;**

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

28/02/2019

Şemseddin DOĞAN

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

**LİNEER GECİKMELİ DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI**

Şemseddin DOĞAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel tanımlar ve kavramlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde, birinci mertebe gecikmeli lineer diferensiyel denklemlerin çözümlerinin belli bazı salınımlılık kriterleri verilmiştir. Dördüncü bölümde, birinci mertebe birkaç gecikme terimli lineer diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı için bazı yeter şartlar incelenmiştir. Beşinci bölüm ise tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

2019, v + 43 sayfa

Anahtar Kelimeler: Salınımlılık, Gecikmeli diferensiyel denklem, Gecikmeli lineer diferensiyel denklem.

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

OSCILLATION OF SOLUTIONS OF
LINEAR DELAY EQUATIONS

Şemseddin DOĞAN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a general knowledge of literature. In the second chapter, the necessary basic concepts and definitions are introduced. In the third chapter, some certain criterias for oscillation of solutions of first order delay differential equations are given. In the fourth chapter, oscillation of solutions of first order delay differential equations with several arguments are investigated and some certain sufficient conditions for such differential equations are given. The fifth chapter is devoted the discussion and conclusion.

2019, v + 43 pages

Keywords: Oscillation, Delay differential equation, Delay linear differential equation.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, bu tez çalışması boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Şemseddin DOĞAN
AFYONKARAHİSAR, 2019

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR.....	7
3. BİRİNCİ MERTEBE GECİKMELİ LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI.....	19
4. BİRİNCİ MERTEBE BİRKAÇ GECİKME TERİMLİ LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI	28
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	36
6. KAYNAKLAR.....	38
ÖZGEÇMİŞ.....	43

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^-$	Negatif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\mathbb{C}$	Sürekli Fonksiyonların Kümesi
Σ	Toplam Sembolü
Π	Çarpım Sembolü



1 GİRİŞ

Diferensiyel denklemler teorisi çok uzun yıllardır üzerinde çalışılan önemli konulardan biridir. Diferensiyel denklemler günlük hayatımızda, mühendislik, fizik, kimya, biyoloji gibi birçok temel bilim alanında kullanılmakta ve bu alanlarda birçok kolaylık sağlamaktadır.

Diferensiyel denklemler teorisi reel hayatta karşılaştığımız birçok problem için matematiksel model olarak rol oynar. Bunun yanı sıra, sadece bilim ve teknoloji alanında değil, ekonomi, fizyoloji, savunma ve nüfus bilimi gibi bir çok alanda da karşımıza çıkmaktadır. Mühendislik, fizik, teknoloji ve matematik biliminin ortak konusu olması dolayısıyla diferensiyel denklem teorisinin gelişimi son yıllarda çok hızlı bir şekilde ilerlemektedir. Bu gelişim, sadece matematik biliminde değil başka birçok bilimde yeni problemler ve yeni denklemlerin üretilmesine neden olmuştur. Bugün bildiğimiz ve günlük hayatımızda birçok iş için kullanılan ve hatta işimizi büyük oranda kolaylaştıran makinelerin çalışma prensipleri diferansiyel denklemler yardımıyla düzenlenmektedir. Bilindiği gibi; uygulamalı bilim dallarının birçoğunda incelenen ve kullanılan problemlerin matematiksel modellemesine mutlaka bir diferensiyel denklem karşılık gelir.

Diferensiyel denklemler teorisinde; daha önceki yıllarda “doğada kopukluk yoktur” yanlış varsayımları yer alıyordu. Bu eski kabule göre; fiziksel bir olayın matematiksel modeli, değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. İşte bu nedenledir ki; diferensiyel denklemler teorisi, yalnız fizik bilimine özgü matematiksel bir ifade olarak kabul ediliyordu. Ancak, 20. yüzyılın başlarında biyolojide görülen genetik olaylardaki gelişmeler, dünyadaki bütün doğa olaylarının, süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir.

Bilim, çevremizde olan herhangi bir olayı incelerken ve bu oluşan olay hakkında teori üretirken veya bir tahminde bulunurken ilginç yaklaşımlarda bulunur. Oluşan bazı olayları, izlemeye yöntemi ile ele alarak, gelecekte oluşabilecek bir olayı tahmin etmeye çalışır. Bunun için ise, ele aldığı olayın veya sistemin bir matematiksel modelini kurmayı amaç edinir. Fakat birçok uygulamada, kurulan bir matematiksel modelin ya da incelenen olayın veyahut da sistemin gelecekteki halinin geçmişteki halinden bağımsız

sız olarak hareket edeceği kabul edilerek hazırlanır. Bu durumun bir sonucu olarak, herhangi bir olaya karşılık gelen denklem de, olayın şu zaman ki durumu ve bunun değişim oranının ortaya çıktığı kabul edildiğinde, bu duruma en sağlam ve güvenilir yaklaşım modeli ancak diferensiyel denklemlerdir. Ayrıntılı bir şekilde ele alınan bir araştırma, yukarıda bahsedilen kuramın yalnızca bir ilk yaklaşım olduğunu ve bu yaklaşımda geçmişte varolan durumların da ele alınması yapılan matematiksel modellemenin çok daha sağlıklı olmasını sağlar. Çünkü; ele alınan bazı problemlerde geçmişe dönük deneyimlerin matematiksel modellemeye katılmaması oluşturulan sistemin anlamsız olmasına neden olabilir. Birçok gerçek fiziksel olayın oluşmasında, bir sistemin hali hazırda bulunduğu durum, geçmişteki durumuna bağlı olarak da ifade edilebilir. Bu sistemin işleyişi hakkında herhangi bir yorum yapabilmek için, onu ifade ve temsil eden bir diferensiyel denklem ve bu denklemin çözümleri hakkında bilgi sahibi olmak gerekir.

Normal şartlar altında, sistem dışından algılanan bilgiler göz önüne alındığında, herhangi bir etkiye karşı oluşan tepki oluşturulan her sistemde çok azda olsa bir gecikme oluşmasına neden olur. Çünkü; oluşan her bir etkiye karşı meydana gelen bir tepki, zaman değişkenine bağlı olarak oluşur. Oluşan bu tepki, matematiksel modellemede geçmişteki bir duruma bağımlı olunmasının ortaya çıktığı en sıradan ve basit durumdur. Bu anlık durum, zaman değişkeninde geçmişe bağımlılık olup, değişkenin türevinde böyle bir bağımlılık yoktur.

İşte bu tür diferensiyel denklemlere, gecikmeli diferensiyel denklemler denir. İster geçmişe herhangi bir bağımlılık göz önünde tutulsun isterse bu durum ele alınmasın, bir çok fiziksel olayın matematiksel modeli oluşturulmaya çalışılırken bir gecikmeli diferensiyel denklemin oluşturulması gerekir. Dolayısıyla gecikmeli denklemlerin ele alınması ve çalışılması, birçok bilim dalı için çok büyük bir önem taşımaktadır. Bu tür bir matematiksel modelleme yapılırken ortaya çıkan gecikmeler göz önünde alınır ise oluşturulan matematiksel modelleme herhangi bir adi diferansiyel denklemden çok farklı yapıda olur.

Günlük hayatımızda karşılaşılabileceğimiz birçok olayda gecikme durumu kaçınılmaz bir sonuçtur. Ele alınan herhangi bir fiziksel sistemde mutlaka, bir gecikme oluşur. Bazı

sistemlerde bu gecikme saniyeler ve hatta mikrosaniyelerle ifade edilse bile, sonuç olarak sistem bir gecikme sürecine bağlı olarak elde edilir. Biyolojik bir sistemde gecikme terimi birkaç yüz milisaniye süresindedir ki, bu herhangi bir insanın bir olaya karşı oluşturduğu tepki süresine eşittir. Bir televizyon anteninde oluşan elektromanyetik bir dalganın iletilmesi ve uzaktaki bir nesneden bu etkiyle oluşan yansımanın alınması arasındaki geçen süre diferensiyel denklemlerde gecikme terimi olarak karımıza çıkar. Daha ayrıntılı sistemlerde gecikme bir değil birden daha fazla da olabilir.

Gecikmeli diferensiyel denklemler teorisi ile ilgili yapılan çalışmalar gözönüne alındığında karşımıza çıkan ilk problem, Driver'ın oluşturduğu tuzlu su problemidir. Kabul edelimki, bir kabın içinde A litre tuzlu su bulunsun. Bu tuzlu suyun içine dakikada b litre saf suyun ilave edildiğini düşünelim. Kaptaki bu karışım sürekli olarak karıştırılıp, kabın altında bulunan bir musluktan yine dakikada b litre tuzlu su karışımı dışarı atılsın. $y(t)$, ise t anındaki karışımındaki tuz miktarının kilogram cinsinden gösterimi olsun. Bu karıştırma işleminin sürekli ve kap içinde homojen bir şekilde gerçekleştirildiği kabul edilirse, kap içinde 1 litre için $\frac{y(t)}{A}$ (kg) oranında tuz bulunur. Herbir dakikada b litre tuzlu su karışımı kap içerisinden boşaltıldığına göre, belli bir t anında kap içindeki tuz miktarının değişimi

$$y'(t) = -b \frac{y(t)}{A}$$

şeklinde bir diferensiyel denklem ile modellenenbilir. Fakat; Driver'ın belirttiğine göre, normal şartlar altında bu karıştırma işlemi yapılırken kap içerisinde her yerde tuz oranı sabit olmayacağından homojen bir dağılım elde etmek asla mümkün olmayacaktır. Bu durumda t anında kap içinden boşalan tuz oranı da daha önceki bir andaki δ oranına bağlı olacaktır. Dolayısıyla bu durumları göz önüne alarak denklem tekrar modellenirse,

$$y'(t) = -b \frac{y(t - \delta)}{A}$$

şeklinde bir gecikmeli diferensiyel denklem olarak elde edilir (Bildik 2012).

Gecikmeli diferensiyel denklemler teorisi ile yapılan ilk çalışmalar literatüre 1770 yılından sonra girmiş olsa da, gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili yapılan sistematik ve kayda değer çalışmalar son 70 yılda ortaya konmuştur. Gecikmeli diferensiyel denklemler teorisi, teknoloji, fizik, ekonomi, biyoloji, ve fizyoloji (işlev bilim) gibi bilim birçok

bilim dalında çok fazla kullanım alanına sahiptir. Fakat; literatür ele alındığında ve araştırıldığında bu kullanım alanlarının çok daha geniş yeni bilim alanına yayıldığını görmek mümkündür.

Gecikmeli diferensiyel denklemler tıp bilminde de kullanılmakta ve bu bilim için oldukça büyük bir önem taşımaktadır. Kanser hastalığı maalesef tüm dünyada çok yaygın olarak görülen hastalıkların başında gelmektedir. Yalnızca Amerika’da her yıl bir milyunun üzerinde insan kansere yakalanmakta ve bunların 500.000’in üzerindeki kısmı kanser hastalığı dolayısıyla yaşamını yitirmektedir. Dolayısıyla, tüm dünyada bilim adamlarının kanser hücreleri ile ilgili matematiksel modelleme yapmaları çok doğal bir durumdur. Villasana ve Radunskaya (2003) ’nın yapmış olduğu bir çalışma, kanser hücrelerinin çoğalması ve bağışıklık sisteminin hücreleri ile bazı özel ilaçların kanser hücrelerinin artması üzerindeki etkilerini araştıran matematiksel bir modelleme ortaya koymaktadır. İşte bu çalışmada, modelleme yapılırken gecikmeli diferensiyel denklem kullanılmıştır ve bu durum bu çalışmayı diğer çalışmalardan ayıran en büyük özellik olmuştur. Bu nedenle; gecikmeli diferensiyel denklemler teorisi son yıllarda yapılan çalışmalar nedeniyle gelişmesi yönünde pozitif bir ivme kazanmıştır.

Bir gecikmeli diferensiyel denklem, $\delta(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon, $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \infty$ ve $\delta(t) < t$ koşulları sağlanmak üzere

$$y'(t) = f(t, y(t), u(\delta(t))) \quad (1.1)$$

şeklindedir. Yani bu tür denklemler, bilinmeyen bir fonksiyon ve onun en yüksek mer-tebeden türevi hariç diğer türevlerinin ya da daha çok gecikme değişkenlerine bağlı kalınarak ifade edilen diferensiyel denklemlerdir. Görüldüğü üzere $y'(t)$ nin değişim oranı sadece $y(t)$ değerine değil, aynı zamanda $y(\delta(t))$ değerine de bağlıdır.

$$y'(t) + y(t - 3) + y(t + \frac{1}{3}) = 0,$$

$$y'(t) + y(t + 2) - 5 = 0,$$

$$y''(t) + 3y'(t) + y(t - \frac{3}{2}) = 1,$$

$$y''(t) - 4y'(t - \sin^2 t) - y(\frac{t}{2}) + t = 1$$

şeklindeki denklemler gecikmeli diferensiyel denklemlerdir.

Salınımlılık teorisi diferensiyel denklemleri içinde bulunduran modern matematik teorisinin iyi bilinen ve çok önemli bir dalıdır. Teknoloji, fizik, doğa ve sosyal bilimlerde ortaya konulan problemlerde meydana gelen salınımlılık olaylarını kapsayan bir konudur. Bilinen salınımlılık teorisine, teorik açıdan bakıldığında, oluşturulan denklemlerde veya sistemlerde salımlı çözümlerin var olup olmaması ve salımlı çözümlerin asimptotik davranışlarının neler olduğunu düşünebiliriz. Salımlı çözümler, dinamik sistemlerin birçoğunun temel özelliği olarak karşımıza çıkar. Daha da önemlisi, salımlı lineer olmayan denklemlerin ortaya çıkmasına da neden olmuştur. Bununla birlikte salınım teorisi, matematiksel biyolojide karşımıza çıkan bazı denklemlerin çözümü için de büyük önem taşımaktadır.

$$y'(t) + q(t)u(\delta(t)) = 0 \quad (1.2)$$

gecikmeli diferensiyel denklemi göz önüne alınsın. (1.2) denkleminin tüm çözümlerinin salımlı olması ile ilgili yapılan ilk sistematik çalışma Myshkis (1950) 'dir. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [t - \delta(t)] < \infty \quad \text{ve} \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} [t - \delta(t)] \liminf_{t \rightarrow \infty} q(t) > \frac{1}{e}$$

ise (1.2) denkleminin tüm çözümleri salımlıdır. Koplatadze ve Chanturiya (1982), (1.2) denkleminin tüm çözümlerinin salımlı olması için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir. $\delta(t)$ monoton olmayan yada azalmayan olmak üzere,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\delta(t)}^t q(s) ds > \frac{1}{e}.$$

Bununla birlikte; eğer,

$$\int_{\delta(t)}^t q(s) ds \leq \frac{1}{e}$$

ise (1.2) denklemi salımlı olmayan bir çözüme sahiptir.

Gyori ve Ladas (1991) ise,

$$y'(t) + qy(t - \delta) = 0 \quad (1.3)$$

denklemini için $q, \delta \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

(i) (1.3) denkleminin tüm çözümleri salınımlı,

(ii) $q\delta > \frac{1}{e}$

ifadelerinin denk olduğunu ortaya koymuşlardır.

Yukarıdaki bilgiler ve açıklamaların ışığı altında, bu yüksek lisans tez çalışmasında ilk olarak, birinci mertebe gecikmeli lineer diferensiyel denklemler ile ilgili genel bir literatür bilgisi verildikten sonra, birinci mertebe lineer gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık davranışları incelenmiş ve bu tür denklemlerin çözümlerinin salınımlı olması için daha önce verilmiş olan salınımlılık kriterleri sistematik olarak ele alınmıştır.

Daha sonra ise, birinci mertebe birkaç gecikme terimli lineer diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlı olması için elde edilen son yeter şartlar verilerek çalışma tamamlanmıştır.

2 TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR

Bu bölümde, birinci mertebe gecikmeli lineer diferensiyel denklemler ile ilgili salınımlılık teorisi için önemli bazı temel tanım, teorem ve sonuçlara yer verilecektir.

Birinci mertebeden gecikmeli lineer diferensiyel denklem $1 \leq i \leq r$, $\delta_i(t) \leq t$ ve $q_i \in C[[t_0, \infty), \mathbb{R}]$ olmak üzere,

$$y'(t) + \sum_{i=1}^r q_i(t)y(\delta_i(t)) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır.

$r = 1$ için (2.1) denklemi

$$y'(t) + q(t)y(\delta(t)) = 0 \quad (2.2)$$

şeklindedir.

Tanım 2.1 $\delta_i \in \mathbb{R}^+$, $\delta_i(t) = t - \delta_i$ ve $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$ olmak üzere $t \geq t_1$ için y , $[t_1, \infty)$ aralığında sürekli diferensiyellenebilir ve y , (2.1) denklemini sağlıyorsa $y \in C[[t_1 - \delta, \infty), \mathbb{R}]$ fonksiyonu (2.1) denkleminin bir çözümüdür ve bu çözüm $[t_1, \infty)$ üzerinde bir çözüm olarak adlandırılır.

t_1 bir başlangıç noktası olmak üzere, $\phi \in C[[t_1 - \delta, t_1), \mathbb{R}]$ başlangıç fonksiyonu verilmiş olsun. Böylece (2.1) denklemi $t_1 - \delta \leq t \leq t_1$ için

$$y(t) = \phi(t) \quad (2.3)$$

olacak şekilde $[t_1, \infty)$ aralığında birtek y çözümüne sahiptir.

Tanım 2.2 Bir diferensiyel denklemin aşıkâr olmayan bir çözümü y olsun. Eğer y çözümü keyfi sayıda sıfıra sahipse, yani; $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ olacak şekilde bir $\{t_n\}$ dizisi vardır öyle ki $y(t_n) = 0$ ise y çözümüne salınımlıdır denir. Aksi taktirde salınımlı değildir denir. Salınımlı olmayan bir çözüm, ergeç pozitif yada ergeç negatiftir. Yani, $\forall t > t_1$ için $y(t) \neq 0$ olacak biçimde bir t_1 vardır. Eğer denklemin her çözümü salınımlı ise denklemin tüm çözümleri salınımlıdır, salınımlı olmayan en az bir çözümü varsa denklemin çözümleri salınımlı değildir denir (Ladde *et al.* 1987).

Tanım 2.3 Aşık olmayan bir y çözümü T herhangi bir sayı olmak üzere (T, ∞) aralığında işaret değiştiriyorsa y çözümüne salınımlıdır denir (Ladde *et al.* 1987).

$$y''(t) - y(-t) = 0$$

diferensiyel denkleminin $y_1(t) = \sin t$ salınımlı çözümü, $y_2(t) = e^t + e^{-t}$ ise salınımlı olmayan bir çözümdür.

Bazı salınımlılık durumları ise denklemdeki gecikmelerle oluşur. Örnek olarak,

$$y'(t) + y(t) = 0$$

ve

$$y''(t) - y(t) = 0$$

diferensiyel denklemlerin çözümleri salınımlı olmamasına rağmen,

$$y'(t) + y\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ve

$$y''(t) - y(t - \pi) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümleri sırasıyla $y = \sin t$ ve $y = \cos t$ olduğundan salınımlıdır (Ladde *et al.* 1987).

Eğer bir y çözümü salınımlı değilse, y ergeç pozitif veya ergeç negatif olmak zorundadır. Yani, $t \geq T$ için $y(t)$ pozitif olacak şekilde $T \in \mathbb{R}$ vardır yada $t \geq T$ için $y(t)$ negatif olacak şekilde $T \in \mathbb{R}$ vardır.

Eğer bir gecikmeli diferensiyel denklemin salınımlı olmayan pozitif bir $y(t)$ çözümü mevcut ise, buna karşılık negatif bir $-y(t)$ çözümü de mevcuttur. Bu yüzden bir gecikmeli diferensiyel denklem salınımlı olmayan bir çözüme sahipse bu çözüm pozitif (negatif) bir çözümdür. Ayrıca, (2.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır denildiğinde, her $t_1 \geq t_0$ başlangıç noktası ve her $\phi \in C[[t_1 - \delta, t_1), \mathbb{R}]$ başlangıç fonksiyonu için, (2.1)

ve (2.3) başlangıç değeri probleminin tek çözümü olan y salınımlıdır anlamına gelmektedir. Yani, y sonsuz çoklukta sifıra sahiptir. Diğer taraftan (2.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözüme sahip olduğunu ispatlamak istediğimizde ise, (2.1) denkleminin pozitif (negatif) bir y çözümüne sahip olduğunu ispatlamamız yeterlidir.

Şimdi ilk olarak lineer gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlı olması için verilen salınımlılık kriterlerini inceleyelim.

Gyori ve Ladas (1991), gecikmeli lineer diferensiyel denklemler için aşağıdaki salınımlılık kriterlerini vermişlerdir.

Teorem 2.1 $q, \delta \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$y'(t) + qy(t - \delta) = 0 \quad (2.4)$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Böylece aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) (2.4) denkleminin her çözümü salınımlı,

(ii) $q\delta > \frac{1}{e}$

(Gyori and Ladas 1991).

Teorem 2.2 $i = 1, 2, \dots, r$ için $q_i, \delta_i \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$y'(t) + \sum_{i=1}^r q_i y(t - \delta_i) = 0 \quad (2.5)$$

denkleminin her çözümünün salınımlı olması için yeter koşul

$$\sum_{i=1}^r q_i \delta_i > \frac{1}{e}$$

olmasıdır (Gyori and Ladas 1991).

Bunların yanı sıra, Gyori ve Ladas (1991), aynı çalışmalarında (2.5) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda + \sum_{i=1}^r q_i e^{-\lambda \delta_i} = 0 \quad (2.6)$$

olmak üzere (2.5) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

Teorem 2.3 Kabul edelim ki; $i = 1, 2, \dots, r$ için

$$q_i \in \mathbb{R} \text{ ve } \delta_i \in \mathbb{R}^+$$

olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

- i. (2.5) denkleminin her çözümü salınımlıdır.
- ii. (2.6) karakteristik denklemi reel köke sahip değildir.

(Gyori and Ladas 1991).

$r = 1$ için (2.5) denklemi

$$y'(t) + qy(t - \delta) = 0 \quad (2.7)$$

şeklindedir. Bu durumda bu denklem için karakteristik denklem

$$\lambda + qe^{-\lambda\delta} = 0 \quad (2.8)$$

şekilini alır ki bu durumda salınımlılık kriteri aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.4 Kabul edelim ki, $q, \delta \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- i. (2.7) denkleminin her çözümü salınımlıdır.
- ii. (2.8) karakteristik denklemi reel köke sahip değildir.

(Gyori and Ladas 1991).

Teorem 2.5 $q \in C[[t_0, \infty), \mathbb{R}^+]$, $\delta > 0$ olmak üzere

$$y'(t) + q(t)y(t - \delta) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (2.9)$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\delta}^t q(s)ds > \frac{1}{e} \quad (2.10)$$

ise (2.9) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Koplatadze and Chanturiya 1982).

Eğer $q \in C[[t_0 - \delta, \infty), \mathbb{R}^+]$, $\delta > 0$ olmak üzere

$$\int_{t-\delta}^t q(s)ds \leq \frac{1}{e}, \quad t \geq t_0$$

ise (2.9) denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahip olur (Gyori and Ladas 1991).

Örnek 2.1

$$y'(t) + y\left(t - \frac{1}{e}\right) = 0 \quad (2.11)$$

denklemi göz önüne alınsın. Burada $q = 1$, $\delta = \frac{1}{e}$ olduğundan $q\delta e = 1$ olur. Böylece, Teorem 2.1.1 gereğince (2.11) gecikmeli diferensiyel denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir.

Bundan başka Ladas vd. (1972), (2.2) denkleminin salınımlılığı için aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.6 (2.2) gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu durumda

$$t \geq t_0 \text{ için } \delta(t) \leq t \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \infty \quad (2.12)$$

olmak üzere, azalmayan $\delta(t)$ fonksiyonu için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\delta(t)}^t q(s)ds > 1$$

ise (2.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Ladas *et al.* 1972).

Daha sonra ise Koplatadze ve Chanturiya (1982), (2.2) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki sonuçları vermişlerdir.

Teorem 2.7 (2.12) sağlansın. Bu durumda azalmayan $\delta(t)$ fonksiyonu için,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\delta(t)}^t q(s)ds > \frac{1}{e}$$

ise (2.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Diğer yandan

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\delta(t)}^t q(s) ds < \frac{1}{e}$$

ise (2.2) denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir.

Şimdi ise monoton olmayan gecikme terimine sahip lineer gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlı olması için verilen salınımlılık kriterlerini verelim.

Braverman ve Karpuz (2011) çalışmalarında aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 2.8 $t \geq t_0$ ve monoton olmayan $\delta(t)$ fonksiyonu için $l(t) := \sup_{s \leq t} \delta(s)$ olmak üzere,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{l(t)}^t q(s) \exp \left\{ \int_{\delta(s)}^{l(t)} q(\gamma) d\gamma \right\} ds > 1$$

ise (2.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Braverman and Karpuz 2011).

Chatzarakis ve Öcalan (2016) monoton olmayan gecikme terimine sahip gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.9 (2.12) sağlansın. $\delta(t)$ monoton olmayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$l(t) := \sup_{s \leq t} \delta(s), \quad t \geq 0 \quad (2.13)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{l(t)}^t q(s) \exp \left\{ \int_{\delta(s)}^{l(t)} q(\gamma) d\gamma \right\} ds > \frac{1}{e},$$

ise (2.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Chatzarakis and Öcalan 2016).

Yine aynı çalışmada bu salınımlılık kriterine aşağıdaki örnek verilmiştir.

Örnek 2.2 Aşağıdaki birinci mertebe lineer gecikmeli diferensiyel denklemi verilmiş olsun.

$$y'(t) + \frac{10}{11e} y(\delta(t)) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.14)$$

Burada

$$l(t) = \begin{cases} t - 1, & t \in [3n, 3n + 1] \\ -3t + 12n + 3, & t \in [3n + 1, 3n + 2] \\ 5t - 12n - 13, & t \in [3n + 2, 3n + 3] \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

şeklindedir. (2.13) den

$$l(t) := \sup_{s \leq t} \delta(s) = \begin{cases} t - 1, & t \in [3n, 3n + 1] \\ 3n, & t \in [3n + 1, 3n + 2.6] \\ 5t - 12n - 13, & t \in [3n + 2.6, 3n + 3] \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

olur. $g : \mathbb{R}_0 \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere,

$$g(t) = \int_{l(t)}^t q(s) \exp \left\{ \int_{\delta(s)}^{l(t)} q(\gamma) d\gamma \right\} ds$$

fonksiyonunu tanımlanmış olsun. Verilen g fonksiyonu en küçük değerini $t = 3n$ noktasında alır. Yani

$$\begin{aligned} g_{\min} &= \int_{l(3n)}^{3n} q(s) \exp \left\{ \int_{\delta(s)}^{l(3n)} q(\gamma) d\gamma \right\} ds, \\ &= \frac{10}{11e} \int_{3n-1}^{3n} \exp \left\{ \frac{10}{11e} \int_{s-1}^{3n-1} d\gamma \right\} ds, \\ &= \frac{10}{11e} \int_{3n-1}^{3n} \exp \left(\frac{10}{11e} (3n - s) \right) ds, \\ &= \exp\left(\frac{10}{11e}\right) - 1 \cong 0.397151967 \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan;

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{l(t)}^t q(s) \exp \left\{ \int_{\delta(s)}^{l(t)} q(\gamma) d\gamma \right\} ds \cong 0.397151967 > \frac{1}{e}$$

olduğundan Teorem 2.1.9 nin tüm koşulları sağlanır. Böylece (2.14) denkleminin tüm çözümleri salınımlı olur.

Diğer taraftan,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\delta(t)}^t q(s) ds = \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-1}^t \frac{10}{11e} ds = \frac{10}{11e} < \frac{1}{e}$$

olur ve görüldüğü üzere daha önce bilinen salınımlılık koşulu sağlanmaz (Chatzarakis and Öcalan 2016).

Birinci merteye gecikmeli lineer birkaç gecikme terimine sahip

$$y'(t) + \sum_{i=1}^r q_i(t)y(\delta_i(t)) = 0 \quad (2.15)$$

denklemini göz önüne alalım. (2.15) denklemini ele alan Fukagai ve Kusano (1984)'nın çalışmalarında bu denklem için aşağıdaki salınımlılık kriterini vermişlerdir.

Teorem 2.10 $1 \leq i \leq r$, $t \geq t_0$ için $\delta_i(t) \leq \delta^*(t) \leq t$ olacak şekilde sürekli, azalmayan $\delta^*(t)$ fonksiyonu mevcut ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta^*(t) = \infty$ olsun. Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\delta^*(t)}^t \sum_{i=1}^r q_i(s) ds > \frac{1}{e}$$

ise (2.15) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Bundan başka; $1 \leq i \leq r$, $t \geq t_0$ için $\delta^*(t) \leq \delta_i(t)$ olacak şekilde sürekli, azalmayan $\delta^*(t)$ fonksiyonu mevcut, $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta\sigma^*(t) = \infty$ ve

$$\delta \sum_{i=1}^r q_i(s) ds \leq \frac{1}{e}$$

ise (2.15) denklemi salınımsız bir çözüme sahiptir (Fukagai and Kusano 1984).

Yine aynı çalışmada bu kriterler için aşağıdaki örnek verierek çalışma kanıtlanmıştır.

Örnek 2.3

$$y'(t) + \frac{1}{et}y\left(\frac{t}{e}\right) + \frac{1}{2et}y\left(\frac{t}{e^2}\right) = 0 \quad (2.16)$$

denklemini verilmiş olsun. Burada $q_1(t) = \frac{1}{et}$, $q_2(t) = \frac{1}{2et}$, $\delta_1(t) = \frac{t}{e}$ ve $\delta_2(t) = \frac{t}{e^2}$ ve $1 \leq i \leq r$ için $\delta_i(t) \leq \delta^*(t) \leq t$ olacak şekilde $\delta^*(t) = \frac{t}{e}$ olarak alınabilir. Ayrıca

$$\int_{\delta^*(t)}^t \sum_{i=1}^r q_i(s) ds = \int_{\delta^*(t)}^t (q_1(s) + q_2(s)) ds = \int_{\frac{t}{e}}^t \left(\frac{1}{es} + \frac{1}{2es} \right) ds = \frac{3}{2e} > \frac{1}{e}$$

olduğundan Teorem 2.1.10 un tüm şartları sağlanmaktadır. Dolayısıyla, (2.16) denklemin tüm çözümleri salınımlıdır (Fukagai and Kusano 1984).

Aynı yıl Hunt ve Yorke (1984), (2.15) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki sonucu vermişlerdir.

Teorem 2.11 $1 \leq i \leq r$ ve bazı $\delta_0 > 0$, için $(t - \delta_i(t)) \leq \delta_0$ olmak üzere eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^r q_i(t) (t - \delta_i(t)) \right) > \frac{1}{e}$$

sağlanıyorsa (2.15) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Hunt and Yorke 1984).

Grammatikopoulos vd. (2003) ise, (2.15) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için aşağıdaki sonuçları vermişlerdir.

Teorem 2.12 $1 \leq i \leq r$ için $\delta_i(t)$ fonksiyonları azalmayan fonksiyonlar olsun. Bundan başka,

$$\int_0^\infty |q_i(t) - q_j(t)| dt < \infty, \quad 1 \leq i, j \leq r$$

ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\delta_i(t)}^t q_i(s) ds > 0, \quad 1 \leq i \leq r$$

olsun. Bu durumda eğer

$$\sum_{i=1}^r \left(\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\delta_i(t)}^t q_i(s) ds \right) > \frac{1}{e}$$

ise (2.15) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Grammatikopoulos *et al.* 2003).

Teorem 2.13 $1 \leq i \leq r$ için $\delta_i(t)$ fonksiyonları azalmayan fonksiyonlar olmak üzere,

$$\int_0^{\infty} |q_i(t) - q_j(t)| dt < \infty, \quad 1 \leq i, j \leq r$$

ve

$$\omega_i = \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\delta_i(t)}^t q_i(s) ds > 0, \quad 1 \leq i \leq r$$

olsun. Eğer

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^r \frac{e^{\omega_i \beta}}{\beta} : \beta \in (0, \infty) \right\} > 1$$

ise (2.15) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Grammatikopoulos *et al.* 2003).

Aynı çalışmada aşağıdaki örnek verilerek salınımlılık kriterinin sağlandığı gösterilmiştir.

Örnek 2.4

$$y'(t) + y(t - \delta) + y\left(t - \left(\frac{1}{e} - \delta\right)\right) = 0 \quad (2.17)$$

gecikmeli lineer diferensiyel denklemini göz önüne alınsın. Burada $\delta \in (0, \frac{1}{e})$ sağlanır.

Bu durumda, daha önce verilen hiçbir salınımlılık kriterinin sağlanmadığını ancak son olarak verilen teoremdaki salınımlılık kriterinin sağlandığını göstermek için,

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^r \frac{e^{\delta \beta}}{\beta} + \frac{e^{(\frac{1}{e} - \delta) \beta}}{\beta} : \beta \in (0, \infty) \right\} > 1$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermeliyiz.

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^r \frac{e^{\delta \beta}}{\beta} : \beta \in (0, \infty) \right\} = \delta e,$$

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^r \frac{e^{(\frac{1}{e} - \delta) \beta}}{\beta} : \beta \in (0, \infty) \right\} = 1 - \delta e$$

olduğundan ve $\frac{e^{\delta \beta}}{\beta}$, $\frac{e^{(\frac{1}{e} - \delta) \beta}}{\beta}$ ifadeleri minimum değerlerini farklı noktalarda aldığı için, eşitsizlik sağlanır. Bu durumda, teoremin tüm koşulları sağlanacağından denklemin tüm çözümleri salınımlı olur (Grammatikopoulos *et al.* 2003).

Bunun dışında Infante vd. (2015), (2.15) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki sonucu ve örneği elde etmişlerdir.

Teorem 2.14 $1 \leq i \leq r$ olmak üzere monoton olmayan $\delta_i(t)$ fonksiyonları için $\delta_i(t) \leq l_i(t) \leq t$ olacak şekilde azalmayan $l_i \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonları mevcut olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^r \left[\prod_{i=1}^r \int_{l_j(t)}^t q_i(s) \exp \left(\int_{\delta_i(s)}^{l_i(t)} \sum_{k=1}^r q_k(\xi) \times \exp \left(\int_{\delta_i(\gamma)}^{\gamma} \sum_{m=1}^r q_m(u) du \right) d\gamma \right) ds \right]^{\frac{1}{r}} > \frac{1}{r^r}$$

ve

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\limsup_{t \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^r \left[\prod_{i=1}^r \int_{l_j(t)}^t q_i(s) \exp \left(\int_{\delta_i(s)}^{l_i(t)} \sum_{k=1}^r (\beta(qk) - \varepsilon) qk(u) du \right) ds \right]^{\frac{1}{r}} \right] > \frac{1}{r^r}$$

ise (2.15) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada;

$$\omega_k = \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\delta_k(t)}^t q_k(s) ds > 0, \quad 1 \leq k \leq r \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlıdır (Infante *et al.* 2015).

Yine Koplatadze vd. (2015), (2.15) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki yeter şartları vermişlerdir.

Teorem 2.15 $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_1(t) = 0 \quad , \quad \varphi_i(t) = \exp \left(\sum_{k=1}^r \int_{\delta_i(s)}^t \left(\prod_{m=1}^r q_m(s) \right)^{\frac{1}{r}} \varphi_{i-1}(s) ds \right) \quad , \quad i = 2, 3, \dots$$

ve

$$\omega_i = \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\delta_i(t)}^t q_i(s) ds > 0, \quad 1 \leq i \leq r \quad (2.19)$$

olmak üzere eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^r \left[\prod_{i=1}^r \int_{l_j(t)}^t q_i(s) \exp \left(r \int_{\delta_i(s)}^{l_i(t)} \left(\sum_{k=1}^r q_k(\gamma) \right) \varphi_m(\gamma) d\gamma \right) ds \right]^{\frac{1}{r}} > \frac{1}{r^r} \left(1 - \prod_{i=1}^r c\omega_i \right)$$

ya da

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^r \left[\prod_{i=1}^r \int_{l_j(t)}^t q_i(s) \int_{\delta_j(t)}^{l_i(t)} \left(\sum_{k=1}^r q_k(\gamma) \right) d\gamma ds \right]^{\frac{1}{r}} > 0$$

şartı sağlanıyorsa (2.15) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Koplatadze *et al.* 2015).

Braverman vd. (2016), (2.15) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki yeter şartı vermişlerdir.

Teorem 2.16 $1 \leq i \leq r$ olmak üzere $\rho(t) = \max_{1 \leq i \leq r} \rho_i(t)$, $\rho_i(t) = \sup_{t_0 \leq s \leq t} \delta_i(s)$,

$$h_1(t, s) = \exp \left\{ \int_s^t \sum_{i=1}^r q_i(v) dv \right\}$$

ve

$$h_{n+1}(t, s) = \exp \left\{ \int_s^t \sum_{i=1}^r q_i(v) h_n(v, \delta_i(v)) dv \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\rho(t)}^t \sum_{i=1}^r q_i(v) h_n(\rho(t), \delta_i(v)) dv > 1$$

şartı sağlanıyorsa (2.15) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Braverman *et al.* 2016).

Ayrıca Akca vd. (2016) yaptıkları çalışmada, (2.15) denkleminin çözümlerinin salınımlı olması için aşağıdaki yeter şartı elde etmişlerdir.

Teorem 2.17

$$0 < \mu := \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\delta_{\max}(t)}^t \sum_{i=1}^r q_i(s) ds \leq \frac{1}{e}$$

olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\rho(t)}^t \sum_{i=1}^r q_i(v) h_n(\rho(t), \delta_i(v)) dv > \frac{1 + \ln(\beta(\mu))}{\beta(\mu)}$$

şartı altında (2.15) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Akca *et al.* 2016)

3 BİRİNCİ MERTEBE GECİKMELİ LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Salımlılık teorisi ile ilgili çalışmalarda, genelde salımlı olmayan çözümün varlığı için yeter şartlar ve her çözümün salımlı olması için yeter şartlar gibi durumlar üzerinde durulmuştur.

Yukarıda verilen bu durumlar için yapılan çalışmalar birbirinden farklı yapıdadır. Verilen ilk durumda sabit işaretli olan bir çözümün var olduğunu göstermek yeterlidir. Dolayısıyla, çeşitli sabit nokta teoremleri uygulanabilir veya salımlı olmayan bir çözüme yakınsak olacak şekilde bir monoton dizi tanımlanabilir. İkinci durumda ise, denklemin bazı çözümleri için bu yöntemlerden herhangi birisinin kullanılması uygun değildir. Bu nedenle; çelişki bulma yöntemi kullanılarak ispat yapılabilir. Yani verilen denklemin bir çözümü olan fakat salımlı olmayan bir çözümün varlığı kabul edilir ve bu denklemin parametreleri için kabul edilen şartların sağlandığı gösterilerek çelişki elde edilir.

Bu bölümde $q(t) \geq 0$ sürekli bir fonksiyon ve δ pozitif bir sabit olmak üzere

$$y'(t) + q(t) + y(t - \delta) = 0 \quad (3.1)$$

diferensiyel denklemi ve bu denklemin genel durumu olan $1 \leq i \leq n$, $q_i(t) \geq 0$ sürekli fonksiyonlar, δ_i pozitif sabitler için,

$$y'(t) + \sum_{i=1}^n q_i(t) + y(t - \delta_i) = 0 \quad (3.2)$$

gecikmeli lineer diferensiyel denkleminin çözümlerinin salımlılık kriterleri ayrıntılı bir şekilde incelenecektir. Bu incelemede temel kaynak olarak Li (1996) alınmıştır.

Tanım 3.1 $\rho = \delta$ (veya $\rho = \max_{1 \leq i \leq n} \{\delta_i\}$) olmak üzere her (3.1) (veya (3.2)) denklemini sağlayan $y \in C([t - \rho, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonuna (3.1) (veya (3.2)) denkleminin bir çözümü denir. Bu çözüm keyfi sayıda sıfıra sahip ise salımlı çözüm, aksi takdirde salımlı olmayan ya da salımsız çözüm adını alır.

Lemma 3.1 $y(t)$, (3.2) denkleminin bir ergeç pozitif çözümü ve bazı i 'ler için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\delta_i} q_i(s) ds > 0$$

ise bazı i 'ler için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t - \delta_i)}{y(t)} < \infty \quad (3.3)$$

dur.

İspat: Kabul edelimki;

$$\int_{t_k}^{t_k + \delta_i} q(s) ds \geq d$$

olacak şekilde $k \rightarrow \infty$ için $t_k \rightarrow \infty$ olan bir $\{t_k\}$ dizisi ve bir d sabiti varolsun. O halde her k için

$$\int_{t_k}^{\xi_k} q_i(s) ds \geq \frac{d}{2} \text{ ve } \int_{\xi_k}^{t_k + \delta_i} q_i(s) ds \geq \frac{d}{2} \quad (3.4)$$

olacak şekilde $\xi_k \in (t_k, t_k + \delta_i)$ vardır. Diğer taraftan (3.2) denklemi ergeç

$$y'(t) + q_i(t) + y(t - \delta_i) \leq 0 \quad (3.5)$$

olasını gerektirir. (3.5) denklemi $[t_k, \xi_k]$ ve $[\xi_k, t_k + \delta_i]$ aralıklarında integre edilirse sırasıyla,

$$y(\xi_k) - y(t_k) + \int_{t_k}^{\xi_k} q_i(s) y(s - \delta_i) ds \leq 0 \quad (3.6)$$

ve

$$y(t_k + \delta_i) - y(\xi_k) + \int_{\xi_k}^{t_k + \delta_i} q_i(s) y(s - \delta_i) ds \leq 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.6) ve (3.7) nin ilk terimleri ihmal edilip $y(t)$ nin azalanlığı ve (3.4) eşitsizlikleri kullanılırsa;

$$-y(t) + \frac{d}{2} y(\xi_k - \delta_i) \leq 0 \text{ ve } -y(\xi_k) + \frac{d}{2} y(t_k) \leq 0$$

veya

$$\frac{y(\xi_k - \delta_i)}{y(t_k)} \leq \left(\frac{2}{d}\right)^2$$

elde edilirki böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.2 Eğer (3.2) denklemi bir egreç pozitif çözüme sahip ise ergeç

$$\int_t^{t + \delta_i} q_i(s) ds \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

dir.

Teorem 3.1 Kabul edelimki; bazı $t_0 > 0$ ve $t \geq t_0$ için $\int_t^{t+\delta} q(s)ds > 0$ ve

$$\int_{t_0}^{\infty} q(t) \ln \left(e \int_t^{t+\delta} q(s)ds \right) dt = \infty \quad (3.9)$$

olsun. Bu durumda, (3.1) denkleminin tüm çözümleri salımlıdır.

İspat: Çelişki için kabul edelimki, (3.1) denklemini ergeç pozitif bir $y(t)$ çözümüne sahip olsun. Bu durumda, $y(t)$ nin ergeç monoton azalan olduğu açıktır.

$$\gamma(t) = -\frac{y'(t)}{y(t)}$$

olsun. Yeterince büyük t için, $\gamma(t)$ negatif olmayan sürekli bir fonksiyondur ve bazı $t_1 \geq t_0$ için $y(t_1) > 0$ olmak üzere

$$y(t) = y(t_1) \exp \left(-\int_{t_1}^t \gamma(s)ds \right)$$

dir. Diğer taraftan $\gamma(t)$,

$$\gamma(t) = q(t) \exp \left(\int_{t-\delta}^t \gamma(s)ds \right) \quad (3.10)$$

genelleştirilmiş karakteristik denklemini sağlar. Buradan, $c > 0$ için

$$e^{cx} \geq x + \frac{\ln(ec)}{c} \quad (3.11)$$

ve böylece $A(t) = \int_t^{t+\delta} q(s)ds$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= q(t) \exp \left(A(t) \cdot \frac{1}{A(t)} \int_{t-\delta}^t \gamma(s)ds \right) \\ &\geq q(t) \left[\frac{1}{A(t)} \int_{t-\delta}^t \gamma(s)ds + \frac{\ln(eA(t))}{A(t)} \right] \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. Buradan;

$$\gamma(t) \int_t^{t+\delta} q(s)ds - q(t) \int_{t-\delta}^t \gamma(s)ds \geq q(t) \ln \left(e \int_t^{t+\delta} q(s)ds \right) \quad (3.12)$$

elde edilir. O halde $N > T$ için,

$$\begin{aligned}
& \int_T^N \gamma(t) \int_t^{t+\delta} q(s) ds dt - \int_T^N q(t) \int_{t-\delta}^t \gamma(s) ds dt \\
& \geq \int_T^N q(t) \ln \left(e \int_t^{t+\delta} q(s) ds \right) dt
\end{aligned} \tag{3.13}$$

olur. İntegrasyon sırası değiştirilirse,

$$\begin{aligned}
\int_T^N q(t) \int_{t-\delta}^t \gamma(s) ds dt & \geq \int_T^{N-T} \left(\int_s^{s+\delta} q(t) \gamma(s) dt \right) ds \\
& = \int_T^{N-\delta} \gamma(s) \int_s^{s+\delta} q(t) dt ds \\
& = \int_T^{N-\delta} \gamma(t) \int_t^{t+\delta} q(s) ds dt
\end{aligned} \tag{3.14}$$

bulunur. Son eşitsizlik ve (3.13) 'den

$$\int_{N-\delta}^N \gamma(t) \int_t^{t+\delta} q(s) ds dt \geq \int_T^N q(t) \ln \left(e \int_t^{t+\delta} q(s) ds \right) dt \tag{3.15}$$

bulunur. Lemma 3.2 'den ergeç

$$\int_t^{t+\delta} q(s) ds \leq 1 \tag{3.16}$$

dir. (3.15) ve (3.16) 'dan

$$\int_{N-\delta}^N \gamma(t) dt \geq \int_T^N q(t) \ln \left(e \int_t^{t+\delta} q(s) ds \right) dt$$

veya

$$\frac{\ln y(N-\delta)}{y(N)} \geq \int_T^N q(t) \ln \left(e \int_t^{t+\delta} q(s) ds \right) dt \tag{3.17}$$

elde edilir. (3.9) 'dan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t-\delta)}{y(t)} = \infty \tag{3.18}$$

olur. Diğer taraftan (3.9), $n \rightarrow \infty$ için $t_n \rightarrow \infty$ ve

$$\int_{t_n}^{t_n+\delta} q(s)ds \geq \frac{1}{e}, \quad \forall n \text{ için}$$

olacak şekilde bir $\{t_n\}$ dizisinin var olmasını gerektirir. Böylece Lemma 3.1 'den,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t-\delta)}{y(t)} < \infty$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (3.18) ile çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Hatırlatma 3.1 Esasen Teorem 3.1 (2.10) şartının geliştirilmiş bir şeklidir. Gerçekten de, (2.10) şartı sağlanırsa yeterince büyük t ler için

$$\ln \left(e \int_t^{t+\delta} q(s)ds \right) \geq c \quad (3.19)$$

olacak şekilde bir c pozitif sayısı vardır ve

$$\int_{t_0}^{\infty} q(t)dt = \infty \quad (3.20)$$

şartı sağlanır. Burada (3.19) ve (3.20) ifadeleri (3.9) şartını gerektirir.

Örnek 3.1 $q(t) = \exp(k \sin t)$ ve k pozitif bir sabit olmak üzere

$$y'(t) + \exp(k \sin t - 1)y(t-1) = 0 \quad (3.21)$$

denklemini gözönüne alalım.

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-1}^t q(s)ds < \frac{1}{e}$$

olduğu açıktır. Böylece (2.10) sağlanmaz. Jensen's eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} q(t) \ln \left(e \int_t^{t+1} q(s)ds \right) dt &\geq \int_0^{\infty} q(t) \int_t^{t+1} (k \sin s) ds dt \\ &= \frac{2k \sin \frac{1}{2}}{e} \int_0^{\infty} \exp(k \sin t) \sin \left(t + \frac{1}{2} \right) dt \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan, $\int_0^t \exp(k \sin t) \cos t dt$ integrali sınırlıdır ve

$$\int_0^{2\pi} \exp(k \sin t) \sin t dt > 0$$

dır. Böylece,

$$\int_0^\infty q(t) \ln \left(e \int_t^{t+1} q(s) ds \right) dt = \infty$$

elde edilir. Teorem 3.1 'den (3.21) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 3.2 $\delta_n = \max \{ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \}$ olsun. Kabul edelimki; bazı $t_0 > 0$ ve $t \geq t_0$ için $\sum_{i=1}^n \int_t^{t+\delta_i} q_i(s) ds > 0$ ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\delta_n} q_n(s) ds > 0 \quad (3.22)$$

olsun ve buna ek olarak

$$\int_{t_0}^\infty \left(\sum_{i=1}^n q_i(s) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^n \int_t^{t+\delta_i} q_i(s) ds \right) dt = \infty \quad (3.23)$$

eşitliği sağlansın. Bu durumda (3.2) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat: Çelişki için kabul edelimki, (3.2) denklemi ergeç pozitif ve azalan bir $y(t)$ çözümüne sahip olsun ve

$$\gamma(t) = -\frac{y'(t)}{y(t)}$$

eşitliği tanımlansın. O halde, $\gamma(t)$ negatif olmayan sürekli bir fonksiyondur ve

$$y(t) = y(t_1) \exp \left(- \int_{t_1}^t \gamma(s) ds \right)$$

ve $y(t_1) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır. Diğer taraftan $\gamma(t)$,

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \exp \left(\int_{t-\delta_i}^t \gamma(s) ds \right)$$

genelleştirilmiş karakteristik denklemini sağlar. $B(t) = \sum_{i=1}^n \int_t^{t+\delta_i} q_i(s)ds$ olsun. (3.11) ifadesinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \sum_{i=1}^n q_i(t) \exp \left(B(t) \cdot \frac{1}{B(t)} \int_{t-\delta_i}^t \gamma(s)ds \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^n q_i(t) \left[\frac{1}{B(t)} \int_{t-\delta_i}^t \gamma(s)ds + \frac{\ln(eB(t))}{B(t)} \right]\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^n \int_t^{t+\delta_i} q_i(s)ds \right) \gamma(t) - \sum_{i=1}^n q_i(s) \int_{t-\delta_i}^t \gamma(s)ds \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^n q_i(t) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^n \int_t^{t+\delta_i} q_i(s)ds \right)\end{aligned}\tag{3.24}$$

bulunur. O halde $N > T$ için,

$$\begin{aligned}&\int_T^N \left(\sum_{i=1}^n \int_t^{t+\delta_i} q_i(s)ds \right) \gamma(t)dt - \sum_{i=1}^n \int_T^N q_i(t) \int_{t-\delta_i}^t \gamma(s)dsdt \\ &\geq \int_T^N \left(\sum_{i=1}^n \int_t^{t+\delta_i} q_i(t) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^n \int_t^{t+\delta_i} q_i(s)ds \right) dt\end{aligned}\tag{3.25}$$

olur. İntegrasyon sırası değiştirilirse,

$$\begin{aligned}\int_T^N \left(\sum_{i=1}^n q_i(t) \int_{t-\delta_i}^t \gamma(s)dsdt \right) &\geq \sum_{i=1}^n \int_T^{N-\delta_i} \left(\int_s^{s+\delta_i} q_i(t)\gamma(s)dt \right) ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_T^{N-\delta_i} \gamma(t) \int_t^{t+\delta_i} q_i(s)dsdt\end{aligned}\tag{3.26}$$

bulunur. (3.26) ve (3.25) 'den

$$\sum_{i=1}^n \int_{N-\delta_i}^N \gamma(t) \int_t^{t+\delta_i} q_i(s)dsdt \geq \int_T^N \left(\sum_{i=1}^n q_i(t) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^n \int_t^{t+\delta_i} q_i(s)ds \right) dt\tag{3.27}$$

bulunur. Lemma 3.2 'den ergeç

$$\int_t^{t+\delta_i} q_i(s)ds \leq 1\tag{3.28}$$

dir. (3.27) ve (3.28) 'den

$$\sum_{i=1}^n \int_{N-\delta_i}^N \gamma(t) dt \geq \int_T^N \left(\sum_{i=1}^n q_i(t) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^n \int_t^{t+\delta_i} q_i(s) ds \right) dt$$

veya

$$\sum_{i=1}^n \frac{\ln y(N - \delta_i)}{y(N)} \geq \int_T^N \left(\sum_{i=1}^n q_i(t) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^n \int_t^{t+\delta_i} q_i(s) ds \right) dt \quad (3.29)$$

elde edilir. (3.23) 'den

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{y(t - \delta_i)}{y(t)} = \infty \quad (3.30)$$

olur. Bu durum

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t - \delta_n)}{y(t)} = \infty \quad (3.31)$$

olmasını gerektirir. Böylece Lemma 3.1'den,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t - \delta_n)}{y(t)} < \infty$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (3.31) ile çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1 Eğer

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_t^{t+\delta_i} q_i(s) ds > \frac{1}{e} \quad (3.32)$$

ise (3.2) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat: $\delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_n$ olsun. O halde, (3.32) 'den $1 \leq m \leq n$ ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\delta_m} q_m(s) ds > 0 \quad (3.33)$$

ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \int_t^{t+\delta_i} q_i(s) ds > \frac{1}{e} \quad (3.34)$$

olacak şekilde bir m vardır. Şimdi çelişki için kabul edelimki, (3.2) denklemi bir ergeç pozitif $y(t)$ çözümüne sahip olsun. O halde $y(t)$

$$y'(t) + \sum_{i=1}^m q_i(t) y(t - \delta_i) \leq 0 \quad (3.35)$$

eşitsizliğinin de bir ergeç pozitif çözümüdür. Bu durumda,

$$x'(t) + \sum_{i=1}^m q_i(t)x(t - \delta_i) = 0 \quad (3.36)$$

denklemi de bir ergeç pozitif çözüme sahiptir. Diğer taraftan (3.34) 'den bazı $t_0 > 0$ için

$$\int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^m q_i(t) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^m \int_t^{t+\delta_i} q_i(s) ds \right) dt = \infty$$

olduğu görülür. O halde Teorem 3.2 'den (3.36) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

4 BİRİNCİ MERTEBE BİRKAÇ GECİKME TERİMLİ LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde, $i = 1, 2, \dots, r$ için $\delta_i(t) < t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_i(t) = \infty$ olsun. $q_i, \delta_i \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$ olmak üzere

$$y'(t) + \sum_{i=1}^r q_i(t)y(\delta_i(t)) = 0 \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlı lineer gecikmeli diferensiyel denklemini çözümlerinin salınımlılığı için kriterler verilecektir. Temel kaynak olarak Attia *et al.* (2018) kullanılmıştır.

Tanım 4.1 $T_0 \in [t_0, \infty)$, $\delta(t) = \min \{\delta_i(t) : i = 1, 2, \dots, r\}$ ve $\delta_{(-1)}(t) = \inf \{\delta(s) : s \geq t\}$ olsun. $t \geq \delta_{(-1)}(t)$ için (4.1) denklemini sağlayan $[\delta_{(-1)}(t), \infty)$ aralığında sürekli diferensiyellenebilen $y \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonuna (4.1) denkleminin bir çözümü denir. Bu çözüm keyfi sayıda sıfıra sahip ise salınımlı çözüm, aksi taktirde salınımlı olmayan ya da salınımsız çözüm adını alır.

Bu bölüm boyunca, $t_1 \geq t_0$ için

$$\delta_i(t) \leq f_i(t) \leq f(t) \leq t, \quad t \geq t_1, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

olmak üzere $\{f_i(t)\}_{i=1}^n$ azalmayan sürekli fonksiyonların bir ailesi olarak kabul edilecektir.

Notasyonda basitlik olması açısından, $\tau \geq 0$ ve $e^{\tau\lambda} = \lambda$ denkleminin en küçük kökü $\lambda(\tau)$ olmak üzere

$$c(\tau) = \frac{1 - \tau - \sqrt{1 - \tau^2 - 2\tau}}{2}, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{1}{e}$$

şeklindedir.

Salınımlılık kriterlerini vermeden önce gerekli olan Lemma'lara değinelim:

Lemma 4.1 $y(t)$ (4.1) lineer gecikmeli diferensiyel denkleminin bir ergeç pozitif çözümü olsun. Bu durumda

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{y(\delta_i(t))}{y(t)} \geq \beta(\omega_i)$$

dır. Burada ω_i , (2.19) 'daki şekilde tanımlıdır (Infante *et al.* 2015).

Lemma 4.2 Kabul edelimki, $Q \in C([t_1, \infty), [0, \infty))$ olmak üzere

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{f(t)}^t Q(s) ds = \mu^*$$

eşitliği sağlansın ve $y(t)$

$$y'(t) + Q(t)y(f_i(t)) \leq 0 \quad , \quad t \geq t_1$$

birinci merteye gecikmeli diferensiyel denkleminin bir ergeç pozitif çözümü olsun. Bu durumda eğer, $0 \leq \mu^* \leq \frac{1}{e}$ ise

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{y(f(t))} \geq c(\mu^*)$$

eşitsizliği geçerlidir (Yu *et al.* 1992)

Bu durumda aşağıdaki teoremler verilebilir.

Theorem 4.1 $\varepsilon \in (0, \beta(\alpha))$ ve

$$P(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r q_i(t) \int_{\delta_i(t)}^t q_j(s) e^{\int_{f_j(t)}^t \sum_{k=1}^r q_k(u) du + (\beta(\alpha) - \varepsilon) \int_{\delta_j(t)}^{f_j(t)} \sum_{n=1}^r q_n(v) dv} ds$$

olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\int_{f(t)}^t P(u) du + c(\mu) e^{\int_{f(t)}^t \sum_{i=1}^r q_i(s) ds} \right) > 1 \quad (4.2)$$

ve

$$\alpha := \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{f(t)}^t \sum_{j=1}^r q_j(s) ds \quad , \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{e}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat: Çelişki için kabul edelimki (4.1) denkleminin salınımlı olmayan bir $y(t)$ çözümü mevcut olsun. (4.1) denkleminin lineerliğinden dolayı $y(t)$ çözümünü pozitif çözüm olarak kabul edebiliriz. Bundan dolayı yeterince büyük bir $t_2 \geq t_1$ vardır öyleki tüm $i = 1, 2, \dots, r$ olmak üzere $t \geq t_2$ için $y(\delta_i(t)) > 0$ dır. Dolayısıyla $y(t)$, $t \geq t_2$ için artmayan fonksiyondur. (4.1) denklemini t den $\delta_i(t)$ ye integre edilirse

$$\int_{\delta_i(t)}^t y'(s) ds + \int_{\delta_i(t)}^t \left(\sum_{i=1}^r q_i(s) y(\delta_i(s)) \right) ds = 0$$

$$y(t) - y(\delta_i(t)) + \sum_{j=1}^r \int_{\delta_i(t)}^t q_j(s) y(\delta_i(s)) ds = 0 \quad (4.3)$$

elde edilir. zamanda Aynı (4.1) denklemi $y(t)$ ile bölünüp yani;

$$\frac{y'(t)}{y(t)} + \sum_{i=1}^r \frac{q_i(t) y(\delta_i(t))}{y(t)} = 0$$

şeklinde yazılıp, $\delta_j(s)$ den $f_j(t)$ ye integre edilirse

$$\int_{\delta_j(s)}^{f_j(t)} \frac{y'(s)}{y(s)} ds + \int_{\delta_j(s)}^{f_j(t)} \left(\sum_{i=1}^r \frac{q_i(s) y(\delta_i(s))}{y(s)} \right) ds = 0$$

$$\ln y(f_j(t)) - \ln y(\delta_j(s)) + \int_{\delta_j(s)}^{f_j(t)} \left(\sum_{i=1}^r \frac{q_i(s) y(\delta_i(s))}{y(s)} \right) ds = 0$$

olur ki buradan, üstel fonksiyon yardımıyla;

$$y(\delta_j(s)) = y(f_j(t)) e^{\int_{\delta_j(s)}^{f_j(t)} \sum_{n=1}^r q_n(u) \frac{y(\delta_n(u))}{y(u)} du}$$

yazılabilir. Bulunan son ifade (4.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y(t) - y(\delta_i(t)) + \sum_{j=1}^r y(f_j(t)) \int_{\delta_i(t)}^t q_j(s) e^{\int_{\delta_j(s)}^{f_j(t)} \sum_{n=1}^r q_n(u) \frac{y(\delta_n(u))}{y(u)} du} ds = 0$$

bulunur. Yukarıdaki denklem $q_i(t)$ ile çarpılıp i üzerinden toplam alınırsa

$$y'(t) - y(t) \sum_{i=1}^r q_i(t) + \sum_{j=1}^r y(f_j(t)) \sum_{i=1}^r q_i(t) \int_{\delta_i(t)}^t q_j(s) e^{\int_{\delta_j(s)}^{f_j(t)} \sum_{n=1}^r q_n(u) \frac{y(\delta_n(u))}{y(u)} du} ds = 0$$

elde edilir. $x(t) = e^{\int_0^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds} y(t)$ ifadesi yukarıdaki son eşitlikte yerine yazılırsa denklem

$$x'(t) + \sum_{j=1}^r x(f_j(t)) e^{\int_{f_j(t)}^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds} \sum_{i=1}^r q_i(t) \int_{\delta_i(t)}^t q_j(s) e^{\int_{\delta_j(s)}^{f_j(t)} \sum_{n=1}^r q_n(u) \frac{y(\delta_n(u))}{y(u)} du} ds = 0 \quad (4.4)$$

eşitliğine indirgenir ki bu eşitlik $f(t)$ den t ye integre edilirse,

$$x'(t) - x(f(t)) \int_{f(t)}^t \sum_{j=1}^r x(f_j(u)) e^{\int_{f_j(u)}^u \sum_{n=1}^r q_n(u) du} \sum_{i=1}^r q_i(u) \int_{\delta_i(u)}^u q_j(s) e^{\int_{\delta_j(s)}^{f_j(t)} \sum_{n=1}^r q_n(u) \frac{y(\delta_n(u))}{y(u)} du} ds du = 0$$

ifadesine ulaşılır. $x(t)$ artmayan olduğundan integral içindeki x fonksiyonları integralin üst sınırında integral dışına çıkarılırsa eşitliğin sol tarafının değeri küçüleceğinden, $t \geq t_3$ ve bazı $t_3 \geq t_2$ için

$$x(t) - x(f(t)) + x(f(t)) \int_{f(t)}^t \sum_{j=1}^r e^{\int_{f_j(u)}^u \sum_{n=1}^r q_n(u) du} \sum_{i=1}^r q_i(u) \int_{\delta_i(u)}^u q_j(s) e^{\int_{\delta_j(s)}^{f_j(t)} \sum_{n=1}^r q_n(u) \frac{y(\delta_n(u))}{y(u)} du} ds du \leq 0 \quad (4.5)$$

ifadesine ulaşılır.

Diğer taraftan, $y(t)$ nin artmayan fonksiyon olduğu kullanılırsa, yukarıdaki şekilde düşünülerek (4.1) denklemi her $t \geq t_3$ için

$$y'(t) - y(f(t)) \sum_{i=1}^r q_i(t) \leq 0 \quad (4.6)$$

eşitsizliğine dönüşür. Böylece (Erbe, L. *et al.* 1995) çalışmasındaki Lemma 2.1.2 'den

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{y(f(t))}{y(t)} \geq \beta(\alpha)$$

elde edilir. Yeterince küçük $\epsilon > 0$ ve $1 \leq n \leq r$ olmak üzere $t \geq t_4$ ve bazı $t_4 \geq t_3$ için

$$\frac{y(\delta_n(t))}{y(t)} \geq \frac{y(f(t))}{y(t)} > \beta(\alpha) - \epsilon \quad (4.7)$$

olur. Bu eşitsizlik (4.5) denklemi ile birlikte ele alınırsa, $t \geq t_5$ ve bazı $t_5 \geq t_4$ için

$$x'(t) - x(f(t)) + x(f(t)) \int_{f(t)}^t \sum_{j=1}^r x(f_j(u)) e^{\int_{f_j(u)}^u \sum_{n=1}^r q_n(u) du} \sum_{i=1}^r q_i(u) \int_{\delta_i(u)}^u q_j(s) e^{\int_{\delta_j(s)}^{f_j(t)} \sum_{n=1}^r q_n(u) \frac{y(\delta_n(u))}{y(u)} du} ds du \leq 0$$

elde edilir. Yani, $t \geq t_5$ için

$$\int_{f(t)}^t \sum_{j=1}^r e^{\int_{f_j(u)}^u \sum_{n=1}^r q_n(u) du} \sum_{i=1}^r q_i(u) \int_{\delta_i(u)}^u q_j(s) e^{(\beta(\alpha) - \epsilon) \int_{\delta_j(s)}^{f_j(t)} \sum_{n=1}^r q_n(u) du} ds du \leq 1 - \frac{x(t)}{x(f(t))} \quad (4.8)$$

dir. Bunun yanı sıra; $t \geq t_6$ olmak üzere yeterince küçük $\epsilon^* > 0$ ve bazı $t_6 \geq t_5$ için Lemma 3.2 'den, (4.6) eşitsizliği

$$\frac{y(t)}{y(f(t))} > c(\alpha) - \epsilon^*$$

eşitsizliğine indirgenir. Dolayısıyla; her $t \geq t_6$ için

$$\frac{x(t)}{x(f(t))} = \frac{y(t)}{y(f(t))} e^{\int_{f(t)}^t \sum_{i=1}^r q_i(s) ds} > (c(\alpha) - \epsilon^*) e^{\int_{f(t)}^t \sum_{i=1}^r q_i(s) ds}$$

olur. Bu eşitsizlik (4.8) eşitsizliği ile birleştirilirse her $t \geq t_6$ için

$$\int_{f(t)}^t P(u) du \leq 1 - (c(\alpha) - \epsilon^*) e^{\int_{f(t)}^t \sum_{i=1}^r q_i(s) ds}$$

elde edilir. O halde,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\int_{f(t)}^t P(u) du + c(\alpha) e^{\int_{f(t)}^t \sum_{i=1}^r q_i(s) ds} \right) \leq 1 + \epsilon^* \limsup_{t \rightarrow \infty} e^{\int_{f(t)}^t \sum_{i=1}^r q_i(s) ds} \quad (4.9)$$

olur. Buradan (4.6) eşitsizliği $f(t)$ 'den t 'ye integre edilir ve $y(t)$ 'nin artmayan oluşu kullanılırsa tüm $t \geq t_3$ için

$$\int_{f(t)}^t \sum_{i=1}^r q_i(s) ds \leq 1 - \frac{y(t)}{y(f(t))} \leq 1$$

elde edilir. (4.9) eşitsizliğinde $\epsilon^* \rightarrow 0$ alınırsa, (4.2) ile bir çelişki elde edilir ki; bu durumda ispat tamamlanır.

Bu durumda aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 4.2 Kabul edelim ki; $\epsilon_k \in (0, \beta(\omega_k))$,

$$P_1(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r q_i(t) \int_{\delta_i(t)}^t q_j(s) e^{\int_{f_j(t)}^t \sum_{k=1}^r q_k(u) du + \int_{\delta_j(t)}^{f_j(t)} \sum_{n=1}^r (\beta(\omega_n) - \epsilon_n) q_n(v) dv} ds$$

ve ω_n (2.18) ile tanımlanmış ve de.

$$\alpha := \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{f(t)}^t \sum_{j=1}^r q_j(s) ds, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{e} \quad (4.10)$$

olsun. Bu durumda, eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\int_{f(t)}^t P_1(u) du + c(\alpha) e^{\int_{f(t)}^t \sum_{i=1}^r q_i(s) ds} \right) > 1$$

oluyorsa (4.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Teorem 4.3 Kabul edelimki, $\epsilon \in (0, \beta(\omega))$ ve $0 < \omega_k \leq \frac{1}{e}$ olmak üzere ω_k (2.18) ile α ise (4.10) ile tanımlansın ve

$$H_l(s) = e^{\int_{f_l(s)}^s \sum_{j=1}^r q_j(v) dv} \sum_{i=1}^r q_i(s) \int_{\delta_i(s)}^s q_l(v) e^{(\beta(\alpha) - \epsilon) \int_{\delta_l(v)}^{f_l(t)} \sum_{n=1}^r q_n(u) du} dv$$

olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^r \left(\prod_{l=1}^r \int_{f_l(t)}^t H_l(s) ds \right)^{\frac{1}{n}} + \frac{\prod_{l=1}^r c(\omega_k)}{r^r} e^{\sum_{l=1}^r \int_{f_l(t)}^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds} \right) > \frac{1}{r^r}$$

oluyorsa (4.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat: Kabul edelimki $y(t)$, (4.1) denkleminin salınımlı olmayan pozitif bir çözümü olsun. (4.7) eşitsizliği (4.4) de yerine yazılırsa, her $t \geq t_2$ ve bazı $t_2 \geq t_1$ için

$$x'(t) + \sum_{j=1}^r x(f_j(t)) e^{\int_{f_j(t)}^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds} \sum_{i=1}^r q_i(t) \int_{\delta_i(t)}^t q_j(s) e^{\int_{\delta_j(s)}^{f_j(t)} \sum_{n=1}^r q_n(u) \frac{y(\delta_n(u))}{y(u)} du} ds \leq 0$$

elde edilir. Burada, $\epsilon \in (0, \beta(\omega))$ ve $x(t) = e^{\int_{t_0}^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds} y(t)$ dir. Son eşitsizlik $f_k(t)$ 'den t 'ye integre edilir ve $y(t)$ 'nin artmayan olması durumu kullanılırsa tüm $t \geq t_3$ ve bazı $t_3 \geq t_2$ için

$$x(t) - x(f_k(t)) + \sum_{l=1}^r x(f_l(t)) \int_{f_k(t)}^t H_l(s) ds \leq 0$$

elde edilir. Aritmetik ve geometrik ortalama arasındaki bağıntı kullanılırsa, tüm $t \geq t_3$ için

$$x(f_k(t)) \geq r \left(\prod_{l=1}^r y(f_l(t)) \right)^{\frac{1}{r}} \left(\prod_{l=1}^r \int_{f_k(t)}^t H_l(s) ds \right)^{\frac{1}{r}} + x(t)$$

olur. Her iki tarafın r . kuvveti alınırsa her $t \geq t_3$ için

$$\left(\prod_{k=1}^r x(f_k(t)) \right) \geq r^r \left(\prod_{l=1}^r x(f_l(t)) \right) \prod_{k=1}^r \left(\prod_{l=1}^r \int_{f_k(t)}^t H_l(s) ds \right)^{\frac{1}{r}} + x(t)^r$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan, her $t \geq t_3$ için

$$\prod_{k=1}^r \left(\prod_{l=1}^r \int_{f_k(t)}^t H_l(s) ds \right)^{\frac{1}{r}} + \frac{x(t)^r}{r^r \prod_{l=1}^r x(f_l(t))} \leq \frac{1}{r^r} \quad (4.11)$$

olur. $x(t) = e^{\int_{t_0}^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds} y(t)$ olduğundan

$$\frac{x(t)^r}{\prod_{l=1}^r x(f_l(t))} = e^{\sum_{l=1}^r \int_{f_l(t)}^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds} \frac{y(t)^r}{\prod_{l=1}^r y(f_l(t))}$$

yazılabilir. Bu ifade (4.11) 'de yerine yazılırsa her $t \geq t_3$ için

$$\prod_{k=1}^r \left(\prod_{l=1}^r \int_{f_k(t)}^t H_l(s) ds \right)^{\frac{1}{r}} + e^{\sum_{l=1}^r \int_{f_l(t)}^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds} \frac{x(t)^r}{r^r \prod_{l=1}^r x(f_l(t))} \leq \frac{1}{r^r} \quad (4.12)$$

elde edilir. Diğer taraftan $y(t)$ 'nin artmayan olması ve (4.1) 'den $l = 1, 2, \dots, r$ olmak üzere her $t \geq t_3$ için

$$y'(t) + q_l(t)y(f_l(t)) \leq 0 \quad (4.13)$$

olur, yeterince küçük $\epsilon^* > 0$ ve Lemma 3.2 'den her $t \geq t_4$ ve bazı her $t_4 \geq t_3$ için

$$\frac{x(t)^r}{\prod_{l=1}^r x(f_l(t))} > \prod_{l=1}^r c(\omega_l) - \epsilon^*$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik (4.12) ile birlikte ele alınırsa her $t \geq t_4$ için

$$\prod_{k=1}^r \left(\prod_{l=1}^r \int_{f_k(t)}^t H_l(s) ds \right)^{\frac{1}{r}} + \frac{\prod_{l=1}^r c(\omega_l)}{r^r} e^{\sum_{l=1}^r \int_{f_l(t)}^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds} \leq \frac{1}{r^r} + \frac{\epsilon^*}{r^r} e^{\sum_{l=1}^r \int_{f_l(t)}^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^r \left(\prod_{l=1}^r \int_{f_k(t)}^t H_l(s) ds \right)^{\frac{1}{r}} + \frac{\prod_{l=1}^r c(\omega_l)}{r^r} e^{\sum_{l=1}^r \int_{f_l(t)}^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds} \right) \leq \frac{1}{r^r} + \frac{\epsilon^*}{r^r} e^{\sum_{l=1}^r \int_{f_l(t)}^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds} \quad (4.14)$$

olur. Diğer taraftan, (4.1) denklemi $f_l(t)$ 'den t 'ye integre edilirse,

$$y(t) - y(f_l(t)) + \int_{f_l(t)}^t \sum_{n=1}^r y(\delta_n(s)) q_n(s) ds = 0 \quad , \quad l = 1, 2, \dots, r$$

elde edilir. $y(t)$ artmayan olduğundan her $t \geq t_3$ için

$$\int_{f_l(t)}^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds \leq \frac{y(f_l(t))}{y(t)} - 1 \quad , \quad l = 1, 2, \dots, r$$

olur. Lemma 3.2, (4.13) ifadesine uygulanırsa,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{y(f_l(t))}{y(t)} < +\infty \quad , \quad l = 1, 2, \dots, r$$

elde edilir. Dolayısıyla $e^{\sum_{l=1}^r \int_{f_l(t)}^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds}$ sınırlıdır. O halde (4.14) ifadesinde $\epsilon^* \rightarrow 0$ alınırsa,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^r \left(\prod_{l=1}^r \int_{f_k(t)}^t H_l(s) ds \right)^{\frac{1}{r}} + \frac{\prod_{l=1}^r c(\omega_l)}{r^r} e^{\sum_{l=1}^r \int_{f_l(t)}^t \sum_{n=1}^r q_n(s) ds} \right) \leq \frac{1}{r^r}$$

olur ki, bu bir çelişkidir. Bu durumda ispat tamamlanır.

5 TARTIŞMA ve SONUÇ

Matematikte yapılan en önemli işlerden biri, verilen bir teoremi ispatlamak ya da bulunması istenen bir matematiksel ifadeyi bulmaktır. Varlık bildiren teoremlerin dışındaki teoremlerin ispatı yapılırken, teoremin doğru olduğunu gösteren bir tek örnek vermek yeterli değildir. Çünkü; teorem verilen bu örnek için doğru olduğu halde başka bir örnek için doğru olmayabilir. Yani; tek bir örnek vermek teoremin varlığını ispat etmez. Teoremlerin ispat edilmesinde başlıca iki ilke uygulanır.

Bunlardan biri tümevarım ilkesi, diğeri ise tümdengelim ilkesi adı verilen ilkelerdir. Tümdengelim ilkesi, gerek akıl gerekse gözlem ve deney yoluyla elde edilmiş genel bir ideali ayrı ayrı olaylara uygulamaktır. Başka bir deyişle, özelin bilgisini genel yargılardan çıkarmaktır. Tümevarım ise; gözlenen tek tek olgulardan yola çıkarak genel yargılara ulaşmaktır. Başa bir deyişle tümevarım özelden genele giden bir akıl yürütme türüdür. Bilimsel araştırma sürecinde tümevarım ve tümdengelim yöntemleri birbirlerini tamamlar niteliktedir. Tek tek olgulardan genel ilkelere ulaşılır ise tümevarım, genel ilkelere yola çıkılarak varsayımlarda bulunulur ise tümdengelim uygulanmış olur. Varsayımların doğruluğunu sınamak için deneyler ve incelemeler yapılır ve bu incelemelerin sonucunda genel ilkelere ulaşılır ise tümevarım ilkesi kullanılmış olur. Tümdengelim ilkesi kullanılarak teoremler ya doğrudan ya da dolaylı olarak ispat edilebilir.

Doğrudan ispat yönteminde, ortaya konulan bir önermenin doğru olduğundan hareketle, doğru olduğu bilinen yani bir önerme elde edilir. Daha sonra elde edilen son önermenin doğruluğundan hareketle doğru olduğu bilinen başka bir önerme elde edilir. Bu şekilde devam edilerek, her biri doğru olan sonlu çoklukta yeni önerme elde edilir. Böylece verilen teorem ispat edilmiş olur. Bu ispat yönteminde yeni önermelerin elde edilmesi konusunda genel bir kural yoktur. Bu önermeler önceden bilinenlerin bir sentezi yapılarak elde edilebilirler.

Dolaylı ispat yönteminde ise; teoremin kendisini ispat etmek yerine teoremin doğruluğunu gösteren başka bir önermenin doğruluğu ispatlanır. Yani; teoremin hükmünün yanlış olduğu kabul edilir. Bu kabul ile hipotezin yanlış olması gerektiği ispat edilir.

Teoremlerin bu yöntemle ispat edilmesine olmayana ergi yöntemi veya çelişki bulma yöntemi adı verilir. Bir önerme her zaman doğru olmayabilir ya da her zaman doğru olduğunu göstermemiz istenmeyebilir. Yani; önermenin yanlış olduğunun gösterilmesi de bizden istenebilir. Bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için ise, iki yol verilebilir. Bunardan biri; aksine örnek bulma yöntemi, diğeri ise çelişki bulma yöntemidir. Aksine örnek bulmakta, önermenin yanlış olduğunu gösteren tek bir örnek verilerek ispat tamamlanır. Çelişki bulma yönteminde ise, verilen önermenin doğru mu, yoksa yanlış mı olduğu bilinmiyorsa, bu önerme doğru varsayılarak önermeden bazı sonuçlar elde edilir. Elde edilen sonuçlar bilinenlerle ya da birbiri ile çelişirse ifade edilen önermenin yanlış olduğu sonucuna varılır.

Yukarıdaki bilgiler ışığı altında, bu tez çalışmasında ilk olarak, $q(t) \geq 0$ sürekli bir fonksiyon ve δ pozitif bir sabit olmak üzere

$$y'(t) + q(t) + y(t - \delta) = 0$$

diferensiyel denklemi ve bu denklemin genel durumu olan $1 \leq i \leq n$, $q_i(t) \geq 0$ sürekli fonksiyonlar, δ_i pozitif sabitler için,

$$y'(t) + \sum_{i=1}^n q_i(t) + y(t - \delta_i) = 0$$

gecikmeli lineer diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için verilen kriterler incelenmiştir.

Daha sonra ise, $i = 1, 2, \dots, r$ için $\delta_i(t) < t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_i(t) = \infty$ olsun. olmak üzere $q_i, \delta_i \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$ olmak üzere

$$y'(t) + \sum_{i=1}^r q_i(t)y(\delta_i(t)) = 0$$

birkaç gecikme terimli lineer diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılığı incelenmiştir. Teoremler ispatlanırken yani; salınımlılık kriterleri elde edilirken ise yukarıda bahsedilen çelişki bulma yöntemi kullanılmıştır.

6 KAYNAKLAR

- Akca, H., Chatzarakis, G. E. and Stavroulakis, I. P. (2016). An oscillation criterion for delay differential equations with several non-monotone arguments. *Applied Mathematics Letters*, **59**: 101-108.
- Arino, O., Gyori, I. and Jawhari, A. (1984). Oscillation criteria in delay equations. *Journal of Differential Equations*, **53**: 115-123.
- Attia, E. R., Benekas, V., El-Morshedy, H. A. and Stavroulakis, I. P. (2018). Oscillation of first order linear differential equations with several delay non-monotone delays. *Open Mathematics*, **16**, 83-94.
- Berezansky, L. and Braverman, E. (2011). On some constants for oscillation and Stability of delay equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **139** (11): 4017-4026.
- Bildik, N. (2012). Bilim ve Teknolojide Gelişmişliğin Matematiksel Temeli. Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Manisa.
- Braverman, E. and Karpuz, B. (2011). On oscillation of differential and difference equations with non-monotone delays. *Applied Mathematics and Computation*, **218**: 3880-3887.
- Braverman, E., Chatzarakis, G. E. and Stavroulakis, I. P. (2016). Iterative oscillation tests for differential equations with several non-monotone arguments. *Advances in Differential Equations*, **87**: 18 pages.
- Chatzarakis, G. E. and Öcalan Ö. (2016). Oscillations of differential equations with non-monotone retarded arguments. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, **19** (1): 98-104.
- Chatzarakis, G. E. and Öcalan Ö. (2015). Oscillations of differential equations with several non-monotone arguments. *Dynamical Systems*, **30** (3): 310-323.

- El-Morshedy, H. A. and Attia, E. R. (2016). New Oscillation criterion for delay differential equations with non-monotone arguments. *Applied Mathematics Letters*, **54**: 54-59.
- Elbert, A. (1976). Comparison theorem for first order nonlinear differential equation with delay. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **11**: 259-267.
- Elbert, A. and Stavroulakis, I. P. (1992). Oscillations of first order differential equations with deviating arguments. University of Ioannina T. R. No. 172. Recent trends in differential equations, 163-178, World Sci. Ser. Appl. Anal., 1, World Science Publishing Company (1992).
- Elbert, A. and Stavroulakis, I. P. (1995). Oscillation and non-oscillation criteria for delay differential equations. *Proceeding of the American Mathematical Society*, **123**: 1503-1510.
- Erbe, L. H., Kong, Q. and Zhang, B. G. (1995). Oscillation Theory for Functional Differential Equations. Marcel Dekker, New York.
- Erbe, L. H. and Zhang, B. G. (1988). Oscillation of first order linear differential equations with deviating arguments. *Differential Integral Equations*, **1**: 305-314.
- Fukagai, N. and Kusano, T. (1984). Oscillation theory of first order functional differential equations with deviating arguments. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **136**: 95-117.
- Gopalsamy, K. (1992). Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Kluwer Academic Publishers.
- Grammatikopoulos, M. K., Koplatadze, R. G. and Stavroulakis, I. P. (2003). On the oscillation of solutions of first order differential equations with retarded arguments. *Georgian Mathematical Journal*, **10**: 63-76.

- Gyori, I. and Ladas, G. (1991). Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications. Clarendon Press, Oxford.
- Hunt, B. R. and Yorke, J. A. (1984). When all solutions $x' = \sum q_i(t)x(t - T_i(t))$ oscillate. *Journal of Differential Equations*, **53**: 139-145.
- Infante, G., Koplatadze, M. K. and Stavroulakis, I. P. (2015). Oscillation criteria for differential equations with several retarded arguments. *Funkcialaj Ekvacioj*, **58**: 347-364.
- Koplatadze, R. G. and Chanturija, T. A. (1982). Oscillating and monotone solutions of first-order differential equations with deviating arguments. (*Russian*), *Differentsial'nye Uravneniya*, **8**: 1463-1465.
- Koplatadze, R. G. (2015). Specific properties of solutions of first order differential equations with several delay arguments. *Contemporary Mathematical Analysis*, **50**: 229-235.
- Kulenovic, M. R. and Grammatikopoulos, M. K. (1988). Some Comparison and Oscillation Results for First-Order Differential Equations and Inequalities with a Deviating Argument. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **131**: 67-84.
- Kusano, T. (1982). On Even Order Functional-Differential Equations with Advanced and Retarded Arguments. *Journal of Differential Equations*, **45**: 75-84.
- Kwong, M. K. (1991). Oscillation of first-order delay equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **156**: 274-286.
- Ladas, G., Lashmikantham, V. and Papadakis, J. S. (1972). Oscillation of high-order retarded differential equations generated by retarded arguments. Delay and Functional Differential Equations and Their Applications. Academic Press, New York, 219-231.
- Ladas, G. (1979). Sharp conditions for oscillations caused by delay. *Applicable Analysis*, **9**: 93-98.

- Ladas, G. and Stavroulakis, I. P. (1982). Oscillation Caused by Several Retarded and Advanced Arguments. *Journal of Differential Equations*, **44**: 134-152.
- Ladas, G., Qian C. and Yan J. (1992). A comparison result for the oscillation of delay differential equations, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **114**: 939-946.
- Ladde, G. S. (1978). Oscillations caused by retarded perturbations of first order linear ordinary differential equations. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti Lincei*, **6**: 351-359.
- Ladde, G. S., Laskhmikantham, V. and Zhang, B. G. (1987). Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 110, Marcel Dekker, Inc., New York.
- Li, B. (1995). Oscillations of delay differential equations with variable coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.*, **192**: 312-321.
- Li, B. (1996). Oscillations of first order delay differential equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **124**: 3729-3737.
- Li, X. and Zhu, D. (2002). Oscillation and Nonoscillation of Advanced Differential Equations with Variable Coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.*, **269**: 462-488.
- Myshkis, A. D. (1950). Linear Homogeneous Differential Equations of First Order with Deviating Arguments. (*Russian*), *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **5**: 160-162.
- Öcalan, Ö. and Özkan, U. M. (2016). Oscillations of Dynamic Equations on Time Scales with Advanced Arguments. *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations*, **6** (4): 275-284.
- Tang, X. H. (2004). Oscillation of First Order Delay Differential Equations with Distributed Delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **289**: 367-378.

- Villasana, M. and Radunskaya, A. (2003). A delay differential equation model for tumor growth. *Journal of Mathematical Biology.* **47** (3): 270-294.
- Yu, J. S., Wang, Z. C., Zhang B. G. and Qian, X. Z. (1992). Oscillation of differential equations with deviating arguments. *Pan American Mathematical Journal. J.*, **2**: 59-78.
- Zhang, B. G., and Gopalsamy K. (1988). Oscillation and nonoscillation in a nonautonomous delay logistic equation. *Quarterly of Applied Mathematics.* **46**: 267-273.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Şemseddin Doğan
Doğum Yeri ve Tarihi : Afyonkarahisar, 01.02.1989
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta) : 0 507 072 16 89

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Afyon Anadolu Öğretmen Lisesi, 2007.
Lisans : Necmettin Erbakan Üniversitesi, 2012.

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

İçişleri Bakanlığı, Emniyet Genel Müdürlüğü, 2013-...