

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**



**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN PELL-LUCAS MATRİS
SIRALAMA YÖNTEMİ VE MÜHENDİSLİK
PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI**

Asuman AÇIK

**Danışman
Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR
Prof. Dr. Mehmet SEZER**

MANİSA-2025

ASUMAN
AÇIK

LINEER VE LINEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN
PELL-LUCAS MATRİS SİRALAMA YÖNTEMİ VE MÜHENDİSLİK PROBLEMLERİNE
UYGULAMALARI

2025

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, tezin yazımında akademik ve etik kurallara aykırı herhangi bir program kullanmadığımı, tezde çözülen uygulamaların hesaplarının WOLFRAM MATHEMATİCA programı ile hesaplandığını beyan ederim.

Asuman AÇIK



ÖZET

Doktora Tezi

Asuman AÇIK

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR

İkinci Danışman: Prof. Dr. Mehmet SEZER

Bu çalışmada, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin verilen karmaşık koşullar altında çözümlerinde alternatif bir yaklaşım olarak Pell-Lucas polinomlarına dayalı bir matris sıralama yöntemi geliştirilmiş ve nümerik çözümler incelenmiştir. Standart sıralama noktaları ile Taylor ve Pell-Lucas polinomlarının matris özelliklerinden yararlanılarak geliştirilen yöntem, ele alınan diferansiyel denklemleri, bilinmeyenleri Pell-Lucas polinomlarının katsayıları olan bir cebirsel denklem sistemine indirgemektedir. Bu cebirsel sistemin çözümüyle, sonlu sayıda Pell-Lucas polinomu cinsinden yaklaşık çözümler elde edilmektedir. Çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmanın amacı, kapsamı ve motivasyonu sunulmuş; klasik çözüm yöntemlerinin sınırlılıkları ve alternatif polinom tabanlı yaklaşımların potansiyeli tartışılmıştır. İkinci bölümde, tezin temelini oluşturan Pell ve Pell-Lucas polinomları tanıtılmış, bu polinomların tanım bağıntıları, üreteç fonksiyonları ve bazı temel özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Üçüncü bölümde, matris sıralama yönteminin kuramsal altyapısı oluşturulmuş ve Pell-Lucas polinomlarına dayalı sıralama yaklaşımı tanımlanarak, algoritmanın yapı taşları matematiksel olarak temellendirilmiştir. Dördüncü bölümde, geliştirilen yöntemin, sınır tabakası problemine nasıl uygulandığı adım adım açıklanmış, farklı boyutlarda test matrisleri üzerinde algoritma çalıştırılmıştır. Ayrıca, elde edilen sonuçlar sayısal olarak değerlendirilmiş, yöntem literatürde özel polinomlara dayalı diğer çözüm yöntemleriyle karşılaştırılmış ve hesaplama doğruluğu açısından avantajları analiz edilmiştir. Beşinci ve son bölümde ise genel bir değerlendirme yapılmış, çalışmanın öne çıkan katkıları özetlenerek gelecekteki çalışmalar için öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Pell-Lucas polinomları, sıralama noktaları, tekil pertürbe diferansiyel denklemler, matris sıralama metodu, rezidüel hata analizi.

2025, 68 sayfa



ABSTRACT

PhD Thesis

Asuman AÇIK

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Education
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR

Co-Supervisor: Prof. Dr. Mehmet SEZER

In this study, a matrix ordering method based on Pell-Lucas polynomials has been developed as an alternative approach to solving linear and nonlinear differential equations under given mixed conditions and numerical solutions have been investigated. The method, which has been developed by utilizing the standard ordering points and the matrix properties of Taylor and Pell–Lucas polynomials, reduces the considered differential equations to a system of algebraic equations whose unknowns are the coefficients of the Pell–Lucas polynomials. By solving this algebraic system, approximate solutions are obtained in terms of a finite number of Pell–Lucas polynomials. The study consists of five sections.

In the first section, the aim, scope and motivation of the study are presented; the limitations of classical solution methods and the potential of alternative polynomial-based approaches are discussed. In the second section, Pell and Pell-Lucas polynomials, which form the basis of the thesis, are introduced, and the definition relations, generating functions and some basic properties of these polynomials are examined in detail. In the third section, the theoretical infrastructure of the matrix sorting method is established and the sorting approach based on Pell-Lucas polynomials is defined, and the building blocks of the algorithm are mathematically based. In the fourth section, how the developed method is applied to the boundary layer problem is explained step by step, and the algorithm is run on test matrices of different sizes. In addition, the obtained results are evaluated numerically, the method is compared with other solution methods based on special polynomials in the literature, and its advantages in terms of calculation accuracy are analyzed. In the fifth and last

section, a general evaluation is made, the prominent contributions of the study are summarized and suggestions for future studies are presented.

Keywords: Pell-Lucas polynomials, ordering points, singular perturbed differential equations, matrix ordering method, residual error analysis.

2025, 68 pages



TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında kıymetli bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren ve destek olan, öğrencileri olduğum için büyük onur duyduğum danışman hocalarım sayın Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR'e ve sayın Prof. Dr. Mehmet Sezer'e, lisansüstü eğitimim sırasında yardımını hiçbir zaman esirgemeyen, kısıtlı zamanlarında kıymetli vaktini ayırıp tezin tamamlanmasına büyük destek olan, çalışmalarım konusunda her türlü imkan ve desteği sağlayan hocam sayın Prof. Dr. Ali KONURALP'e, tez izleme komitelerinde kıymetli bilgilerini paylaşarak destek olan Doç. Dr. Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ'ye ve son olarak hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyip hep yanımda olan canım aileme, özellikle bana her zaman inanan ve cesaretlendiren anneme, yürekten teşekkür ederim.

Asuman AÇIK
Manisa, 2025

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$P_n(x)$	Pell Polinomları
$Q_n(x)$	Pell-Lucas Polinomları
$F_n(x)$	Fibonacci Polinomları
A	Bilinmeyen Pell-Lucas Katsayıları Matrisi
N	Kesme Sınırı
$R_n(x)$	Rezidüel Hata Fonksiyonu
x_i	Sıralama Noktaları
$y_n(x)$	Yaklaşık Çözüm
$y(x)$	Tam Çözüm
[W;F]	Temel Denkleme ait Arttırılmış Matris
[U;λ]	Koşullar için Arttırılmış Matris
[W̃;F̃]	Koşulları Kullanılmış Yeni Arttırılmış Matris
$ e_N(x) $	Mutlak Hata
$ e_{N,M}(x) $	İyileştirilmiş Mutlak Hata
TCM	Taylor Sıralama Yöntemi
PLCM	Pell-Lucas Sıralama Yöntemi
RCCM	Rasyonel Chebyshev Sıralama Yöntemi
DM	Ayrıştırma Yöntemi
LCM	Lucas Sıralama Yöntemi
ECM	Euler Sıralama Yöntemi
CTM	Chebyshev Tau Yöntemi
RHM	Rasyonelleştirilmiş Haar Yöntemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Pell-Lucas polinomunun ilk beş teriminin grafiği	12
Şekil 3.1. $N = 5$ için tam ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması.....	25
Şekil 3.2. (a) $(N, M) = (5, 6)$, (b) $(N, M) = (7, 8)$, (c) $(N, M) = (9, 10)$ değerleri için mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması.....	26
Şekil 3.3. (a) $(N, M) = (6, 7)$, (b) $(N, M) = (7, 8)$, (c) $(N, M) = (15, 16)$ değerleri için mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataları karşılaştırılması.....	29
Şekil 3.4. (a) $(N, M) = (8, 9)$, (b) $(N, M) = (15, 16)$ değerleri için mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hatalar.....	32
Şekil 3.5. $N = 4$ ve $N = 5$ için PLCM ile bulunan yaklaşık çözümlerin mutlak hata karşılaştırmaları	43
Şekil 3.6. PLCM ile $N = 2$ ve $N = 6$ için yaklaşık çözümler ve tam çözümlerin karşılaştırılması.....	45
Şekil 4.1. $(N, M) = (8, 9)$ ve $\varepsilon = 2^{-3}$ için PLCM ile tam, yaklaşık ve iyileştirilmiş çözümler.....	52
Şekil 4.2. $(N, M) = (8, 9)$, $(N, M) = (13, 14)$ olmak üzere, (a)-(b) $\varepsilon = 2^{-3}$ için PLCM ile bulunan mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması (c)-(d) $\varepsilon = 2^{-5}$ için mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması.....	54
Şekil 4.3. N, M ve ε 'nin bazı değerleri için PLCM ile bulunan iyileştirilmiş mutlak hatalar.....	54
Şekil 4.4. $N = 7, M = 8$ ve $\varepsilon = 2^{-2}$ değerleri için PLCM ile bulunan tam, yaklaşık ve iyileştirilmiş çözümlerinin karşılaştırılması.....	56
Şekil 4.5. (a)-(b) de PLCM ile $(N, M) = (14, 15)$, $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $\varepsilon = 2^{-6}$ değerleri için, mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması.....	57
Şekil 4.6. (a)-(b) farklı N, M ve ε değerleri için mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak maksimum hatalarının karşılaştırılması.....	59

Şekil 4.7. (a)-(b)-(c) de PLCM ile $\varepsilon = 2^{-2}$ değeri için mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak maksimum hatalarının karşılaştırılması..... 62



TABLÖLER DİZİNİ

Sayfa

Tablo 2.1. Pell ve Pell-Lucas Polinomlarının ilk beş teriminin karşılaştırılması.....	10
Tablo 3.1. $N = 5$ için PLCM ve TCM [4] ile elde edilen sayısal sonuçların karşılaştırılması.....	24
Tablo 3.2. Farklı N ve M değerleri için PLCM ile bulunan mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması.....	25
Tablo 3.3. PLCM ile elde edilen farklı N ve M değerleri için iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması.....	27
Tablo 3.4. PLCM ve RCCM [9] ile elde edilen sayısal sonuçların karşılaştırılması.....	28
Tablo 3.5. Tam çözüm ile yaklaşık çözümlerin farklı metotlar ile karşılaştırılması.....	30
Tablo 3.6. $N = 8$ için elde edilen mutlak hataların farklı metotlar ile karşılaştırılması.....	31
Tablo 3.7. PLCM ile farklı N ve M değerleri için elde edilen mutlak hatalar ve iyileştirilmiş mutlak hatalar.....	31
Tablo 3.8. PLCM ve farklı yöntemler ile elde edilen çözümlerin karşılaştırılması....	42
Tablo 3.9. PLCM, LCM ve DM yöntemleri ile elde edilen çözümlerin mutlak hataları	43
Tablo 3.10. PLCM ile yöntemiyle bulunan $N = 2$, $N = 6$ için yaklaşık çözümler ve mutlak hataları.....	44
Tablo 4.1. N , M ve ε ' nun bazı değerleri için PLCM ile elde edilen mutlak maksimum ve iyileştirilmiş mutlak maksimum hataların karşılaştırılması.....	51
Tablo 4.2. Farklı metotlar ile PLCM mutlak maksimum hataların karşılaştırılması.....	52
Tablo 4.3. Farklı N ve M değerleri için yaklaşık mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması.....	55

Tablo 4.4. Mutlak maksimum hataların farklı yöntemler ile karşılaştırılması..... 55

Tablo 4.5. Mutlak maksimum hataların farklı N ve M değerleri için
karşılaştırılması..... 58

Tablo 4.6. Farklı N , M ve ε değerleri için elde edilen mutlak maksimum
hatalarının karşılaştırılması..... 58

Tablo 4.7. Mutlak maksimum hataların farklı N ve M değerleri için
karşılaştırılması..... 60

Tablo 4.8. Farklı yöntemler ile bulunan mutlak maksimum hatalarının
karşılaştırılması..... 60

Tablo 4.9. PLCM ve ECM ile bulunan mutlak maksimum hatalarının
karşılaştırılması..... 61

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	III
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	V
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VII
TABLolar DİZİNİ.....	IX
İÇİNDEKİLER.....	XI
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR.....	10
2.1. Pell ve Pell-Lucas Polinomları Tanımı ve Rekürans Bağlılıları	10
3. MATERYAL ve METOT.....	13
3.1. Adi Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris Sıralama Yöntemi.....	13
3.1.1. Temel Matris Bağlılıları.....	14
3.1.2. Çözüm Yöntemi.....	18
3.1.3. Hata analizi ve Rezidüel Hata.....	20
3.1.4. Adi Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris Sıralama Yöntemi ile İlgili Örnekler.....	23
3.2. İkinci Dereceden Lineer Olmayan Terimler İçeren Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris Sıralama Yöntemi.....	33
3.2.1. Lineer Olmayan Terimler İçeren Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris Sıralama Yöntemi ile İlgili Örnekler.....	37
4. MÜHENDİSLİK PROBLEMLERİ.....	46
4.1. Sınır Tabakası Problemi.....	46
4.2. Hata analizi ve Rezidüel Hata.....	48
4.3. Sınır Tabakası Problemleri için Pell-Lucas Matris Sıralama Yöntemi İlgili Örnekler.....	50
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	63
KAYNAKLAR.....	64
ÖZGEÇMİŞ.....	69

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, doğadaki ve mühendislikteki birçok süreci matematiksel olarak modellemek için kullanılan temel araçlardır. Fiziksel sistemlerin dinamik davranışlarını, kimyasal reaksiyonların ilerleyişini, biyolojik popülasyon değişimlerini ve benzer olguları diferansiyel denklemler ile ifade etmek mümkündür. Bu denklemlerin çözülmesi, sistemlerin davranışını anlamak ve gelecekteki durumlarını öngörmek açısından büyük önem taşır. Ne var ki, özellikle doğrusal olmayan veya karmaşık yapıları birçok diferansiyel denklem, her zaman doğrudan analitik yöntemlerle çözülemeyebilir.

Tarihsel olarak, diferansiyel denklemlerin çözümü için çeşitli analitik yöntemler geliştirilmiştir. Ayrılabilir denklem tiplerinin doğrudan integrasyonu, lineer denklemlerde integrasyon çarpanı kullanımı, varyasyonel yöntemler ve Laplace dönüşümü tekniği, belirli sınıftaki denklemlerin kapalı formda çözümüne olanak tanıyan klasik yaklaşımlardandır. Ayrıca kuvvet serileri ve özel fonksiyonlar aracılığıyla da bazı diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerine ulaşmak mümkündür. Bununla birlikte bu yöntemlerin uygulanabilirliği, büyük ölçüde denklemin türüne, mertebesine ve karmaşıklık derecesine bağlıdır. Birçok pratik problemde türeyen diferansiyel denklem ya analitik olarak çözülebilir bir yapıda değildir ya da çözümü ifade eden kapalı form son derece karmaşıktır. Dolayısıyla, analitik yaklaşımlar değerli araçlar olmakla birlikte her durumda yeterli olmayabilir.

Analitik yöntemlerin yetersiz kaldığı durumlarda sayısal çözüm yöntemleri devreye girer. Sayısal yöntemler, diferansiyel denklemlerin çözümünü bilgisayar yardımıyla yaklaşık olarak hesaplama ilkesine dayanır ve günümüzde mühendislik ve fen bilimleri başta olmak üzere, pek çok bilim dalında yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. Örneğin, Euler ve Runge-Kutta gibi klasik iteratif yöntemler özellikle başlangıç değer problemlerinin çözümünde oldukça yaygındır. Sonlu fark yöntemleri, türevleri sonlu farklarla yaklaştırarak hem adi diferansiyel denklemleri hem de kısmi diferansiyel denklemleri çözmeye olanak tanır. Sonlu eleman yöntemleri ise çözüm bölgesini alt parçalara ayırıp, her parçada polinomlarla yaklaşım yaparak özellikle mühendislik uygulamalarında başarılı sonuçlar verir.

Bunların yanı sıra, spektral yöntemler ve polinom tabanlı yaklaşımlar son yıllarda giderek daha fazla dikkat çekmektedir. Örneğin, Chebyshev ve Legendre polinomları kullanılarak geliştirilen matris sıralama ve Tau yöntemleri, uygun

problemler için yüksek mertebede doğrulukla çözüm üretebilmektedir. Homotopi analiz yöntemi, diferansiyel dönüşüm tekniği ve dalgacık tabanlı yöntemler de modern sayısal yöntemler arasındadır. Sayısal yöntemlerin ortak noktası, analitik çözümü olmayan veya zor olan denklemlere sistematik bir yaklaşım sunmaları ve geniş bir problem yelpazesinde uygulanabilmeleridir.

Sayısal çözüm yöntemleri içerisinde, matris sıralama teknikleri olarak adlandırılan ve genellikle spektral yöntemler kapsamında değerlendirilen bir yaklaşım grubu öne çıkar. Bu tekniklerde, çözümü aranan diferansiyel denklem için bilinmeyen fonksiyon uygun bir temel fonksiyon ailesinin (çoğunlukla polinomların) sonlu bir lineer birleşimi olarak yaklaşık ifade edilir. Bu temel fonksiyonlar, tanım aralığı boyunca tanımlı ve yeterince düzgün polinomlar veya trigonometrik fonksiyonlar olabilir. Seçilen temel fonksiyonlar yardımıyla, çözüm fonksiyonu sonlu terimli bir seriyle yaklaşırlır. Bu yaklaşım, orijinal diferansiyel denklemin hatasını minimize etmek veya belirli noktalarda sıfırlamak üzere tasarlanır. Galerkin ve Tau gibi yöntemlerde ise rezidünün uygun ağırlıklarla integrallerinin sıfıra eşitlenmesi yoluyla benzer bir katsayı belirleme mantığı yürütülür. Tüm bu spektral yaklaşımların ortak noktası, sürekli bir problemi sonlu boyutlu bir cebirsel denklem sistemine indirgemeleridir. Gerçektende, matris sıralama tekniğinde, diferansiyel denklemin her terimi ve koşulu, seçilen temel fonksiyonların uygun kombinasyonları şeklinde yazılarak bir matris eşitliği elde edilir. Sonuçta orijinal problem, çözülmesi gereken bir matris denkleme dönüştürülmüş olur.

Bu yaklaşımın önemli avantajları bulunmaktadır. Öncelikle uygulama yapılacak problemin boyutunu indirgemektedir. Diferansiyel denklem problemi bir kere matris formuna dönüştürüldüğünde, orijinal problem sonsuz boyutlu bir fonksiyon uzayından (sürekli çözüm uzayı) sonlu boyutlu bir vektör uzayına indirgenmiş olur. Bu da çözüm sürecini, sayısız noktada diferansiyel denklem hesaplamaktan ziyade, sonlu sayıda bilinmeyi olan bir denklem sistemi çözmeye dönüştürür. Modern lineer cebir teknikleri sayesinde bu cebirsel sistem etkin bir şekilde çözülebilir. Elde edilen çözümler yüksek doğruluk değerine sahiptir. Az sayıda terimle, özellikle çözüm fonksiyonunun düzgün ve sürekli olduğu durumlarda, sonlu fark veya sonlu eleman gibi yöntemlere kıyasla daha hassas sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca, polinom tabanlı matris yöntemlerinin hesaplama adımları uygulamada daha basittir ve hassas sayısal değerler bilgisayarlarla kolaylıkla hesaplanabilir. Denklem matrisinin oluşturulması, büyük ölçüde polinom değerleri ve türevleri için önceden

bilinen formüllere dayanır. Bu sayede, karmaşık programlama gerektirmeden, matris çarpımları ve tersini alma işlemleri ile sonuç elde edilebilir. Yöntemin algoritması açık ve iteratif adımlardan oluştuğu için farklı problemlere uyarlamak da genellikle zahmetsizdir. Sonuç olarak, matris sıralama teknikleri nümerik analizde doğruluk ve verimlilik açısından önemli bir yere sahiptir. Özellikle yüksek mertebeden doğruluk gerektiren veya analitik çözüme ulaşamayan problemlerde, bu teknikler araştırmacılar tarafından sıklıkla tercih edilmektedir.

Ortogonal polinomlar, matematiksel analizlerde ve sayısal yöntemlerde sağladıkları kararlılık, doğruluk ve hesaplama kolaylığı nedeniyle yaygın olarak kullanılır. Bu polinomların ortogonallik özelliği karmaşık problemlerin çözümünü basitleştirir ve sayısal hataları minimize eder. Bu nedenle orthogonal polinomlar mühendislik, fizik ve matematikte vazgeçilmez araçlardır. Ortogonallik açısından incelendiğinde, Pell-Lucas polinomları klasik anlamda belirli bir ağırlık fonksiyonuna göre orthogonal bir takım oluşturmazlar. Yani Legendre polinomlarının $[-1,1]$ aralığında birim ağırlıkla orthogonal olması veya Chebyshev polinomlarının uygun ağırlık altında ortogonallığı gibi bir özellik, Pell-Lucas polinomları için doğal olarak mevcut değildir. Bu yönüyle Pell-Lucas ailesi, Legendre, Chebyshev, Hermite gibi klasik orthogonal polinom ailelerinden ayrılır. Ancak istenirse, uygun bir iç çarpım tanımlayıp Gram-Schmidt ortonormalleştirme süreci uygulanarak Pell-Lucas polinomlarından da ortonormal bir takım elde edilebilir. Bu genellikle sayısal çözüm uygulamaları için gerekli görülmez. Zira matris sıralama veya Tau gibi teknikler, polinomların orthogonal olmasından çok, diferansiyel denklem içerisindeki işlevine odaklanır.

Pell-Lucas polinomlarının diğer klasik polinomlara göre dikkat çekici bazı yönleri literatürde vurgulanmıştır. Öncelikle, tanımındaki basitlik ve kapalı formüllerinin varlığı sayesinde bu polinomların değerlerini ve katsayılarını hesaplamak oldukça rahattır. İteratif formül, sayısal algoritmalarla kolayca uygulanabilir ve polinomlar yüksek derecelere hızlıca üretilebilir. İkinci olarak, Pell-Lucas polinomları için türev ve integral işlemleri açık biçimde ifade edilebilir. Bu sayede, işlemsel matris adı verilen türev matrislerinin türetilmesi mümkündür. Bu işlemsel matrisler, diferansiyel denklem çözümüne girerken türev işlemlerinin doğrudan matris çarpımlarıyla temsilini sağlar ve yönteminin uygulanmasını kolaylaştırır. Son olarak, Pell-Lucas polinomlarının davranışları ve büyüme

karakteristikleri iyi bir şekilde ortaya koyulmuştur. Bu polinomlar, özellikle $[-1,1]$ gibi sınırlı aralıklarda makul büyüklükte değerlere sahip olup, sayısal yaklaşım sırasında aşırı salınımlar üretmezler. Tüm bu özellikler, Pell-Lucas polinomlarını, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde kullanılabilecek güvenilir ve etkin bir temel fonksiyon seçeneği haline getirmektedir. Klasik polinom tabanlı yöntemlere alternatif veya onları tamamlayıcı bir yaklaşım olarak Pell-Lucas polinomlarının tercih edilmesi, literatürde son yıllarda çeşitli başarılı örneklerle desteklenmiştir.

Pell-Lucas matris sıralama yöntemi ile polinom tabanlı spektral çözümler, farklı disiplinlerde geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu yöntem, mühendislik alanında, mekanik titreşimler ve yapısal analiz gibi konularda ortaya çıkan, Duffing osilatörü gibi doğrusal olmayan salınım problemlerine başarıyla uygulanabilir. Örneğin, bir köprünün rüzgâr etkisi altındaki titreşimlerini tanımlayan denklem veya bir binanın deprem sırasındaki salınımını veren model, çoğunlukla doğrusal olmayan terimler içerir. Pell-Lucas polinomları ile yapılan bir yaklaşım, bu sistemlerin davranışını hızlı ve isabetli bir şekilde çözümlemeye imkân tanır. Fizik alanında da, kaotik davranış sergileyebilen sarkaç hareketi, çift sarkaç sistemleri veya astrofizikte karşılaşılan yörünge denklemleri gibi problemler doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerle modellenir. Bu gibi durumlarda Pell-Lucas yönteminin kullanılması, sistemin uzun vadeli davranışının yüksek doğrulukla öngörülmesine yardımcı olabilir. Biyoloji ve ekoloji alanında, etkileşimli türlerin popülasyon dinamiklerini tanımlayan av-avcı modelleri veya lojistik büyüme denklemi gibi salgın hastalık yayılım modelleri genellikle analitik çözümü zor olabilen doğrusal olmayan diferansiyel denklemler içerir. Pell-Lucas matris sıralama yöntemi bu tür modellerin de sayısal çözümünde kullanılabilir. Örneğin, iki türün zaman içindeki popülasyon değişimini veren bir modelde bu yöntem uygulanarak, farklı başlangıç koşulları veya parametre değerleri için popülasyonların nasıl evrileceği hassas biçimde hesaplanabilir. Benzer şekilde, bir epidemiyolojik modelde enfekte kişi sayısının zamana bağlı değişimini veren doğrusal olmayan denklemler Pell-Lucas polinomları ile çözüldüğünde, salgının zirve noktası veya sönümlenme süresi gibi kritik bilgiler elde edilebilir. Aynı şekilde, kimya mühendisliğinde enzim kinetiği modelleri gibi reaksiyon kinetiği denklemleri veya ekonomi alanında karmaşık finansal süreçleri tanımlayan diferansiyel denklemler de bu yaklaşımın potansiyel uygulama alanlarıdır. Bir kimyasal reaksiyonun hız denkleminde sıcaklık ve yoğunlaşma etkilerini içeren

doğrusal olmayan terimler, Pell-Lucas polinomları ile sayısal olarak çözümlenebilir. Ekonomide, piyasa dinamiklerini veya nüfus-ekonomi ilişkilerini modelleyen denklemlerde beliren karışık terimler, benzer şekilde bu yöntemle incelenebilir. Kısacası, doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin ortaya çıktığı her alanda, Pell-Lucas polinomlarına dayalı matris yönteminin potansiyel bir uygulaması bulunmaktadır. Mühendislikten fiziğe, biyolojiden finansal modellere kadar pek çok sistem, bu yöntemle analiz edilebilmekte ve literatürde bu kapsamda başarılı örnekler rapor edilmektedir.

Literatürde, Pell-Lucas polinomları dışında birçok polinom veya fonksiyon tabanlı spektral yöntem benzer amaçlarla kullanılmıştır. Örneğin Chebyshev ve Legendre polinomları ile geliştirilen matris sıralama yöntemleri, Fourier serilerine dayalı spektral çözümler ya da B-spline ve dalgacık fonksiyonları kullanan yaklaşımlar, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde yaygın şekilde incelenmiş ve uygulanmıştır. Pell-Lucas matris sıralama yönteminin, bu mevcut yöntemlerle karşılaştırıldığında ne tür farklılıklar veya üstünlükler sunduğu önemli bir araştırma konusudur. Chebyshev polinomları yüksek yakınsama hızı ve iyi koşullandırılmış matris yapıları ile bilinirken, Pell-Lucas polinomlarının benzer bir doğruluk ve stabilite sağlayıp sağlamadığı ya da belli problem tiplerinde daha avantajlı olup olmadığı incelenmelidir. Aynı şekilde, Legendre veya Hermite polinomlarına dayalı yöntemlerle Pell-Lucas yaklaşımı arasında, özellikle doğrusal olmayan problemler veya belirli sınır-değer koşulları altında performans farkları olup olmadığı araştırmaya değerdir.

Literatürde pek çok yazarın, diferansiyel denklemlerin çözümünde farklı tipte özel polinoma dayalı matris sıralama yöntemine başvurduğu görülmektedir. Bu yaklaşımın temelini oluşturan ise, Sezer'in [1] 1984 yılında yayımladığı "Parabolik Kısmi Diferansiyel Denklemlerle ilgili Cauchy Problemlerinin Çözüm Yöntemleri Üzerine" adlı çalışması olmuştur. Çalışmada iki değişkenli lineer parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için iki yöntem açıklanmıştır. Birinci yöntemde parabolik denklem ile ilgili Cauchy problemi için bir Green fonksiyonu tespit edilmiş, çözüm bu fonksiyon cinsinden bulunmuştur. İkinci yöntemde ise, bahsedilen denklemin iki değişkenli Chebyshev serisi cinsinden yaklaşık çözümü tartışılmıştır. Sezer [2], sonraki çalışmasında, belirli sınıftan Fredholm integral denklemlerin çözümlerine Taylor matris sıralama yöntemini uygulamıştır. Bu yöntem, integral denklemlerin çözümleri için Kanwal ve Liu [3]

tarafından verilen Taylor seri yaklaşımına dayandırılmıştır. Sezer ve arkadaşları, bu çalışmada Taylor matris sıralama yöntemini birçok farklı tipte diferansiyel denkleme uygulamışlardır. Karamete ve Sezer [4], lineer integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerini Taylor matris sıralama yöntemiyle çözerek, literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırmışlardır. Gülsu ve Sezer [5], yüksek mertebeden lineer Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerini Taylor matris sıralama yöntemi ile araştırmışlardır. Yalçınbaş ve Sezer [6], karışık koşullar altında değişken katsayılı yüksek mertebeden lineer Fredholm-Volterra integral fark denklemlerinin çözümünü bulmak için Taylor sıralama yöntemini kullanmışlar ve çözümü herhangi bir noktaya yakın Taylor polinomu cinsinden elde etmişlerdir. Sezer ve ark. [7], eliptik bölgelerde tanımlı yüksek mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklemlerin çözümleri için Taylor tabanlı matris sıralama yöntemini kullanmışlardır. Gülsu ve Sezer [8], aynı yöntemi sabit ve değişken katsayılı pantograf denklemlerinin yaklaşık çözümleri için de kullanmışlardır. Yine Sezer ve ark. [9], değişken katsayılı yüksek mertebeden doğrusal adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü rasyonel Chebyshev tau yöntemi ve Taylor-Chebyshev yöntemleri ile elde etmişlerdir. Ayrıca değişken katsayılı yüksek mertebeden lineer diferansiyel fark denklem sistemlerinin çözümleri [10], gecikmeli integro-diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri [11], gecikme terimli kesirli Riccati diferansiyel denkleminin çözümleri [12], Taylor sıralama metodu ile elde edilmiştir. Ayrıca pek çok özel denklemin çözümleri de Taylor sıralama yöntemi ile etkili bir şekilde bulunmuştur. Uygulama yapılan bazı özel denklemlerden, Bayley-Torvik denkleminin [13], Lane-Emden tipi diferansiyel denklemlerinin [14], Schrödinger denklemlerinin [15], yaklaşık çözümleri bu yöntem ile elde edilmiştir. Deniz ve ark. [16], ise adi diferansiyel denklemlerde başlangıç değer problemleri için Taylor sıralama yönteminin kararlılık analizini inceleyerek, yöntemin kararlılığını göstermişlerdir. Ayrıca son yıllarda yöntem, birçok farklı alanda uygulama fırsatı bulmuştur. Yapılan bir çalışmada lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri Taylor sıralama yöntemi ile Covid-19 salgınının matematiksel modeline uygulanmıştır [17]. Çelik ve Uçar [18], lojistik büyüme modelinin analizini ve sayısal sonuçlarını Taylor matris sıralama yöntemi ile etkili bir şekilde sunmuştur.

Özel polinomlar kullanılarak denklemlerin matris formuna dönüştürülüp, yaklaşık çözümleri incelenen pek çok araştırmanın temelini oluşturan Taylor matris sıralama yöntemi ile ilgili literatürdeki bazı çalışmalar örneklendirilmiştir. Taylor

matris sıralama yöntemi diğer çalışmaların temelini oluşturmaktadır. Bundan sonra kullanılan özel polinomların birçoğunda geçiş matrisi olarak standart taban yani Taylor tabanı kullanılarak ve geçiş matrisi oluşturularak hesaplamalar yapılmıştır. Bazı çalışmalarda ise, dönüştürme işlemi yapılmayıp, kullanılan özel polinomun kendi tabanı ile geçiş matrisleri oluşturularak hesaplamalar yapılmıştır. Literatür incelendiğinde özel polinomlar ile yapılan birçok çalışma dikkat çekmektedir. Bahsedilen bu özel polinomlardan Euler, Bernoulli, Bernstein, Bessel, Hermite, Lagrange, Jacobi, Dickson, Laguerre, Legendre, Müntz-Legendre, Bell, Chelyshkov, Chebyshev, Rational-Chebyshev, Boubaker, Gegenbauer, Fibonacci, Matching, Pell, Lucas ve Pell-Lucas polinomları yaklaşık çözüm yapılırken kullanılan etkili polinomlardır. Bu polinomların kullanım alanları ve uygulandığı problemleri Çevik ve ark. [19] çalışmalarında detaylı bir şekilde ele almışlardır.

Bu tez çalışmasında kullanılacak olan matris sıralama yöntemi ise, Horadam [20], polinomlarının özel bir hali olan Pell-Lucas polinomlarına dayalıdır. Pell-Lucas polinomları ve standart taban olan Taylor tabanı kullanılarak uygulamalar yapılacaktır. Pell-Lucas polinomları için literatür çalışmaları incelendiğinde ilk çalışma Şahin ve Sezer [21] tarafından, hibrit gecikmeli diferansiyel denklemler için yapılmıştır. Sonrasında ise, Yüzbaşı ve Yıldırım [22] Pell-Lucas matris sıralama yöntemi ile yüksek mertebeden lineer Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerini ve rezidüel hata analizini sunmuşlardır. Yazarlar [23], başka bir çalışmada da, tek ve etkileşen türler için iki popülasyon modelini çözmek için matris sıralama yöntemini kullanmışlardır. Bu kapsamda, lojistik büyüme ve av-avcı modeli, Pell-Lucas matris sıralama yöntemi ile sayısal olarak çözülmüştür. Ayrıca, ikinci tip lineer olmayan Abel diferansiyel denklemler [24], parabolik tip kısmi Volterra integro-diferansiyel denklemler [25], ikinci mertebeden lineer olmayan Lane-Emden tipi pantograf diferansiyel denklemler [26], değişken gecikmeli ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler [27], Pell-Lucas matris sıralama yöntemi ile çözülmüştür. Lukonde ve ark. [28], Pell-Lucas matris sıralama yöntemini kullanarak ikinci çeşit Volterra integral denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmişlerdir. Yüzbaşı ve Yıldırım [29], hiperbolik telgraf kısmi diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerini Pell-Lucas polinomları yardımıyla cebirsel denklem sistemine indirgemiş ve hata analizi yapmışlardır. Yüzbaşı ve Yıldırım [30] yöntemi, Türkiye'deki Covid-19 pandemisinin evrimi hakkında yaptıkları çalışmada da kullanmışlardır. Virüsün modellenmesi lineer olmayan bir diferansiyel denklem

sistemi ile ele alınmış ve yaklaşık çözümleri Pell-Lucas polinomlarına dayandırılarak çözülmüştür. Son yıllarda Yüzbaşı ve Yıldırım'ın [31,32] yaptıkları çalışmalar ile HIV/ AIDS virüslerinin kesirli diferansiyel denklem modellenmesi, Covid-19'un SIRD modelinin yaklaşık çözümleri ve kesirli Covid-19 modelinin sayısal çözümleri [33], Pell-Lucas matris sıralama yöntemiyle incelenmiş ve etkili sonuçlar bulunmuştur.

Ayrıca bu tez çalışmasında sınır tabakası problemi de Pell-Lucas matris sıralama metodu ile ele alınacaktır. Bir akışkanın, örneğin hava veya su, katı bir yüzey boyunca aktığı durumda, akışkanın hızı katı yüzeye yakın bölgede hızlı değişir. Bu ince bölgeye sınır tabakası denir. Bu kavram ilk olarak Ludwig Prandtl tarafından 1904 yılında ortaya atılmıştır. Prandtl, yüksek Reynolds sayılı akışlarda akışkanın ince bir tabakasının yüzeye yakın kısmında viskoz etkilerin baskın olduğunu gözlemlemiş ve bu bölge için ayrı bir analiz gerektiğini belirtmiştir. Küçük bir parametre içeren tekil pertürbe diferansiyel denklemler, akışkanlar dinamiği, akışkanlar mekaniği, aerodinamik elastisite, manyeto-hidrodinamik, oşinogafi vb. gibi fiziksel olayların modellenmesinde kullanılmıştır. Sınır tabaka problemlerinin bir türü olan tekil pertürbasyonlu sınır tabakası problemleri, genellikle küçük bir pozitif parametreye bağlıdır; bu nedenle problemlerin çözümü, alanın bazı kısımlarında yavaş değişirken bazı kısımlarında hızla değişir. Ayrıca bu tip problemlerin çözüm fonksiyonu sınır noktalarına yakın yerlerde hızla değişir. Bu tür problemlerin çözümü için asimptotik olarak genişleme yöntemleri vardır. Fakat iç ve dış bölgelerde uygun asimptotik açılımları bulmak zor olduğundan tekil olarak pertürbe edilmiş sınır değer problemlerini çözmek için daha basit ve etkili hesaplama yöntemlerine ihtiyaç vardır. Doğru matematiksel modelleme ve sayısal yöntem seçilirse bu zorluklar aşılmaktadır. Son yıllarda söz edilen problemlerin çözümü için sonlu fark yöntemi [34], Bessel matris sıralama yöntemi [35], yedinci dereceden sayısal yöntem [36], B-spline matris sıralama yöntemi [37], Laguerre matris sıralama yöntemi [38], Euler matris sıralama yöntemi [39], Chebyshev yöntemi [40], ikinci dereceden spline sonlu fark yöntemi [41] gibi çeşitli yöntemlerle incelenen makaleler yayınlanmıştır.

Bu çalışmada, önerilen Pell-Lucas matris sıralama yöntemi ile elde edilen sonuçlar literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Bu sayede, yöntemin güçlü ve zayıf yönleri sayısal verilerle ortaya koyulmuş, polinom tabanlı bu yöntemin avantajları vurgulanmıştır.

Ayrıca çalışmada, doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için Pell-Lucas matris sıralama yönteminin, temel yapısı ve literatürdeki yeri kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. Öncelikle diferansiyel denklemlerin analitik ve sayısal çözüm yöntemlerine genel bir bakış sunulmuş, sayısal yöntemler içinde matris sıralama tekniklerinin neden önemli olduğu açıklanmıştır. Ardından Pell-Lucas polinomlarının özellikleri, diğer polinomlara göre farkları ve sayısal yöntemlerde kullanılmalarının avantajları tartışılmıştır. Devamında, Pell-Lucas matris sıralama yönteminin işleyişi ve bu yöntemin doğrusal olmayan denklemlere uygulanması süreci detaylandırılmış, yöntemin sağladığı avantajlar ve uygulama alanları örneklerle belirtilmiştir.

Tezin devam eden bölümlerinde, burada ortaya konan çerçeve daha derinlemesine incelenecektir. Pell-Lucas polinomlarının matematiksel özellikleri ve türev operasyon matrisleri formüle edilecektir. Pell-Lucas matris sıralama yönteminin teorik temelleri ve yakınsama analizleri sunulacaktır. Yöntem çeşitli lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem ve tekil pertürbe diferansiyel denklem için uygulanarak nümerik sonuçlar elde edilecek ve bu sonuçlar diğer yöntemlerle karşılaştırılacaktır. Böylece, Pell-Lucas matris sıralama yönteminin kuramsal ve pratik yönleriyle bütüncül bir değerlendirmesi yapılmış olacaktır.

Bu tez çalışması, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümüne yönelik olarak literatürde sınırlı düzeyde ele alınmış bir yaklaşımı, Pell-Lucas polinomlarına dayalı matris sıralama yöntemi aracılığıyla sistematik biçimde sunması açısından özgün bir katkı sağlamaktadır. Mevcut literatürde genellikle klasik çözüm yöntemleri Bessel, Hermite, Lagrange, Jacobi, Laguerre, Legendre, Müntz-Legendre, Chelyshkov, Chebyshev, Rational-Chebyshev, Boubaker ve Gegenbaur gibi sık kullanılan ortogonal polinomlara dayalı algoritmalar tercih edilmekteyken, bu çalışmada Pell-Lucas polinomlarının yapısal özellikleri temel alınarak alternatif bir sıralama algoritması geliştirilmiştir. Önerilen yöntem, özellikle yüksek mertebeden denklemlerde hem işlem süresi hem de çözüm doğruluğu bakımından avantajlar sunmakta ve polinom tabanlı sayısal çözüm teknikleri literatürüne yeni bir yaklaşım kazandırmaktadır. Bu yönüyle tez, hem kuramsal hem de uygulamalı matematik alanlarına özgün ve katkı değeri yüksek bir yöntem sunmaktadır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Pell ve Pell-Lucas Polinomları Tanımı ve Rekürans Bağlılıları

Pell ve Pell-Lucas polinomları sırasıyla $P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ ile gösterilmektedir [20, 42, 43] . Bu polinomlar için rekürans bağıntıları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$P_n(x) = 2x P_{n-1}(x) + P_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \quad P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = 1, \quad (2.1)$$

ve

$$Q_n(x) = 2x Q_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \quad Q_0(x) = 2, \quad Q_1(x) = 2x. \quad (2.2)$$

Bazı n değerleri için Pell ve Pell-Lucas polinomlarının açık gösterimleri Tablo 2.1 deki gibidir.

Tablo 2.1. Pell ve Pell-Lucas polinomlarının ilk beş teriminin karşılaştırılması.

n	$P_n(x)$	$Q_n(x)$
0	0	2
1	1	$2x$
2	$2x$	$(2x)^2 + 2$
3	$(2x)^2 + 1$	$(2x)^3 + 3(2x)$
4	$(2x)^3 + 2(2x)$	$(2x)^4 + 4(2x)^2 + 2$

Dolayısıyla (2.1) ve (2.2) bağıntıları kullanılarak Pell ve Pell-Lucas polinomları arasında

$$Q_n(x) = P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x), \quad (2.3)$$

formülü elde edilir. Ayrıca Pell, Lucas, Pell-Lucas ve Fibonacci polinomları $x=1$ ve $x=\frac{1}{2}$ değerleri için,

- $x=1$ ise, $P_n(1) = P_n$, n . Pell sayısı,

- $x=1$ ise, $Q_n(1)=Q_n$, n . Pell-Lucas sayısı,
- $x=\frac{1}{2}$ ise, $P_n(1/2)=F_n$, n . Fibonacci sayısı,
- $x=\frac{1}{2}$ ise, $Q_n(1/2)=L_n$, n . Lucas sayısı

biçimindedir. Aynı zamanda, Fibonacci polinomu

$$P_n(x/2)=F_n(x)$$

ve Lucas polinomu

$$Q_n(x/2)=L_n(x)$$

biçiminde tanımlanır. Bu polinomlardan Pell ve Pell-Lucas polinomları için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x)t^n = (1-2xt-t^2)^{-1} \quad (2.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}(x)t^n = (2x+2t)(1-2xt-t^2)^{-1}, \quad (2.5)$$

üreteç fonksiyonları tanımlanır. Buradan, herhangi bir $n \geq 2$ tamsayısı için Pell ve Pell-Lucas polinomlarının üreteç fonksiyonlarından başlayarak ve standart metotları kullanarak $P_n(x)$ ve $Q_n(x)$ polinomlarının açık bağıntıları sırasıyla,

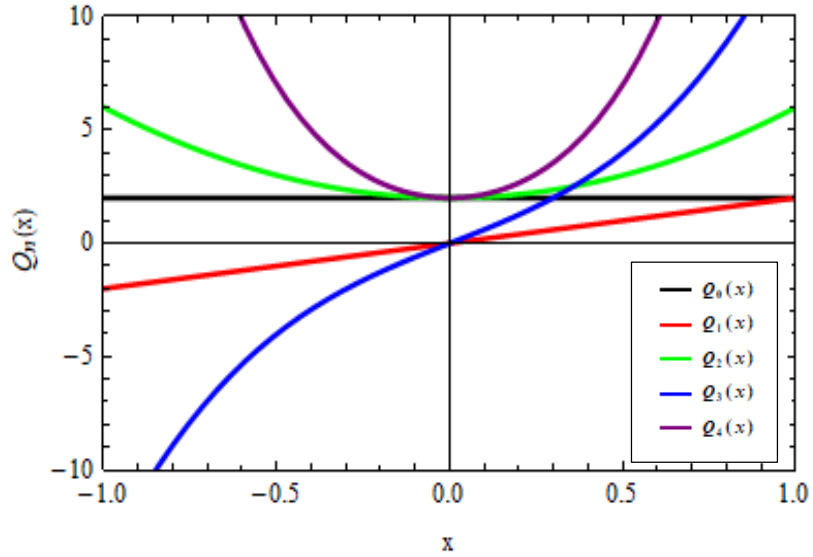
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k} (2x)^{n-2k-1}, \quad (2.6)$$

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}, \quad (2.7)$$

biçiminde verilir. (2.7) ile gösterilen Pell-Lucas polinomu bazı n değerleri için

$$\begin{aligned}
Q_0(x) &= 2 \\
Q_1(x) &= 2x \\
Q_2(x) &= (2x)^2 + 2 \\
Q_3(x) &= (2x)^3 + 3(2x) \\
Q_4(x) &= (2x)^4 + 4(2x) + 2 \\
Q_5(x) &= (2x)^5 + 5(2x)^3 + 5(2x) \\
Q_6(x) &= (2x)^6 + 6(2x)^4 + 9(2x)^2 + 2 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.8}$$

biçimindedir. Pell-Lucas polinomlarının bazı n değerleri için grafiği ise Şekil 2.1’ de görülmektedir.



Şekil 2.1. Pell-Lucas polinomunun ilk beş teriminin grafiği

3. MATERYAL ve METOT

Bu kısımda, Pell-Lucas polinomlarına dayalı matris sıralama metodu tanıtılacak ve çeşitli problemlere uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar incelenecektir. Yöntem yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemlere, tekil olarak pertürbe edilmiş ikinci mertebeden sınır değer problemlerine uygulanacaktır. Uygulama sonucu bulunan yaklaşık çözümler, tablo ve grafikler yardımıyla tam çözüm ile karşılaştırılacaktır. Ayrıca ele alınan problemlerin hata analizleri ile beraber iyileştirilmiş çözümleri incelenecektir.

3.1. Adi Diferansiyel Denklemler için Pell-Lucas Matris Sıralama Yöntemi

$y(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $P_k(x)$ ve $f(x)$, $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı bilinen sürekli fonksiyonlar ve a_{kj} , b_{kj} , λ_j sabitler olmak üzere, m . mertebeden

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.1)$$

lineer adi diferansiyel denklemin,

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} y^{(k)}(a) + b_{kj} y^{(k)}(b)) = \lambda_j; \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.2)$$

karışık koşullar altındaki yaklaşık çözümlerini elde etmek için, Pell-Lucas polinomlarını ve sıralama noktalarını kullanarak yöntemin çözüm adımlarını göz önüne alalım. $y(x)$ bilinmeyen fonksiyonun çözümü, kesilmiş Pell-Lucas polinomu şeklinde aranacaktır. Bu amaçla, $Q_n(x)$ polinomları Pell-Lucas polinomlarını ve a_n , $n = 0, 1, \dots, N$ katsayıları bilinmeyen Pell-Lucas katsayılarını temsil etmek üzere, (3.1) denkleminin, (3.2) ile tanımlanan koşulu altında yaklaşık çözümünü, kesilmiş Pell-Lucas serisi

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + \dots + a_N Q_N(x) \quad (3.3)$$

biçiminde kabul edilir.

3.1.1 Temel Matris Bağıntıları

(2.7) ile tanımlanan Pell-Lucas polinomlarının matris bağıntısı

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} 2^{n-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} \quad (3.4)$$

ile elde edilecektir. Burada n ' nin bazı değerleri için Pell-Lucas polinomlarının matris bağıntısı:

$$n=0 \text{ için; } Q_0(x) = 2$$

$$n=1 \text{ için; } Q_1(x) = \sum_{k=0}^0 2^{1-2k} \frac{1}{1-k} \binom{1-k}{k} x^{1-2k}$$

$$Q_1(x) = 2^1 \frac{1}{1} \binom{1}{0} x^1$$

$$n=2 \text{ için; } Q_2(x) = \sum_{k=0}^1 2^{2-2k} \frac{2}{2-k} \binom{2-k}{k} x^{2-2k}$$

$$Q_2(x) = 2^2 \frac{2}{2} \binom{2}{0} x^2 + 2^0 \frac{2}{1} \binom{1}{1} x^0$$

$$n=3 \text{ için; } Q_3(x) = \sum_{k=0}^1 2^{3-2k} \frac{3}{3-k} \binom{3-k}{k} x^{3-2k}$$

$$Q_3(x) = 2^3 \frac{3}{3} \binom{3}{0} x^3 + 2^1 \frac{3}{2} \binom{2}{1} x^1$$

$$n=4 \text{ için; } Q_4(x) = \sum_{k=0}^2 2^{4-2k} \frac{4}{4-k} \binom{4-k}{k} x^{4-2k}$$

$$Q_4(x) = 2^4 \frac{4}{4} \binom{4}{0} x^4 + 2^2 \frac{4}{3} \binom{3}{1} x^2 + 2^0 \frac{4}{2} \binom{2}{2} x^0$$

$$n=5 \text{ için; } Q_5(x) = \sum_{k=0}^2 2^{5-2k} \frac{5}{5-k} \binom{5-k}{k} x^{5-2k}$$

$$Q_5(x) = 2^5 \frac{5}{5} \binom{5}{0} x^5 + 2^3 \frac{5}{4} \binom{4}{1} x^3 + 2^1 \frac{5}{3} \binom{3}{2} x^1$$

$$n=6 \text{ için; } Q_6(x) = \sum_{k=0}^3 2^{6-2k} \frac{6}{6-k} \binom{6-k}{k} x^{6-2k}$$

$$Q_6(x) = 2^6 \frac{6}{6} \binom{6}{0} x^6 + 2^4 \frac{6}{4} \binom{5}{1} x^4 + 2^2 \frac{6}{4} \binom{4}{2} x^2 + 2^0 \frac{6}{3} \binom{3}{3} x^0,$$

biçiminde elde edilir. Bu takdirde, (3.4)' den $n = 0, 1, \dots, N$ için;

N tek ise,

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^1 \frac{1}{1} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2^0 \frac{2}{1} \binom{1}{1} & 0 & 2^2 \frac{2}{2} \binom{2}{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^1 \frac{3}{2} \binom{2}{1} & 0 & 2^3 \frac{3}{3} \binom{3}{0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2^1 \frac{N}{N+1} \binom{\frac{N+1}{2}}{\frac{N-1}{2}} & 0 & 2^3 \frac{N}{N+3} \binom{\frac{N+3}{2}}{\frac{N-3}{2}} & \dots & 2^N \frac{N}{N} \binom{N}{0} \end{bmatrix}$$

N çift ise,

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^1 \frac{1}{1} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2^0 \frac{2}{1} \binom{1}{1} & 0 & 2^2 \frac{2}{2} \binom{2}{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^1 \frac{3}{2} \binom{2}{1} & 0 & 2^3 \frac{3}{3} \binom{3}{0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^0 \frac{N}{N} \binom{\frac{N}{2}}{\frac{N}{2}} & 0 & 2^2 \frac{N}{N+2} \binom{\frac{N+2}{2}}{\frac{N-2}{2}} & 0 & \dots & 2^N \frac{N}{N} \binom{N}{0} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} Q_0(x) \\ Q_1(x) \\ Q_2(x) \\ \vdots \\ N \text{ tek}; Q_N(x) \\ N \text{ çift}; Q_N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^1 \frac{1}{1} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2^0 \frac{2}{1} \binom{1}{1} & 0 & 2^2 \frac{2}{2} \binom{2}{0} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & 0 \\ 0 & 2^1 \frac{3}{2} \binom{2}{1} & 0 & 2^3 \frac{3}{3} \binom{3}{0} & \dots & \\ & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 2^1 \frac{N}{N+1} \frac{2}{2} \binom{\frac{N+1}{2}}{\frac{N-1}{2}} & 0 & 2^3 \frac{N}{N+3} \frac{2}{2} \binom{\frac{N+3}{2}}{\frac{N-3}{2}} & \dots & 2^N \frac{N}{N} \binom{N}{0} \\ 2^0 \frac{N}{N} \frac{2}{2} \binom{\frac{N}{2}}{\frac{N}{2}} & 0 & 2^2 \frac{N}{N+2} \frac{2}{2} \binom{\frac{N+2}{2}}{\frac{N-2}{2}} & 0 & \dots & 2^N \frac{N}{N} \binom{N}{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \\ x^N \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{Q}^T} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{L}^T} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{x}^T}$

matris denklemi kurulur. Burada,

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^N], \quad \mathbf{Q}(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad Q_2(x) \quad \dots \quad Q_N(x)]$$

biçimindedir. Bu denklem kısaca,

$$\mathbf{Q}^T(x) = \mathbf{L}^T \mathbf{X}^T(x) \Rightarrow \mathbf{Q}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{L}, \quad (3.5)$$

biçiminde yazılır. Buna göre, çözüm matrisi

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + \dots + a_N Q_N(x), \quad (3.6)$$

$$y_N(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad Q_2(x) \quad \dots \quad Q_N(x)] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_N]^T, \quad (3.8)$$

$$y_N(x) = \mathbf{Q}(x) \mathbf{A}, \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.5) bağıntısı, (3.9) da yerine yazılırsa

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \mathbf{A}, \quad (3.10)$$

bulunur. Bu takdirde, $y(x)$ ' in türevleri

$$\begin{aligned} y'(x) &\cong y_N'(x) = \mathbf{X}'(x) \mathbf{L} \mathbf{A}, \\ y''(x) &\cong y_N''(x) = \mathbf{X}''(x) \mathbf{L} \mathbf{A}, \\ y'''(x) &\cong y_N'''(x) = \mathbf{X}'''(x) \mathbf{L} \mathbf{A}, \\ &\vdots \\ y^{(k)}(x) &\cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x) \mathbf{L} \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

biçiminde olup, böylece çözümün türev matrisi

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x) \mathbf{L} \mathbf{A}, \quad (3.12)$$

olarak elde edilir. Buna göre, $\mathbf{X}^{(k)}(x)$ türev matrisini $\mathbf{X}(x)$ taban matrisi formunda yazmak için aşağıdaki adımlar uygulanırsa,

$$\mathbf{X}'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & \cdots & Nx^{N-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B},$$

$$\mathbf{X}''(x) = \mathbf{X}'(x) \mathbf{B} = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2,$$

olup, benzer şekilde devam edilirse

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k, \quad (3.13)$$

bulunur. Burada $\mathbf{B}$ matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

biçiminde tanımlıdır. (3.13) bağıntısı (3.12)' de yerine yazılırsa

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k\mathbf{L}\mathbf{A}, \quad (3.14)$$

elde edilir [20, 21].

3.1.2. Çözüm Yöntemi

(3.14) matris bağıntısı (3.1) denkleminde yerleştirilirse;

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x), \quad (3.15)$$

matris denklemi bulunur. Buna göre,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i; \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.16)$$

ile tanımlı standart sıralama noktaları (3.15) matris denkleminde yerine yazılır, oluşturulan matris denklem sistemi düzenlenirse, (3.1) denklemi için

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{B}^k \mathbf{L} \mathbf{A} = \mathbf{F}, \quad (3.17)$$

temel matris denklemi elde edilir. Burada $\mathbf{P}_k$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{A}$ matrisleri ise

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1},$$

ile verilir. Böylece, (3.17) matris denklemi

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{F}, \quad (3.18)$$

biçiminde kompakt formda yazılabilir. (3.18) matris denklemi açıldığında,

$$[\mathbf{W} | \mathbf{F}] = \left[\begin{array}{cccc|c} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & f(x_N) \end{array} \right], \quad (3.19)$$

haline indirgenir. (3.2) ile verilen koşullara karşılık gelen matris

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} \mathbf{X}(a) + b_{kj} \mathbf{X}(b)) \mathbf{B}^k \mathbf{L}}_{\mathbf{U}_j} \mathbf{A} = \lambda_j; \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.20)$$

olarak yazılır. Bu takdirde,

$$\mathbf{U}_j \mathbf{A} = \lambda_j \Leftrightarrow [\mathbf{U}_j | \lambda_j]; \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow \mathbf{U}_j = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \cdots \quad u_{jN}], \quad (3.22)$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_0 \quad \mathbf{U}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{U}_{m-1}]^T \text{ ve } \boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_{m-1}]^T, \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.20) matris bağıntısı açıldığında,

$$[\mathbf{U}|\boldsymbol{\lambda}] = \left[\begin{array}{cccc|c} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & \lambda_{m-1} \end{array} \right], \quad (3.24)$$

formunda arttırılmış matris biçiminde yazılabilir. (3.19) ile tanımlanan $[\mathbf{W}|\mathbf{F}]$ matrisinin herhangi m satırı silinip yerine (3.24) ile tanımlanan $[\mathbf{U}|\boldsymbol{\lambda}]$ koşullar matrisi yazılarak, $[\tilde{\mathbf{W}}|\tilde{\mathbf{F}}]$ yeni arttırılmış matrisi elde edilir. Burada bulduğumuz yeni arttırılmış matris çözülerek, istenilen çözüm elde edilmiş olur. Bahsedilen bu yeni arttırılmış matris açık olarak yazıldığında

$$[\tilde{\mathbf{W}}|\tilde{\mathbf{F}}] = \left[\begin{array}{cccc|c} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & \lambda_{m-1} \end{array} \right], \quad (3.25)$$

bulunur. Ayrıca, $\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{F}}$ ise $\tilde{\mathbf{W}}$ matrisinin tersinir olmasını gerektiren şart $\text{rank}[\tilde{\mathbf{W}}] = N+1 = \text{rank}[\tilde{\mathbf{W}}|\tilde{\mathbf{F}}]$ olmasıdır. Yani $\tilde{\mathbf{W}}$ matrisinin tersi varsa,

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{W}}^{-1}\tilde{\mathbf{F}}, \quad (3.26)$$

olarak yazılabilir. Böylece, aranan Pell-Lucas polinomlarının katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T, \quad (3.27)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak, $\mathbf{A}$ bilinmeyen katsayılar matrisinin çözümü tek olarak elde edilmiş olur [21, 43].

3.1.3. Hata Analizi ve Rezidüel Hata

Fizik, matematik, mekanik ve mühendislik gibi alanlarda önemli uygulamalara sahip olan diferansiyel ve integro-diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri her zaman kolay elde edilemediğinden sayısal yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Özellikle lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümlerine ulaşamadığımızda ya da elle işlem yapmanın zorlaştığı durumlarda en iyi yaklaşık çözümler veren yöntemler göz önüne alınmaktadır. Uygulanan sayısal yöntemlerle yaklaşık çözümler elde edildiğinden belli bir hataya sahip olacaktır. Bu takdirde, yaklaşık çözümlerin doğruluğunu değerlendirmek ve hata sınırlarını belirlemek için hatanın üst sınırı tahmin edilebilir. Ayrıca yaklaşık çözümlerinin doğruluğunu değerlendirmek ve hata sınırlarını belirlemek amacıyla, rezidüel (kalıntı) fonksiyonuna dayalı bir hata analizi de uygulanmaktadır [21-23, 43, 50-52].

Bu kısımda, Pell-Lucas polinomları için çözümlerin hataları aşağıdaki gibi verilecektir. L lineer operatör ve $y(x)$ tam çözüm olmak üzere, yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklem

$$L[y(x)] = f(x) \quad (3.28)$$

ile tanımlansın. Bu durumda, (3.9) denklemi ile elde edilen kesilmiş Pell-Lucas serisi formunda elde edilen $y_N(x)$ yaklaşık çözümü, (3.28) fonksiyonel denklemini yaklaşık olarak sağlar;

$$R_N(x) = L[y_N(x)] - f(x) \cong 0. \quad (3.29)$$

Burada $R_N(x)$ fonksiyonu, rezidüel fonksiyon olarak tanımlanmaktadır. Aynı zamanda $x = x_r \in [a, b]$, $r = 0, 1, \dots$ için,

$$R_N(x_r) = L[y_N(x_r)] - f(x_r) \cong 0 \Rightarrow R_N(x_r) \leq 10^{-k_r}, \quad (k_r \in \mathbb{Z}^+) \quad (3.30)$$

ifadesi sağlanmalıdır. Eğer $\max(10^{-k_r}) = 10^{-k}$ önceden belirlenmişse, bu takdirde kesme sınırı olan N , $R_N(x_r)$ değeri 10^{-k} dan daha küçük oluncaya kadar arttırılır. N yeteri kadar arttırıldığında $R_N(x) \rightarrow 0$ oluyorsa hata azalır.

Diğer taraftan $R_N(x)$ ile tanımlanan rezidüel hata fonksiyonu ve $[a, b]$ aralığı üzerinde $|R_N(x)|$ fonksiyonunun ortalama değeri kullanılarak, çözümün doğruluğu kontrol edilebilir ve hata sınırı tahmin edilebilir. Böylece, üçgen eşitsizliği ve Ortalama Değer Teoremi $|R_N(x)|$ üzerinde kullanılarak, $\bar{R}_N$ ortalama hatanın üst sınırı aşağıdaki gibi bulunur [43]:

$$\left| \int_a^b R_N(x) dx \right| \leq \int_a^b |R_N(x)| dx$$

$$\int_a^b R_N(x) dx = (b-a) R_N(c), \quad a \leq c \leq b$$

$$\left| \int_a^b R_N(x) dx \right| = (b-a) |R_N(c)|$$

$$(b-a) |R_N(c)| \leq \int_a^b |R_N(x)| dx \quad (3.31)$$

$$|R_N(c)| \leq \frac{\int_a^b |R_N(x)| dx}{b-a} = \bar{R}_N.$$

Ayrıca N lineer olmayan operatör olmak üzere, (3.28) denkleminde $N[y(x)]$ lineer olmayan kısmını da ekleyerek elde edilen

$$L[y(x)] + N[y(x)] = f(x)$$

$$R_N(x) = L[y_N(x)] + N[y_N(x)] - f(x) \cong 0 \quad (3.32)$$

$$|R_N(c)| \leq \frac{\int_a^b |R_N(x)| dx}{b-a} = \bar{R}_N, \quad a \leq c \leq b$$

denklemleri için de geçerlidir.

Diğer taraftan, (3.28) formundaki (3.1) ve (3.2) ile tanımlanan yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin, bulunan $y_N(x)$ yaklaşık Pell-Lucas

polinom çözümleri ve $y(x)$ bilinen tam çözümleri olmak üzere, $e_N(x)$ hata fonksiyonunu tahmin etmek ve yaklaşık çözümü iyileştirmek için, $R_N(x)$ rezidüel hata fonksiyonuna bağlı rezidüel hata tekniği aşağıdaki gibi tanımlanır [41, 43, 50].

Öncelikle,

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x) \quad (3.33)$$

hata fonksiyonunu ele alalım. (3.29) ve (3.33) denklemleri kullanılarak, $e_N(x)$ bilinmeyenli ve $e_N^{(k)}(a) = 0$ homojen koşulu ile

$$L[e_N(x)] = L[y(x)] - L[y_N(x)] = -R_N(x) \quad (3.34)$$

diferansiyel denkleminde oluşan hata problemi kurulur. Böylece verilen koşul ve (3.34) denklemi ile elde edilen hata problemi bölüm 3.1.1 ve bölüm 3.1.2 de verilen çözüm yöntemi kullanılarak tahmin edilen $e_{N,M}(x)$ hata fonksiyonu

$$e_{N,M}(x) = \sum_{n=0}^M a_n Q_n(x), \quad (M > N) \quad (3.35)$$

olarak belirlenir. Dolayısıyla, iyileştirilmiş Pell-Lucas polinomları ile yaklaşık çözümler

$$y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x). \quad (3.36)$$

biçiminde bulunur.

3.1.4. Pell-Lucas Matris Sıralama Yönteminin Adi Diferansiyel Denklemlere Uygulaması

Bu bölümde Pell-Lucas matris sıralama yönteminin doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek için örnekler çözülüp, bulunan nümerik sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulacaktır.

Örnek 3.1.1. [4] Üçüncü mertebeden değişken katsayılı

$$(1+2x)y'''(x)+4xy''(x)+(2x-1)y'(x)=e^{-x}; 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}, y''(0)=-1$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Burada katsayılar $P_0(x)=0$, $P_1(x)=2x-1$, $P_2(x)=4x$, $P_3(x)=1+2x$ ve $f(x)=e^{-x}$ olmak üzere, denklemin tam çözümü $y(x)=\frac{1}{2}xe^x+1$ biçimindedir. $N=3$ için, kesilmiş Pell-Lucas polinomları

$$\underbrace{\sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{B}^k \mathbf{L}}_{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \mathbf{F},$$

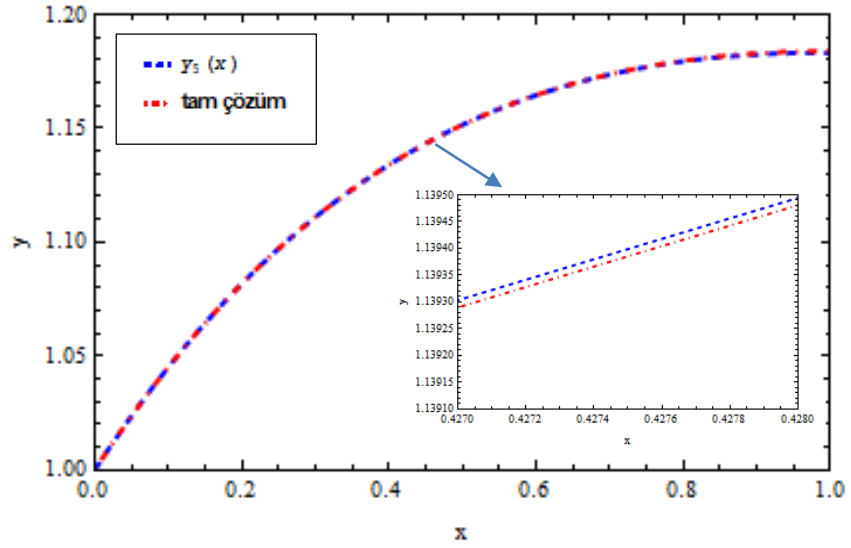
olacak şekilde, matris formunda

$$\{\mathbf{P}_0 \mathbf{X} \mathbf{B}^0 \mathbf{L} + \mathbf{P}_1 \mathbf{X} \mathbf{B}^1 \mathbf{L} + \mathbf{P}_2 \mathbf{X} \mathbf{B}^2 \mathbf{L} + \mathbf{P}_3 \mathbf{X} \mathbf{B}^3 \mathbf{L}\} \mathbf{A} = \mathbf{F},$$

biçiminde yazılır. Pell-Lucas matris sıralama yöntemi (PLCM) ile elde edilen sayısal sonuçlar, Taylor sıralama yöntemi (TCM) [4] ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Tablo 3.1. $N=5$ için PLCM ve TCM [4] ile elde edilen sayısal sonuçların karşılaştırılması

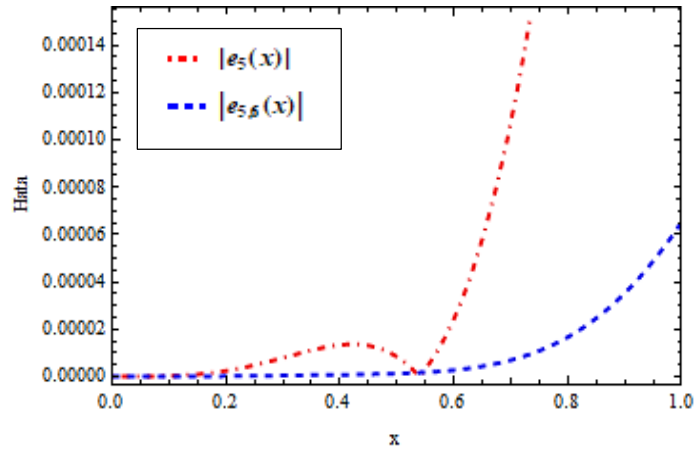
x_i	Tam Çözüm	(PLCM)	Mutlak Hata (PLCM)	(TCM) [4]	Mutlak Hata (TCM) [4]
0	1.00000	1.00000	0.000000	1.00000	0.000000
0.2	1.08187	1.08187	2.40254e-06	1.08188	6.92469e-06
0.4	1.13406	1.13406	1.33030e-05	1.13416	9.59907e-05
18	1.16464	1.16464	2.44104e-05	1.16469	4.65092e-05
0.8	1.17973	1.17973	2.65257e-04	1.17859	1.14159e-03
1	1.18393	1.18393	8.80650e-04	1.17820	5.73972e-03



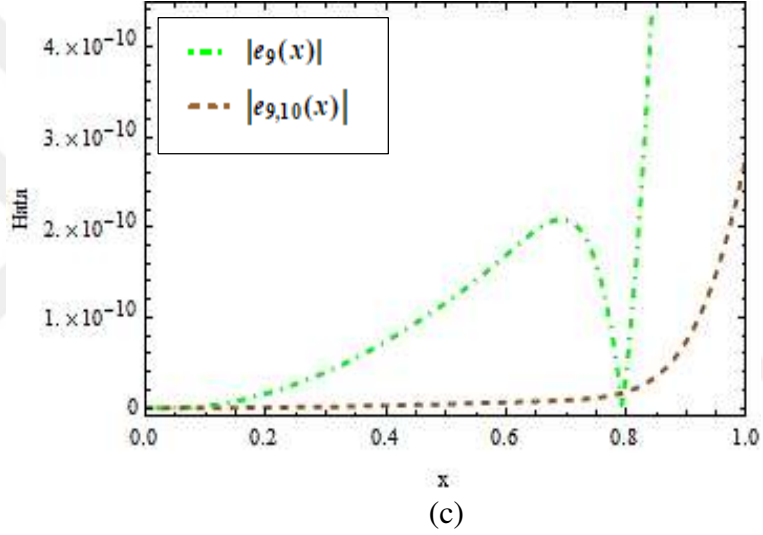
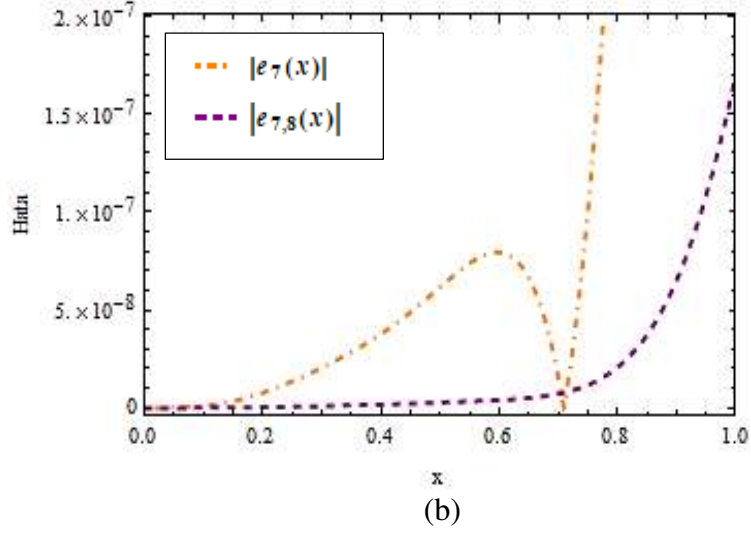
Şekil 3.1. $N=5$ için tam ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması

Tablo 3.2. Farklı N ve M değerleri için PLCM ile bulunan mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması

x_i	$ e_5 $	$ e_{5,6} $	$ e_7 $	$ e_{7,8} $	$ e_9 $	$ e_{9,10} $
0	0.000000	0.000000	2.2204e-16	2.2204e-16	1.1102e-16	1.1102e-16
0.2	2.4025e-06	1.4321e-07	7.7339e-09	3.7141e-10	1.5954e-11	9.0927e-13
0.4	1.3303e-05	7.3720e-07	3.7760e-08	1.7592e-09	7.3947e-11	4.1335e-12
0.6	2.4410e-05	2.7081e-06	7.9437e-08	4.0268e-09	7.3947e-11	9.3281e-12
0.8	2.6525e-04	1.6635e-05	3.1863e-07	2.0713e-08	3.9740e-11	9.8396e-12
1	8.8065e-04	6.5396e-05	3.0853e-06	1.6990e-07	6.3849e-09	1.9392e-10



(a)



Şekil 3.2. (a) $(N, M) = (5, 6)$, (b) $(N, M) = (7, 8)$, (c) $(N, M) = (9, 10)$ değerleri için mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması

Bu örnekte, üçüncü mertebeden değişken katsayılı bir adi diferansiyel denklem için PLCM ile elde edilen yaklaşık çözümler, literatürde sıklıkla kullanılan TCM ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, hem tablolar hem de logaritmik ölçekte sunulan grafikler aracılığıyla değerlendirildiğinde, PLCM yönteminin çok daha düşük mutlak hatalar ürettiği gözlemlenmiştir.

Örnek 3.1.2. [9] Yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer

$$(x+1)y'''(x) + y''(x) - \frac{1}{x+1}y'(x) + xy(x) = x \ln(x+1), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Denklemin katsayıları $P_0(x) = x$,

$$P_1(x) = -\frac{1}{x+1}, \quad P_2(x) = 1, \quad P_3(x) = x+1, \quad f(x) = x \ln(x+1) \quad \text{ve tam çözümü}$$

$y(x) = \ln(x+1)$ olmak üzere, verilen başlangıç değer problemini Pell-Lucas matris sıralama yöntemi ile yaklaşık olarak çözelim. Mevcut yöntem kullanılarak $N = 6$ ve $N = 7$ için elde edilen sonuçlarla, rasyonel Chebyshev sıralama yöntemi (RCCM) [9] ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

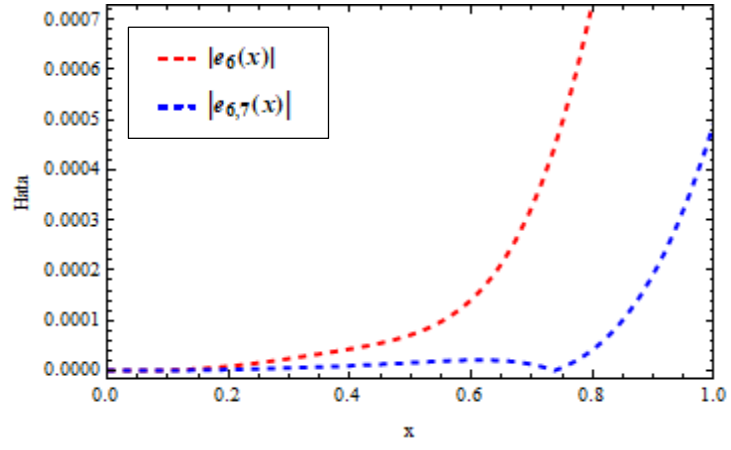
Tablo 3.3. PLCM ile elde edilen farklı N ve M değerleri için iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırması

x_i	$ e_{6,7} $	$ e_{7,8} $	$ e_{15,16} $
0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.1	2.43941 e-07	9.08762 e-08	2.12588 e-12
0.2	1.99425 e-06	6.69916 e-07	1.03896 e-11
0.3	5.25786 e-06	1.67943 e-06	2.43822 e-11
0.4	9.61571 e-06	3.09644 e-06	4.37471 e-11
0.5	1.55683 e-05	4.85839 e-06	6.81939 e-11
0.6	2.08224 e-05	5.25434 e-06	9.74840 e-11
0.7	1.22562 e-05	3.32622 e-07	1.29444 e-10
0.8	4.18301 e-05	1.84751 e-05	1.44451 e-10
0.9	1.92371 e-04	5.43952 e-05	1.17037 e-10
1	4.95008 e-04	1.08764 e-04	4.65338 e-11

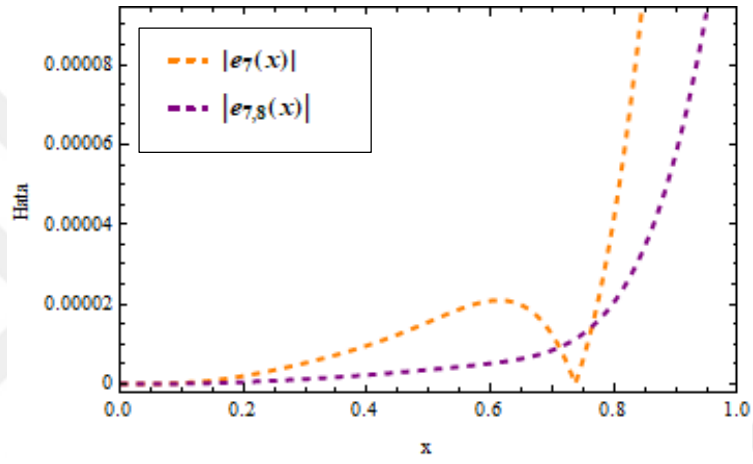
Tablo 3.4. PLCM ve RCCM [9] ile elde edilen sayısal sonuçların karşılaştırılması

x_i	Tam Çözüm	PLCM y_6	PLCM $ e_6 $	PLCM y_7	PLCM $ e_7 $
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	0.09531	0.09531	8.972e-07	0.09531	2.439e-07
0.2	0.18232	0.18233	8.397e-06	0.18232	1.994e-06
0.3	0.26236	0.26238	2.288e-05	0.26237	5.257e-06
0.4	0.33647	0.33651	4.298e-05	0.33648	9.615e-06
0.5	0.40546	0.40553	7.110e-05	0.40548	1.556e-05
0.6	0.47000	0.47014	1.415e-04	0.47002	2.082e-05
0.7	0.53062	0.53095	3.265e-04	0.53064	1.225e-05
0.8	0.58778	0.58852	7.352e-04	0.58774	4.183e-05
0.9	0.64185	0.64185	1.495e-03	0.64166	1.923e-04
1	0.69314	0.69586	2.715e-03	0.69265	4.950e-04
x_i	Tam Çözüm	RCCM [9] y_6	RCCM [9] $ e_6 $	RCCM [9] y_7	RCCM [9] $ e_7 $
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	0.09531	0.09518	1.232e-4	0.09518	1.253e-4
0.2	0.18232	0.18167	6.479e-4	0.18173	5.855e-4
0.3	0.26236	0.26081	1.544e-3	0.26105	1.311e-3
0.4	0.33647	0.33372	2.744e-3	0.33419	2.276e-3
0.5	0.40546	0.40125	4.210e-3	0.40197	3.488e-3
0.6	0.47000	0.46407	5.932e-3	0.46505	4.950e-3
0.7	0.53062	0.52271	7.909e-3	0.52397	6.658e-3
0.8	0.58778	0.57764	1.010e-3	0.57919	8.596e-3
0.9	0.64185	0.62922	1.262e-2	0.63110	1.074e-2
1	0.69314	0.67778	1.536e-2	0.68004	1.309e-2

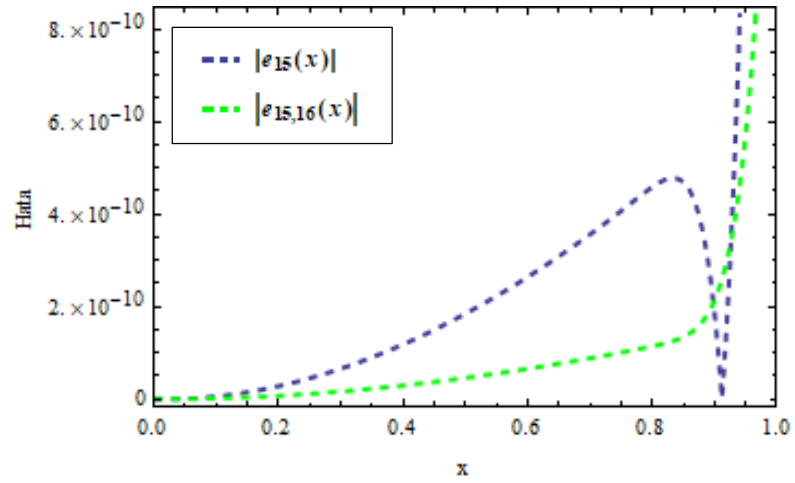
Ayrıca mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hatalar, farklı N değerleri için Şekil 3.3 de karşılaştırılmıştır.



(a)



(b)



(c)

Şekil 3.3. (a) $(N,M)=(6,7)$, (b) $(N,M)=(7,8)$, (c) $(N,M)=(15,16)$ değerleri için mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması

İkinci örnekte, yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemler için geliştirilen PLCM yöntemi ile RCCM karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma, hem 5 terimli hem de 6 terimli kesilmiş çözüm değerleri üzerinden yapılmıştır. Elde edilen veriler, PLCM yönteminin daha düşük hata oranlarıyla sonuç verdiğini açıkça göstermektedir. Bu karşılaştırmalar, önerilen PLCM yönteminin, özellikle daha düşük terim sayılarıyla bile daha hızlı yakınsama sağladığını ve daha küçük hata ile sonuç verdiğini ortaya koymaktadır.

Örnek 3.1.3. [9, 44- 46] İkinci mertebeden değişken katsayılı

$$y''(x) + 2xy'(x) = 0; \quad 0 \leq x < 1$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

başlangıç değer problemini Pell-Lucas matris sıralama yöntemi ile yaklaşık olarak çözelim. Burada, $P_0(x) = 0$, $P_1(x) = 2x$, $P_2(x) = 1$ ve $f(x) = 0$, ayrıca denklemin tam çözümü $y(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ olan hata fonksiyonudur. Denklemin $N = 8$ kesme sınırı için yaklaşık çözümler mevcut yöntem ile hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar, literatürde yer alan farklı yöntemler ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 3.5. Tam çözüm ile yaklaşık çözümlerin farklı metotlar ile karşılaştırılması

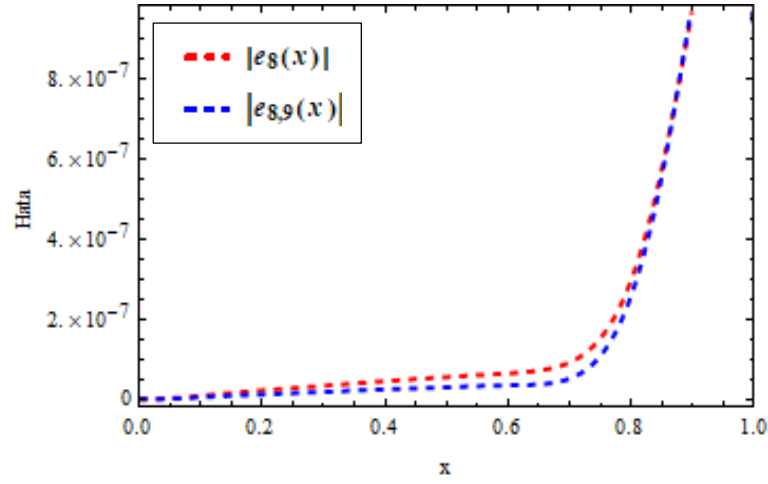
x_i	Tam Çözüm	PLCM	RHM [44]	RCCM [45]	CTM [46]
0	0.0000000	0.0000000	0.000000	0.0000000	0.0000000
0.1	0.1124629	0.1124629	0.11244	0.1124386	0.1124630
0.2	0.2227025	0.2227025	0.22268	0.2228901	0.2227026
0.3	0.3286267	0.3286267	0.32861	0.3285654	0.3286269
0.4	0.4283923	0.4283923	0.42837	0.4283688	0.4283925
0.5	0.5204998	0.5204998	0.52047	0.5204235	0.5204998
0.6	0.6038561	0.6038561	0.60384	0.6038157	0.6038561
0.7	0.6778011	0.6778011	0.67779	0.6776712	0.6778012
0.8	0.7421009	0.7421013	0.74208	0.7422375	0.7421011
0.9	0.7969082	0.7969087	0.79689	0.7968211	0.7969085

Tablo 3.6. $N = 8$ için elde edilen mutlak hataların farklı metotlar ile karşılaştırılması

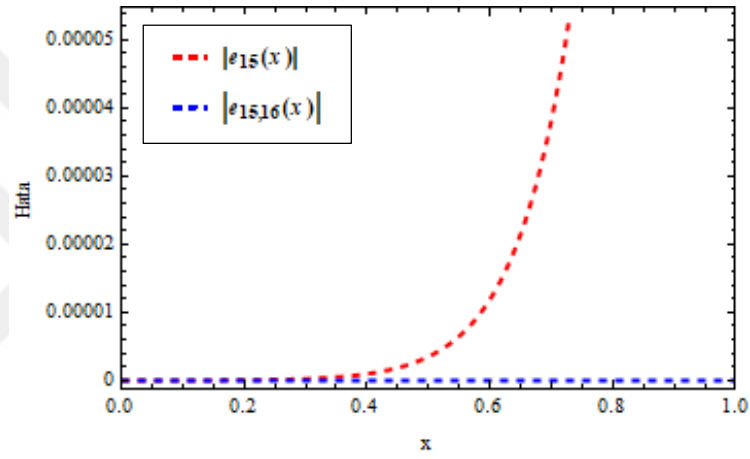
x_i	PLCM	RHM [44]	RCCM [45]	CTM [46]
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	8.13103 e-09	2.29160 e-05	2.43160 e-05	8.39817 e-08
0.2	2.16776 e-08	2.25892 e-05	1.87511 e-04	1.07895 e-08
0.3	3.32048 e-08	1.67595 e-05	1.35950 e-05	1.40541 e-07
0.4	4.47573 e-08	2.23550 e-05	2.35550 e-05	1.44953 e-07
0.5	5.49985 e-08	2.98778 e-05	7.63778 e-05	7.78130 e-08
0.6	6.42156 e-08	1.60908 e-05	4.03908 e-05	9.15207 e-09
0.7	9.15580 e-08	1.11938 e-05	1.29994 e-04	6.16258 e-09
0.8	2.97831 e-07	2.09647 e-05	1.36535 e-04	1.35292 e-07
0.9	9.78815 e-07	1.82124 e-05	8.71124 e-05	2.87577 e-07

Tablo 3.7. PLCM ile farklı N ve M değerleri için elde edilen mutlak hatalar ve iyileştirilmiş mutlak hatalar

x_i	$ e_8 $	$ e_{8,9} $	$ e_{15} $	$ e_{15,16} $
0	1.08420 e-19	1.06720 e-19	9.04128 e-09	9.04128 e-09
0.1	8.13103 e-09	4.79367 e-09	1.85129 e-08	8.41185 e-09
0.2	2.16776 e-08	1.17768 e-08	6.91342 e-08	7.79485 e-09
0.3	3.32048 e-08	1.81306 e-08	2.66061 e-07	7.20201 e-09
0.4	4.47573 e-08	2.41568 e-08	9.90201 e-07	6.64364 e-09
0.5	5.49985 e-08	2.98693 e-08	3.52376 e-06	6.12813 e-09
0.6	6.42156 e-08	3.42155 e-08	1.19248 e-05	5.66159 e-09
0.7	9.15580 e-08	5.11902 e-08	3.82650 e-05	5.24773 e-09
0.8	2.97831 e-07	2.58915 e-07	1.16320 e-04	4.88786 e-09
0.9	9.78815 e-07	8.96349 e-07	3.35150 e-04	4.58114 e-09



(a)



(b)

Şekil 3.4. (a) $(N, M) = (8, 9)$, (b) $(N, M) = (15, 16)$ değerleri için mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hatalar

Üçüncü örnekte, ikinci mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemin mevcut yöntemle çözülmesiyle elde edilen sonuçlar, Rasyonelleştirilmiş Haar Metodu (RHM), Chebyshev Tau Metodu (CTM) ve RCCM yöntemlerinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Elde edilen mutlak hata değerlerine göre, PLCM yöntemi bu dört yöntem arasında en küçük hata oranlarına ulaşılmıştır. Özellikle $x = 0.6$ ve $x = 0.8$ gibi orta ve yüksek değerlerde, PLCM ile elde edilen hata değerleri logaritmik olarak daha düşük kalmış ve yöntemin stabilitesini göstermiştir. CTM zaman zaman PLCM'ye yakın hata değerleri vermiş olsa da, diğer iki yöntemle karşılaştırıldığında PLCM'nin kararlılığı ve yüksek doğruluğu açıkça öne çıkmaktadır.

3.2. İkinci Dereceden Lineer Olmayan Terimler İçeren Diferansiyel Denklemlerin Pell-Lucas Matris-Sıralama Yöntemi ile Çözümü

Bu kısımda, yüksek mertebeden ikinci dereceden lineer olmayan terimlere sahip diferansiyel denklemler için matris sıralama yöntemi göz önüne alınacaktır. Öncelikle,

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p Q_{pq}(x) y^{(p)}(x) y^{(q)}(x) = f(x) \quad (3.37)$$

ile verilen m . mertebeden kuadratik terimli lineer olmayan diferansiyel denklemin

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)) = \lambda_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.38)$$

karışık koşullarına göre,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n Q_n(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + \dots + a_N Q_N(x) \quad (3.39)$$

kesilmiş Pell-Lucas polinomu formunda yaklaşık çözümlerini bulalım. (3.37), (3.38), (3.39) denklemlerinin matris formları

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{Q}(x) \mathbf{A} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{Q}(x) = [Q_0(x) \quad Q_1(x) \quad Q_2(x) \quad \dots \quad Q_N(x)]$$

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N]^T$$

olup, (3.5) denkleminde $\mathbf{Q}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{L}$ olduğu elde edilmişti. Bu ifade, (3.40)

denkleminde yerine yazılırsa,

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \mathbf{A}, \quad (3.41)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $y(x)$ 'in türevleri

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x) \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (3.42)$$

olarak elde edilmişti ve

$$y^{(k)}(x) \cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^k \mathbf{L} \mathbf{A} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.43)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Lineer olmayan terimlerin matris formları ise,

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \left(y^{(0)}(x) \right)^2 = \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}} \\ \bullet \quad & y^{(0)}(x) y^{(1)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}} \\ \bullet \quad & y^{(1)}(x) y^{(0)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B} \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}} \\ \bullet \quad & \left(y^{(1)}(x) \right)^2 = \mathbf{X}(x) \mathbf{B} \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (3.44)$$

şeklinde tanımlanır ve buradan lineer olmayan terimlerin genel hali

$$y^{(p)}(x) y^{(q)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^p \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{B}}^q \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}} \quad , \quad (3.45)$$

bulunur. Bulunan matris bağıntıları (3.37) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^k \mathbf{L} \mathbf{A} + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq}(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^p \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{B}}^q \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}} = f(x) \quad , \quad (3.46)$$

matris formu elde edilir. (3.16) da verilen standart sıralama noktaları (3.46) denkleminde yazılırsa;

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(x_i) \underbrace{\mathbf{X}(x_i) \mathbf{B}^k \mathbf{L} \mathbf{A}}_{\mathbf{Y}^{(k)}} + \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq}(x_i) \underbrace{\mathbf{X}(x_i) \mathbf{B}^p \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}(x_i) \bar{\mathbf{B}}^q \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{Y}^{(p,q)}} = \mathbf{F} \quad , \quad (3.47)$$

$i = 0, 1, 2, \dots, N$ için, $N+1$ denkleme sahip matris denklem sistemi bulunur. Burada yer alan matrisler aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad , \quad \mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \mathbf{B}^k \mathbf{L} \mathbf{A} \\ \mathbf{X}(x_1) \mathbf{B}^k \mathbf{L} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \mathbf{B}^k \mathbf{L} \mathbf{A} \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1} \quad ,$$

$$\mathbf{Q}_{pq} = \begin{bmatrix} Q_{pq}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_{pq}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_{pq}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_0 \mathbf{A} \\ a_1 \mathbf{A} \\ \vdots \\ a_N \mathbf{A} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}$$

$$\mathbf{Y}^{(p,q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \mathbf{B}^p \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}(x_0) \bar{\mathbf{B}}^q \bar{\mathbf{L}} \\ \mathbf{X}(x_1) \mathbf{B}^p \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}(x_1) \bar{\mathbf{B}}^q \bar{\mathbf{L}} \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \mathbf{B}^p \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}(x_N) \bar{\mathbf{B}}^q \bar{\mathbf{L}} \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}.$$

Ayrıca (3.46) denkleminin temel matris bağıntısı kısaca

$$\underbrace{\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{B}^k \mathbf{L} \mathbf{A}}_{\mathbf{W}} + \underbrace{\sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{X} \mathbf{B}^p \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{B}}^q \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}}}_{\mathbf{V}} = \mathbf{F} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{V} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{F} \Rightarrow [\mathbf{W}; \mathbf{V} : \mathbf{F}] \quad (3.49)$$

arttırılmış matris formunda yazılabilir. Şimdi (3.38) denklemi ile verilen koşullara karşılık gelen matrisi yazalım:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(a) + b_{jk} y^{(k)}(b)) = \lambda_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} \mathbf{X}(a) + b_{jk} \mathbf{X}(b)) \mathbf{B}^k \mathbf{L} \mathbf{A}}_{\mathbf{U}_j} = \lambda_j \quad (3.50)$$

$$\mathbf{U}_j \mathbf{A} = \lambda_j.$$

Buradan,

$$\mathbf{U}_j \mathbf{A} + \mathbf{U}_j^* \bar{\mathbf{A}} = \lambda_j \quad (3.51)$$

$$\mathbf{U}_j = \begin{bmatrix} u_{j0} & u_{j1} & \cdots & u_{jN} & ; & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \lambda_j \quad (3.52)$$

matris formu elde edilir. Burada lineer olmayan koşul alınmadığı için lineer olan kısımlara karşılık gelecek şekilde sıfır matrisi yazılır.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 | \lambda_0 \\ \mathbf{U}_1 | \lambda_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{m-1} | \lambda_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & | & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & | & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & | & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

olmak üzere, lineer olmayan başlangıç koşulu alınmadığı için matris formu

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

şeklinde alınır ve

$$[\mathbf{U} ; \mathbf{U}^* : \boldsymbol{\lambda}] \quad (3.55)$$

yazılır. (3.49) ile tanımlanan $[\mathbf{W}; \mathbf{V} : \mathbf{F}]$ matrisinin herhangi m satırı silinip yerine (3.19) ile tanımlanan $[\mathbf{U} ; \mathbf{U}^* : \boldsymbol{\lambda}]$ koşullar matrisi yazılarak,

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{V}} : \tilde{\mathbf{F}}] \quad (3.56)$$

yeni arttırılmış matris elde edilir. Burada bulduğumuz yeni arttırılmış matris çözülerek, istenilen çözüm elde edilmiş olur. Bahsedilen bu yeni arttırılmış matris açık formda yazıldığında

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{V}} : \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & v_{00} & v_{01} & \cdots & v_{0N} & : & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & v_{10} & v_{11} & \cdots & v_{1N} & : & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & : & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} & ; & v_{N-m,0} & v_{N-m,1} & \cdots & v_{N-m,N} & : & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & 0 & 0 & \cdots & 0 & : & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & 0 & 0 & \cdots & 0 & : & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & : & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & 0 & 0 & \cdots & 0 & : & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

bulunur. (3.41) yaklaşık çözüm denklemleri ile bağlantılı bilinmeyen Pell-Lucas polinomu katsayılarını bulmak için matris denklem sistemleri oluşturulur, böylece çözüm de kesilmiş Pell-Lucas serisiyle belirlenir.

3.2.1. İkinci Dereceden Lineer Olmayan Terimler İçeren Diferansiyel Denklemlere Pell-Lucas Matris-Sıralama Yönteminin Uygulaması

Şimdi lineer olmayan diferansiyel denklemler için PLCM ile kolay bir şekilde sonuca ulaşıldığı gösterilecektir. Metodun doğruluğunu ve güvenilirliğini göstermek için bazı problemler ele alınıp sonuçlar incelenecektir.

Örnek 3.2.1. [47-49] Bratu tipi lineer olmayan

$$y''(x) + e^{y(x)} = 0, \quad (0 < x < 1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. PLCM ile yaklaşık olarak çözelim. Verilen denklemde $e^{y(x)}$ lineer olmayan terimin Taylor açılımını yapıp, ilk üç terimini alarak yaklaşık olarak çözüp literatürdeki çözümler ile karşılaştıralım.

$$y''(x) + 1 + y(x) + \frac{y^2(x)}{2} + \dots = 0, \quad (3.57)$$

$$\underbrace{y''(x) + y(x)}_{D(x)} + \underbrace{\frac{y^2(x)}{2}}_{N(x)} = \underbrace{-1}_{f(x)}, \quad (3.58)$$

bulunur. Şimdi $N = 2$ alınarak denklemin yaklaşık çözümünü inceleyelim. İşlem adımları ve matris gösterimleri aşağıda detaylı bir şekilde verilmiştir.

$$\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_0 a_0 \\ a_0 a_1 \\ a_0 a_2 \\ a_1 a_0 \\ a_1 a_1 \\ a_1 a_2 \\ a_2 a_0 \\ a_2 a_1 \\ a_2 a_2 \end{bmatrix}_{9 \times 1},$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}(x_2) \end{bmatrix}_{3 \times 9}, \quad \bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix}_{9 \times 9}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f\left(\frac{1}{2}\right) \\ f(1) \end{bmatrix},$$

olmak üzere, türevlerin matris formları

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \mathbf{A} \\ y'(x) &= \mathbf{X}(x) \mathbf{B} \mathbf{L} \mathbf{A} \\ y''(x) &= \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \mathbf{L} \mathbf{A} \\ y^2(x) &= \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}} \\ [y'(x)]^2 &= \mathbf{X}(x) \mathbf{B} \mathbf{L} \mathbf{A} \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

biçimindedir. Şimdi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ sıralama noktaları için matris hesaplamaları yapılırsa,

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \mathbf{L} \mathbf{A} + \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \mathbf{A} = (\mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 + \mathbf{X}(x)) \mathbf{L} \mathbf{A} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(0) &= (\mathbf{X}(0) \mathbf{B}^2 + \mathbf{X}(0)) \mathbf{L} \mathbf{A} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{A} \end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\mathbf{X}\left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{B}^2 + \mathbf{X}\left(\frac{1}{2}\right) \right) \mathbf{L} \mathbf{A} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 \end{bmatrix} \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(1) &= \left(\mathbf{X}(1) \mathbf{B}^2 + \mathbf{X}(1) \right) \mathbf{L} \mathbf{A} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 14 \end{bmatrix} \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

bulunur. Lineer kısım için matris formu

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(0) \\ \mathbf{D}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{D}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 14 \end{bmatrix}, \tag{3.64}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, lineer olmayan kısım için sıralama noktalarında hesaplamalar (3.65) matris formu içinde benzer şekilde yapılırsa,

$$\mathbf{N}(x) = \frac{1}{2} \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}}, \tag{3.65}$$

bulunur. Sıralama noktaları $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ olacak şekilde, sırasıyla (3.65)

denkleminde yerine yazılması

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(0) &= \frac{1}{2} \mathbf{X}(0) \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}(0) \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \mathbf{X}\left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}\left(\frac{1}{2}\right) \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}} \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{[2 \ 1 \ 3]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}\left(\frac{1}{2}\right) \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 2 & 1 & 3 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(1) &= \frac{1}{2} \mathbf{X}(1) \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}}(1) \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}} \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{[2 \ 1 \ 3]} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(1) \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 2 & 2 & 6 & 6 & 6 & 18 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

matrislerini verir. Lineer olmayan kısmın matris formu ise,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(0) \\ \mathbf{N}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{N}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 2 & 6 & 6 & 6 & 18 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

olarak bulunur. Buna göre, elde edilen matrisler attırılmış matris formunda

$$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 & ; & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & : & -1 \\ 2 & 1 & 11 & ; & 2 & 1 & 3 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & : & -1 \\ 2 & 2 & 14 & ; & 2 & 2 & 6 & 2 & 2 & 6 & 6 & 6 & 18 & : & -1 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır. Koşulların matris formunun da benzer şekilde oluşturulması gerekirse:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(0) &= \mathbf{X}(0) \mathbf{L} \mathbf{A} = 0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} = 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$[\mathbf{U}_0 | \lambda_0] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y(1) &= 0 \\ y(1) &= \mathbf{X}(1) \mathbf{L} \mathbf{A} = 0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} = 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$[\mathbf{U}_1 | \lambda_1] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada lineer olmayan kısım için başlangıç şartı verilmediğinden lineer kısmı karşılayacak kadar sıfır yazılarak,

$$[\mathbf{U}; \lambda] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 2 & 2 & 6 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

matrisi bulunur. Bulunan koşullar matrisi ile yeni arttırılmış matrisi oluşturulursa,

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{V}} : \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 & ; & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & : & -1 \\ 2 & 0 & 2 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 2 & 2 & 6 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

matrisi elde edilir. Son olarak bulunan arttırılmış matris, denklem sistemine dönüştürülerek Pell-Lucas polinomlarına ait katsayılar

$$\left. \begin{aligned} 2a_0 + 10a_2 + 2a_0a_0 + 2a_0a_2 + 2a_2a_0 + 2a_2a_2 &= -1 \\ 2a_0 + 2a_2 &= 0 \\ 2a_0 + 2a_1 + 6a_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{8}, a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = -\frac{1}{8}$$

$$y(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \mathbf{A}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/8 \\ 1/4 \\ -1/8 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$y(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}$$

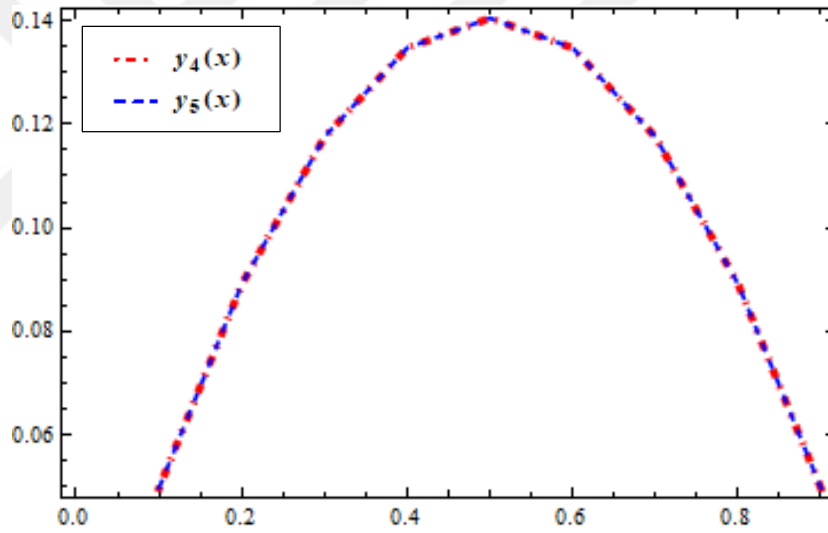
biçiminde bulunur. Ele aldığımız Bratu tipi lineer olmayan diferansiyel denkleminin $N=2$ için işlem adımları detaylı olarak verilip, (3.73) deki yaklaşık çözümü bulunmuştur. Literatürde aynı denklem ayrıştırma yöntemi (DM) [48] ve Lucas polinomları (LCM) [49] yardımıyla yaklaşık olarak çözülmüştür. Tablo 3.8 de farklı N değerleri için çözümler karşılaştırılacaktır.

Tablo 3.8. PLCM ve farklı yöntemler ile elde edilen çözümlerin karşılaştırılması

x_i	Tam Çözüm	PLCM $N = 4$	DM [48] $N = 6$	LCM [49] $N = 4$
0.1	0.049847	0.049789	0.047162	0.049517
0.2	0.089190	0.089114	0.087168	0.088587
0.3	0.117609	0.117524	0.117761	0.117694
0.4	0.134790	0.134699	0.136992	0.133838
0.5	0.140539	0.140445	0.143555	0.139540
0.6	0.134790	0.134699	0.136992	0.133840
0.7	0.117609	0.117524	0.117761	0.116798
0.8	0.089190	0.089114	0.087168	0.088592
0.9	0.049847	0.049790	0.047161	0.049520

Tablo 3.9. PLCM, LCM ve DM yöntemleri ile elde edilen çözümlerin mutlak hataları

x_i	PLCM $N = 4$	DM [48] $N = 6$	LCM [49] $N = 4$
0.1	4.51 e-05	2.96 e-03	3.30 e-04
0.2	5.17 e-05	2.02 e-03	6.03 e-04
0.3	5.04 e-05	1.52 e-04	8.15 e-04
0.4	4.98 e-05	2.20 e-03	9.53 e-04
0.5	4.99 e-05	3.02 e-03	9.99 e-04
0.6	4.96 e-05	2.20 e-03	9.50 e-04
0.7	5.01 e-05	1.52 e-04	8.11 e-04
0.8	5.13 e-05	2.02 e-03	5.98 e-04
0.9	4.48 e-05	2.69 e-03	3.26 e-04



Şekil 3.5. $N = 4$ ve $N = 5$ için PLCM ile bulunan yaklaşık çözümlerin mutlak hata karşılaştırmaları

Örnek 3.2.2. [49] Mühendislik yapılarındaki lineer olmayan salınım sistemlerini ve elektrik devrelerini modelleyen ikinci mertebeden bir Duffing tipi lineer olmayan

$$y''(x) + y'(x) - y(x)y'(x) = 2e^x - e^{2x}, \quad x \in [0, 0.5]$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

diferansiyel denklemini verilen başlangıç koşulları altında, Pell-Lucas matris sıralama yöntemiyle çözelim. Ele aldığımız denklemin tam çözümü $y(x) = e^x$ dir. Bilinen sabitler (3.37) denklemine göre, $P_0(x) = 0$, $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = 1$ $Q_{01}(x) = -1$ ve $f(x) = 2e^x - e^{2x}$ şeklindedir. Çözüm $N = 2$ için sıralama noktaları $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ olmak üzere, kesilmiş Pell-Lucas polinomları formunda incelenirse, bir önceki örnekte açık şekilde gösterildiği gibi denklemin lineer ve lineer olmayan kısımları için matris formları sırasıyla,

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2\mathbf{L}\mathbf{A} + \mathbf{X}(x)\mathbf{B}\mathbf{L}\mathbf{A} = (\mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2 + \mathbf{X}(x)\mathbf{B})\mathbf{L}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{N}(x) = -\mathbf{X}(x)\mathbf{L}\bar{\mathbf{X}}(x)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}$$

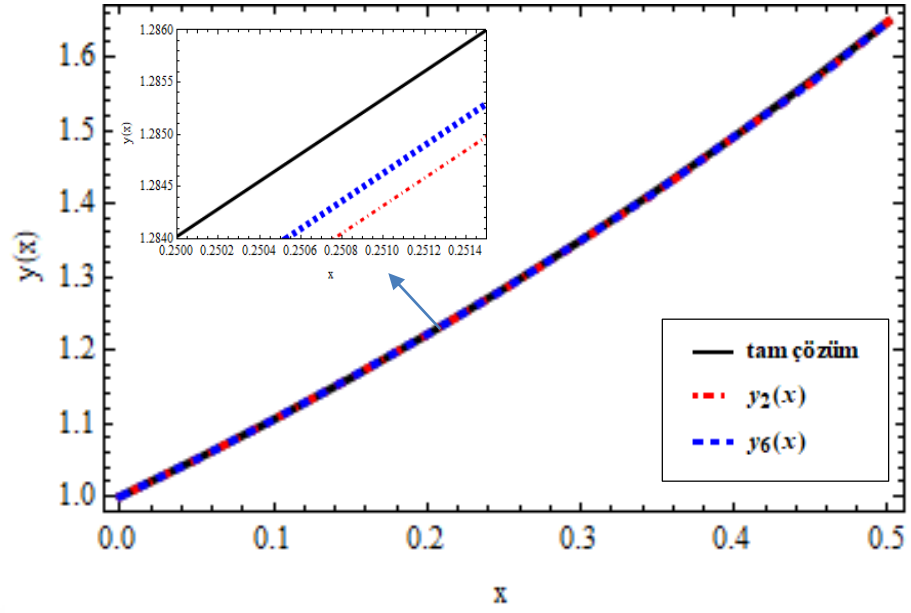
formundadır. (3.37) denkleminde problemin temel matris denklemini

$$\sum_{k=0}^2 \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{B}^k \mathbf{L} \mathbf{A} + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p \mathbf{Q}_{pq} \mathbf{X} \mathbf{B}^p \mathbf{L} \bar{\mathbf{X}} \mathbf{B}^q \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{F}$$

şeklinde oluşur. Buradan hareketle $N = 2$ ve $N = 6$ için yaklaşık çözümler Tablo 3.10. , Şekil 3.6' da tam çözümle karşılaştırılmıştır.

Tablo 3.10. PLCM ile bulunan $N = 2$, $N = 6$ için yaklaşık çözümler ve mutlak hataları

x_i	Tam Çözüm $y(x) = e^x$	PLCM $N = 2$	Mutlak Hata $N = 2$	PLCM $N = 6$	Mutlak Hata $N = 6$
0.1	1.000000	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
0.2	1.105171	1.105171	1.18075 e-07	1.105171	1.80756 e-08
0.3	1.221403	1.221402	1.58160 e-07	1.221402	5.81601 e-08
0.4	1.349859	1.349858	5.07576 e-07	1.349858	2.07576 e-07
0.5	1.491825	1.491824	2.35872 e-09	1.491824	2.35872 e-09



Şekil 3.6. PLCM ile $N = 2$ ve $N = 6$ için yaklaşık çözümler ve tam çözümlerin karşılaştırılması

Çözdüğümüz denklem literatürde Lucas polinomları kullanılarak yaklaşık olarak çözülmüştür. Uyguladığımız metot ile $N=6$ için daha iyi sonuçların elde edildiği Şekil 3.6’ da görülmektedir.

4. MÜHENDİSLİK PROBLEMLERİ

Bu bölümde incelenen diferansiyel denklemler, küçük bir pertürbasyon parametresi içermeleri nedeniyle klasik çözüm yöntemlerinin yetersiz kaldığı, çözümün belirli bölgelerinde ani değişimlerin gözlemlendiği sistemlerdir. Özellikle bu tür sistemlerde, küçük parametrenin ($\varepsilon \leq 1$) yüksek mertebeden türev terimiyle çarpan olarak yer alması, çözümde hızlı geçiş bölgelerinin, diğer bir deyişle sınır tabakalarının oluşmasına neden olmaktadır. Pertürbasyon yöntemleriyle çözümlenen diferansiyel denklemler, genellikle çözümde ani değişimlerin meydana geldiği durumları modellemek amacıyla kullanılır. Bu tür denklemlerde küçük bir parametrenin en yüksek mertebeden türev teriminin katsayısı olarak yer alması, çözümün belirli bölgelerde klasik yaklaşımlarla yakalanamayacak ölçüde hızlı değişmesine neden olabilir. Bu durum, çözümün sınır bölgelerinde dar fakat etkili geçiş bölgeleri oluşturmaya yol açar ve bu tür geçiş yapıları literatürde "sınır tabakası" olarak adlandırılır. Dolayısıyla, her pertürbe edilmiş diferansiyel denklem doğrudan bir sınır tabakası problemi teşkil etmese de, sınır tabakası oluşumu çoğu zaman pertürbasyon parametresine bağlı olarak gelişir. Bu bağlamda, sınır tabakası problemleri, genellikle düzenli ve düzensiz pertürbasyonların birlikte değerlendirildiği özel bir pertürbe edilmiş denklem sınıfı olarak incelenir.

4.1. Sınır Tabakası Problemi

Bu kesimde tekil olarak pertürbe edilmiş diferansiyel denklem, aşağıdaki formda ele alınmıştır:

$$\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \quad , \quad x \in [0,1] \quad (4.1)$$

$$y(0) = \lambda_1 \quad , \quad y(1) = \lambda_2 \quad (4.2)$$

Burada, $0 < \varepsilon \leq 1$, λ_1 , λ_2 bilinen sabitler, $y(x)$ problemin bilinmeyen fonksiyonu, $a(x)$, $b(x)$ ve $f(x)$, $[0,1]$ aralığında tanımlı düzgün fonksiyonlardır.

(4.1) denkleminin yaklaşık çözümünün bulunması için, üçüncü bölümde verilen matris bağıntıları ve eşit aralıklı sıralama noktaları kullanılarak, yöntem (4.1) denkleminde uygulanacaktır. (4.1) denkleminde, (3.14) ile elde edilen matris gösterimleri yazılırsa;

$$\varepsilon \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^2 \mathbf{L} \mathbf{A} + a(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{B} \mathbf{L} \mathbf{A} + b(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x) \quad (4.3)$$

elde edilir. Bu denklemde (3.16) ile tanımlı standart sıralama noktaları (4.3) matris denkleminde yerine yazılır, oluşturulan matris denklem sistemi düzenlenirse, (4.1) denklemi, $i = 0, 1, \dots, N$ için;

$$\varepsilon \mathbf{X}(x_i) \mathbf{B}^2 \mathbf{L} \mathbf{A} + a(x_i) \mathbf{X}(x_i) \mathbf{B} \mathbf{L} \mathbf{A} + b(x_i) \mathbf{X}(x_i) \mathbf{L} \mathbf{A} = f(x_i) \quad (4.4)$$

cebirsel denklem sistemine indirgenir. Buradaki matrisler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \\ \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} b(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}. \end{aligned}$$

(4.4) denklemi kompakt formda

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (4.5)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\mathbf{W} = \varepsilon \mathbf{X} \mathbf{B}^2 \mathbf{L} + \mathbf{a} \mathbf{X} \mathbf{B} \mathbf{L} + \mathbf{b} \mathbf{X} \mathbf{L}, \quad (4.6)$$

olur. (4.5) denklemi arttırılmış matris olarak

$$[\mathbf{W}|\mathbf{F}] = \left[\begin{array}{cccc|c} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & f(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & f(x_N) \end{array} \right] \quad (4.7)$$

biçimindedir. Benzer işlem adımları altında, (4.2) ile verilen koşullar için de Pell-Lucas polinomlarına dayalı matris formları yazılabilir. Buna göre,

$$\mathbf{U}_j \mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda}_j \Leftrightarrow [\mathbf{U}_j; \boldsymbol{\lambda}_j] \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

$$\Rightarrow \mathbf{U}_j = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \cdots \quad u_{jN}]$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_0 \quad \mathbf{U}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{U}_{m-1}]^T \text{ ve } \boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_{m-1}]^T$$

elde edilir. Böylece koşullar matrisi

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{U}_0 & \lambda_0 \\ \mathbf{U}_1 & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{U}_{m-1} & \lambda_{m-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & \lambda_{m-1} \end{array} \right] \quad (4.8)$$

olarak yazılır. (4.7) ile tanımlanan $[\mathbf{W}|\mathbf{F}]$ matrisinin herhangi m satırı silinip yerine (4.8) ile tanımlanan $[\mathbf{U}|\boldsymbol{\lambda}]$ koşullar matrisi yazılarak, $[\tilde{\mathbf{W}}|\tilde{\mathbf{F}}]$ yeni arttırılmış matrisi elde edilir. Burada bulduğumuz yeni arttırılmış matris çözülerek bilinmeyen Pell-Lucas katsayıları a_n ler hesaplanır.

4.2. Hata Analizi ve Rezidüel Hata

Bu bölümde, (4.1) denklemi için elde edilecek hata tahminini mevcut yöntemle göre inceleyeceğiz. (4.1) denkleminin tam çözümü mevcut değilse, hata aşağıdaki yöntem ile tahmin edilebilir.

İlk olarak, yaklaşık çözüm için (4.1) denkleminin rezidü (kalan, artık) fonksiyonunu oluşturulursa,

$$R_N(x) = L[y_N(x)] - f(x). \quad (4.9)$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$L[y_N(x)] = \varepsilon y_N''(x) + a(x)y_N'(x) + b(x)y_N(x) = R_N(x) + f(x) \quad (4.10)$$

$$y_N(0) = \lambda_1 \text{ ve } y_N(1) = \lambda_2 \quad (4.11)$$

koşulları altında $y_N(x)$ yaklaşık çözümü elde edilir. Eğer $y(x)$, (4.1) denkleminin tam çözümü ise hata fonksiyonu şu şekilde tanımlanabilir:

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x). \quad (4.12)$$

(4.10) denklemini (4.1) denkleminde çıkararak hata diferansiyel denklemi

$$L[e_N(x)] = L[y(x)] - L[y_N(x)] = -R_N(x), \quad (4.13)$$

biçiminde elde edilir. Benzer şekilde, (4.11) koşulları (4.2) koşullarından çıkarılarak homojen koşullar

$$e_N(0) = 0 \text{ ve } e_N(1) = 0, \quad (4.14)$$

haline indirgenir. Dolayısıyla hata problemi aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

$$\varepsilon e_N''(x) + a(x)e_N'(x) + b(x)e_N(x) = -R_N(x)$$

$$e_N(0) = 0, e_N(1) = 0. \quad (4.15)$$

Böylece (4.15) ile verilen problem üçüncü bölümde önerilen yöntem ile çözülerek, $e_N(x)$ için $e_{N,M}(x)$ yaklaşık çözümü elde edilir. Sonuç olarak, $y_N(x)$ Pell-Lucas polinom çözümü ve $e_{N,M}(x)$ tahmini hata fonksiyonu toplanarak iyileştirilmiş Pell-Lucas polinom çözümü

$$y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x), \quad (4.16)$$

biçiminde bulunur.

4.3. Pell-Lucas Matris Sıralama Yönteminin Sınır Tabakası Problemlerine Uygulaması

Sunulan yöntemin doğruluğunu ve etkinliğini göstermek için bazı sınır tabakası problemleri göz önüne alınmıştır. Ayrıca ele alınan her bir problemin hata analizleri yapılarak, hem mutlak hem de iyileştirilmiş mutlak hataları elde edilmiştir. Bulunan sonuçlar tablo ve grafiklerle karşılaştırılmıştır.

Örnek 4.1. [34-36, 39] İlk olarak aşağıda verilen tekil pertürbe edilmiş diferansiyel denklemi sınır koşulları ile birlikte ele alalım:

$$-\varepsilon y''(x) + \frac{1}{x+1} y'(x) + \frac{1}{x+2} y(x) = f(x) ; \quad 0 \leq x < 1$$

$$y(0) = 1 + 2^{\frac{-1}{\varepsilon}}, \quad y(1) = 2 + e.$$

Burada, katsayılar $a(x) = \frac{1}{x+1}$, $b(x) = \frac{1}{x+2}$ ve

$f(x) = \left(-\varepsilon + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right) e^x + \frac{1}{x+2} 2^{\left(\frac{-1}{\varepsilon} \right)} (x+1)^{\left(1+\frac{1}{\varepsilon} \right)}$ olmak üzere, denklemin tam

çözümü $y(x) = e^x + 2^{\left(\frac{-1}{\varepsilon} \right)} (x+1)^{\left(1+\frac{1}{\varepsilon} \right)}$ biçimindedir.

Pell-Lucas matris sıralama yöntemi ile N ve ε 'nun çeşitli değerleri için işlem adımları uygulanarak çözümler elde edilmiş, çözümün bazı değerleri aşağıdaki gibi açık bir şekilde gösterilmiştir.

$\varepsilon = 2^{-3}$ alınırsa;

$$y_5^\varepsilon(x) = 2.50776 x^5 - 1.48194 x^4 + 1.06679 x^3 + 0.597409 x^2 + 1.02435 x + 1.00391$$

$$y_{5,6}^\varepsilon(x) = 1.00149 x^6 - 2.80691 x^5 + 2.40048 x^4 - 0.65149 x^3 + 0.04514 x^2 + 0.01128 x$$

$$y_8^\varepsilon(x) = 0.05006 x^8 + 0.11802 x^7 + 0.34772 x^6 + 0.49236 x^5 + 0.53585 x^4 + 0.49455 x^3 + 0.64062 x^2 + 1.03516 x + 1.00391$$

$$y_{8,9}^{\varepsilon}(x) = 0.00391 x^9 - 0.01489 x^8 + 0.02280 x^7 - 0.01821 x^6 + 0.00816 x^5 - 0.00200 x^4 + 0.00023 x^3 - (3.38934 \times 10^{-6}) x^2 - (8.47334 \times 10^{-7}) x$$

$\varepsilon = 2^{-7}$ alınırsa;

$$y_5^{\varepsilon}(x) = -31.3595 x^5 + 60.827 x^4 - 32.521 x^3 + 5.69067 x^2 + 1.0811 x + 1$$

$$y_{5,6}^{\varepsilon}(x) = -84.1525 x^6 + 227.142 x^5 - 214.06 x^4 + 81.8806 x^3 - 10.6438 x^2 - 0.16631 x$$

$$y_8^{\varepsilon}(x) = -583.92 x^8 + 1861.92 x^7 - 2339.47 x^6 + 1489.41 x^5 - 507.922 x^4 + 88.1765 x^3 - 5.3896 x^2 + 0.907975 x + 1$$

$$y_{8,9}^{\varepsilon}(x) = -1548.68 x^9 + 6222.08 x^8 - 10272.4 x^7 + 9013.67 x^6 - 4533.91 x^5 + 1306.19 x^4 - 199.142 x^3 + 12.005 x^2 + 0.187578 x + 1.13687 \times 10^{-13}$$

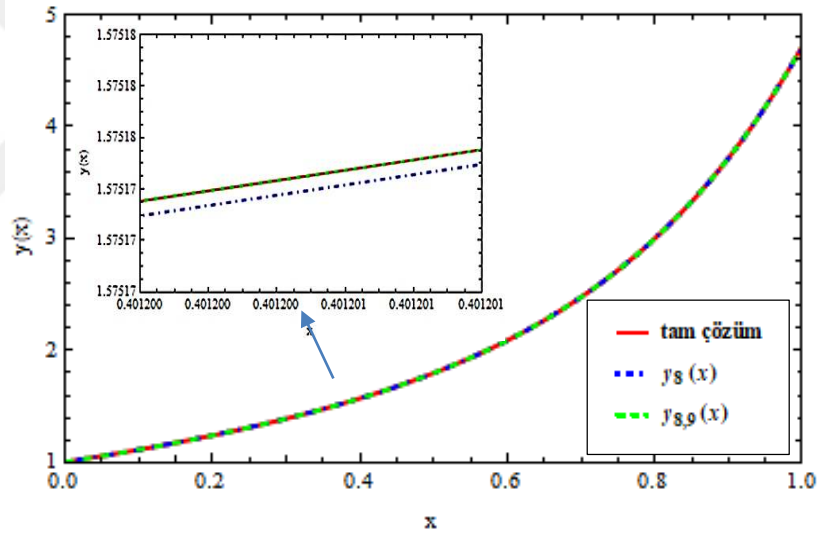
değerleri bulunur. Çalışmanın tümünde $|e_N^{\varepsilon}|$, $|e_{N,M}^{\varepsilon}|$ sırasıyla mutlak hatayı ve iyileştirilmiş mutlak hatayı ifade etmektedir. Elde edilen sonuçlar Tablo 4.1 ve Tablo 4.2’de gösterilmiştir.

Tablo 4.1. N, M ve ε ’ nun bazı değerleri için PLCM ile elde edilen mutlak maksimum ve iyileştirilmiş mutlak maksimum hataların karşılaştırılması

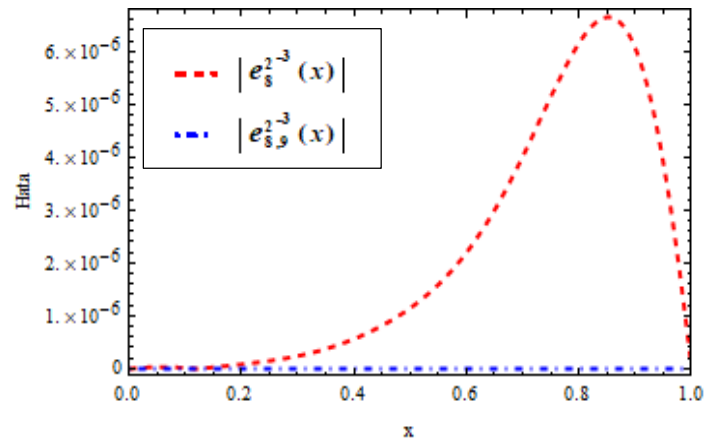
ε	$ e_8^{\varepsilon} $	$ e_{8,9}^{\varepsilon} $	$ e_{15}^{\varepsilon} $	$ e_{15,16}^{\varepsilon} $	$ e_{15,20}^{\varepsilon} $
2^{-2}	7.7051 e-10	1.7292 e-11	4.4868 e-10	4.4866 e-10	4.4468 e-10
2^{-3}	8.4331 e-08	5.9190 e-12	4.4188 e-10	4.4188 e-10	4.4188 e-10
2^{-4}	6.3231 e-05	1.7168 e-05	3.3510 e-11	8.8818 e-16	6.6613 e-16
2^{-5}	4.6419 e-03	1.2436 e-03	1.5737 e-06	2.3596 e-08	8.8817 e-15
2^{-6}	1.9099 e-02	1.3379 e-02	2.6740 e-03	1.9248 e-03	3.6379 e-12
2^{-7}	1.7369 e-02	8.0610 e-03	4.0469 e-02	7.6351 e-03	3.6660 e-08

Tablo 4.2. Farklı metotlar ile PLCM mutlak maksimum hataların karşılaştırılması

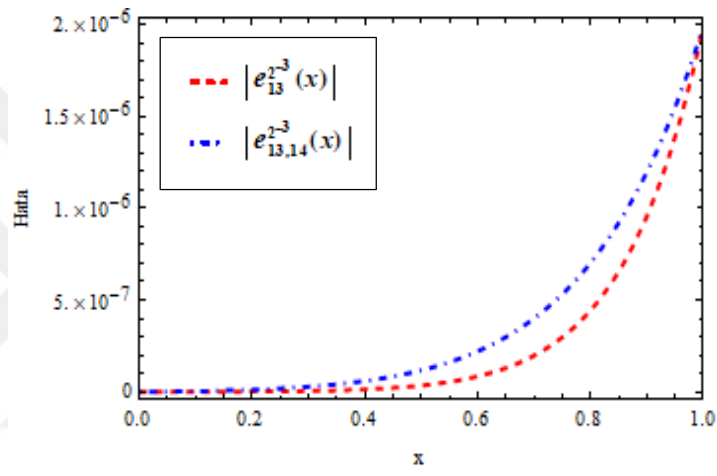
ε	PLCM		Bessel Matris Sıralama Yöntemi [35]		Euler Matris Sıralama Yöntemi [39]	
	$ e_{15}^{\varepsilon} $	$ e_{15,16}^{\varepsilon} $	$ e_{13}^{\varepsilon} $	$ e_{13,14}^{\varepsilon} $	$ e_{15}^{\varepsilon} $	$ e_{15,16}^{\varepsilon} $
2^{-2}	4.4868 e-10	4.4866 e-10	2.5091 e-14	5.4179 e-14	7.3719 e-14	3.3751 e-14
2^{-3}	4.4188 e-10	4.4188 e-10	5.5733 e-14	1.3545 e-14	7.3719 e-14	3.6415 e-14
2^{-4}	3.3510 e-11	8.8818 e-16	5.9422 e-07	3.3387 e-08	1.2517 e-09	1.9057 e-11
2^{-5}	1.5737 e-06	2.3596 e-08	4.5215 e-03	1.5796 e-03	4.8337 e-04	1.3192 e-04
2^{-6}	2.6740 e-03	1.9248 e-03	1.4935 e-01	1.0686 e-01	7.3393 e-02	4.8293 e-02
2^{-7}	4.0469 e-02	7.6351 e-03	5.3316 e-01	4.7055 e-01	4.1172 e-01	4.1172 e-01



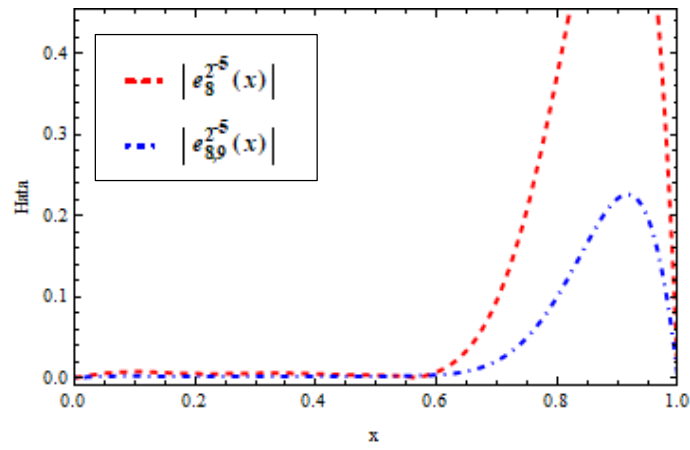
Şekil 4.1. $(N, M) = (8, 9)$ ve $\varepsilon = 2^{-3}$ için PLCM ile tam, yaklaşık ve iyileştirilmiş çözümler



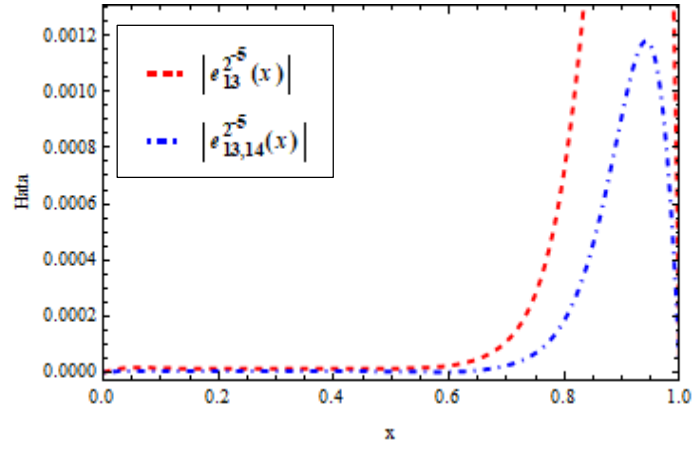
(a)



(b)

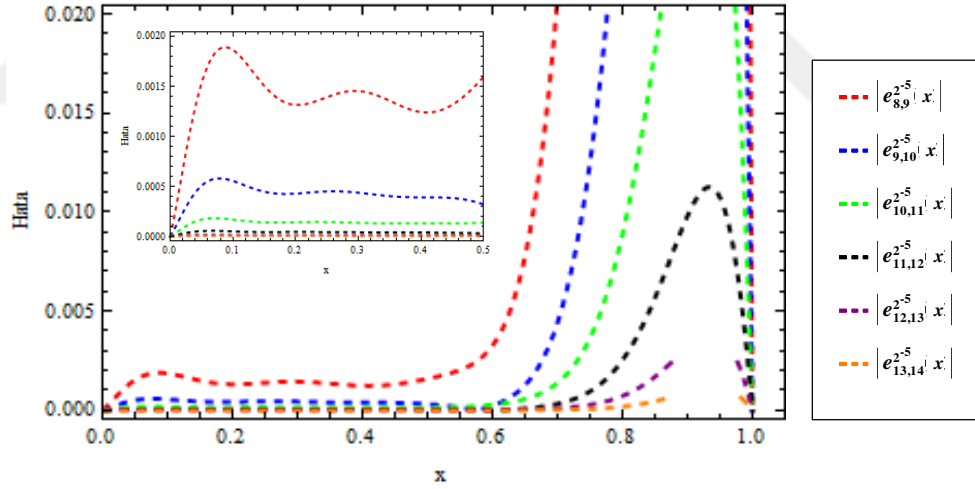


(c)



(d)

Şekil 4.2. $(N, M) = (8, 9)$, $(N, M) = (13, 14)$ olmak üzere, (a)-(b) $\varepsilon = 2^{-3}$ için PLCM ile bulunan mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması (c)-(d) $\varepsilon = 2^{-5}$ için mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması



Şekil 4.3. N, M ve ε 'nin bazı değerleri için PLCM ile bulunan iyileştirilmiş mutlak hatalar

Örnek 4.2. [35, 38]

$$\varepsilon y''(x) + y(x) = 0, \quad x \in [0, 1]$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

sınır koşulları altında sınır tabakası problemini göz önüne alalım. Burada katsayılar

$$a(x)=0, \quad b(x)=1, \quad g(x)=0 \quad \text{ve denklemin tam çözümü} \quad y(x)=\frac{\sin\left(x/\sqrt{\varepsilon}\right)}{\sin\left(1/\sqrt{\varepsilon}\right)} \quad \text{dir.}$$

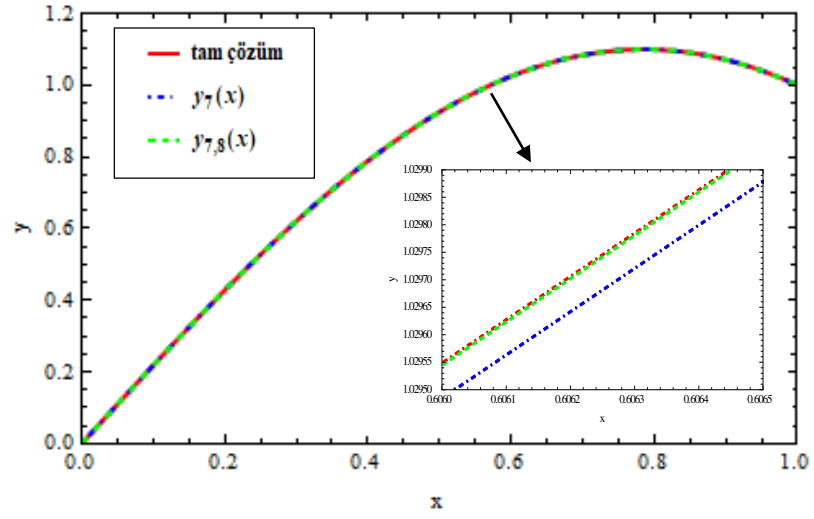
PLCM ile N ve ε nun çeşitli değerleri için işlem adımları uygulanarak çözümler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Tablo 4.3 ve Tablo 4.4’de gösterilmiştir.

Tablo 4.3. Farklı N ve M değerleri için yaklaşık mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması

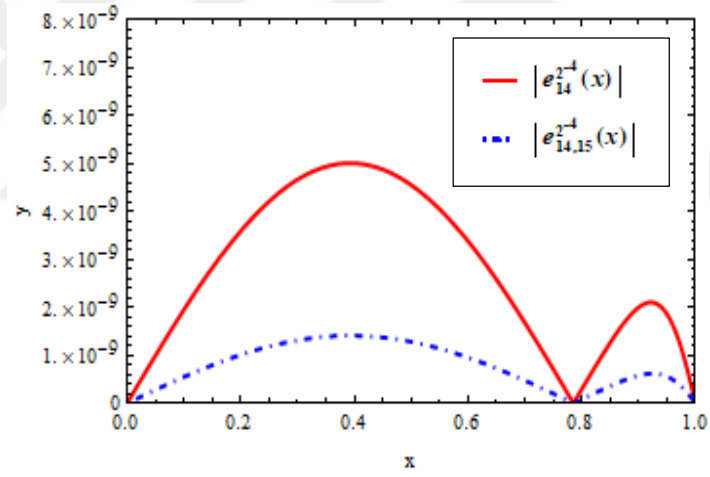
ε	$ e_7^\varepsilon $	$ e_{7,8}^\varepsilon $	$ e_{10}^\varepsilon $	$ e_{10,11}^\varepsilon $	$ e_{14}^\varepsilon $	$ e_{14,15}^\varepsilon $
2^{-2}	4.0585 e-05	4.7338 e-07	2.1149 e-08	1.0423 e-10	7.7688 e-10	4.3674 e-6
2^{-4}	8.1004 e-04	2.6369 e-04	1.1114 e-05	4.8094 e-09	1.9478 e-09	3.6133 e-12
2^{-6}	7.8608 e-02	9.4702 e-03	3.6032 e-03	1.5394 e-05	4.0931 e-06	4.7952 e-09

Tablo 4.4. Mutlak maksimum hataların farklı yöntemler ile karşılaştırılması

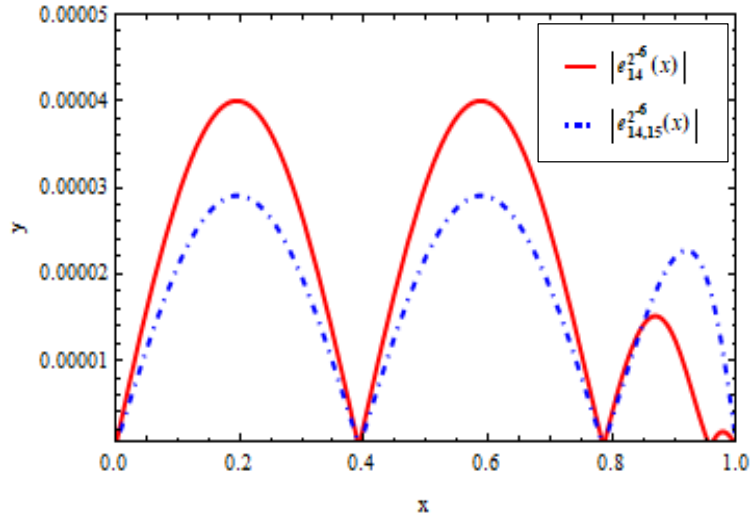
	PLCM		Bessel Matris Sıralama Metodu [35]	
ε	$ e_7^\varepsilon $	$ e_{7,8}^\varepsilon $	$ e_7^\varepsilon $	$ e_{7,8}^\varepsilon $
2^{-2}	4.0585 e-05	4.7338 e-07	4.0585 e-05	4.0585 e-05
2^{-4}	8.1004 e-04	2.6369 e-04	8.1004 e-04	8.1004 e-04
2^{-6}	7.8608 e-02	9.4702 e-03	7.8608 e-02	7.8608 e-02
ε	$ e_{14}^\varepsilon $	$ e_{14,15}^\varepsilon $	$ e_{14}^\varepsilon $	$ e_{14,15}^\varepsilon $
2^{-2}	7.7688 e-10	4.3674 e-06	3.1131 e-13	3.2987 e-13
2^{-4}	1.9478 e-09	3.6133 e-012	6.4602 e-09	4.3849 e-09
2^{-6}	4.0931 e-06	4.7952 e-09	3.1264 e-04	3.5466 e-04



Şekil 4.4. $N=7$, $M=8$ ve $\varepsilon=2^{-2}$ değerleri için PLCM ile bulunan tam, yaklaşık ve iyileştirilmiş çözümlerinin karşılaştırılması



(a)



(b)

Şekil 4.5. (a)-(b) de PLCM ile $(N, M) = (14, 15)$, $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $\varepsilon = 2^{-6}$ değerleri için, mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması

Örnek 4.3. [34, 39] Aşağıda verilen sınır tabakası problemini verilen sınır koşulları altında çözelim:

$$\varepsilon y''(x) + (1+x)^2 y'(x) + 2(1+x)y(x) = f(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = e^{\frac{-1}{2}} - e^{\frac{-7}{3\varepsilon}}.$$

Burada $a(x) = (1+x)^2$, $b(x) = 2(1+x)$, $f(x) = e^{\frac{-x}{2}} \frac{(1+x)(3-x) + \frac{\varepsilon}{2}}{2}$ ve denklemin

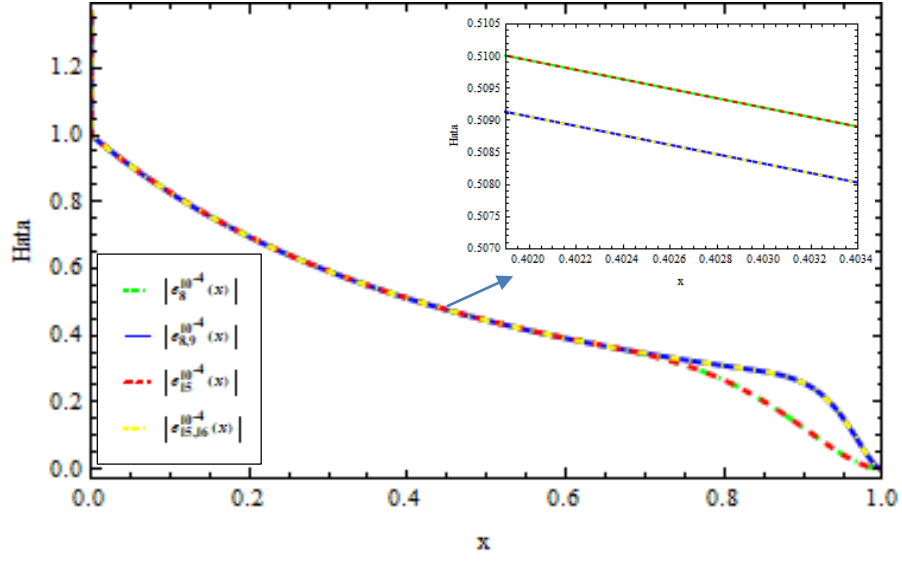
tam çözümü $y(x) = e^{\frac{-x}{2}} + e^{\frac{-x(x^2+3x+3)}{3\varepsilon}}$ dir. Pell-Lucas matris sıralama yöntemi ile N ve ε nun çeşitli değerleri için işlem adımları uygulanarak çözümler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Tablo 4.5 ve Tablo 4.6'da farklı metotlar ile karşılaştırılmıştır. Şekil 4.6' da grafik gösterimi verilmiştir.

Tablo 4.5. Mutlak maksimum hataların farklı N ve M değerleri için karşılaştırılması

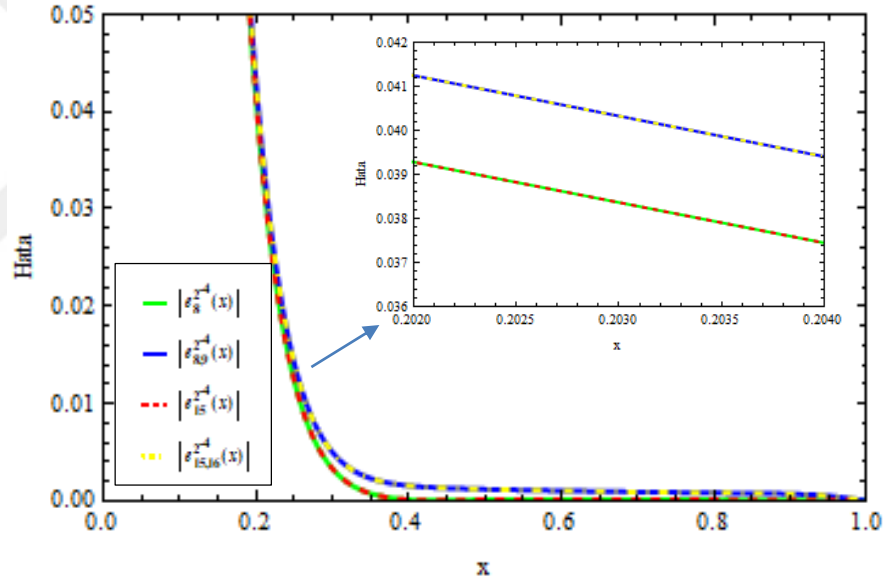
ε	PLCM		Sabit Ağ Sonlu Fark Metodu [34]		Euler Matris Sıralama Metodu [39]	
	$ e_8^\varepsilon $	$ e_{8,9}^\varepsilon $	$n = 64$	$n = 256$	$ e_8^\varepsilon $	$ e_{8,9}^\varepsilon $
2^{-4}	9.6355 e-02	7.8948 e-04	2.9 e-1	1.8 e-02	1.2761	8.9393 e-01
2^{-8}	3.8973 e-01	8.8503 e-03	3.900	3.8 e-01	9.5528 e-01	9.5538 e-01
10^{-4}	6.9576 e-01	6.7078 e-03	3.800	3.7 e-01	9.8006 e-01	9.8031 e-01
10^{-5}	3.9214 e-01	8.7057 e-03	3.800	3.7 e-01	9.8027 e-01	9.8032 e-01
10^{-6}	3.9214 e-01	8.7054 e-03	3.800	3.7 e-01	9.8027 e-01	9.8032 e-01

Tablo 4.6. Farklı N , M ve ε değerleri için elde edilen mutlak maksimum hatalarının karşılaştırılması

ε	PLCM		Euler Matris Sıralama Metodu [39]	
	$ e_8^\varepsilon $	$ e_{8,9}^\varepsilon $	$ e_8^\varepsilon $	$ e_{8,9}^\varepsilon $
2^{-4}	9.6355 e-2	7.8948 e-4	1.2761	8.9393 e-1
2^{-8}	3.8973 e-1	8.8503 e-3	9.5528 e-1	9.5538 e-1
10^{-4}	6.9576 e-1	6.7078 e-3	9.8006 e-1	9.8031 e-1
10^{-5}	3.9214 e-1	8.7057 e-3	9.8027 e-1	9.8032 e-1
10^{-6}	3.9214 e-1	8.7054 e-3	9.8027 e-1	9.8032 e-1
ε	$ e_{15}^\varepsilon $	$ e_{15,16}^\varepsilon $	$ e_{15}^\varepsilon $	$ e_{15,16}^\varepsilon $
2^{-4}	6.5478 e-5	8.6723 e-6	6.0226 e-2	3.5075 e-3
2^{-8}	3.8973 e-1	8.8169 e-4	9.5537 e-1	9.5530 e-1
10^{-4}	3.9208 e-1	9.2869 e-4	9.8006 e-1	9.8027 e-1
10^{-5}	3.9214 e-1	9.3134 e-4	9.8032 e-1	9.8027 e-1
10^{-6}	3.9214 e-1	9.3163 e-4	9.8032 e-1	9.8027 e-1



(a)



(b)

Şekil 4.6. (a)-(b) farklı N , M ve ε değerleri için mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak maksimum hatalarının karşılaştırılması

Bu bölümde, çözülen örneklerin tümünde Pell-Lucas matris sıralama yöntemi ile elde sonuçların, literatürde çalışılan yöntemlerden daha iyi sonuçlar verdiği tablo ve grafiklerde gösterilmiştir. Ayrıca iyileştirilmiş çözümlerin mutlak hatalarının tamamında daha iyi yakınsamanın olduğu da aşıkardır.

Örnek 4.4. [38, 39] Aşağıda verilen sınır tabakası problemini verilen sınır koşulları ile çözelim:

$$\varepsilon y''(x) + y'(x) = f(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Burada $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $f(x) = 1 + 2x$ ve denklemin tam çözümü

$$y(x) = x(x + 1 - 2\varepsilon) + (2\varepsilon - 1) \frac{1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1 - e^{-1}} \text{ biçimindedir. Pell-Lucas matris sıralama}$$

yöntemi ile N ve ε nun çeşitli değerleri için işlem adımları uygulanarak çözümler elde edilmiştir. Tablo 4.7 de PLCM için bulunan sonuçlar, Tablo 4.8'de de farklı metotlar ile bulunan çözümler ile karşılaştırılmıştır. Şekil 4.7'de grafik gösterimi verilmiştir.

Tablo 4.7. Mutlak maksimum hataların farklı N ve M değerleri için karşılaştırılması

ε	$ e_4^\varepsilon $	$ e_{4,5}^\varepsilon $	$ e_8^\varepsilon $	$ e_{8,9}^\varepsilon $	$ e_{14}^\varepsilon $	$ e_{14,15}^\varepsilon $
2^{-2}	2.99319 e-02	1.13725 e-04	1.60652 e-04	1.73189 e-07	7.06778 e-10	3.87468 e-14
2^{-4}	1.22062 e-01	2.25552 e-03	6.09407 e-01	9.15823 e-05	9.70106 e-03	8.81332 e-07
2^{-8}	8.13419 e-2	5.35004 e-03	4.31487 e-01	7.40909 e-03	2.98128 e-03	5.41497 e-04
2^{-12}	7.69048 e-02	5.35524 e-03	4.16112 e-01	7.50362 e-03	3.10540 e-03	6.70122 e-04

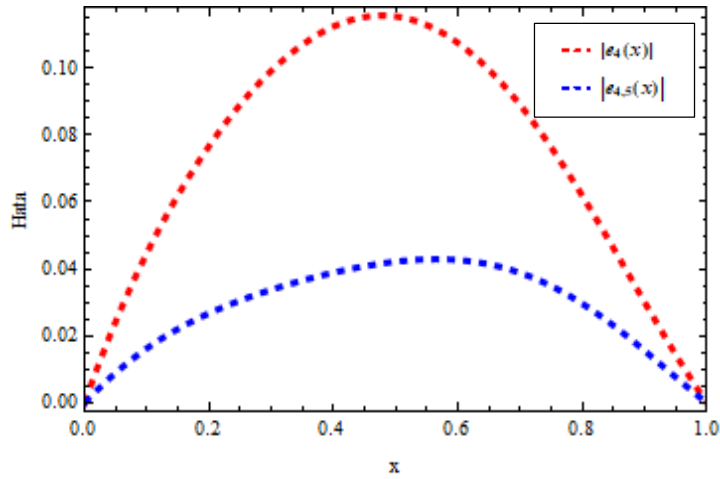
Tablo 4.8. Farklı yöntemler ile bulunan mutlak maksimum hataların karşılaştırılması

	PLCM		B-Spline Metodu [37]		ECM [39]	
ε	$ e_{14}^\varepsilon $	$ e_{14,15}^\varepsilon $	$n = 16$	$n = 32$	$ e_{15}^\varepsilon $	$ e_{15,16}^\varepsilon $
2^{-2}	7.0677 e-10	3.8746 e-14	1.083 e-03	2.716 e-04	1.1086 e-10	1.0072 e-11
2^{-4}	9.7010 e-03	8.8133 e-07	7.816 e-03	1.978 e-03	7.1073 e-03	2.4103 e-03
2^{-8}	2.9812 e-03	5.4149 e-04	5.127 e-02	2.272 e-02	9.9362 e-01	9.9224 e-01
2^{-12}	3.1054 e-03	6.7012 e-04	5.814 e-02	2.980 e-02	1.0008	9.9948 e-01

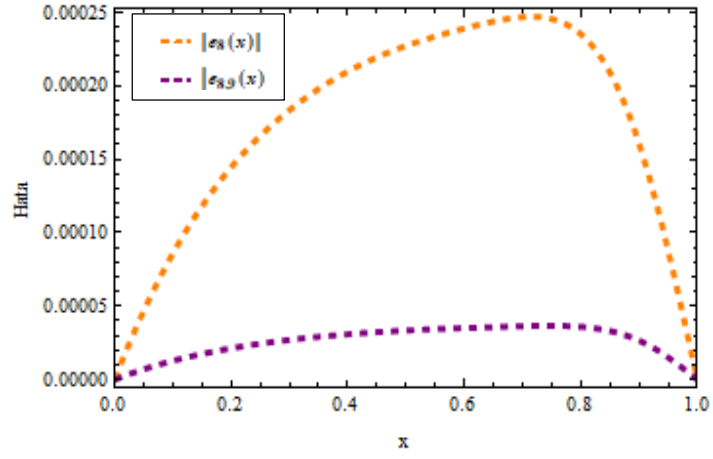
Tablo 4.9. PLCM ve ECM ile bulunan mutlak maksimum hataların karşılaştırılması

	PLCM		ECM [39]	
ε	$ e_4^c $	$ e_{4,5}^c $	$ e_4^c $	$ e_{4,5}^c $
2^{-2}	2.99319 e-02	1.13725 e-04	3.2898 e-01	4.2464 e-02
2^{-4}	1.22062 e-01	2.25552 e-03	8.9121 e-01	8.5807 e-01
2^{-8}	8.13419 e-02	5.35004 e-03	9.9219 e-01	1.0051
2^{-12}	7.69048 e-02	5.35524 e-03	9.9951 e-01	1.0122
ε	$ e_{14}^c $	$ e_{14,15}^c $	$ e_{15}^c $	$ e_{15,16}^c $
2^{-2}	7.06778 e-10	3.87468 e-14	1.1086 e-10	1.0072 e-11
2^{-4}	9.70106 e-03	8.81332 e-07	7.1073 e-03	2.4103 e-03
2^{-8}	2.98128 e-03	5.41497 e-04	9.9362 e-01	9.9224 e-01
2^{-12}	3.10540 e-03	6.70122 e-04	1.0008	9.9948 e-01

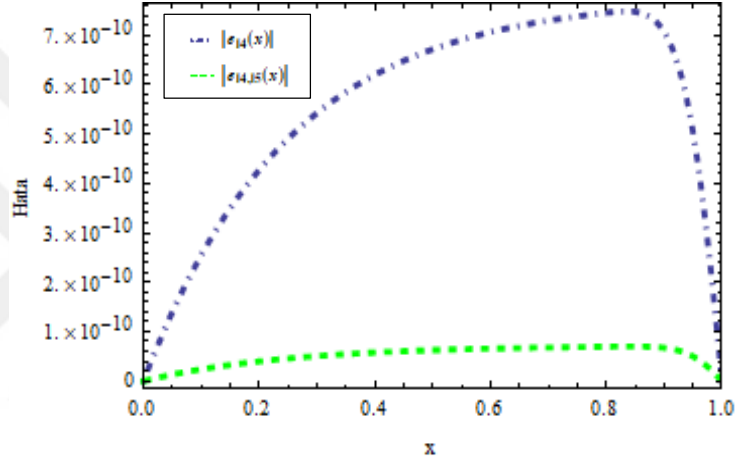
Tablolardaki sonuçlar gösteriyor ki Pell-Lucas Matris sıralama metodu ile elde edilen yaklaşık çözümler diğer yöntemlerle elde edilenlerle kıyaslandığında, yüksek doğruluk sağladığı gözlemlenmiştir. N kesme değerinin arttırılmasıyla hatanın azaldığı aşağıdaki grafiklerde gösterilmiştir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 4.7. (a)-(b)-(c) de PLCM ile $\varepsilon = 2^{-2}$ değeri için, mutlak hata ve iyileştirilmiş mutlak hataların karşılaştırılması

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, fen ve mühendislik alanlarında karşılaşılan yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemler, lineer olmayan terimler içeren diferansiyel denklemler ve tekil olarak pertürbe edilmiş sınır tabakası problemleri gibi önemli problemlerin yaklaşık çözümleri için Pell–Lucas serisi ve sıralama noktalarına dayalı Pell–Lucas matris sıralama yöntemi geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Yöntem, diferansiyel denklemlerin çözümünü, bilinmeyenleri Pell–Lucas polinomlarının katsayıları olan bir cebirsel denklem sistemine indirgemektedir. Bu yapı sayesinde, yüksek mertebeden denklemler dahi düşük hata ile sayısal olarak çözülebilmüş ve çözüm süreci hem teorik hem de uygulamalı olarak detaylandırılmıştır.

Geliştirilen yöntem, farklı tipteki diferansiyel denklemlere uygulanarak, elde edilen yaklaşık çözümler tam çözümler ile karşılaştırılmış ve elde edilen hata oranları analiz edilmiştir. Uygun N değerlerinin seçilmesiyle hata miktarının azaldığı görülmüş, özellikle az terimli yaklaşık çözümle dahi yüksek doğruluk elde edildiği sonucuna ulaşılmıştır. Yöntemin güvenilirliğini ortaya koymak amacıyla kalan (rezidüel) fonksiyonuna dayalı ayrıntılı bir hata analizi gerçekleştirilmiştir. Tablo ve grafiklerle desteklenen bu analizler, yöntemle elde edilen çözümlerin kararlı, yakınsak ve sayısal olarak güvenilir olduğunu göstermektedir. Tam çözümün bilinmediği durumlarda bile, yaklaşık çözümün güvenilirliği rezidüel hata fonksiyonları ve iyileştirilmiş mutlak hata analizleri ile başarılı bir şekilde değerlendirilmiştir. Ayrıca geliştirilen algoritma, bilgisayar programlaması açısından oldukça uyumlu ve uygulanabilir bir yapıya sahiptir. Paket programlar gibi yazılım platformlarında kolaylıkla kodlanabilen bu yöntem, yüksek mertebeden problemler için etkin ve düşük maliyetli bir alternatif sunmaktadır.

Sonuç olarak, günümüzde önemli bir çalışma alanına sahip olan polinom tabanlı sayısal çözüm yöntemi, Pell-Lucas polinomları kullanılarak uygulanmıştır ve etkin sonuçlar elde edilmiştir. Bu yöntemin gelecekte, ele alınacak daha ileri düzey, zorlayıcı ve birden fazla bileşenli yapıdaki matematik ve mühendislik problemlerinin çözümleri için genelleştirilebilir bir altyapı sunduğu görülmektedir. İleri düzey sistemlerde uygulanabilirliğin artması için bazı sayısal ve yapısal düzenlemelerin yapılması gerektiği de göz önünde bulundurulmalıdır.

KAYNAKLAR

- [1] Sezer, M. (1984). On the solution methods of Cauchy problem associated with parabolic partial differential equations, Ege University Journal of Science Faculty, 8(1), 59-69.
- [2] Sezer, M. (1992) . The Solutions of Certain Classes of Fredholm Integral Equations by Means of Taylor Series, Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 7(2), 17-24.
- [3] Kanwal, R. P., Liu. K.C. (1989). A Taylor expansion approach for solving integral equations. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 20(3), 411-414.
- [4] Karamete, A., Sezer, M. (2002). A Taylor collocation method for the solution of linear integro- differential equations, International Journal of Computer Mathematics, 2002, 79(9), 987-1000.
- [5] Gülsu, M., Sezer, M. (2006). Taylor collocation method for solution of systems of high-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations, International Journal of Computer Mathematics, 83(4), 429-448.
- [6] Yalçınbaş, S., Sezer, M. (2006). A Taylor collocation method for the approximate solution of general linear Fredholm–Volterra integro-difference equations with mixed argument, Applied Mathematics and Computation, 175(1), 675-690.
- [7] Sezer, M., Gülsu, M., Tanay, B. (2006). A Taylor collocation method for the numerical solution of complex differential equations with mixed conditions in elliptic domains, Applied Mathematics and Computation, 182(1), 498-508.
- [8] Gülsu, M., Sezer, M. (2011). A Taylor collocation method for solving high-order linear pantograph equations with linear functional argument, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 27(6), 1365-1721.
- [9] Sezer, M., Gülsu M., Tanay B. (2011). Rational Chebyshev Collocotion Method for Solving Higher-Order Linear Ordinary Differential Equations, Wiley Online Library, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 27(5), 1130-1142.
- [10] Gökmen E., Sezer, M. (2013).Taylor collocation method for systems of high-order linear differential-difference equations with variable coefficients, Ain Shams Engineering Journal, 4(1), 117-125.
- [11] Bellour, A., Bousselsal, M. (2014).Numerical solution of delay integro-differential equations by using Taylor collocation method, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 37(10), 1491-1506.

- [12] Öztürk, Y., Anapalı, A., Gülsü, M., Sezer, M. (2013). A Collocation Method for Solving Fractional Riccati Differential Equation, *Journal of Applied Mathematics*, 2013(1).
- [13] Çenesiz, Y., Keskin, Y., Kurnaz, A. (2010). The solution of the Barley-Torvik equation with the generalized Taylor collocation method, *Journal of the Franklin Institute*, 347(2), 452-466.
- [14] Aslan, B., B., Gürbüz, B., Sezer, M. (2015). A Taylor matrix-collocation method based on residual error for solving Lane- Endem type differential equations, *New Trends in Mathematical Sciences*, 2015, 3(2), 219-224.
- [15] Aksoy, A., M., Irk, D., Dağ, İ. (2013). Taylor-Collocation Method for the Numerical Solution of the Nonlinear Schrödinger Equation Using Cubic B-Spline Basis, *International Journal of Nonlinear Science*, 15(4), 322-333.
- [16] Deniz, S., Bildik, N., Sezer, M. (2017). A Note on Stability Analysis of Taylor Collocation Method, *Celal Bayar University Journal of Science*, 13(1), 149-153.
- [17] Laib, H., Bellour, A., Boulmerka, A. (2022). Taylor collocation method for a system of nonlinear Volterra delay integro-differential equations with application to Covid-19 epidemic, *International Journal of Computer Mathematics*, 99(4), 852-876.
- [18] Çelik, E., Uçar, D. (2023). Analysis of the Logistic Growth Model With Taylor Matrix and Collocation Method, *International Journal of Analysis and Applications*, 21, 58.
- [19] Çevik, M., Savaşaneril Baykuş, N., Sezer, M. (2025) A review of polynomial matrix collocation methods in engineering and scientific applications. *Archives of Computational Method in Engineering*, 1-19.
- [20] Horadam, A.F., Mahon, J.M. (1985). Pell and Pell-Lucas Polynomials, *Fibonacci Quarterly*, 23(1), 7-20.
- [21] Şahin, M., Sezer, M. (2018). Pell-Lucas Collocation Method for Solving High Order Functional Differential Equations with Hybrid Delay, *Celal Bayar University Journal of Science*, 14(2), 141-149.
- [22] Yüzbaşı, Ş., Yıldırım, G. (2020). Pell-Lucas collocation method to solve high-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations and residual correction, *Turkish Journal of Mathematics*, 44(4), 1065-1091.
- [23] Yüzbaşı, Ş., Yıldırım, G. (2020). Pell-Lucas collocation method for numerical solutions of two population models and residual correction, *Journal of Taibah University for Science*, 14(1), 1262-1278.

- [24] Yüzbaşı, Ş., Yıldırım, G. (2022). A Pell-Lucas approximation to solve the Abel equation of the second kind, *Ricerche di Mathematica*, 74(1), 495-518.
- [25] Yüzbaşı, Ş., Yıldırım, G. (2022). A collocation method to solve the parabolic-type partial integro differential equations via Pell-Lucas polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, 421.
- [26] Yüzbaşı, Ş., Yıldırım, G. (2022). Pell-Lucas collocation method to solve second-order nonlinear Lane-Emden type pantograph differential equations, *Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences*, 3(1), 75-97.
- [27] Yüzbaşı, Ş., Yıldırım, G. (2023). Pell-Lucas collocation method for solving a class of second order nonlinear differential equations with variable delays, *Turkish Journal of Mathematics*, 47(1), 37-55.
- [28] Lukonde, A.P., Dönmez Demir, D., Emadifar, H., Khademi, M., Azizi, H. (2023). Pell-Lucas polynomial method for Volterra integral equations of the second kind, *Afrika Mathematika*, 34(52).
- [29] Yüzbaşı, Ş., Yıldırım, G. (2023). A numerical approach to solve hyperbolic telegraph equations via Pell-Lucas polynomials, *Journal of Taibah University for Science*, 17(1).
- [30] Yüzbaşı, Ş., Yıldırım, G. (2023). A Pell-Lucas Collocation Approach for an Sır Model on the Spread of the Novel Coronavirus (SARS CoV-2) Pandemic: The Case of Turkey, *Mathematics*, 11(3), 697-719.
- [31] Yıldırım, G., Yüzbaşı, Ş. (2024). A Collocation Technique via Pell-Lucas Polynomials to Solve Fractional Differential Equation Model for HIV/ AIDS with Treatment Compartment, *CMES-Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 141(1), 281-310.
- [32] Yıldırım, G., Yüzbaşı, Ş. (2024). Numerical solutions of SIRD model of Covid-19 by utilizing Pell-Lucas collocation method, *Turkish Journal of Mathematics*, 48(6), 1156-1182.
- [33] Yıldırım, G., Yüzbaşı, Ş. (2024). Numerical solutions and simulations of the fractional COVID-19 model via Pell-Lucas collocation algorithm, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 47(18), 14457-14475.
- [34] Kadalbajoo K.M., Patidar K.C. (2006). ε -Uniformly convergent fitted mesh finite difference methods for general singular perturbation problems, *Applied Mathematics and Computation*, 179 (1), 248-266.

- [35] Yüzbaşı, Ş. (2015). A collocation method based on the Bessel functions of the first kind for singular perturbed differential equations and residual correction, *Mathematical Models in the Applied Sciences*, 38 (14), 3033-3042.
- [36] Chakravarthy, P.P., Phaneendra, K., Reddy Y.N. (2007). A seventh order numerical method for singular perturbation problems, *Applied Mathematics and Computation*, 186 (1), 860-871.
- [37] Kadalbajoo, M.K., Parora, P. (2009). B-spline collocation method for the singular-perturbation problem using artificial viscosity, *Computers and Mathematics with Applications*, 57 (4), 650-663.
- [38] Yüzbaşı, Ş. (2017). A Laguerre approach for the solution of singular perturbed differential equations, *International Journal of Computational Methods*, 14 (04).
- [39] Elmacı, D., Yüzbaşı, Ş., Savaşaneril Baykuş, N. (2022). A matrix-collocation method for solutions of singularly perturbed differential equations via Euler polynomials. *Turkish Journal of Mathematics*, 46 (08).
- [40] Öztürk, M., Gülsu, Y., Sezer, M. (2011). Approximate solution of the singular-perturbation problem on Chebyshev-Gauss grid, *Journal of Advanced Research in Differential Equations*, 3 (3), 1-13.
- [41] Kumar, M. (2003). A Second order spline finite difference method for singular two-point boundary value problems equations, *Applied Mathematics and Computation*, 142, 283-290.
- [42] Djordjevic, G.B., Milovanovic, G. (2014). V. Special classes of polynomials. University of Nis. Faculty of Technology, Leskovac, 211s.
- [43] Şahin, M. (2017). Fredholm tipindeki Fonksiyonel İntegro Diferansiyel Denklemlerin Pell-Lucas Polinom Çözümleri ve Uygulamaları, Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, Manisa, 62 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [44] Razzaghi, M., Ordokhani, Y. (2001). Solution of Differential Equations via Rationalized Haar Functions, *Mathematics and Computers in Simulations*, 56, 235-246.
- [45] Yalçınbaş S., Özsoy N., Sezer M. (2010). Approximate Solution of Higher Order Linear Differential Equations By Means of A New Rational Chebyshev Collocation Method, *Mathematical and Computational Applications*, 15(1), 45-56.
- [46] Parand, K., Razzaghi, M. (2004). Rational Chebyshev tau method for solving higher-order ordinary differential equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 81(1), 73-80.

- [47] Fried, I.(1979). Numerical solution of differential equations. Academic Press,Inc., New York.
- [48] Deeba, E., Khuri, S.A., Xie, S. (2000). An algorithm for solving boundary value problems, Journal of Computational Physics, 159, 125-138.
- [49] Gümgüm, S., Savaşaneril Baykuş, N., Kürkçü, Ö. K., Sezer, M. (2020). Lucas polynomial approach for second order nonlinear differential equations, Journal of Natural and Applied Sciences, 24(1), 230-236.
- [50] Kürkçü, Ö. K., Aslan E., Sezer, M. (2016). A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential difference equations using Dickson polynomials. Applied Mathematics and Computation, 276, 324-339.
- [51] Kürkçü, Ö. K., Aslan E., Sezer, M. (2017). A novel collocation method based on residual error analysis for solving integro-differential equations using hybrid Dickson and Taylor, Sains Malaysiana, 46(2), 335-347.
- [52] Aykutalp, E., Z. (2024). Yüksek mertebeden değişken katsayılı neutral fonksiyonel diferansiyel denklemlerin Boubaker seri yaklaşımları, Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı. (Doktora Tezi).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Asuman AÇIK

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : İzmir Şemikler Lisesi (YDA) , 2008

Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013.

Yüksek Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2018.

Doktora : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü,
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı, 2025.

Mesleki Deneyim

Uzman Yaklaşım Özel Öğretim Kursu 2012-2017

Mavişehir Fen Bilimleri Vip Kurs 2017-2018

Final Eğitim Kurumları 2018-2022

Hakkari/ Yüksekova Şemsettin Onay Anadolu Lisesi 2022- ...

Yayınları

[1] Bildik, N., Açıık A., Deniz S. (2018). A New Approach to Fuzzy Differential Equations using Logarithmic Mean, Journal of Fuzzy Set Valued Analysis, 1, 10-21.

[2] Açık, A., Dnmez Demir, D., Konuralp, A. Pell-Lucas Collocation Method for High-Order Linear Differential Equations. The Third International Conference on Applied Mathematics in Engineering (ICAME'24), 28.06.2024.

