

T.C.
BOLU ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



LİNEER İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN BAZI POZİTİF
LİNEER OPERATÖR YAKLAŞIM SÜREÇLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OĞUZHAN KARABULUT

TEZ DANIŞMANI
Prof. Dr. HARUN KARSLI

BOLU, ARALIK - 2023

KABUL VE ONAY SAYFASI

Oğuzhan KARABULUT tarafından hazırlanan “**Lineer İntegral Denklemler için Bazı Pozitif Lineer Operatör Yaklaşım Süreçleri**” adlı tez çalışması jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak oy birliğiyle kabul edilmiştir. 28/12/2023

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Prof. Dr. Harun KARSLI
Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi

.....

Üye
Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL
Ankara Üniversitesi

.....

Üye
Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin Erhan ALTIN
Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi

.....

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. İbrahim KÜRTÜL

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir,

aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Teze ilişkin Turnitin adlı programında enstitü müdürlüğünce belirlenen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan benzerlik raporuna göre, tezin benzerlik oranı %30'u geçmemektedir.

.....
OĞUZHAN KARABULUT

ÖZET

LİNEER İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN BAZI POZİTİF LİNEER OPERATÖR YAKLAŞIM SÜREÇLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
OĞUZHAN KARABULUT
BOLU ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. HARUN KARSLI)

BOLU, ARALIK - 2023
XII+94

Bu tez, Volterra ve Fredholm integral denklem sınıflarının tam çözümleri ve bazı lineer pozitif operatörler yardımıyla kurularak oluşturulan yaklaşık çözümlerinin incelenmesini içermektedir.

Birinci bölümde integral denklem teorisinin ortaya çıkışına ve integral denklemler ile ilgili yapılan çalışmalara yer verilmiştir. İkinci bölümde integral denklem çeşitlerine, üçüncü bölümde ise temel kavramlar ve lineer pozitif operatörlere yer verilmiştir. Lineer pozitif operatörlerden Bernstein polinomları ve Baskakov operatörleri tanıtılmış ve bu operatörlerin özelliklerine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde Volterra integral denklemlerin tam çözümleri için Adomian ayrıştırma metodu ve ardışık yaklaşımlar metodu tanıtılmış, yaklaşık çözümlerin hesabında kullanılmak üzere, Bernstein polinomları ve Baskakov operatörü kullanılarak Volterra integral denklemler yeniden kurulmuştur. Dördüncü bölümün sonunda ise örnek verilerek, Volterra integral denklemin tam ve yaklaşık çözümleri bulunmuştur. Örnekte verilen integral denklemin tam çözümü ve farklı n değerleri ile elde edilen yaklaşık çözümleri, tablo ve grafikler kullanılarak karşılaştırılmıştır. Beşinci bölümde Fredholm integral denklemlerin tam çözümleri için Adomian ayrıştırma metodu ve ardışık yaklaşımlar metodu tanıtılmış, yaklaşık çözümlerin hesabında kullanılmak üzere, Bernstein polinomları ve Baskakov operatörü kullanılarak Fredholm integral denklemler yeniden kurulmuştur. Beşinci bölümün sonunda ise örnek verilerek, Fredholm integral denklemin tam ve yaklaşık çözümleri bulunmuştur. Ayrıca integral denklemin tam çözümü ve farklı n değerleri ile elde edilen yaklaşık çözümleri, tablo ve grafikler kullanılarak karşılaştırılmıştır. Sonuç bölümünde, örneklerden elde edilen tablo ve grafikler yorumlanarak, gelecekte yapılacak çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELEER: Volterra İntegral Denklemler, Fredholm İntegral Denklemler, Bernstein Polinomları, Baskakov Operatörü

ABSTRACT

SOME POSITIVE LINEAR OPERATOR APPROXIMATION PROCESSES FOR LINEAR INTEGRAL EQUATIONS

**MASTER THESIS
OGUZHAN KARABULUT
BOLU ABANT IZZET BAYSAL UNIVERSITY
INSTITUTE OF GRADUATE STUDIES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. HARUN KARSLI)**

**BOLU, DECEMBER-2023
XII+94**

This thesis includes the examination of approximate solutions of Volterra and Fredholm integral equations obtaining by setting up some positive linear operators and the examination of exact solutions of Volterra and Fredholm integral equations.

In the first chapter, the emergence of the theory of integral equations and studies on integral equations are given. In the second part, the types of integral equations and in the third part basic concepts and linear positive operators are given. Bernstein polynomials and Baskakov operators, which are linear positive operators, are introduced and the properties of these operators are given. In the fourth chapter, Adomian decomposition method and successive approximations method are introduced for exact solutions of Volterra integral equations, and Volterra integral equations are reconstructed using Bernstein polynomials and Baskakov operator to be used in the calculation of approximate solutions. At the end of the fourth chapter, the exact and approximate solutions of the Volterra integral equation are found by giving an example. The exact solution of the integral equation given in the example and its approximate solutions obtained with different n values are compared using tables and graphs. In the fifth chapter, Adomian decomposition method and successive approximation method are introduced for exact solutions of Fredholm integral equations, and Fredholm integral equations are reconstructed using Bernstein polynomials and Baskakov operator to be used in the calculation of approximate solutions. At the end of the fifth chapter, the exact and approximate solutions of the Fredholm integral equation are found by giving an example. Also, the exact solution of the integral equation and the approximate solutions obtained with different n values were compared using tables and graphs. In the conclusion part, by interpreting the tables and graphics obtained from the examples were given suggestions for future studies.

KEYWORDS: Volterra Integral Equations, Fredholm Integral Equations, Bernstein Polynomials, Baskakov Operator

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
ETİK BEYAN.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
TABLO LİSTESİ	x
KISALTMA VE SEMBOLLER LİSTESİ	xi
TEŞEKKÜR.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI	3
2.1 Fredholm ve Volterra İntegral Denklemler	3
2.1.1 Fredholm İntegral Denklemler	3
2.1.2 Volterra İntegral Denklemler.....	4
2.1.3 Volterra-Fredholm İntegral Denklemler.....	4
2.2 Tekil ve Tekil Olmayan İntegral Denklemler.....	5
2.3 İntegro Diferansiyel Denklemler	5
2.3.1 Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler	5
2.3.2 Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler	6
2.3.3 Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler	6
2.4 Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler.....	6
2.5 Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler.....	7
2.6 Çekirdek Tiplerine Göre İntegral Denklemler.....	7
2.6.1 Sabit Çekirdekli İntegral Denklemler.....	8
2.6.2 Dejenere Çekirdekli İntegral Denklemler.....	8
2.6.3 Simetrik Çekirdekli İntegral Denklemler	9
3. TEMEL KAVRAMLAR VE BAZI LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER.....	10
3.1 L^2 Fonksiyonları ve Çekirdekler.....	13
3.2 Banach Sabit Nokta Teoremi.....	17
3.3 Bazı Lineer Pozitif Operatörler ve Özellikleri.....	20
3.3.1 Bernstein Polinomu	22
3.3.2 Baskakov Operatörü	34

4. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİN BAZI TAM ÇÖZÜM VE BAZI YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	38
4.1 Volterra İntegral Denklemler için Bazı Tam Çözüm Yöntemleri	38
4.1.1 Adomian Ayırıştırma Metodu.....	38
4.1.2 Ardışık Yaklaşımlar Metodu	39
4.2 Volterra İntegral Denklemlerin Bazı Lineer Pozitif Operatörler Yardımıyla Çözüm Algoritması	40
4.2.1 Volterra İntegral Denklemlerin Çözümlerine Bernstein Polinomu ile Yaklaşım.....	40
4.2.2 Volterra İntegral Denklemlerin Çözümlerine Baskakov Operatörü ile Yaklaşım.....	42
5. FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİN BAZI TAM ÇÖZÜM VE BAZI YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	65
5.1 Fredholm İntegral Denklemler için Bazı Tam Çözüm Yöntemleri.....	65
5.1.1 Adomian Ayırıştırma Metodu.....	65
5.1.2 Ardışık Yaklaşımlar Metodu	66
5.2 Fredholm İntegral Denklemlerin Bazı Lineer Pozitif Operatörler Yardımıyla Çözüm Algoritması	67
5.2.1 Fredholm İntegral Denklemlerin Çözümlerine Bernstein Polinomu ile Yaklaşım.....	67
5.2.2 Fredholm İntegral Denklemlerin Çözümlerine Baskakov Operatörü ile Yaklaşım.....	68
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	93
7. KAYNAKLAR.....	94

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1. Tam Çözüm ve $n=4$ için Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatör Yaklaşımları Grafiği.....	62
Şekil 4.2. Tam Çözüm ve $n=20$ için Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatör Yaklaşımları Grafiği.....	63
Şekil 4.3. Tam Çözüm ve $n=30$ için Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatör Yaklaşımları Grafiği.....	63
Şekil 5.1. Tam Çözüm ve $n=4$ için Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatör Yaklaşımları Grafiği.....	90
Şekil 5.2. Tam Çözüm ve $n=20$ için Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatör Yaklaşımları Grafiği.....	91
Şekil 5.3. Tam Çözüm ve $n=30$ için Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatör Yaklaşımları Grafiği.....	91

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 4.1. $n=10$ için Kesin Çözüm, Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatörü Yaklaşık Çözümleri.....	62
Tablo 5.1. $n=10$ için Kesin Çözüm, Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatörü Yaklaşık Çözümleri.....	90



KISALTMA VE SEMBOLLER LİSTESİ

$B_n(u; x)$	: u fonksiyonunun Bernstein polinomu
$B[0, \infty)$	: $[0, \infty)$ aralığındaki sınırlı fonksiyonlar uzayı
$C[a, b]$	: $[a, b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\ f\ $	: f fonksiyonunun L_2 uzayındaki normu
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$V_n(u; x)$	: u fonksiyonunun Baskakov operatörü

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışma konusunu seçmemde bana yardımcı olan ve çalışmalarım da akademik anlamda her türlü desteği veren, gerekli sabrı gösteren, çalışmalarım da yol gösteren ve motivasyonumu arttıran saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Harun KARSLI'ya teşekkürlerimi borç bilirim. Ayrıca benden desteklerini esirgemeyip çalışmalarım da yol gösteren ve motivasyonumu arttıran saygıdeğer hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin Erhan ALTIN'a şükranlarımı sunarım. Manevi anlamda desteklerini esirgemeyen ve gerekli sabrı gösteren aileme teşekkürlerimi sunarım.

BOLU, Aralık 2023

Oğuzhan KARABULUT

1. GİRİŞ

Joseph Fourier (1768-1830) yaptığı çalışmalarla integral denklemler teorisini başlatmıştır. Çalışmalarında Fourier dönüşümünün ters çevirme formülünü elde etmiştir. Bu yöntemi Vito Volterra (1860-1940), belirli integralin tersini bulma yöntemini kullanarak integral denklemleri çözme işleminde ele almıştır.

Abel, “Abel denklemi” olarak bilinen denklemi ele almıştır. Bu denklem

$$\int_0^x (x-t)^{-\alpha} u(t) dt = F(x), \quad 0 < \alpha < 1,$$

biçimindedir. Abel denkleminin çözümü

$$u(t) = -\pi^{-1} \sin \alpha \pi \frac{d}{dt} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} F(x) dx$$

formülü kullanılarak elde edilmiştir.

Abel, dikey bir düzlemde verilen bir eğrinin denklemini bulma problemini incelemiştir. Bu problem, bir kütle noktasının bu eğri boyunca yer çekiminin etkisiyle belirli bir pozitif yükseklikten yatay eksene kayması için geçen sürenin, bu pozitif yüksekliğin önceden belirlenmiş bir fonksiyonuna eşit olduğunu veren problemidir.

Abel’in integral denklemlerle ilgili çalışması sonraki zamanlarda yapılan çalışmaların önünü açmıştır. 1888’de Du Bois Reymond, Abel denklemi ve çeşitli integral denklemlerin çözümleriyle uğraşmıştır. Ayrıca Du Bois Reymond ‘integral denklem’ ismini tanıtmıştır.

Volterra, integral denklemlere 1884 yılında çalışmaya başlamıştır. 1895 yılında Volterra ile birlikte integral denklemler teorisinde yeni bir süreç başlamıştır. Bu süreçte Volterra

$$\int_0^x K(x,t) u(t) dt = F(x),$$

ya da

$$u(x) + \int_0^x K(x,t) u(t) dt = F(x),$$

gibi daha genel olan denklemleri ele almıştır. Volterra integral denklem ismi ilk olarak 1908 yılında Lalesco tarafından verilmiştir.

Erik Ivar Fredholm (1866-1927) bilim dünyasında integral denklemler üzerine yaptığı çalışmalarla adını duyurmuştur. Fredholm, integral denklemler teorisini kuran İsveçli bir matematikçidir ve operatör teorisinin başlamasında 1903 yılında Acta Mathematica'daki yayınlanan makalesi önemli bir görev üstlenmiştir (Corduneanu, 1991; Wazwaz, 2011).



2. İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

Bir integral denklem u bilinmeyen fonksiyonunun integral işareti altında bulunduğu denklemdir. $u(x)$ integral denkleminin standart hali

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} K(x, t)u(t)dt, \quad (2.1)$$

şeklinindedir. Burada $\phi(x)$ ve $\psi(x)$ integrasyon sınırları, λ sabit bir parametre ve $K(x, t)$, integral denklemin çekirdeği, x ve t değişkenlerine bağlı bilinen bir fonksiyondur.

Birçok türde integral denkleme rastlanılmaktadır. Bu türler çoğunlukla integralin çekirdeğine ve integrasyonun sınırlarına bağlı olarak farklı isimler alırlar.

2.1 Fredholm ve Volterra İntegral Denklemler

İntegral denklemler integrasyon sınırlarının durumuna göre Fredholm ve Volterra integral denklemler olmak üzere ikiye ayrılır.

2.1.1 Fredholm İntegral Denklemler

Fredholm integral denklemler integrasyon sınırları sabit olan integral denklemlerdir. u bilinmeyen fonksiyonunun

$$g(x) = \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (2.2)$$

şeklinde sadece integralin içinde bulunduğu denklemlere 1. tip Fredholm integral denklemler denir. Ancak u bilinmeyen fonksiyonunun

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (2.3)$$

şeklinde integralin içinde ve dışında bulunduğu denklemlere 2. tip Fredholm integral denklemler denir.

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = \int_0^1 (x + t)u(t)dt$$

denklemini birinci tip Fredholm integral denkleme,

$$u(x) = e^{2x} + 2e - 1 - \int_0^1 u(t)dt$$

denklemini ise ikinci tip Fredholm integral denkleme örnek olarak verilebilir.

2.1.2 Volterra İntegral Denklemler

İntegrasyon sınırlarının en az birinin değişken olduğu integral denklemlere Volterra integral denklemler denir. u bilinmeyen fonksiyonun

$$g(x) = \int_0^x K(x, t)u(t)dt \quad (2.4)$$

şeklinde sadece integralin içinde bulunduğu integral denklemlere birinci tip Volterra integral denklemler denir. u bilinmeyen fonksiyonun

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt \quad (2.5)$$

şeklinde integral işaretinin içinde ve dışında bulunduğu integral denklemlere ikinci tip Volterra integral denklemler denir.

$$\frac{1}{8}x^2 = \int_0^x (x - t)u(t)dt$$

denklemini birinci tip Volterra integral denkleme,

$$u(x) = 3x + \frac{1}{4}x^3 - \int_0^x (x - t)u(t)dt$$

denklemini ise ikinci tip Volterra integral denkleme örnek olarak verilebilir.

2.1.3 Volterra-Fredholm İntegral Denklemler

Volterra-Fredholm integral denklemler genel olarak

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t)u(t)dt \quad (2.6)$$

şeklinde verilebilir.

$$u(x) = \frac{5}{4}x + \frac{1}{8}x^3 + \int_0^x (x - t)u(t)dt - \int_0^1 xu(t)dt$$

denklemini Volterra Fredholm integral denklemin tipine örnek olarak verilebilir.

2.2 Tekil ve Tekil Olmayan İntegral Denklemler

Birinci tip

$$g(x) = \lambda \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} K(x, t)u(t)dt \quad (2.7)$$

ya da ikinci tip

$$u(x) = f(x) + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} K(x, t)u(t)dt \quad (2.8)$$

integral denklemleri $\phi(x)$, $\psi(x)$ integrasyon sınırlarından biri ya da ikisi sonsuz ise tekil(singüler) integral denklemdir. Eğer $K(x, t)$ çekirdeği verilen integrasyon aralığının bir ya da daha fazla noktasında sınırsız oluyorsa da tekil integral denklemdir.

$$x^2 + \sqrt{x} = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{3}{4}}} u(t)dt$$
$$u(x) = 1 + x^3 + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt$$

denklemleri tekil integral denklemlere örnek olarak verilebilir.

2.3 İntegro-Diferansiyel Denklemler

Bilinmeyen fonksiyonun herhangi bir mertebeden türevlerinin yanında integral ve diferansiyel operatörlerin de bulunduğu denklemlere integro-diferansiyel denklemler denir.

2.3.1 Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler

İntegrasyon sınırlarının sabitlerden oluştuğu integro-diferansiyel denklemlere Fredholm integro-diferansiyel denklem denir. Fredholm integro-diferansiyel denklemler

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (2.9)$$

şeklinde verilir.

$$u''(x) = x + \int_0^1 (1-x+t)u(t)dt, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0$$

denklemini Fredholm integro-diferansiyel denkleme örnek olarak verilebilir.

2.3.2 Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler

İntegrasyon sınırlarından en az birinin değişken olarak bulunduğu integro-diferansiyel denklemlere Volterra integro-diferansiyel denklem denir. Volterra integro-diferansiyel denklemler

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt \quad (2.10)$$

şeklinde verilir.

$$u'(x) = 3 + \int_0^x xu(t)dt, \quad u(0) = 0$$

denklemini Volterra integro-diferansiyel denkleme örnek olarak verilebilir.

2.3.3 Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler

Bu integral denklemler genel olarak

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x, t)u(t)dt, \quad (2.11)$$

şeklinde verilir.

$$u'''(x) + u'(x) = x - \int_0^x tu(t)dt - \int_0^1 u(t)dt, u(0) = 0, u'(0) = 1, u''(0) = 1$$

denklemini Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleme örnek olarak verilebilir.

2.4 Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler

İntegral içinde bulunan u bilinmeyeninin kuvvetinin (1) bir olduğu integral denklemlere lineer integral denklemler denir. u bilinmeyeninin kuvveti (1) birden farklıysa ya da integral denklemde $e^u, \sinhu, \cosu, \ln(1 + u)$ gibi lineer olmayan u fonksiyonları bulunuyorsa bu integral denklemlere lineer olmayan integral denklemler denir.

$$u(x) = \int_0^x (3 + x - t)u(t)dt$$

$$u(x) = \sinh x + \int_0^1 (x-t)u(t)dt$$

denklemleri lineer integral denklemlere,

$$u(x) = 1 + \int_0^x (1+x-t)u^3(t)dt$$

$$u(x) = 4 + \int_0^1 u^2(t)dt$$

denklemleri ise lineer olmayan integral denklemlere örnek olarak verilebilir.

2.5 Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler

İkinci tipte verilen Volterra ya da Fredholm integral denklemlerdeki $f(x)$ fonksiyonu özdeş olarak sıfıra eşitse yani $f(x) \equiv 0$ ise bu denklemlere homojen integral denklem, aksi taktirde homojen olmayan integral denklem denir.

$$u(x) = \int_0^x (1+x-t)u^3(t)dt$$

denklemini homojen integral denklem iken,

$$u(x) = \cos x + \int_0^x (x+t)u(t)dt$$

denklemini homojen olmayan integral denklemdir (Wazwaz, 2011).

2.6 Çekirdek Tiplerine Göre İntegral Denklemler

(2.3) integral denkleminde verilen $K(x, t)$ fonksiyonuna, integral denklemin çekirdeği denir. $K(x, t)$ çekirdeği (x, t) düzleminin bir $\Omega\{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ karesinin üzerinde tanımlıdır ve süreklidir veya süreksizlik noktalarında

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt$$

iki katlı integralinin sonlu bir değeri vardır (Krasnov vd., 1971).

Aşağıda integral denklem çekirdeklerinin bazı çeşitleri verilecektir (Aksoy, 1998).

2.6.1 Sabit Çekirdekli İntegral Denklemler

Bir integral denklemde $K(x, t)$ çekirdeği bir sabit olarak verilsin. C , bu sabiti göstermek üzere,

$$K(x, t) = C$$

için, (2.3) integral denklemi

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b C u(t) dt \quad (2.12)$$

şeklinde olur. Bu denklem

$$u(x) = f(x) + \lambda C \int_a^b u(t) dt \quad (2.13)$$

ve $\lambda C = \mu$ alınırsa,

$$u(x) = f(x) + \mu \int_a^b u(t) dt \quad (2.14)$$

olarak yazılabilir.

2.6.2 Dejenere Çekirdekli İntegral Denklemler

Bir integral denklemde, $K(x, t)$ çekirdeği,

$$K(x, t) = r(x)s(t)$$

şeklinde ise, bu çekirdek fonksiyona dejenere çekirdek denir.

Çekirdeği bu şekilde tanımlanan integral denklem,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b r(x)s(t)u(t) dt \quad (2.15)$$

biçiminde olur. Bu denklemde $r(x)$, t den bağımsız olduğundan,

$$u(x) = f(x) + \lambda r(x) \int_a^b s(t)u(t) dt \quad (2.16)$$

şeklinde yazılır.

2.6.3 Simetrik Çekirdekli İntegral Denklemler

Bir integral denklemde, $K(x, t)$ çekirdeği,

$$K(x, t) = K(t, x)$$

şeklinde ise, bu çekirdek fonksiyonuna simetrik çekirdek denir. Bu şekildeki integral denklemlere de simetrik çekirdekli integral denklemler denir.



3. TEMEL KAVRAMLAR VE BAZI LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER

Tanım 3.1 $X \neq \emptyset$ bir küme ve bir

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y)$$

dönüşümü verilsin. d dönüşümü $\forall x, y, z \in X$ için

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

özelliklerini gerçekliyorsay X üzerinde metrik adını alır ve (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 3.2 $X \neq \emptyset$ bir küme ve F de bir cisim olsun.

$$+: X \times X \rightarrow X \quad \text{ve} \quad \cdot: F \times X \rightarrow X$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

$$(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x$$

fonksiyonları

$$\forall x, y, z \in X, \quad \forall \lambda, \mu \in F \quad \text{ için}$$

$$(i) \quad x + y = y + x, \quad (+ \text{ işleminin değişme özelliği})$$

$$(ii) \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad (+ \text{ işleminin birleşme özelliği})$$

$$(iii) \quad \exists 0 \in X, \quad \text{öyle ki} \quad x + 0 = x, \quad (+ \text{ işlemine göre etkisiz elemanın varlığı})$$

$$(iv) \quad \exists (-x) \in X, \quad \text{öyle ki} \quad x + (-x) = 0, \quad (+ \text{ işlemine göre ters elemanın varlığı})$$

$$(v) \quad 1 \in F \quad \text{öyle ki} \quad 1 \cdot x = x, \quad (\text{Birimle çarpım özelliği})$$

$$\left. \begin{aligned} (vi) \quad & \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ (vii) \quad & (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \end{aligned} \right\} \quad (\text{Skalerle çarpmanın dağılma özellikleri})$$

(viii) $\lambda(\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$ (Skalerle çarpmanın birleşme özelliği)

şartlarını sağlarsa, X kümesine F cismi üzerinde bir vektör uzayı (veya lineer uzay) denir (Kızmaz, 1993).

Tanım 3.3 X bir lineer uzay ve $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\forall x \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(iii) $\forall x, y \in X, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

koşullarını sağlarsa, bu fonksiyona bir “norm fonksiyonu” (veya norm), $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir “normlu lineer uzay” denir (Kızmaz, 1993).

Tanım 3.4 (X, d) metrik uzayı içinde (x_n) bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$ ise, yani $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall n > n_\varepsilon$ için $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ oluyorsa, (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ ya da } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

şeklinde gösterilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 3.5 $X \subset \mathbb{R}$ ve X üzerinde tanımlı bütün fonksiyonların kümesi $F(X)$ olsun,

$$d: \mathbb{N} \rightarrow F(X)$$

şeklinde tanımlı d fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi denir ve bu dizinin terimleri $f_1, f_2, f_3, \dots$ ile, dizi ise (f_n) ile gösterilir.

Tanım 3.6 $C[a, b]$ üzerinde dönüşüm yapan bir lineer pozitif operatör dizisi $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$L_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$$

$$f \rightarrow L_n(f; x)$$

şeklindedir.

Tanım 3.7 Kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm $f \in C[a, b]$ olmak üzere

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.8 (Eşlenik Kuvvet)

$1 \leq p \leq \infty$ için p nin eşlenik kuvveti q şeklinde belirtilir ve $[1, \infty]$ aralığının elemanıdır. Böylece

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

dir (Axler, 2020).

Teorem 3.1 (Hölder Eşitsizliği) p ile q , $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan iki sayı olmak üzere $\forall f, g \in C[a, b]$ için

$$\int_a^b |f(m)g(m)| dm \leq \left(\int_a^b |f(m)|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(m)|^q dm \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: İspat için (Musayev ve Alp, 2000) incelenebilir.

Teorem 3.2 (Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p < +\infty$ olmak üzere

$\forall f, g \in C[a, b]$ için

$$\left(\int_a^b |f(m) + g(m)|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(m)|^p dm \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(m)|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: İspat için (Musayev ve Alp, 2000) incelenebilir.

3.1 L^2 Fonksiyonları ve Çekirdekler

(a, b) aralığında reel bir t değişkenine bağlı $f(t)$ fonksiyonu için Lebesgue anlamında

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < +\infty$$

şartı sağlanıyorsa bu fonksiyonların oluşturduğu uzaya $L^2(a, b)$ fonksiyonlar uzayı denir ve f fonksiyonuna L^2 fonksiyonu denir.

$K(x, t)$ çekirdeği

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < +\infty$$

koşulunu sağlasın. Bu koşul ile

(i) hemen hemen tüm x ler için

$$\int_a^b |K(x, t)|^2 dt < +\infty$$

(ii) hemen hemen tüm t ler için

$$\int_a^b |K(x, t)|^2 dx < +\infty$$

durumları sağlanır.

Tanım 3.9

L^2 de verilen bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır ve $\|f\|$ ile gösterilir (Delves ve Mohamed, 1985).

Tanım 3.10

$f, g \in L^2$ fonksiyonlarının $\langle f, g \rangle$ iç çarpımı

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt \quad (3.1)$$

olarak tanımlanır. (3.1) de verilen iç çarpımın anlamlı olması için f ve g fonksiyonları birbirinin eşleniğidir.

Teorem 3.3 (Fubini Teoremi)

Eğer $\iint f(x, t)dxdt$ varsa o halde hemen hemen tüm x ler için $\int f(x, t)dt$ vardır ve

$$\iint f(x, t)dxdt = \int dx \int f(x, t)dt = \int dt \int f(x, t)dx$$

olur. Sonuç olarak integrasyon sırası değişebilir (Delves ve Mohamed, 1985).

Şimdi Teorem 3.3 ten yararlanılarak bir L^2 çekirdek fonksiyonu olan $K(x, t)$ nin normu tanımlanacaktır.

$K(x, t)$ bir L^2 çekirdeği ve f bir L^2 fonksiyonu ise o halde tanımdan ve (3.1) denkleminde $[a, b]$ aralığındaki hemen hemen tüm x ler için

$$g(x) = \int K(x, t)f(t)dt$$

olur. Buradan

$$|g(x)|^2 \leq \int |K(x, t)|^2 dt \int |f(t)|^2 dt$$

olur. Fubini teoremiyle $g(x)$ bir L^2 fonksiyonudur ve

$$\int |g(x)|^2 dx \leq \iint |K(x, t)|^2 dt dx \int |f(t)|^2 dt$$

olur. Buradan $\int K(x, t)(.)dt$ operatörü bir L^2 fonksiyonunu L^2 fonksiyonuna eşler. Sınırlı bir K çekirdeğinin normu

$$\|K\| = \sup_{\substack{f \in L^2 \\ f \neq 0}} \frac{\|Kf\|}{\|f\|}$$

biçiminde tanımlanır. Buradan herhangi bir $f \in L^2$ fonksiyonu için

$$\|Kf\| \leq \|K\| \|f\| \quad (3.2)$$

dir. Yukarıda tanımlanan $g(x)$ fonksiyonu için

$$\|g\|^2 \leq \left[\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt \right] \|f\|^2$$

eşitsizliği sağlanır, yani

$$\|Kf\| \leq \left[\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt \right]^{\frac{1}{2}} \|f\|$$

olur. Böylece (3.2) den dolayı, $\|K\|$ normu,

$$\|K\| \leq \left[\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

ile sınırlandırılabilir. Böylece

$$\|K\|_E = \left(\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

$\|K\|_E$, K nın bir Öklidyen normudur. $\|K\|_E$, bir normda bulunan özelliklere sahiptir ve

$$\|Kf\| \leq \|K\|_E \|f\|$$

eşitsizliğini sağlar (Delves ve Mohamed, 1985).

Teorem 3.4 $f, g \in L^2[a, b]$ de iken $fg \in L^1[a, b]$ dedir.

İspat: Hölder eşitsizliğinin $p = q = 2$ için özel hali olan

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{1/2}$$

Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliğinin her iki tarafının karesi alınarak

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \quad (3.3)$$

olduğu ispatlanmalıdır. (3.3) ifadesinin sol tarafında verilen integral

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 = \int_a^b f(x)g(x)dx \int_a^b f(y)g(y)dy \quad (3.4)$$

şeklinde yazılarak (3.4) eşitliğinin sağ tarafında verilen ifade Green Teoremi gereği

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 = \int_a^b \int_a^b [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dx dy \quad (3.5)$$

biçiminde yazılır. (3.5) denkleminin sağ tarafında verilen ifade aşağıdaki gibi düzenlenerek

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b \int_a^b [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dx dy \\ &= \int_a^b \int_a^b f^2(x)g^2(y) dx dy - 2 \int_a^b \int_a^b f(x)g(y)f(y)g(x) dx dy \\ &\quad + \int_a^b \int_a^b f^2(y)g^2(x) dx dy \\ &= \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(y)dy - 2 \int_a^b f(x)g(x)dx \int_a^b f(y)g(y)dy \\ &\quad + \int_a^b f^2(y)dy \int_a^b g^2(x)dx \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.6) ifadesi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(y)dy - 2 \int_a^b f(x)g(x)dx \int_a^b f(y)g(y)dy \\ &\quad + \int_a^b f^2(y)dy \int_a^b g^2(x)dx \end{aligned} \quad (3.7)$$

ifadesine dönüşür. Buradan (3.7) eşitsizliği düzenlenerek

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(y)dy \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.8) de verilen eşitsizlik düzenlenerek

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{1/2} \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.9) eşitsizliğinin sağ tarafında verilen integraller $f, g \in L^2[a, b]$ olduğundan sonlu olur. Böylece $fg \in L^1[a, b]$ olur ve ispat tamamlanır.

3.2 Banach Sabit Nokta Teoremi

$T: X \rightarrow X$ dönüşümünün bir sabit noktası

$$Tx = x$$

biçiminde kendisine eşleyen bir $x \in X$ tir.

Banach sabit nokta teoremi belirli dönüşümlerin sabit noktaları için bir varlık ve teklik teoremidir ve bu teorem yardımıyla daha iyi yaklaşımlar kullanılarak sabit noktayı bulmak amaçlanmaktadır. Bu bir iterasyon yöntemidir ve tanımdan dolayı, bu metot verilen bir kümede keyfi bir x_0 elemanının seçileceği ve

$$x_{n+1} = Tx_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde kurulacak iterasyon bağıntılarıyla $x_0, x_1, x_2, \dots$ dizisinin elemanlarının bulunacağı bir metottur. Yani, bu metotta keyfi bir x_0 seçilir ve sırasıyla

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots$$

elemanları bulunur (Kreyszig, 1978).

Şimdi Banach'ın teoreminde bulunan sabit noktanın varlığına ve tekliğine yeterli koşullar oluşturan büzülme dönüşümünün tanımı verilecektir.

Tanım 3.11 $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. Bir $T: X \rightarrow X$ dönüşümü için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \quad (\forall x, y \in X) \quad (3.10)$$

olacak şekilde $\alpha < 1$ pozitif reel sayısı varsa T dönüşümüne X üzerinde bir büzülme dönüşümü denir. Buradan herhangi bir x ve y noktasının T dönüşümü ile elde edilen Tx ve Ty görüntülerinin birbirine x ve y noktalarından daha yakın olduğu görülmektedir. $\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)}$ oranı $\alpha < 1$ sayısını aşamaz (Kreyszig, 1978).

Tanım 3.12 (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X içinde bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_\varepsilon$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir. Bu tanım “ $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall m, n > n_\varepsilon$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon \Leftrightarrow (x_n)$ dizisi X kümesi içinde bir Cauchy dizisidir.” biçiminde de verilebilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 3.13 Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir (Musayev ve Alp, 2000).

Teorem 3.5 (Banach Sabit Nokta Teoremi) $X = (X, d)$ boş kümeden farklı bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü X üzerinde bir büzülme dönüşümü olsun. O halde T tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: Bir (x_n) dizisi oluşturulur ve onun bir Cauchy dizisi olduğu gösterilebilirse, X uzayının tam olmasından dolayı (x_n) dizisi X uzayında yakınsak olacaktır. Böylelikle T dönüşümü daha fazla sayıda sabit noktaya sahip olmaz ve (x_n) dizisinin x limiti T nin bir sabit noktası olur.

Herhangi bir $x_0 \in X$ ve

$$x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \dots \quad (3.11)$$

şeklinde bir (x_n) iterasyon dizisi seçilir.

(3.11) de elde edilen denklemler tekrar eden T büzülme dönüşümleriyle elde edilen x_0 ın görüntüleridir. (x_n) in Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. (3.10) ve (3.11) kullanılarak,

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2})$$

$$\dots \leq \alpha^m d(x_1, x_0)$$

elde edilir. Buradan, $n > m$ için geometrik bir dizinin toplam formülü ve üçgen eşitsizliğiyle

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

$$\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \dots + \alpha^{n-1})d(x_0, x_1)$$

$$= \alpha^m \frac{(1 - \alpha^{n-m})}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)$$

elde edilir. $0 < \alpha < 1$ için $1 - \alpha^{n-m} < 1$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \quad (n > m) \quad (3.13)$$

elde edilir. Sağ tarafta, $0 < \alpha < 1$ ve $d(x_0, x_1)$ sabittir, böylece $n > m$ olmak üzere yeterince büyük m ler için sağ taraf istenildiği kadar küçültülebilir. Bu durum (x_m) in Cauchy dizisi olduğunu ispatlar. X tam olduğundan, (x_m) dizisi x elemanına yakınsar. Böylelikle x limiti T dönüşümünün bir sabit noktası olur.

Üçgen eşitsizliğinden ve (3.10) dan

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx)$$

$$\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x)$$

elde edilir ve $x_m \mapsto x$ olduğundan ikinci satırdaki toplam daha önceden verilmiş herhangi bir $\varepsilon > 0$ dan daha küçük yapılabilir. Sonuç olarak $d(x, Tx) = 0$ dır, böylece $x = Tx$ olur. Bu durum x in T nin bir sabit noktası olduğunu gösterir.

x , $Tx = x$ ve $T\tilde{x} = \tilde{x}$ olduğundan dolayı yalnızca T nin sabit noktasıdır. (3.10) ile

$$d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leq \alpha d(x, \tilde{x})$$

ifadesi elde edilir. Bu durum $\alpha < 1$ için $d(x, \tilde{x}) = 0$ olduğu anlamına gelmektedir. Buradan $x = \tilde{x}$ olur ve teorem ispatlanır (Kreyszig, 1978).

Teorem 3.6 (Tek Çözüm)

Eğer (2.3) te verilen Fredholm integral denklemindeki $K(x, t)$ çekirdeği, $a \leq x \leq b$ ve $a \leq t \leq b$ aralıklarında sürekli, reel değerli fonksiyon ve $f(x)$, sürekli reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$|\lambda|M(b-a) < 1 \quad (3.14)$$

şartı sağlanıyorsa (2.3) te verilen Fredholm integral denklemin tek bir çözümü vardır. Burada

$$|K(x, t)| \leq M \in \mathbb{R} \quad (3.15)$$

dir (Wazwaz, 2011).

3.3 Bazı Lineer Pozitif Operatörler ve Özellikleri

Bu bölümde konuyla alakalı bazı tanımlar verilecek ve ardından integral denklemin yaklaşık çözümünde kullanılacak olan Bernstein polinomu ve Baskakov operatörü verilecektir.

Tanım 3.14 A ve B reel değerli fonksiyon uzayı olmak üzere, $L: A \rightarrow B$ şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör denir.

Tanım 3.15 A ve B fonksiyon uzayları olmak üzere, $L: A \rightarrow B$ şeklindeki L operatörü her $f, g \in A$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

koşulunu sağlıyorsa, L operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 3.16 $L: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olmak üzere,

$$\|L(f; x)\|_Y \leq C \|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlıyorsa L operatörüne sınırlı operator denir. Bu C sabitlerinin en küçüğüne L operatörünün normu denir ve $\|L\|_{X \rightarrow Y}$ ya da $\|L\|$ ile gösterilir. Yani,

$$\|L\| = \inf\{C: \|L(f; x)\|_Y \leq C \|f\|_X\}$$

dir. Bir başka ifadeyle

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \|L\| = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

dir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 3.17 f bir fonksiyon ve L bir operatör olmak üzere, $f \geq 0$ iken $L(f) \geq 0$ gerçekleşiyor ise L operatörüne pozitif operatör denir.

Hem lineer hem de pozitif operatörlere lineer pozitif operatör denir.

Lemma 3.1 Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani

$$f \leq g \text{ iken } L(f) \leq L(g)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $f \leq g$ olsun. $g - f \geq 0$ olacağından ve L operatörünün pozitifliğinden

$$L(g - f) \geq 0$$

elde edilir. L operatörünün lineerliğinden

$$L(g) - L(f) \geq 0 \Rightarrow L(g) \geq L(f)$$

olur ve ispat tamamlanır.

Lemma 3.2 L bir lineer pozitif operatör olmak üzere, $|L(f)| \leq L(|f|)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: Herhangi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

dir. L operatörü lineer olduğundan Lemma 3.1 den dolayı monoton artandır. O halde,

$$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \tag{3.16}$$

yazılabilir. L lineer olduğundan,

$$L(-|f|) = -L(|f|)$$

dir. Elde edilen bu eşitlik (3.16) da yerine yazılırsa

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \Rightarrow L(f) \leq L(|f|)$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

3.3.1 Bernstein Polinomu

Yaklaşım teorisinin temel problemi, $[a, b]$ aralığında sürekli olan u fonksiyonuna yaklaşan polinomun belirlenmesidir. Bunun için ilk başta aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 3.7 (Weierstrass teoremi) $\forall \varepsilon > 0$ için $\|u - P\| < \varepsilon$ olacak şekilde $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli bir u fonksiyonuna karşılık gelen bir P polinomu vardır. Böylece $\forall x \in [a, b]$ için $|u(x) - P(x)| < \varepsilon$ olur (Lorentz, 1986).

Yaklaşım teorisinin temeli olan bu teorem, 1912’de S.N. Bernstein tarafından $C[0,1]$ deki bir u fonksiyonu için tanımlanan

$$B_n(u; x) = \sum_{i=0}^n u\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

polinomu kullanılarak ispat edilmiştir. Bernstein’in kendi ismini vererek tanımladığı bu polinom ile yapılan ispat Weierstrass teoremi için yapılan en sade ve anlamlı ispatlardan biridir. Lorentz, Bernstein polinomları ve uygulamalarını $[0,1]$ aralığı ve $\mathbb{C}$ deki fonksiyonlar üzerinden ele almıştır. 1950’li yılların başlarında, Bohman ve Korovkin çeşitli fonksiyon uzaylarındaki yaklaşım problemleri üzerinde önemli çalışmalar yapmışlardır (Oruç, 1998).

Teorem 3.8 (P. P. Korovkin Teoremi) $f \in C[a, b]$ ve tüm reel ekseninde

$|f(x)| \leq M_f$ olsun. Eğer $L_n(f)$ lineer pozitif operatörler dizisi, her $x \in [a, b]$ için

$$L_n(1, x) \Rightarrow 1$$

$$L_n(t, x) \Rightarrow x$$

$$L_n(t^2, x) \Rightarrow x^2$$

şartlarını sağlıyorsa, bu durumda her $f \in C[a, b]$ için $[a, b]$ de $L_n(f, x) \Rightarrow f(x)$

dir (Korovkin, 1953).

$\forall x \in [0,1]$ için

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (3.17)$$

ifadesi n . dereceden Bernstein baz polinomu olmak üzere

$$\begin{aligned} B_n(u; x) &= \sum_{k=0}^n u \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n u \binom{n}{k} p_{n,k}(x) \end{aligned} \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanan polinoma Bernstein polinomu denir.

$\forall x \in [0,1]$ için $p_{n,k}(x) \geq 0$ dir. Eğer

$$u \geq 0 \Rightarrow B_n(u; x) = \sum_{k=0}^n u \binom{n}{k} p_{n,k}(x) \geq 0 \Rightarrow B_n(u; x) \geq 0$$

olur. Bu durumda $B_n(u; x)$ operatörü pozitif bir operatördür.

$$\begin{aligned} B_n(\alpha u + \beta v; x) &= \sum_{k=0}^n [\alpha u + \beta v] \binom{n}{k} p_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\alpha u \binom{n}{k} + \beta v \binom{n}{k} \right] p_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha u \binom{n}{k} p_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^n \beta v \binom{n}{k} p_{n,k}(x) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^n u \binom{n}{k} p_{n,k}(x) + \beta \sum_{k=0}^n v \binom{n}{k} p_{n,k}(x) \\ &= \alpha B_n(u; x) + \beta B_n(v; x) \end{aligned}$$

olduğundan $B_n(u; x)$ operatörü lineer bir operatördür. Böylece Bernstein operatörü lineer pozitif bir operatördür.

(3.17) de tanımlanan Bernstein baz polinomunda

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

dır. n . dereceden $(n + 1)$ adet Bernstein polinomu vardır. Aşağıda verilecek olan Bernstein polinomlarının özelliklerinde $k < 0$ veya $k > n$ olduğu durumda $p_{n,k} = 0$ dır.

1. dereceden Bernstein baz polinomları

$$p_{1,0}(t) = 1 - t$$

$$p_{1,1}(t) = t$$

biçimindedir.

2. dereceden Bernstein baz polinomları

$$p_{2,0}(t) = (1 - t)^2$$

$$p_{2,1}(t) = 2t(1 - t)$$

$$p_{2,2}(t) = t^2$$

biçimindedir.

3. dereceden Bernstein baz polinomları

$$p_{3,0}(t) = (1 - t)^3$$

$$p_{3,1}(t) = 3t(1 - t)^2$$

$$p_{3,2}(t) = 3t^2(1 - t)$$

$$p_{3,3}(t) = t^3$$

biçimindedir (Joy, 2000).

Aşağıda Bernstein polinomunun bazı önemli özellikleri verilecektir.

Özellik 3.1 (Bernstein Polinomu İndirgeme Bağıntısı) n . dereceden Bernstein baz polinomu, $(n - 1)$. dereceden iki Bernstein baz polinomu kullanılarak elde edilebilir. Yani,

$$p_{n,k}(t) = (1 - t)p_{n-1,k}(t) + tp_{n-1,k-1}(t) \quad (3.19)$$

olarak yazılabilir.

İspat: Açık olarak (3.19) denklemindeki indirgeme bağıntısı Bernstein polinomunun tanımı ve bazı basit cebirsel işlemler yardımıyla

$$\begin{aligned} & (1-t)p_{n-1,k}(t) + tp_{n-1,k-1}(t) \\ &= (1-t) \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} + t \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{n-1-(k-1)} \\ &= \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= p_{n,k}(t) \end{aligned}$$

gibidir.

Özellik 3.2 n . dereceden Bernstein baz polinomlarının tümü $[0,1]$ aralığı üzerinde negatif olmayan bir polinomdur.

İspat: Tümevarım ve indirgeme bağıntısının özellikleri kullanılarak bu durum gösterilebilir.

$p_{1,0}(t) = 1-t$ ve $p_{1,1}(t) = t$ fonksiyonları $t \in [0,1]$ için negatif değildir, Bernstein baz polinomlarının indirgeme özelliğinden

$$p_{k,i}(t) = (1-t)p_{k-1,i}(t) + tp_{k-1,i-1}(t)$$

yazılabilir ve $t \in [0,1]$ için denklemin sağ tarafındaki bileşenler negatif olmadığından $p_{k,i}(t)$ de negatif değildir. Tümevarımdan, $t \in [0,1]$ için Bernstein baz polinomları negatif olmayan polinomlardır.

Özellik 3.3 k . dereceden $(k+1)$ tane Bernstein baz polinomları, toplamaları bir olacak şekilde birim parçalanma oluşturur.

İspat: Her bir k için, k . dereceden $(k + 1)$ adet Bernstein baz polinomunun toplamı, $(k - 1)$. dereceden k adet Bernstein baz polinomunun toplamına eşittir. Yani

$$\sum_{i=0}^k p_{k,i}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} p_{k-1,i}(t)$$

dir.

İndirgeme özelliği kullanılarak ve $p_{k-1,k}(t) = p_{k-1,-1}(t) = 0$ alınarak, toplamlar yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k p_{k,i}(t) &= \sum_{i=0}^k [(1-t)p_{k-1,i}(t) + tp_{k-1,i-1}(t)] \\ &= (1-t) \left[\sum_{i=0}^{k-1} p_{k-1,i}(t) + p_{k-1,k}(t) \right] + t \left[\sum_{i=1}^k p_{k-1,i-1}(t) + p_{k-1,-1}(t) \right] \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^{k-1} p_{k-1,i}(t) + t \sum_{i=1}^k p_{k-1,i-1}(t) \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^{k-1} p_{k-1,i}(t) + t \sum_{i=0}^{k-1} p_{k-1,i}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} p_{k-1,i}(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{i=0}^n p_{n,i}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} p_{n-1,i}(t) = \sum_{i=0}^{n-2} p_{n-2,i}(t) = \cdots = \sum_{i=0}^1 p_{1,i}(t) = (1-t) + t = 1$$

bulunur.

Özellik 3.4 n . dereceden Bernstein baz polinomlarının bir lineer birleşimiyle n den daha küçük dereceye sahip bir Bernstein baz polinomu elde edilebilir. Özel olarak, $(n - 1)$. dereceden herhangi bir Bernstein baz polinomu, n . dereceden Bernstein baz polinomlarının bir lineer birleşimi şeklinde yazılabilir.

İspat: İlk olarak

$$\begin{aligned} tp_{n,i}(t) &= \binom{n}{i} t^{i+1} (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} t^{i+1} (1-t)^{(n+1)-(i+1)} \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i+1}} p_{n+1,i+1}(t) \\ &= \frac{i+1}{n+1} p_{n+1,i+1}(t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (1-t)p_{n,i}(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} p_{n+1,i}(t) \\ &= \frac{n-i+1}{n+1} p_{n+1,i}(t) \end{aligned}$$

ve son olarak

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\binom{n}{i}} p_{n,i}(t) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} p_{n,i+1}(t) \\ &= t^i (1-t)^{n-i} + t^{i+1} (1-t)^{n-(i+1)} \\ &= t^i (1-t)^{n-i-1} ((1-t) + t) \\ &= t^i (1-t)^{n-i-1} \\ &= \frac{1}{\binom{n-1}{i}} p_{n-1,i}(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Son denklem ile herhangi bir Bernstein baz polinomu daha yüksek dereceli Bernstein baz polinomlarının terimleriyle ifade edilebilir. Yani,

$$\begin{aligned}
p_{n-1,i}(t) &= \binom{n-1}{i} \left[\frac{1}{\binom{n}{i}} p_{n,i}(t) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} p_{n,i+1}(t) \right] \\
&= \left(\frac{n-i}{n} \right) p_{n,i}(t) + \left(\frac{i+1}{n} \right) p_{n,i+1}(t)
\end{aligned}$$

dir. Burada $(n-1)$. dereceden bir Bernstein baz polinomu, kendisinden daha yüksek dereceye sahip n . dereceden Bernstein baz polinomlarının bir lineer birleşimiyle elde edilmiştir. Bu gösterim ile derecesi n den küçük olan k . dereceden herhangi bir Bernstein baz polinomu n . dereceden Bernstein baz polinomlarının bir lineer birleşimi olarak yazılabildiği gösterilebilir. $(n-1)$. dereceden iki Bernstein baz polinomunun bir lineer birleşimi ile $(n-2)$. dereceden bir Bernstein baz polinomu elde edilebilir. Bunların her biri n . dereceden iki Bernstein baz polinomunun bir lineer birleşimi olarak ifade edilebilir.

Özellik 3.5 $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ kuvvet bazı derecesi n veya n den daha düşük olan polinomlar uzayı için bir baz oluşturduğundan, n . dereceden herhangi bir Bernstein baz polinomu kuvvet bazı cinsinden yazılabilir.

İspat: Bernstein polinomlarının tanımı ve $(1-t)^{n-k}$ açılımında binom teoreminin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
p_{n,k}(t) &= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} t^k \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n}{k} \binom{n-k}{i} t^{i+k} \\
&= \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} t^i \\
&= \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} t^i
\end{aligned}$$

elde edilir.

Özellik 3.6 Herhangi bir kuvvet bazı elemanı, Bernstein baz polinomlarının lineer birleşimi ile elde edilebilir.

İspat: Tümevarım ve derece yükseltme formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
 t^k &= t(t^{k-1}) \\
 &= t \sum_{i=k-1}^n \frac{\binom{i}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} p_{n-1,i}(t) \\
 &= \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} t p_{n-1,i-1}(t) \\
 &= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\binom{i}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{i}{n} p_{n,i}(t) \\
 &= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} p_{n,i}(t)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Özellik 3.7 n . dereceden Bernstein baz polinomlarının, derecesi n ye eşit veya n den daha küçük olan polinomlar uzayı için bir baz oluşmasının iki nedeni vardır:

a–) Polinomlar uzayı, Bernstein baz polinomlarının alt kümesidir. n veya n den daha düşük derecedeki herhangi bir polinom, Bernstein baz polinomlarının bir lineer birleşimi ile elde edilebilir.

Bu durumda polinomlar uzayı kuvvet bazının alt kümesidir ve kuvvet bazının herhangi bir elemanı, Bernstein baz polinomlarının bir lineer birleşimi olarak yazılabilir.

b–) Kuvvet bazının elemanları lineer bağımsızdır. Yani, $c_0, c_1, \dots, c_n$ sabitleri mevcutsa ve

$$0 = c_0 p_{n,0}(t) + c_1 p_{n,1}(t) + \dots + c_n p_{n,n}(t)$$

özdeşliği tüm t ler için sağlanıyorsa, o halde tüm c_i ler sıfır olmalıdır.

Eğer bu doğru olsaydı, o halde

$$\begin{aligned}
0 &= c_0 p_{n,0}(t) + c_1 p_{n,1}(t) + \cdots + c_n p_{n,n}(t) \\
&= c_0 \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{i}{0} t^i + c_1 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \binom{i}{1} t^i + \cdots \\
&\quad + c_n \sum_{i=n}^n (-1)^{i-n} \binom{n}{i} \binom{i}{n} t^i \\
&= c_0 + \left[\sum_{i=0}^1 c_i \binom{n}{1} \binom{1}{1} \right] t^1 + \cdots + \left[\sum_{i=0}^n c_i \binom{n}{n} \binom{n}{n} \right] t^n
\end{aligned}$$

yazılabilirdi.

Kuvvet bazı lineer bağımsız bir küme olduğu için

$$c_0 = 0$$

$$\sum_{i=0}^1 c_i \binom{n}{1} \binom{1}{1} = 0$$

$\vdots$

$$\sum_{i=0}^n c_i \binom{n}{n} \binom{n}{n} = 0$$

yazılmalıdır. Bu denklemlerin çözümlenmesiyle $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ bulunur.

Özellik 3.8 Verilen bir polinom

$$p(t) = c_0 p_{n,0}(t) + c_1 p_{n,1}(t) + \cdots + c_n p_{n,n}(t) \quad (3.20)$$

denklemindeki gibi Bernstein baz polinomlarının bir lineer birleşimi ile elde edilebilir. (3.20) denklemi

$$p(t) = [p_{n,0}(t) \quad p_{n,1}(t) \quad \dots \quad p_{n,n}(t)] \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

gibi iki vektörün iç çarpımı olarak yazılabilir. (3.21) deki matris

$$p(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad \dots \quad t^n] \begin{bmatrix} b_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{1,0} & b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,0} & b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

ifadesine dönüştürülebilir. Burada $b_{i,j}$ elemanları ardışık Bernstein baz polinomlarını belirlemede kullanılan kuvvet bazının katsayılarıdır. Bu durumdaki matris alt üçgen matristir.

$n = 2$ olduğu durumda (3.21) matrisi

$$p(t) = [1 \quad t \quad t^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve $n = 3$ olduğu durumda (3.21) matrisi

$$p(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Joy, 2000).

Şimdi de Bernstein operatörünün Korovkin teoreminde verilen düzgün yakınsaklık koşullarını sağladığı gösterilecektir.

$$B_n(u; x) = \sum_{k=0}^n u \left(\frac{k}{n} \right) p_{n,k}(x) \quad u \in C[0,1],$$

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olmak üzere

$$B_n(1; x) = \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= (1-x+x)^n$$

$$= 1$$

$$B_n(t; x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{n!}{(n-k)! k!} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-(j+1))! j!} x^j (1-x)^{n-(j+1)}$$

$$= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j}$$

$$= x \cdot (1-x+x)^{n-1}$$

$$= x \cdot 1$$

$$= x$$

$$B_n(t^2; x) = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k(k-1) + k}{n^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k(k-1)}{n^2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n} \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!k(k-1)(k-2)!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k(k-1)}{n^2} \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n} \\
&= x^2 \frac{(n-1)}{n} \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \\
&= x^2 \frac{(n-1)}{n} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-(j+2))!j!} x^j (1-x)^{n-(j+2)} + \frac{x}{n} \\
&= x^2 \frac{(n-1)}{n} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{n-2-j} + \frac{x}{n} \\
&= x^2 \frac{(n-1)}{n} (1-x+x)^{n-2} + \frac{x}{n} \\
&= x^2 - \frac{1}{n} x^2 + \frac{x}{n} \\
&= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

olur.

O halde,

$$\|B_n(1; x) - 1\|_{C[0,1]} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\|B_n(t; x) - x\|_{C[0,1]} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

elde edilir.

$(t-x)^2 = t^2 - 2tx + x^2$ olduğundan ve B_n operatörünün lineerliğinden

$$B_n((t-x)^2; x) = B_n(t^2; x) + B_n(-2xt; x) + B_n(x^2; x)$$

$$= B_n(t^2; x) - 2x \cdot B_n(t; x) + x^2 \cdot B_n(1; x)$$

$$= x^2 + \frac{x - x^2}{n} - 2x \cdot x + x^2$$

$$= x^2 + \frac{x - x^2}{n} - 2x^2 + x^2$$

$$= \frac{x \cdot (1 - x)}{n}$$

$$y = \frac{x \cdot (1 - x)}{n} = \frac{x - x^2}{n} \text{ olsun. } y' = \frac{1 - 2x}{n} = 0 \text{ olursa } x = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} B_n((t - x)^2; x) = \frac{1}{4n} \quad (n \rightarrow \infty) \text{ olur.}$$

$$\|B_n(t^2; x) - x^2\|_{C[0,1]} = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{x - x^2}{n} \right| = \frac{1}{4n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olur. Böylece $u \in C[0,1]$ için

$$\|B_n(u; x) - u(x)\|_{C[0,1]} \rightarrow 0$$

sağlanır.

3.3.2 Baskakov Operatörü

$\forall u \in C[0, \infty)$ ve $\forall x \in [0, \infty)$ için klasik $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Baskakov operatörü

$$V_n(u; x) = \frac{1}{(1+x)^k} \sum_{k=0}^{\infty} u\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^n}$$

şeklinde tanımlı operatördür (Altomare ve Campiti, 1994).

$u \in C[0, \infty)$ için $V_n(u; x)$ Baskakov operatörü

$$V_n(u; x) = \sum_{k=0}^{\infty} u\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x), \quad x \in [0, \infty), \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanır. Burada sağ tarafı mutlak yakınsak olan serilerdeki tüm $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$$P_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

ile verilir. Böylesi fonksiyonların uzayı $|u(x)| \leq M_u(1 + x^2)$ koşulunu sağlayan $[0, \infty)$ aralığında tanımlı tüm u fonksiyonlarının kümesi olan $B_{x^2}[0, \infty)$ uzayıdır. Burada M_u sabiti yalnızca u ya bağlı ve x ten bağımsızdır. Bu operatörler $[0, \infty)$ üzerindeki tüm sürekli fonksiyonların uzayındaki Bernstein polinomlarının bir genellemesidir (Deniz vd., 2017).

Bu çalışmada $a \in \mathbb{Z}^+$ için kısmi(truncated) Baskakov operatörleri

$$V_n(u; x) = \sum_{k=0}^{an} u\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x), \quad x \in [0, a], \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.22)$$

şeklinde verilecektir.

Teorem 3.9 $u \in C[0, \infty)$, $x \in [0, \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$V_n(u; x) = \sum_{k=0}^{\infty} u\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x)$$

operatörü lineer pozitif bir operatördür.

$u(t) = 1$, $u(t) = t$ ve $u(t) = t^2$ fonksiyonlarının Baskakov operatörü altında görüntüleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$V_n(u; x) = \sum_{k=0}^{\infty} u\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x), \quad P_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \text{ ve}$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} \text{ olmak üzere}$$

$$V_n(1; x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{1}{(1+x)^n} (1+x)^n$$

$$= 1$$

$$V_n(t; x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! k!} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{x}{(1+x)} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n! (k-1)!} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{k-1}}$$

$$= \frac{x}{(1+x)} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n! k!} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{x}{(1+x)} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{x}{(1+x)} \frac{1}{(1+x)^n} (1+x)^{n+1}$$

$$= x$$

$$V_n(t^2; x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)}{n^2} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! k!} \frac{x^k}{(1+x)^k} \\ + \frac{1}{n} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! k!} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2} \frac{1}{n} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n! (k-2)!} \frac{x^{k-2}}{(1+x)^{k-2}} + \frac{1}{n} V_n(t; x)$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2} \frac{1}{n} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{n! k!} \frac{x^k}{(1+x)^k} + \frac{x}{n}$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2} \frac{n+1}{n} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{(n+1)! k!} \frac{x^k}{(1+x)^k} + \frac{x}{n}$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2} \frac{n+1}{n} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} + \frac{x}{n}$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2} \frac{n+1}{n} \frac{1}{(1+x)^n} (1+x)^{n+2} + \frac{x}{n}$$

$$= x^2 + \frac{x(1+x)}{n}$$

Teorem 3.10 $[0, a]$ üzerinde $n \rightarrow \infty$ için

$$V_n(1; x) \Rightarrow 1$$

$$V_n(t; x) \Rightarrow x$$

$$V_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$$

elde edilir. O halde Korovkin teoremi gereğince $\forall u \in C[0, a]$ için $[0, a]$ aralığında

$$V_n(u; x) \Rightarrow u(x)$$

dir.

4. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİN BAZI TAM ÇÖZÜM VE BAZI YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

(2.5) teki Volterra integral denklemi ele alınsın. Aşağıda bu integral denklemin tam çözümünü bulmada kullanılacak olan Adomian ayrıştırma metodu ve ardışık yaklaşımlar metodu verilecektir. Ayrıca tam çözüm metotlarından sonra Bernstein polinomları ve Baskakov operatörü ile kurulan yaklaşık çözüm yöntemleri verilecektir.

4.1 Volterra İntegral Denklemler için Bazı Tam Çözüm Yöntemleri

(2.5) teki Volterra integral denklem üzerinden tam çözüm metotları için Adomian ayrıştırma metodu ve ardışık yaklaşımlar metodu verilecektir.

4.1.1 Adomian Ayrıştırma Metodu

Adomian ayrıştırma metodu bir integral denklemin çözümünün

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (4.1)$$

veya

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots \quad (4.2)$$

şeklinde seri olarak kabul edilmesi durumunda bu serinin elemanlarını teker teker bulma yöntemidir.

Burada $n \geq 0$ için $u_n(x)$ bileşenleri tekrarlamalı bir formda belirlenebilir. Bu yöntemde teker teker $u_0, u_1, u_2, \dots$ bileşenleri bulunur.

İlk olarak (4.1) de verilen eşitlik (2.5) te yerine yazılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = g(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt$$

veya

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots \\ = g(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) [u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots] dt \end{aligned}$$

elde edilir.

$u_0(x)$ bileşeni integral işareti altında olmayan bütün terimler için kullanılır. $j \geq 1$ için u fonksiyonunun u_j bileşenleri

$$u_0(x) = g(x) \quad (4.3)$$

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_0^x K(x, t) u_n(t) dt, \quad n \geq 0$$

veya

$$u_0(x) = g(x), \quad u_1(x) = \lambda \int_0^x K(x, t) u_0(t) dt \quad (4.4)$$

$$u_2(x) = \lambda \int_0^x K(x, t) u_1(t) dt, \quad u_3(x) = \lambda \int_0^x K(x, t) u_2(t) dt$$

biçiminde bulunur. Benzer tekrarlama ilişkisi kurularak diğer bileşenler de bulunabilir.

(4.3) iterasyon bağıntısına göre $u_0, u_1, u_2, \dots$ bileşenleri belirlenebilir. Böylelikle (2.5) te verilen Volterra integral denklemin $u(x)$ çözümü (4.2) deki serilerin kullanılmasıyla elde edilebilir (Wazwaz, 2011).

4.1.2 Ardışık Yaklaşımlar Metodu

Picard iterasyon metodu olarak da bilinen ardışık yaklaşımlar metodu integral denklem ya da başlangıç değer problemlerinde kullanılır. Bu metot, sıfıncı yaklaşım olarak adlandırılan başlangıç tahminiyle başlar ve ardışık yaklaşımlarla çözüme gider. Sıfıncı yaklaşım, tekrarlama ilişkisi için diğer yaklaşımların belirlenmesinde kullanılan reel değerli bir fonksiyondur.

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) u(t) dt \quad (4.5)$$

2. tip Volterra integral denklemini verilsin. Ardışık yaklaşımlar yönteminde

$$u_n(x) = g(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) u_{n-1}(t) dt, \quad n \geq 1 \quad (4.6)$$

biçiminde tekrarlama bağıntısı tanımlanır. Burada $u_0(x)$ seçilen herhangi bir reel değerli fonksiyondur. Bu metot $u_0(x)$ başlangıç tahminiyle başlar. Çoğu zaman $u_0(x)$ bileşeni 0,1, x olarak seçilir. (4.6) denklemini kullanılarak $k \geq 1$ için birkaç u_k ardışık yaklaşımı

$$\begin{aligned} u_1(x) &= g(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt, \\ u_2(x) &= g(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_1(t)dt, \\ u_3(x) &= g(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_2(t)dt, \\ &\vdots \\ u_n(x) &= g(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t)dt \end{aligned} \tag{4.7}$$

olarak belirlenir (Wazwaz, 2011).

4.2 Volterra İntegral Denklemlerin Bazı Lineer Pozitif Operatörler Yardımıyla Çözüm Algoritması

(2.5) teki Volterra integral denklem üzerinden Bernstein polinomları ve Baskakov operatörü ile oluşturulan çözüm algoritmaları verilecektir.

4.2.1 Volterra İntegral Denklemlerin Çözümlerine Bernstein Polinomu ile Yaklaşım

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{4.8}$$

2. tip Volterra integral denklemi verilsin. Bu türde bir integral denklemin çözümü için

$$u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

bir fonksiyon ve $B_n(u; x)$ Bernstein yaklaşım polinomu,

$$B_n(u; x) = \sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x) \tag{4.9}$$

olmak üzere $p_{n,k}$, n . dereceden baz polinomu

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

şeklinde. (4.9) ile (4.8) de yer alan u bilinmeyen fonksiyonuna yaklaşım yapılır ve

$$\sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) \left(\binom{n}{k} \left(x^k (1-x)^{n-k} - \lambda \int_0^x K(x,t) t^k (1-t)^{n-k} dt \right) \right) = g(x) \quad (4.10)$$

denklemini elde edilir.

(4.10) da yer alan $u\left(\frac{k}{n}\right)$ ler, ε yeterince küçük bir sayı olmak üzere x in, $x_n = 1 - \varepsilon$ ve $x_j = \frac{j}{n} + \varepsilon$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n-1$) şeklinde belirlenen kontrol noktaları ile yer değiştirmesiyle elde edilen lineer denklem sistemiyle bulunur. x_j kontrol noktaları $[0,1]$ aralığında integral denklemin singüler değerleri haricinde seçilen ayrık değerler olarak alınabilir. Belirtilen denklem sistemi

$$AX = Y \quad (4.11)$$

olarak yazılır. (4.11) denkleminde

$$A = \left[\binom{n}{k} \left(x_j^k (1-x_j)^{n-k} - \lambda \int_0^{x_j} K(x_j, t) t^k (1-t)^{n-k} dt \right) \right] \quad k, j = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$= \begin{bmatrix} (1-x_0)^n - \lambda \int_0^{x_0} K(x_0, t) (1-t)^n dt & nx_0(1-x_0)^{n-1} - \lambda \int_0^{x_0} K(x_0, t) nt(1-t)^{n-1} dt & \dots & x_0^n - \lambda \int_0^{x_0} K(x_0, t) t^n dt \\ (1-x_1)^n - \lambda \int_0^{x_1} K(x_1, t) (1-t)^n dt & nx_1(1-x_1)^{n-1} - \lambda \int_0^{x_1} K(x_1, t) nt(1-t)^{n-1} dt & \dots & x_1^n - \lambda \int_0^{x_1} K(x_1, t) t^n dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1-x_n)^n - \lambda \int_0^{x_n} K(x_n, t) (1-t)^n dt & nx_n(1-x_n)^{n-1} - \lambda \int_0^{x_n} K(x_n, t) nt(1-t)^{n-1} dt & \dots & x_n^n - \lambda \int_0^{x_n} K(x_n, t) t^n dt \end{bmatrix}$$

$$X = \left[u\left(\frac{k}{n}\right) \right]^T \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$Y = [g(x_j)]^T \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

dir. (4.11) denkleminde bulunan $u\left(\frac{k}{n}\right)$ ler (4.9) denkleminde yerine yazılarak $u(x)$ bulunur. 1. tip Volterra integral denklemi için de benzer yol izlenir (Maleknejad vd., 2011).

4.2.2 Volterra İntegral Denklemlerin Çözümlerine Baskakov Operatörü ile Yaklaşım

(4.8) deki 2. tip Volterra integral denklemi verilsin. Verilen metottaki temel amaç u bilinmeyen fonksiyonuna (3.22) ile yaklaşımdır. Bir başka deyişle,

$$V_n(u; x) = \sum_{k=0}^{an} u \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}, \quad x \in [0, a], \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde yaklaşık bir u çözümü bulunur.

(4.8) deki 2. tip Volterra integral denkleminde verilen u fonksiyonu, $V_n(u; x)$ ile yer değiştirerek

$$\sum_{k=0}^{an} u \left(\frac{k}{n} \right) \left[\binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} - \lambda \int_0^x K(x, t) \binom{n+k-1}{k} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}} dt \right] = g(x) \quad (4.12)$$

denklemini elde edilir. Yukarıda verilen denklem matris cebirine dönüştürülebilir. (4.12) de yer alan $u \left(\frac{k}{n} \right)$, $k = 0, 1, 2, \dots, an$ bilinmeyen katsayıları, x değişkeninin, $x_j = \frac{j}{n} + \varepsilon$ ($j = 0, 1, 2, \dots, an - 1$) ve $x_{an} = a - \varepsilon$ şeklinde belirlenen kontrol noktaları ile yer değiştirmesiyle elde edilen lineer denklem sistemi ile bulunur. Burada tekillik probleminden kaçınmak için x_j kontrol noktalarının $[0, a]$ daki sınır değerleri atlanabilir. Böylece tamamen ayrıştırılmış olan ikinci tip Volterra integral denklemi

$$AX = B \quad (4.13)$$

şeklinde matris notasyonunda yazılabilir. Burada

$$A = \left[\binom{n+k-1}{k} \frac{x_j^k}{(1+x_j)^{n+k}} - \lambda \int_0^{x_j} K(x_j, t) \binom{n+k-1}{k} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}} dt \right], \quad j, k = 0, 1, \dots, an$$

$$B = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_{an}) \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1/n) \\ \vdots \\ u(a) \end{bmatrix}$$

dır ve A , $(an + 1) \times (an + 1)$ tipinde bir matris, B ve X , $(an + 1) \times 1$ tipinde vektörlerdir. (4.13) denkleminde bulunan $u\left(\frac{k}{n}\right)$ ler (3.22) denkleminde yerine yazılarak $u(x)$ bulunur. 1. tip Volterra integral denklem için de benzer yol kullanılır.

Örnek 4.1

$$u(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x (x - t)u(t)dt \quad (4.14)$$

2. tip Volterra integral denklemi ele alınsın. (4.14) denkleminde

$g(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2$, $\lambda = 1$ ve $K(x, t) = x - t$ dir. Şimdi bu integral denklemin yukarıda verilen metotlar ile tam çözümleri ve yaklaşık çözümleri bulunacaktır.

Adomian Ayrıştırma Metodu:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (4.15)$$

Yukarıda verilen (4.15) eşitliği (4.14) denkleminde yerine yazılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^1 (x - t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt$$

veya

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots \\ = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \int_0^1 (x - t)[u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots]dt \end{aligned}$$

$$u_0(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2$$

$$u_1(x) = \int_0^x (x - t)u_0(t)dt$$

$$= \int_0^x (x-t) \left(1-t-\frac{1}{2}t^2\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4$$

$$= \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4$$

$$u_2(x) = \int_0^x (x-t)u_1(t)dt$$

$$= \int_0^x (x-t) \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{24}t^4\right) dt$$

$$= \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{720}x^6$$

$$= \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6$$

$$u_3(x) = \int_0^x (x-t)u_2(t)dt$$

$$= \int_0^x (x-t) \left(\frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{720}t^6\right) dt$$

$$= \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7 - \frac{1}{8!}x^8$$

O halde denklemin tam çözümü

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots$$

$$= 1 - x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6$$

$$+ \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7 - \frac{1}{8!}x^8 + \dots$$

$$= 1 - \left(x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6$$

$$- \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{8!}x^8 + \dots\right)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= 1 - \sinh x$$

Ardışık Yaklaşımlar Metodu

$$u_0(x) = 1$$

$$u_{n+1}(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x (x-t)u_n(t)dt, \quad n \geq 0$$

$$u_1(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x (x-t)u_0(t)dt$$

$$= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \left[xt - \frac{1}{2}t^2 \right]_{t=0}^{t=x}$$

$$= 1 - x$$

$$u_2(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x (x-t)u_1(t)dt$$

$$= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x (x-t)(1-t)dt$$

$$= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x (x - xt - t + t^2)dt$$

$$= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \left[xt - \frac{1}{2}xt^2 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right]_{t=0}^{t=x}$$

$$= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

$$= 1 - x - \frac{1}{6}x^3$$

$$u_3(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x (x-t)u_2(t)dt$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x (x-t) \left(1 - t - \frac{1}{6}t^3\right) dt \\
&= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \left(x - xt - \frac{1}{6}xt^3 - t + t^2 + \frac{1}{6}t^4\right) dt \\
&= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \left[xt - \frac{1}{2}xt^2 - \frac{1}{24}xt^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{30}t^5\right]_{t=0}^{t=x} \\
&= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^5 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{30}x^5 \\
&= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \\
&= 1 - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5
\end{aligned}$$

⋮

$$u_{n+1}(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x (x-t)u_n(t)dt$$

$$= 1 - x - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 - \dots - \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$u_{n+1}(x) = 1 - \left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= 1 - \sinh x$$

bulunur.

Bernstein Polinomu Metodu

$p_{n,k}$, n . dereceden baz polinomu

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olmak üzere $[0,1]$ aralığında tanımlanan Bernstein polinomu

$$B_n(u; x) = \sum_{k=0}^n u \left(\frac{k}{n} \right) p_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n u \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (4.16)$$

şeklindeir. (4.16) de verilen polinom (4.14) denkleminde yerine yazılarak

$$\sum_{k=0}^n u \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = g(x) + \int_0^x K(x, t) \sum_{k=0}^n u \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} dt$$

$$\sum_{k=0}^n u \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \int_0^x K(x, t) \sum_{k=0}^n u \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} dt = g(x)$$

$$\sum_{k=0}^n u \left(\frac{k}{n} \right) \left[\binom{n}{k} \left(x^k (1-x)^{n-k} - \int_0^x K(x, t) t^k (1-t)^{n-k} dt \right) \right] = g(x)$$

formuna getirilir ve $n = 4$ için kontrol noktaları $x_j = \frac{j}{4}$ ($j = 0,1,2,3,4$) olarak seçilirse

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.25 \quad x_2 = 0.5 \quad x_3 = 0.75 \quad x_4 = 1$$

bulunur. Buradan

$$AX = Y \quad (4.17)$$

şeklinde bir lineer denklem sistemi elde edilir.

$$A = \left[\binom{n}{k} \left(x_j^k (1-x_j)^{n-k} - \int_0^{x_j} K(x_j, t) t^k (1-t)^{n-k} dt \right) \right]_{k,j=0,1,2,3,4}$$

$$X = \left[u \left(\frac{k}{n} \right) \right]^T \quad k = 0,1,2,3,4$$

$$Y = [g(x_j)]^T \quad j = 0,1,2,3,4 \quad (4.18)$$

denklemleri elde edilir. (4.18) denklemlerinin $n = 4$ için düzenlenmesiyle

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

$$X = [u(0) \quad u(0.25) \quad u(0.5) \quad u(0.75) \quad u(1)]_{1 \times 5}^T$$

$$Y = [g(x_0) \quad g(x_1) \quad g(x_2) \quad g(x_3) \quad g(x_4)]_{1 \times 5}^T$$

matrisleri elde edilir. Bu matrislerin çözümlenmesiyle

$$A_{11} = (1 - x_0)^4 - \int_0^{x_0} K(x_0, t)(1 - t)^4 dt$$

$$= (1 - 0)^4 - \int_0^0 (0 - t)(1 - t)^4 dt$$

$$= 1$$

$$A_{12} = 4x_0(1 - x_0)^3 - \int_0^{x_0} K(x_0, t)4t(1 - t)^3 dt$$

$$= 4 \cdot 0 \cdot (1 - 0)^3 - \int_0^0 (0 - t)4t(1 - t)^3 dt$$

$$= 0$$

$$A_{13} = 6x_0^2(1 - x_0)^2 - \int_0^{x_0} K(x_0, t)6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 6 \cdot 0^2 \cdot (1 - 0)^2 - \int_0^0 (0 - t)6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 0$$

$$A_{14} = 4x_0^3(1 - x_0) - \int_0^{x_0} K(x_0, t)4t^3(1 - t) dt$$

$$= 4 \cdot 0^3 \cdot (1 - 0) - \int_0^0 (0 - t)4t^3(1 - t) dt$$

$$= 0$$

$$A_{15} = x_0^4 - \int_0^{x_0} K(x_0, t)t^4 dt$$

$$= 0^4 - \int_0^0 (0 - t)t^4 dt$$

$$= 0$$

$$A_{21} = (1 - x_1)^4 - \int_0^{x_1} K(x_1, t)(1 - t)^4 dt$$

$$= (1 - 0.25)^4 - \int_0^{0.25} (0.25 - t)(1 - t)^4 dt$$

$$= 0.2938$$

$$A_{22} = 4x_1(1 - x_1)^3 - \int_0^{x_1} K(x_1, t)4t(1 - t)^3 dt$$

$$= 4 \cdot (0.25)(1 - 0.25)^3 - \int_0^{0.25} (0.25 - t)4t(1 - t)^3 dt$$

$$= 0.4148$$

$$A_{23} = 6x_1^2(1 - x_1)^2 - \int_0^{x_1} K(x_1, t)6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 6 \cdot (0.25)^2(1 - 0.25)^2 - \int_0^{0.25} (0.25 - t)6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 0.2095$$

$$A_{24} = 4x_1^3(1 - x_1) - \int_0^{x_1} K(x_1, t)4t^3(1 - t) dt$$

$$= 4 \cdot (0.25)^3(1 - 0.25) - \int_0^{0.25} (0.25 - t)4t^3(1 - t) dt$$

$$= 0.0467$$

$$A_{25} = x_1^4 - \int_0^{x_1} K(x_1, t)t^4 dt$$

$$= (0.25)^4 - \int_0^{0.25} (0.25 - t)t^4 dt$$

$$= 0.0039$$

$$A_{31} = (1 - x_2)^4 - \int_0^{x_2} K(x_2, t)(1 - t)^4 dt$$

$$= (1 - 0.5)^4 - \int_0^{0.5} (0.5 - t)(1 - t)^4 dt$$

$$= -0.0047$$

$$A_{32} = 4x_2(1 - x_2)^3 - \int_0^{x_2} K(x_2, t)4t(1 - t)^3 dt$$

$$= 4 \cdot (0.5)(1 - 0.5)^3 - \int_0^{0.5} (0.5 - t)4t(1 - t)^3 dt$$

$$= 0.2125$$

$$A_{33} = 6x_2^2(1 - x_2)^2 - \int_0^{x_2} K(x_2, t)6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 6 \cdot (0.5)^2(1 - 0.5)^2 - \int_0^{0.5} (0.5 - t)6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 0.3594$$

$$A_{34} = 4x_2^3(1 - x_2) - \int_0^{x_2} K(x_2, t)4t^3(1 - t) dt$$

$$= 4 \cdot (0.5)^3(1 - 0.5) - \int_0^{0.5} (0.5 - t)4t^3(1 - t) dt$$

$$= 0.2458$$

$$A_{35} = x_2^4 - \int_0^{x_2} K(x_2, t)t^4 dt$$

$$= (0.5)^4 - \int_0^{0.5} (0.5 - t)t^4 dt$$

$$= 0.0620$$

$$A_{41} = (1 - x_3)^4 - \int_0^{x_3} K(x_3, t)(1 - t)^4 dt$$

$$= (1 - 0.75)^4 - \int_0^{0.75} (0.75 - t)(1 - t)^4 dt$$

$$= -0.1128$$

$$A_{42} = 4x_3(1 - x_3)^3 - \int_0^{x_3} K(x_3, t)4t(1 - t)^3 dt$$

$$= 4 \cdot (0.75)(1 - 0.75)^3 - \int_0^{0.75} (0.75 - t)4t(1 - t)^3 dt$$

$$= -0.0366$$

$$A_{43} = 6x_3^2(1 - x_3)^2 - \int_0^{x_3} K(x_3, t)6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 6 \cdot (0.75)^2(1 - 0.75)^2 - \int_0^{0.75} (0.75 - t)6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 0.1595$$

$$A_{44} = 4x_3^3(1 - x_3) - \int_0^{x_3} K(x_3, t)4t^3(1 - t) dt$$

$$= 4 \cdot (0.75)^3(1 - 0.75) - \int_0^{0.75} (0.75 - t)4t^3(1 - t) dt$$

$$= 0.3981$$

$$A_{45} = x_3^4 - \int_0^{x_3} K(x_3, t)t^4 dt$$

$$= (0.75)^4 - \int_0^{0.75} (0.75 - t)t^4 dt$$

$$= 0.3105$$

$$A_{51} = (1 - x_4)^4 - \int_0^{x_4} K(x_4, t)(1 - t)^4 dt$$

$$= (1 - 1)^4 - \int_0^1 (1 - t)(1 - t)^4 dt$$

$$= -0.1667$$

$$A_{52} = 4x_4(1 - x_4)^3 - \int_0^{x_4} K(x_4, t)4t(1 - t)^3 dt$$

$$= 4 \cdot 1 \cdot (1 - 1)^3 - \int_0^1 (1 - t)4t(1 - t)^3 dt$$

$$= -0.1333$$

$$A_{53} = 6x_4^2(1 - x_4)^2 - \int_0^{x_4} K(x_4, t)6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 6 \cdot 1^2 \cdot (1 - 1)^2 - \int_0^1 (1 - t)6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= -0.1000$$

$$A_{54} = 4x_4^3(1 - x_4) - \int_0^{x_4} K(x_4, t)4t^3(1 - t) dt$$

$$= 4 \cdot 1^3 \cdot (1 - 1) - \int_0^1 (1 - t)4t^3(1 - t) dt$$

$$= -0.0667$$

$$A_{55} = x_4^4 - \int_0^{x_4} K(x_4, t)t^4 dt$$

$$= 1^4 - \int_0^1 (1 - t)t^4 dt$$

$$= 0.9667$$

$$g(x_j) = 1 - x_j - \frac{1}{2}x_j$$

$$g(0) = 1 - 0 - \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$= 1$$

$$g(0.25) = 1 - 0.25 - \frac{1}{2} \cdot (0.25)^2$$

$$= 0.7188$$

$$g(0.5) = 1 - 0.5 - \frac{1}{2} \cdot (0.5)^2$$

$$= 0.3750$$

$$g(0.75) = 1 - 0.75 - \frac{1}{2} \cdot (0.75)^2$$

$$= -0.0312$$

$$g(1) = 1 - 1 - \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$= -0.5$$

bulunur. Bulunan bu değerlerin (4.17) lineer denklem sisteminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2938 & 0.4148 & 0.2095 & 0.0467 & 0.0039 \\ -0.0047 & 0.2125 & 0.3594 & 0.2458 & 0.0620 \\ -0.1128 & -0.0366 & 0.1595 & 0.3981 & 0.3105 \\ -0.1667 & -0.1333 & -0.1000 & -0.0667 & 0.9667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(0.25) \\ u(0.5) \\ u(0.75) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7188 \\ 0.3750 \\ -0.0312 \\ -0.5000 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle

$$X = [1 \quad 0.7503 \quad 0.4991 \quad 0.2105 \quad -0.1752]$$

bulunur. Böylelikle

$$\begin{aligned} B_n(u; x) &= \sum_{k=0}^n u \left(\frac{k}{n} \right) p_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n u \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

olmak üzere $n = 4$ için oluşan polinom

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^4 u\left(\frac{k}{4}\right) \binom{4}{k} x^k (1-x)^{4-k} \\
&= (1-x)^4 + 0.8420x^3(1-x) \\
&\quad + 2.9945(1-x)^2x^2 + 3.0014(1-x)^3x \\
&\quad - 0.1752x^4
\end{aligned}$$

bulunur.

Baskakov Operatörü Metodu

$P_{n,k}$, n . dereceden Baskakov bazı olmak üzere

$$P_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

olup, $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı kısmi(truncated) Baskakov operatörü

$$\begin{aligned}
V_n(u; x) &= \sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \tag{4.19}
\end{aligned}$$

şeklindedir. (4.19) da verilen operatör (4.14) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \\
&= g(x) + \int_0^x K(x, t) \sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}} dt \\
&\sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \\
&\quad - \int_0^x K(x, t) \sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}} dt = g(x)
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) \left[\binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} - \int_0^x K(x,t) \binom{n+k-1}{k} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}} dt \right] = g(x)$$

formuna getirilerek ve $n = 4$ için kontrol noktaları $x_j = \frac{j}{n}$ ($j = 0,1,2,3,4$) seçilerek

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.25 \quad x_2 = 0.5 \quad x_3 = 0.75 \quad x_4 = 1$$

bulunur ve

$$AX = Y \tag{4.20}$$

şeklinde bir lineer denklem sistemi elde edilir.

$$A = \left[\binom{n+k-1}{k} \left(\frac{x_j^k}{(1+x_j)^{n+k}} - \int_0^{x_j} K(x_j, t) \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}} dt \right) \right] \quad k, j = 0,1,2,3,4$$

$$X = \left[u\left(\frac{k}{n}\right) \right]^T \quad k = 0,1,2,3,4 \tag{4.21}$$

$$Y = [g(x_j)]^T \quad j = 0,1,2,3,4$$

denklemleri elde edilir. (4.21) denklemlerinin $n = 4$ için düzenlenmesiyle

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

$$X = [u(0) \quad u(0.25) \quad u(0.5) \quad u(0.75) \quad u(1)]_{1 \times 5}^T$$

$$Y = [g(x_0) \quad g(x_1) \quad g(x_2) \quad g(x_3) \quad g(x_4)]_{1 \times 5}^T$$

matrisleri elde edilir. Bu matrislerin çözümlenmesiyle

$$A_{11} = \binom{3}{0} \left[\frac{x_0^0}{(1+x_0)^4} - \int_0^{x_0} K(x_0, t) \frac{t^0}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= \left[\frac{1}{(1+0)^4} - \int_0^0 (0-t) \frac{1}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= 1$$

$$A_{12} = \binom{4}{1} \left[\frac{x_0^1}{(1+x_0)^5} - \int_0^{x_0} K(x_0, t) \frac{t^1}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 4. \left[\frac{0}{(1+0)^5} - \int_0^0 (0-t) \frac{t}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 0$$

$$A_{13} = \binom{5}{2} \left[\frac{x_0^2}{(1+x_0)^6} - \int_0^{x_0} K(x_0, t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 10. \left[\frac{0}{(1+0)^6} - \int_0^0 (0-t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 0$$

$$A_{14} = \binom{6}{3} \left[\frac{x_0^3}{(1+x_0)^7} - \int_0^{x_0} K(x_0, t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 20. \left[\frac{0}{(1+0)^7} - \int_0^0 (0-t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 0$$

$$A_{15} = \binom{7}{4} \left[\frac{x_0^4}{(1+x_0)^8} - \int_0^{x_0} K(x_0, t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 35. \left[\frac{0}{(1+0)^8} - \int_0^0 (0-t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 0$$

$$A_{21} = \binom{3}{0} \left[\frac{x_1^0}{(1+x_1)^4} - \int_0^{x_1} K(x_1, t) \frac{t^0}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= \left[\frac{1}{(1+0.25)^4} - \int_0^{0.25} (0.25-t) \frac{1}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= 0.3863$$

$$A_{22} = \binom{4}{1} \left[\frac{x_1^1}{(1+x_1)^5} - \int_0^{x_1} K(x_1, t) \frac{t^1}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 4. \left[\frac{0.25}{(1+0.25)^5} - \int_0^{0.25} (0.25-t) \frac{t}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 0.3217$$

$$A_{23} = \binom{5}{2} \left[\frac{x_1^2}{(1+x_1)^6} - \int_0^{x_1} K(x_1, t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 10. \left[\frac{0.25^2}{(1+0.25)^6} - \int_0^{0.25} (0.25-t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 0.1624$$

$$A_{24} = \binom{6}{3} \left[\frac{x_1^3}{(1+x_1)^7} - \int_0^{x_1} K(x_1, t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 20. \left[\frac{0.25^3}{(1+0.25)^7} - \int_0^{0.25} (0.25-t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 0.0652$$

$$A_{25} = \binom{7}{4} \left[\frac{x_1^4}{(1+x_1)^8} - \int_0^{x_1} K(x_1, t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 35. \left[\frac{0.25^4}{(1+0.25)^8} - \int_0^{0.25} (0.25-t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 0.0229$$

$$A_{31} = \binom{3}{0} \left[\frac{x_2^0}{(1+x_2)^4} - \int_0^{x_2} K(x_2, t) \frac{t^0}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= \left[\frac{1}{(1+0.5)^4} - \int_0^{0.5} (0.5-t) \frac{1}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= 0.1235$$

$$A_{32} = \binom{4}{1} \left[\frac{x_2^1}{(1+x_2)^5} - \int_0^{x_2} K(x_2, t) \frac{t^1}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 4. \left[\frac{0.5}{(1+0.5)^5} - \int_0^{0.5} (0.5-t) \frac{t}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 0.2325$$

$$A_{33} = \binom{5}{2} \left[\frac{x_2^2}{(1+x_2)^6} - \int_0^{x_2} K(x_2, t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 10. \left[\frac{0.5^2}{(1+0.5)^6} - \int_0^{0.5} (0.5-t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 0.2071$$

$$A_{34} = \binom{6}{3} \left[\frac{x_2^3}{(1+x_2)^7} - \int_0^{x_2} K(x_2, t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 20. \left[\frac{0.5^3}{(1+0.5)^7} - \int_0^{0.5} (0.5-t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 0.1415$$

$$A_{35} = \binom{7}{4} \left[\frac{x_2^4}{(1+x_2)^8} - \int_0^{x_2} K(x_2, t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 35. \left[\frac{0.5^4}{(1+0.5)^8} - \int_0^{0.5} (0.5-t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 0.0835$$

$$A_{41} = \binom{3}{0} \left[\frac{x_3^0}{(1+x_3)^4} - \int_0^{x_3} K(x_3, t) \frac{t^0}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= \left[\frac{1}{(1+0.75)^4} - \int_0^{0.75} (0.75-t) \frac{1}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= -0.0311$$

$$A_{42} = \binom{4}{1} \left[\frac{x_3^1}{(1+x_3)^5} - \int_0^{x_3} K(x_3, t) \frac{t^1}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 4. \left[\frac{0.75}{(1+0.75)^5} - \int_0^{0.75} (0.75-t) \frac{t}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 0.1106$$

$$A_{43} = \binom{5}{2} \left[\frac{x_3^2}{(1+x_3)^6} - \int_0^{x_3} K(x_3, t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 10. \left[\frac{0.75^2}{(1+0.75)^6} - \int_0^{0.75} (0.75-t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 0.1593$$

$$A_{44} = \binom{6}{3} \left[\frac{x_3^3}{(1+x_3)^7} - \int_0^{x_3} K(x_3, t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 20. \left[\frac{0.75^3}{(1+0.75)^7} - \int_0^{0.75} (0.75-t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 0.1498$$

$$A_{45} = \binom{7}{4} \left[\frac{x_3^4}{(1+x_3)^8} - \int_0^{x_3} K(x_3, t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 35. \left[\frac{0.75^4}{(1+0.75)^8} - \int_0^{0.75} (0.75-t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 0.1171$$

$$A_{51} = \binom{3}{0} \left[\frac{x_4^0}{(1+x_4)^4} - \int_0^{x_4} K(x_4, t) \frac{t^0}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= \left[\frac{1}{(1+1)^4} - \int_0^1 (1-t) \frac{1}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= -0.1458$$

$$A_{52} = \binom{4}{1} \left[\frac{x_4^1}{(1+x_4)^5} - \int_0^{x_4} K(x_4, t) \frac{t^1}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 4. \left[\frac{1}{(1+1)^5} - \int_0^1 (1-t) \frac{t}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 0$$

$$A_{53} = \binom{5}{2} \left[\frac{x_4^2}{(1+x_4)^6} - \int_0^{x_4} K(x_4, t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 10. \left[\frac{1^2}{(1+1)^6} - \int_0^1 (1-t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 0.0833$$

$$A_{54} = \binom{6}{3} \left[\frac{x_4^3}{(1+x_4)^7} - \int_0^{x_4} K(x_4, t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 20. \left[\frac{1^3}{(1+1)^7} - \int_0^1 (1-t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 0.1146$$

$$A_{55} = \binom{7}{4} \left[\frac{x_4^4}{(1+x_4)^8} - \int_0^{x_4} K(x_4, t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 35. \left[\frac{1^4}{(1+1)^8} - \int_0^1 (1-t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 0.1133$$

$$g(x_j) = 1 - x_j - \frac{1}{2} x_j^2$$

$$g(0) = 1 - 0 - \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$= 1$$

$$g(0.25) = 1 - 0.25 - \frac{1}{2} \cdot (0.25)^2$$

$$= 0.7188$$

$$g(0.5) = 1 - 0.5 - \frac{1}{2} \cdot (0.5)^2$$

$$= 0.3750$$

$$g(0.75) = 1 - 0.75 - \frac{1}{2} \cdot (0.75)^2$$

$$= -0.0312$$

$$g(1) = 1 - 1 - \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$= -0.5$$

bulunur. Bulunan bu değerlerin (4.20) lineer denklem sisteminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3863 & 0.3217 & 0.1624 & 0.0652 & 0.0229 \\ 0.1235 & 0.2325 & 0.2071 & 0.1415 & 0.0835 \\ -0.0311 & 0.1106 & 0.1593 & 0.1498 & 0.1171 \\ -0.1458 & 0 & 0.0833 & 0.1146 & 0.1133 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(0.25) \\ u(0.5) \\ u(0.75) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7188 \\ 0.3750 \\ -0.0312 \\ -0.5000 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle

$$X = [1 \quad 8.9554 \quad -34.5761 \quad 60.8056 \quad -39.2086]$$

bulunur. Böylelikle

$$\begin{aligned} V_n(u; x) &= \sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \end{aligned}$$

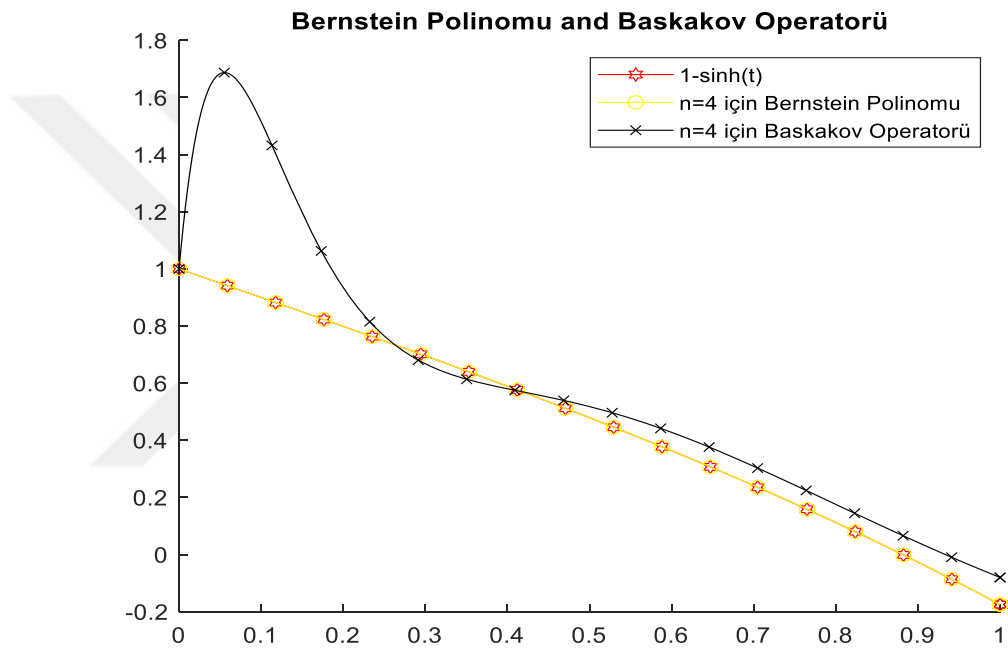
olmak üzere $n = 4$ için oluşan operatör

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^4 u\left(\frac{k}{4}\right) \binom{3+k}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \\ &= \frac{1}{(1+x)^4} + (35,8218) \frac{x}{(1+x)^5} \\ &\quad - (345,7614) \frac{x^2}{(1+x)^6} + (1,2161 \cdot 10^3) \frac{x^3}{(1+x)^7} \\ &\quad - (1,3723 \cdot 10^3) \frac{x^4}{(1+x)^8} \end{aligned}$$

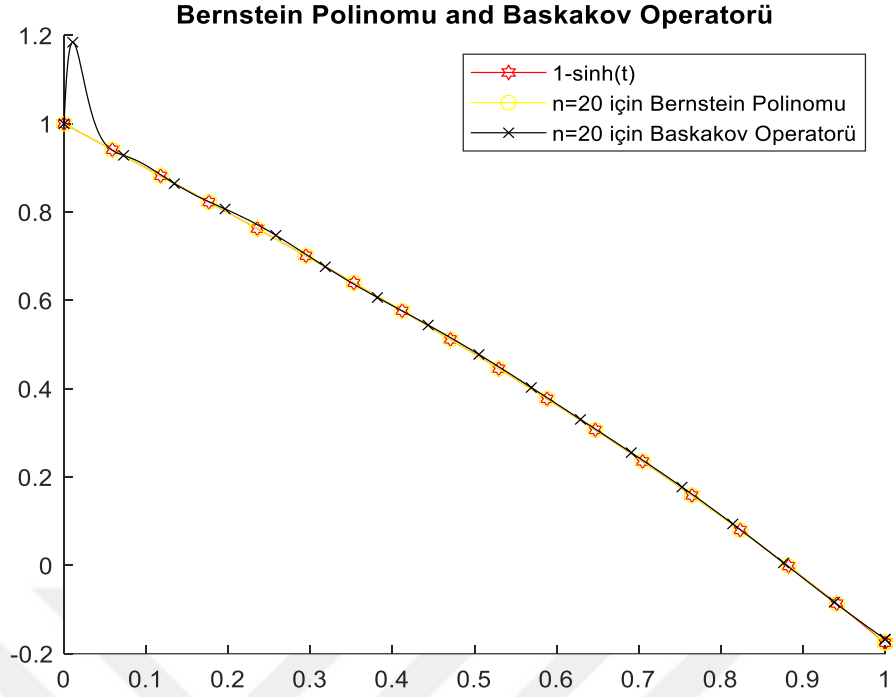
bulunur.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Kesin Çözüm	1	0.8998	0.7987	0.6955	0.5892	0.4789	0.3633	0.2414	0.1119	-0.0265	-0.1752
Bernstein	1	0.8998	0.7987	0.6955	0.5893	0.4789	0.3633	0.2414	0.1119	-0.0265	-0.1752
Baskakov	1	0.9040	0.8124	0.7132	0.5765	0.4756	0.3489	0.2264	0.0875	-0.0534	-0.1790

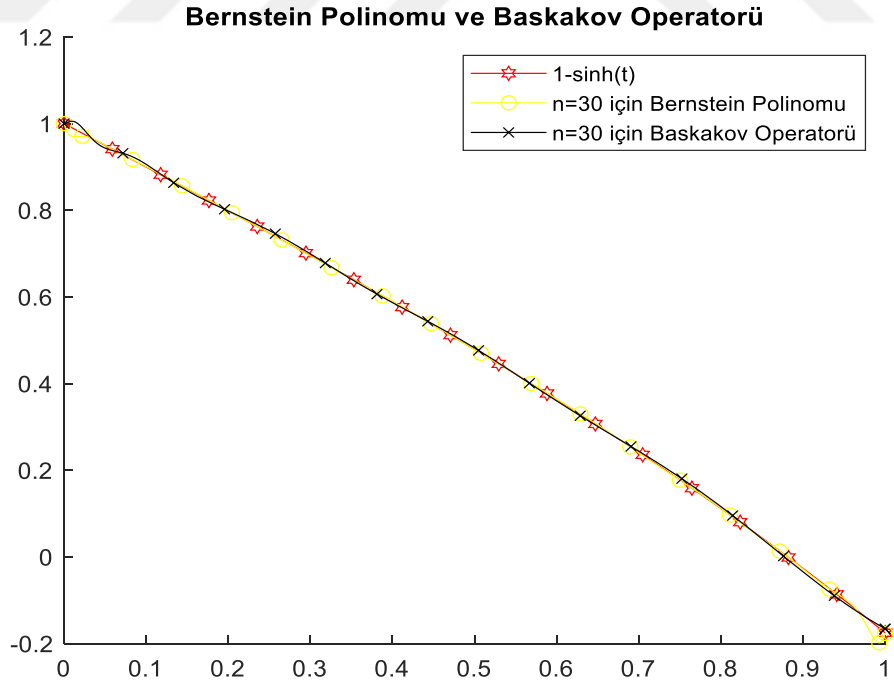
Tablo 4.1 $n=10$ için Kesin Çözüm, Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatörü Yaklaşık Çözümleri



Şekil 4.1. Tam Çözüm ve $n=4$ için Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatör Yaklaşımları Grafiği



Şekil 4.2. Tam Çözüm ve $n=20$ için Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatör Yaklaşımları Grafiği



Şekil 4.3. Tam Çözüm ve $n=30$ için Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatör Yaklaşımları Grafiği

Şekil 4.1., Şekil 4.2. ve Şekil 4.3. te Örnek 4.1 de verilen integral denklemin tam çözümü, sırasıyla $n=4$, $n=20$ ve $n=30$ durumları için Bernstein polinomu yaklaşımı ve Baskakov operatörü yaklaşımının grafikleri verilmiştir.



5. FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİN BAZI TAM ÇÖZÜM VE BAZI YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

(2.3) teki 2. tip Fredholm integral denklemi ele alınsın. Aşağıda bu integral denklemin tam çözümünü bulmada kullanılacak olan Adomian ayrıştırma metodu ve ardışık yaklaşımlar metodu verilecektir. Ayrıca tam çözüm metotlarından sonra Bernstein Polinomu ve Baskakov operatörü ile kurulan yaklaşık çözüm yöntemleri verilecektir.

5.1 Fredholm İntegral Denklemler için Bazı Tam Çözüm Yöntemleri

(2.3) teki Fredholm integral denklem üzerinden tam çözüm metotları için Adomian ayrıştırma metodu ve ardışık yaklaşımlar metodu verilecektir.

5.1.1 Adomian Ayrıştırma Metodu

Adomian ayrıştırma metodu bir integral denklemin çözümünün

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (5.1)$$

veya

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots \quad (5.2)$$

şeklinde seri olarak kabul edilmesi durumunda bu serinin elemanlarını teker teker bulma yöntemidir.

Burada $n \geq 0$ için $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ biçiminde olan $u_n(x)$ ler teker teker bulunur. Tekrarlama bağıntısından bu bileşenler kolayca hesaplanabilir.

Tekrarlı bir ilişki oluşturmak için (5.1) denklemi (2.3) teki Fredholm integral denklemde yerine yazılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) (\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)) dt \quad (5.3)$$

veya

$$\begin{aligned} &u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots \\ &= g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) [u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots] dt \end{aligned} \quad (5.4)$$

denklemleri elde edilir.

$u_0(x)$ bileşeni integral altında bulunmayan bütün terimler olarak ifade edilir.
 $j \geq 0$ için $u(x)$ fonksiyonunun $u_j(x)$ bileşenleri

$$u_0(x) = g(x),$$

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) u_n(t) dt, \quad n \geq 0 \quad (5.5)$$

veya

$$u_0(x) = g(x)$$

$$u_1(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) u_0(t) dt$$

$$u_2(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) u_1(t) dt \quad (5.6)$$

$$u_3(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) u_2(t) dt$$

ve benzer tekrarlar bağıntısı kurularak diğer bileşenler de hesaplanabilir.

(5.6) denklemine göre $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$ bileşenleri bulunabilir.
Sonuç olarak (2.3) te verilen Fredholm integral denkleminin $u(x)$ çözümü (5.1) deki yöntem kullanılarak bir seri oluşumuyla elde edilir (Wazwaz, 2011).

5.1.2 Ardışık Yaklaşımlar Metodu

Fredholm integral denklemler için incelenecek olan bu metotta ilk olarak $u_0(x)$ başlangıç tahmini belirlenir ve ardışık yaklaşımlarla çözüme gidilir. Tekrarlar bağıntısında diğer yaklaşımların bulunması, reel değerli bir fonksiyon olan sıfıncı yaklaşım ile olmaktadır. Sıfıncı yaklaşımda genel olarak kullanılan değerler 0, 1 ya da x tir. Bunlardan başka değerlerde seçilebilir.

Ardışık Yaklaşımlar Metodundaki tekrarlar bağıntısı

$$u_0(x) = \text{Seçilen herhangi bir reel değerli fonksiyon}$$

$$u_{n+1}(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u_n(t) dt, \quad n \geq 0 \quad (5.7)$$

şeklindedir. Çözüm fonksiyonu

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) \quad (5.8)$$

limiti kullanılarak bulunabilir (Wazwaz, 2011).

5.2 Fredholm İntegral Denklemlerin Bazı Lineer Pozitif Operatörler Yardımıyla Çözüm Algoritması

(2.3) teki Fredholm integral denklem üzerinden Bernstein polinomu ve Baskakov operatörü ile oluşturulan çözüm algoritmaları verilecektir.

5.2.1 Fredholm İntegral Denklemlerin Çözümlerine Bernstein Polinomu ile Yaklaşım

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad a < x < b \quad (5.9)$$

şeklinde verilen 2. tip Fredholm integral denklemde a ve b sabitler, $K(x, t)$ çekirdek ve $g(x)$ bilinen reel değerli bir fonksiyondur.

(5.9) denkleminde uygun çözüm için u fonksiyonuna $[a, b]$ kapalı aralığında Bernstein polinomu ile

$$u(x) = \sum_{k=0}^n c_k B_{n,k}(x) = B(x)C \quad (5.10)$$

şeklinde yaklaşılır. Burada

$$B(x) = [B_{n,0}(x), B_{n,1}(x), B_{n,2}(x), \dots, B_{n,n}(x)]$$

$$C = [c_0, c_1, c_2, \dots, c_n]^T$$

ifadeleri birer matris belirtir. Burada $B_{n,k}(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) ler, $[a, b]$ aralığında tanımlı n . dereceden

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n} \quad (5.11)$$

şeklinde polinomlardır. (5.10) denklemini (5.9) denkleminde yerine yazılarak

$$\sum_{k=0}^n c_k B_{n,k}(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \sum_{k=0}^n c_k B_{n,k}(t) dt \quad (5.12)$$

bağıntısı elde edilir. c_k bilinmeyenlerini bulmak için bazı kontrol noktaları

$$x_k = a + \frac{(b-a)k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

seçilirse

$$AX = b \quad (5.13)$$

şeklinde lineer denklem sistemi elde edilir. (5.13) denkleminde

$$A = [a_{ij}]_{(n+1) \times (n+1)} = \left[B_{n,k}(x_j) - \lambda \int_a^b K(x_j, t) B_{n,k}(t) dt \right]_{(n+1) \times (n+1)}$$

$$= \begin{bmatrix} B_{n,0}(x_0) - \lambda \int_a^b K(x_0, t) B_{n,0}(t) dt & B_{n,1}(x_0) - \lambda \int_a^b K(x_0, t) B_{n,1}(t) dt & \dots & B_{n,n}(x_0) - \lambda \int_a^b K(x_0, t) B_{n,n}(t) dt \\ B_{n,0}(x_1) - \lambda \int_a^b K(x_1, t) B_{n,0}(t) dt & B_{n,1}(x_1) - \lambda \int_a^b K(x_1, t) B_{n,1}(t) dt & \dots & B_{n,n}(x_1) - \lambda \int_a^b K(x_1, t) B_{n,n}(t) dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,0}(x_n) - \lambda \int_a^b K(x_n, t) B_{n,0}(t) dt & B_{n,1}(x_n) - \lambda \int_a^b K(x_n, t) B_{n,1}(t) dt & \dots & B_{n,n}(x_n) - \lambda \int_a^b K(x_n, t) B_{n,n}(t) dt \end{bmatrix}$$

$$b = [g(x_0), g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n)]^T$$

$$X = [c_0, c_1, c_2, \dots, c_n]^T$$

dir. (5.13) lineer denkleminin çözülmesi ile c_i ler (5.10) denkleminde yerine yazılarak $u(x)$ polinomu bulunur. Benzer işlemler 1. Tip Fredholm integral denklemler için de yapılır (Hou vd., 2010).

5.2.2 Fredholm İntegral Denklemlerin Çözümlerine Baskakov Operatörü ile Yaklaşım

(5.9) daki 2. tip Fredholm integral denklemi verilsin. Verilen metottaki temel amaç u bilinmeyen fonksiyonuna

$$V_n(u; x) = \sum_{k=an}^{bn} u\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \quad x \in [a, b], \quad n \in \mathbb{N}$$

ile yaklaşımdır.

(5.9) daki denklemde verilen u fonksiyonu, $V_n(u; x)$ ile yer değiştirerek

$$\sum_{k=an}^{bn} u\left(\frac{k}{n}\right) \left[\binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} - \lambda \int_a^b K(x, t) \binom{n+k-1}{k} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}} dt \right]$$

$$= g(x)$$

(5.14)

denklemini elde edilir. Yukarıdaki denkleme matris cebirine dönüştürme işlemi uygulanabilir. (5.14) denkleminde yer alan $u\left(\frac{k}{n}\right), k = an, \dots, bn$ bilinmeyen katsayıları, x değişkeninin, $x_j = \frac{j}{n} + \varepsilon \quad (j = an, an + 1, \dots, bn - 1)$ ve $x_{bn} = b - \varepsilon$ şeklinde belirlenen kontrol noktaları ile yer değiştirmesiyle elde edilen lineer denklem sistemi ile bulunur. Burada tekillik probleminden kaçınmak için x_j kontrol noktalarının $[a, b]$ deki sınır değerleri atlanabilir. Böylece tamamen ayrıştırılmış olan ikinci tip Fredholm integral denklemi

$$AX = B \quad (5.15)$$

şeklinde matris notasyonunda yazılabilir. Burada

$$A = \left[\binom{n+k-1}{k} \frac{x_j^k}{(1+x_j)^{n+k}} - \lambda \int_a^b K(x_j, t) \binom{n+k-1}{k} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}} dt \right],$$

$$j, k = an, \dots, bn$$

$$B = \begin{bmatrix} g(x_{an}) \\ g(x_{an+1}) \\ \vdots \\ g(x_{bn}) \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} u(a) \\ \vdots \\ u(b) \end{bmatrix}$$

dır ve $A, (bn - an + 1) \times (bn - an + 1)$ tipinde bir matris ve B ve $X, (bn - an + 1) \times 1$ tipinde vektörlerdir. (5.15) denkleminde yer alan $u\left(\frac{k}{n}\right)$ katsayıları $V_n(u; x)$ denkleminde yerine yazılarak $u(x)$ çözümü bulunur. 1. tip Fredholm integral denklem için de benzer yol kullanılır.

Örnek 5.1

$$u(x) = 2 + 2x + e^x - \int_0^1 xtu(t)dt \quad (5.16)$$

2. tip Fredholm integral denklemi ele alınsın. (5.16) denkleminde

$g(x) = 2 + 2x + e^x, \lambda = -1$ ve $K(x, t) = xt$ dir. Şimdi bu integral denklemin yukarıda verilen metotlarla tam çözümleri bulunacaktır.

Adomian Ayrıştırma Metodu

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (5.17)$$

Yukarıda verilen (5.17) eşitliği (5.16) denkleminde yerine yazılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 2 + 2x + e^x - x \int_0^1 t \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt$$

veya

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots \\ = 2 + 2x + e^x - x \int_0^1 t [u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots] dt \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$u_0(x) = 2 + 2x + e^x$$

$$u_1(x) = -x \int_0^1 t u_0(t) dt$$

$$= -x \int_0^1 t (2 + 2t + e^t) dt$$

$$= -x \left[\int_0^1 2t dt + \int_0^1 2t^2 dt + \int_0^1 e^t t dt \right] \quad (5.18)$$

(5.18) denkleminde verilen $\int_0^1 e^t t dt$ integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$= -x \left[(t^2)_{t=0}^{t=1} + \left(\frac{2}{3} t^3 \right)_{t=0}^{t=1} + (e^t t)_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 e^t dt \right]$$

$$= -x \left[1 + \frac{2}{3} + e - e + 1 \right]$$

$$= -\frac{8}{3} x$$

$$u_2(x) = -x \int_0^1 t u_1(t) dt$$

$$= -x \int_0^1 t \left(-\frac{8}{3} t \right) dt$$

$$= x \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{t^3}{3} \right)_{t=0}^{t=1}$$

$$= \frac{8}{9} x$$

$$u_3(x) = -x \int_0^1 t u_2(t) dt$$

$$= -x \int_0^1 t \cdot \frac{8}{9} t dt$$

$$= -x \left[\frac{8}{9} \cdot \frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= -\frac{8}{27} x$$

$$u_4(x) = -x \int_0^1 t u_3(t) dt$$

$$= -x \int_0^1 t \left(-\frac{8}{27} \right) t dt$$

$$= x \left[\frac{8}{27} \cdot \frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= \frac{8}{81} x$$

elde edilir. (5.17) deki serinin açılmasıyla tam çözüm

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

$$= 2 + e^x + 2x - \frac{8}{3}x + \frac{8}{9}x - \frac{8}{27}x + \frac{8}{81}x - \dots$$

$$= 2 + e^x + 2x - \frac{8}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \dots \right) x$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8}{9} \cdot \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \dots\right) x \\
& = 2 + e^x + 2x - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} x + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} x \\
& = 2 + e^x + 2x - \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{8} x + \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{8} x \\
& = 2 + e^x + 2x - 3x + x \\
& = 2 + e^x + 2x - 2x \\
& = 2 + e^x
\end{aligned}$$

bulunur.

Ardışık Yaklaşımlar Metodu

$$u_0(x) = 0$$

$$u_{n+1}(x) = 2 + 2x + e^x - \int_0^1 x t u_n(t) dt, \quad n \geq 0$$

$$u_1(x) = 2 + 2x + e^x - \int_0^1 x t u_0(t) dt$$

$$= 2 + 2x + e^x - \int_0^1 x t \cdot 0 \cdot dt$$

$$= 2 + 2x + e^x$$

$$u_2(x) = 2 + 2x + e^x - \int_0^1 x t u_1(t) dt$$

$$= 2 + 2x + e^x - \int_0^1 x t \cdot (2 + 2t + e^t) dt$$

$$= 2 + 2x + e^x - \left[\int_0^1 2x t dt + \int_0^1 2x t^2 dt + x \int_0^1 t e^t dt \right] \quad (5.19)$$

(5.19) denkleminde verilen $\int_0^1 t e^t dt$ integraline kısmi integrasyon uygulanarak

$$= 2 + 2x + e^x - \left[(x t^2)_{t=0}^{t=1} + \left(\frac{2}{3} x t^3 \right)_{t=0}^{t=1} \right]$$

$$\begin{aligned}
& +x \cdot \left[(t \cdot e^t)_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 e^t dt \right] \\
& = 2 + 2x + e^x - \left[x + \frac{2}{3}x + x(e - e + 1) \right] \\
& = 2 + 2x + e^x - \left(2x + \frac{2}{3}x \right) \\
& = 2 + 2x + e^x - 2x - \frac{2}{3}x \\
& = 2 - \frac{2}{3}x + e^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x) &= 2 + 2x + e^x - \int_0^1 x t u_2(t) dt \\
&= 2 + 2x + e^x - \int_0^1 x t \left(2 - \frac{2}{3}t + e^t \right) dt \\
&= 2 + 2x + e^x - \left[\int_0^1 2x t dt - \int_0^1 \frac{2}{3} x t^2 dt + x \int_0^1 t e^t dt \right] \tag{5.20}
\end{aligned}$$

bulunur. (5.20) denkleminde verilen $\int_0^1 t e^t dt$ integraline kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned}
& = 2 + 2x + e^x - \left[(x t^2)_{t=0}^{t=1} - \left(\frac{2}{9} x t^3 \right)_{t=0}^{t=1} \right. \\
& \quad \left. + x \cdot \left[(t \cdot e^t)_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 e^t dt \right] \right] \\
& = 2 + 2x + e^x - \left[x - \frac{2}{9}x + x(e - e + 1) \right] \\
& = 2 + 2x + e^x - \left(2x - \frac{2}{9}x \right) \\
& = 2 + 2x + e^x - 2x + \frac{2}{9}x \\
& = 2 + \frac{2}{9}x + e^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_4(x) &= 2 + 2x + e^x - \int_0^1 xtu_3(t)dt \\
&= 2 + 2x + e^x - \int_0^1 xt \left(2 + \frac{2}{9}t + e^t \right) dt \\
&= 2 + 2x + e^x - \left[\int_0^1 2xt dt + \int_0^1 \frac{2}{9}xt^2 dt + x \int_0^1 te^t dt \right] \tag{5.21}
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.21) denkleminde verilen $\int_0^1 te^t dt$ integraline kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned}
&= 2 + 2x + e^x - \left[(xt^2)_{t=0}^{t=1} + \left(\frac{2}{27}xt^3 \right)_{t=0}^{t=1} \right. \\
&\quad \left. + x \left[(te^t)_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 e^t dt \right] \right] \\
&= 2 + 2x + e^x - \left[x + \frac{2}{27}x + x(e - e + 1) \right] \\
&= 2 + 2x + e^x - \left(2x + \frac{2}{27}x \right) \\
&= 2 + 2x + e^x - 2x - \frac{2}{27}x \\
&= 2 - \frac{2}{27}x + e^x
\end{aligned}$$

⋮

$$u_{n+1}(x) = 2 + e^x + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \cdot 2x, \quad n \geq 0$$

elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n = 0$$

olduğundan (5.16) denkleminin tam çözümü

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \cdot 2x + e^x \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \cdot 2x + \lim_{n \rightarrow \infty} e^x \\
&= 2 + e^x
\end{aligned}$$

bulunur.

Bernstein Polinomu Metodu

Burada $B_{n,k}(x)$, $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$ ler $[0, 1]$ aralığında tanımlı n . dereceden polinomu

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklindedir. Burada $u(x)$ fonksiyonuna $[0, 1]$ kapalı aralığında Bernstein polinomları ile

$$\begin{aligned}
B_n(u; x) &= \sum_{k=0}^n c_k B_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

şeklinde yaklaşılır. (5.22) de verilen polinom (5.16) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n c_k B_{n,k}(x) &= g(x) - \int_0^1 K(x, t) \sum_{k=0}^n c_k B_{n,k}(t) dt \\
\sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &+ \int_0^1 K(x, t) \sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} dt = g(x) \\
\sum_{k=0}^n c_k \left[\binom{n}{k} \left(x^k (1-x)^{n-k} + \int_0^1 K(x, t) t^k (1-t)^{n-k} dt \right) \right] &= g(x)
\end{aligned}$$

formuna getirilir ve $n = 4$ için kontrol noktaları $x_j = \frac{j}{n}$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) olarak seçilirse

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.25 \quad x_2 = 0.5 \quad x_3 = 0.75 \quad x_4 = 1$$

bulunur ve

$$AX = Y \quad (5.23)$$

şeklinde bir lineer denklem sistemi elde edilir.

$$A = \left[\binom{n}{k} \left(x_j^k (1 - x_j)^{n-k} + \int_0^1 K(x_j, t) t^k (1 - t)^{n-k} dt \right) \right] \quad k, j = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$X = [c_k]^T \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$Y = [g(x_j)]^T \quad j = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (5.24)$$

denklemleri elde edilir. (5.24) denklemlerinin $n = 4$ için düzenlenmesiyle

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

$$X = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4]_{1 \times 5}^T$$

$$Y = [g(x_0) \quad g(x_1) \quad g(x_2) \quad g(x_3) \quad g(x_4)]_{1 \times 5}^T$$

matrisleri elde edilir. Bu matrislerin çözümlenmesiyle

$$A_{11} = (1 - x_0)^4 + \int_0^1 K(x_0, t) (1 - t)^4 dt$$

$$= (1 - 0)^4 + \int_0^1 0 \cdot t (1 - t)^4 dt$$

$$= 1$$

$$A_{12} = 4x_0(1 - x_0)^3 + \int_0^1 K(x_0, t) 4t(1 - t)^3 dt$$

$$= 4 \cdot 0 \cdot (1 - 0)^3 + \int_0^1 0 \cdot t \cdot 4 \cdot t \cdot (1 - t)^3 dt$$

$$= 0$$

$$A_{13} = 6x_0^2(1 - x_0)^2 + \int_0^1 K(x_0, t)6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 6 \cdot 0^2 \cdot (1 - 0)^2 + \int_0^1 0 \cdot t \cdot 6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 0$$

$$A_{14} = 4x_0^3(1 - x_0) + \int_0^1 K(x_0, t)4t^3(1 - t) dt$$

$$= 4 \cdot 0^3 \cdot (1 - 0) + \int_0^1 0 \cdot t \cdot 4t^3 \cdot (1 - t) dt$$

$$= 0$$

$$A_{15} = x_0^4 + \int_0^1 K(x_0, t)t^4 dt$$

$$= 0^4 + \int_0^1 0 \cdot t \cdot t^4 dt$$

$$= 0$$

$$A_{21} = (1 - x_1)^4 + \int_0^1 K(x_1, t)(1 - t)^4 dt$$

$$= (1 - 0.25)^4 + \int_0^1 (0.25)t(1 - t)^4 dt$$

$$= 0.3247$$

$$A_{22} = 4x_1(1 - x_1)^3 + \int_0^1 K(x_1, t)4t(1 - t)^3 dt$$

$$= 4 \cdot (0.25) \cdot (1 - 0.25)^3 + \int_0^1 (0.25)t \cdot 4t(1 - t)^3 dt$$

$$= 0.4385$$

$$A_{23} = 6x_1^2(1 - x_1)^2 + \int_0^1 K(x_1, t)6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 6 \cdot (0.25)^2 \cdot (1 - 0.25)^2 + \int_0^1 (0.25)t \cdot 6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 0.2359$$

$$A_{24} = 4x_1^3(1 - x_1) + \int_0^1 K(x_1, t)4t^3(1 - t)dt$$

$$= 4 \cdot (0.25)^3 \cdot (1 - 0.25) + \int_0^1 (0.25)t \cdot 4t^3(1 - t)dt$$

$$= 0.0802$$

$$A_{25} = x_1^4 + \int_0^1 K(x_1, t)t^4 dt$$

$$= (0.25)^4 + \int_0^1 (0.25)tt^4 dt$$

$$= 0.0456$$

$$A_{31} = (1 - x_2)^4 + \int_0^1 K(x_2, t)(1 - t)^4 dt$$

$$= (1 - 0.5)^4 + \int_0^1 (0.5)t(1 - t)^4 dt$$

$$= 0.0792$$

$$A_{32} = 4x_2(1 - x_2)^3 + \int_0^1 K(x_2, t)4t(1 - t)^3 dt$$

$$= 4 \cdot (0.5) \cdot (1 - 0.5)^3 + \int_0^1 (0.5)t4t(1 - t)^3 dt$$

$$= 0.2833$$

$$A_{33} = 6x_2^2(1 - x_2)^2 + \int_0^1 K(x_2, t)6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 6 \cdot (0.5)^2 \cdot (1 - 0.5)^2 + \int_0^1 (0.5)t6t^2(1 - t)^2 dt$$

$$= 0.4250$$

$$A_{34} = 4x_2^3(1 - x_2) + \int_0^1 K(x_2, t)4t^3(1 - t)dt$$

$$= 4.(0.5)^3.(1 - 0.5) + \int_0^1 (0.5)t4t^3(1 - t)dt$$

$$= 0.3167$$

$$A_{35} = x_2^4 + \int_0^1 K(x_2, t)t^4dt$$

$$= (0.5)^4 + \int_0^1 (0.5)tt^4dt$$

$$= 0.1458$$

$$A_{41} = (1 - x_3)^4 + \int_0^1 K(x_3, t)(1 - t)^4dt$$

$$= (1 - 0.75)^4 + \int_0^1 (0.75)t(1 - t)^4dt$$

$$= 0.0289$$

$$A_{42} = 4x_3(1 - x_3)^3 + \int_0^1 K(x_3, t)4t(1 - t)^3dt$$

$$= 4.(0.75).(1 - 0.75)^3 + \int_0^1 (0.75)t4t(1 - t)^3dt$$

$$= 0.0969$$

$$A_{43} = 6x_3^2(1 - x_3)^2 + \int_0^1 K(x_3, t)6t^2(1 - t)^2dt$$

$$= 6.(0.75)^2.(1 - 0.75)^2 + \int_0^1 (0.75)t6t^2(1 - t)^2dt$$

$$= 0.2859$$

$$\begin{aligned}
A_{44} &= 4x_3^3(1-x_3) + \int_0^1 K(x_3, t)4t^3(1-t)dt \\
&= 4.(0.75)^3.(1-0.75) + \int_0^1 (0.75)t4t^3(1-t)dt \\
&= 0.5219
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{45} &= x_3^4 + \int_0^1 K(x_3, t)t^4dt \\
&= (0.75)^4 + \int_0^1 (0.75)tt^4dt \\
&= 0.4414
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{51} &= (1-x_4)^4 + \int_0^1 K(x_4, t)(1-t)^4dt \\
&= (1-1)^4 + \int_0^1 1.t(1-t)^4dt \\
&= 0.0333
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{52} &= 4x_4(1-x_4)^3 + \int_0^1 K(x_4, t)4t(1-t)^3dt \\
&= 4.1.(1-1)^3 + \int_0^1 1.t.4t(1-t)^3dt \\
&= 0.0667
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{53} &= 6x_4^2(1-x_4)^2 + \int_0^1 K(x_4, t)6t^2(1-t)^2dt \\
&= 6.1^2.(1-1)^2 + \int_0^1 1.t.6t^2(1-t)^2dt \\
&= 0.1
\end{aligned}$$

$$A_{54} = 4x_4^3(1-x_4) + \int_0^1 K(x_4, t)4t^3(1-t)dt$$

$$= 4.1^3.(1-1) + \int_0^1 1.t.4t^3(1-t)dt$$

$$= 0.1333$$

$$A_{55} = x_4^4 + \int_0^1 K(x_4, t)t^4 dt$$

$$= 1^4 + \int_0^1 1.t.t^4 dt$$

$$= 1.6667$$

$$g(x_j) = 2 + 2x + e^x$$

$$g(0) = 2 + 2.0 + e^0$$

$$= 3$$

$$g(0.25) = 2 + 2.(0.25) + e^{0.25}$$

$$= 3.7840$$

$$g(0.5) = 2 + 2.(0.5) + e^{0.5}$$

$$= 4.6487$$

$$g(0.75) = 2 + 2.(0.75) + e^{0.75}$$

$$= 5.1670$$

$$g(1) = 2 + 2.1 + e^1$$

$$= 6.7183$$

bulunur. Bulunan bu değerlerin (5.23) lineer denklem sisteminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3247 & 0.4385 & 0.2359 & 0.0802 & 0.0456 \\ 0.0792 & 0.2833 & 0.4250 & 0.3167 & 0.1458 \\ 0.0289 & 0.0969 & 0.2859 & 0.5219 & 0.4414 \\ 0.0333 & 0.0667 & 0.1000 & 0.1333 & 1.6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.7840 \\ 4.6487 \\ 5.6170 \\ 6.7183 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle

$$X = [3 \quad 3.2508 \quad 3.5835 \quad 4.0394 \quad 4.7182]$$

bulunur. Böylelikle

$$\begin{aligned} B_n(u; x) &= \sum_{k=0}^n c_k B_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

olmak üzere $n = 4$ için oluşan polinom

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^4 c_k \binom{4}{k} x^k (1-x)^{4-k} \\ &= (4,7182)x^4 + (16,1575)x^3(1-x) \\ &\quad + (21,5009)x^2(1-x)^2 + (13,0032)x(1-x)^3 \\ &\quad + 3(1-x)^4 \end{aligned}$$

bulunur.

Baskakov Operatörü Metodu

$P_{n,k}$, n . dereceden Baskakov bazı olmak üzere

$$P_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

olup, $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı kısmi(truncated) Baskakov operatörü

$$\begin{aligned} V_n(u; x) &= \sum_{k=0}^n u \left(\frac{k}{n} \right) P_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n u \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \end{aligned} \tag{5.25}$$

şeklindedir. (5.25) de verilen operatör (5.16) denkleminde yerine yazılarak

$$\sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$= g(x) - \int_0^1 K(x,t) \sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}} dt$$

$$\sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$+ \int_0^1 K(x,t) \sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}} dt = g(x)$$

$$\sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) \left[\binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} + \int_0^1 K(x,t) \binom{n+k-1}{k} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}} dt \right]$$

$$= g(x)$$

formuna getirilir ve $n = 4$ için kontrol noktaları $x_j = \frac{j}{n}$ ($j = 0,1,2,3,4$) seçilirse

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.25 \quad x_2 = 0.5 \quad x_3 = 0.75 \quad x_4 = 1$$

bulunur ve

$$AX = Y \tag{5.26}$$

şeklinde bir lineer denklem sistemi elde edilir.

$$A = \left[\binom{n+k-1}{k} \left(\frac{x_j^k}{(1+x_j)^{n+k}} + \int_0^1 K(x_j,t) \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}} dt \right) \right] \quad k, j = 0,1,2,3,4$$

$$X = \left[u\left(\frac{k}{n}\right) \right]^T \quad k = 0,1,2,3,4 \tag{5.27}$$

$$Y = [g(x_j)]^T \quad j = 0,1,2,3,4$$

denklemleri elde edilir. (5.27) denklemlerinin $n = 4$ için düzenlenmesiyle

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

$$X = [u(0) \quad u(0.25) \quad u(0.5) \quad u(0.75) \quad u(1)]_{1 \times 5}^T$$

$$Y = [g(x_0) \quad g(x_1) \quad g(x_2) \quad g(x_3) \quad g(x_4)]_{1 \times 5}^T$$

matrisleri elde edilir. Bu matrislerin çözümlenmesiyle

$$A_{11} = \binom{3}{0} \left[\frac{x_0^0}{(1+x_0)^4} + \int_0^1 K(x_0, t) \frac{t^0}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= \left[\frac{1}{(1+0)^4} + \int_0^1 0 \cdot t \frac{1}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= 1$$

$$A_{12} = \binom{4}{1} \left[\frac{x_0^1}{(1+x_0)^5} + \int_0^1 K(x_0, t) \frac{t^1}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{0}{(1+0)^5} + \int_0^1 0 \cdot t \frac{t}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 0$$

$$A_{13} = \binom{5}{2} \left[\frac{x_0^2}{(1+x_0)^6} + \int_0^1 K(x_0, t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 10 \cdot \left[\frac{0}{(1+0)^6} + \int_0^1 0 \cdot t \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 0$$

$$A_{14} = \binom{6}{3} \left[\frac{x_0^3}{(1+x_0)^7} + \int_0^1 K(x_0, t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 20 \cdot \left[\frac{0}{(1+0)^7} + \int_0^1 0 \cdot t \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 0$$

$$A_{15} = \binom{7}{4} \left[\frac{x_0^4}{(1+x_0)^8} + \int_0^1 K(x_0, t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 35 \cdot \left[\frac{0}{(1+0)^8} + \int_0^1 0 \cdot t \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned}
A_{21} &= \binom{3}{0} \left[\frac{x_1^0}{(1+x_1)^4} + \int_0^1 K(x_1, t) \frac{t^0}{(1+t)^4} dt \right] \\
&= \left[\frac{1}{(1+0.25)^4} + \int_0^1 (0.25) \cdot t \frac{1}{(1+t)^4} dt \right] \\
&= 0.4304
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} &= \binom{4}{1} \left[\frac{x_1^1}{(1+x_1)^5} + \int_0^1 K(x_1, t) \frac{t^1}{(1+t)^5} dt \right] \\
&= 4 \cdot \left[\frac{0.25}{(1+0.25)^5} + \int_0^1 (0.25) \cdot t \frac{t}{(1+t)^5} dt \right] \\
&= 0.3537
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{23} &= \binom{5}{2} \left[\frac{x_1^2}{(1+x_1)^6} + \int_0^1 K(x_1, t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right] \\
&= 10 \cdot \left[\frac{(0.25)^2}{(1+0.25)^6} + \int_0^1 (0.25) \cdot t \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right] \\
&= 0.1873
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{24} &= \binom{6}{3} \left[\frac{x_1^3}{(1+x_1)^7} + \int_0^1 K(x_1, t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right] \\
&= 20 \cdot \left[\frac{(0.25)^3}{(1+0.25)^7} + \int_0^1 (0.25) \cdot t \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right] \\
&= 0.0838
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{25} &= \binom{7}{4} \left[\frac{x_1^4}{(1+x_1)^8} + \int_0^1 K(x_1, t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right] \\
&= 35 \cdot \left[\frac{(0.25)^4}{(1+0.25)^8} + \int_0^1 (0.25) \cdot t \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right] \\
&= 0.0360
\end{aligned}$$

$$A_{31} = \binom{3}{0} \left[\frac{x_2^0}{(1+x_2)^4} + \int_0^1 K(x_2, t) \frac{t^0}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= \left[\frac{1}{(1+0.5)^4} + \int_0^1 (0.5) \cdot t \frac{1}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= 0.2392$$

$$A_{32} = \binom{4}{1} \left[\frac{x_2^1}{(1+x_2)^5} + \int_0^1 K(x_2, t) \frac{t^1}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{0.5}{(1+0.5)^5} + \int_0^1 (0.5) \cdot t \frac{t}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 0.3155$$

$$A_{33} = \binom{5}{2} \left[\frac{x_2^2}{(1+x_2)^6} + \int_0^1 K(x_2, t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 10 \cdot \left[\frac{(0.5)^2}{(1+0.5)^6} + \int_0^1 (0.5) \cdot t \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 0.2664$$

$$A_{34} = \binom{6}{3} \left[\frac{x_2^3}{(1+x_2)^7} + \int_0^1 K(x_2, t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 20 \cdot \left[\frac{(0.5)^3}{(1+0.5)^7} + \int_0^1 (0.5) \cdot t \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 0.1828$$

$$A_{35} = \binom{7}{4} \left[\frac{x_2^4}{(1+x_2)^8} + \int_0^1 K(x_2, t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 35 \cdot \left[\frac{(0.5)^4}{(1+0.5)^8} + \int_0^1 (0.5) \cdot t \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 0.1114$$

$$A_{41} = \binom{3}{0} \left[\frac{x_3^0}{(1+x_3)^4} + \int_0^1 K(x_3, t) \frac{t^0}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= \left[\frac{1}{(1+0.75)^4} + \int_0^1 (0.75) \cdot t \frac{1}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= 0.1691$$

$$A_{42} = \binom{4}{1} \left[\frac{x_3^1}{(1+x_3)^5} + \int_0^1 K(x_3, t) \frac{t^1}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{0.75}{(1+0.75)^5} + \int_0^1 (0.75) \cdot t \frac{t}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 0.2609$$

$$A_{43} = \binom{5}{2} \left[\frac{x_3^2}{(1+x_3)^6} + \int_0^1 K(x_3, t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 10 \cdot \left[\frac{(0.75)^2}{(1+0.75)^6} + \int_0^1 (0.75) \cdot t \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 0.2661$$

$$A_{44} = \binom{6}{3} \left[\frac{x_3^3}{(1+x_3)^7} + \int_0^1 K(x_3, t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 20 \cdot \left[\frac{(0.75)^3}{(1+0.75)^7} + \int_0^1 (0.75) \cdot t \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 0.2225$$

$$A_{45} = \binom{7}{4} \left[\frac{x_3^4}{(1+x_3)^8} + \int_0^1 K(x_3, t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 35 \cdot \left[\frac{(0.75)^4}{(1+0.75)^8} + \int_0^1 (0.75) \cdot t \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 0.1650$$

$$A_{51} = \binom{3}{0} \left[\frac{x_4^0}{(1+x_4)^4} + \int_0^1 K(x_4, t) \frac{t^0}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= \left[\frac{1}{(1+1)^4} + \int_0^1 1 \cdot t \frac{1}{(1+t)^4} dt \right]$$

$$= 0.1458$$

$$A_{52} = \binom{4}{1} \left[\frac{x_4^1}{(1+x_4)^5} + \int_0^1 K(x_4, t) \frac{t^1}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 4. \left[\frac{1}{(1+1)^5} + \int_0^1 1. t \frac{t}{(1+t)^5} dt \right]$$

$$= 0.2292$$

$$A_{53} = \binom{5}{2} \left[\frac{x_4^2}{(1+x_4)^6} + \int_0^1 K(x_4, t) \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 10. \left[\frac{1^2}{(1+1)^6} + \int_0^1 1. t \frac{t^2}{(1+t)^6} dt \right]$$

$$= 0.25$$

$$A_{54} = \binom{6}{3} \left[\frac{x_4^3}{(1+x_4)^7} + \int_0^1 K(x_4, t) \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 20. \left[\frac{1^3}{(1+1)^7} + \int_0^1 1. t \frac{t^3}{(1+t)^7} dt \right]$$

$$= 0.2292$$

$$A_{55} = \binom{7}{4} \left[\frac{x_4^4}{(1+x_4)^8} + \int_0^1 K(x_4, t) \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 35. \left[\frac{1^4}{(1+1)^8} + \int_0^1 1. t \frac{t^4}{(1+t)^8} dt \right]$$

$$= 0.1888$$

bulunur. Bulunan bu değerlerin (5.26) lineer denklem sisteminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4304 & 0.3537 & 0.1873 & 0.0838 & 0.0360 \\ 0.2392 & 0.3155 & 0.2664 & 0.1828 & 0.1114 \\ 0.1691 & 0.2609 & 0.2661 & 0.2225 & 0.1650 \\ 0.1458 & 0.2291 & 0.2500 & 0.2292 & 1.1888 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(0.25) \\ u(0.5) \\ u(0.75) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.7840 \\ 4.6487 \\ 5.6170 \\ 6.7183 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle

$$X = [3 \quad -32.9837 \quad 160.3393 \quad -271.0505 \quad 190.0461]$$

bulunur. Böylelikle

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \end{aligned}$$

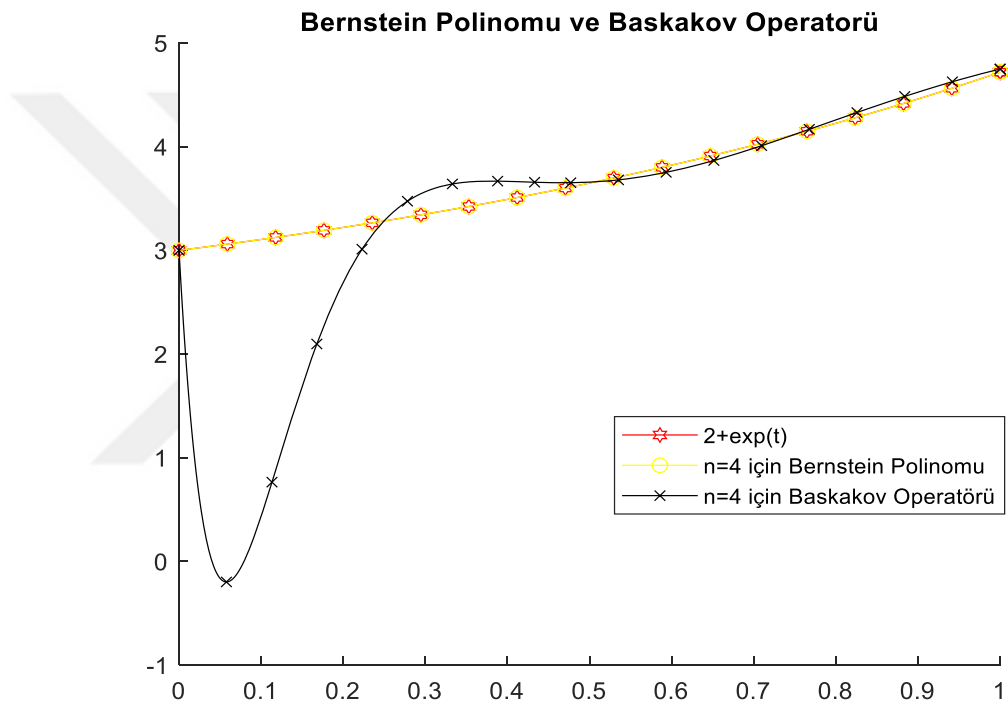
olmak üzere $n = 4$ için oluşan operatör

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^4 u\left(\frac{k}{4}\right) \binom{3+k}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{(1+x)^4} - (131,9350) \cdot \frac{x}{(1+x)^5} \\ &\quad + (1,6034 \cdot 10^3) \cdot \frac{x^2}{(1+x)^6} - (5,4210 \cdot 10^3) \cdot \frac{x^3}{(1+x)^7} \\ &\quad + (6,6516 \cdot 10^3) \cdot \frac{x^4}{(1+x)^8} \end{aligned}$$

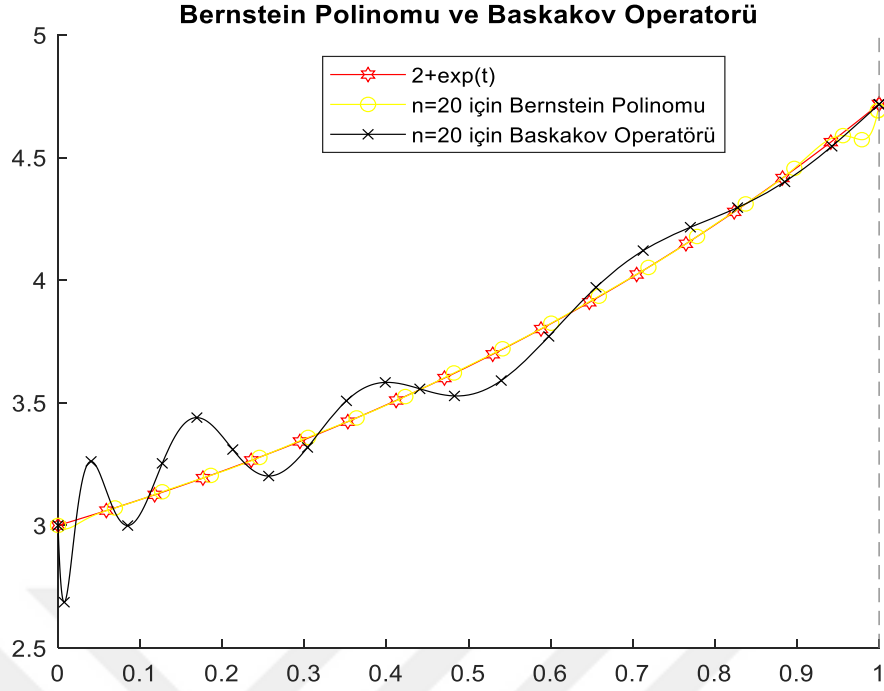
bulunur.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Kesin Çözüm	3	3.1052	3.2214	3.3499	3.4918	3.6487	3.8221	4.0138	4.2255	4.4596	4.7183
Bernstein	3	3.1058	3.2210	3.3494	3.4919	3.6495	3.8222	4.0136	4.2259	4.4595	4.7178
Baskakov	3	2.6314	3.5946	3.6158	3.6581	3.6365	3.7035	3.8299	4.0090	4.2370	4.4791

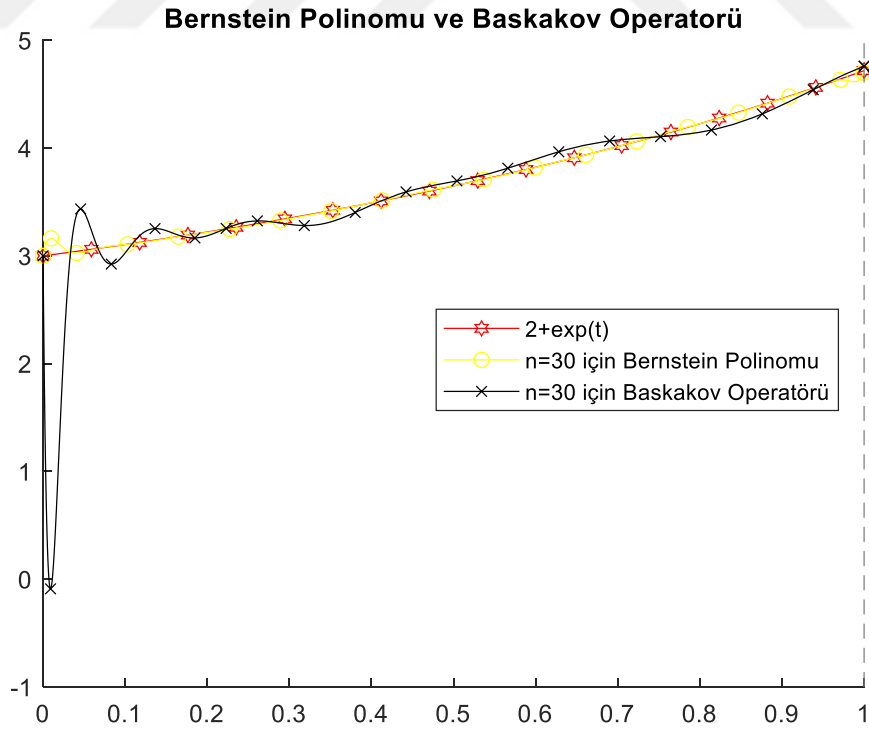
Tablo 5.1 $n=10$ için Kesin Çözüm, Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatörü Yaklaşık Çözümleri



Şekil 5.1. Tam Çözüm ve $n=4$ için Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatör Yaklaşımları Grafiği



Şekil 5.2. Tam Çözüm ve $n=20$ için Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatör Yaklaşımları Grafiği



Şekil 5.3. Tam Çözüm ve $n=30$ için Bernstein Polinomu ve Baskakov Operatör Yaklaşımları Grafiği

Şekil 5.1., Şekil 5.2. ve Şekil 5.3. da Örnek 5.1 de verilen integral denklemin tam çözümü, sırasıyla $n=4$, $n=20$ ve $n=30$ durumları için Bernstein polinomu yaklaşımı ve Baskakov operatörü yaklaşımının grafikleri verilmiştir.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada integral denklem çeşitleri verilmiş olup bunlar arasında önemli bir yere sahip olan Fredholm ve Volterra integral denklem türlerinden bahsedilmiştir. Ayrıca sırasıyla 2. tip Volterra ve 2. tip Fredholm integral denklem örnekleri incelenmiş ve bazı analitik çözüm metotları kullanılarak bu integral denklemlerin tam çözümleri bulunmuş, Bernstein polinomu ve Baskakov operatörü ile yaklaşım metotları kullanılarak yaklaşık çözümleri de elde edilmiştir.

Bernstein polinomu ve Baskakov operatörleri ile yapılan çözümlerde farklı durumlar ele alınarak bu çözümlerden elde edilen veriler tablolaştırılmış veya grafik halinde verilmiştir. Bu tablolar ve grafiklerde tam çözüm ile Bernstein polinomları ve Baskakov operatöründen elde edilen yaklaşık çözümler kıyaslanmıştır. Bu incelemede tablodan ve grafikten elde edilen verilere göre Bernstein polinomu kullanılarak elde edilen yaklaşımın Baskakov operatörü kullanılarak elde edilen yaklaşıma göre tam çözüme daha yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Ayrıca bölüntünün artırılıp kontrol noktalarının çoğaltıldığı durumlarda Bernstein polinomu ve Baskakov operatörünün tam çözüme daha da yaklaştığı görülmüştür. Yani Baskakov operatörüne göre Bernstein polinomu ile tam çözüme daha iyi yaklaşım yapılmıştır. Eğer $[0, \infty)$ aralığında yaklaşık çözüm aranacak olursa tanım kümelerinden dolayı Baskakov operatörünün Bernstein polinomlarına göre daha iyi ve kesin sonuçlar vereceği öngörülmektedir.

Yaklaşım polinomları integral denklem ve diferansiyel denklem çözümlerinde kullanılmaktadır. Bernstein polinomu integral denklem ve diferansiyel denklem çözümlerinde sıklıkla kullanılmasına rağmen, Baskakov operatörü aynı etkiye sahip değildir. Özellikle bu tez çalışması Baskakov operatörü ile yapılacak olan çalışmalara ışık tutabilir ve bu operatöre benzer operatörlerle yapılacak çalışmalara da katkı sağlayabilir.

7. KAYNAKLAR

(Bu tez çalışmasında APA atıf sistemi kullanılmıştır.)

- Aksoy, Y. (1998). *İntegral denklemler*. Y.T.Ü. Basım-Yayın Merkezi.
- Altomare, F., & Campiti, M. (1994). *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*. Walter de Gruyter.
- Axler, S. (2020). *Measure, Integration & Real Analysis*. Springer Nature.
- Corduneanu, C. (1991). *Integral equations and applications*. Cambridge University Press.
- Delves, L.M., & Mohamed, J.L. (1985). *Computational methods for integral equations*. Cambridge University Press.
- Deniz, E., Aral, A., & Ulusoy, G. (2017). New integral type operators. *Filomat*, 31(9), 2851-2865.
- Hacısalıhoğlu, H., & Hacıyev, A. (1995). *Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı*. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları.
- Hou, J., Yang, C., & Wang, S. (2010). Numerical solution of Fredholm integral equations by using Bernstein polynomials. *2010 IEEE International Conference on Progress in Informatics and Computing*, 1, 427-430.
- Joy, K. I. (2000). Bernstein Polynomials. *On-Line Geometric Modeling Notes*, 13(5).
- Kızmaz, H. (1993). *Fonksiyonel analize giriş*. Karadeniz Teknik Üniversitesi Basımevi.
- Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S)*, 90, 961-964.
- Krasnov, M., Kiselev, A., & Makarenko, G. (1971). *Problems and exercises in integral equations*. Mir Publishers.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons. Inc.
- Lorentz, G. G. (1986). *Bernstein Polynomials*. Chelsea Publishing Company.
- Maleknejad, K., Hashemizadeh, E., & Ezzati, R. (2011). A new approach to the numerical solution of Volterra integral equations by using Bernstein's approximation. *Communications in nonlinear science and numerical solutions*, 16(2), 647-655.
- Musayev, B., & Alp, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Balcı Yayınları.
- Oruç, H. (1998). Generalized Bernstein polynomials and total positivity. *University of St. Andrews School of Mathematical and Computational Sciences Doctoral Dissertation*, Scotland, United Kingdom.
- Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and nonlinear integral equations methods and applications*. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg.