



**LİNEER VE LİNEER OLMAYAN PARABOLİK
PROBLEMLERİN GALERKİN METODUYLA
YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ**

Arif ENGİN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Yeşim SARAÇ**

2017

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**LİNEER VE LİNEER OLMAYAN PARABOLİK PROBLEMLERİN
GALERKİN METODUYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ**

Arif ENGİN

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı**

**ERZURUM
2017**

Her Hakkı Saklıdır



T. C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

**LİNEER VE LİNEER OLMAYAN PARABOLİK PROBLEMLERİN
GALERKİN METODUYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ**

Yrd. Doç. Dr. Yeşim SARAÇ danışmanlığında, Arif ENGİN tarafından hazırlanan bu çalışma, 27/12/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu** (.../...) ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yeşim SARAÇ

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fatma TOYOĞLU

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 28/12/2017 tarih ve 51/17 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN PARABOLİK PROBLEMLERİN GALERKİN METODUYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Arif ENGİN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yeşim SARAÇ

Bu çalışmada, Dirichlet sınır şartlı lineer bir parabolik problem ve lineer olmayan bir parabolik problemin zayıf çözümleri incelenmiştir. Galerkin metodu ve Adomian ayrıştırma metodu kullanılarak bu problemlerin zayıf çözümleri elde edilmiştir. Galerkin metodu lineer parabolik probleme uygulandığında, lineer adi diferansiyel denklem sistemi ve lineer olmayan parabolik probleme uygulandığında lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu adi diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için Adomian ayrıştırma metodu kullanılmıştır. MAPLE® programı kullanılarak elde edilen sonuçlar nümerik örneklerle test edilmiştir.

2017, 58 sayfa

Anahtar Kelimeler: Galerkin metodu, Adomian ayrıştırma metodu, Parabolik kısmi diferansiyel denklem

ABSTRACT

MS. Thesis

APPROXIMATE SOLUTION OF A LINEAR AND A NONLINEAR PARABOLIC PROBLEMS BY GALERKIN METHOD

Arif ENGİN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Applied Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Yeşim SARAÇ

In this study, we investigate the weak solutions of linear and nonlinear parabolic problems subject to Dirichlet boundary conditions. Using Galerkin method and Adomian method approximate solutions of these problems have been obtained. Applying the Galerkin method to linear parabolic problems, the system of linear ordinary differential equations has been get. Using the Galerkin method to nonlinear parabolic problems, we have the system of nonlinear ordinary differential equations. Adomian decomposition method to solve these systems of the ordinary differential equations has been used. Obtained results are tested with some numerical examples by using MAPLE[®] program.

2017, 58 pages

Keywords: Galerkin method, Adomian decomposition method, Parabolic partial differential equation

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak hazırlayıp sunduğum bu çalışmada, kıymetli bilgi ve katkılarını esirgemeyen, düşünceleri ile bana yol gösteren Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yeşim SARAÇ'a yakın ilgi, alaka ve yardımlarından dolayı en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Matematik bölümünde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen başta Sayın Yrd. Dr. Sıdika Şule ŞENER olmak üzere matematik bölümünün diğer tüm öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında büyük ilgi ve destekleri ile her zaman yanımda olan aileme ve kıymetli dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Arif ENGİN

Aralık, 2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	7
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	16
3.1. Lineer Parabolik Problem için Genelleştirilmiş Çözüm.....	17
3.2. Lineer olmayan Parabolik Problem için Genelleştirilmiş Çözüm.....	26
3.3. Adi Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü İçin Adomian Ayrıştırma Metodu	30
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	36
4.1. Lineer Parabolik sistem için nümerik örnekler	37
4.2. Lineer Olmayan Parabolik sistem için Nümerik Uygulamalar	46
5. SONUÇ.....	56
KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	59

SİMGELER DİZİNİ

$H_0^1(0, l)$	$H^1(0, l)$ uzayının alt uzayı olup $(0, l)$ aralığının sınırlarında sıfır olan fonksiyonların uzayı
$H_0^1(\Omega)$	$H^1(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup $t = T$ için $(x, T) = 0$ şartını sağlayan fonksiyonların uzayı
$H^{1,0}(\Omega)$	Kendisi ve x değişkenine göre birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait fonksiyonların uzayı
$H^1(0, l)$	Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0, l)$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı
$H^1(\Omega)$	Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı
$L_2(0, l)$	$(0, l)$ aralığında ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(\Omega)$	Ω bölgesinde ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$C(\bar{\Omega})$	Ω kümesinin kapanışının sürekli olduğu fonksiyonlarının birleşimi olan uzay

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Zayıf çözüm	41
Şekil 4.2. $N = 4$ için yaklaşık zayıf çözüm	42
Şekil 4.3. Zayıf çözüm	45
Şekil 4.4. $N = 4$ için Yaklaşık zayıf çözüm	46
Şekil 4.5. Zayıf çözüm	50
Şekil 4.6. $N = 3$ için yaklaşık zayıf çözüm	50
Şekil 4.7. Zayıf çözüm	55
Şekil 4.8. $N = 3$ için yaklaşık zayıf çözüm	55

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Zayıf çözüm ve yaklaşık zayıf çözüm arasındaki bazı hatalar	41
Çizelge 4.2. Zayıf çözüm ve yaklaşık zayıf çözüm arasındaki bazı hatalar	45
Çizelge 4.3. Zayıf çözüm ve yaklaşık zayıf çözüm arasındaki bazı hatalar	49
Çizelge 4.4. Zayıf çözüm ve yaklaşık zayıf çözüm arasındaki bazı hatalar	54



1. GİRİŞ

Elektrik, mekanik, akışkan dinamiği, manyetizma, optik veya ısı akışı gibi çoğu fiziksel olay genelde kısmi diferansiyel denklemler ile tanımlanır. Uygulamada çoğu olay uzay ve zaman değişkeni ile tarif edilir ve kısmi diferansiyel denklemlerde türevler, hız, ivme, kuvvet, akı, akım gibi doğal şeyleri ifade eder. Zaman değişkenine göre fiziksel süreçler üç gruba ayrılır. Bu gruplardan biri olan parabolik kısmi diferansiyel denklemler, zamana bağlılığı sadece hız ile ifade edilen fiziksel süreçleri karşılar. Parabolik türden lineer kısmi diferansiyel denklemlere en önemli örneklerden birisi ısı denklemdir.

Literatürde, kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesi için farklı nümerik metotlar ile çalışmalar yapılmıştır. Hem lineer hem de lineer olmayan parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri incelenmiştir.

Galerkin metodu yaklaşık çözüm elde etmede kullanılan yaygın metotlardan bir tanesidir. Teknolojinin gelişimi ile ihtiyaç haline gelen bazı mühendislik problemlerine ek olarak çeşitli diferansiyel denklemlerin çözümü için oldukça kullanışlı olan Galerkin metodu, makine, inşaat, otomotiv mühendislik uygulamaları, medikal uygulamalar, yapısal analizler ve elektromanyetik uygulama alanlarında sıklıkla başvurulanan kullanışlı bir yöntemdir.

Douglas and Dupont (1970) çalışmalarında Ω kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayının sınırlı bir alt bölgesi olmak üzere

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, x \in \Omega, t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega$$

$$u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega$$

parabolik denklemine Galerkin metodu ve Crank-Nicolson-Galerkin metodunu uygulayarak yaklaşık çözüm elde etmişlerdir. Ayrıca bu metotların hata analizlerini yapmışlardır

Wheeler (1973) ise çalışmasında

$$u_t = \nabla \cdot a(x, u) \nabla u + \sum_{i=1}^n b_i(x, u) u_{x_i} + f(x, u), (x, t) \in \Omega \times (0, T]$$

ve

$$u_t = \nabla \cdot a(x, u) \nabla u + \sum_{i,j=1}^n \left(a_{i,j}(x) p(x, u) u_{x_j} \right)_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i(x, u) u_{x_i} + f(x, u),$$

$$(x, t) \in \Omega \times (0, T]$$

denklemleri için Dirichlet sınır şartlı sistemini ele almıştır. Parabolik başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümlerinin Galerkin yaklaşımları için L_2 hata kestirimlerini ispatlamıştır.

Luskin (1979) çalışmasında Galerkin metodu yardımıyla lineer olmayan parabolik bir problemin çözümü elde edilmiştir.

Estep and Larsson (1993) çalışmalarında $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere Dirichlet sınır şartlı

$$u_t - \Delta u = f(x, t, u), (x, t) \in \Omega \times (0, t^*)$$

yarı lineer parabolik denkleminin süreksiz Galerkin metodu ile nümerik çözümünü yapmışlardır. Metodun hata kestirimini ispatlamışlardır. Yarı lineer denklemde sağ taraf fonksiyonunu $f(x, t, u) = 10(u - u^3)$ seçerek teorik sonuçları örnek üzerinde göstermişlerdir.

Amann (1998) çalışmasında lineer olmayan sınır şartlı yarı lineer bir parabolik denklem ele almıştır. Parabolik başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığını incelemiştir.

Galerkin metodunun lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması ve hata analizini yapan diğer bir bilim adamı da Zhelezovskii'dir. Zhelezovskii (1998) çalışmasında değişken operatör katsayılı bir lineer hiperbolik kısmi diferansiyel denkleme Galerkin metodunu uygulamış ve metodun hata analizini yapmıştır. Ayrıca Zhelezovskii and Lyashko (2001) çalışmasında lineer olmayan bir hiperbolik denklemin çözümü için Galerkin metodunun hata kestirimlerini ispatlamışlardır.

Li and Wang (2013) parabolik denklemlerin Galerkin metodu ile zayıf çözümünü incelemiştir. Ayrıca zayıf çözüm için hata analizini yapmış ve nümerik örnekler ile desteklemiştir.

Liang (2015) lineer parabolik denklemler için Galerkin metodunun hatasını incelemiştir ve elde edilen sonuçları nümerik örnekler üzerinde göstermiştir.

Adi diferansiyel denklem sistemlerinin değişik nümerik yöntemler ile çözümü farklı bilim adamları tarafından ele alınmıştır. Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemleri ve sabit katsayılı veya değişken katsayılı diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri için farklı yöntemler sunulmuştur.

Adomian ayrıştırma metodu (AAM), 1970 yılından sonra Georger Adomian tarafından geliştirilmiştir. Metot adi ve kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılır. Aynı zamanda adi ve kısmi diferansiyel denklem sistemlerine uygulaması da mevcuttur.

Abbaoui and Cherruault (1994) çalışmasında Adomian Ayrıştırma Metodunun lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere uygulandığında metodun yakınsaması ispat edilmiştir.

Biazar *et al.* (2004) çalışmasında Adomian Ayırıştırma Metodu (AAM) kullanılarak adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü ortaya konmuştur. Ayrıca bazı örnekler üzerinde hem lineer hem de lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.

Shawagfeh and Kaya (2004) adi diferansiyel denklem sistemleri için Adomian Ayırıştırma Metodu ile Runge Kutta metodu arasında karşılaştırmalar yapmışlardır. Nümerik doğruluğunu göstermek için biri lineer diğeri lineer olmayan iki örnek ele almışlardır .Bu çalışma ile Adomian metodunun, adi diferansiyel denklemlerinin geniş bir sınıfı için nümerik çözümlerine ek olarak analitik olarak da güçlü ve etkili olduğu sonucuna varabileceklerini öne sürmüşlerdir. Nümerik örneklerin sonuçlarını tablo haline getirip güçlü yakınsamalar olduğunu ispatlamışlardır.

Mahmood *et al.* (2005) birinci mertebeden başlangıç değer problemine Adomian Ayırıştırma Metodu uygulamışlardır. Çalıştıkları sistem

$$y'_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) + g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

şeklinde. Burada f_i , $i = 1, 2, \dots, m$ lineer olmayan fonksiyonlardır. Nümerik örneklerde hem lineer hem de lineer olmayan denklemler ele almış ve yaklaşık çözümleri bulmuşlardır.

El-Kalla (2006) çalışmasında lineer olmayan diferansiyel denklemlerin Adomian serileri ile çözümünün hata analizini yapmıştır.

Mirzaee (2011) türev dönüşüm metodunu n . mertebeden adi diferansiyel denklem sistemlerine uygulamıştır. Bununla birlikte örnekler üzerinde lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemleri olarak nümerik çözümlerini elde etmiştir.

Doğan (2012) çalışmasında

$$y_1'(t) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$y_2'(t) = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$y_n'(t) = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

adi diferansiyel denklem sistemini ele alıp Laplace Dönüşümü ve Adomian Ayırıştırma Metodunu birlikte kullanmıştır ve nümerik örnekler ile de çalışmasını desteklemiştir.

Al-Omari *et al.* (2013) birinci mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklem sisteminin nümerik çözümünü Galerkin sonlu elemanlar metodu ile yapmışlardır. Elde edilen sonuçları nümerik örneklerde test etmişlerdir.

Bu çalışmada öncelikle lineer parabolik bir problem ve lineer olmayan parabolik bir problemin yaklaşık çözümünden bahsedilmiştir. Ele alınan lineer parabolik problem bir uzay değişkenli ısı denklemi için bir başlangıç sınır değer problemidir. Her iki problem de Dirichlet sınır şartları ile verilmiştir. Galerkin metodunun bu sistemlere uygulanması ile bir adi diferansiyel denklem sistemine geçilmiştir. Lineer problem için bir lineer adi diferansiyel denklem sistemi ve lineer olmayan problem için bir lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Bu adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü için Adomian ayırıştırma metodu kullanılmıştır. Nümerik örneklerde bazı parabolik sistemler için yaklaşık çözümler elde edilmiştir.

Tezin devam eden bölümlerinde ilk olarak, 2. bölümde, tez için temel oluşturabilecek bazı tanımlara yer verilmiştir.

3.1. bölümde lineer parabolik bir problemin genelleştirilmiş çözüm tanımı verilmiştir. Ayrıca bu problem için tek bir genelleştirilmiş çözüm olduğu Teorem 3.1 ile desteklenmiş ve ispat ile teorem sonlandırılmıştır.

3.2. bölümde lineer olmayan bir parabolik problemin genelleştirilmiş çözümünün bulunması için Galerkin metodunun nasıl kullanılacağı incelenmiştir.

3.3. bölümde Galerkin metodunun kullanımı sonucunda elde edilen adi diferansiyel denklem sistemlerine Adomian ayrıştırma metodunun uygulanması anlatılmıştır

4. bölümde yapılan çalışmalar ile elde edilen bazı bulgular verilmiştir.

4.1. bölümde lineer parabolik problemler için nümerik örneklere yer verilmiş olup, özel bir örnek için MAPLE® programı yazılmıştır. Ayrıca bulunan sonuçların hata verileri tablolar şeklinde sunulmuştur.

4.2 bölümde lineer olmayan parabolik bir problem için nümerik örnekler incelenmiş, sonuçların hata gösterimi için tablolar sunulmuştur.

Son olarak 5. bölümde bu çalışmada yapılan uygulamalar belirtilmiş ve tezin önemi vurgulanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde verilen tanım ve teoremler için Hunter and Nachtergaele (2001), Kreyszig (1989), Ladyzhenskaya (1985), Zeidler (1995) ve Hasanoğlu (2010) kaynaklarından faydalanılmıştır.

Tanım 2.1: t bağımsız değişkenini, t 'ye bağlı $x_1, x_2, \dots, x_m$ fonksiyonlarını ve bu fonksiyonların türevlerini içeren n denklemden oluşan

$$\begin{aligned} f_1(t, x_1, x_1', x_1'', \dots, x_2, x_2', x_2'', \dots, \dots, x_m, x_m', x_m'', \dots) &= 0 \\ f_2(t, x_1, x_1', x_1'', \dots, x_2, x_2', x_2'', \dots, \dots, x_m, x_m', x_m'', \dots) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(t, x_1, x_1', x_1'', \dots, x_2, x_2', x_2'', \dots, \dots, x_m, x_m', x_m'', \dots) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

şeklindeki bir sisteme adi diferansiyel denklem sistemi denir.

$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_m = \varphi_m(t)$ fonksiyonları (2.1) sistemini özdeş olarak sağlıyorsa bu fonksiyonlar (2.1) sisteminin bir çözümü olur.

Tanım 2.2: Bir adi diferansiyel denklem sisteminde yer alan tüm denklemler lineer ise bu sisteme lineer adi diferansiyel denklem sistemi denir. Tek bir diferansiyel denklem bile lineer değilse sisteme lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemi denir.

Tanım 2.4: Bir lineer adi diferansiyel denklem sisteminde yer alan tüm denklemler sabit katsayılı ise bu sisteme sabit katsayılı lineer adi diferansiyel denklem sistemi denir. Eğer sistemindeki denklemlerden en az biri değişken katsayılı ise sisteme değişken katsayılı lineer adi diferansiyel denklem sistemi denir.

Tanım 2.5: Her bir denklemde bilinmeyenlerden sadece birinin birinci mertebeden türevi bulunan

$$\begin{aligned}
 x_1'(t) &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \\
 x_2'(t) &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \\
 &\vdots \\
 x_m'(t) &= f_m(t, x_1, x_2, \dots, x_m)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklindeki diferansiyel denklem sistemine normal sistem denir. Burada $f_1, f_2, \dots, f_m$ fonksiyonları $t, x_1, x_2, \dots, x_m$ argümanlarının verilmiş fonksiyonlarıdır.

Tanım 2.6: Eğer bir $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralığında birinci mertebeden sürekli türevlere sahip olan bir $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}$ fonksiyon kümesi, (2.2) sisteminin her denklemini özdeş olarak sağlıyorsa, bu fonksiyon kümesine I aralığında (2.2) sisteminin bir çözümü denir.

m . mertebeden bir normal sistemin, m keyfi sabite bağlı olan

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \varphi_1(t, c_1, c_2, \dots, c_m) \\
 x_2 &= \varphi_2(t, c_1, c_2, \dots, c_m) \\
 &\vdots \\
 x_m &= \varphi_m(t, c_1, c_2, \dots, c_m)
 \end{aligned}$$

şeklinde çözümü vardır. Bu çözüme normal sistemin genel çözümü denir. Genel çözümde $c_1, c_2, \dots, c_m$ sabitlerine özel değerler vererek elde edilen çözüme özel çözüm denir. Keyfi sabit içermeyen ve özel çözümden elde edilemeyen çözümlere de tekil çözüm denir.

Tanım 2. 7: $a_1, a_2, \dots, a_m$ önceden verilmiş değerler olmak üzere (2.2) normal sisteminin bir $t_0 \in I$ başlangıç noktasında

$$x_1(t_0) = a_1, x_2(t_0) = a_2, \dots, x_m(t_0) = a_m \quad (2.3)$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümünün bulunması problemine, (2.2) sistemi için bir başlangıç değer problemi denir.

Başlangıç değer probleminin bir I aralığında çözümü demek, bu I aralığında sistemdeki tüm denklemleri sağlayan ve $t_0 \in I$ başlangıç noktasında verilen başlangıç şartlarını sağlayan bir $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}$ fonksiyon kümesidir.

Tanım 2.8: X bir metrik uzay olsun. X de tanımlı tüm reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi bir normlu uzaydır ve uzay $C(X)$ ile gösterilir. Bu uzayda metrik ve norm sırasıyla

$$d(f, g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

ve

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.9: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $C^k(\Omega)$, k . mertebeye kadar türevleri Ω bölgesinde sürekli olan tüm sürekli fonksiyonların oluşturduğu kümedir.

Tanım 2.10: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $C^k(\bar{\Omega})$, k . mertebeye kadar türevleri $\bar{\Omega}$ bölgesinde sürekli olan tüm sürekli fonksiyonların oluşturduğu Banach uzayıdır. Bu uzayda norm

$$|u|_{\Omega}^k = \sum_{|l|=0}^k \sum_{(l)} \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial^{|l|} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right|$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.11: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere $C^{2,1}(\Omega)$, birinci değişkenine göre ikinci mertebeden ve ikinci değişkenine göre birinci mertebeden sürekli türevlere sahip olan Ω bölgesinde tüm sürekli fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 2.12: $\Omega \subset \mathbb{R}$ ölçülebilir bir küme ve bu küme üzerinde tanımlı f fonksiyonu için hemen hemen her yerde $\|f(x)\| \leq c$ olacak $c \geq 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna Ω da hemen hemen her yerde sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan $c \geq 0$ sayılarının en küçüğüne f fonksiyonunun esaslı sınırı denir.

Ω üzerinde esaslı sınırı sahip fonksiyonların uzayı $L_{\infty}(\Omega)$ ile gösterilir ve

$$\|f\|_{L_{\infty}} = \inf\{c \geq 0 : |f(x)| \leq c\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.13: Keyfi m, n sayıları ve herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$|mn| \leq \frac{1}{2\varepsilon} |m|^2 + \frac{\varepsilon}{2} |n|^2$$

eşitsizliğine ε -Cauchy Eşitsizliği adı verilir.

Tanım 2.14: Her $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq n_0$ için $|x_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı bulunabiliyor ise a sayısına (x_n) dizisinin limiti adı verilir. Bu durumda (x_n) dizisi a

ya yakınsıyor denir. Bir dizi herhangi bir limit değerine yakınsıyor ise bu diziye yakınsık dizi denir.

Tanım 2.15: a_n , Hilbert uzayında bir dizi olmak üzere her $b \in H$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n, b \rangle = \langle a, b \rangle$$

eşitliği sağlanması durumunda a_n dizisi $a \in H$ elemanına zayıf yakınsıyor denir.

Tanım 2.16: $L_2(0, l)$, $(0, l)$ aralığında karesel olarak integrallenebilir fonksiyonların oluşturduğu bir uzaydır. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle f, g \rangle_{L_2[0, l]} = \int_0^l f(x)g(x)dx, \quad \|f\|_{L_2(0, l)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L_2[0, l]}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.17: $L_2(\Omega)$, $\Omega = (0, l) \times (0, T]$ bölgesinde ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonların Hilbert uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} f(x, t)g(x, t)dxdt$$

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L_2(\Omega)}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.18: $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, bir iç çarpım uzayı olsun. Bu uzay $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ metriğine göre tam ise Hilbert uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.19: $W_2^1(0, l) = H^1(0, l)$, Hilbert uzayı olup kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0, l)$ uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır.

$H_0^1(0, l)$ uzayı $H^1(0, l)$ uzayının alt uzayı olup, $(0, l)$ aralığının sınırlarında sıfır olan fonksiyonlar içermektedir. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(0, l)} = \int_0^l \left(u(x)v(x) + \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} \right) dx,$$

$$\|u\|_{H_0^1(0, l)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H_0^1(0, l)}}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca bu uzayda Poincare iç çarpım ve normu aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(0, l)} = \int_0^l \left(\frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} \right) dx$$

$$\|u\|_{H_0^1(0, l)} = \left(\int_0^l \left(\frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$H_0^1(0, l)$ uzayında yukarıda verilen iki norm denk normlardır.

Tanım 2.20: $H^1(\Omega)$ kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait fonksiyonların oluşturduğu Sobolev uzayıdır.

$H_0^1(\Omega)$ uzayı $H^1(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup, Ω kümesinin sınırlarında sıfır olan fonksiyonlar içermektedir.

Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla $u(x, t), v(x, t) \in \Omega$ için

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \iint_{\Omega} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) dx dt$$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H_0^1(\Omega)}}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca bu uzayda Poincare iç çarpım ve normu sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L_2(\Omega)}$$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

$H_0^1(0, l)$ uzayında yukarıda verilen iki norm denk normlardır.

Tanım 2.21: $W_2^{1,0}(\Omega) = H^{1,0}(\Omega) = L_2((0, T), W_2^1(\Omega))$ kendisi ve x değişkenine göre birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayıdır.

Bu uzayda iç çarpım

$$\langle u, v \rangle_{H^{1,0}(\Omega)} = \iint_{\Omega} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt$$

ve norm

$$\|u\|_{H^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^{1,0}(\Omega)}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.22: $A: n \times n$ tipinde bir matris olsun.

- 1) $A^T = A$
- 2) Her $y \in \mathbb{R}^n$ için $y^T A y > 0$

ise A matrisine pozitif tanımlı denir.

$n \times n$ tipinde A matrisinin pozitif olması için gerek ve yeter şart $k = 1, 2, \dots, n$ için,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} > 0$$

olmasıdır.

Tanım 2.23: X bir sütun matris olmak üzere $G = X.X^T$ olarak tanımlanan G matrisine Gram matris adı verilir.

İç çarpım uzayındaki $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerinin Gram matrisi

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & & \langle x_n, x_n \rangle \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Burada $\langle ., . \rangle$ ile iç çarpım gösterilmiştir.



3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu çalışmada değişken katsayılı lineer

$$u_t - (k(x)u_x)_x = F(x, t), (x, t) \in \Omega := (0, l) \times (0, T] \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), x \in (0, l) \quad (3.2)$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \in (0, T] \quad (3.3)$$

parabolik başlangıç sınır değer problemi ve lineer olmayan

$$u_t - (a(x, u)u_x)_x = f(x, t, u), (x, t) \in \Omega := (0, l) \times (0, T] \quad (3.4)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), x \in (0, l) \quad (3.5)$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \in (0, T] \quad (3.6)$$

parabolik başlangıç sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada l ve T pozitif sayıdır.

(3.1) denklemi $l > 0$ uzunluğa sahip bir çubuk için ısı iletim denklemi olarak ele alınır. Burada $k(x)$ ısı iletim katsayısı ve $F(x, t)$ ısı kaynağının yoğunluğunu belirten fonksiyondur. (3.2) şartı ile verilen $\varphi(x)$, $t = 0$ başlangıç anında ısı iletim fonksiyonudur. Ayrıca (3.3) Dirichlet sınır şartları ise $x = 0$ ve $x = l$ uçlarında ısının değerini belirtmektedir (Tikhonov and Samarskii 1963).

$(x, t) \in \Omega := (0, l) \times (0, T]$ bölgesinde (3.1) ile verilen denklemin $t = 0$ anında (3.2) şartını ve $x = 0$ ve $x = l$ sınırlarında (3.3) şartlarını sağlayan $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ fonksiyonuna ısı iletim denklemi için Dirichlet başlangıç sınır değer probleminin klasik çözümü denir. Bu çözümü elde etmek için giriş verilerinin

$$k(x) \in C^1(0, l), \varphi(x) \in C[0, l], F(x, t) \in C(\Omega) \quad (3.7)$$

ve

$$0 < k_0 \leq k(x) \leq k_1, x \in (0, l) \quad (3.8)$$

koşullarını sağlaması gerekir (Hasanoğlu 2010).

Bu çalışmada amacımız (3.1)-(3.3) ve (3.4)-(3.6) problemlerine bir çözüm elde etmektir. Bu parabolik problemler için zayıf çözümün tanımı verilecek ve zayıf çözümün nasıl elde edilebildiği açıklanacaktır.

(3.4)-(3.6) probleminin üzerine bazı şartlar ekleyelim. Her $(x, p) \in (0, l) \times \mathbb{R}$ için

$$0 < C_0 \leq a(x, p) \leq C_1 \quad (3.9)$$

ve $w(x) \in L_2(0, l)$ için

$$\psi \in L_2(0, l), f(x, t, w(x)) \in L_2(0, l) \quad (3.10)$$

şartlarının sağlandığını kabul edelim.

3.1. Lineer Parabolik Problem için Genelleştirilmiş Çözüm

(3.1)-(3.3) lineer parabolik sisteminin genelleştirilmiş çözüm tanımı verelim.

(3.1) denklemi $v \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu ile çarpılır ve Ω kümesinde integrallenirse

$$\int_0^T \int_0^l u_t v dx dt - \int_0^T \int_0^l (k(x)u_x)_x v dx dt = \int_0^T \int_0^l F(x,t) v dx dt \quad (3.11)$$

elde edilir. Şimdi bu ifadede sol tarafta yer alan her iki integrale kısmi integrasyon uygulayalım.

Sol taraftaki ilk integrale kısmi integral uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l u_t v dx dt &= \int_0^l \left(u_t v \Big|_0^T - \int_0^T u v_t dt \right) dx \\ &= \int_0^l u_t(x, T) v(x, T) dx - \int_0^l u_t(x, 0) v(x, 0) dx \\ &\quad - \int_0^T \int_0^l u v_t dx dt \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $v(x, T) = 0$ şartı ve $u_t(x, 0) = \varphi(x)$ olduğu kullanılarak

$$\int_0^T \int_0^l u_t v dx dt = - \int_0^l \varphi(x) v(x, 0) dx - \int_0^T \int_0^l u v_t dx dt$$

yazılır. Şimdi benzer şekilde sol tarafta yer alan ikinci integrale kısmi integrasyon uygulayalım.

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l (k(x)u_x)_x v dx dt &= \int_0^T \left(k(x)u_x v \Big|_0^l - \int_0^l k(x)u_x v_x dx \right) dt \\ &= \int_0^T k(l)u_x(l, t) v(l, t) dt - \int_0^T k(0)u_x(0, t) v(0, t) dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^l k(x)u_x v_x dx dt \end{aligned}$$

Burada $v(0, t) = 0$ ve $v(l, t) = 0$ olduğundan

$$\int_0^T \int_0^l (k(x)u_x)_x v dx dt = - \int_0^T \int_0^l k(x)u_x v_x dx dt$$

elde edilir. Bu son ifadeler ilgili denklemde yerine yazıldığında

$$\int_0^T \int_0^l (-uv_t + k(x)u_x v_x) dx dt = \int_0^l \varphi(x)v(x,0)dx + \int_0^T \int_0^l Fv dx dt \quad (3.12)$$

integral eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\langle u(x,0), v \rangle_{L_2(0,l)} = \langle \varphi, v \rangle_{L_2(0,l)} \quad (3.13)$$

olur.

Tanım 3.1.1: $v(x,T) = 0$ özelliğindeki her $v \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için (3.12) ve (3.13) eşitliklerini sağlayan $u \in H^{1,0}(\Omega)$ elemanına (3.1)-(3.3) probleminin zayıf çözümü veya genelleştirilmiş çözümü denir (Ladyzhenskaya 1985).

Ayrıca bu zayıf çözüm için

$$k \in L_\infty(0,l), \varphi \in L_2(0,l), F \in L_2(\Omega) \quad (3.14)$$

ve $x \in (0,l)$ için

$$0 < k_0 \leq k(x) \leq k_1 \quad (3.15)$$

şartlarının sağlanması gerekir.

Teorem 3.1.1: (3.14) ve (3.15) şartları sağlansın. Bu durumda (3.1)-(3.3) başlangıç değer probleminin $H^{1,0}(\Omega)$ uzayında tek bir genelleştirilmiş çözümü vardır. Bu çözüm

$$\max_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega)} \leq c_0 [\|\varphi\|_{L_2(0, l)} + \|f\|_{L_2(\Omega)}] \quad (3.16)$$

kestirimini sağlar (Ladyzhenskaya, 1985).

İspat: (3.1) denklemini u ile çarpıldıktan sonra $t \in [0, T]$ olmak üzere $\Omega_t := (0, l) \times (0, t)$ üzerinde integrallenirse

$$\int_0^t \int_0^l (u_t - (k(x)u_x)_x) u dx dt = \int_0^t \int_0^l f u dx dt, t \in [0, T]$$

yazılır. Buradan kısmi integrasyon alınarak

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l \frac{du^2}{dt} dx dt - \int_0^t \left[k(x)u_x u \Big|_0^l - \int_0^l k(x)u_x u_x dx \right] dt = \int_0^t \int_0^l f u dx dt, t \in [0, T]$$

elde edilir. (3.3) sınır şartlarına göre $u(0, t) = 0$ ve $u(l, t) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l [u(x, t)]^2 dx + \int_0^t \int_0^l k(x)u_x u_x dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l [u(x, 0)]^2 dx + \int_0^t \int_0^l f u dx dt, t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.17)$$

bulunur. Bu ifadeye (3.1)-(3.3) probleminin enerji-denge denklemi denir. Cauchy-Schwartz eşitsizliği ve (3.15) şartından faydalanılarak

$$\frac{1}{2} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 + k_0 \|u_x\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leq \frac{1}{2} \|u(\cdot, 0)\|_{L_2(0, l)}^2 + \max_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\cdot, \tau)\|_{L_2(0, l)} \int_0^t \|f\|_{L_2(0, l)} dt$$

elde edilir. Buradan

$$\max_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\cdot, \tau)\|_{L_2(0,l)}^2 \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L_2(0,l)}^2 + 2 \max_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\cdot, \tau)\|_{L_2(0,l)} \int_0^t \|f\|_{L_2(0,l)} dt, t \in [0, T]$$

ve

$$\|u_x\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leq \frac{1}{2k_0} \|u(\cdot, 0)\|_{L_2(0,l)}^2 + \frac{1}{k_0} \max_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\cdot, \tau)\|_{L_2(0,l)} \int_0^t \|f\|_{L_2(0,l)} dt, t \in [0, T]$$

yazılabilir. Bu iki eşitsizliğin karekökünü alıp, taraf tarafa toplayalım. Daha sonra bu toplamda

$$\|u(\cdot, 0)\|_{L_2(0,l)} \leq |u|_{\Omega_t} := \max_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega)}$$

ve

$$\max_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\cdot, \tau)\|_{L_2(0,l)} \leq |u|_{\Omega_t} := \max_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega)}$$

eşitsizlikleri değerlendirilir ve ifadenin karesi alınırsa $t \in [0, T]$ için

$$\max_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega_t)} \leq \left[\left(2 + \frac{1}{k_0}\right) \|u(\cdot, 0)\|_{L_2(0,l)} + \left(4 + \frac{2}{k_0}\right) \int_0^t \|f\|_{L_2(0,l)} dt \right]$$

bulunur. Buradan

$$\max_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega_t)} \leq \left(4 + \frac{2}{k_0}\right) [\|u(\cdot, 0)\|_{L_2(0,l)} + \sqrt{t} \|f\|_{L_2(\Omega_t)}], t \in [0, T]$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $t = T$ alınırsa

$$\max_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega)} \leq c_0 [\|\varphi\|_{L_2(0,l)} + \|f\|_{L_2(\Omega)}]$$

olur. Burada $c_0 = \max(1, \sqrt{T}) \left(4 + \frac{2}{k_0}\right)$ şeklindedir. Böylelikle (3.16) eşitsizliği ispat edilmiştir.

Şimdi $H^{1,0}(\Omega)$ uzayında (3.1)-(3.3) probleminin bir genelleştirilmiş çözümünün var olduğunu ispat edelim.

(3.1)-(3.3) lineer parabolik probleminin çözümü olan u fonksiyonuna

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i(x) \quad (3.18)$$

fonksiyonlarıyla yaklaşılabılır. Burada $\varphi_i, i = 1, 2, \dots$ fonksiyonları $H_0^1(0, l)$ uzayında temel sistem ($L_2(0, l)$ uzayında ortonormal) ve $c_i(t)$ katsayıları ise bulunması gereken fonksiyonlardır.

Şimdi Galerkin metodunu kullanarak (3.1)-(3.3) probleminin yaklaşık çözümünü elde edelim.

$\varphi_l, l = 1, 2, \dots, N$ fonksiyonları ile (3.1) denklemi çarpılır ve $(0, l)$ de integrali alınırsa

$$\int_0^l u_t \varphi_l dx - \int_0^l (k(x) u_x)_x \varphi_l dx = \int_0^l F \varphi_l dx, l = 1, 2, \dots, N$$

yazılır. Yukarıda sol tarafta yer alan ikinci integrale kısmi integral uygulanırsa

$$\int_0^l u_t \varphi_l dx + \int_0^l k(x) u_x \varphi_{l_x} dx = \int_0^l F \varphi_l dx, l = 1, 2, \dots, N \quad (3.19)$$

bulunur. (3.19) da u yerine $U = \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i(x)$ fonksiyonu yazılırsa $l = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_0^l \sum_{i=1}^N c_i'(t) \varphi_i(x) \varphi_l(x) dx + \int_0^l \sum_{i=1}^N k(x) c_i(t) \varphi_i'(x) \varphi_l'(x) dx \\ = \int_0^l F(x, t) \varphi_l(x) dx \end{aligned} \quad (3.20)$$

eşitliği elde edilir. Bu son ifadede

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle_{L_2(0,l)} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}$$

özellği göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} c_1'(t) + \int_0^l k(x) \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i'(x) \varphi_1'(x) dx &= \int_0^l F(x, t) \varphi_1(x) dx \\ c_2'(t) + \int_0^l k(x) \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i'(x) \varphi_2'(x) dx &= \int_0^l F(x, t) \varphi_2(x) dx \\ &\vdots \\ c_N'(t) + \int_0^l k(x) \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i'(x) \varphi_N'(x) dx &= \int_0^l F(x, t) \varphi_N(x) dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

adi diferansiyel denklem sistemi bulunur. Bu sistem için

$$c_i(0) = \langle \varphi, \varphi_i \rangle_{L_2(0,l)}, i = 1, 2, \dots, N \quad (3.22)$$

başlangıç şartları elde edilir. (3.21) sistemi, bilinmeyenleri $c_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ olan lineer adi diferansiyel denklem sistemidir. (3.21)-(3.22) sisteminin $[0, T]$ de sürekli $c_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ tek çözümü vardır (Çağlayan 2013).

U için N sayısına bağlı olmayan bir sınır elde etmek mümkündür. Bunun için (3.19) denklemleri uygun c_i ile çarpılır, 1 de N e kadar toplanır ve daha sonra $0 < t \leq T$ için $[0, t]$ de integrali alınırsa $u = U$ için (3.17) denklemi elde edilmiş olur. (3.17) ifadesinin (3.16) eşitsizliğini gerektirdiğini biliyoruz.

O halde

$$\max_{t \in [0, T]} \|U(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)} + \|U_x\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 \quad (3.23)$$

yazılabilir. Burada c_1 , N den bağımsız bir sabittir. (3.23) den dolayı (3.18) ile tanımlanan dizinin $u \in H^{1,0}(\Omega)$ elemanına $L_2(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsayan bir alt dizisi seçilebilir. Bu $u(x, t)$ fonksiyonu (3.1)-(3.3) probleminin genelleştirilmiş çözümüdür.

(3.20) denklemleri $\frac{dd_l}{dt} \in L_2(0, T)$, $d_l(T) = 0$ şartını sağlayan keyfi bir $d_l(t)$ fonksiyonu ile çarpılıp, denklemler toplanır ve sonra da $[0, T]$ de integral alınırsa

$$\int_0^T \int_0^l (-U\phi_t + kU_x\phi_x) dx dt = \int_0^l U\phi|_{t=0} dx + \int_0^T \int_0^l F\phi dx dt \quad (3.24)$$

bulunur. Burada $\phi = \sum_{l=1}^N d_l(t)\phi_l(x)$ şeklindedir. Bu şekildeki tüm ϕ fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{M}_N$ ile gösterilsin. $\cup_{p=1}^\infty \mathcal{M}_p$ toplamı, $t = T$ için sıfıra eşit olan $H_0^1(\Omega)$ nin alt kümesinde yoğundur. (3.24) denkleminde sabit bir $\phi \in \mathcal{M}_p$ için $N_k \geq p$ ile başlanarak yukarıda bahsedilen alt dizinin limiti alınabilir. Sonuç olarak $v = \phi \in \mathcal{M}_p$ olmak üzere u fonksiyonu için (3.12) integral denklemi elde edilir. $\cup_{p=1}^\infty \mathcal{M}_p$ toplamı, $H_0^1(\Omega)$ uzayının $t = T$ için sıfıra eşit olan fonksiyonların oluşturduğu alt kümesinde yoğun olduğundan (3.12) denklemi aslında her $v \in H_0^1(\Omega)$, $v(x, T) = 0$ fonksiyonu için sağlanmaktadır. O halde bu $u(x, t)$, (3.1)-(3.3) probleminin genelleştirilmiş çözümüdür.

Böylelikle genelleştirilmiş çözümün varlığı gösterilmiş oldu. Şimdi çözümün tekliğinin ispatını ele alalım. Bunun için u_1 ve u_2 şeklinde iki farklı çözüm olduğu kabul edelim. Bu durumda $r = u_1 - u_2$ fonksiyonu

$$r_t - (k(x)r_x)_x = 0, \quad (x, t) \in \Omega := (0, l) \times (0, T]$$

$$r(x, 0) = 0, \quad x \in (0, l)$$

$$r(0, t) = 0, \quad r(l, t) = 0, \quad t \in (0, T]$$

probleminin bir genelleştirilmiş çözümü olur. (3.16) eşitsizliğinin ispatı için yapılan adımlar uygulandığında bu problem için

$$\max_{t \in [0, T]} \|r(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)} + \|r_x\|_{L_2(\Omega)} \leq 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda $r = 0$ olmak zorunda olup, u_1 ve u_2 aynı elemandır. Böylece ispat tamamlanır.

(3.21) adi diferansiyel denklem sistemi

$$C' + AC = F \tag{3.25}$$

şeklinde ve (3.22) başlangıç şartları

$$C(0) = C_0 \tag{3.26}$$

şeklinde matris formda yazılabilir. Burada C bilinmeyen matrisi olmak üzere matrisler

$$C = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_N(t) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \int_0^l k(x) \varphi_1'(x) \varphi_1'(x) dx & \int_0^l k(x) \varphi_2'(x) \varphi_1'(x) dx & \cdots & \int_0^l k(x) \varphi_N'(x) \varphi_1'(x) dx \\ \int_0^l k(x) \varphi_1'(x) \varphi_2'(x) dx & \int_0^l k(x) \varphi_2'(x) \varphi_2'(x) dx & \cdots & \int_0^l k(x) \varphi_N'(x) \varphi_2'(x) dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^l k(x) \varphi_1'(x) \varphi_N'(x) dx & \int_0^l k(x) \varphi_2'(x) \varphi_N'(x) dx & \cdots & \int_0^l k(x) \varphi_N'(x) \varphi_N'(x) dx \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} \int_0^l F(x, t) \varphi_1(x) dx \\ \int_0^l F(x, t) \varphi_2(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^l F(x, t) \varphi_N(x) dx \end{bmatrix}$$

ve

$$C_0 = \begin{bmatrix} \int_0^l \varphi(x) \varphi_1(x) dx \\ \int_0^l \varphi(x) \varphi_2(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^l \varphi(x) \varphi_N(x) dx \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

3.2. Lineer olmayan Parabolik Problem için Genelleştirilmiş Çözüm

Bu çalışmada (3.4)-(3.6) parabolik sistemi için aşağıdaki zayıf çözüm tanımı kullanılmıştır.

Tanım 3.2.1: Her $v \in H_0^1(0, l)$ fonksiyonu için

$$\langle u_t, v \rangle_{L_2(0, l)} + \int_0^l a(x, u) u_x v_x dx = \int_0^l f(x, t, u) v dx, x \in (0, l), 0 < t \leq T \quad (3.27)$$

ve

$$\langle u(x, 0), v \rangle_{L_2(0, l)} = \langle \psi, v \rangle_{L_2(0, l)} \quad (3.28)$$

eşitliklerini sağlayan $u \in H_0^1(0, l)$, $0 < t \leq T$ elemanına (3.4)-(3.6) probleminin zayıf çözümü denir (Wheeler 1973).

Parabolik problem için zayıf çözüm Galerkin metodu kullanılarak elde edilebilir. Galerkin metoduna göre $u \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonuna

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i(x) \quad (3.29)$$

fonksiyonlarıyla yaklaşılabılır. Burada $\varphi_i, i = 1, 2, \dots$ fonksiyonları $H_0^1(0, l)$ uzayında lineer bağımsız fonksiyonlar ve $c_i(t)$ katsayıları ise bulunması gereken fonksiyonlardır.

$\mathcal{M}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ lineer bağımsız fonksiyonları tarafından gerilen ve $H_0^1(\Omega)$ kümesinin sonlu boyutlu bir alt uzayı olsun. (3.4) denklemi (3.29) ile tanımlanan $U(x, t)$ için yeniden yazılır, $V \in \mathcal{M}$ fonksiyonu ile çarpılır ve sonra $(0, l)$ aralığında integrallenirse

$$\int_0^l U_t V dx - \int_0^l (a(x, U) U_x)_x V dx = \int_0^l f(x, t, U) V dx \quad (3.30)$$

yazılır. Burada sol tarafta yer alan ikinci integrale kısmi integral uygulanırsa

$$\int_0^l (a(x, U)U_x)_x V dx = (a(x, U)U_x)V \Big|_0^l - \int_0^l a(x, U)U_x V_x dx$$

buradan

$$\int_0^l (a(x, U)U_x)_x V dx = - \int_0^l a(x, U)U_x V_x dx$$

elde edilir. Bu ifade (3.30) de yerine yazılırsa

$$\int_0^l U_t V dx + \int_0^l a(x, U)U_x V_x dx = \int_0^l f(x, t, U)V dx, \quad (3.31)$$

$$\langle U(x, 0), V \rangle_{L_2(0, l)} = \langle \psi, V \rangle_{L_2(0, l)}$$

bulunur.

(3.31) ifadesinde (3.29) ile verilen U fonksiyonu yerine yazılır ve V yerine φ_l , $l = 1, 2, \dots, N$ fonksiyonları alınır

$$\begin{aligned} & \int_0^l \sum_{i=1}^N c_i'(t) \varphi_i(x) \varphi_l(x) dx + \int_0^l a \left(x, \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i(x) \right) \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i'(x) \varphi_l'(x) dx \\ &= \int_0^l f(x, t, \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i(x)) \varphi_l(x) dx \end{aligned} \quad (3.32)$$

eşitliği elde edilir. Bu sistem vektörel formda

$$BC' = -D(C)C + E(C) \quad (3.33)$$

şeklinde yazılır. Başlangıç şartları

$$BC(0) = C_1 \quad (3.34)$$

olur. Burada

$$C = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_N(t) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \int_0^l \varphi_1 \varphi_1 dx & \int_0^l \varphi_2 \varphi_1 dx & \cdots & \int_0^l \varphi_N \varphi_1 dx \\ \int_0^l \varphi_1 \varphi_2 dx & \int_0^l \varphi_2 \varphi_2 dx & \cdots & \int_0^l \varphi_N \varphi_2 dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^l \varphi_1 \varphi_N dx & \int_0^l \varphi_2 \varphi_N dx & \cdots & \int_0^l \varphi_N \varphi_N dx \end{bmatrix},$$

$$D(C) = \begin{bmatrix} \int_0^l a(x, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \varphi_1' \varphi_1' dx & \cdots & \int_0^l a(x, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \varphi_N' \varphi_1' dx \\ \int_0^l a(x, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \varphi_1' \varphi_2' dx & \cdots & \int_0^l a(x, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \varphi_N' \varphi_2' dx \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^l a(x, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \varphi_1' \varphi_N' dx & \cdots & \int_0^l a(x, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \varphi_N' \varphi_N' dx \end{bmatrix},$$

$$E(C) = \begin{bmatrix} \int_0^l f(x, t, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \varphi_1 dx \\ \int_0^l f(x, t, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \varphi_2 dx \\ \vdots \\ \int_0^l f(x, t, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \varphi_N dx \end{bmatrix}$$

ve

$$C_1 = \begin{bmatrix} \int_0^l \psi \varphi_1 dx \\ \int_0^l \psi \varphi_2 dx \\ \vdots \\ \int_0^l \psi \varphi_N dx \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

B matrisi Gram matrisi olduğundan pozitif tanımlıdır ve tersi vardır. Bu durumda (3.33) sistemi

$$C' = -B^{-1}D(C)C + B^{-1}E(C) \quad (3.35)$$

şeklinde yazılabilir.

3.3. Adi Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü İçin Adomian Ayırıştırma Metodu

Bu bölümde normal diferansiyel denklem sistemleri için başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümü üzerinde durulmuştur. Lineer sabit katsayılı adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerini bulmak pratik olabilirken değişken katsayılı lineer adi diferansiyel denklem sistemleri ve lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerini çözmek daha karmaşıktır. Hatta bazen bir diferansiyel denklem sisteminin çözümü olsa bile, bu çözüm çok karmaşık veya hesaplamalar için kullanışsız olabilir. İşte böyle durumlarda denklem sisteminin çözümüne nümerik yaklaşımlar oluşturulur. Adomian ayırıştırma metodu adi diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için kullanılabilecek nümerik metotlardan biridir.

Şimdi Adomian Ayırıştırma Metodundan (AAM) bahsedelim.

$$y_i' = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) + g_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (3.36)$$

adi diferansiyel denklem sisteminin

$$y_i(0) = y^i, i = 1, 2, \dots, m$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümlerinin Adomian ayırıştırma metodu ile nasıl elde edilebileceğini açıklayalım. Bu denklem sisteminde f_i lineer olmayan fonksiyon ve g_i , t 'nin bilinen fonksiyonlarıdır. (3.36) sistemi $L = \frac{d}{dt}$ lineer operatörü ve $N_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ lineer olmayan operatörü ile

$$Ly_i = N_i(y_1, y_2, \dots, y_n) + g_i \quad (3.37)$$

şeklinde yazılır. (3.37) ifadesinin her iki tarafına L^{-1} ters operatörü uygulanırsa $(L^{-1}[\cdot] = \int_0^t [\cdot] dt)$

$$y_i = y_i(0) + L^{-1}N_i(y_1, y_2, \dots, y_n) + L^{-1}g_i \quad (3.38)$$

denklemleri elde edilir. Adomian metodu için ayırıştırılmış seri fonksiyonu

$$y_i = \sum_{n=0}^{\infty} y_{i,n}, i = 1, 2, \dots, m \quad (3.39)$$

ve lineer olmayan N_i operatörünün ayırıştırma fonksiyonu

$$N_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{i,n}, i = 1, 2, \dots, m \quad (3.40)$$

şeklinde dir. Burada $A_{i,n}$ Adomian polinom fonksiyonlarıdır ve şu şekilde tanımlanır:

$$A_{i,n} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [N_i(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i)]_{\lambda=0}, n = 1, 2, \dots \quad (3.41)$$

(3.39) ve (3.40) eşitlikleri (3.38) te yerine konulursa

$$y_i = \sum_{n=0}^{\infty} y_{i,n} = y_i(0) + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_{i,n} + L^{-1} g_i \quad (3.42)$$

denklemini elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} y_{i,0} &= y_i(0) + L^{-1} g_i \\ y_{i,n+1} &= \int_0^l A_{i,n}(y_0, \dots, y_n) dt, i = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.43)$$

denklemleri oluşturulur. Böylelikle y_i nin tüm bileşenleri verilen $A_{i,n}$ Adomian polinom fonksiyonlarıyla hesaplanabilir.

Örnek 3.3.1: $y''' = \frac{1}{x}y + y'$ diferansiyel denkleminin $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $y = xe^x$ fonksiyonudur. Yaklaşık çözümü ADM ile bulalım.

$y_1(x) = y(x), y_2(x) = y'(x)$ ve $y_3(x) = y''(x)$ olarak alınmasıyla verilen diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= \frac{1}{x}y_1 + y_2 \end{aligned}$$

sistemine dönüşür.

$$y_{1,0} = 0$$

$$y_{2,0} = 1$$

$$y_{3,0} = 2$$

olmak üzere, sisteme L^{-1} ters operatörünü uygulanıp ($L^{-1}[\cdot] = \int_0^x [\cdot] dx$) Adomian polinomlarını kullanılırsa

$$\begin{aligned} y_{1,n+1} &= \int_0^x y_{2,n} dt \\ y_{2,n+1} &= \int_0^x y_{3,n} dt \\ y_{3,n+1} &= \int_0^x \left(\frac{1}{x} y_{1,n} + y_{2,n} \right) dt \end{aligned}$$

elde edilir. $y^p = y_{1,0} + y_{1,1} + \dots + y_{1,p}$ fonksiyonu $p + 1$ terimden oluşan yaklaşık çözüm olsun. O halde

$$y^3 = x \left(1 + x + \frac{x^2}{3} \right)$$

$$y^4 = x \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} \right)$$

$$y^5 = x \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{60} \right)$$

$$y^6 = x \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{7x^4}{180} + \frac{x^5}{360} \right)$$

$$y^7 = x \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{31x^5}{4320} + \frac{x^7}{2520} \right)$$

$\vdots$

yaklaşımları elde edilir. Bu şekilde devam edilirse $y = xe^x$ çözümüne ulaşılabacağı aşıkardır (Biazar, 2004).

Örnek 3.3.2:

$$y_1' = 2y_2^2$$

$$y_2' = e^{-x}y_1$$

$$y_3' = y_2 + y_3$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistemin

$$y_1(0) = 1$$

$$y_2(0) = 1$$

$$y_3(0) = 0$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^x$ ve $y_3(x) = xe^{3x}$ şeklindedir.

Denklem sistemine L^{-1} ters operatörü ($L^{-1}[\cdot] = \int_0^x [\cdot] dx$) uygulandığında

$$y_1 = 1 + 2 \int_0^x y_2^2 dx$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x e^{-x} y_1 dx$$

$$y_3 = \int_0^x (y_2 + y_3) dx$$

eşitlikleri elde edilir.

$$y_{1,0} = 1$$

$$y_{2,0} = 1$$

$$y_{3,0} = 0$$

olmak üzere Adomian polinomlarının kullanımıyla

$$y_{1,n+1} = 2 \int_0^x (\sum_{k=0}^n y_{2,k} y_{2n-k}) dx$$

$$y_{2,n+1} = \int_0^x e^{-x} y_{1,n} dx$$

$$y_{3,n+1} = \int_0^x (y_{2,n} + y_{3,n}) dx$$

bulunur. Elde ettiğimiz yukarıdaki eşitlikler

$$y_1 = y_{1,0} + y_{1,1} + \cdots + y_{1,n}$$

$$y_2 = y_{2,0} + y_{2,1} + \cdots + y_{2,n}$$

$$y_3 = y_{3,0} + y_{3,1} + \cdots + y_{3,n}$$

denklemlerinde beşinci terime kadar yerine yazılırsa

$$y_1(x) = 4(26x + 31)e^{-x} + (-4x^2 - 16x + 15)e^{-2x} - 3.11111e^{-3x} \\ - 58.666x - 134.888$$

$$y_2(x) = -4(8x - 7)e^{-x} - (2x + 5)e^{-2x} + 0.11111(12x + 13)e^{-3x} \\ + 11.5555$$

$$y_3(x) = (12x + 3)e^{-x} + (2x + 7.5)e^{-2x} - 0.11111e^{-3x} + 0.00833x^5 \\ + 0.00833x^4 + 0.5x^3 + x^2 + 4.66666x - 10.3888$$

yaklaşık çözümleri elde edilir (Biazar, 2004).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde bazı parabolik başlangıç-sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümleri Maple[®] programından faydalanılarak elde edilmiştir. Bunun için bir önceki bölümde verilen Galerkin ve Adomian ayrıştırma metotları kullanılmıştır.

(3.3) ve (3.6) Dirichlet sınır şartları göz önüne alındığında bu sınır şartları ile uyumlu olacak şekilde $\varphi_i(x), i = 1, 2, \dots, N$ fonksiyonları;

$$\{\varphi_i(x)\} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi x}{l}, \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots \right\} \quad (4.1)$$

şeklinde seçilebilir. Bu kümede

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle_{L_2(0,l)} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}$$

özellği geçerlidir. Lineer bağımsız vektörlerin (4.1) kümesinden seçimi ile (3.32) sistemi

$$\begin{aligned} c'_1 + \int_0^l a(x, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \sum_{i=1}^N c_i \varphi'_i \varphi'_1 dx &= \int_0^l f(x, t, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \varphi_1 dx \\ c'_2 + \int_0^l a(x, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \sum_{i=1}^N c_i \varphi'_i \varphi'_2 dx &= \int_0^l f(x, t, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \varphi_2 dx \\ &\vdots \\ c'_N + \int_0^l a(x, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \sum_{i=1}^N c_i \varphi'_i \varphi'_N dx &= \int_0^l f(x, t, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i) \varphi_N dx \end{aligned} \quad (4.2)$$

denklem sistemine dönüşür. Ayrıca bu sistem için

$$c_i(0) = \langle \psi, \varphi_i \rangle_{L_2(0,l)}, i = 1, 2, \dots, N \quad (4.3)$$

başlangıç şartları mevcuttur.

4.1. Lineer Parabolik sistem için nümerik örnekler

Bu bölümdeki örneklerde nümerik sonuçlara Maple programı kullanılarak ulaşılmıştır. Örnek 4.1. için kullanılan Maple programı aşağıda verilmiştir. Diğer örneklerde benzer prosedürler yazılarak sembolik sonuçlar elde edilmiştir.

```
> restart:
> u:=PIECEWISE([(t^4)*((1/48)*x^3-(1/48)*x^2), 0 <= x and x <= 2],
[(1/48)*(t^4)*x*(4-x), 2< x and x <= 4]):
>a:=PIECEWISE([sin(Pi*x/2)+0.0001, 0 <= x and x <= 2],[+0.0001, 2< x and x <=
4]):
>F1:=PIECEWISE([(4*t^3)*((1/48)*x^3-(1/48)*x^2)-
(t^4)*(Pi/2*cos(Pi*x/2)*((1/16)*x^2-(1/24)*x)+sin(Pi*x/2)*((1/8)*x-(1/24))), 0 <=
x and x <= 2],[(1/48)*4*t^3*(4-x)*x+0.0001*(t^4)*(1/24), 2< x and x <= 4]):
> l:=4..N:=4:
> ph:=array(1..N):
> for n from 1 to N do
> ph[n]:=sqrt(2/l)*sin(n*Pi*x/l):
> tph[n]:=diff(ph[n],x):
> od:
> E:=array(1..N,1..N):
> for i from 1 to N do
> for j from 1 to N do
> E[i,j]:=evalf(int(a*tph[i]*tph[j],x=0..l)):
> od:
> od:
> F:=array(1..N):
> for r from 1 to N do
```

```

> F[r]:=evalf(int(F1*ph[r],x=0..1)):
> od:
> M:=300:
C1[0]:=int(subs(t=0,u)*ph[1],x=0..1)+int(F[1],t=0..t):C2[0]:=int(subs(t=0,u)*ph[2],x
=0..1)+int(F[2],t=0..t):C3[0]:=int(subs(t=0,u)*ph[3],x=0..1)+int(F[3],t=0..t):C4[0]:=in
t(subs(t=0,u)*ph[4],x=0..1)+int(F[4],t=0..t):

> for k from 1 to M do
>C1[k]:=evalf(-E[1,1]*int(C1[k-1],t=0..t)-E[2,1]*int(C2[k-1],t=0..t)-
E[3,1]*int(C3[k-1],t=0..t)-E[4,1]*int(C4[k-1],t=0..t));

>C2[k]:=evalf(-E[1,2]*int(C1[k-1],t=0..t)-E[2,2]*int(C2[k-1],t=0..t)-
E[3,2]*int(C3[k-1],t=0..t)-E[4,2]*int(C4[k-1],t=0..t));

>C3[k]:=evalf(-E[1,3]*int(C1[k-1],t=0..t)-E[2,3]*int(C2[k-1],t=0..t)-
E[3,3]*int(C3[k-1],t=0..t)-E[4,3]*int(C4[k-1],t=0..t));

>C4[k]:=evalf(-E[1,4]*int(C1[k-1],t=0..t)-E[2,4]*int(C2[k-1],t=0..t)-
E[3,4]*int(C3[k-1],t=0..t)-E[4,4]*int(C4[k-1],t=0..t));

> od:
>uyak:=(sum(C1[s],s=0..M))*ph[1]+(sum(C2[s],s=0..M))*ph[2]+(sum(C3[s],s=0..M
))*ph[3]+(sum(C4[s],s=0..M))*ph[4]:

> plot3d(u,x=0..4,t=0..1);
> plot3d(uyak,x=0..4,t=0..1);

```

Örnek 4.1.1: (3.1)-(3.3) parabolik problemi için $\Omega = (0,4) \times (0,T]$ bölgesinde

$$k(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} + 0.0001, & 0 < x \leq 2 \\ 0.0001, & 2 < x \leq 4 \end{cases}, \quad \varphi(x) = 0 \text{ ve } F(x,t) \text{ sağ taraf fonksiyonunu}$$

her $t \in (0,T]$ için

$$\begin{cases} \frac{t^3(x^3-x^2)}{12} - t^4 \left(\pi \cos \frac{\pi x}{2} \left(\frac{x^2}{32} - \frac{x}{48} \right) + \left(\sin \frac{\pi x}{2} + 10^{-4} \right) \left(\frac{3x-1}{24} \right) \right), & 0 < x \leq 2 \\ \frac{t^3(4x-x^2)}{12} + 0.00000417t^4, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

olarak seçelim. Bu durumda parabolik problemin çözümü

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{t^4}{48}(x^3 - x^2), & 0 < x \leq 2, t \in (0, T] \\ \frac{t^4}{48}(4x - x^2), & 2 < x \leq 4, t \in (0, T] \end{cases}$$

fonksiyonu olur.

Bu parabolik probleme $N = 4$ için Galerkin metodu uygulandığında aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} c_1' &= -0.19641122c_1 - 0.10471975c_2 + 0.19634954c_3 + 0.38895909c_4 \\ &\quad + 0.00053771(16.85692179t + 145.6123759)t^3 \\ &\quad + 0.30407038 \times 10^{-16}(0.12337005 \times 10^{12}t + 0.8 \times 10^{16})t^3 \\ c_2' &= -0.10471975c_1 - 0.52384551c_2 - 0.67319842c_3 - 0.1261481 \times 10^{-13}c_4 \\ &\quad - 0.00095021(31.00627668t - 29.91367042)t^3 \\ &\quad - 0.30407038 \times 10^{-16}(0.12337005 \times 10^{12}t + 0.69 \times 10^{16})t^3 \\ c_3' &= 0.19634954c_1 - 0.67319842c_2 - 1.76770103c_3 - 1.46607657c_4 \\ &\quad - 0.14339053 \times 10^{-5}(39667.67093t + 44934.4411)t^3 \\ &\quad + 0.11261866 \times 10^{-17}(0.11103304 \times 10^{13}t + 0.8 \times 10^{16})t^3 \\ c_4' &= 0.38895909c_1 - 0.12614818 \times 10^{-13}c_2 - 1.46607657c_3 - 2.93314010c_4 \\ &\quad - 0.00084463(11.33742105t + 61.82643961)t^3 + 0.07502635t^3 \end{aligned}$$

Yukarıdaki adi diferansiyel denklem sisteminin

$$c_i = \sum_{k=0}^5 c_{i,k}, i = 1, 2, 3, 4$$

çözümleri bulunarak U yaklaşık çözümü

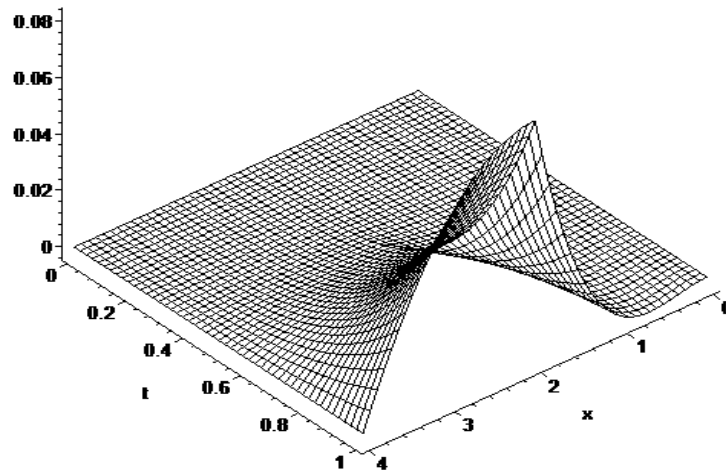
$$\begin{aligned} U(x, t) = & 0.70710678(-0.00048957t^5 + 0.08038854t^4 + 0.00039771t^6 \\ & -0.00020695t^7 + 0.0001001t^8 - 0.00004412t^9 - 0.00003307t^{10})\sin(\frac{\pi x}{4}) \\ & +0.70710678(-0.00093287t^5 - 0.04561055t^4 - 0.00003891t^6 \\ & +0.000139815t^7 - 0.00008833t^8 + 0.00004188t^9 + 0.00003298t^{10})\sin(\frac{\pi x}{2}) \\ & +0.70710678(0.00114893t^5 - 0.01385556t^4 - 0.00148537t^6 \\ & +0.00097315t^7 - 0.00050674t^8 + 0.00022859t^9 + 0.00017414t^{10})\sin(\frac{3\pi x}{4}) \\ & +0.70710678(0.00505647t^5 + 0.00570131t^4 - 0.00278436t^6 \\ & +0.00149991t^7 - 0.00073832t^8 + 0.00032749t^9 + 0.00024654t^{10})\sin(\pi x) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

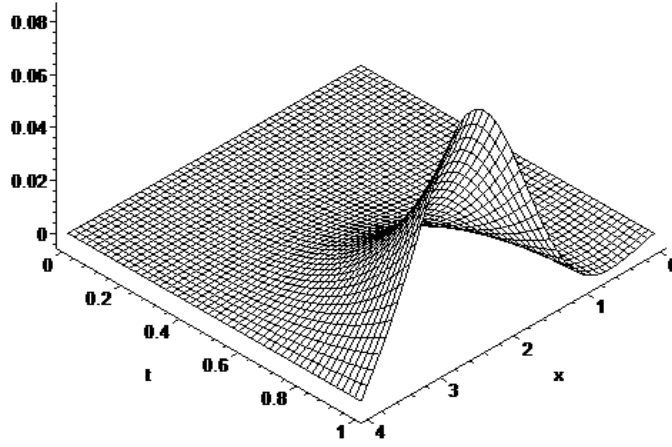
Aşağıdaki tabloda zayıf çözüm (u) ve yaklaşık zayıf çözüm (U) arasında bazı $L_2(0,4)$, $L_2(\Omega)$ ve $H^{1,0}(\Omega)$ hataları verilmiştir.

Çizelge 4.1. Zayıf çözüm ve yaklaşık zayıf çözüm arasındaki bazı hatalar

N	T	$\ u(.,T) - U(.,T)\ _{L_2(0,4)}^2$	$\ u - U\ _{L_2(\Omega)}^2$	$\ u - U\ _{H^{1,0}(\Omega)}^2$
4	0.2	$0.24630731 \times 10^{-9}$	$0.54648845 \times 10^{-11}$	$0.17198374 \times 10^{-9}$
	0.4	$0.64415586 \times 10^{-7}$	$0.28493949 \times 10^{-8}$	$0.88587539 \times 10^{-7}$
	0.6	$0.16955367 \times 10^{-6}$	$0.11211485 \times 10^{-6}$	$0.34321921 \times 10^{-5}$
	0.8	0.00001742831392	$0.15315971 \times 10^{-5}$	0.0000461060141
	1	0.00010669063972	0.00001171024942	0.0003465790358
6	0.2	$0.64736159 \times 10^{-10}$	$0.14319592 \times 10^{-11}$	$0.10511901 \times 10^{-9}$
	0.4	$0.17418494 \times 10^{-7}$	$0.76650963 \times 10^{-9}$	$0.54549491 \times 10^{-7}$
	0.6	$0.46776725 \times 10^{-6}$	$0.30764762 \times 10^{-7}$	$0.21253733 \times 10^{-5}$
	0.8	$0.48685822 \times 10^{-5}$	$0.42588511 \times 10^{-6}$	$0.28656005 \times 10^{-4}$
	1	0.000030081392	$0.32834266 \times 10^{-5}$	0.0002158676695
8	0.2	$0.32939225 \times 10^{-10}$	$0.72635096 \times 10^{-12}$	0.83413173
	0.4	$0.90543801 \times 10^{-8}$	$0.39712622 \times 10^{-9}$	$0.43652106 \times 10^{-7}$
	0.6	$0.24571396 \times 10^{-6}$	$0.16117700 \times 10^{-7}$	$0.17095614 \times 10^{-5}$
	0.8	$0.25715973 \times 10^{-5}$	$0.22450814 \times 10^{-6}$	0.0000231240687
	1	0.0000159351361	$0.17358235 \times 10^{-5}$	0.0001748042836



Şekil 4.1. Zayıf çözüm



Şekil 4.2. $N = 4$ için yaklaşık zayıf çözüm

Örnek 4.1.2: (3.1)-(3.3) parabolik problemi için $\Omega = (0,1) \times (0,T]$ bölgesinde

$$k(x) = \begin{cases} 10^{-6} & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 0.1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases},$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}(-11x^3 + x), & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10}(21x^3 - 24x^2 + x + 2), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

ve $F(x, t)$ sağ taraf fonksiyonunu her $t \in (0, T]$ için

$$\begin{cases} 10t^9(-11x^3 + x) + 0.000066(t^{10} + 0.1)x, & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 10t^9(21x^3 - 24x^2 + x + 2) - 0.1(t^{10} + 0.1)(126x - 48), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

olarak seçelim. Bu durumda parabolik problemin çözümü

$$u(x, t) = \begin{cases} (t^{10} + 0.1)(-11x^3 + x), & 0 < x \leq \frac{1}{2}, t \in (0, T] \\ (t^{10} + 0.1)(21x^3 - 24x^2 + x + 2), & \frac{1}{2} < x \leq 1, t \in (0, T] \end{cases}$$

fonksiyonu olur.

Bu parabolik probleme $N = 4$ için Galerkin metodu uygulandığında aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} c_1' &= 0.49348515c_1 - 0.41887483c_2 + 0.15820572 \times 10^{-14}c_3 + 0.16754993c_4 \\ &\quad - 1.70577279t^{10} - 7.7011154t^9 - 0.17057727 \\ c_2' &= -0.41887483c_1 + 1.97394061c_2 - 2.26192408c_3 + 0.66290201 \times 10^{-13}c_4 \\ &\quad + 2.09324286t^{10} + 7.18366278t^9 + 0.20932428 \\ c_3' &= 0.15820572 \times 10^{-14}c_1 - 2.26192408c_2 + 4.44136629c_3 - 3.23132012c_4 \\ &\quad - 1.37101797t^{10} - 1.66177564t^9 - 0.13710179 \\ c_4' &= 0.16754993c_1 + 0.66290201 \times 10^{-13}c_2 - 3.23132012c_3 + 7.89576247c_4 \\ &\quad + 0.70899538t^{10} + 0.21379948t^9 + 0.07089953 \end{aligned}$$

Yukarıdaki adi diferansiyel denklem sisteminin

$$c_i = \sum_{k=0}^5 c_{i,k}, i = 1, 2, 3, 4$$

çözümleri bulunarak U yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
U(x, t) = & 1.41421356(-0.07701115 - 0.09349189t^{11} - 0.77011154t^{10} \\
& -0.10284108t + 0.00301608t^{12} + 0.02378086t^2 + 0.00010545t^{13} \\
& +0.00301611t^3 - 0.15667467 \times 10^{-5}t^{14} - 0.00015683t^4 - 0.00005836t^{15} \\
& -0.01752801t^5 - 0.00018557t^{16} - 0.14861104t^6) \sin(\pi x) \\
& +1.41421356(0.07183662 - 0.00211189t^{11} + 0.71836627t^{10} \\
& -0.00232308t + 0.01526523t^{12} + 0.10075058t^2 - 0.00791931t^{13} \\
& -0.22649246t^3 + 0.00414052t^{14} + 0.41446619t^4 - 0.00232761t^{15} \\
& -0.69898278t^5 - 0.00458512t^{16} - 3.67177153t^6) \sin(2\pi x) \\
& +1.41421356(-0.01661775 + 0.09645571t^{11} - 0.16617756t^{10} \\
& +0.10610129t - 0.03286039t^{12} - 0.21687861t^2 + 0.01869685t^{13} \\
& +0.53473003t^3 - 0.01182198t^{14} - 1.18338036t^4 + 0.00748131t^{15} \\
& +2.24663871t^5 + 0.01566444t^{16} + 12.54408421t^6) \sin(3\pi x) \\
& +1.41421356(0.00213799 + 0.01202214t^{11} + 0.02137994t^{10} \\
& +0.01322436t + 0.01936832t^{12} + 0.12783091t^2 - 0.01997798t^{13} \\
& -0.57137041t^3 + 0.01558137t^{14} + 1.55969588t^4 - 0.01074848t^{15} \\
& -3.22776854t^5 - 0.02336669t^{16} - 18.71205139t^6) \sin(3 - 4\pi x)
\end{aligned}$$

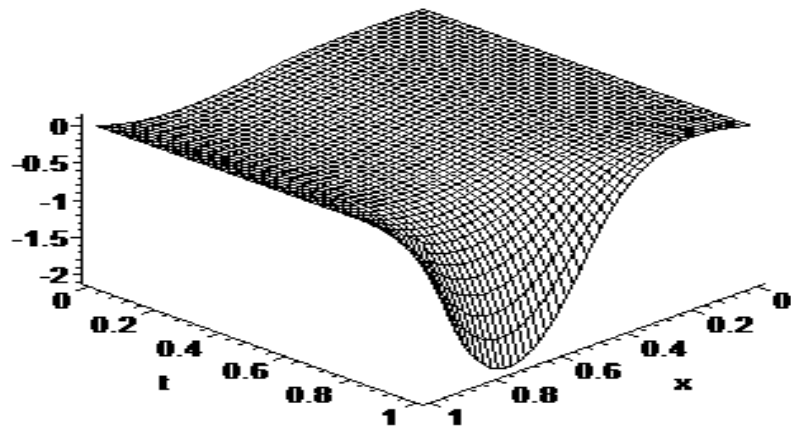
şeklinde elde edilir.

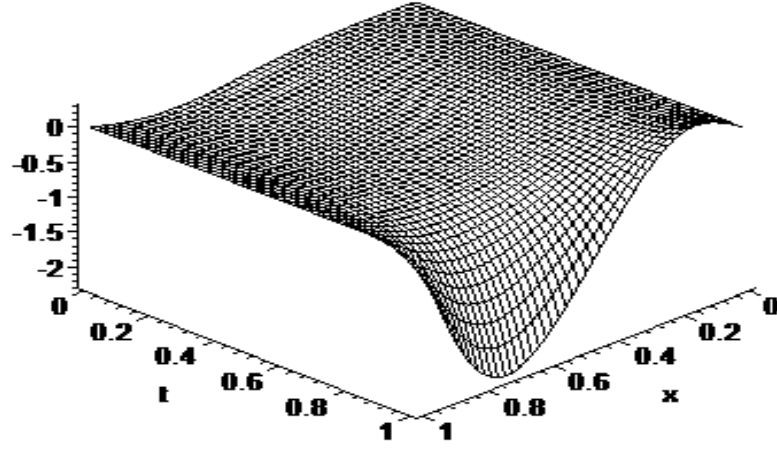
Aşağıdaki tabloda zayıf çözüm (u) ve yaklaşık zayıf çözüm (U) arasında bazı $L_2(0,1)$, $L_2(\Omega)$ ve $H^{1,0}(\Omega)$ hataları verilmiştir.

Çizelge 4.2. Zayıf çözüm ve yaklaşık zayıf çözüm arasındaki bazı hatalar

N	T	$\ u(\cdot, T) - U(\cdot, T)\ _{L_2(0,1)}^2$	$\ u - U\ _{L_2(\Omega)}^2$	$\ u - U\ _{H^{1,0}(\Omega)}^2$
4	0.6	0.00428554	0.0096104	0.04250882
	0.8	0.00837106	0.00214491	0.08956652
	1	0.04703151	0.00605855	0.27799358
7	0.6	0.26263×10^{-6}	0.6956644×10^{-8}	$0.54853672 \times 10^{-9}$
	0.8	0.00013281	$0.46982277 \times 10^{-5}$	$0.34568244 \times 10^{-7}$
	1	0.01657638	0.00422937	$0.25845378 \times 10^{-4}$
10	0.6	0.1236345×10^{-7}	$0.45656634 \times 10^{-11}$	$0.44587268 \times 10^{-12}$
	0.8	$0.94300234 \times 10^{-5}$	0.7658326×10^{-8}	$0.14542596 \times 10^{-8}$
	1	0.00046438	$0.25423588 \times 10^{-4}$	$0.10456727 \times 10^{-5}$

Aşağıda zayıf çözüm ve $N = 4$ için Galerkin metodu ile elde edilmiş yaklaşık çözümün grafikleri verilmiştir.

**Şekil 4.3.** Zayıf çözüm



Şekil 4.4. $N = 4$ için Yaklaşık zayıf çözüm

4.2. Lineer Olmayan Parabolik sistem için Nümerik Uygulamalar

Örnek 4.2.1:

$$\begin{aligned}
 u_t - ((x^2 u^2 + 0.01) u_x)_x &= \frac{1}{10} x^3 (x-1)^6 - 0.006(t+1)x(x-1)^6 \\
 &\quad - 0.036(t+1)x^2(x-1)^5 - 0.03(t+1)x^3(x-1)^4 \\
 &\quad - \frac{3}{50}(t+1)^2 x^6 (x-1)^{10} (42x^2 - 30x + 5)u, (x, t) \in (\Omega) \\
 u(x, 0) &= \frac{1}{100} x^3 (x-1)^6, \quad x \in (0, 1) \\
 u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T]
 \end{aligned}$$

parabolik problemini ele alalım. Bu problem için zayıf çözüm

$$u(x, t) = \frac{\left(t + \frac{1}{10}\right)}{10} x^3 (x-1)^6$$

fonksiyonudur.

Bu problemin (3.29) ile tanımlanan formda yaklaşık zayıf çözümünü bulmak için $N = 3$ alalım. Parabolik probleme Galerkin metodu uygulandığında

$$\begin{aligned}
c_1' &= -1.58243406c_1^3 + 2.10140589c_2^3 - 0.86062499c_3^3 + 3.83999999c_1^2c_2 \\
&+ 0.47132295c_1^2c_3 - 4.27597924c_2^2c_1 - 3.46611461c_2^2c_3 - 3.93743757c_3^2c_1 \\
&+ 4.78685814c_3^2c_2 + 14.64598638c_1c_2c_3 + 0.00001371t + 0.00015261 \\
&- (0.13950616 \times 10^{-6}t^2 + 0.27893401 \times 10^{-6}t + 9.86960453)c_1 \\
&+ (0.16393398 \times 10^{-5}t^2 + 0.40983495 \times 10^{-5}t + 0.16393398 \times 10^{-5})c_2 \\
&+ (0.83430124 \times 10^{-7}t^2 + 0.16192111 \times 10^{-6}t + 0.83430124 \times 10^{-7})c_3 \\
c_2' &= 0.14222222c_1^3 - 6.51723625c_2^3 + 6.06796423c_3^3 - 11.43725031c_1^2c_2 \\
&+ 8.94258502c_1^2c_3 + 9.36925169c_2^2c_1 + 13.9693827c_2^2c_3 + 5.02679767c_3^2c_1 \\
&- 15.27725031c_3^2c_2 - 15.57279181c_1c_2c_3 + 0.00003512t + 0.00012411 \\
&+ (0.16393398 \times 10^{-5}t^2 + 0.40983498 \times 10^{-5}t + 0.16393398 \times 10^{-5})c_1 \\
&- (0.56019844 \times 10^{-7}t^2 + 0.11203968 \times 10^{-5}t + 39.47841764)c_2 \\
&+ (0.85643666 \times 10^{-6}t^2 + 0.17128732 \times 10^{-5}t + 0.85643662 \times 10^{-6})c_3 \\
c_3' &= 4.08063555c_1^3 + 5.49925925c_2^3 - 14.74190659c_3^3 + 0.23510203c_1^2c_2 \\
&- 25.1869381c_1^2c_3 - 12.9450317c_2^2c_1 - 29.5238131c_2^2c_3 - 4.33687499c_3^2c_1 \\
&+ 23.56655083c_3^2c_2 + 34.1855782c_1c_2c_3 - 0.00000899t - 0.00001912 \\
&+ (0.83430124 \times 10^{-7}t^2 + 0.16692111 \times 10^{-6}t + 0.83430124 \times 10^{-7})c_1 \\
&+ (0.85643662 \times 10^{-6}t^2 + 0.17128732 \times 10^{-5}t + 0.85643662 \times 10^{-6})c_2 \\
&- (0.16366285 \times 10^{-6}t^2 + 0.32733257 \times 10^{-6}t + 88.82643972)c_3
\end{aligned}$$

adi diferansiyel denklem sistemi ve

$$c_1(0) = 0.00013891$$

$$c_2(0) = 0.00008898$$

$$c_3(0) = -0.00001012$$

başlangıç şartları elde edilir. Bu adi diferansiyel denklem sistemi lineer değildir.

Yukarıdaki adi diferansiyel denklem sistemi Adomian metodu ile çözüldükten sonra yaklaşık zayıf çözüm

$$\begin{aligned}
U(x, t) = & 1.414213(0.000138 + 0.000152t + 0.68547 \times 10^{-5}t^2 + 0.7638 \times 10^{-12}t^3 \\
& + 0.7327 \times 10^{-12}t^4 + 0.256939 \times 10^{-12}t^5 + 0.3188 \times 10^{-13}t^6 + 0.1799 \times 10^{-14}t^7 \\
& + (0.163933 \times 10^{-5} + 0.16393 \times 10^{-5}t^2 + 0.40983495 \times 10^{-5}t) \\
& (0.00008898t + 0.58548720 \times 10^{-5}t^3 + 0.00006205t^2) \\
& + (0.8343 \times 10^{-7} + 0.8343 \times 10^{-7}t^2 + 0.1669 \times 10^{-6}t) \\
& (-0.00001t - 0.1498 \times 10^{-5}t^3 - 0.95564 \times 10^{-5}t^2) \\
& + (-9.86960453 - 0.1395 \times 10^{-6}t^2 - 0.2789 \times 10^{-6}t) \\
& (0.0001389t + 0.2284927 \times 10^{-5}t^3 + 0.000763t^2)) \sin(\pi x) \\
& + 1.414213(0.0008898 + 0.000124t + 0.000017t^2 - 0.1716 \times 10^{-12}t^6 \\
& - 0.2021 \times 10^{-11}t^5 - 0.1154 \times 10^{-10}t^4 - 0.2724 \times 10^{-10}t^3 - 0.7348 \times 10^{-14}t^7 \\
& + (-39.47841 - 0.560198 \times 10^{-7}t^2 - 0.1120 \times 10^{-6}t) \\
& (0.00008898t + 0.5854 \times 10^{-5}t^3 + 0.000062t^2) \\
& + (0.8564 \times 10^{-6} + 0.8564 \times 10^{-6}t^2 + 0.1712 \times 10^{-5}t) \\
& (-0.000011t - 0.1498 \times 10^{-5}t^3 - 0.9556 \times 10^{-5}t^2) \\
& + (0.1639 \times 10^{-5} + 0.1639 \times 10^{-5}t^2 + 0.4098 \times 10^{-5}t) \\
& (0.000138t + 0.2284 \times 10^{-5}t^3 + 0.000076t^2)) \sin(2\pi x) \\
& + 1.414213(-0.000011 - 0.000019t - 0.4495 \times 10^{-5}t^2 + 0.1321 \times 10^{-10}t^3 \\
& + 0.5733 \times 10^{-11}t^4 + 0.1152 \times 10^{-11}t^5 + 0.143859 \times 10^{-12}t^6 + 0.8424 \times 10^{-14}t^7 \\
& + (88.826439 + 0.3273 \times 10^{-6}t + 0.1636 \times 10^{-6}t^2) \\
& (0.0001t + 0.9556 \times 10^{-5}t^2 + 0.1498 \times 10^{-5}t^3) \\
& + (0.8564 \times 10^{-6} + 0.1712 \times 10^{-5}t + 0.8564 \times 10^{-6}t^2) \\
& (0.000088t + 0.5854 \times 10^{-5}t^3 + 0.000062t^2) \\
& + (0.8343 \times 10^{-7} + 0.1669 \times 10^{-6}t + 0.8343 \times 10^{-7}t^2) \\
& (0.000138t + 0.2284 \times 10^{-5}t^3 + 0.000076t^2)) \sin(3\pi x)
\end{aligned}$$

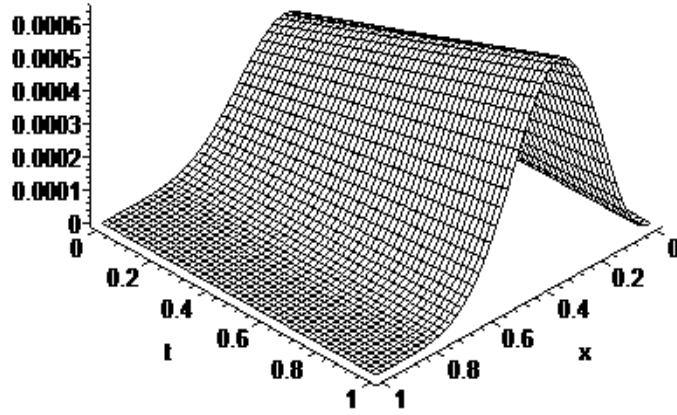
şeklinde bulunur.

Aşağıdaki tabloda zayıf çözüm (u) ve yaklaşık zayıf çözüm (U) arasında bazı hatalar verilmiştir.

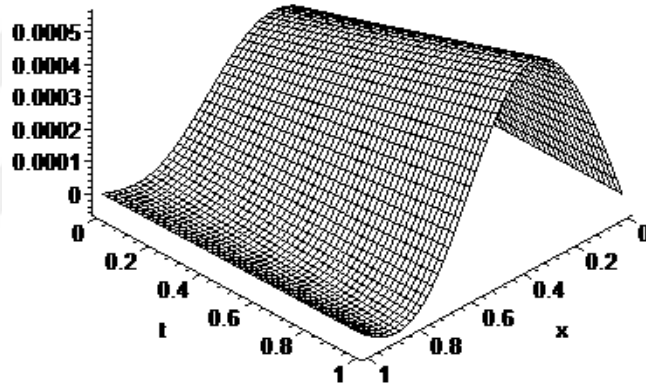
Çizelge 4.3. Zayıf çözüm ve yaklaşık zayıf çözüm arasındaki bazı hatalar

N	T	$\ u(\cdot, T) - U(\cdot, T)\ _{L_2(0,1)}^2$	$\ u - U\ _{L_2(\Omega)}^2$	$\ u - U\ _{H_0^1(\Omega)}^2$
4	0.5	$0.63476369 \times 10^{-9}$	$0.19468146 \times 10^{-9}$	$0.54647999 \times 10^{-7}$
	1	$0.32648352 \times 10^{-8}$	$0.97187465 \times 10^{-9}$	$0.22455347 \times 10^{-6}$
	2	$0.60469967 \times 10^{-7}$	$0.22429859 \times 10^{-7}$	$0.37571566 \times 10^{-5}$
	3	$0.42932951 \times 10^{-6}$	$0.22071841 \times 10^{-6}$	$0.34784833 \times 10^{-4}$
6	0.5	$0.33150956 \times 10^{-10}$	$0.11664154 \times 10^{-10}$	$0.65874892 \times 10^{-8}$
	1	$0.58935037 \times 10^{-10}$	$0.34378630 \times 10^{-10}$	$0.19408779 \times 10^{-7}$
	2	$0.13260393 \times 10^{-9}$	$0.12769246 \times 10^{-9}$	$0.72064497 \times 10^{-7}$
	3	$0.23574127 \times 10^{-9}$	$0.30940966 \times 10^{-9}$	$0.17459063 \times 10^{-6}$
8	0.5	$0.36207485 \times 10^{-11}$	$0.12740263 \times 10^{-11}$	$0.12045546 \times 10^{-8}$
	1	$0.64368889 \times 10^{-11}$	$0.37549534 \times 10^{-11}$	$0.35495033 \times 10^{-8}$
	2	$0.14483098 \times 10^{-10}$	$0.13946739 \times 10^{-10}$	$0.13181108 \times 10^{-7}$
	3	$0.25748669 \times 10^{-10}$	$0.33794151 \times 10^{-10}$	$0.31935881 \times 10^{-7}$

Aşağıda zayıf çözüm ve $N = 3$ için Galerkin metodu ile elde edilmiş yaklaşık çözümün grafikleri verilmiştir.



Şekil 4.5. Zayıf çözüm



Şekil 4.6. $N = 3$ için yaklaşık zayıf çözüm

Örnek 4.2.2: $\Omega = (0,1) \times (0,T]$ bölgesinde

$$a(x,u) = \frac{(x^{10} + 1)}{10} + u^2$$

fonksiyonu alındığında (3.4)-(3.6) problemi

$$\begin{aligned}
u_t - \left(\left(\frac{x^{10}+1}{10} + u^2 \right) u_x \right)_x &= 100t^{99} - \cos^2 \left(\frac{\pi(x+1)}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi(x+1)}{4} \right) \\
&\quad + t^{100} [2t^{200} \cos^3 \left(\frac{\pi(x+1)}{2} \right) \cos^4 \left(\frac{\pi(x+1)}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi(x+1)}{2} \right) \pi \\
&\quad - t^{200} \cos^4 \left(\frac{\pi(x+1)}{2} \right) \cos^3 \left(\frac{\pi(x+1)}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi(x+1)}{4} \right) \pi - x^9] \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\pi(x+1)}{4} \right) + \frac{1}{8} \cos^2 \left(\frac{\pi(x+1)}{2} \right) \right] \pi \sin(\pi(x+1)) \\
&\quad - \left[t^{200} \cos^4 \left(\frac{\pi(x+1)}{2} \right) \cos^4 \left(\frac{\pi(x+1)}{4} \right) + \frac{x^{10}+1}{10} \right] \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2} t^{100} \cos^2 \left(\frac{\pi(x+1)}{4} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi(x+1)}{2} \right) + \frac{x^{10}+1}{10\pi^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{t^{100}}{8} \cos^3 \left(\frac{\pi(x+1)}{2} \right) \left(-5\cos^2 \left(\frac{\pi(x+1)}{4} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi(x+1)}{4} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} t^{100} \sin(\pi(x+1)) \sin \left(\frac{\pi(x+1)}{2} \right) \right] \pi^2
\end{aligned}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T]$$

şeklinde olur. Bu problem için zayıf çözüm

$$u(x, t) = t^{100} \cos^2 \left(\frac{\pi(x+1)}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi(x+1)}{4} \right)$$

fonksiyonudur.

Bu problemin (3.29) ile tanımlanan formda yaklaşık zayıf çözümünü bulmak için $N = 3$ alalım. Parabolik probleme Galerkin metodu uygulandığında

$$\begin{aligned}
c_1' &= -4.93480219c_1^3 + 0.10219180c_2^3 - 0.48849813c_3^3 + 0.54118917c_1^2c_2 \\
&+ 4.93480219c_1^2c_3 - 9.86960439c_2^2c_1 - 4.93480219c_2^2c_3 - 9.86960439c_3^2c_1 \\
&- 0.26831620c_3^2c_2 - 0.58038978c_1c_2c_3 - 0.10192426c_1 + 0.00300037c_2 \\
&- 0.003047c_3 + 0.94659871 \times 10^{-17}t^{99} \left(\frac{0.59261655 \times 10^{14}t^{201} + 0.50203206 \times 10^{16}t}{+0.47555331 \times 10^{18}} \right) \\
c_2' &= 0.64714219c_1^3 - 19.73920878c_2^3 - 0.29298505c_3^3 - 39.47841756c_1^2c_2 \\
&+ 0.30273159c_1^2c_3 - 0.57142560c_2^2c_1 + 0.17422822c_2^2c_3 - 0.38974455c_3^2c_1 \\
&- 39.47841756c_3^2c_2 - 19.73920879c_1c_2c_3 + 0.00300037c_1 - 0.10497127c_2 \\
&+ 0.00548624c_3 + 0.13748043 \times 10^{-25}t^{99} \left(\frac{0.2510992615 \times 10^{23}t^{201} + 0.9282679 \times 10^{24}t}{+0.31184223 \times 10^{26}} \right) \\
c_3' &= 14.80440659c_1^3 - 0.72587850c_2^3 - 44.41321976c_3^3 + 0.14200031c_1^2c_2 \\
&- 88.82643952c_1^2c_3 - 44.41321976c_2^2c_1 - 88.82643952c_2^2c_3 - 0.22456659c_3^2c_1 \\
&- 0.63732686c_3^2c_2 + 0.21373040c_1c_2c_3 - 0.003047c_1 + 0.00548624c_2 \\
&- 0.10678307c_3 - 0.85262812 \times 10^{-34}t^{99} \left(\frac{0.30582924 \times 10^{32}t^{201} + 0.7857999 \times 10^{33}t}{+0.92184437 \times 10^{34}} \right)
\end{aligned}$$

adi diferansiyel denklem sistemi ve

$$c_1(0) = 0$$

$$c_2(0) = 0$$

$$c_3(0) = 0$$

başlangıç şartları elde edilir. Ele aldığımız bu adi diferansiyel denklemin Adomian metoduyla yaklaşık zayıf çözüm

$$\begin{aligned}
U(x, t) = & 1.414213(0.66471 \times 10^{-12}t^{504} + 0.134284 \times 10^{-10}t^{503} - 0.136683 \\
& \times 10^{-11}t^{502} + 0.318248 \times 10^{-10}t^{304} - 0.392187 \times 10^{-8}t^{303} - 0.111714 \\
& \times 10^{-6}t^{302} - 0.210914 \times 10^{-15}t^{904} - 0.899359 \times 10^{-15}t^{704} - 0.421807 \\
& \times 10^{-13}t^{703} - 0.880587 \times 10^{-6}t^{102} + 0.045015 \times t^{100} - 0.664416 \\
& \times 10^{-7}t^{301} + 0.00038 \times t^{101} + 0.142517 \times 10^{-20}t^{1106} - 0.115992 \\
& \times 10^{-19}t^{1105} + 0.774503 \times 10^{-20}t^{907} + 0.301072 \times 10^{-18}t^{906} \\
& - 0.295682 \times 10^{-18}t^{707} + 0.866909 \times 10^{-17}t^{706} - 0.602205 \times 10^{-16}t^{507} \\
& + 0.205336 \times 10^{-14}t^{506} - 0.225126 \times 10^{-13}t^{505} - 0.256485 \times 10^{-13}t^{305} \\
& + 0.194192 \times 10^{-17}t^{905} + 0.469857 \times 705 + 0.328805 \times 10^{-27}t^{1507} \\
& + 0.101892 \times 10^{-24}t^{1307} - 0.125073 \times 10^{-23}t^{1306} + 0.320267 \\
& \times 10^{-22}t^{1107}) \sin(\pi x) + 1.414213(0.178454 \times 10^{-11}t^{504} + 0.383155 \\
& \times 10^{-10}t^{503} + 0.292038 \times 10^{-11}t^{502} + 0.616028 \times 10^{-10}t^{304} - 0.294593 \\
& \times 10^{-9}t^{303} - 0.631826 \times 10^{-7}t^{302} - 0.129032 \times 10^{-15}t^{904} - 0.148041 \\
& \times 10^{-13}t^{704} + 0.253647 \times 10^{-12}t^{703} - 0.331082 \times 10^{-6}t^{102} + 0.004287 \\
& \times t^{100} - 0.217147 \times 10^{-7}t^{301} + 0.000119 \times t^{101} - 0.113941 \\
& \times 10^{-20}t^{1106} + 0.296251 \times 10^{-19}t^{1105} + 0.31954 \times 10^{-20}t^{907} - 0.404767 \\
& \times 10^{-18}t^{906} - 0.840295 \times 10^{-18}t^{707} - 0.209843 \times 10^{-16}t^{706} - 0.164992 \\
& \times 10^{-15}t^{507} - 0.411051 \times 10^{-14}t^{505} - 0.79281 \times 10^{-13}t^{305} - 0.199701 \\
& \times 10^{-16}t^{905} - 0.132664 \times 10^{-14}t^{705} + 0.112683 \times 10^{-27}t^{1507} \\
& + 0.752423 \times 10^{-25}t^{1307} + 0.134309 \times 10^{-22}t^{1306} + 0.501862 \\
& \times 10^{-23}t^{1107}) \sin(2\pi x) + 1.414213(0.139924 \times 10^{-10}t^{504} - 0.312892 \\
& \times 10^{-9}t^{503} - 0.250719 \times 10^{-10}t^{502} + 0.132707 \times 10^{-9}t^{304} + 0.697884 \\
& \times 10^{-8}t^{303} + 0.484895 \times 10^{-6}t^{302} - 0.624754 \times 10^{-15}t^{904} - 0.262894 \\
& \times 10^{-12}t^{704} - 0.347304 \times 10^{-11}t^{703} + 0.141948 \times 10^{-5}t^{102} - 0.007859 \\
& \times t^{100} + 0.409203 \times 10^{-7}t^{301} - 0.000648 \times t^{101} - 0.769874
\end{aligned}$$

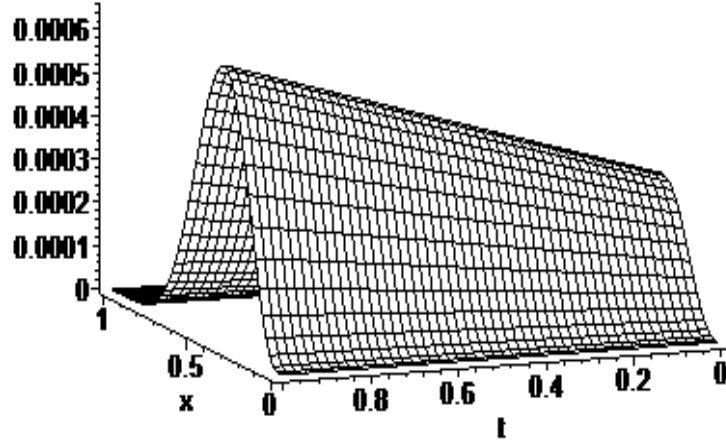
$$\begin{aligned}
& \times 10^{-20}t^{1106} - 0.132877 \times 10^{-18}t^{1105} + 0.921807 \times 10^{-21}t^{907} \\
& - 0.747817 \times 10^{-18}t^{906} + 0.12466 \times 10^{-18}t^{707} - 0.547741 \times 10^{-16}t^{706} \\
& - 0.215924 \times 10^{-15}t^{507} - 0.23551 \times 10^{-14}t^{506} - 0.243997 \times 10^{-12}t^{505} \\
& - 0.479061 \times 10^{-12}t^{305} - 0.420586 \times 10^{-16}t^{905} - 0.682459 \times 10^{-14}t^{705} \\
& - 0.316498 \times 10^{-26}t^{1507} - 0.472228 \times 10^{-24}t^{1307} - 0.226028 \\
& \times 10^{-22}t^{1306} - 0.441545 \times 10^{-22}t^{1107}) \sin(3\pi x)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Zayıf çözüm (u) ve yaklaşık zayıf çözüm (U) arasındaki bazı hatalar tabloda verilmiştir.

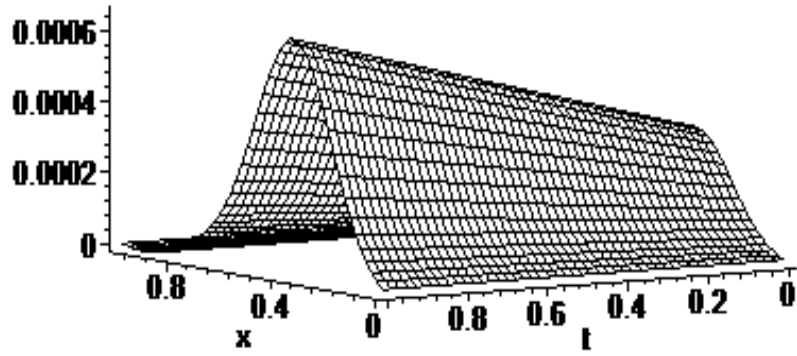
Çizelge 4.4. Zayıf çözüm ve yaklaşık zayıf çözüm arasındaki bazı hatalar

N	T	$\ u(\cdot, T) - U(\cdot, T)\ _{L_2(0,1)}^2$	$\ u - U\ _{L_2(\Omega)}^2$	$\ u - U\ _{H_0^1(\Omega)}^2$
6	0.2	$0.62746221 \times 10^{-146}$	$0.62387671 \times 10^{-149}$	$0.15814838 \times 10^{-133}$
	0.4	$0.12361251 \times 10^{-85}$	$0.24539976 \times 10^{-88}$	$0.15692849 \times 10^{-83}$
	0.6	$0.26700449 \times 10^{-50}$	$0.79371197 \times 10^{-53}$	$0.22787343 \times 10^{-48}$
	0.8	$0.34477883 \times 10^{-25}$	$0.1364622 \times 10^{-27}$	$0.22243357 \times 10^{-23}$
	1	$0.10939744 \times 10^{-5}$	$0.54081809 \times 10^{-8}$	0.00005686
8	0.2	$0.1952418 \times 10^{-146}$	$0.19375558 \times 10^{-149}$	$0.8518095 \times 10^{-140}$
	0.4	$0.56677652 \times 10^{-86}$	$0.11213026 \times 10^{-88}$	$0.72268884 \times 10^{-84}$
	0.6	$0.16329967 \times 10^{-50}$	$0.48377870 \times 10^{-53}$	$0.13959901 \times 10^{-48}$
	0.8	$0.25338174 \times 10^{-25}$	$0.10000086 \times 10^{-27}$	$0.16336352 \times 10^{-23}$
	1	$0.90316160 \times 10^{-6}$	$0.44541672 \times 10^{-8}$	0.00004685
10	0.2	$0.10365564 \times 10^{-146}$	$0.10259168 \times 10^{-204}$	$0.26275216 \times 10^{-144}$
	0.4	$0.43598550 \times 10^{-146}$	$0.86059396 \times 10^{-89}$	$0.55611501 \times 10^{-84}$
	0.6	$0.14618769 \times 10^{-146}$	$0.43245939 \times 10^{-53}$	$0.1249169 \times 10^{-48}$
	0.8	$0.24287091 \times 10^{-25}$	$0.95762585 \times 10^{-28}$	$0.15650018 \times 10^{-23}$
	1	$0.89601990 \times 10^{-6}$	$0.44179562 \times 10^{-8}$	0.00004646

Aşağıda zayıf çözüm ve $N = 3$ için Galerkin metodu ile elde edilmiş yaklaşık çözümün grafikleri verilmiştir.



Şekil 4.7. Zayıf çözüm



Şekil 4.8. $N = 3$ için yaklaşık zayıf çözüm

5. SONUÇ

Bu çalışmada l uzunluğuna sahip bir çubuk için çubuğun sol ve sağ uçlarında ısı değerinin sıfır olduğu bir ısı iletim problemi ele alınmıştır. Bu Dirichlet sınır şartlı parabolik problemin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliği için gerekli şartlar ispatı ile birlikte verilmiştir. Bu genelleştirilmiş çözümün elde edilmesinde Galerkin metodu kullanılmıştır. Ayrıca lineer olmayan bir parabolik problem ele alınarak, yine Galerkin metodu ile bu problemin yaklaşık zayıf çözümü ortaya konulmuştur. Yaklaşık zayıf çözümlere nümerik yaklaşım için Galerkin metodunda, Dirichlet sınır şartlarına da uygun olarak sinüs fonksiyonları, baz fonksiyonları olarak seçilmiştir. Her iki parabolik probleme metot uygulandığında adi diferansiyel denklem sistemlerine indirgendiği görülür. Elde edilen adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü için Adomian ayrıştırma metodu kullanılmıştır.

Araştırma bulguları bölümünde bazı parabolik problemlerin yaklaşık zayıf çözümler elde edilmiştir. Bu aşamada hesaplamaları oldukça kolaylaştıran MAPLE® programından faydalanılmıştır. Bulunan yaklaşık çözümlerin hata verileri toplanılarak tablolar haline getirilmiştir. Oluşturulan tablolar ışığında elde edilen yaklaşık zayıf çözümlerin, problemlerin zayıf çözümlerine yüksek oranda yaklaştığı görülmüştür. Dolayısıyla Galerkin metodunun parabolik problemler için kullanışlı yaklaşık zayıf çözümler verdiği gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

- Abbaoui, K. and Cherruault Y.,1994. Convergence of Adomian's Method Applied to Differential Equations. Pergamon, 28(5), 103-109.
- Adomian, G., 1986. Nonlinear Stochastic Operator Equations. Academic Press, Lon287 p, London.
- Al-Omari, A., Schüttler, H. B., Arnold, J., and Taha, T., 2013. Solving Nonlinear Systems of First Order Ordinary Differential Equations Using a Galerkin Finite Element Method. IEEE Access, Volume 1, 408-417.
- Amann H., 1988. Parabolic Evolution Equations and Nonlinear Boundary Conditions. Journal of Differential Equations, 72, 201-269.
- Biazar J., Babolian E. and Islam R., 2004. Solution of the System of Ordinary Differential Equations by Adomian Decomposition Method. Applied Mathematics and Computation, 147, 713-719
- Çağlayan, M., Çelik, N. and Doğan, S., 2013. Adi Diferansiyel Denklemler, Dora basım yayın.
- Doğan N., 2012. Solution of the System of Ordinary Differential Equations by Combined Laplace Transform- Adomian Decomposition Method. Mathematical and Computational Applications, 3(17), 203-211
- Douglas J. and Dupont T., 1970. Galerkin Method for Parabolic Equations. SIAM Mathematics of Computation, 7(4), 575-585
- El-Kalla İ., 2006. Error Analysis Of Adomian Series Solution To A Class Of Nonlinear Differential Equations. Applied Mathematics E-Notes, 7(2007), 214-221.
- Estep D. and Larsson S., 1993. The Discontinuous Galerkin Method for Semilinear Parabolic Problems. Rairo Modelisation Mathematique et Analyse Numerique, 27, 35-54.
- Hasanoğlu, A., 2010. Kısmi Türevli Denklemler, Literatür yayınları.
- Hunter, J. K. and Nachtergaele, B., 2001. Applied Analysis. World Scientific, 439 p, Singapore.
- Kreyszig E.,1989. Introductory Funcional Analysis with Applications. Wile, 688 p.
- Ladyzhenskaya, O. A., 1985. Boundary Value Problems in Mathematical Physics. Springer, New York.
- Li Q. And Wang J., 2013. Weak Galerkin Finite Elements Method For Parabolic Equations. 6(29), 2004-2024.
- Liang, H., 2015. Convergence and Asymptotic Stability of Galerkin Methods for Linear Parabolic Equations with Delay. Applied Mathematics and Computation, 264, 160-178.
- Luskin M., 1979. A Galerkin Method For Nonlinear Parabolic Equations With Nonlinear Boundary Conditions. Siam Journal On Numerical Analysis, 2(16), 284-299.
- Mahmood A.S., Casasus L. and Al-Hayani W., 2005. The Decomposition Method for Stiff Systems of Ordinary Differential Equations. Applied Mathematics and Computation, 167, 964-975.

- Mirzaee, F., 2011. Differential Transform Method for Solving Linear and Nonlinear Systems of Ordinary Differential Equations. *Applied Mathematical Sciences*, 5(70), 3465-3472.
- Shawagfeh N. ve Kaya D., 2004. Comparing Numerical Methods for the Solutions of Systems of Ordinary Differential Equations. *Applied Mathematics Letters*, 17, 323-328
- Wheeler, M. F., 1973. A priori L_2 error estimates for Galerkin Approximations to Parabolic partial differential Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 10(4), 723-759.
- Zeidler, E., 1995. *Applied Functional Analysis*. Springer Verlag, 404 p, New York.



ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Erzurum’da doğdu. İlköğretim ve ortaöğretim öğrenimini Erzurum’da tamamladı. 2008 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü’nde yükseköğrenimine başladı. Lisans eğitimini tamamladıktan sonra 2014 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik alanında yüksek lisans öğrenimine başladı.

