



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**LİNEER OLMAYAN BİR DENKLEM SINIFININ İTERATİF
ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Meltem Kadriye KAYA

**DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Samet MALDAR**

AKSARAY, 2022

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 192342418 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Meltem Kadriye KAYA tarafından hazırlanan “**LİNEER OLMAYAN BİR DENKLEM SINIFININ İTERATİF ÇÖZÜMÜ**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Samet MALDAR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Doç. Dr. Kadri DOĞAN

Artvin Çoruh Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Doç. Dr. Yunus ATALAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 01/07/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Meltem Kadriye KAYA

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince her daim bana sabırla yol gösteren, bilgisini ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Samet MALDAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında ve tez çalışmalarımda sevgi ve yardımları ile yanımda olan kıymetli ailem ve eşime içtenlikle teşekkür ederim.

Meltem Kadriye KAYA

AKSARAY, 2022

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Tanımlar	4
2.2 Bazı Sabit Nokta Dönüşüm Sınıfları	7
2.3 Bazı Sabit Nokta Teoremleri	10
2.4 Bazı Sabit Nokta Lemmaları	11
2.5 Bazı Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri.....	12
3. YENİ İTERASYON YÖNTEMİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ	16
3.1 Yeni İterasyon Yönteminin Yakınsaklığı.....	16
3.2 Yakınsaklık Hızı.....	19
3.3 Yeni İterasyon Yönteminin Kararlılığı.....	25
3.4 Yeni İterasyon Yönteminin Veri Bağıllığı	27
4. LİNEER OLMAYAN BİR DENKLEMİN İTERATİF YAKLAŞIMI	34
4.1 Fonksiyonel İntegral Denklemin Çözümü	34
4.2 Bir Fonksiyonel İntegral Denklem İçin Veri Bağıllığı.....	40
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	45
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ.....	51

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER OLMAYAN BİR DENKLEM SINIFININ İTERATİF ÇÖZÜMÜ

Meltem Kadriye KAYA

**Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Samet MALDAR

ÖZET

Sabit nokta teorisinde iterasyon yöntemleri geniş bir literatüre sahip olup bu yöntemler için elde edilen sonuçlar söz konusu iterasyon yönteminden elde edilen dizinin yakınsaklığı, yakınsaklık hızı, yakınsama denkliği, veri bağıllığı ve kararlılık olarak sıralanabilir. Ayrıca bu yöntemler integral veya diferansiyel denklemlerin çözümüne ulaşmada etkin bir araç olarak kullanılmaktadır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sabit nokta teorisine dair literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılacak temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde yeni tanımlanmış olan dört adımlı sabit nokta iterasyon yönteminin rasyonel dönüşüm sınıfı kullanılarak belirli koşullar altında bu dönüşümün sabit noktasına yakınsaklığı ve yakınsaklık hızı incelenmiştir. Ayrıca yeni iterasyon yöntemi için kararlılık ve veri bağıllığı kavramları irdelenmiştir. Ek olarak bu sonuçlar için aşikâr olmayan nümerik örnekler verilmiştir. Dördüncü bölümde genelleştirilmiş tipte bir integral denklemin çözümüne yeni iterasyon yöntemi kullanılarak ulaşılacağı ispatlanmış ayrıca bu denklemin çözümünün veri bağılı olduğu gösterilmiştir. Beşinci bölümde ise, tez boyunca elde edilen sonuçlardan bahsedilmiş ve ileride yapılabilecek çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit Nokta, İterasyon Yöntemi, Yakınsaklık, Kararlılık, Veri Bağıllığı, İntegral ve Diferansiyel Denklem

Temmuz, 2022; 51 sayfa

M.Sc. THESIS

THE ITERATIVE SOLUTION OF A CLASS OF NONLINEAR EQUATION

Meltem Kadriye KAYA

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Samet MALDAR

ABSTRACT

Iteration methods in fixed point theory, have a wide literature, and the results obtained for these methods can be listed as the convergence of the sequence obtained from the mentioned iteration method, the rate of convergence, the equivalence of convergence, data dependence, and stability. In addition, these methods are used as an effective tool in reaching the solution of integral or differential equations.

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, a summary of the literature on fixed point theory is given. In the second chapter, the basic concepts, definitions, and theorems to be used in the thesis are given. In the third chapter, the convergence of the newly defined four-step fixed point iteration method and the rate of convergence were investigated under certain conditions by using the rational mapping class. In addition, the concepts of stability and data dependency were examined for the new iteration method. Also, nontrivial numerical examples are given for these results. In the fourth chapter, it is proved that the solution of a generalized type integral equation can be reached by using the new iteration method, and it is shown that the solution of this equation is data-dependent. In the fifth chapter, the results obtained during the thesis are mentioned and information about the possible future studies is given.

Keywords: Fixed Point, Iteration Method, Convergence, Stability, Data Dependency, Integral and Differential Equation

July, 2022; 51 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. T dönüşümünün (2.16) eşitsizliğinin sağlandığını gösteren grafik.	22
Şekil 3.2. T dönüşümünün (2.16) eşitsizliğinin sağlandığını gösteren grafik.....	26
Şekil 3.3. T dönüşümünün (2.16) eşitsizliğinin sağlandığını gösteren grafik.....	32



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması. . 23

Çizelge 3.2. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması. . 24

Çizelge 3.3. (3.26) ile verilen iterasyon yönteminin yakınsaklık davranışı..... 33



SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	Cisim ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)
F_T	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$T: A \rightarrow B$	A kümesinden B kümesine tanımlı T dönüşümü
$C(a, b)$	(a, b) aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
$\{x_n\}$	$\{x_n\}$ dizisi
(A, ρ)	A metrik uzayı
$(A, \ \cdot\)$	A normlu uzayı
$\ A\ $	A 'nın normu
$\ \cdot\ : A \rightarrow \mathbb{F}$	A üzerinde tanımlı norm fonksiyonu

1.GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, birçok bilim dalında geniş bir uygulama alanına sahip olmasının yanı sıra günlük hayat problemlerinin modellenmesinde kullanılan integral veya diferansiyel denklemlerin çözümü için etkin ve ilgi çekici bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bir dönüşümün sabit noktası A boştan farklı bir küme olmak üzere $T:A \rightarrow A$, $T(x) = x$ eşitliğiyle belirlenir. Bu teorideki temel düşünce T 'nin herhangi bir sabit noktaya sahip olabilmesi için dönüşüm üzerine veya A kümesi üzerine konulması gereken uygun şartları belirlemektir [1-5].

1909 yılında normlu lineer uzaylarda sabit nokta teorisine dair çalışmalar yapan Brouwer, “ $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f:[a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f 'nin $[a, b]$ aralığında bir sabit noktası vardır.” teoremini ispatlamış ve 1912 yılında Brouwer bu teoremin sonucunun $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{R}^n$ kümesi alındığında da geçerli olduğunu göstermiştir [6].

1930 yılında Schauder ise “ A bir Banach uzayı, C , A 'nin kompakt, konveks alt kümesi ve $f:C \rightarrow C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f , C 'de en az bir sabit noktaya sahiptir.” teoremini ispatlayarak, Brouwer'ın sonlu boyutlu uzaylarda elde ettiği sonucun $\mathbb{R}^n$ yerine herhangi bir Banach uzayı alındığında da geçerli olduğunu göstermiştir [1].

1922 yılında Banach tarafından ispatlanan ve Banach Sabit Nokta Teoremi olarak bilinen teorem şu şekildedir: “ (A, d) bir tam metrik uzay ve $f:A \rightarrow A$ dönüşüm olsun. Her $x, y \in A$ ve bir $\alpha \in [0, 1)$ için $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$ sağlansın. Bu durumda f contraction dönüşümü, A 'da bir tek sabit noktaya sahiptir” [2].

Bu teoremden teklikle belirlenen sabit noktaya ulaşmak için kullanılan yöntem Picard iterasyonu olarak adlandırılır. Ancak bu teoremden contraction dönüşüm yerine nonexpansive dönüşüm alındığında Picard iterasyonundan elde edilen dizi bu sabit noktaya yakınsamaz. Bu nedenle araştırmacılar tarafından yeni iterasyon yöntemleri tanımlanarak farklı dönüşümler için uygun şartlar altında varlığı veya tekliği garanti edilen bu sabit noktaya ulaşmak için yakınsaklık, yakınsaklık denkliği, yakınsaklık

hızı, veri bağılılığı ve kararlılık gibi sabit nokta sonuçları elde edilerek geniş bir literatür oluşturulmuştur [7-15].

Sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık anlamında denkliği, aynı dönüşüm ile inşa edilen iki iterasyon yönteminden elde edilecek dizilerden birisi dönüşümün sabit noktasına yakınsak iken diğer dizinin de yakınsak olması şeklinde ifade edilebilir [16-20].

Belirli şartlar altında aynı sabit noktaya yakınsayan iki iterasyon yönteminden elde edilen dizilerden hangisinin daha hızlı olduğunun belirlenmesi karşımıza yakınsaklık hızı kavramını çıkarmaktadır. Bu amaç doğrultusunda yapılan bazı çalışmalara [20-24] ile verilen kaynaklardan ulaşılabilir.

Sabit noktaların veri bağılılığı; bir dönüşüm kullanılarak oluşturulan iterasyon yönteminden elde edilecek dizi ile bu dönüşüme çok yakın olan başka bir dönüşüm kullanılarak aynı iterasyon yönteminden elde edilecek dizinin yakınsadıkları noktaların farkının ne kadar olduğu şeklinde ifade edilebilir [25-31].

Matematiksel olarak kararlılık kavramı ise bir problemdeki verilerde ya da problemin belirli aşamalarında yapılan küçük değişimlerin elde edilmesi gereken temel sonuca etkisinin ne kadar olduğunun hesaplanması olarak açıklanabilir [32-41].

Yukarıda bir kısmından bahsedilen sabit nokta teorisine dair çalışmalar, metrik uzaylar [5], b-metrik uzaylar [42], quasi metrik uzaylar [43], G-metrik uzaylar [44], konveks metrik uzaylar [45], hiperbolik uzaylar [46], CAT uzaylar [47], normlu uzaylar ve kompleks-değerli Banach [48] uzayları gibi lineer ve lineer olmayan farklı yapılar üzerinde yürütülmektedir. Ayrıca bu yapıların bazıları üzerinde tanımlanan integral veya diferansiyel denklemlerin çözümüne ulaşabilmek için ilgili denklem bir operatör olarak göz önüne alınır ve belirli bir dönüşüm sınıfına dahil edilerek oluşturulacak olan iterasyon yönteminden elde edilecek dizinin operatörün çözümüne hangi şartlar altında yakınsayacağı belirlenir. Bu nedenle sabit nokta iterasyon yöntemleri integral ve diferansiyel denklemlerin çözümünde de etkin bir rol oynamaktadır [49-52].

Bu çalışmada belirli bir rasyonel dönüşüm sınıfı göz önüne alınarak yeni bir iterasyon yöntemi tanımlanmış ve bu iterasyon yöntemi için yakınsaklık, yakınsaklık

hızı, veri bağılılığı ve kararlılık sonuçları irdelenmiştir. Bu sonuçlar aşikar olmayan nümerik örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca, bir fonksiyonel-integral denklem çeşidinin yeni tanımlanan iterasyon yöntemi kullanılarak uygun şartlar altında çözümünün elde edilebileceği gösterilmiş ve bu sonucun veri bağılı olduğu ispatlanmıştır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, temel sonuçlarımızın elde edilmesi amacıyla bazı tanımlar, dönüşüm sınıfları, teoremler, lemmalar ve iterasyon yöntemleri verilmiştir.

2.1 Tanımlar

2.1.1 Tanım A boş olmayan bir küme ve $\rho: A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Her $x_1, x_2, x_3 \in A$ için

- 1) $\rho(x_1, x_2) \geq 0$
- 2) $\rho(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- 3) $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$ (simetri özelliği)
- 4) $\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, x_3) + \rho(x_3, x_2)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlayan ρ fonksiyonuna A üzerinde bir metrik fonksiyonu, (A, ρ) ikilisine de metrik uzay denir [53].

2.1.2 Tanım (A, ρ) metrik uzay ve $\{x_n\}$ bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in A$ noktasına yakınsaktır denir ve $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir [53].

2.1.3 Tanım (A, ρ) metrik uzay ve $\{x_n\}$ bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir [53].

2.1.4 Tanım (A, ρ) bir metrik uzay olsun. A uzayındaki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise A uzayına tam metrik uzay denir [54].

2.1.5 Tanım L boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun. $+: L \times L \rightarrow L$ ve $\mathbb{F} \times L \rightarrow L$ işlemleri tanımlansın.

A) L , $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Her $x_1, x_2, x_3 \in L$ için

- 1) $x_1 + x_2 \in L$
- 2) $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$
- 3) $x_1 + \theta = \theta + x_1 = x_1$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

4) $x_1 + (-x_1) = (-x_1) + x_1 = \theta$ olacak şekilde $-x_1 \in L$ ve $\theta \in L$ vardır.

5) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$

B) Her $x_1, x_2 \in L$ ve her $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ için

1) $\alpha_1 x_1 \in L$

2) $\alpha_1(x_1 + x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2$

3) $(\alpha_1 + \alpha_2)x_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1$

4) $\alpha_1(\alpha_2 x_1) = (\alpha_1 \alpha_2)x_1$

5) $1 \cdot x_1 = x_1$ (1, $\mathbb{F}$ 'nin birim elemanıdır)

özelliklerini sağlıyorsa L 'ye $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzay denir [55].

2.1.6 Tanım A bir vektör uzay olsun. $\mathbb{F}$ cismi $\mathbb{R}$ olmak üzere, $\|\cdot\|: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x_1 noktasındaki değeri $\|x_1\|$ ile verilsin. Her $x_1, x_2 \in A$ ve $\alpha_1 \in \mathbb{F}$ için

1) $\|x_1\| \geq 0$

2) $\|x_1\| \geq 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

3) $\|\alpha_1 x_1\| = |\alpha_1| \cdot \|x_1\|$

4) $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna A üzerinde bir norm, $(A, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [56].

A üzerinde bir norm bu uzayda,

$$\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|, (x_1, x_2 \in A) \quad (2.1)$$

ile verilen bir metrik tanımlar ve bu metriğe norm tarafından üretilen metrik denir.

2.1.7 Tanım A normlu vektör uzay olsun. A uzayı, $\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$, $(x_1, x_2 \in A)$ ile verilen norm tarafından üretilen metriğe göre tam ise A uzayına Banach uzayı denir [57].

2.1.8 Tanım (A, ρ) ve (B, d) iki metrik uzay, $f: A \rightarrow B$ bir dönüşüm ve $x_0 \in A$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\rho(x, x_0) < \delta \text{ olduğunda } d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f 'ye x_0 noktasında süreklidir denir. f , A 'nın her noktasında sürekli ise f dönüşümüne A 'da süreklidir denir [58].

2.1.9 Tanım L bir reel vektör uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ için

$$B = \{z \in L: z = \alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1)x_2, 0 \leq \alpha_1 \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konvektir denir [58].

2.1.10 Tanım A metrik uzayı içinde $\{x_n\}$ bir dizi ve $x_0 \in A$ olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$ ise ya da her $\varepsilon > 0$ sayısı $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \exists \forall n > n_\varepsilon$ için $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $\{x_0\}$ noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \rightarrow x_0$ ya da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ile gösterilir. Burada $\{x_0\}$ noktasına $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti adı verilir [53].

2.1.11 Tanım $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ olmak üzere L , $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f: L \rightarrow \mathbb{F}$ operatörüne fonksiyonel denir. Burada L vektör uzay ise $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, kompleks vektör uzay ise $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ dir. Eğer f lineer ise f 'ye lineer fonksiyonel denir [53].

2.1.12 Tanım $T, S: A \rightarrow A$ iki operatör olsun. Her $x \in A$ ve uygun bir $\varepsilon > 0$ için

$$\|Tx - Sx\| \leq \varepsilon \tag{2.2}$$

ise S 'ye T 'nin bir yaklaşım operatörü denir [30].

2.1.13 Tanım $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ ve $\{v_n\}_{n=0}^\infty$ aynı sabit p noktasına yakınsayan iki dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(u_n, p)}{\rho(v_n, p)} = 0 \tag{2.3}$$

ise $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi p noktasına $\{v_n\}_{n=0}^\infty$ dizisinden daha hızlı yakınsar denir [59].

2.1.14 Tanım (A, ρ) bir metrik uzay, $T: A \rightarrow A$ dönüşüm ve $x_0 \in A$ olsun. Picard iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisinin T 'nin p sabit noktasına yakınsadığını kabul edelim. $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, A uzayında keyfi bir dizi olmak üzere

$$\varepsilon_n = \rho(u_{n+1}, f(T, u_n)), n = 0, 1, 2, \dots$$

olarak alalım. Bu iterasyon yönteminin T -kararlı veya T 'ye göre kararı olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$$

olmasıdır [33-34].

2.1.15 Tanım A boş olmayan bir küme $T: A \rightarrow A$ herhangi bir dönüşüm olsun.

$$T(x) = x \tag{2.4}$$

olacak şekilde bir $x \in A$ varsa bu x noktasına T 'nin sabit noktası denir ve T 'nin tüm sabit noktalarının kümesi F_T ile gösterilir [1].

2.1.16 Örnek Aşağıda sabit nokta örnekleri verilmiştir:

a) $A = \mathbb{R}$ verilsin. $T(x) = x^2 - 5x + 9$ olsun. Buradan $F_T = \{3\}$ tür.

b) $A = \mathbb{R}$ verilsin. $T(x) = x - 7$ olsun. Buradan $F_T = \emptyset$ dir.

c) $A = \mathbb{R}$ verilsin. $T(x) = x^2 - 2$ olsun. Buradan $F_T = \{-1, 2\}$ dir.

2.2 Bazı Sabit Nokta Dönüşüm Sınıfları

Bu kısımda, tezde kullanılan rasyonel tipli dönüşüm tanımı verilmeden önce yaygın olarak kullanılan bazı dönüşümler hakkında bilgi verilecektir.

2.2.1 Tanım (A, ρ) bir metrik uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ için

$$\rho(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha_1 \rho(x_1, x_2) \tag{2.5}$$

olacak şekilde bir $\alpha_1 > 0$ sayısı varsa T 'ye Lipschitzian dönüşümü denir ve bu eşitsizliği sağlayan en küçük α_1 sayısına T 'nin Lipschitz sabiti denir [1].

2.2.2 Tanım (A, ρ) bir metrik uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ için

$$\rho(Tx_1, Tx_2) \leq \rho(x_1, x_2) \quad (2.6)$$

ise T 'ye bir nonexpansive dönüşüm veya genişlemeyen dönüşüm denir [1].

2.2.3 Tanım A bir normlu uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ ve her $n \geq 1$ için $k_n \rightarrow 1$ olmak üzere

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq k_n \|x_1 - x_2\| \quad (2.7)$$

şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa T 'ye asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir [1].

2.2.4 Tanım (A, ρ) bir metrik uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ için

$$\rho(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha_1 \rho(x_1, x_2) \quad (2.8)$$

olacak şekilde bir $\alpha_1 \in [0, 1)$ sayısı varsa T 'ye contraction dönüşüm veya daraltan dönüşüm denir [1].

2.2.5 Tanım (A, ρ) bir metrik uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 \neq x_2$ için

$$\rho(Tx_1, Tx_2) < \rho(x_1, x_2) \quad (2.9)$$

ise T 'ye strict contraction dönüşüm veya kesin daraltan dönüşüm denir [1].

2.2.6 Tanım A bir Banach uzayı ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ ve $r > 0$ için

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(1 + r)(x_1 + x_2) - r(Tx_1 - Tx_2)\| \quad (2.10)$$

ise T 'ye pseudo-kesin daralma dönüşümü denir [1].

2.2.7 Tanım (A, ρ) bir metrik uzay ve $T: A \rightarrow A$ dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ için

$$\rho(Tx_1, Tx_2) \leq h. \max \left\{ \begin{array}{l} \rho(x_1, x_2), \rho(x_1, Tx_1), \rho(x_2, Tx_2), \\ \rho(x_1, Tx_2), \rho(x_2, Tx_1) \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

olacak şekilde bir $h \in (0,1)$ sayısı varsa T 'ye quasi-contraction dönüşüm denir [60].

2.2.8 Tanım (A, ρ) bir tam metrik uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ için

$$\rho(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha_1 \rho(x_1, x_2) + L_1 \rho(x_2, Tx_1) \quad (2.12)$$

veya

$$\rho(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha_1 \rho(x_1, x_2) + L_1 \rho(x_1, Tx_2) \quad (2.13)$$

olacak şekilde bir $\alpha_1 \in (0,1)$ sayısı ve bir $L_1 \geq 0$ varsa T 'ye almost contraction veya hemen-hemen daraltan dönüşüm denir [61].

2.2.9 Tanım (A, ρ) bir metrik uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ için

$$\rho(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha_1 \rho(x_1, x_2) + \alpha_2 \frac{\rho(x_1, Tx_1) \rho(x_2, Tx_2)}{\rho(x_1, x_2)} \quad (2.14)$$

olacak şekilde $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ şartını sağlayan $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1)$ sayıları varsa T 'ye Jaggi dönüşümü denir [62].

2.2.10 Tanım (A, ρ) bir metrik uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ için,

$$\rho(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha_1 \rho(x_1, x_2) + \alpha_2 \frac{\rho(Tx_2, x_2) [\rho(Tx_1, x_1) + 1]}{1 + \rho(x_1, x_2)} \quad (2.15)$$

olacak şekilde $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ şartını sağlayan $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1)$ sayıları varsa T 'ye bir Jaggi tipi dönüşümü denir [63].

Rasyonel dönüşüm olan (2.15) ile verilen Jaggi tipi dönüşüm normlu uzaylarda aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

A bir normlu uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ ve $a + b < 1$ için,

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq a\|x_1 - x_2\| + b \frac{\|Tx_2 - x_2\|[\|Tx_1 - x_1\| + 1]}{1 + \|x_1 - x_2\|} \quad (2.16)$$

2.3 Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda ise sabit noktaların varlığını veya tekliğini garanti eden bazı teoremlere yer verilmiştir.

2.3.1 Teorem (A, ρ) tam metrik uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir contraction dönüşüm olsun. O halde; T, A 'da bir tek p sabit noktasına sahiptir. Ayrıca $x_0 \in A$ başlangıç noktası için

$$x_{n+1} = Tx_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

Picard iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p noktasına yakınsar [2].

2.3.2 Teorem (A, ρ) tam metrik uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ için

$$\rho(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha_2 \cdot [\rho(x_1, Tx_1) + \rho(x_2, Tx_2)]$$

olacak şekilde en az bir $\alpha_2 \in [0, 1/2)$ sayısı varsa T bir Picard operatörüdür [3].

2.3.3 Teorem (A, ρ) tam metrik uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ için

$$\rho(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha_3 \cdot [\rho(x_1, Tx_2) + \rho(x_2, Tx_1)]$$

olacak şekilde en az bir $\alpha_3 \in [0, 1/2)$ sayısı varsa T bir Picard operatörüdür [4].

2.3.4 Teorem (A, ρ) tam metrik uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ için

$$\text{i) } \rho(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha_1 \rho(x_1, x_2)$$

$$\text{ii) } \rho(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha_2 \cdot [\rho(x, Tx) + \rho(x_2, Tx_2)]$$

$$\text{iii) } \rho(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha_3 \cdot [\rho(x_1, Tx_2) + \rho(x_2, Tx_1)]$$

şartlarından en az birisinin doğru olacağı şekilde $\alpha_1 \in [0, 1)$, $0 < \alpha_2, \alpha_3 < 1/2$ koşullarını sağlayan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ reel sayıları varsa T bir Picard operatörüdür [5].

2.3.5 Teorem $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f 'nin $[a, b]$ aralığında bir sabit noktası vardır [1].

2.3.6 Teorem $A, \mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar olsun. Bu durumda $f: A \rightarrow A$ sürekli dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir [1].

2.3.7 Teorem A bir Banach uzayı, B, A 'nın kompakt, konveks alt kümesi ve $f: B \rightarrow B$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f, B 'de en az bir sabit noktaya sahiptir [1].

2.3.8 Teorem A bir Banach uzayı, B, A 'nın kapalı konveks alt kümesi ve $f: B \rightarrow B$ sürekli ve kompakt bir dönüşüm olsun. Bu durumda f, B 'de en az bir sabit noktaya sahiptir [1].

2.3.9 Teorem (A, ρ) bir metrik uzay ve $n \in \mathbb{N}$ için T^n bir daralma dönüşümü olacak şekilde bir $T: A \rightarrow A$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir [64].

2.3.10 Teorem (A, ρ) bir tam metrik uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ şartları ile her $x_1, x_2 \in A$ için

$$\rho(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha_1 \rho(x_1, x_2) + \alpha_2 \frac{\rho(x_1, Tx_1) \rho(x_2, Tx_2)}{\rho(x_1, x_2)} \quad (2.17)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda T 'nin tek bir sabit noktası vardır [62].

2.3.11 Teorem (A, ρ) bir tam metrik uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ şartları ile her $x_1, x_2 \in A$ için

$$\rho(Tx_1, Tx_2) \leq \alpha_1 \rho(x_1, x_2) + \alpha_2 \frac{\rho(Tx_2, x_2) [\rho(Tx_1, x_1) + 1]}{1 + \rho(x_1, x_2)} \quad (2.18)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda T 'nin tek bir sabit noktası vardır [63].

2.4 Bazı Sabit Nokta Lemmaları

Bu kısımda kararlılık ve veri bağıllığı teoremlerinin ispatı için gerekli lemmalara yer verilmiştir.

2.4.1 Lemma Her $n \in \mathbb{N}$ için $\delta \in [0,1)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ sayı dizisi verilsin. $u_{n+1} \leq \delta u_n + \varepsilon_n$ şartını sağlayan herhangi bir $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif sayı dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ dır [64].

2.4.2 Lemma $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan iki dizi olsun.

$$a_{n+1} \leq (1 - \mu_n)a_n + b_n$$

olacak şekilde $n \geq n_0$ için $\mu_n \in (0,1)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve $n \rightarrow \infty$ için $\frac{b_n}{\mu_n} \rightarrow 0$ dır.

Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ dır [65].

2.4.3 Lemma Her $n \geq n_0$ için $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ negatif olmayan reel sayı dizisi verilsin.

$$a_{n+1} \leq (1 - \mu_n)a_n + \mu_n \eta_n$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcut olsun. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n \in (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve $\eta_n \geq 0$ dır. Bu durumda

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \eta_n$$

eşitsizliği sağlanır [30].

2.5 Bazı Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri

$(A, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. f bir fonksiyon olmak üzere, bir sabit nokta iterasyon yöntemi en genel haliyle

$$\begin{cases} x_0 \in A \\ x_{n+1} = f(T, x_n), n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır [1].

2.5.1 Tanım Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{cases} x_0 \in A \\ x_{n+1} = f(T, x_n) = T x_n \end{cases} \quad (2.20)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Picard iterasyon yöntemi denir [1].

Daralma dönüşümü yerine farklı sınıftan bir dönüşüm alınırsa Picard iterasyonu, dönüşümün sabit noktasına yakınsamayabilir [1]. Bu nedenle farklı iterasyon yöntemlerine ihtiyaç ortaya çıkmıştır. Bu iterasyon yöntemlerinden bazıları şu şekildedir:

2.5.2 Tanım Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere

$$\begin{cases} x_0 \in A \\ x_{n+1} = f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \end{cases} \quad (2.21)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Mann iterasyon yöntemi denir [8].

2.5.3 Tanım Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \quad (2.22)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Ishikawa iterasyon yöntemi denir [9].

2.5.4 Tanım Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \quad (2.23)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Noor iterasyon yöntemi denir [10].

2.5.5 Tanım Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)T x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \quad (2.24)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine S-iterasyon yöntemi denir [11].

2.5.6 Tanım Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \quad (2.25)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine SP iterasyon yöntemi denir [66].

2.5.7 Tanım Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \quad (2.26)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine CR iterasyon yöntemi denir [67].

2.5.8 Tanım Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)T x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)T x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \quad (2.27)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine S* iterasyon yöntemi denir [68].

2.5.9 Tanım Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = T y_n \\ y_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \end{cases} \quad (2.28)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Picard-Mann iterasyon yöntemi denir [12].

Yukarıda verilen iterasyon yöntemlerine ek olarak tanımladığımız yeni dört adımlı iterasyon yöntemi aşağıdaki gibidir:

2.5.10 Tanım Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \mu_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_nTy_n \\ y_n = (1 - \beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)w_n + \gamma_nTw_n \\ w_n = (1 - \mu_n)x_n + \mu_nTx_n \end{cases} \quad (2.29)$$

3. YENİ İTERASYON YÖNTEMİ İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde (2.29) ile verilen yeni iterasyon yöntemi için (2.16) ile verilen Jaggi tipi dönüşüm sınıfı kullanılarak kuvvetli yakınsaklık, yakınsaklık hızı, kararlılık ve veri bağıllığı teoremleri ispatlanacaktır.

3.1 Yeni İterasyon Yönteminin Yakınsaklığı

3.1.1 Teorem C kümesi A Banach uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $a + b < 1$ olmak üzere (2.16) ile verilen $T: C \rightarrow C$ dönüşümü göz önüne alınsın. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, (2.29) ile verilen yeni iterasyon yönteminden üretilen bir dizi ve $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ kontrol dizileri $[0,1]$ aralığına ait olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartı sağlansın. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi T operatörünün teklikle belirli olan p sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat T operatörünün sabit noktası p olduğundan (2.16) ile verilen dönüşüm kullanılırsa

$$\|Tx_n - Tp\| \leq a\|x_n - p\| + b \frac{\|Tp - p\|[\|Tx_n - x_n\| + 1]}{1 + \|x_n - p\|} \quad (3.1)$$

burada $Tp = p$ olduğundan gerekli düzenlemeler ile birlikte

$$\|Tx_n - Tp\| \leq a\|x_n - p\| \quad (3.2)$$

olur. Buradan $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow p$ olduğu gösterilecektir.

(2.29) ile verilen iterasyon yöntemi ve (3.2) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|w_n - p\| &= \|(1 - \mu_n)x_n + \mu_n Tx_n - p\| \\ &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n\|Tx_n - p\| \\ &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n\|Tx_n - Tp\| \\ &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - p\| + \mu_n a\|x_n - p\| \\ &\leq [1 - \mu_n + \mu_n a]\|x_n - p\| \\ &\leq [1 - \mu_n(1 - a)]\|x_n - p\| \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\| &= \|(1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n Tw_n - p\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n\|Tw_n - p\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n\|Tw_n - Tp\| \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - p\| + \gamma_n a\|w_n - p\| \\
&\leq [1 - \gamma_n + \gamma_n a]\|w_n - p\| \\
&\leq [1 - \gamma_n(1 - a)]\|w_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.4}$$

olur. (3.3) eşitsizliği (3.4) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\|z_n - p\| \leq [1 - \gamma_n(1 - a)][1 - \mu_n(1 - a)]\|x_n - p\| \tag{3.5}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \|(1 - \beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|Tx_n - p\| + \beta_n\|Tz_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|Tx_n - Tp\| + \beta_n\|Tz_n - Tp\| \\
&\leq (1 - \beta_n)a\|x_n - p\| + \beta_n a\|z_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n)a\|x_n - p\| + \beta_n a\|z_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.6}$$

olur. (3.5) eşitsizliği (3.6) eşitsizliğinde yerine yazılıp $[1 - \mu_n(1 - a)] \leq 1$ ve $[1 - \gamma_n(1 - a)] \leq 1$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &\leq (1 - \beta_n)a\|x_n - p\| \\
&\quad + \beta_n a[1 - \gamma_n(1 - a)][1 - \mu_n(1 - a)]\|x_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n)a\|x_n - p\| + \beta_n a\|x_n - p\| \\
&\leq a\|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|(1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_n Ty_n - p\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|Tx_n - p\| + \alpha_n\|Ty_n - p\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|Tx_n - Tp\| + \alpha_n\|Ty_n - Tp\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)a\|x_n - p\| + \alpha_n a\|y_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.8}$$

olur. (3.7) eşitsizliği (3.8) eşitsizliğinde yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq (1 - \alpha_n)a\|x_n - p\| + \alpha_n a^2 \|x_n - p\| \\
&\leq [(1 - \alpha_n)a + \alpha_n a^2] \|x_n - p\| \\
&\leq a[1 - \alpha_n(1 - a)] \|x_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) eşitsizliğinde tümevarım uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq a[1 - \alpha_n(1 - a)] \|x_n - p\| \\
\|x_n - p\| &\leq a[1 - \alpha_{n-1}(1 - a)] \|x_{n-1} - p\| \\
\|x_{n-1} - p\| &\leq a[1 - \alpha_{n-2}(1 - a)] \|x_{n-2} - p\| \\
&\vdots \\
\|x_2 - p\| &\leq a[1 - \alpha_1(1 - a)] \|x_1 - p\| \\
\|x_1 - p\| &\leq a[1 - \alpha_0(1 - a)] \|x_0 - p\|
\end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir. $a \in (0,1)$ olduğundan $[1 - \alpha_n(1 - a)] \leq 1$ dir. $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \infty$ şartından

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq \|x_0 - p\| a^{n+1} \prod_{i=0}^n [1 - \alpha_i(1 - a)] \\
&\leq \|x_0 - p\| a^{n+1} e^{\frac{1}{(1-a)\sum_{i=0}^n \alpha_i}}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

olur. (3.11) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınırsa $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow p$ olduğu görülür.

Bu teoremden verilen $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \infty$ şartına gerek kalmaksızın 3.1.1 Teorem yeniden düzenlenir ve ispatlanırsa aşağıda verilen teorem elde edilir.

3.1.2 Teorem C , A ve T 3.1.1 Teorem’de olduğu gibi tanımlansın ve $a + b < 1$ şartı sağlansın. Bu durumda (2.29) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi

$$\|x_{n+1} - p\| \leq a^{n+1} \|x_0 - p\| \tag{3.12}$$

eşitsizliği ile T operatörünün p sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat 3.1.1 Teorem'in ispatına benzer şekilde yapılabilir. Yani (3.9) ile verilen $\|x_{n+1} - p\| \leq a[1 - \alpha_n(1 - a)]\|x_n - p\|$ eşitsizliğini göz önüne alırsak $[1 - \alpha_n(1 - a)] \leq 1$ olduğu için

$$\|x_{n+1} - p\| \leq a\|x_n - p\| \quad (3.13)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik kullanılarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = 0$ elde edilir.

3.2 Yakınsaklık Hızı

3.2.1 Teorem C , A ve T 3.1.1 Teorem'de olduğu gibi tanımlansın ve $a + b < 1$ şartı sağlansın. $x_0 = u_0 \in C$ olmak üzere (2.29) ile verilen yeni iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi ve (2.27) ile verilen S^* iterasyon yönteminden elde edilen $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi göz önüne alınsın. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için sırasıyla $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \infty$ ve $\alpha_1 \leq \alpha_n \leq 1$ şartları sağlansın. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p noktasına $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

İspat 3.1.1 Teorem'den aşağıda verilen eşitsizlik yazılabilir:

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_0 - p\| a^{n+1} \prod_{i=0}^n [1 - \alpha_i(1 - a)] \quad (3.14)$$

Şimdi yakınsaklık hızını karşılaştırmak için (2.27) ile verilen S^* iterasyon yöntemini aşağıdaki şekliyle göz önüne alalım:

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tu_n + \alpha_nTv_n \\ v_n = (1 - \beta_n)Tu_n + \beta_nTk_n \\ k_n = (1 - \gamma_n)u_n + \gamma_nTu_n \end{cases} \quad (3.15)$$

(2.16) dönüşümü kullanılarak (3.15) iterasyonunun kuvvetli yakınsaklığını elde ederiz.

3.1.1 Teorem'in ispatındaki benzer işlemler kullanılarak $n \rightarrow \infty$ için $u_n \rightarrow p$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned} \|k_n - p\| &\leq (1 - \gamma_n)\|u_n - p\| + \gamma_n\|Tu_n - p\| \\ &\leq (1 - \gamma_n)\|u_n - p\| + \gamma_n\|Tu_n - Tp\| \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \gamma_n)\|u_n - p\| + \gamma_n a \|u_n - p\| \\
&\leq [1 - \gamma_n(1 - a)]\|u_n - p\|
\end{aligned}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned}
\|v_n - p\| &\leq (1 - \beta_n)\|Tu_n - p\| + \beta_n\|Tk_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|Tu_n - Tp\| + \beta_n\|Tk_n - Tp\| \\
&\leq (1 - \beta_n)a\|u_n - p\| + \beta_n a \|k_n - p\| \\
&\leq (1 - \beta_n)a\|u_n - p\| \\
&\quad + \beta_n a [1 - \gamma_n(1 - a)]\|u_n - p\| \\
&\leq [(1 - \beta_n)a + \beta_n a [1 - \gamma_n(1 - a)]]\|u_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olur. $[1 - \gamma_n(1 - a)] \leq 1$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|v_n - p\| &\leq [(1 - \beta_n)a + \beta_n a]\|u_n - p\| \\
&\leq a\|u_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - p\| &\leq (1 - \alpha_n)\|Tu_n - p\| + \alpha_n\|Tv_n - p\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)a\|u_n - p\| + \alpha_n a \|v_n - p\| \\
&\leq (1 - \alpha_n)\|u_n - p\| + \alpha_n a \|u_n - p\| \\
&\leq [1 - \alpha_n(1 - a)]\|u_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.19}$$

olur ve son eşitsizlikte tümevarım uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - p\| &\leq [1 - \alpha_n(1 - a)]\|u_n - p\| \\
\|u_n - p\| &\leq [1 - \alpha_{n-1}(1 - a)]\|u_{n-1} - p\| \\
\|u_{n-1} - p\| &\leq [1 - \alpha_{n-2}(1 - a)]\|u_{n-2} - p\| \\
&\vdots \\
\|u_2 - p\| &\leq [1 - \alpha_1(1 - a)]\|u_1 - p\|
\end{aligned} \tag{3.20}$$

olur. $a \in (0,1)$ olduğundan $[1 - \alpha_n(1 - a)] < 1$ dir. $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \infty$ şartından

$$\|u_{n+1} - p\| \leq \|u_0 - p\| \prod_{i=0}^n [1 - \alpha_i(1 - a)] \tag{3.21}$$

$$\leq \|u_0 - p\| e^{\frac{1}{(1-a)\sum_{i=0}^n \alpha_i}}$$

elde edilir. (3.21) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınırsa $n \rightarrow \infty$ için $u_n \rightarrow p$ olduğu görülür.

$\alpha_1 \leq \alpha_n \leq 1$ şartı sırasıyla (3.14) ve (3.21) eşitsizliklerine uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq \|x_0 - p\| a^{n+1} \prod_{i=0}^n [1 - \alpha_1(1 - a)] \\ &= \|x_0 - p\| a^{n+1} [1 - \alpha_1(1 - a)]^{n+1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - p\| &\leq \|u_0 - p\| \prod_{i=0}^n [1 - \alpha_1(1 - a)] \\ &= \|u_0 - p\| [1 - \alpha_1(1 - a)]^{n+1} \end{aligned}$$

olur.

$$c_n = \|x_0 - p\| a^{n+1} [1 - \alpha_1(1 - a)]^{n+1}$$

$$d_n = \|u_0 - p\| [1 - \alpha_1(1 - a)]^{n+1}$$

şeklinde seçilsin. $\delta_n = \frac{c_n}{d_n}$ olsun. Bu durumda

$$\delta_n = \frac{c_n}{d_n} = \frac{\|x_0 - p\| a^{n+1} [1 - \alpha_1(1 - a)]^{n+1}}{\|u_0 - p\| [1 - \alpha_1(1 - a)]^{n+1}} = (a^{n+1})$$

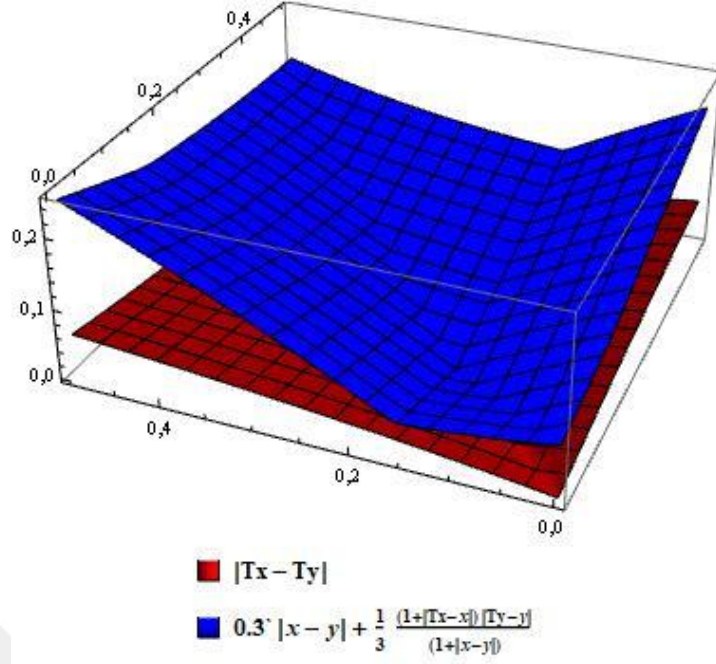
elde edilir. $a \in (0,1)$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ olur.

2.1.13 Tanım'dan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p sabit noktasına $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine göre daha hızlı yakınsar.

3.2.2 Örnek $A = \mathbb{R}$ kümesi alışılmış metrik ile verilsin. $C = [0,1] \subset A$ olmak üzere

$T: C \rightarrow C$ için $T(x) = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2x+1}}$ şeklinde seçilirse bu dönüşümün $a = 0.3$ ve $b = \frac{1}{3}$

için (2.16) şartını sağlayan bir Jaggi tipi dönüşüm olduğu Şekil 3.1'den görülebilir:



Şekil 3.1. T dönüşümünün (2.16) eşitsizliğinin sağlandığını gösteren grafik.

Bu dönüşümün sabit noktasının $p = 0.15867379107325$ olduğu görülebilir. $x_1 = 0.60$ başlangıç noktasıyla birlikte $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \mu_n = \frac{n}{2n+1}$ olsun. Aşağıda verilen çizelgeler (2.29) ile tanımlanan yeni iterasyon yönteminin Picard (2.20), Mann (2.21), Ishikawa (2.22), Noor (2.23), Agarwal S (2.24), SP (2.25), CR (2.26), S^* (2.27) ve Picard Mann (2.28) iterasyonlarından daha hızlı olduğunu göstermektedir.

Çizelge 3.1'den görüldüğü gibi (2.29) ile tanımlanan yeni iterasyon yöntemi 14. adımda sabit noktaya ulaşırken, CR (2.26) iterasyonu 15. adımda, S^* (2.27) iterasyonu 16. adımda, Picard Mann (2.28) iterasyonu 16. adımda ve Agarwal S (2.24) iterasyonu 18. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Çizelge 3.2'den görüldüğü gibi SP (2.25) iterasyonu 18. adımda, Picard (2.20) iterasyonu 19. adımda, Mann (2.21) iterasyonu 48. adımda, Ishikawa (2.22) iterasyonu 52. adımda ve Noor (2.23) iterasyonu 52. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Çizelge 3.1. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması.

x_n	Yeni İterasyon	CR	S^*	Picard Mann	Agarwal S
x_1	0.6000000000000000	0.6000000000000000	0.6000000000000000	0.6000000000000000	0.6000000000000000
x_2	0.13020188329451	0.13349963150871	0.13046373939769	0.12711221673200	0.11800454039893
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{13}	0.15867379107326	0.15867379107326	0.15867379107326	0.15867379107324	0.15867379107398
x_{14}	0.15867379107325	0.15867379107326	0.15867379107326	0.15867379107326	0.15867379107318
x_{15}	$\vdots$	0.15867379107325	0.15867379107326	0.15867379107326	0.15867379107325
x_{16}		$\vdots$	0.15867379107325	0.15867379107325	0.15867379107325
x_{17}			$\vdots$	$\vdots$	0.15867379107326
x_{18}					0.15867379107325
$\vdots$					$\vdots$

Çizelge 3.2. Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması.

x_n	SP	Picard	Mann	Ishikawa	Noor
x_1	0.600000000000000	0.600000000000000	0.600000000000000	0.600000000000000	0.600000000000000
x_2	0.26863283530504	0.11345070223240	0.43781690074413	0.44237073891067	0.44223025635742
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{17}	0.15867379107326	0.15867379107321	0.15868181400576	0.15869462706629	0.15869345607573
x_{18}	0.15867379107325	0.15867379107326	0.15867738633555	0.15868389891690	0.15868328209470
x_{19}	$\vdots$	0.15867379107325	0.15867539864977	0.15867868590995	0.15867836354798
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{48}			0.15867379107325	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{52}				0.15867379107325	0.15867379107325

3.3 Yeni İterasyon Yönteminin Kararlılığı

3.3.1 Teorem C , A ve T 3.1.1 Teorem’de olduğu gibi tanımlansın ve $a + b < 1$ şartı sağlansın. (2.29) ile verilen yeni iterasyon yöntemi tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \infty$ şartı ile T ’nin p sabit noktasına yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda (2.29) ile verilen iterasyon yöntemi T -kararlıdır.

İspat $\varepsilon_n = \|u_{n+1} - f(T, u_n)\|$ olmak üzere, kabul edelim ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olsun. (2.29) ile verilen iterasyon yöntemi kullanılarak A ’da herhangi bir $\{u_n\}$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tu_n + \alpha_nTv_n \\ v_n = (1 - \beta_n)Tu_n + \beta_nTh_n \\ h_n = (1 - \gamma_n)k_n + \gamma_nTk_n \\ k_n = (1 - \mu_n)u_n + \mu_nTu_n \end{cases} \quad (3.22)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ olduğunu göstermeliyiz. (3.22) iterasyonunu kullanarak

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - p\| &= \|u_{n+1} - f(T, u_n) + f(T, u_n) - p\| \\ &\leq \|u_{n+1} - f(T, u_n)\| + \|f(T, u_n) - p\| \\ &\leq \varepsilon_n + \|f(T, u_n) - p\| \\ &\leq \varepsilon_n + \|(1 - \alpha_n)Tu_n + \alpha_nTv_n - p\| \\ &\leq \varepsilon_n + (1 - \alpha_n)\|Tu_n - p\| + \alpha_n\|Tv_n - p\| \\ &\leq \varepsilon_n + (1 - \alpha_n)\|Tu_n - Tp\| + \alpha_n\|Tv_n - Tp\| \\ &\leq \varepsilon_n + (1 - \alpha_n)a\|u_n - p\| + \alpha_na\|v_n - p\| \\ &\leq \varepsilon_n + (1 - \alpha_n)a\|u_n - p\| + \alpha_na^2\|u_n - p\| \\ &\leq \varepsilon_n + a[1 - \alpha_n(1 - a)]\|u_n - p\| \end{aligned} \quad (3.23)$$

olur.

$$\begin{aligned} a_n &= \|u_n - p\| \\ \zeta_n &= a[1 - \alpha_n(1 - a)] \in (0,1) \\ b_n &= \varepsilon_n \end{aligned} \quad (3.24)$$

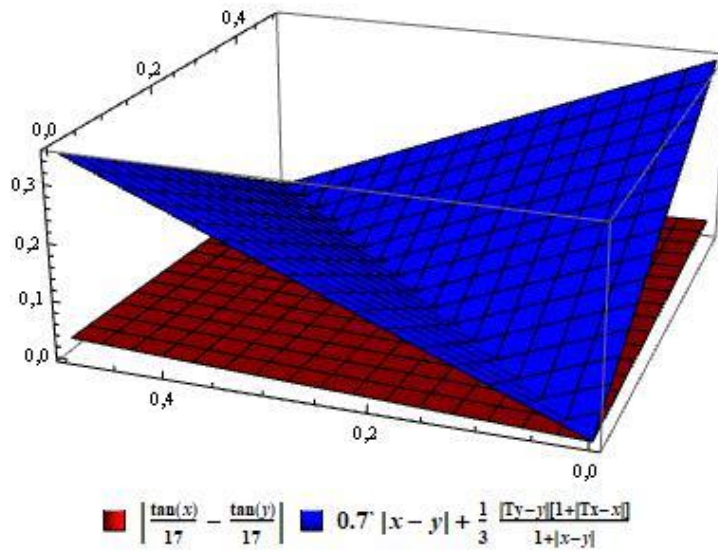
şeklinde seçilirse 2.4.2 Lemma’nın şartları sağlanır. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ elde edilir.

Tersine $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ olduğunu kabul edelim. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \|u_{n+1} - f(T, u_n)\| \\
&= \|u_{n+1} - p + p - f(T, u_n)\| \\
&\leq \|u_{n+1} - p\| + \|f(T, u_n) - p\| \\
&\leq \|u_{n+1} - p\| + \|(1 - \alpha_n)Tu_n + \alpha_nTv_n - p\| \\
&\leq \|u_{n+1} - p\| + (1 - \alpha_n)\|Tu_n - p\| + \alpha_n\|Tv_n - p\| \\
&\leq \|u_{n+1} - p\| + (1 - \alpha_n)\|Tu_n - Tp\| + \alpha_n\|Tv_n - Tp\| \\
&\leq \|u_{n+1} - p\| + (1 - \alpha_n)a\|u_n - p\| + \alpha_na\|v_n - p\| \\
&\leq \|u_{n+1} - p\| + (1 - \alpha_n)a\|u_n - p\| + \alpha_na^2\|u_n - p\| \\
&\leq \|u_{n+1} - p\| + a[1 - \alpha_n(1 - a)]\|u_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.25}$$

(3.25) eşitsizliğinde her iki tarafının limiti alınır. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p$ den $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = p$ olur. Sonuç olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ elde edilir. Dolayısıyla (2.29) ile tanımlanan yeni iterasyon yöntemi T -kararlıdır.

3.3.2 Örnek $A = \mathbb{R}$ kümesi alışılmış metrik ile verilsin. $C = [0,1] \subset A$ olmak üzere $T: C \rightarrow C$ için $T(x) = \frac{1}{17} \tan x$ şeklinde seçilirse bu dönüşümün $a = 0.7$ ve $b = \frac{1}{3}$ için (2.16) şartını sağlayan bir Jaggi tipi dönüşüm olduğu MATHEMATICA 9 programı kullanılarak elde edilen Şekil 3.2'den görülebilir:



Şekil 3.2. T dönüşümünün (2.16) eşitsizliğinin sağlandığını gösteren grafik.

Bu dönüşümün sabit noktasının $p=0$ olduğu görülebilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \mu_n = \frac{1}{2n+1}$ olmak üzere (2.29) ile verilen iterasyon yöntemi T operatörü kullanılarak yeniden yazılırsa:

$$\begin{aligned}
w_n &= \frac{34nx_n + \tan(x_n)}{17 + 34n} \\
z_n &= \frac{68n^2x_n + 2n\tan[x_n] + (1 + 2n)\tan\left[\frac{34nx_n + \tan[x_n]}{17 + 34n}\right]}{17(1 + 2n)^2} \\
y_n &= \frac{2n\tan[x_n]}{17 + 34n} + \\
&\quad + \frac{\tan\left[\frac{68n^2x_n + 2n\tan[x_n] + (1 + 2n)\tan\left[\frac{34nx_n + \tan[x_n]}{17 + 34n}\right]}{17(1 + 2n)^2}\right]}{17 + 34n} \\
x_{n+1} &= \frac{2n\tan[x_n]}{17 + 34n} + \\
&\quad + \frac{2n\tan[x_n] + \tan\left[\frac{68n^2x_n + 2n\tan[x_n] + (1 + 2n)\tan\left[\frac{34nx_n + \tan[x_n]}{17 + 34n}\right]}{17(1 + 2n)^2}\right]}{17 + 34n}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için keyfi $(u_n) = (\frac{1}{2n+3})$ seçilirse $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| = 0$ olduğundan (u_n) dizisi (x_n) dizisinin bir yaklaşım dizisi olur. $\varepsilon_n = \|u_{n+1} - f(T, u_n)\|$ olduğundan dolayı $\varepsilon_n = |u_{n+1} - f(T, u_n)| = \left| \frac{1}{2n+5} - f(T, u_n) \right|$ olur. Limit alınırsa:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2n+5} - f(T, u_n) \right| = 0$ olduğu görülür. Bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak T operatöründen ve (2.29) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizi T kararlıdır.

3.4 Yeni İterasyon Yönteminin Veri Bağıllığı

3.4.1 Teorem C, A ve T 3.1.1 Teorem’de olduğu gibi tanımlansın ve $a + b < 1$ şartı sağlansın. S, T operatörünün yaklaşım operatörü olsun. T ve S operatörleri sırasıyla p ve q sabit noktalarına sahip olsun. T operatöründen ve (2.29) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin. S operatörü için aşağıda verilen iterasyondan elde edilen dizi $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin:

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 - \alpha_n)Su_n + \alpha_n Sv_n \\ v_n = (1 - \beta_n)Su_n + \beta_n Sh_n \\ h_n = (1 - \gamma_n)k_n + \gamma_n Sk_n \\ k_n = (1 - \mu_n)u_n + \mu_n Su_n \end{cases} \quad (3.26)$$

burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n\}_{n=0}^\infty, \{\gamma_n\}_{n=0}^\infty, \{\mu_n\}_{n=0}^\infty \in [0,1]$ ve $\frac{1}{2} \leq \alpha_n$ dir.

$\varepsilon > 0$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ için $u_n \rightarrow q$ ise

$$\|p - q\| \leq \frac{5\varepsilon}{1 - \delta}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: (2.29) ve (3.26) ile verilen iterasyon yöntemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \|w_n - k_n\| &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|Tx_n - Su_n\| \\ &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|Tx_n - Tu_n\| \\ &\quad + \mu_n\|Tu_n - Su_n\| \\ &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|Tx_n - Tu_n\| + \mu_n\varepsilon \\ &\leq (1 - \mu_n(1 - a))\|x_n - u_n\| + \mu_nbA_1 + \mu_n\varepsilon \end{aligned} \quad (3.27)$$

burada

$$A_1 = \frac{\|Tx_n - x_n\|[\|Tu_n - u_n\| + 1]}{1 + \|x_n - u_n\|} \quad (3.28)$$

olmak üzere (2.16) şartını kullanırsak

$$\|Tx_n - Tu_n\| \leq a\|x_n - u_n\| + b \frac{\|Tx_n - x_n\|[\|Tu_n - u_n\| + 1]}{1 + \|x_n - u_n\|} \quad (3.29)$$

ve (3.2) eşitsizliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned} \|Tx_n - x_n\| &\leq \|Tx_n - p\| + \|x_n - p\| \\ &\leq (a + 1)\|x_n - p\| \end{aligned} \quad (3.30)$$

ayrıca (3.29) eşitsizliğinden

$$\|Tx_n - Tu_n\| \leq a\|x_n - u_n\| + bA_1 \quad (3.30)$$

olur.

$$\begin{aligned} \|w_n - k_n\| &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|Tx_n - Su_n\| \\ &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|Tx_n - Tu_n\| \\ &\quad + \mu_n\|Tu_n - Su_n\| \\ &\leq (1 - \mu_n)\|x_n - u_n\| + \mu_n\|Tx_n - Tu_n\| + \mu_n\varepsilon \\ &\leq (1 - \mu_n(1 - a))\|x_n - u_n\| + \mu_nbA_1 + \mu_n\varepsilon \end{aligned} \quad (3.31)$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} \|z_n - h_n\| &\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - k_n\| + \gamma_n\|Tw_n - Sk_n\| \\ &\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - k_n\| + \gamma_n\|Tw_n - Tk_n\| + \gamma_n\varepsilon \\ &\leq (1 - \gamma_n(1 - a))\|w_n - k_n\| + \gamma_nbA_2 + \gamma_n\varepsilon \end{aligned} \quad (3.32)$$

burada

$$A_2 = b \frac{\|Tw_n - w_n\|[\|Tk_n - k_n\| + 1]}{1 + \|w_n - k_n\|} \quad (3.33)$$

alınır ve

$$\begin{aligned} \|Tw_n - w_n\| &\leq \|Tw_n - p\| + \|w_n - p\| \\ &\leq (a + 1)\|w_n - p\| \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.1.1 Teorem'in ispatında yer alan (3.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|Tw_n - w_n\| &\leq \|Tw_n - p\| + \|w_n - p\| \\ &\leq (a + 1)[1 - \mu_n(1 - a)]\|x_n - p\| \end{aligned} \quad (3.35)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\|Tz_n - Th_n\| \leq a\|z_n - h_n\| + b \frac{\|Tz_n - z_n\|[\|Th_n - h_n\| + 1]}{1 + \|x_n - h_n\|} \quad (3.36)$$

olur. Burada

$$A_3 = \frac{\|Tz_n - z_n\|(\|Th_n - h_n\| + 1)}{1 + \|x_n - h_n\|} \quad (3.37)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|Tz_n - z_n\| &\leq \|Tz_n - p\| + \|z_n - p\| \\ &\leq (a + 1)\|z_n - p\| \end{aligned} \quad (3.38)$$

olup 3.1.1 Teorem'in ispatında yer alan (3.3) ve (3.4) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \|Tz_n - z_n\| &\leq (a + 1)[1 - \gamma_n(1 - a)]\|w_n - p\| \\ &\leq (a + 1)[1 - \gamma_n(1 - a)][1 - \mu_n(1 - a)]\|x_n - p\| \end{aligned} \quad (3.39)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \|y_n - v_n\| &\leq (1 - \beta_n)\|Tx_n - Su_n\| + \beta_n\|Tz_n - Sh_n\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\|Tx_n - Tu_n\| + (1 - \beta_n)\|Tu_n - Su_n\| \\ &\quad + \beta_n\|Tz_n - Th_n\| + \beta_n\|Th_n - Sh_n\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\|Tx_n - Tu_n\| + \beta_n\|Tz_n - Th_n\| + \varepsilon \\ &\leq a(1 - \beta_n)\|x_n - u_n\| + b(1 - \beta_n)A_1 \\ &\quad + a\beta_n\|z_n - h_n\| + b\beta_nA_2 + \varepsilon \\ &\leq a(1 - \beta_n)\|x_n - u_n\| + b(1 - \beta_n)A_1 \\ &\quad + a\beta_n\|z_n - h_n\| + b\beta_nA_2 + \varepsilon \\ &\leq a(1 - \beta_n)\|x_n - u_n\| + b(1 - \beta_n)A_1 \\ &\quad + a\beta_n(1 - \gamma_n(1 - a))\|w_n - k_n\| \\ &\quad + ab\beta_n\gamma_nA_2 + a\beta_n\gamma_n\varepsilon + b\beta_nA_3 + \varepsilon \\ &\leq a(1 - \beta_n)\|x_n - u_n\| + b(1 - \beta_n)A_1 \\ &\quad + a\beta_n(1 - \gamma_n(1 - a))(1 - \mu_n(1 - a))\|x_n - u_n\| \\ &\quad + a\beta_n(1 - \gamma_n(1 - a))\mu_nbA_1 + ab\beta_n\gamma_nA_2 + b\beta_nA_3 \\ &\quad + a\beta_n\mu_n(1 - \gamma_n(1 - a))\varepsilon + a\beta_n\gamma_n\varepsilon + \varepsilon \end{aligned} \quad (3.40)$$

ve

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq (1 - \alpha_n)\|Tx_n - Su_n\| + \alpha_n\|Ty_n - Sv_n\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|Tx_n - Tu_n\| + (1 - \alpha_n)\|Tu_n - Su_n\| \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha_n\|Ty_n - Tv_n\| + \alpha_n\|Tv_n - Sv_n\| \\
& \leq (1 - \alpha_n)\|Tx_n - Tu_n\| + \alpha_n\|Ty_n - Tv_n\| + \varepsilon \\
& \leq (1 - \alpha_n)a\|x_n - u_n\| + (1 - \alpha_n)A_1 \\
& \quad + a\alpha_n\|y_n - v_n\| + \alpha_nA_4 + \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\|Ty_n - Tv_n\| \leq a\|y_n - v_n\| + b \frac{\|Ty_n - y_n\|[\|Tv_n - v_n\| + 1]}{1 + \|y_n - v_n\|} \quad (3.42)$$

elde edilir. Burada

$$A_4 = \frac{\|Ty_n - y_n\|[\|Tv_n - v_n\| + 1]}{1 + \|y_n - v_n\|} \quad (3.43)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|Ty_n - y_n\| & \leq \|Ty_n - p\| + \|y_n - p\| \\
& \leq (a + 1)\|y_n - p\|
\end{aligned} \quad (3.44)$$

olup 3.1.1 Teorem'in ispatında yer alan (3.6) eşitsizliği kullanılarak

$$\|Ty_n - y_n\| \leq (a + 1)a\|x_n - p\| \quad (3.45)$$

elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| & \leq a(1 - \alpha_n(1 - a))\|x_n - u_n\| \\
& \quad + (1 - \alpha_n)A_1 + \varepsilon + \alpha_n\varepsilon \\
& \quad + a\alpha_n\beta_n\mu_n(1 - \gamma_n(1 - a))\varepsilon + a\alpha_n\beta_n\gamma_n\varepsilon \\
& \quad + a\alpha_n\beta_n(1 - \gamma_n(1 - a))\mu_nbA_1 + \alpha_nA_4 \\
& \quad + b\alpha_n(1 - \beta_n)A_1 + ab\alpha_n\beta_n\gamma_nA_2 + b\alpha_n\beta_nA_3 \\
& \leq (1 - \alpha_n(1 - a))\|x_n - u_n\| + 5\alpha_n\varepsilon + \alpha_nA_4 \\
& \quad + [(1 - \alpha_n) + a\alpha_n\beta_n(1 - \gamma_n(1 - a))]\mu_nbA_1 \\
& \quad + b\alpha_n(1 - \beta_n)A_1 + ab\alpha_n\beta_n\gamma_nA_2 + b\alpha_n\beta_nA_3
\end{aligned} \quad (3.46)$$

olur.

$$\begin{aligned}
a_n &= \|x_n - u_n\| \\
\mu_n &= \alpha_n(1 - a) \in (0,1) \\
\eta_n &= \frac{5\alpha_n\varepsilon + [(1 - \alpha_n) + a\alpha_n\beta_n(1 - \gamma_n(1 - a))]\mu_nbA_1 + \alpha_nA_4}{(1 - \delta)} \\
&\quad + \frac{b\alpha_n(1 - \beta_n)A_1 + ab\alpha_n\beta_n\gamma_nA_2 + b\alpha_n\beta_nA_3}{(1 - \delta)}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

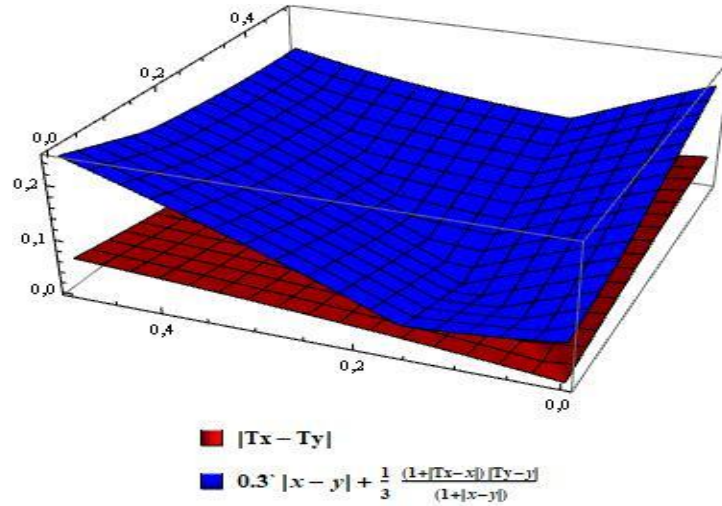
şeklinde seçilirse 2.4.3 Lemma'dan,

$$\|p - q\| \leq \frac{5\varepsilon}{1 - \delta}$$

elde edilir.

3.4.2 Örnek $A = \mathbb{R}$ ve $C = [0,1]$ alt küme $\mathbb{R}$ alışılmış metrik ile verilsin. $T: C \rightarrow C$ için,

$T(x) = \frac{1}{12}(1 + \ln(\frac{x+2}{5}))$ şeklinde seçilirse bu dönüşümün $a = 0.12$ ve $b = \frac{1}{3}$ için (2.16) şartını sağlayan bir Jaggi tipi dönüşüm olduğu MATHEMATICA 9 programı kullanılarak Şekil 3.3'ten görülebilir:



Şekil 3.3. T dönüşümünün (2.16) eşitsizliğinin sağlandığını gösteren grafik.

Bu dönüşümün sabit noktasının $p = 0.00727849235582$ olduğu görülebilir. S operatörü $S: C \rightarrow C$ için $S(x) = \frac{x}{7} - \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{24} + \frac{1}{150}$ şeklinde seçilirse $q = 0.00777488498544$ şeklinde tek bir sabit noktaya sahiptir. Burada her $x \in C$ için

$\max_{x \in C} |Tx - Sx| = 0.15042590893793$ elde edilir. Bu nedenle her $x \in C$ ve sabit $\varepsilon > 0$ için $|Tx - Sx| \leq 0.15042590893793$ olur. Dolayısıyla S operatörü T operatörünün bir yaklaşım operatörüdür. Böylece bu iki sabit nokta arasındaki uzaklık $|p - q| = 0.00049639262962$ olur. Eğer $x_1 = 0.60$ başlangıç noktasıyla birlikte $a = 0.12$, $b = \frac{1}{3}$ ve $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \mu_n = \frac{n}{2n+1}$ alındığında (3.26) ile verilen iterasyon yönteminin MATLAB programı yardımıyla 14. adımda $q = 0.00777488498544$ sabit noktasına ulaştığı Çizelge 3.3'ten görülür.

Çizelge 3.3. (3.26) ile verilen iterasyon yönteminin yakınsaklık davranışı.

x_n	İterasyon Yöntemi (3.26)
x_1	0.600000000000000
x_2	0.06954796399369
x_3	0.01334726211287
x_4	0.00826288929825
x_5	0.00781662213884
x_6	0.00777839702996
x_7	0.00777517712349
x_8	0.00777490907857
x_9	0.00777488695933
x_{10}	0.00777488514630
x_{11}	0.00777488499849
x_{12}	0.00777488498649
x_{13}	0.00777488498552
x_{14}	0.00777488498544

Buradan

$$0.00049639262962 = |p - q| \leq \frac{0.75212954468965}{1 - 0.12}$$

elde edilir.

4. LİNEER OLMAYAN BİR DENKLEMİN İTERATİF YAKLAŞIMI

Bu bölümde (2.29) ile verilen yeni dört adımlı iterasyon yöntemi kullanılarak genelleştirilmiş bir fonksiyonel integral denklemin çözümüne ulaşılabileceği ispatlanacaktır ve söz konusu bu çözümün veri bağılı olduğu gösterilecektir.

$(E, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun. $\tau > 0$ ve $C(\mathbb{R}_+^3, E)$ sürekli fonksiyonların bir sınıfı olmak üzere

$$X_\tau := \{x_n \in C(\mathbb{R}_+^3, E) \mid \exists M(x_n) > 0: |x_n(x, y, z)|e^{-\tau(x+y+z)} \leq M(x_n), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}_+\}$$

şeklinde ifade edilsin. X_τ kümesini Bielecki normu [69] ile aşağıdaki gibi göz önüne alalım:

$$\|x_n\|_\tau := \sup_{x,y,z \in \mathbb{R}_+} (|x_n(x, y, z)|e^{-\tau(x+y+z)}) \quad (4.1)$$

Bu durumda $(X_\tau, \|\cdot\|_\tau)$ bir Banach uzayı olur. Bu kısımda kullanılacak olan fonksiyonel integral denklem şu şekildedir [69]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & g(x, y, z, h(u)(x, y, z)) \\ & + \int_0^x \int_0^y \int_0^z K(x, y, z, r, s, t, u(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty V(x, y, z, r, s, t, u(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \end{aligned} \quad (4.2)$$

burada

$$\Delta = \{(x, y, z, r, s, t) \in \mathbb{R}_+^6: 0 \leq r \leq x \leq \infty, 0 \leq s \leq y \leq \infty, 0 \leq t \leq z \leq \infty\}$$

şeklinde olup $(x, y, z, r, s, t) \in \Delta$ dir. Ayrıca $g \in C(\mathbb{R}_+^3 \times E, E)$, $K, V \in C(\mathbb{R}_+^6 \times E, E)$, $h \in C(X_\tau, X_\tau)$, $f_1, f_2, f_3 \in C(\mathbb{R}_+^3, \mathbb{R}_+)$ dir.

4.1 Fonksiyonel İntegral Denklemin Çözümü

Marian vd. [69] tarafından 2021 yılında (4.2) ile verilen fonksiyonel integral denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği için aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

$T: X_\tau \rightarrow X_\tau$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
Tu(x, y, z) &= g(x, y, z, h(u)(x, y, z)) \\
&+ \int_0^x \int_0^y \int_0^z K(x, y, z, r, s, t, u(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \\
&+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty V(x, y, z, r, s, t, u(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt
\end{aligned} \tag{4.3}$$

operatörü aşağıdaki koşullar altında bir contraction dönüşüm olur:

4.1.1 Teorem Eğer

- i) $g \in C(R_+^3 \times E, E), K, V \in C(R_+^6 \times E, E),$
 $h \in C(X_\tau, X_\tau), f_1 f_2 f_3 \in C(R_+^3, R_+)$
- ii) $l_h > 0$ ve $\forall (x, y, z) \in R_+, \forall x_n, p \in X_\tau$
 $|h(x_n)(x, y, z) - h(p)(x, y, z)| \leq l_h \|x_n - p\|_\tau e^{\tau(x+y+z)}$
- iii) $l_g > 0$ ve $\forall (x, y, z) \in R_+, \forall x_n, p \in X_\tau$
 $|g(x, y, z, h(x_n)(x, y, z)) - g(x, y, z, h(p)(x, y, z))|$
 $\leq l_g |h(x_n)(x, y, z) - h(p)(x, y, z)|$
- iv) $l_K, l_V \in C(R_+^6, R_+)$ ve $\forall (x, y, z, r, s, t) \in \Delta, \forall x_n, p \in X_\tau$
 $+|K(x, y, z, r, s, t, x_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t)))$
 $-K(x, y, z, r, s, t, p(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t)))|$
 $\leq l_K(x, y, z, r, s, t) \|x_n - p\|_\tau e^{\tau(r+s+t)}$
 $+|V(x, y, z, r, s, t, x_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t)))$
 $-V(x, y, z, r, s, t, p(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t)))|$
 $\leq l_V(x, y, z, r, s, t) \|x_n - p\|_\tau e^{\tau(r+s+t)}$
- v) $l_1, l_2 > 0$ ve $\forall (x, y, z, r, s, t) \in \Delta$
 $\int_0^x \int_0^y \int_0^z l_K(x, y, z, r, s, t) e^{\tau(r+s+t)} dr ds dt \leq l_1 e^{\tau(x+y+z)}$
 $\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty l_V(x, y, z, r, s, t) e^{\tau(r+s+t)} dr ds dt \leq l_2 e^{\tau(x+y+z)}$
- vi) $l_g l_h + l_1 + l_2 < 1$

Koşulları sağlanıyorsa (4.2) ile verilen fonksiyonel bir integral denklemin X_τ 'da çözümü vardır ve tektir [69].

(4.2) ile verilen fonksiyonel integral denklem

$$\begin{aligned}
x_n(x, y, z) &= g(x, y, z, h(x_n)(x, y, z)) \\
&+ \int_0^x \int_0^y \int_0^z K(x, y, z, r, s, t, x_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \\
&+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty V(x, y, z, r, s, t, x_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt
\end{aligned} \tag{4.4}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. 4.1.1 Teorem'in şartları kullanılarak aşağıda verilen teoremden yeni tanımlanan dört adımlı iterasyon yönteminin bu çözüme kuvvetli yakınsadığı gösterilmiştir:

4.1.2 Teorem 4.1.1 Teorem'de verilen (i)-(vi) koşulları altında (4.3) ile verilen $T: X_\tau \rightarrow X_\tau$ operatörü ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n\}_{n=0}^\infty, \{\gamma_n\}_{n=0}^\infty, \{\mu_n\}_{n=0}^\infty \subset [0, 1]$ kontrol dizileri $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n = \infty$ şartı ile göz önüne alınsın. Bu durumda (4.2) fonksiyonel integral denklemi bir tek çözüme sahiptir ve (2.29) ile verilen yeni dört adımlı iterasyon yöntemi bu çözüme yakınsar.

İspat $T: X_\tau \rightarrow X_\tau$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
Tx_n(x, y, z) &:= g(x, y, z, h(x_n)(x, y, z)) \\
&+ \int_0^x \int_0^y \int_0^z K(x, y, z, r, s, t, x_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \\
&+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty V(x, y, z, r, s, t, x_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ve $\forall x_n, p \in X_\tau$ ve $T(x_n)$ için Bielecki normu

$$\begin{aligned}
&\|Tx_n(x, y, z) - Tp(x, y, z)\|_\tau \\
&= \sup_{x, y, z \in R_+} (|Tx_n(x, y, z) - Tp(x, y, z)| e^{-\tau(x+y+z)})
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bu tanımlanan operatör için (2.29) ile tanımlanan yeni dört adımlı iterasyon yönteminden elde edilen dizinin $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ olduğu ifade edilsin, $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow p$ olduğu gösterilmelidir.

(i)-(vi) koşullarından

$$|Tx_n(x, y, z) - Tp(x, y, z)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |g(x, y, z, h(x_n)(x, y, z)) - g(x, y, z, h(p)(x, y, z))| \\
&\quad + \left| \int_0^x \int_0^y \int_0^z K(x, y, z, r, s, t, x_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \right. \\
&\quad \left. - \int_0^x \int_0^y \int_0^z K(x, y, z, r, s, t, p(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \right| \\
&\quad + \left| \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty V(x, y, z, r, s, t, x_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty V(x, y, z, r, s, t, p(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \right| \\
&\leq l_g |h(x_n)(x, y, z) - h(p)(x, y, z)| \\
&\quad + \int_0^x \int_0^y \int_0^z |K(x, y, z, r, s, t, x_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) \\
&\quad - K(x, y, z, r, s, t, p(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t)))| dr ds dt \\
&\quad + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty |V(x, y, z, r, s, t, x_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) \\
&\quad - V(x, y, z, r, s, t, p(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t)))| dr ds dt \\
&\leq l_g l_h \|x_n - p\|_\tau e^{\tau(x+y+z)} \\
&\quad + \int_0^x \int_0^y \int_0^z l_K(x, y, z, r, s, t) \|x_n - p\|_\tau e^{\tau(r+s+t)} dr ds dt \\
&\quad + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty l_V(x, y, z, r, s, t) \|x_n - p\|_\tau e^{\tau(r+s+t)} dr ds dt \\
&\leq (l_g l_h + l_1 + l_2) \|x_n - p\|_\tau e^{\tau(x+y+z)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak her $x_n, p \in X_\tau$ için

$$\|Tx_n - Tp\|_\tau \leq (l_g l_h + l_1 + l_2) \|x_n - p\|_\tau \quad (4.6)$$

olur. (2.29) ile verilen iterasyon yöntemi, (4.5) ve (4.6) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|w_n - p\|_\tau &\leq (1 - \mu_n) \|x_n - p\|_\tau + \mu_n \|Tx_n - p\|_\tau \\
&\leq (1 - \mu_n) \|x_n - p\|_\tau + \mu_n (l_g l_h + l_1 + l_2) \|x_n - p\|_\tau \\
&= \left[1 - \mu_n (1 - (l_g l_h + l_1 + l_2)) \right] \|x_n - p\|_\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $(l_g l_h + l_1 + l_2) = \theta$ olarak alınırsa

$$\|w_n - p\|_\tau \leq [1 - \mu_n(1 - \theta)]\|x_n - p\|_\tau \quad (4.7)$$

yazılabilir. (4.5), (4.6) ve (4.7) eşitsizliklerine benzer işlemler yapılarak ve (4.7) eşitsizliği ile $1 - \mu_n(1 - \theta) \leq 1$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} \|z_n - p\|_\tau &\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - p\|_\tau + \gamma_n\|Tw_n - p\|_\tau \\ &\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - p\|_\tau + \gamma_n(l_g l_h + l_1 + l_2)\|w_n - p\|_\tau \\ &= [1 - \gamma_n(1 - (l_g l_h + l_1 + l_2))]\|w_n - p\|_\tau \\ &= [1 - \gamma_n(1 - \theta)]\|w_n - p\|_\tau \\ &\leq [1 - \gamma_n(1 - \theta)][1 - \mu_n(1 - \theta)]\|x_n - p\|_\tau \\ &\leq [1 - \gamma_n(1 - \theta)]\|x_n - p\|_\tau \end{aligned} \quad (4.8)$$

bulunur. Ayrıca (4.8) eşitsizliği ve $1 - \gamma_n(1 - \theta) \leq 1$ şartı kullanılarak

$$\begin{aligned} \|y_n - p\|_\tau &\leq (1 - \beta_n)\|Tx_n - p\|_\tau + \beta_n\|Tz_n - p\|_\tau \\ &\leq (1 - \beta_n)(l_g l_h + l_1 + l_2)\|x_n - p\|_\tau \\ &\quad + \beta_n(l_g l_h + l_1 + l_2)\|z_n - p\|_\tau \\ &= (1 - \beta_n)\theta\|x_n - p\|_\tau + \beta_n\theta\|z_n - p\|_\tau \\ &\leq (1 - \beta_n)\theta\|x_n - p\|_\tau + \beta_n\theta[1 - \gamma_n(1 - \theta)]\|x_n - p\|_\tau \\ &\leq (1 - \beta_n)\theta\|x_n - p\|_\tau + \beta_n\theta[1 - \gamma_n(1 - \theta)]\|x_n - p\|_\tau \\ &\leq (1 - \beta_n)\theta\|x_n - p\|_\tau + \beta_n\theta\|x_n - p\|_\tau \\ &\leq \theta\|x_n - p\|_\tau \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.9) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|_\tau &\leq (1 - \alpha_n)\|Tx_n - p\|_\tau + \alpha_n\|Ty_n - p\|_\tau \\ &\leq (1 - \alpha_n)(l_g l_h + l_1 + l_2)\|x_n - p\|_\tau \\ &\quad + \alpha_n(l_g l_h + l_1 + l_2)\|y_n - p\|_\tau \\ &= (1 - \alpha_n)\theta\|x_n - p\|_\tau + \alpha_n\theta\|y_n - p\|_\tau \\ &\leq (1 - \alpha_n)\theta\|x_n - p\|_\tau + \alpha_n\theta^2\|x_n - p\|_\tau \\ &\leq \theta[1 - \alpha_n(1 - \theta)]\|x_n - p\|_\tau \end{aligned} \quad (4.10)$$

olur. (4.10) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\|_\tau &\leq \theta[1 - \alpha_n(1 - \delta)]\|x_n - p\|_\tau \\
\|x_n - p\|_\tau &\leq \theta[1 - \alpha_{n-1}(1 - \delta)]\|x_{n-1} - p\|_\tau \\
\|x_{n-1} - p\|_\tau &\leq \theta[1 - \alpha_{n-2}(1 - \delta)]\|x_{n-2} - p\|_\tau \\
&\vdots \\
\|x_2 - p\|_\tau &\leq \theta[1 - \alpha_1(1 - \delta)]\|x_1 - p\|_\tau \\
\|x_1 - p\|_\tau &\leq \theta[1 - \alpha_0(1 - \delta)]\|x_0 - p\|_\tau
\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. $\theta \in (0,1)$ olduğundan $[1 - \alpha_n(1 - \theta)] \leq 1$ dir. $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \infty$ şartından

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq \|x_0 - p\| \theta^{n+1} \prod_{i=0}^n [1 - \alpha_i(1 - \theta)] \\
&\leq \|x_0 - p\| \theta^{n+1} e^{\frac{1}{(1-\theta)\sum_{i=0}^n \alpha_i}}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

şeklinde yazılabilir. (4.12) eşitsizliğinin her iki tarafın limiti alınırsa $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow p$ olduğu görülür.

Bu teoremden verilen $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartına gerek kalmaksızın 4.1.2 Teorem yeniden düzenlenir ve ispatlanırsa aşağıda verilen teorem elde edilir.

4.1.3 Teorem 4.1.1 Teorem’de verilen (i)-(vi) koşulları altında (4.3) ile verilen $T: X_\tau \rightarrow X_\tau$ operatörü ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1]$ kontrol dizileri göz önüne alınsın. Bu durumda (2.29) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \theta^{n+1} \|x_0 - p\| \tag{4.13}$$

yaklaşımı ile (4.2) fonksiyonel integral denklemin çözümüne yakınsar.

İspat 4.1.2 Teorem’in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Şimdi (4.2)’de verilen integral denklemin çözümünün veri bağılı olduğu (2.29) ile verilen iterasyon metodu kullanılarak ispatlanacaktır. Bunun için

$$g_1 \in C(R_+^3 \times E, E), K_1, V_1 \in C(R_+^6 \times E, E), h \in C(X_\tau, X_\tau), f_1, f_2, f_3 \in C(R_+^3, R_+)$$

4.1.1 Teorem'in (i) şartını sağlasın. S operatörü T operatörünün yaklaşım operatörü olmak üzere $T, S: X_\tau \rightarrow X_\tau$ için

$$\begin{aligned} Tu(x, y, z) &= g(x, y, z, h(u)(x, y, z)) \\ &+ \int_0^x \int_0^y \int_0^z K(x, y, z, r, s, t, u(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty V(x, y, z, r, s, t, u(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \end{aligned} \quad (4.14)$$

ve

$$\begin{aligned} Su(x, y, z) &= g_1(x, y, z, h(u)(x, y, z)) \\ &+ \int_0^x \int_0^y \int_0^z K_1(x, y, z, r, s, t, u(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty V_1(x, y, z, r, s, t, u(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

şeklinde gösterimler verilsin.

4.2 Bir Fonksiyonel İntegral Denklem İçin Veri Bağıllığı

4.2.1 Teorem (i)-(vi) şartları altında T operatörüyle inşa edilen ve (2.29) ile verilen iterasyondan elde edilen dizi $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ ile gösterilsin. $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ ise S operatörüyle inşa edilen aşağıdaki iterasyondan elde edilen bir dizi olsun:

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 - \alpha_n)Su_n + \alpha_n v_n \\ v_n = (1 - \beta_n)Su_n + \beta_n h_n \\ h_n = (1 - \gamma_n)k_n + \gamma_n Sk_n \\ k_n = (1 - \mu_n)u_n + \mu_n Su_n \end{cases} \quad (4.16)$$

Burada $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n\}_{n=0}^\infty, \{\gamma_n\}_{n=0}^\infty, \{\mu_n\}_{n=0}^\infty \subset [0, 1]$ ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ kontrol dizisi $\frac{1}{2} \leq \alpha_n$ şartını sağlamaktadır. Ayrıca her $u \in X_\tau$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \geq 0$ için $\|g(u) - g_1(u)\|_\tau \leq \varepsilon_1$, $\|K(u) - K_1(u)\|_\tau \leq l_k \varepsilon_2$, $\|V(u) - V_1(u)\|_\tau \leq l_v \varepsilon_3$ sağlansın. Burada $(l_g l_h + l_1 + l_2) = \theta$ ve $(\varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + \varepsilon_2 l_1 + \varepsilon_3 l_2) = \varepsilon$ olmak üzere eğer p_* ve x_* sırasıyla (4.14) ve (4.15) ile verilen eşitliklerin çözümleri ise, bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\|p_* - x_*\| \leq \frac{[2 + 2\theta\beta_n + \theta\beta_n[1 - \gamma_n(1 - \theta)]]\varepsilon}{(1 - \theta)}$$

(2.29) ve (4.16) ile verilen iterasyon yöntemleri ve (4.14) ve (4.15) ile verilen operatörler göz önüne alınarak 4.1.1 Teorem'in (i)-(vi) şartları ve teoremin hipotezi kullanılarak;

$$\begin{aligned}
& |Tx_n(x, y, z) - Su_n(x, y, z)| \\
& \leq |g(x, y, z, h(x_n)(x, y, z)) - g_1(x, y, z, h(u_n)(x, y, z))| \\
& \quad + \left| \int_0^x \int_0^y \int_0^z K(x, y, z, r, s, t, x_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \right. \\
& \quad \left. - \int_0^x \int_0^y \int_0^z K_1(x, y, z, r, s, t, u_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \right| \\
& \quad + \left| \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty V(x, y, z, r, s, t, x_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \right. \\
& \quad \left. - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty V_1(x, y, z, r, s, t, u_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) dr ds dt \right| \\
& \leq |g(x, y, z, h(x_n)(x, y, z)) - g(x, y, z, h(u_n)(x, y, z))| \\
& \quad + |g(x, y, z, h(u_n)(x, y, z)) - g_1(x, y, z, h(u_n)(x, y, z))| \\
& \quad + \int_0^x \int_0^y \int_0^z |K(x, y, z, r, s, t, x_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) \\
& \quad - K(x, y, z, r, s, t, u_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t)))| dr ds dt \\
& \quad + \int_0^x \int_0^y \int_0^z |K(x, y, z, r, s, t, u_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) \\
& \quad - K_1(x, y, z, r, s, t, u_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t)))| dr ds dt \\
& \quad + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty |V(x, y, z, r, s, t, x_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) \\
& \quad - V(x, y, z, r, s, t, u_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t)))| dr ds dt \\
& \quad + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty |V(x, y, z, r, s, t, u_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) \\
& \quad - V_1(x, y, z, r, s, t, u_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t)))| dr ds dt \\
& \leq l_g |h(x_n)(x, y, z) - h(u_n)(x, y, z)| + \varepsilon_1 \\
& \quad + \int_0^x \int_0^y \int_0^z l_K(x, y, z, r, s, t) \|x_n - u_n\|_\tau e^{\tau(r+s+t)} dr ds dt
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^x \int_0^y \int_0^z \|K(x, y, z, r, s, t, u_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) \\
& K_1(x, y, z, r, s, t, u_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t)))\|_{\tau} e^{\tau(r+s+t)} dr ds dt \\
& + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} l_V(x, y, z, r, s, t) \|x_n - u_n\|_{\tau} e^{\tau(r+s+t)} dr ds dt \\
& + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \|V(x, y, z, r, s, t, u_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t))) \\
& V_1(x, y, z, r, s, t, u_n(f_1(r, s, t), f_2(r, s, t), f_3(r, s, t)))\|_{\tau} e^{\tau(r+s+t)} dr ds dt \\
& \leq l_g l_h \|x_n - u_n\|_{\tau} e^{\tau(x+y+z)} + \varepsilon_1 \\
& + l_1 \|x_n - u_n\|_{\tau} e^{\tau(x+y+z)} + \int_0^x \int_0^y \int_0^z l_k \varepsilon_2 e^{\tau(r+s+t)} dr ds dt \\
& + l_2 \|x_n - u_n\|_{\tau} e^{\tau(x+y+z)} + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} l_V \varepsilon_3 e^{\tau(r+s+t)} dr ds dt \\
& \leq (l_g l_h + l_1 + l_2) \|x_n - u_n\|_{\tau} e^{\tau(x+y+z)} + \varepsilon_1 \\
& + l_1 \varepsilon_2 e^{\tau(x+y+z)} + l_2 \varepsilon_3 e^{\tau(x+y+z)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\|Tx_n - Su_n\|_{\tau} & \leq (l_g l_h + l_1 + l_2) \|x_n - u_n\|_{\tau} + \varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} \\
& + l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_3
\end{aligned} \tag{4.18}$$

olur. (4.18) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|w_n - k_n\|_{\tau} & \leq (1 - \mu_n) \|x_n - u_n\|_{\tau} + \mu_n \|Tx_n - Su_n\|_{\tau} \\
& \leq (1 - \mu_n) \|x_n - u_n\|_{\tau} + \mu_n (l_g l_h + l_1 + l_2) \|x_n - u_n\|_{\tau} \\
& + \varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_3 \\
& = \left[1 - \mu_n (1 - (l_g l_h + l_1 + l_2)) \right] \|x_n - p\|_{\tau} \\
& + \varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_3
\end{aligned} \tag{4.19}$$

yazılabilir. Burada $(l_g l_h + l_1 + l_2) = \theta$ olarak alınırsa

$$\|w_n - u_n\|_{\tau} \leq [1 - \mu_n(1 - \theta)] \|x_n - u_n\|_{\tau} + \varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_3 \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.17), (4.18) ve (4.19) eşitsizliklerine benzer işlemler yapılarak ve (4.20) eşitsizliği ile $1 - \mu_n(1 - \theta) \leq 1$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|z_n - h_n\|_\tau &\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - k_n\|_\tau + \gamma_n\|Tw_n - Sk_n\|_\tau \\
&\leq (1 - \gamma_n)\|w_n - k_n\|_\tau + \gamma_n(l_g l_h + l_1 + l_2)\|w_n - k_n\|_\tau \\
&\quad + \varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_3 \\
&= \left[1 - \gamma_n \left(1 - (l_g l_h + l_1 + l_2)\right)\right] \|w_n - k_n\|_\tau \\
&\quad + \varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_3 \\
&= [1 - \gamma_n(1 - \theta)]\|w_n - k_n\|_\tau + \varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_3 \\
&\leq [1 - \gamma_n(1 - \theta)][1 - \mu_n(1 - \theta)]\|x_n - u_n\|_\tau \\
&\leq [1 - \gamma_n(1 - \theta)]\|x_n - u_n\|_\tau + \varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_3 \\
&\quad + [1 - \gamma_n(1 - \theta)]\varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} \\
&\quad + [1 - \gamma_n(1 - \theta)]l_1 \varepsilon_2 + [1 - \gamma_n(1 - \theta)]l_2 \varepsilon_3
\end{aligned} \tag{4.21}$$

bulunur. Ayrıca (4.21) eşitsizliği ve $1 - \gamma_n(1 - \theta) \leq 1$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|y_n - v_n\|_\tau &\leq (1 - \beta_n)\|Tx_n - Su_n\|_\tau + \beta_n\|Tz_n - Sh_n\|_\tau \\
&\leq (1 - \beta_n)\theta\|x_n - u_n\|_\tau + \beta_n\theta\|z_n - h_n\|_\tau \\
&\quad + (1 - \beta_n)\varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + (1 - \beta_n)l_1 \varepsilon_2 + (1 - \beta_n)l_2 \varepsilon_3 \\
&\quad + \beta_n \varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + \beta_n l_1 \varepsilon_2 + \beta_n l_2 \varepsilon_3 \\
&\leq \theta\|x_n - u_n\|_\tau + \beta_n \varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + \beta_n l_1 \varepsilon_2 + \beta_n l_2 \varepsilon_3 \\
&\quad + \beta_n[1 - \gamma_n(1 - \theta)]\varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + \beta_n[1 - \gamma_n(1 - \theta)]l_1 \varepsilon_2 \\
&\quad + \beta_n[1 - \gamma_n(1 - \theta)]l_2 \varepsilon_3 + \beta_n \varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + \beta_n l_1 \varepsilon_2 \\
&\quad + (1 - \beta_n)\varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + (1 - \beta_n)l_1 \varepsilon_2 + (1 - \beta_n)l_2 \varepsilon_3 \\
&\quad + \beta_n l_2 \varepsilon_3
\end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.22) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\|_\tau &\leq (1 - \alpha_n)\|Tx_n - Su_n\|_\tau + \alpha_n\|Ty_n - Sv_n\|_\tau \\
&\leq \theta(1 - \alpha_n)\|x_n - u_n\|_\tau + \theta\alpha_n\|y_n - v_n\|_\tau \\
&\quad + \varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_3 \\
&\leq \theta(1 - \alpha_n)\|x_n - u_n\|_\tau + \theta^2 \alpha_n\|x_n - u_n\|_\tau \\
&\quad + [\varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + \varepsilon_2 l_1 + \varepsilon_3 l_2]
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\cdot [1 + 2\theta\alpha_n\beta_n + \theta\alpha_n\beta_n[1 - \gamma_n(1 - \theta)]]$$

elde edilir. (4.23) eşitsizliğinde $\varepsilon_1 e^{-\tau(x+y+z)} + \varepsilon_2 l_1 + \varepsilon_3 l_2 = \varepsilon$ alınırsa ve $\frac{1}{2} \leq \alpha_n$ kabulünden elde edilecek olan $1 - \alpha_n \leq \alpha_n$ eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\|_\tau &\leq \theta[1 - \alpha_n(1 - \theta)]\|x_n - u_n\|_\tau \\ &\quad + \alpha_n(1 - \theta) \frac{[2 + 2\theta\beta_n + \theta\beta_n[1 - \gamma_n(1 - \theta)]]\varepsilon}{(1 - \theta)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} a_n &= \|x_n - p\|_\tau \\ \mu_n &= \alpha_n(1 - \theta) \in (0,1) \\ \eta_n &= \frac{[2 + 2\theta\beta_n + \theta\beta_n[1 - \gamma_n(1 - \theta)]]\varepsilon}{(1 - \theta)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

şeklinde seçilirse 2.4.3 Lemma'dan sonuç olarak,

$$\|p_* - x_*\| \leq \frac{[2 + 2\theta\beta_n + \theta\beta_n[1 - \gamma_n(1 - \theta)]]\varepsilon}{(1 - \theta)}$$

elde edilir.

5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının birinci bölümünde genel hatlarıyla sabit nokta teorisine ait bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, tezde ortaya konulan problemlerin çözümüne temel teşkil edecek tanım, dönüşüm, teorem, lemma ve iterasyon yöntemlerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, bir rasyonel dönüşüm olan Jaggi tipi dönüşüm ile yeni dört adımlı iterasyon yöntemi kullanılarak kuvvetli yakınsaklık, yakınsaklık hızı, kararlılık ve veri bağılılığı sonuçları ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde ise yeni dört adımlı iterasyon yöntemi kullanılarak genelleştirilmiş fonksiyonel integral denklemin çözümüne yakınsadığı ve veri bağılı olduğu gösterilmiştir.

Araştırmacılar tarafından bu tezde verilen yeni dört adımlı iterasyon yöntemini farklı dönüşüm sınıfları için yeniden düzenleyerek bazı sabit nokta teoremleri elde edebilir ve çeşitli türden integral denklemlere ve diferansiyel denklemlere uygulanması incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Berinde, V., 2007. Iterative approximation of fixed points, Springer, Berlin.
2. Banach, S., 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fundamenta Mathematicae*, 3, 1, 133-181.
3. Kannan, R., 1968. Some results on fixed points, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 60, 1-2, 71-76.
4. Chatterjea, S. K., 1972. Fixed point theorems, *Comptes rendus de l'Académie Bulgare des Sciences*, 25, 727-730.
5. Zamfirescu, T., 1972. Fix point theorems in metric spaces, *Archiv der Mathematik*, 23, 1, 292-298.
6. Neumann, J. V., 1928. Zur theorie der gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen*, 100, 295-320.
7. Picard, E., 1890. Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 6, 4, 145-210.
8. Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4, 3, 506-510.
9. Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44, 1, 147-150.
10. Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251, 1, 217-229.
11. Agarwal, R. O'Regan, D. ve Sahu, D., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 8, 1, 61-79.
12. Khan, S. H., 2013. A Picard Mann hybrid iterative process, *Fixed Point Theory and Applications*, 2013, 1, 1-10.
13. Thianwan, S., 2009. Common fixed points of new iterations for two asymptotically nonexpansive nonself-mappings in a Banach space, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 224, 2, 688-695.
14. Maldar, S. ve Karakaya, V., 2022. Convergence of Jungck-Kirk type iteration method with applications, *Punjab University Journal of Mathematics*, 54, 2, 75-87.

15. Atalan, Y. ve Kılıç, E., 2022. Convergence and stability analysis of a new four step fixed-point algorithm, *Aksaray University Journal of Science and Engineering*, 6, 1, 57-70.
16. Karakaya, V., Atalan, Y., Dogan, K. ve Bouzara, N. E. H., 2017. Some fixed point results for a new three steps iteration process in Banach spaces, *Fixed Point Theory*, 18, 2, 625-640.
17. Özdemir, M. ve Akbulut, S., 2006. On the equivalence of some fixed point iterations, *Kyungpook Math Journal*, 46, 211-217.
18. Maldar, S., 2020. Yeni bir iterasyon yöntemi için yakınsaklık hızı, *Journal of the Institute of Science and Technology*, 10, 2, 1263-1272.
19. Atalan, Y., 2019. On numerical approach to the rate of convergence and data dependence results for a new iterative scheme, *Konuralp Journal of Mathematics*, 7, 1, 97-106
20. Berinde, V., 2004. Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasicontractive operators, *Fixed Point Theory and Applications*, 2014, 1.
21. Dogan, K., 2018. Daha hızlı Mann sabit nokta yinelemesi üzerine bir çalışma, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 18, 3, 2018, 852-860.
22. Karahan, I. ve Özdemir, M., 2013. A general iterative method for approximation of fixed points and their applications, *Advances in Fixed Point Theory*, 3, 510-526.
23. Maldar, S., 2022. Iterative algorithms of generalized nonexpansive mappings and monotone operators with application to convex minimization problem, *Journal of Applied Mathematics and Computing* 68, 3, 1842-1868.
24. Atalan, Y., 2019. Obtaining new fixed point theorems using generalized banach-contraction principle, *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Dergisi*, 35, 3, 34-45.
25. Berinde, V., 2003. On the approximation of fixed points of weak contractive mappings, *Carpathian Journal of Mathematics*, 19, 7-22.
26. Chifu, C. ve Petruşel, G., 2007. Existence and data dependence of fixed points and strict fixed points for contractive-type multivalued operators, *Fixed Point Theory and Applications*, 2007, 1-8.
27. Chugh, R. ve Kumar, V., 2012. Data dependence of Noor and SP iterative schemes when dealing with quasi-contractive operators, *International Journal of Computer Applications*, 40, 41-46.

28. Karakaya, V., Gürsoy, F. ve Ertürk, M., 2016. Some convergence and data dependence results for various fixed point iterative methods, *Kuwait Journal of Science*, 43, 1, 112-128.
29. Şoltuz, S. M., 2001. Data dependence for Mann iteration, *Octogon Mathematical Magazine*, 9, 825-828.
30. Şoltuz, S. M. ve Grosan, T., 2008. Data dependence for Ishikawa iteration when dealing with contractive like operators, *Fixed Point Theory and Applications*, 2008, 1, 1-7.
31. Atalan, Y. ve Karakaya, V., 2020. An example of data dependence result for the class of almost contraction mappings, *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, 17, 1, 139-155.
32. Olantiwo, M., 2008. Some stability and strong convergence results for the Jungck-Ishikawa iteration process, *Creative Mathematics and Informatics*, 17, 33-42.
33. Harder, A. M. ve Hicks, T. L., 1988. Stability results for fixed point iteration procedures, *Mathematica Japonica*, 33, 693-706.
34. Harder, A. M. ve Hicks, T. L., 1988. A stable iteration procedure for nonexpansive mappings, *Mathematica Japonica*, 33, 687-692.
35. Rhoades, B. E., 1990. Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 21, 1, 1-9.
36. Rhoades, B. E., 1993. Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures. II, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 24, 11, 691-703.
37. Osilike, M. O., 1995. Stability results for fixed point iteration procedures, *Journal of Nigerian Mathematical Society*, 26, 10, 937-945.
38. Osilike, M. O. ve Udomene, A., 1999. Short proofs of stability results for fixed point iteration procedures for a class of contractivetype mappings, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 30, 12, 1229-1234.
39. Ostrowski, M., 1967. The round-off stability of iterations, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 47, 2, 77-81.
40. Singh, S. L. ve Prasad, B., 2008. Some coincidence theorems and stability of iterative procedures, *Computers and Mathematics with Applications*, 55, 11, 2512-2520.
41. Karakaya, V., Doğan, K., Gürsoy, F. ve Ertürk, M., 2013. Fixed point of a new three-step iteration algorithm under contractive-like operators over normed spaces, *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 560258.

42. Czerwik, S., 1993. Contraction mappings in b-metric spaces, *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, 23, 5-11.
43. Zeyada, F. M., Hassan, G. H. ve Ahmed, M. A., 2006. A generalization of a fixed point theorem due to Hitzler and Seda in dislocated quasi-metric spaces, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 31, 1, 111-114.
44. Mustafa, Z. ve Sims, B., 2006. A new approach to generalized metric spaces, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 7, 2, 289-297.
45. Dogan, K., Gursoy, F. ve Karakaya V., 2020. Some fixed point results in the generalized convex metric spaces, *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 10, 11-23.
46. Maldar, S., Atalan, Y. ve Dogan, K., 2020. Comparison rate of convergence and data dependence for a new iteration method, *Tbilisi mathematical journal*, 13, 65-79.
47. Hacıoglu E. ve Karakaya, V., 2017. Existence and convergence for a new multivalued hybrid mapping in cat (k) spaces, *Carpathian Journal of Mathematics*, 33, 319-326.
48. Okeke, G., 2019. A Iterative approximation of fixed points of contraction mappings in complex valued Banach spaces, *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 25, 1, 83-105.
49. Akkouchi, M., 2011. Hyers-Ulam-Rassias stability of nonlinear Volterra integral equations via a fixed point approach, *Acta Universitatis Apulensis*, 26, 257–266
50. Atalan, Y. ve Karakaya, V., 2017. Iterative solution of functional Volterra-Fredholm integral equation with deviating argument, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 18, 4, 675-684.
51. Maldar, S., 2021. On iteration method to the solution of more general volterra integral equation in two variables and a data dependence result, *Celal Bayar University Journal of Science*, 17, 3, 313-318.
52. Banas, J. ve Lecko, M., 2002. Fixed points of the product of operators in Banach algebra, *Panamerican Mathematical Journal*, 12, 2, 101-109.
53. Kreyszig, E., 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New York.
54. Maddox, I. J., 1988. *Elements of Functional Analysis*, CUP Archive.
55. Pugachev, V. S. ve Sinitsyn, I. N., 1999. *Lectures on Functional Analysis and Applications*, World Scientific.

56. Moore, R. E. ve Cloud, M. J., 2007. Computational Functional Analysis, Elsevier.
57. Curtain, R. F. ve Pritchard, A. J., 1977. Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Academic Press.
58. Brown, A. L. ve Page, A., 1970. Elements of Functional Analysis, Van Nostrand-Reinhold.
59. Phuengrattana, W. ve Suantai, S., 2012. Comparison of the rate of convergence of various iterative methods for the class of weak contractions in Banach spaces, Thai Journal of Mathematics, 11, 1, 217-226.
60. Ćirić, L. B., 1974. A generalization of Banach's contraction principle, Proceedings of the American Mathematical Society, 45, 2, 267-273.
61. Berinde, V., 2004. Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration, Nonlinear Analysis Forum, 9, 43-53
62. Jaggi, D. S., 1977. Some unique fixed point theorems, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2, 8, 223-230.
63. Dass, B. K. ve Gupta, S., 1975. An extension of Banach contraction principle through rational expressions, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 6, 1455-1458.
64. Berinde, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
65. Weng, X., 1991. Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mapping, Proceedings of The American Mathematical Society, 113, 3, 727-731.
66. Phuengrattana, W. ve Suantai, S., 2011. On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-iterations for continuous functions on an arbitrary interval, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235, 9, 3006-3014.
67. Chugh, R., Kumar, V. ve Kumar, S., 2012. Strong convergence of a new three step iterative scheme in Banach spaces, American Journal of Computational Mathematics, 2, 345-357.
68. Karahan, I. ve Ozdemir, M., 2013. A general iterative method for approximation of fixed points and their applications, Advances in Fixed Point Theory, 3, 3, 510-526.
69. Marian, D., Ciplea, S. A. ve Lungu, N., 2021. On a functional integral equation, Symmetry, 13, 8, 1321.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Meltem Kadriye KAYA

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2010-2015

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2019-2022

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Kaya, M. K. ve Maldar, S., 2022. On The Convergence Of The Newly Four-Step İteration Method, UBCAK 2022, 15-17 March 2022.