

**T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM VE DENKLEM
SİSTEMLERİNİN BELLİ BİR SINIFININ YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ
İÇİN BERNSTEIN SIRALAMA YÖNTEMİ**

Huriye GÜRLER

**Danışman
Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ**



MANİSA-2016

**T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM VE DENKLEM
SİSTEMLERİNİN BELLİ BİR SINIFININ YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ
İÇİN BERNSTEIN SIRALAMA YÖNTEMİ**

Huriye GÜRLER

**Danışman
Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ**



MANİSA-2016

TEZ ONAYI

Huriye GÜRLER tarafından hazırlanan "**Lineer olmayan diferansiyel denklem ve denklem sistemlerinin belli bir sınıfının yaklaşık çözümleri için Bernstein sıralama yöntemi**"adlı tez çalışması 18/03/2016 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ
Celal Bayar Üniversitesi



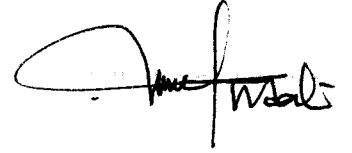
Jüri Üyesi

Prof. Dr. Mehmet SEZER
Celal Bayar Üniversitesi



Jüri Üyesi

Doç. Dr. Niyazi ŞAHİN
Yıldırım Beyazıt Üniversitesi



TAAHHÜTNAME

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Huriye GÜRLER

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	III
TABLO DİZİNİ	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
ABSTRACT.....	VII
1. GİRİŞ	1
1.1. Tarihsel Gelişim	1
1.2. Problemin Tanıtılması	6
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	8
2.1. Bernstein Polinomları.....	8
2.2. Genelleştirilmiş Bernstein Polinomları	11
3. LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ	13
3.1. Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözümü için Bernstein Sıralama (Collocation) Yöntemi	14
3.1.1. Temel Matris Bağlıntıları.....	15
3.1.2. Sıralama (Collocation) Noktalarına Dayalı Matris Bağlıntıları.....	18
3.1.3. Çözümün Kontrolü	22
3.2. İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözümü için Bernstein Sıralama (Collocation) Yöntemi	22
3.2.1. Temel Matris Bağlıntıları.....	23
3.2.2. Sıralama (Collocation) Noktalarına Dayalı Matris Bağlıntıları.....	28
3.2.3. Çözümün Kontrolü	32
4. LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ	33
4.1. Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Sınır Değer Problemi için Bernstein Sıralama Yöntemi	33
4.1.1. Temel Matris Bağlıntıları.....	34
4.1.2. Sistemin Temel Matris Gösterimi.....	36
4.1.3. Bernstein Sıralama Metodu	37
4.1.4. Çözümün Kontrolü	39
4.2. İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Sınır Değer Problemi için Bernstein Sıralama Yöntemi	40
4.2.1. Temel Matris Bağlıntıları.....	41
4.2.2. Sistemin Temel Matris Gösterimi.....	43
4.2.3. Bernstein Sıralama Metodu	44
4.2.4. Çözümün Kontrolü	46
5. LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM VE DENKLEM SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ NÜMERİK UYGULAMALAR.....	48
6. SONUÇ VE TARTIŞMA	103
KAYNAKLAR	104
ÖZGEÇMİŞ	108

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbf{B}_{n,N}(\mathbf{x})$	Bernstein Polinomları
$\mathbf{y}_n$	Bernstein Polinomlarının Katsayıları
$\mathbf{x}_i$	Sıralama Noktaları
$\mathbf{N}$	Kesme Sınırı
$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{Z} : \mathbf{G}]$	Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem ve Denklem Sistemleri için Arttırılmış Matris
$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{V}}; \tilde{\mathbf{Z}} : \tilde{\mathbf{G}}]$	Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem ve Denklem Sistemleri için Koşulları Kullanılmış Yeni Arttırılmış Matris
$\mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{N}$	Koşulların Matrisleri
$\mathbf{E}(\mathbf{x}_i)$	x_i Noktası İçin Hata

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Sıfıncı dereceden Bernstein polinomlarının grafiği	8
Şekil 2.2. Birinci dereceden Bernstein polinomlarının grafiği	9
Şekil 2.3. İkinci dereceden Bernstein polinomlarının grafiği	10
Şekil 2.4. Üçüncü dereceden Bernstein polinomlarının grafiği	11
Şekil 5.1. Örnek 5.4.'ün $N = 2, 5, 7$ için Yaklaşık Çözüm Grafiği	59
Şekil 5.2. Örnek 5.7.'nin $N = 3, 5$ için Yaklaşık Çözüm Grafiği	68
Şekil 5.3. Örnek 5.8.'in $N = 3, 5$ için Yaklaşık Çözüm Grafiği	70
Şekil 5.4. Örnek 5.11. $y_1(t)$ 'nin $N = 3, 6$ için Yaklaşık Çözüm Grafiği	85
Şekil 5.5. Örnek 5.11. $y_2(t)$ 'nin $N = 3, 6$ için Yaklaşık Çözüm Grafiği	85
Şekil 5.6. Örnek 5.14. $y_1(t)$ 'nin $N = 3, 5, 7$ için Yaklaşık Çözüm Grafiği	102
Şekil 5.7. Örnek 5.14. $y_2(t)$ 'nin $N = 3, 5, 7$ için Yaklaşık Çözüm Grafiği	102

TABLO DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 5.1. Örnek 5.4.'ün Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması	58
Tablo 5.2. Örnek 5.7.'nin Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması	68
Tablo 5.3. Örnek 5.8.'in Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması	69
Tablo 5.4. Örnek 5.11.'in $y_1(t)$ için Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması ..	84
Tablo 5.5. Örnek 5.11.'in $y_2(t)$ için Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması ..	84
Tablo 5.6. Örnek 5.14.'ün $y_1(t)$ için Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması .	101
Tablo 5.7. Örnek 5.14.'ün $y_2(t)$ için Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması .	101

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Doç. Dr. SALİH YALÇINBAŞ' a, yardımlarını esirgemeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum hocam Sayın Prof. Dr. MEHMET SEZER' e, yüksek lisans eğitimim sırasında desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, çalışmalarım konusunda her türlü imkan ve desteği sağlayan Arş. Gör. Dr. KÜBRA ERDEM BİÇER' e, çalışmalarım sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim değerli arkadaşım ÖZNUR SEVİNÇ' e, öğrenim hayatım boyunca beni maddi manevi her yönden destekleyen, sevgilerini ve sabırlarını benden esirgemeyen hep yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

Huriye GÜRLER
Manisa, 2016

ÖZET

Yüksek Lisans

Lineer olmayan diferansiyel denklem ve denklem sistemlerinin belli bir sınıfının yaklaşık çözümleri için Bernstein sıralama yöntemi

Huriye GÜRLER

**Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tez için gerekli bazı temel kavramlar verilmiştir.

Bu çalışmanın orijinal kısmı üçüncü ve dördüncü bölümde yer almaktadır. Bu bölümlerde, lineer olmayan diferansiyel denklem ve denklem sistemlerinin yaklaşık çözümlerinin Bernstein polinomları cinsinden bulunması için yöntem geliştirilmiştir.

Beşinci bölümde ise yöntemi açıklayan lineer olmayan diferansiyel denklem ve denklem sistemleri için örnekler çözülmüş, bu örneklerin hata analizleri yapılmış ve grafikleri çizilmiştir.

Altıncı bölümde verilen metodun doğruluğunu ve uygulanabilirliğini göstermek için hata analizine yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bernstein Polinomları, Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler, Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemleri, Bernstein Sıralama Metodu

2016, 108 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Bernstein collocation method for the approximate solution of a certain class of nonlinear differential equation and equation systems

Huriye GÜRLER

**Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Salih YALÇINBAŞ

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter deals with the preliminaries, necessary definitions that will be used in the next chapters.

The original part of this study is included in the third and fourth chapter. In this section, a method is developed in terms of Bernstein polynomial solutions to have approximate solutions of nonlinear differential equations and its systems.

In the fifth chapter, examples of the nonlinear differential equation and equation systems have been solved by using this method and also the error analysis and graphics are given here.

In the sixth chapter, error analysis are included to demonstrate the validity and applicability of the given method.

Keywords: Bernstein polynomials, Nonlinear ordinary differential equations, Nonlinear differential equation systems , Bernstein collocation method.

2016, 108 pages

1. GİRİŞ

1.1. Tarihsel Gelişim

Ukraynalı matematikçi Sergei Natanovich Bernstein (1911), birçok matematikçi tarafından da ispatı yapılan, kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyona polinomlar kullanılarak düzgün yakınsanabileceğini ileri süren Weierstrass teoremini Bernstein polinomları olarak adlandırılan polinomları kullanarak ispatlamıştır.

Bernstein polinomları olarak adlandırılan bu polinomlar birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. T. Popoviciu $B_n f$ farkının $n \rightarrow \infty$ için sıfıra yaklaşma hızını bulmuştur. Voronovskaya bu yaklaşma için asimptotik eşitlik ispatlamıştır. $B'_n(f; x)$ polinomlarının f türevlenebilir bir fonksiyon olduğunda f' fonksiyonuna yaklaşmasını incelemiştir [39].

Fransız mühendis Pierre Bézier (1910-1999), otomobil tasarımında kullanılmak amacıyla Bézier eğrilerini geliştirmiştir. Bézier eğrileri nesnelerin görüntülerini gerçek görüntülerine benzetmek için belirlenen kontrol noktalarından geçen eğrilerdir. Programlanmaları oldukça kolaydır. Bu özelliklerinden dolayı bilgisayar grafiklerinde yaygın olarak kullanılırlar.

Bernstein polinomları Bézier eğrilerinin temelini oluştururlar. Pierre Bézier, $n+1$ adet $P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktaları tarafından kontrol edilen $B(t)$ eğrisini aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) P_i, \quad t \in [0,1]$$

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Bu denklemde kullanılan $b_{i,n}(t)$ polinomu n . dereceden Bernstein polinomudur.

Sergei Natanovich Bernstein, 5 Mart 1880 tarihinde Ukrayna'nın Odessa kentinde doğmuştur. Babası Natan Osipovich Bernstein (1836-1891), bir tıp doktoru ve aynı zamanda Odessa Üniversitesi'nde profesör idi. Natan Osipovich Bernstein,

Odessa Kent Konseyi'nde üyeliği, şehir hastane müdürlüğü ve onursal barış temsilciliği gibi önemli görevlerde bulunmuştur. Sergei Natanovich Bernstein Odessa'da büyüdü. 4 Şubat 1891'de henüz on bir yaşındayken babasını kaybetti. 1898 yılında liseden mezun oldu. Bunun ardından annesinin isteği üzerine ablası ile birlikte Paris'e gitti. Bernstein'in ablası Paris'te biyoloji eğitimi aldı. Pasteur Enstitüsü'nde çalıştı ve Ukrayna'ya dönmedi. Sorbonne Üniversitesi'nde bir yıl matematik çalıştıktan sonra Bernstein, mühendis olmaya karar verdi ve École d'Electrotechnique Supérieure'ye girdi. Ancak, matematikle ilgilenmeye devam etti ve 1902 yılının sonbaharından başlayarak Göttingen'de üç dönem geçirdi. Burada çalışmalarını David Hilbert'in denetimi altında sürdürdü.

Bernstein 1904 yılı baharında Sorbonne'da doktora tezi “Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre” yi sundu. Tezi Émile Picard, Henri Poincaré ve Jacques Hadamard tarafından incelendi ve rapor inceleme yapanların başkanı Picard tarafından yazıldı. Tez Hilbert'in On Dokuzuncu Problemi'ni çözen iyi bir çalışmaydı. Hilbert tarafından 1900 yılında Paris'te Uluslararası Matematikçiler Kongresi'nde ortaya atılan bu problem, eliptik diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri üzerine idi ve bu problemde düzgün analitik varyasyonel problemlerin tüm çözümlerinin analitik olduğunun kanıtı istenmekte idi. Bernstein 1904 yılında Sorbonne'dan doktorasını aldı ve aynı yıl Heidelberg'deki Uluslararası Matematikçiler Kongresi'ne katılmak için Paris'ten ayrıldı. Kongre 8 Ağustos 1904'ten 13 Ağustos 1904'e kadar sürdü fakat Bernstein, St. Petersburg'a gitmeden önce 1905 yılı baharına kadar Heidelberg'de kaldı. Tezi 1904 yılında yayınlandı ve ertesi yıl “Sur l'interpolation” ve “Sur la déformation des surfaces” makaleleri yayınlandı.

Bu mükemmel çalışmasına ve çoktan doktorasını almış olması gerçeğine rağmen Bernstein, 1905'te Rusya'ya döndüğünde, Rusya'nın üniversitede çalışabilmek için yabancı ülkelerde alınmış doktoraları tanımamasından dolayı tekrar doktora programından başlamak zorunda kaldı. 1906 yılında Bernstein'dan diferansiyel denklemlerde klasik çözüm yöntemlerini kullanmasını bekleyen Aleksandr Nikolayevich tarafından yapılan master sınavından zorlukla geçmiştir. Bernstein üniversitede iş bulamadı ve yeni kurulan Kadın Politeknik Üniversitesi'nde ders vermek zorunda kaldı. 1907 yılına kadar burada ders vermeye devam etti fakat

öğretim ile ilgileniyor olmasına rağmen hem öğretimin hem de araştırmanın değerli olduğu bir üniversitede görev yapmayı hak ettiğini düşünüyordu.

1908 yılında Kharkov'a taşındı ve orada diğer bir master derecesi için "Investigation and Solution of Elliptic Partial Differential Equations of Second Degree" adındaki tezini sundu. Hilbert'in On Dokuzuncu Problemi'ni çözüm yaklaşımını tanımlamasının yanı sıra, ayrıca Hilbert'in lineer olmayan eliptik denklemlerin analitik çözümü üzerine olan Yirminci Problemini de çözdü. Bu sefer tezini Dmitrii Matveevich Sintsov ve Antoni-Bonifatsi Pavlovich Psheborski inceledi ve ondan sonra Bernstein, Kharkov Üniversitesi'nde bir öğretim görevlisi olarak ders vermeye başladı.

Hayat Bernstein'in umduğu gibi gitmedi ve Hilbert'e durumunun "umutsuz" olduğunu söyleyen bir yazı yazdı. Hilbert'in ona yardımcı olmaya çalışıp çalışmadığı belli değildir, ancak Bernstein, Harvard Üniversitesi'nde çalışması yönünde William Osgood'tan bir teklif aldı. 1910 yılının baharında Bernstein, Harvard'tan Göttingen'i ziyaret etmek için gelmiş olan Dunham Jackson ile konuşmak için Göttingen'e gitti. Sebebi tam olarak bilinmese de Bernstein Harvard'da çalışma fırsatını değerlendiremedi ve Göttingen ziyaretinden sonra Kharkov'a döndü. 1913 yılında "About the Best Approximation of Continuous Functions by Polynomials of Given Degree" adlı tezi ile Kharkov Üniversitesi'nden ikinci doktorasını aldı. Bu tez bir yıl öncesinden tamamlanmıştı ve bu tezin sonuçları Bernstein'a 1911 yılında Belçika Bilim Akademisi'nden bir ödül kazandırmıştı. 1908 yılında Charles-Jean de La Vallée Poussin " n . dereceden bir polinom kullanılarak polygonal bir doğrunun ordinatına $\left(\frac{1}{n}\right)$ den daha küçük bir hata ile yaklaşmak mümkün müdür?" sorusunu ortaya atmıştır. Hem de La Vallée Poussin hem de Bernstein takip eden yıllarda bu soruyu yanıtlama yönünde bazı ilerlemeler kaydetmişlerdi ve daha sonra Belçika Bilim Akademisi çözüm için bir ödül ortaya koydu. Bernstein 1911 yılında, kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyona polinomlar kullanılarak düzgün yakınsanabileceğini ileri süren Weierstrass teoreminin ispatını veren Bernstein polinomları olarak adlandırılan polinomları tanıtan bir tam çözüm ortaya koydu. Bernstein bu ispatı ile Belçika Bilim Akademisi'nden ödül kazandı.

Bernstein 1907 yılından başlayarak 25 yıl boyunca Kharkov Üniversitesi'nde ders verdi. Ayrıca 1918 yılına kadar Bayanlar Yüksekokulu'nda ve 1912 yılından 1918 yılına kadar Kharkov Ticaret Üniversitesi'nde de ders verdi. 1920 yılında Kharkov Üniversitesi'nde profesör oldu. Bu dönemlerde 'yeni' Politeknik Enstitüsü'nde ders vermek üzere düzenli olarak Kharkov'dan Ekaterinoslav'a gitti. 1924 yılında Rus Bilimler Akademisine üye olarak seçildi ve bir sonraki yıl Ukrayna Bilimler Akademisinin sürekli üyesi oldu. 1927 yılında Gösta Mittag-Leffler öldü ve Bernstein Paris'te onun yerine Académie des Sciences'a üye olarak seçildi. 1928 yılında Kharkov Matematik Enstitüsü'nün yöneticisi oldu. 1925 yılında Rus Bilimler Akademisi'nin ismi USSR Bilimler Akademisi olarak değiştirildi ve 1924'ten beri üyesi olduğu bu kuruma tam üye olarak seçildi. 1930 yılından başlayarak hükümet akademik öğretimi ve araştırmayı bir politik konu olarak görmeye başladı ve Bernstein bilinen muhalefetini yayınladığı bir yazıda ortaya koydu. Bunun hemen ardından Kharkov Matematik Enstitüsü yöneticiliği görevinden alındı fakat görüşlerinden dolayı sert eleştirilere maruz kalsa da, 1932 yılına kadar görevde kalmayı başardı. 1933 yılından itibaren Kharkov'da pek çok öğretim görevlisi ve öğrenci tutuklandı ve hatta bazıları da vuruldu. Neyse ki Bernstein bu olaylar başlamadan önce görevden ayrılmıştı.

1932 yılında Bernstein, Leningrad'da bulunan USSR Bilimler Akademisi Matematik Enstitüsü Olasılık Teorisi ve Matematiksel İstatistik Bölümü'nün başkanı olmak için Kharkov'dan ayrıldı. 1934 yılından itibaren Leningrad Üniversitesi'nde de ders vermeye başladı. 1939 yılının başında Moskova Üniversitesi'nde ders vermeye başladı ancak Leningrad'da yaşamaya devam etti. Leningrad'da Matematik Enstitüsü'nün başkanlığını kaybetti fakat 1940 yılında Moskova Matematikçiler Topluluğu'nun onur üyesi oldu.

Haziran 1941'de Hitler Leningrad'a doğru hızlı bir biçimde ilerleyen Alman güçleri ile Rusya'ya saldırdı. Bernstein Leningrad'dan ayrıldı ve Kazakistan'ın kuzeyinde Astana ile Kokshetau arasında bulunan Borovoe kasabasına gitti. Oğlu German Sergeevich, Leningrad'daki aile evini terk etmedi ve Eylül 1941'de başlayan kuşatmada şehirden kaçmak isterken öldü. Oğlunun ölümünün ardından Bernstein, Leningrad'daki aile evini bırakmaya ve Moskova'daki evine taşınmaya karar verdi. Bernstein, Moskova Üniversitesi'nde ders vermeye başladı ve sonraki yedi yıl

boyunca Pafnuty Lvovich Chebyshev'in tüm çalışmalarının düzenlenmesi üzerine çalıştı. Ancak 1947 yılında üniversiteden kovuldu ve Steklov Enstitüsü Fonksiyon Teorisi Bölümü başkanı oldu. 1957 yılında emekli oldu.

1912 yılında Cambridge'de düzenlenen Uluslararası Matematikçiler Kongresi'nde Bernstein, bugün yaklaşım teorisi adı verilen fonksiyon teorisi üzerine yaptığı çalışmalar hakkında bir konuşma yapmıştır. Bu konuşmasında ortaya koyduğu fikirlerini geliştirmeye devam etti, interpolasyon teorisiyle problemler çözdü, mekanik entegrasyon metotlarını ve 1914 yılında yeni bir yarı-analitik fonksiyonlar sınıfını ortaya koydu.

Bernstein'in en önemli çalışmalarının bazıları olasılık teorisi ile ilgilidir ve Rusya'da doktorasını almadan önce bile önemli bir metin olan Probability Theory (1911) (4. Basım 1946) yi yazmıştır. 1917 yılında olasılık teorisinin bir dizi aksiom biçiminde ifadesini gerçekleştirme girişiminde bulunmuş ve 1922 yılında Sorbonne'da olasılık teorisi hakkında dört konferans vermiştir. Bu konferanslar "Leçons sur les propriétés extrême et la meilleure approximation des fonctions analytique d'une variable réelle" (1926) adlı kitapta toplanmıştır. Bu başarılı kitap için Bernstein, Paris'te Académie des Sciences tarafından ödüllendirilmiştir. 1922-24 yılları arasında Paris'i ziyaret etmenin yanı sıra Almanya'yı da ziyaret etmiştir. Olasılık teorisine yapmış olduğu pek çok katkı bağlamında merkezi limit teoremi için Lyapunov'un koşullarını genelleştirdi, büyük sayılar kuramının genelleştirilmesi üzerine çalıştı, Markov süreçleri ve stochastic süreçlerin üzerine çalışmalar yaptı.

Bernstein ayrıca olasılığın özellikle genetik bilimine uygulanması üzerine çalıştı. Bu konuda yazmış olduğu önemli bir makalesi "Mathematical problems in modern biology" (1922) dir ve içinde Bernstein problemi diye bilinen problem vardır. "Solution of a mathematical problem related to the theory of inheritance " (1924) adlı makalede kendi probleminin özel bir durumunu kanıtlamıştır.

Bernstein'in Collected Works adlı çalışmaları, 1952 ile 1964 yılları arasında dört cilt olarak çıktı. Bu kitapların editörlüğünü Bernstein kendisi yaptı.

Bernstein'a 1944 yılında Algiers Üniversitesi'nden, bir sonraki yıl da Sorbonne'dan fahri doktora verildi. 1955 yılında Académie des Sciences'a tam üye

seçildi. 1942 yılında ‘State Award:First Class’ ödülü verildi ve aynı yıl üç makalesi için Stalin Ödülü ‘nü aldı [40, 45].

Bernstein 26 Ekim 1968’de Moskova’da öldü.

1.2. Problemin Tanıtılması

Bu çalışmadaki amaç, $0 \leq a \leq x \leq b \leq R$ aralığında, birinci mertebeden lineer olmayan

$$P(x)y(x)+Q(x)y'(x)+R(x)y^2(x)+S(x)y(x)y'(x)+T(x)(y'(x))^2+U(x)y^3(x)=g(x), \quad (1.1)$$

tipindeki diferansiyel denkleminin,

$$\alpha y(a)+\beta y(b)+\gamma (y(a))^2+\tau (y(b))^2+\psi y(a)y(b)+\xi y^3(a)+\zeta y^3(b)=\lambda, \quad (1.2)$$

karışık koşullarına göre yaklaşık çözümü ile ikinci mertebeden lineer olmayan

$$\begin{aligned} a_0(x)y(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y''(x)+a_3(x)y^2(x)+a_4(x)y(x)y'(x)+a_5(x)(y'(x))^2+ \\ a_6(x)y(x)y''(x)+a_7(x)y'(x)y''(x)+a_8(x)(y''(x))^2+a_9(x)y^3(x)=g(x) \end{aligned} \quad (1.3)$$

tipindeki diferansiyel denkleminin,

$$\sum_{k=0}^1 \left[\alpha_{ik} y^{(k)}(a_i) + \sum_{l=0}^1 \beta_{ik} y^{(k)}(a_i) y^{(l)}(a_i) \right] = \lambda_j, \quad i, j = 0, 1, \quad (1.4)$$

karışık koşullarına göre yaklaşık çözümünü, $B_{n,N}(x)$ Bernstein polinomları cinsinden,

$$y(x) \cong \sum_{n=0}^N y_n B_{n,N}(x)$$

kesilmiş Bernstein serisi cinsinden yaklaşık olarak bulmaktır. Burada $(n = 0, 1, \dots, N)$ için y_n ler belirlenmesi gereken Bernstein katsayılarıdır.

Daha sonraki amaç ise, $0 \leq t \leq R$ aralığında tanımlı birinci mertebeden lineer olmayan

$$\left. \begin{aligned} a_1(t)y_1' + a_2(t)y_1 + a_3(t)y_2' + a_4(t)y_2 + N_1(y_1, y_2, y_1', y_2') &= g_1(t) \\ b_1(t)y_1' + b_2(t)y_1 + b_3(t)y_2' + b_4(t)y_2 + N_2(y_1, y_2, y_1', y_2') &= g_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

diferansiyel denklem sisteminin

$$\sum_{k=1}^2 \left[\alpha_{jk} y_k(a_i) + \sum_{l=1}^2 \beta_{jk} y_k(a_i) y_l(a_i) \right] = \lambda_j, \quad i, j = 1, 2, \quad 0 \leq a_1 \leq t \leq a_2 \leq R \quad (1.6)$$

karışık koşullarına göre yaklaşık çözümü ile ikinci merteye lineer olmayan

$$\left. \begin{aligned} a_1(t)y_1'' + a_2(t)y_1' + a_3(t)y_1 + a_4(t)y_2'' + a_5(t)y_2' + a_6(t)y_2 + N_1(y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', y_2'') &= g_1(t) \\ b_1(t)y_1'' + b_2(t)y_1' + b_3(t)y_1 + b_4(t)y_2'' + b_5(t)y_2' + b_6(t)y_2 + N_2(y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', y_2'') &= g_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

diferansiyel denklem sisteminin

$$\sum_{m=0}^1 \sum_{k=1}^2 \left[\alpha_{jk} y_k^{(m)}(a_i) + \sum_{n=0}^1 \sum_{l=1}^2 \beta_{jk} y_k^{(m)}(a_i) y_l^{(n)}(a_i) \right] = \lambda_j, \quad i, j = 1, 2 \quad (4.16)$$

karışık koşullarına göre yaklaşık çözümünü, $B_{n,N}(x)$ Bernstein polinomları cinsinden,

$$y_i(t) = \sum_{n=0}^N y_{i,n} B_{n,N}(t), \quad i = 1, 2,$$

kesilmiş Bernstein serisi cinsinden yaklaşık olarak bulmak olacaktır. Burada $(n = 0, 1, \dots, N)$ için $y_{i,n}$ ler belirlenmesi gereken Bernstein katsayılarıdır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Bernstein Polinomları

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad \text{ve} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad \text{olmak üzere;}$$

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

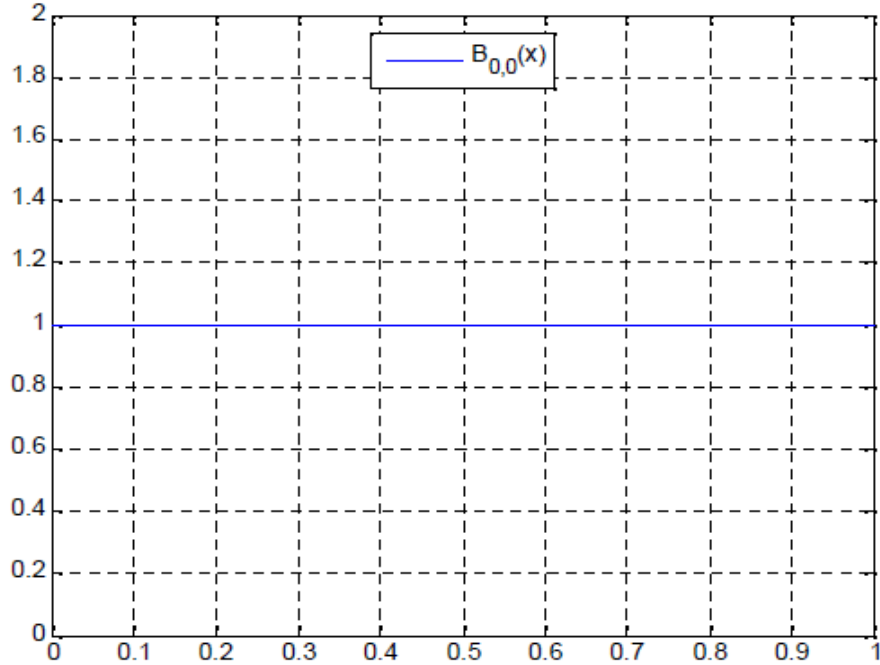
şeklinde tanımlanan polinomlara n . dereceden Bernstein polinomları denir.

n . dereceden $n+1$ tane Bernstein polinomu vardır. Matematiksel uygunluk bakımından $i < 0$ veya $i > n$ için $B_{i,n}(x)$ kabul edilir [8].

Sıfırıncı dereceden Bernstein polinomu;

$$B_{0,0}(x) = 1$$

şeklinde olup $0 \leq x \leq 1$ için grafiği



Şekil 2.1. Sıfırıncı dereceden Bernstein polinomlarının grafiği

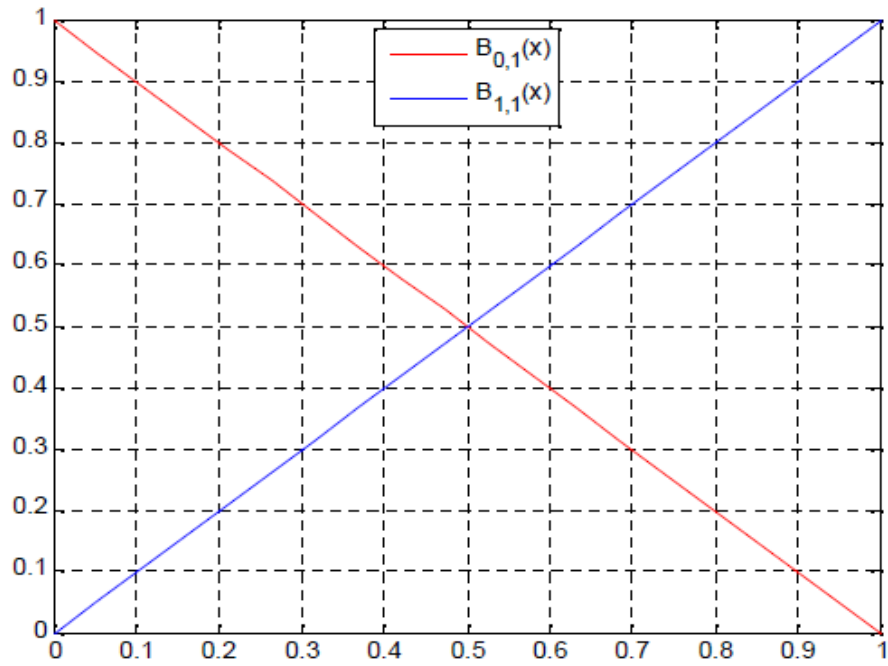
şeklindedir.

Birinci dereceden Bernstein polinomları;

$$B_{0,1}(x) = 1 - x$$

$$B_{1,1}(x) = x$$

şeklinde olup $0 \leq x \leq 1$ için grafiği



Şekil 2.2. Birinci dereceden Bernstein polinomlarının grafiği

şeklindedir.

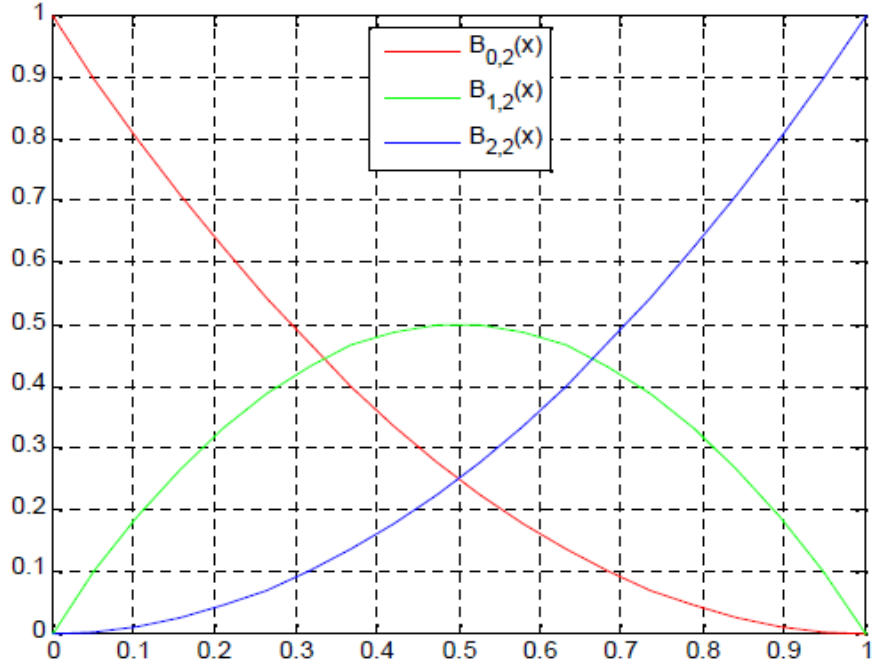
İkinci dereceden Bernstein polinomları;

$$B_{0,2}(x) = (1 - x)^2$$

$$B_{1,2}(x) = 2x(1 - x)$$

$$B_{2,2}(x) = x^2$$

şeklinde olup $0 \leq x \leq 1$ için grafiği



Şekil 2.3. İkinci dereceden Bernstein polinomlarının grafiği

şeklindedir.

Üçüncü dereceden Bernstein polinomları;

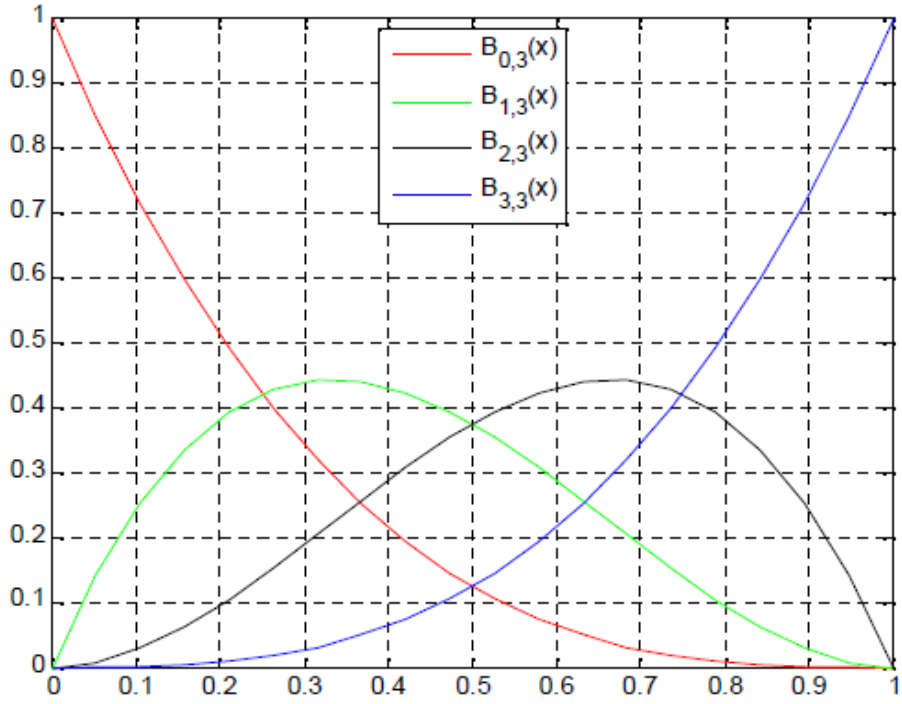
$$B_{0,3}(x) = (1-x)^3$$

$$B_{1,3}(x) = 3x(1-x)^2$$

$$B_{2,3}(x) = 3x^2(1-x)$$

$$B_{3,3}(x) = x^3$$

şeklinde olup $0 \leq x \leq 1$ için grafiği



Şekil 2.4. Üçüncü dereceden Bernstein polinomlarının grafiği

şeklinde çizilebilir.

2.2. Genelleştirilmiş Bernstein Polinomları

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad a \leq x \leq b \text{ olmak üzere;}$$

$$B_{i,n}(x) = \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan polinomlara n . dereceden genelleştirilmiş Bernstein polinomları denir [10].

$0 \leq x \leq R$ için 2.2 ifadesi;

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{x^i (R-x)^{n-i}}{R^n}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

haline gelir. Burada

$$(R-x)^{n-i} = \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} R^{n-i-k} (-1)^k x^k$$

ifadesi yerine yazılırsa;

$$B_{i,n}(x) = \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(-1)^k}{R^{i+k}} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} x^{i+k}$$

elde edilir.

3. LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Lineer olmayan diferansiyel denklemler kimyasal reaksiyonlarda, kütle transfer problemlerinde, sinyal yayılımları gibi birçok fiziksel olayın matematiksel modellemesinde ortaya çıkmaktadır [1, 3, 9, 11].

Bu tip problemler son yıllarda ekonomi ve ekolojide de çok etkin rol oynamış olup bu denklemlerin çözüm yöntemleri birçok bilim dalında ve mühendislikte büyük öneme sahiptir. Bir taraftan problemin çok değişkene bağlı olması, diğer taraftan denklemin lineer olmayan bileşenin tipi ve denklemin katsayılarının singülerliği (tekilliği) bu tür denklemlerin analitik çözümlerinin bulunmasını zorlaştırır. Bununla birlikte birçok diferansiyel denklemlerin analitik veya yaklaşık çözümü bulunabilmesine karşın çok sayıda denklemlerin çözümü bulunmamaktadır [4-6, 11-17]. O nedenle yaklaşık çözümlerin bulunması ihtiyacı ortaya çıkmıştır.

Lineer olmayan adi diferansiyel denklemler, özel olarak basit görünmesine karşın birinci ve ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemleri analitik olarak çözmek genellikle kolay değildir. Bunların genel çözümü için bilinen genel bir yöntem olmayıp, bu tip denkleminin özel durumlarının yaklaşık ve tam çözümlerinin bulunmasında bir takım bilinen yöntemler mevcuttur [23, 24, 26, 28, 30, 31]. Fakat birinci ve ikinci mertebeden bir kısım diferansiyel denklemlerin bilinen yöntemlerle çözülemediği durumlarda bu çalışmada sunulan Bernstein sıralama yöntemi kullanılarak yeteri kadar doğrulukta yaklaşık çözümleri ve varsa polinom şeklinde tam çözümlerinin bulunabildiği gösterilmiştir. Geliştirilen Bernstein sıralama yöntemi, önce lineer olmayan diferansiyel denklemdeki bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin sonlu Bernstein seri açılımları ve bilinen katsayı fonksiyonlarının sıralama noktalarındaki değerlerine bağlı matris formlarının elde edilmesi; sonra bunların yerine konulup sadeleştirilerek denklemin Bernstein katsayılı bir matris denklemine dönüştürülmesinden ibarettir. Böylece bilinmeyen Bernstein katsayılı lineer olmayan cebirsel bir sisteme karşılık gelen sonuç matris denklemini çözülebilir ve katsayılar yaklaşık olarak bulunabilir [20, 21].

3.1. Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözümü için Bernstein Sıralama (Collocation) Yöntemi

Bu kısımda, birinci mertebeden lineer olmayan

$$P(x)y(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y^2(x) + S(x)y(x)y'(x) + T(x)(y'(x))^2 + U(x)y^3(x) = g(x), \\ 0 \leq x \leq R \quad (3.1)$$

tipindeki diferansiyel denkleminin,

$$\alpha y(a) + \beta y(b) + \gamma (y(a))^2 + \tau (y(b))^2 + \psi y(a)y(b) + \xi y^3(a) + \zeta y^3(b) = \lambda, \quad (3.2)$$

karışık koşullarına göre

$$y(x) \cong \sum_{n=0}^N y_n B_{n,N}(x), \quad 0 \leq a \leq x \leq b \leq R \quad (3.3)$$

biçiminde N . dereceden bir Bernstein polinomu olarak yaklaşık çözümü araştırılmıştır. Burada $y_n, (n = 0, 1, \dots, N)$ katsayıları belirlenecek Bernstein katsayıları olup, $P(x), Q(x), R(x), S(x), T(x), U(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $0 \leq x \leq R$ aralığında tanımlı bilinen fonksiyonlar; $\alpha, \beta, \gamma, \tau, \psi, \xi, \zeta$ ve λ sabitleri uygun sabitlerdir.

(3.1) formundaki bazı denklemlerin kuvvet seri yöntemleri ve bazı nümerik yöntemler yardımı ile çözülebildiği iyi bilinmektedir [2, 7]. Bu çalışmada, yukarıda bahsedilen yöntemlerle çözülebilen (3.1) denkleminin bazı özel tiplerinin yanı sıra bu yöntemlerle çözülemeyen birinci mertebe lineer olmayan diferansiyel denklemlerin belli bir sınıfının yaklaşık çözümleri incelenmiştir. Bahsedilen birinci mertebe lineer olmayan diferansiyel denklemlerin Bernstein polinom çözümleri, lineer diferansiyel denklemler için verilen Taylor sıralama yönteminin yeni bir düzenlemesi ile elde edilmiştir [18, 19, 22, 27].

3.1.1. Temel Matris Bağıntıları

Bu kısımda (3.1) ile verilen lineer olmayan diferansiyel denkleminin her teriminin matris formları elde edilir. Bunun için önce (3.3) ile verilen Bernstein polinom yaklaşımı matris formunda yazılacak olursa

$$y(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{Y} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{B}(x) = [B_{0,N}(x) \quad B_{1,N}(x) \quad \cdots \quad B_{N,N}(x)]_{1 \times (N+1)}$$

$$\mathbf{Y} = [y_0 \quad y_1 \cdots y_N]^T$$

ifadeleri elde edilir. (3.4) ifadesinin x 'e göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} y'(x) &= \mathbf{B}'(x) \mathbf{Y} \\ &= \mathbf{B}(x) \mathbf{H} \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. Buradaki H matrisi

$$\mathbf{H} = (\mathbf{M}^T)^{-1} \mathbf{\Pi} \mathbf{M}^T$$

şeklinde olup M ve Π matrisleri

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & \cdots & m_{0N} \\ m_{10} & m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N0} & m_{N1} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix}, \quad m_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-i} \binom{N}{i} \binom{N-i}{j-i}}{R^j}, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases}$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

olarak tanımlanır.

Diğer yandan, $y^2(x)$ ifadesi

$$y^2(x) = \begin{bmatrix} B_{0,N}(x) & B_{1,N}(x) & \cdots & B_{N,N}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \mathbf{Y} \\ y_1 \mathbf{Y} \\ \vdots \\ y_N \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade

$$\bar{\mathbf{B}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(x) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}$$

ve

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} y_0 \mathbf{Y} & y_1 \mathbf{Y} & \cdots & y_N \mathbf{Y} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}^T$$

olmak üzere,

$$y^2(x) = \mathbf{B}(x) \bar{\mathbf{B}}(x) \bar{\mathbf{Y}} \quad (3.6)$$

formunda elde edilir.

(3.4) ve (3.5) ifadelerini kullanarak,

$$y(x) y'(x) = \begin{bmatrix} B_{0,N}(x) & B_{1,N}(x) & \cdots & B_{N,N}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \mathbf{Y} \\ y_1 \mathbf{Y} \\ \vdots \\ y_N \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

veya

$$y(x) y'(x) = \mathbf{B}(x) \bar{\mathbf{B}}(x) \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{Y}} \quad (3.7)$$

ifadesi elde edilir.

(3.6) bağıntısındaki benzer yol izlenerek ve (3.4) ifadesi kullanılarak

$$\left(y'(x)\right)^2 = \begin{bmatrix} B_{0,N}(x) & B_{1,N}(x) & \cdots & B_{N,N}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \mathbf{Y} \\ y_1 \mathbf{Y} \\ \vdots \\ y_N \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

olmak üzere,

$$\left(y'(x)\right)^2 = \mathbf{B}(x) \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}(x) \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{Y}} \quad (3.8)$$

olarak elde edilir.

(3.4) ve (3.6) ifadelerini kullanarak,

$$y^3(x) = \begin{bmatrix} B_{0,N}(x) & B_{1,N}(x) & \cdots & B_{N,N}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{B}}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\mathbf{B}}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \bar{\mathbf{Y}} \\ y_1 \bar{\mathbf{Y}} \\ \vdots \\ y_N \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade

$$\bar{\bar{\mathbf{B}}}(x) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{B}}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\mathbf{B}}(x) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^3}$$

ve

$$\bar{\bar{\mathbf{Y}}} = \begin{bmatrix} y_0 \bar{\mathbf{Y}} & y_1 \bar{\mathbf{Y}} & \cdots & y_N \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{(N+1)^3 \times 1}^T$$

olmak üzere,

$$y^3(x) = \mathbf{B}(x) \bar{\mathbf{B}}(x) \bar{\bar{\mathbf{B}}}(x) \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \quad (3.9)$$

matris bağıntısı elde edilir.

3.1.2. Sıralama (Collocation) Noktalarına Dayalı Matris Bağıntıları

Bu çalışmada kullanılacak sıralama noktaları

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

için

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.10)$$

ile tanımlanır. Bu sıralama noktaları (3.1) denkleminde yerine konulursa,

$$P(x_i) y(x_i) + Q(x_i) y'(x_i) + R(x_i) y^2(x_i) + S(x_i) y(x_i) y'(x_i) + T(x_i) (y'(x_i))^2 + U(x_i) y^3(x_i) = g(x_i)$$

$$i = 0, 1, \dots, N \quad ; \quad 0 \leq x_i \leq R$$

elde edilir. Bu denklem

$$\begin{aligned} & \left[P(x_i) \mathbf{B}(x_i) \mathbf{I} + Q(x_i) \mathbf{B}(x_i) \mathbf{H} \right] \mathbf{Y} + \left[R(x_i) \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{B}}(x_i) + S(x_i) \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{B}}(x_i) \bar{\mathbf{H}} + T(x_i) \mathbf{B}(x_i) \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}(x_i) \bar{\mathbf{H}} \right] \bar{\mathbf{Y}} \\ & + \left[U(x_i) \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{B}}(x_i) \bar{\bar{\mathbf{B}}}(x_i) \right] \bar{\bar{\mathbf{Y}}} = g(x_i) \end{aligned} \quad (3.11)$$

şeklinde düzenlenebilir. Böylece

$$\mathbf{W}(x_i) \mathbf{Y} + \mathbf{V}(x_i) \bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{Z}(x_i) \bar{\bar{\mathbf{Y}}} = g(x_i) \quad (3.12)$$

şeklinde yeni denklem sistemi elde edilir. Yeni temel matris denklemi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{W}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{W}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2} ; \quad \mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \\ \vdots \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{V}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^3} ; \quad \bar{\mathbf{Y}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}} \\ \bar{\mathbf{Y}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{(N+1)^3 \times 1}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{Z}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^4} ; \quad \bar{\bar{\mathbf{Y}}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \\ \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \\ \vdots \\ \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \end{bmatrix}_{(N+1)^4 \times 1}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} ; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}\mathbf{Y}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}}^* + \mathbf{Z}\bar{\bar{\mathbf{Y}}}^* = \mathbf{G}$$

şekline dönüşür veya arttırılmış matris olarak

$$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{Z}; \mathbf{G}] \tag{3.13}$$

ifadesi elde edilir.

(3.2) koşullarına karşılık gelen matris denklemi (3.4) ve (3.6) bağıntısı kullanılarak

$$\mathbf{B}(a) = \begin{bmatrix} B_{0,N}(a) & B_{1,N}(a) & \cdots & B_{N,N}(a) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(b) = \begin{bmatrix} B_{0,N}(b) & B_{1,N}(b) & \cdots & B_{N,N}(b) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{B}}(a) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(a) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(a) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(a) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}$$

$$\bar{\mathbf{B}}(b) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(b) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(b) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(b) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{B}}}(a) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}(a) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{B}}(a) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\mathbf{B}}(a) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^3}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{B}}}(b) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}(b) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{B}}(b) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\mathbf{B}}(b) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^3}$$

olmak üzere

$$\{\alpha \mathbf{B}(a) + \beta \mathbf{B}(b)\} \mathbf{Y} + \{\gamma \mathbf{B}(a) \bar{\mathbf{B}}(a) + \tau \mathbf{B}(b) \bar{\mathbf{B}}(b) + \nu \mathbf{B}(a) \bar{\mathbf{B}}(b)\} \bar{\mathbf{Y}} + \{\xi \mathbf{B}(a) \bar{\mathbf{B}}(a) \bar{\bar{\mathbf{B}}}(a) + \zeta \mathbf{B}(b) \bar{\mathbf{B}}(b) \bar{\bar{\mathbf{B}}}(b)\} \bar{\bar{\mathbf{Y}}} = \lambda$$

biçiminde elde edilir ve

$$[\mathbf{K}; \mathbf{L}; \mathbf{N} : \lambda] \tag{3.14}$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$ ve $\mathbf{N}$ matrisleri

$$\mathbf{K} = [k_0 \quad k_1 \quad \cdots \quad k_N]_{1 \times (N+1)} = \alpha \mathbf{B}(a) + \beta \mathbf{B}(b)$$

$$\mathbf{L} = [l_0 \quad l_1 \quad \cdots \quad l_N]_{1 \times (N+1)^2} = \gamma \mathbf{B}(a) \bar{\mathbf{B}}(a) + \tau \mathbf{B}(b) \bar{\mathbf{B}}(b) + \psi \mathbf{B}(a) \bar{\mathbf{B}}(b)$$

$$\mathbf{N} = [n_0 \quad n_1 \quad \cdots \quad n_N]_{1 \times (N+1)^3} = \xi \mathbf{B}(a) \bar{\mathbf{B}}(a) \bar{\bar{\mathbf{B}}}(a) + \zeta \mathbf{B}(b) \bar{\mathbf{B}}(b) \bar{\bar{\mathbf{B}}}(b)$$

olarak tanımlanmıştır.

(3.2) koşullarına göre Bernstein polinomu cinsinden çözümü elde etmek için (3.13) arttırılmış matrisinin son satırı silinerek, yerine koşulla ilgili (3.14) satır matrisinin konulmasıyla elde edilen yeni arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{V}}; \tilde{\mathbf{Z}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(x_0) & 0 & \cdots & 0; & \mathbf{V}(x_0) & 0 & \cdots & 0; & \mathbf{Z}(x_0) & 0 & \cdots & 0; & g(x_0) \\ 0 & \mathbf{W}(x_1) & \cdots & 0; & 0 & \mathbf{V}(x_1) & \cdots & 0; & 0 & \mathbf{Z}(x_1) & \cdots & 0; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots; & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots; & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K}; & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{L}; & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{N}; & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

veya karşılık gelen matris denklemi

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{Y}^* + \tilde{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{Y}}^* + \tilde{\mathbf{Z}}\bar{\bar{\mathbf{Y}}}^* = \tilde{\mathbf{G}}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{W}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K} \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{L} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{N} \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanır.

(3.15) matris denkleminin karşı gelen lineer olmayan cebirsel denklem sisteminden, bilinmeyen $\{y_0, y_1, \dots, y_N\}$ Bernstein katsayıları belirlenir. Sonuç olarak (3.15) matris denklemi yardımıyla (3.3) kesilmiş seri formunda yaklaşık çözüm elde edilir.

3.1.3. Çözümün Kontrolü

Çözümü kontrol etmek için aşağıdaki yol izlenebilir [19, 41, 42, 44]. (3.3) Bernstein polinomu (3.1) denkleminin bir yaklaşık çözümü olduğu için $y(x)$ ve türevi (3.1)'de yerine konulduğunda sonuç denklem yaklaşık olarak sağlanmalıdır; yani

$$x = x_i \in [0, R] \text{ için}$$

$$E(x_i) = \left| P(x_i)y(x_i) + Q(x_i)y'(x_i) + R(x_i)y^2(x_i) + S(x_i)y(x_i)y'(x_i) + T(x_i)(y'(x_i))^2 + U(x_i)y^3(x_i) - g(x_i) \right| \cong 0$$

veya

$$E(x_i) \leq 10^{-k_i} \quad (k_i \in \mathbb{Z}^+).$$

Eğer $\max(10^{-k_i}) = 10^{-k} \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$ belirlenmiş ise, N kesme sınırı $E(x)$ farklı her bir noktada belirlenen 10^{-k} değerden daha küçük kalıncaya kadar arttırılır. Diğer yandan hata

$$E_N(x) = P(x)y_N(x) + Q(x)y'_N(x) + R(x)y_N^2(x) + S(x)y_N(x)y'_N(x) + T(x)(y'_N(x))^2 + U(x)y_N^3(x) - g(x)$$

fonksiyonu ile tanımlanabilir. Eğer N yeterince büyük olduğundan $E_N(x) \rightarrow 0$ ise o zaman hata azalır.

3.2. İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözümü için Bernstein Sıralama (Collocation) Yöntemi

Bu kısımda ise, ikinci mertebeden lineer olmayan

$$\begin{aligned} a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y''(x) + a_3(x)y^2(x) + a_4(x)y(x)y'(x) + a_5(x)(y'(x))^2 + \\ a_6(x)y(x)y''(x) + a_7(x)y'(x)y''(x) + a_8(x)(y''(x))^2 + a_9(x)y^3(x) = g(x) \end{aligned} \quad (3.16)$$

tipindeki diferansiyel denkleminin,

$$\sum_{k=0}^1 \left[\alpha_{ik} y^{(k)}(a_i) + \sum_{l=0}^1 \beta_{ik} y^{(k)}(a_i) y^{(l)}(a_i) \right] = \lambda_j \quad , \quad i, j = 0, 1, \quad 0 \leq x \leq R \quad (3.17)$$

karışık koşullarına göre

$$y(x) \cong \sum_{n=0}^N y_n B_{n,N}(x) \quad , \quad 0 \leq a \leq x \leq b < R \quad (3.18)$$

biçiminde N . dereceden bir Bernstein polinomu olarak yaklaşık çözümü araştırılmıştır. Burada y_n , $(n=0,1,...,N)$ katsayıları belirlenecek Bernstein katsayıları olup, $a_0(x), a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x), a_5(x), a_6(x), a_7(x), a_8(x), a_9(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $0 \leq x \leq R$ aralığında tanımlı bilinen fonksiyonlar; α, β ve λ sabitleri uygun sabitlerdir.

3.2.1. Temel Matris Bağlılıları

Bu kısımda (3.16) ile verilen lineer olmayan diferansiyel denkleminin her teriminin matris formları elde edilir. Bunun için önce (3.18) ile verilen Bernstein polinom yaklaşımı matris formunda yazılacak olursa

$$y(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{Y} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} B_{0,N}(x) & B_{1,N}(x) & \cdots & B_{N,N}(x) \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_N \end{bmatrix}^T$$

elde edilir. (3.19) ifadesinin x 'e göre türevleri alınır

$$\begin{aligned} y'(x) &= \mathbf{B}'(x) \mathbf{Y} \\ &= \mathbf{B}(x) \mathbf{H} \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \mathbf{B}'(x) \mathbf{H} \mathbf{Y} \\ &= \mathbf{B}(x) \mathbf{H}^2 \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (3.21)$$

ifadeleri elde edilir. Buradaki H matrisi

$$\mathbf{H} = (\mathbf{M}^T)^{-1} \mathbf{\Pi} \mathbf{M}^T$$

şeklinde olup M ve Π matrisleri

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & \cdots & m_{0N} \\ m_{10} & m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N0} & m_{N1} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix}, \quad m_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-i} \binom{N}{i} \binom{N-i}{j-i}}{R^j}, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases}$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

olarak tanımlanır.

Diğer yandan, $y^2(x)$ ifadesi

$$y^2(x) = \begin{bmatrix} B_{0,N}(x) & B_{1,N}(x) & \cdots & B_{N,N}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \mathbf{Y} \\ y_1 \mathbf{Y} \\ \vdots \\ y_N \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade

$$\bar{\mathbf{B}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(x) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}$$

ve

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} y_0 \mathbf{Y} & y_1 \mathbf{Y} & \cdots & y_N \mathbf{Y} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}^T$$

olmak üzere,

$$y^2(x) = \mathbf{B}(x) \bar{\mathbf{B}}(x) \bar{\mathbf{Y}} \quad (3.22)$$

biçiminde elde edilir.

(3.19) ve (3.20) ifadelerini kullanarak,

$$y(x)y'(x) = \begin{bmatrix} B_{0,N}(x) & B_{1,N}(x) & \cdots & B_{N,N}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \mathbf{Y} \\ y_1 \mathbf{Y} \\ \vdots \\ y_N \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

veya

$$y(x)y'(x) = \mathbf{B}(x) \bar{\mathbf{B}}(x) \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{Y}} \quad (3.23)$$

ifadesi elde edilir.

(3.22) bağıntısındaki benzer yol izlenerek ve (3.19) ifadesi kullanılarak

$$\left(y'(x)\right)^2 = \begin{bmatrix} B_{0,N}(x) & B_{1,N}(x) & \cdots & B_{N,N}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H} \\ \vdots \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \mathbf{Y} \\ y_1 \mathbf{Y} \\ \vdots \\ y_N \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

olmak üzere,

$$\left(y'(x)\right)^2 = \mathbf{B}(x) \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}(x) \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{Y}} \quad (3.24)$$

biçiminde elde edilir.

(3.20) ve (3.21) ifadelerinden

$$y'(x)y''(x) = \begin{bmatrix} B_{0,N}(x) & B_{1,N}(x) & \cdots & B_{N,N}(x) \end{bmatrix} [\mathbf{H}] \begin{bmatrix} \mathbf{B}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \mathbf{Y} \\ y_1 \mathbf{Y} \\ \vdots \\ y_N \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade

$$\bar{\bar{\mathbf{H}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H}^2 \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

olmak üzere

$$y'(x)y''(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}(x) \bar{\bar{\mathbf{H}}} \bar{\mathbf{Y}} \quad (3.25)$$

bağıntısı elde edilir.

(3.19), (3.20) ifadelerini, (3.24) ve (3.25) bağıntılarındaki benzer yollar izlenerek,

$$y(x)y''(x) = \begin{bmatrix} B_{0,N}(x) & B_{1,N}(x) & \cdots & B_{N,N}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \mathbf{Y} \\ y_1 \mathbf{Y} \\ \vdots \\ y_N \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

veya kısaca

$$y(x)y''(x) = \mathbf{B}(x) \bar{\mathbf{B}}(x) \bar{\bar{\mathbf{H}}} \bar{\mathbf{Y}} \quad (3.26)$$

elde edilir.

$$(y''(x))^2 = \begin{bmatrix} B_{0,N}(x) & B_{1,N}(x) & \cdots & B_{N,N}(x) \end{bmatrix} [\mathbf{H}]^2 \begin{bmatrix} \mathbf{B}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \mathbf{Y} \\ y_1 \mathbf{Y} \\ \vdots \\ y_N \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

veya kısaca

$$\left(y''(x)\right)^2 = \mathbf{B}(x) \mathbf{H}^2 \bar{\mathbf{B}}(x) \bar{\bar{\mathbf{H}}} \bar{\mathbf{Y}} \quad (3.27)$$

elde edilir.

(3.19) ve (3.22) ifadelerini kullanarak,

$$y^3(x) = \begin{bmatrix} B_{0,N}(x) & B_{1,N}(x) & \cdots & B_{N,N}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{B}}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\mathbf{B}}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \bar{\mathbf{Y}} \\ y_1 \bar{\mathbf{Y}} \\ \vdots \\ y_N \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade

$$\bar{\bar{\mathbf{B}}}(x) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{B}}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\mathbf{B}}(x) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}$$

ve

$$\bar{\bar{\mathbf{Y}}} = \begin{bmatrix} y_0 \bar{\mathbf{Y}} & y_1 \bar{\mathbf{Y}} & \cdots & y_N \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{(N+1)^3 \times 1}^T$$

olmak üzere,

$$y^3(x) = \mathbf{B}(x) \bar{\mathbf{B}}(x) \bar{\bar{\mathbf{B}}}(x) \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \quad (3.28)$$

matris bağıntısını elde ederiz.

3.2.2. Sıralama (Collocation) Noktalarına Dayalı Matris Bağıntıları

Bu çalışmada kullanılacak sıralama noktaları

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

için

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.29)$$

ile tanımlanır. Bu sıralama noktaları (3.16) denkleminde yerine konulursa,

$$\begin{aligned} & a_0(x_i)y(x_i) + a_1(x_i)y'(x_i) + a_2(x_i)y''(x_i) + a_3(x_i)y^2(x_i) + a_4(x_i)y(x_i)y'(x_i) + a_5(x_i)(y'(x_i))^2 + \\ & a_6(x_i)y(x_i)y''(x_i) + a_7(x_i)y'(x_i)y''(x_i) + a_8(x_i)(y''(x_i))^2 + a_9(x_i)y^3(x_i) = g(x_i) \\ & i = 0, 1, \dots, N \quad ; \quad 0 \leq x_i \leq R \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem

$$\begin{aligned} & \left[a_0(x_i)\mathbf{B}(x_i)\mathbf{I} + a_1(x_i)\mathbf{B}(x_i)\mathbf{H} + a_2(x_i)\mathbf{B}(x_i)\mathbf{H}^2 \right] \mathbf{Y} + \\ & \left[a_3(x_i)\mathbf{B}(x_i)\bar{\mathbf{B}}(x_i) + a_4(x_i)\mathbf{B}(x_i)\bar{\mathbf{B}}(x_i)\bar{\mathbf{H}} + a_5(x_i)\mathbf{B}(x_i)\mathbf{H}\bar{\mathbf{B}}(x_i)\bar{\mathbf{H}} \right. \\ & \quad \left. + a_6(x_i)\mathbf{B}(x_i)\bar{\mathbf{B}}(x_i)\bar{\bar{\mathbf{H}}} + a_7(x_i)\mathbf{B}(x_i)\mathbf{H}\bar{\mathbf{B}}(x_i)\bar{\bar{\mathbf{H}}} + a_8(x_i)\mathbf{B}(x_i)\mathbf{H}^2\bar{\mathbf{B}}(x_i)\bar{\bar{\mathbf{H}}} \right] \bar{\mathbf{Y}} + \\ & \left[a_9(x_i)\mathbf{B}(x_i)\bar{\mathbf{B}}(x_i)\bar{\bar{\mathbf{B}}}(x_i) \right] \bar{\bar{\mathbf{Y}}} = g(x_i) \end{aligned} \quad (3.30)$$

şeklinde düzenlenebilir. Böylece

$$\mathbf{W}(x_i)\mathbf{Y} + \mathbf{V}(x_i)\bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{Z}(x_i)\bar{\bar{\mathbf{Y}}} = g(x_i) \quad (3.31)$$

şeklinde yeni denklem sistemi elde edilir. Yeni temel matris denklemini

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{W}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{W}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2} \quad ; \quad \mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \\ \vdots \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{V}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^3} \quad ; \quad \bar{\mathbf{Y}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}} \\ \bar{\mathbf{Y}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{(N+1)^3 \times 1}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{Z}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^4} ; \quad \bar{\bar{\mathbf{Y}}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \\ \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \\ \vdots \\ \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \end{bmatrix}_{(N+1)^4 \times 1}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1} ; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}\mathbf{Y}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}}^* + \mathbf{Z}\bar{\bar{\mathbf{Y}}}^* = \mathbf{G}$$

şekline dönüşür veya arttırılmış matris olarak

$$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{Z}; \mathbf{G}] \tag{3.32}$$

formunda yazılabilir.

(3.17) koşullarına karşılık gelen matris denklemi (3.19), (3.20), (3.22), (3.23) ve (3.24) bağıntılarını kullanılarak

$$\mathbf{B}(a_i) = [B_{0,N}(a_i) \quad B_{1,N}(a_i) \quad \cdots \quad B_{N,N}(a_i)]$$

$$\bar{\mathbf{B}}(a_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(a_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(a_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(a_i) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}$$

olmak üzere

$$\mathbf{K}_i = \sum_{k=0}^1 [\alpha_{ik} \mathbf{B}(a_i)] \mathbf{H}^k \mathbf{Y} \quad , \quad i = 0, 1$$

$$\mathbf{L}_i = \sum_{k=0}^1 \beta_{ik} [\mathbf{B}(a_i) \bar{\mathbf{B}}(a_i) + \mathbf{B}(a_i) \bar{\mathbf{B}}(a_i) \bar{\mathbf{H}} + \mathbf{B}(a_i) \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}(a_i) \bar{\mathbf{H}}] \bar{\mathbf{Y}} \quad , \quad i = 0, 1$$

şeklinde elde edilir ve

$$[\mathbf{K}; \mathbf{L}; \mathbf{0}; \boldsymbol{\lambda}] \quad (3.33)$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{0}$ ve $\boldsymbol{\lambda}$ matrisleri

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_1 \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)} = [k_{ij}]$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_1 \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)^2} = [l_{ij}] \quad i = 0, 1 \quad , \quad j = 0, 1, \dots, N$$

veya açık olarak

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} & \cdots & k_{0N} & \mathbf{0} & & \\ & & & & k_{10} & k_{11} & \cdots & k_{1N} \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^1 \alpha_{ik} [\mathbf{B}(a_i) + \mathbf{B}(a_i) \mathbf{H}]$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{00} & l_{01} & \cdots & l_{0N} & \mathbf{0} & & \\ & & & & l_{10} & l_{11} & \cdots & l_{1N} \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^1 \beta_{ik} [\mathbf{B}(a_i) \bar{\mathbf{B}}(a_i) + \mathbf{B}(a_i) \bar{\mathbf{B}}(a_i) \bar{\mathbf{H}} + \mathbf{B}(a_i) \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}(a_i) \bar{\mathbf{H}}]$$

şeklinde,

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)^3} \quad , \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

formunda tanımlanmıştır.

(3.17) koşullarına göre Bernstein polinomu cinsinden çözümünü elde etmek için (3.32) arttırılmış matrisinin son iki satırı silinerek, yerine koşulla ilgili (3.33) satır matrisinin konulmasıyla elde edilen yeni arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{V}}; \tilde{\mathbf{Z}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(x_0) & 0 & \cdots & 0 & ; & \mathbf{V}(x_0) & 0 & \cdots & 0 & ; & \mathbf{Z}(x_0) & 0 & \cdots & 0 & : & g(x_0) \\ 0 & \mathbf{W}(x_1) & \cdots & 0 & ; & 0 & \mathbf{V}(x_1) & \cdots & 0 & ; & 0 & \mathbf{Z}(x_1) & \cdots & 0 & : & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & : & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K} & ; & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{L} & ; & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{0} & : & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

veya karşılık gelen matris denklemi

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{Y}^* + \tilde{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{Y}}^* + \tilde{\mathbf{Z}}\bar{\bar{\mathbf{Y}}}^* = \tilde{\mathbf{G}}$$

şeklinde olur; buradaki matrisler

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{W}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{L} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(3.34) matris denkleminin karşı gelen lineer olmayan cebirsel denklem sisteminden, bilinmeyen $\{y_0, y_1, \dots, y_N\}$ Bernstein katsayıları belirlenir. Sonuç olarak (3.34) matris denklemi yardımıyla (3.18) kesilmiş seri formunda yaklaşık çözüm elde edilir.

3.2.3. Çözümün Kontrolü

(3.18) Bernstein polinomu (3.16) denkleminin yaklaşık çözümü olduğu için (3.16) daki bağıntılar yerine konulduğunda sonuç denklem yaklaşık olarak sağlanır; yani

$$x = x_i \in [0, R] \text{ için}$$

$$E(x_i) = \left| \begin{array}{c} a_0(x_i)y(x_i) + a_1(x_i)y'(x_i) + a_2(x_i)y''(x_i) + a_3(x_i)y^2(x_i) + a_4(x_i)y(x_i)y'(x_i) + a_5(x_i)(y'(x_i))^2 + \\ a_6(x_i)y(x_i)y''(x_i) + a_7(x_i)y'(x_i)y''(x_i) + a_8(x_i)(y''(x_i))^2 + a_9(x_i)y^3(x_i) - g(x_i) \end{array} \right| \equiv 0$$

veya

$$E(x_i) \leq 10^{-k_i} \quad (k_i \in \mathbb{Z}^+).$$

Eğer $\max(10^{-k_i}) = 10^{-k} \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$ belirlenmiş ise, N kesme sınırı $E(x)$ farklı her bir noktada belirlenen 10^{-k} değerden daha küçük kalıncaya kadar arttırılır. Diğer yandan hata

$$E_N(x) = a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y''(x) + a_3(x)y^2(x) + a_4(x)y(x)y'(x) + a_5(x)(y'(x))^2 + \\ a_6(x)y(x)y''(x) + a_7(x)y'(x)y''(x) + a_8(x)(y''(x))^2 + a_9(x)y^3(x) - g(x)$$

fonksiyonu ile tanımlanabilir. Eğer N yeterince büyük olduğundan $E_N(x) \rightarrow 0$ ise o zaman hata azalır [41, 42, 44].

4. LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Uygulamalı bilimlerin birçok alanında lineer olmayan diferansiyel denklem sistemleri karşımıza çıkmaktadır. Lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin varsa analitik çözümlerini bulmak en iyi tercihtir [36]. Bunun mümkün olmadığı durumlarda en iyi yaklaşımı veren nümerik yöntemi kullanıp çözümü elde etmek gerekir [32-38]. Nümerik yöntemler çok önceden beri matematikçiler tarafından kullanılmakta olup 1950'den sonra gelişmeye başlayan bilgisayar ile birlikte daha yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır.

Önceki bölümde birinci ve ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunması için verilen yöntem bu bölümde birinci ve ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için geliştirilmiştir.

Yaklaşık çözüm için geliştirilen yöntem ilk önce, denklem içindeki katsayı fonksiyonlarının, lineer olmayan kısmının ve bilinmeyen fonksiyon ile türevlerinin kesilmiş (sonlu) Bernstein polinom açılımlarının alınmasına sonra bunların matris formlarının yerine konularak sadeleştirilmesine ve bir matris denklemine dönüştürülmesine dayandırılır. Bu matris denklemi birinci ve ikinci mertebeden lineer olmayan denklem sistemine karşılık gelir. Bu da bilinen sayısal yöntemlerle çözülebilir.

4.1. Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Sınır Değer Problemi için Bernstein Sıralama Yöntemi

Çalışmanın bu bölümünde $0 \leq t \leq R$ olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} a_1(t)y_1' + a_2(t)y_1 + a_3(t)y_2' + a_4(t)y_2 + N_1(y_1, y_2, y_1', y_2') &= g_1(t) \\ b_1(t)y_1' + b_2(t)y_1 + b_3(t)y_2' + b_4(t)y_2 + N_2(y_1, y_2, y_1', y_2') &= g_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

ile tanımlı lineer olmayan birinci mertebe diferansiyel denklem sistemlerinin sınır değer problemi

$$\sum_{k=1}^2 \left[\alpha_{jk} y_k(a_i) + \sum_{l=1}^2 \beta_{jk} y_k(a_i) y_l(a_i) \right] = \lambda_j, \quad i, j = 1, 2, \quad 0 \leq a_1 \leq t \leq a_2 \leq R \quad (4.2)$$

sınır koşulları ile ele alınmıştır. Burada $0 \leq t \leq R$, $N_1(y_1, y_2, y_1', y_2')$ ve $N_2(y_1, y_2, y_1', y_2')$ lineer olmayan fonksiyonlar, $a_i(t)$ ve $b_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, 4$ sürekli fonksiyonlar ve $g_1(t), g_2(t)$ bilinen fonksiyonlardır.

Amaç, daha önce kullanılmış olan Taylor sıralama ve matris metotlarını değiştirip geliştirerek (4.1) ve (4.2) sisteminin

$$y_i(t) = \sum_{n=0}^N y_{i,n} B_{n,N}(t), \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq t \leq R \quad (4.3)$$

kesilmiş Bernstein serisi cinsinden yaklaşık çözümünü bulmaktır. Burada $(n = 0, 1, \dots, N)$ için $y_{i,n}$ ler belirlenmesi gereken Bernstein katsayılarıdır.

4.1.1. Temel Matris Bağıntıları

Bu kısımda, (4.1) sistemindeki tüm terimlerin matris formu oluşturulacaktır. Bu amaçla ilk olarak (4.3) ile ifade edilen Bernstein seri çözümleri ve türevlerinin matris gösterimi ele alınacak olursa,

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} B_{0,N}(t) & B_{1,N}(t) & \cdots & B_{N,N}(t) \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)}$$

$$\mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} y_{i,0} & y_{i,1} & \cdots & y_{i,N} \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)}^T$$

şeklinde olmak üzere

$$y_i(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{Y}_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.4)$$

$$y_i'(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{H} \mathbf{Y}_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.5)$$

bağıntıları elde edilir. Buradaki H matrisi

$$\mathbf{H} = (\mathbf{M}^T)^{-1} \mathbf{I} \mathbf{M}^T$$

şeklinde olup

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & \cdots & m_{0N} \\ m_{10} & m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N0} & m_{N1} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix}, \quad m_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-i} \binom{N}{i} \binom{N-i}{j-i}}{R^j}, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases}$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

(4.1) sisteminin lineer olmayan kısmı $N_1(y_1, y_2, y_1', y_2')$, $i=1,2$ nümerik örnekler içinde $y_i^2(t)$ ve $y_i(t)y_j(t)$, $i \neq j$, $i=j=1,2$ biçimlerinde yer almaktadır. Lineer olmayan ifadelerin matris gösterimleri de $i=j=1,2$ için

$$\bar{\mathbf{B}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(t) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{i,i} = \begin{bmatrix} y_{i,0} \mathbf{Y}_i & y_{i,1} \mathbf{Y}_i \cdots y_{i,N} \mathbf{Y}_i \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{i,j} = \begin{bmatrix} y_{j,0} \mathbf{Y}_i & y_{j,1} \mathbf{Y}_i \cdots y_{j,N} \mathbf{Y}_i \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{j,i} = \begin{bmatrix} y_{i,0} \mathbf{Y}_j & y_{i,1} \mathbf{Y}_j \cdots y_{i,N} \mathbf{Y}_j \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}^T$$

olmak üzere,

$$y_i^2(t) = \mathbf{B}(t) \bar{\mathbf{B}}(t) \bar{\mathbf{Y}}_{i,i}$$

$$y_i(t) y_j(t) = \mathbf{B}(t) \bar{\mathbf{B}}(t) \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} \quad (4.6)$$

$$y_j(t) y_i(t) = \mathbf{B}(t) \bar{\mathbf{B}}(t) \bar{\mathbf{Y}}_{j,i}$$

şeklinde matris formuna indirgenir.

4.1.2. Sistemin Temel Matris Gösterimi

Bir önceki kısımda tanımlanmış olan (4.4) ve (4.5) matris bağlantıları (4.1) sisteminde yerine yazılarak

$$\left. \begin{aligned} a_1(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{H} \mathbf{Y}_1 + a_2(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{Y}_1 + a_3(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{H} \mathbf{Y}_2 + a_4(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{Y}_2 + N_1(t) \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} &= g_1(t) \\ b_1(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{H} \mathbf{Y}_1 + b_2(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{Y}_1 + b_3(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{H} \mathbf{Y}_2 + b_4(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{Y}_2 + N_2(t) \bar{\mathbf{Y}}_{j,i} &= g_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

matris sistemi elde edilir. (4.7) sisteminin matris gösterimi

$$\left. \begin{aligned} \underbrace{[a_1(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{H} + a_2(t) \mathbf{B}(t)]}_{\mathbf{C}_1(t)} \mathbf{Y}_1 + \underbrace{[a_3(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{H} + a_4(t) \mathbf{B}(t)]}_{\mathbf{C}_2(t)} \mathbf{Y}_2 + N_1(t) \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} &= g_1(t) \\ \underbrace{[b_1(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{H} + b_2(t) \mathbf{B}(t)]}_{\mathbf{D}_1(t)} \mathbf{Y}_1 + \underbrace{[b_3(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{H} + b_4(t) \mathbf{B}(t)]}_{\mathbf{D}_2(t)} \mathbf{Y}_2 + N_2(t) \bar{\mathbf{Y}}_{j,i} &= g_2(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\mathbf{C}_1(t) = a_1(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{H} + a_2(t) \mathbf{B}(t)$$

$$\mathbf{C}_2(t) = a_3(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{H} + a_4(t) \mathbf{B}(t)$$

$$\mathbf{D}_1(t) = b_1(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{H} + b_2(t) \mathbf{B}(t)$$

$$\mathbf{D}_2(t) = b_3(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{H} + b_4(t) \mathbf{B}(t)$$

olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}_1(t) \mathbf{Y}_1 + \mathbf{C}_2(t) \mathbf{Y}_2 + N_1(t) \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} &= g_1(t) \\ \mathbf{D}_1(t) \mathbf{Y}_1 + \mathbf{D}_2(t) \mathbf{Y}_2 + N_2(t) \bar{\mathbf{Y}}_{j,i} &= g_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

formunda bulunur.

Sonuç olarak (4.7) sisteminin temel matris denklemi

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1(t) & \mathbf{C}_2(t) \\ \mathbf{D}_1(t) & \mathbf{D}_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)}, \quad \mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} N_1(t) & 0 \\ 0 & N_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)^2}, \quad \mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 1}, \quad \bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{j,i} \end{bmatrix}_{2(N+1)^2 \times 1} \quad i=1,2$$

olmak üzere

$$\mathbf{P}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{N}(t)\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(t) \quad (4.9)$$

şeklinde kapalı formda ifade edilir.

4.1.3. Bernstein Sıralama Metodu

Bu kısımda

$$t_s = \frac{b}{N} s, \quad s = 0, 1, 2, \dots, N,$$

şeklinde tanımlı sıralama noktaları (4.9) matris denkleminde yerine yazılarak,

$$\mathbf{P}(t_s)\mathbf{Y} + \mathbf{N}(t_s)\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(t_s) \quad , \quad s = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.10)$$

yeni denklem sistemi elde edilir. Böylece yeni temel matris denklemini

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{P}(t_N) \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)^2}, \quad \mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \\ \vdots \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}_{2(N+1)^2 \times 1}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{N}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{N}(t_N) \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)^3}, \quad \bar{\mathbf{Y}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}} \\ \bar{\mathbf{Y}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{2(N+1)^3 \times 1}$$

$$\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}\mathbf{Y}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}}^* = \mathbf{G}^* \quad (4.11)$$

elde edilir.

(4.2) ile tanımlanan sınır koşullarının matris gösterimini bulmak için (4.4) ve (4.6) bağıntıları kullanarak

$$\sum_{k=1}^2 [\alpha_{ik} \mathbf{B}(a_i) \mathbf{Y}_i + \beta_{ik} \mathbf{B}(a_i) \bar{\mathbf{B}}(a_i) \bar{\mathbf{Y}}_{i,j}] = \lambda_j, \quad i, j = 1, 2 \quad (4.12)$$

elde edilir.

Böylece koşulların temel matris denklemi

$$\mathbf{K}_i = \sum_{k=1}^2 \alpha_{ik} \mathbf{B}_k(a_i) \mathbf{Y}_i$$

$$\mathbf{L}_i = \sum_{k=1}^2 \beta_{ik} \mathbf{B}(a_i) \bar{\mathbf{B}}(a_i) \bar{\mathbf{Y}}_{i,j}$$

olmak üzere

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)^2}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

matrisleri elde edilir. $\mathbf{K}$ ve $\mathbf{L}$ matrisleri kullanılarak (4.12) ifadesi

$$\mathbf{K}\mathbf{Y} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{Y}} = \boldsymbol{\lambda} \quad (4.13)$$

şeklindeki matris denkleminde dönüşür. (4.11) denklemindeki $\mathbf{W}$ matrisinin son iki satırı (4.13) matrisi ile değiştirilerek, koşula bağlı matris denklem

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{V}}; \tilde{\mathbf{G}}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(t_0) & 0 & \cdots & 0 & ; & \mathbf{N}(t_0) & 0 & \cdots & 0 & : & \mathbf{G}(t_0) \\ 0 & \mathbf{P}(t_1) & \cdots & 0 & ; & 0 & \mathbf{N}(t_1) & \cdots & 0 & : & \mathbf{G}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & : & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K} & ; & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{L} & : & \lambda \end{bmatrix}$$

ve karşılık gelen matris denklemi

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{Y}^* + \tilde{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{Y}}^* = \tilde{\mathbf{G}}^*$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K} \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{N}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{L} \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{G}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(t_0) \\ \mathbf{G}(t_1) \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}$$

formunda tanımlanır. Böylece (4.1) sisteminin (4.2) sınır koşulları altında temel matris denklemi, $n=0,1,\dots,N$ için $y_{1,n}$ ve $y_{2,n}$ bilinmeyenli $2(N+1)$ denklemden oluşan lineer olmayan cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu denklem sisteminden bilinmeyen katsayılar hesaplanır ve denklem (4.3) de yerine yazılırsa,

$$y_i(t) = \sum_{n=0}^N y_{i,n} B_{n,N}(t) , \quad i=1,2 \quad (4.14)$$

şeklinde Bernstein polinom çözümü elde edilmiş olur.

4.1.4. Çözümün Kontrolü

Çözümün doğruluğunu kontrol etmek için (4.14) ile elde edilen yaklaşık çözümler (4.1) sisteminde yerine yazılır. (4.14) polinomunun çözümleri, sistemin çözümleri olduğundan denklem (4.1)'i sağlamalıdır. Yani

$$i=1,2 \quad t=t_q \in [0, R] \quad , \quad q=0,1,\dots \quad \text{için}$$

$$E_{1,N}(t_q) = \left| a_1(t_q)y_{1,N}' + a_2(t_q)y_{1,N} + a_3(t_q)y_{2,N}' + a_4(t_q)y_{2,N} + N_1(y_1(t_q), y_2(t_q), y_1'(t_q), y_2'(t_q)) - g_1(t_q) \right| \cong 0$$

$$E_{2,N}(t_q) = \left| b_1(t_q)y_{1,N}' + b_2(t_q)y_{1,N} + b_3(t_q)y_{2,N}' + b_4(t_q)y_{2,N} + N_2(y_1(t_q), y_2(t_q), y_1'(t_q), y_2'(t_q)) - g_2(t_q) \right| \cong 0$$

veya

$$E_{i,N}(t_q) \leq 10^{-kq} \quad (kq \in \mathbb{Z}^+)$$

olmalıdır. $\max 10^{-kq} = 10^{-k}$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) önceden belirlenerek $E_{i,N}(t_q)$ değeri her noktada 10^{-k} 'dan küçük oluncaya kadar N kesme sınırı artırılır [41, 42, 44].

4.2. İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Sınır Değer Problemi için Bernstein Sıralama Yöntemi

Bu kısımda ise, $0 \leq t \leq R$ olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} a_1(t)y_1'' + a_2(t)y_1' + a_3(t)y_1 + a_4(t)y_2'' + a_5(t)y_2' + a_6(t)y_2 + N_1(y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', y_2'') &= g_1(t) \\ b_1(t)y_1'' + b_2(t)y_1' + b_3(t)y_1 + b_4(t)y_2'' + b_5(t)y_2' + b_6(t)y_2 + N_2(y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', y_2'') &= g_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

ile tanımlı lineer olmayan ikinci mertebe diferansiyel denklem sistemlerinin sınır değer problemi

$$\sum_{m=0}^1 \sum_{k=1}^2 \left[\alpha_{jk} y_k^{(m)}(a_i) + \sum_{n=0}^1 \sum_{l=1}^2 \beta_{jk} y_k^{(m)}(a_i) y_l^{(n)}(a_i) \right] = \lambda_j, \quad i, j = 1, 2 \quad (4.16)$$

sınır koşulları ile ele alınmıştır. Burada $0 \leq t \leq R$, $N_1(y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', y_2'')$ ve $N_2(y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', y_2'')$ lineer olmayan fonksiyonlar, $a_i(t)$ ve $b_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, 6$ sürekli fonksiyonlar ve $g_1(t), g_2(t)$ bilinen fonksiyonlardır.

Amaç, daha önce kullanılmış olan Taylor sıralama ve matris metotlarını değiştirip geliştirerek (4.15) ve (4.16) sisteminin

$$y_i(t) = \sum_{n=0}^N y_{i,n} B_{n,N}(t), \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq t \leq R \quad (4.17)$$

kesilmiş Bernstein serisi cinsinden yaklaşık çözümünü bulmaktır. Burada ($n = 0, 1, \dots, N$) için $y_{i,n}$ ler belirlenmesi gereken Bernstein katsayılarıdır.

4.2.1. Temel Matris Bağıntıları

Bu kısımda, (4.15) sistemindeki tüm terimlerin matris formu oluşturulacaktır. Bu amaçla ilk olarak (4.17) ile ifade edilen Bernstein seri çözümleri ve türevlerinin matris gösterimi ele alınacak olursa,

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} B_{0,N}(t) & B_{1,N}(t) & \cdots & B_{N,N}(t) \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)}$$

$$\mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} y_{i,0} & y_{i,1} & \cdots & y_{i,N} \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)}^T$$

şeklinde olmak üzere

$$y_i(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{Y}_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.18)$$

$$y_i^{(n)}(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{H}^n \mathbf{Y}_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.19)$$

bağıntıları elde edilir. Buradaki $\mathbf{H}$ matrisi

$$\mathbf{H} = (\mathbf{M}^T)^{-1} \mathbf{\Pi} \mathbf{M}^T$$

şeklinde olup

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & \cdots & m_{0N} \\ m_{10} & m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N0} & m_{N1} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix}, \quad m_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-i} \binom{N}{i} \binom{N-i}{j-i}}{R^j}, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases}$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

(4.15) sisteminin lineer olmayan kısmı $N_1(y_1, y_2, y_1', y_2')$, $i=1,2$ nümerik örnekler içinde $y_i^2(t)$ ve $y_i(t)y_j(t)$, $i \neq j$, $i=j=1,2$ biçimlerinde yer almaktadır. Lineer olmayan ifadelerin matris gösterimleri de $i=j=1,2$ için

$$\bar{\mathbf{B}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}(t) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{i,i} = \begin{bmatrix} y_{i,0} \mathbf{Y}_i & y_{i,1} \mathbf{Y}_i \cdots y_{i,N} \mathbf{Y}_i \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{i,j} = \begin{bmatrix} y_{j,0} \mathbf{Y}_i & y_{j,1} \mathbf{Y}_i \cdots y_{j,N} \mathbf{Y}_i \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_{j,i} = \begin{bmatrix} y_{i,0} \mathbf{Y}_j & y_{i,1} \mathbf{Y}_j \cdots y_{i,N} \mathbf{Y}_j \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times 1}^T$$

olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned} y_i^2(t) &= \mathbf{B}(t) \bar{\mathbf{B}}(t) \bar{\mathbf{Y}}_{i,i} \\ y_i(t) y_j(t) &= \mathbf{B}(t) \bar{\mathbf{B}}(t) \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} \\ y_j(t) y_i(t) &= \mathbf{B}(t) \bar{\mathbf{B}}(t) \bar{\mathbf{Y}}_{j,i} \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

$$\left. \begin{aligned} y_i(t) y_i'(t) &= \mathbf{B}(t) \bar{\mathbf{B}}(t) \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{Y}}_{i,i} \\ y_i(t) y_j'(t) &= \mathbf{B}(t) \bar{\mathbf{B}}(t) \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} \\ y_j(t) y_i'(t) &= \mathbf{B}(t) \bar{\mathbf{B}}(t) \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{Y}}_{j,i} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

$$\left. \begin{aligned} (y_i'(t))^2 &= \mathbf{B}(t) \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}(t) \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{Y}}_{i,i} \\ y_i'(t) y_j'(t) &= \mathbf{B}(t) \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}(t) \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} \\ y_j'(t) y_i'(t) &= \mathbf{B}(t) \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}(t) \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{Y}}_{j,i} \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

şeklinde matris formuna indirgenir.

4.2.2. Sistemin Temel Matris Gösterimi

Bir önceki kısımda tanımlanmış olan (4.18) ve (4.19) matris bağlantıları (4.15) sisteminde yerine yazılarak

$$\left. \begin{aligned} a_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2\mathbf{Y}_1 + a_2(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}\mathbf{Y}_1 + a_3(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}_1 + a_4(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2\mathbf{Y}_2 + a_5(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}\mathbf{Y}_2 + a_6(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}_2 + N_1(t)\bar{\mathbf{Y}}_{i,j} &= g_1(t) \\ b_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2\mathbf{Y}_1 + b_2(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}\mathbf{Y}_1 + b_3(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}_1 + b_4(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2\mathbf{Y}_2 + b_5(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}\mathbf{Y}_2 + b_6(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}_2 + N_2(t)\bar{\mathbf{Y}}_{j,i} &= g_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

matris sistemi elde edilir. (4.23) sisteminin matris gösterimi

$$\left. \begin{aligned} \underbrace{\left[a_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 + a_2(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H} + a_3(t)\mathbf{B}(t) \right]}_{\mathbf{C}_1(t)} \mathbf{Y}_1 + \underbrace{\left[a_4(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 + a_5(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H} + a_6(t)\mathbf{B}(t) \right]}_{\mathbf{C}_2(t)} \mathbf{Y}_2 + N_1(t)\bar{\mathbf{Y}}_{i,j} &= g_1(t) \\ \underbrace{\left[b_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 + b_2(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H} + b_3(t)\mathbf{B}(t) \right]}_{\mathbf{D}_1(t)} \mathbf{Y}_1 + \underbrace{\left[b_4(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 + b_5(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H} + b_6(t)\mathbf{B}(t) \right]}_{\mathbf{D}_2(t)} \mathbf{Y}_2 + N_2(t)\bar{\mathbf{Y}}_{j,i} &= g_2(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\mathbf{C}_1(t) = a_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 + a_2(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H} + a_3(t)\mathbf{B}(t)$$

$$\mathbf{C}_2(t) = a_4(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 + a_5(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H} + a_6(t)\mathbf{B}(t)$$

$$\mathbf{D}_1(t) = b_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 + b_2(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H} + b_3(t)\mathbf{B}(t)$$

$$\mathbf{D}_2(t) = b_4(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 + b_5(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H} + b_6(t)\mathbf{B}(t)$$

olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}_1(t)\mathbf{Y}_1 + \mathbf{C}_2(t)\mathbf{Y}_2 + N_1(t)\bar{\mathbf{Y}}_{i,j} &= g_1(t) \\ \mathbf{D}_1(t)\mathbf{Y}_1 + \mathbf{D}_2(t)\mathbf{Y}_2 + N_2(t)\bar{\mathbf{Y}}_{j,i} &= g_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

formunda bulunur.

Sonuç olarak (4.23) sisteminin temel matris denklemi

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1(t) & \mathbf{C}_2(t) \\ \mathbf{D}_1(t) & \mathbf{D}_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)}, \quad \mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} N_1(t) & 0 \\ 0 & N_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)^2}, \quad \mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 1}, \quad \bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{j,i} \end{bmatrix}_{2(N+1)^2 \times 1} \quad i = 1, 2$$

olmak üzere

$$\mathbf{P}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{N}(t)\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(t) \quad (4.25)$$

şeklinde kapalı formda ifade edilir.

4.2.3. Bernstein Sıralama Metodu

Bu kısımda

$$t_s = \frac{b}{N} s, \quad s = 0, 1, 2, \dots, N,$$

şeklinde tanımlı sıralama noktaları (4.24) matris denkleminde yerine yazılarak,

$$\mathbf{P}(t_s)\mathbf{Y} + \mathbf{N}(t_s)\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(t_s), \quad s = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.26)$$

yeni denklem sistemi elde edilir. Böylece yeni temel matris denklemini

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{P}(t_N) \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)^2}, \quad \mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \\ \vdots \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}_{2(N+1)^2 \times 1}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{N}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{N}(t_N) \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)^3}, \quad \bar{\mathbf{Y}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}} \\ \bar{\mathbf{Y}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{2(N+1)^3 \times 1}$$

$$\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

olmak üzere

$$\mathbf{W}\mathbf{Y}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}}^* = \mathbf{G}^* \quad (4.27)$$

biçiminde elde edilir.

(4.16) ile tanımlanan sınır koşullarının matris gösterimini bulmak için (4.18) ve (4.19) bağıntıları kullanarak

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{01} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{02} \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12} \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)}$$

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{01} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{02} \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)^2}, \quad \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{12} \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)^2}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_{01} \\ \lambda_{02} \end{bmatrix}_{2 \times 1}, \quad \boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

olmak üzere sırasıyla

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{Y} + \mathbf{L}_0 \bar{\mathbf{Y}} = \boldsymbol{\lambda}_0 \quad (4.28)$$

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{L}_1 \bar{\mathbf{Y}} = \boldsymbol{\lambda}_1 \quad (4.29)$$

şeklindeki matris denkleminde dönüşür. (4.27) denklemindeki $\mathbf{W}$ matrisinin son dört satırı (4.28) ve (4.29) matrisleri ile değiştirilerek, koşula bağlı matris denklem

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{V}}; \tilde{\mathbf{G}}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(t_0) & 0 & \cdots & 0 & 0 & ; & \mathbf{N}(t_0) & 0 & \cdots & 0 & 0 & : & \mathbf{G}(t_0) \\ 0 & \mathbf{P}(t_1) & \cdots & 0 & 0 & ; & 0 & \mathbf{N}(t_1) & \cdots & 0 & 0 & : & \mathbf{G}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ; & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & : & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K}_0 & 0 & ; & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{L}_0 & 0 & : & \boldsymbol{\lambda}_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{K}_1 & ; & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{L}_1 & : & \boldsymbol{\lambda}_1 \end{bmatrix}$$

ve karşılık gelen matris denklemini

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{Y}^* + \tilde{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{Y}}^* = \tilde{\mathbf{G}}^*$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(t_0) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}(t_1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{K}_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(t_0) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}(t_1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{L}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{L}_1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{G}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(t_0) \\ \mathbf{G}(t_1) \\ \vdots \\ \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$$

formunda tanımlanır. Böylece (4.15) sisteminin (4.16) sınır koşulları altında temel matris denklemi, $n = 0, 1, \dots, N$ için $y_{1,n}$ ve $y_{2,n}$ bilinmeyenli $2(N+1)$ denklemden oluşan lineer olmayan cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu denklem sisteminden bilinmeyen katsayılar hesaplanır ve denklem (4.17) de yerine yazılırsa, sistemin

$$y_i(t) = \sum_{n=0}^N y_{i,n} B_{n,N}(t), \quad i = 1, 2 \quad (4.30)$$

şeklinde Bernstein polinom çözümü elde edilmiş olur.

4.2.4. Çözümün Kontrolü

Çözümün doğruluğunu kontrol etmek için (4.30) ile elde edilen yaklaşık çözümler (4.15) sisteminde yerine yazılır. (4.30) polinomunun çözümleri, sistemin çözümleri olduğundan denklem (4.15)'i sağlamalıdır. Yani

$$i = 1, 2 \quad t = t_q \in [0, R] \quad , \quad q = 0, 1, \dots \quad \text{için}$$

$$E_{1,N}(t_q) = \left| a_1(t_q)y_{1,N}'' + a_2(t_q)y_{1,N}' + a_3(t_q)y_{1,N} + a_4(t_q)y_{2,N}'' + a_5(t_q)y_{2,N}' + a_6(t_q)y_{2,N} + N_1(y_1(t_q), y_2(t_q), y_1'(t_q), y_2'(t_q)) - g_1(t_q) \right| \cong 0$$

$$E_{2,N}(t_q) = \left| \begin{aligned} &b_1(t_q)y_{1,N}'' + b_2(t_q)y_{1,N}' + b_3(t_q)y_{1,N} + b_4(t_q)y_{2,N}'' + \\ &b_5(t_q)y_{2,N}' + b_6(t_q)y_{2,N} + N_2(y_1(t_q), y_2(t_q), y_1'(t_q), y_2'(t_q)) - g_2(t_q) \end{aligned} \right| \cong 0$$

veya

$$E_{i,N}(t_q) \leq 10^{-kq} \quad (kq \in \mathbb{Z}^+)$$

olmalıdır. $\text{Max } 10^{-kq} = 10^{-k} \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$ önceden belirlenerek $E_{i,N}(t_q)$ değeri her noktada 10^{-k} 'dan küçük oluncaya kadar N kesme sınırı arttırılır [41, 42, 44].

5. LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM VE DENKLEM SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ NÜMERİK UYGULAMALAR

Bu bölümde, Bernstein sıralama (collocation) yönteminin kullanılabilirliğini göstermek için birinci ve ikinci mertebeden sabit ve değişken katsayılı lineer olmayan diferansiyel denklem ve denklem sistemleri ile ilgili bazı örnekler incelenmiştir. Ayrıca, verilen aralıklarda elde edilen yaklaşık çözümlerin doğruluğu tablo ve grafiklerle gösterilmiştir.

ÖRNEK 5.1. Birinci mertebeden lineer olmayan

$$y'(x) + y(x) + y^3(x) = 1 + x + x^3, \quad 0 \leq x \leq 1$$

diferansiyel denklemi

$$y(0) - y^2(0) = 0$$

koşulu ile göz önüne alınıp bu denklemin $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^2 y_n B_{n,2}(x)$$

sonlu Bernstein serisiyle yaklaşıldığında,

$$P(x)=1, Q(x)=1, U(x)=1, R(x)=S(x)=T(x)=0, g(x)=1+x+x^3$$

olup $N=2$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

olarak bulunur. Kısım 3.1.2'deki yöntem izlenerek verilen denklem ve koşul için temel matris denklemi

$$\left[P(x_i) \mathbf{B}(x_i) \mathbf{I} + Q(x_i) \mathbf{B}(x_i) \mathbf{H} \right] \mathbf{Y} + \left[U(x_i) \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{B}}(x_i) \bar{\bar{\mathbf{B}}}(x_i) \right] \bar{\bar{\mathbf{Y}}} = g(x_i)$$

şeklindedir. Kapalı formdaki temel matris denklemi ve sınır koşulunun temel matris denklemi,

$$\mathbf{W}(x_i)\mathbf{Y} + \mathbf{V}(x_i)\bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{Z}(x_i)\bar{\bar{\mathbf{Y}}} = g(x_i) \quad (5.1)$$

olarak elde edilir. Sıralama noktaları (5.1) matris denkleminde yerine yazılarak yeni matris denklemi elde edilir. Böylece yeni temel matris denklemi,

$$\mathbf{W}\mathbf{Y}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}}^* + \mathbf{Z}\bar{\bar{\mathbf{Y}}}^* = \mathbf{G}$$

şeklinde olup bu denklemdeki matrisler

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{W}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{V}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Z}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(0) \\ g\left(\frac{1}{2}\right) \\ g(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Y}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}} \\ \bar{\mathbf{Y}} \\ \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{\mathbf{Y}}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \\ \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \\ \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = [y_0 \quad y_1 \quad y_2]^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = [y_0y_0 \quad y_0y_1 \quad y_0y_2 \quad y_1y_0 \quad y_1y_1 \quad y_1y_2 \quad y_2y_0 \quad y_2y_1 \quad y_2y_2]^T$$

$$\bar{\bar{\mathbf{Y}}} = [y_0y_0y_0 \quad y_0y_0y_1 \quad y_0y_0y_2 \quad y_0y_1y_0 \quad y_0y_1y_1 \quad y_0y_1y_2 \quad y_0y_2y_0 \quad y_0y_2y_1 \quad y_0y_2y_2 \\ y_1y_0y_0 \quad y_1y_0y_1 \quad y_1y_0y_2 \quad y_1y_1y_0 \quad y_1y_1y_1 \quad y_1y_1y_2 \quad y_1y_2y_0 \quad y_1y_2y_1 \quad y_1y_2y_2 \\ y_2y_0y_0 \quad y_2y_0y_1 \quad y_2y_0y_2 \quad y_2y_1y_0 \quad y_2y_1y_1 \quad y_2y_1y_2 \quad y_2y_2y_0 \quad y_2y_2y_1 \quad y_2y_2y_2]^T$$

biçiminde bulunur. Koşul için matris denklemi

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{Y}-\{\mathbf{B}(0)\bar{\mathbf{B}}(0)\}\bar{\mathbf{Y}}=[0]$$

olarak elde edilir. Arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{Z}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(0) & 0 & 0 & ; & \mathbf{V}(0) & 0 & 0 & ; & \mathbf{Z}(0) & 0 & 0 & : & g(0) \\ 0 & \mathbf{W}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & ; & 0 & \mathbf{V}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & ; & 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & : & g\left(\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & ; & 0 & 0 & \mathbf{L} & ; & 0 & 0 & \mathbf{N} & : & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradaki matrisler açık olarak

$$\mathbf{W}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{W}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{V}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(0) = 1 \quad , \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{8} \quad , \quad \lambda = 0$$

biçimindedir. Elde edilen sistemden bulunan

$$\left\{ y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 1 \right\}$$

katsayıları

$$y(x) = y_0 B_{0,2}(x) + y_1 B_{1,2}(x) + y_2 B_{2,2}(x)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = x$$

formundaki tam çözüm bulunur.

ÖRNEK 5.2. Birinci mertebeden lineer olmayan

$$y'(x) - xy(x)y'(x) + y^3(x) = x^6 - 2x^4 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

diferansiyel denklemi

$$y(0) - y^2(0) + y^3(0) = 0$$

koşulu ile göz önüne alınıp bu denklemin $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^2 y_n B_{n,2}(x)$$

sonlu Bernstein serisiyle yaklaşıldığında,

$$Q(x) = 1, S(x) = -x, U(x) = 1, P(x) = R(x) = T(x) = 0, g(x) = x^6 - 2x^4 + 2x$$

olup $N = 2$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

olarak bulunur. Kısım 3.1.2'deki yöntem izlenerek verilen denklem ve koşul için temel matris denklemi

$$\left[Q(x_i) \mathbf{B}(x_i) \mathbf{H} \right] \mathbf{Y} + \left[S(x_i) \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{B}}(x_i) \bar{\mathbf{H}} \right] \bar{\mathbf{Y}} + \left[U(x_i) \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{B}}(x_i) \bar{\bar{\mathbf{B}}}(x_i) \right] \bar{\bar{\mathbf{Y}}} = g(x_i)$$

şeklinde elde edilir. Kapalı formdaki temel matris denklemi ve sınır koşulunun temel matris denklemi,

$$\mathbf{W}(x_i) \mathbf{Y} + \mathbf{V}(x_i) \bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{Z}(x_i) \bar{\bar{\mathbf{Y}}} = g(x_i) \quad (5.2)$$

olarak elde edilir. Sıralama noktaları (5.2) matris denkleminde yerine yazılarak yeni matris denklemi elde edilir. Böylece yeni temel matris denklemi,

$$\mathbf{W}\mathbf{Y}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}}^* + \mathbf{Z}\bar{\bar{\mathbf{Y}}}^* = \mathbf{G}$$

şeklinde olup bu denklemdeki matrisler

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{W}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{V}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Z}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(0) \\ g\left(\frac{1}{2}\right) \\ g(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Y}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}} \\ \bar{\mathbf{Y}} \\ \bar{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{\mathbf{Y}}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \\ \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \\ \bar{\bar{\mathbf{Y}}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = [y_0 \quad y_1 \quad y_2]^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = [y_0 y_0 \quad y_0 y_1 \quad y_0 y_2 \quad y_1 y_0 \quad y_1 y_1 \quad y_1 y_2 \quad y_2 y_0 \quad y_2 y_1 \quad y_2 y_2]^T$$

$$\bar{\bar{\mathbf{Y}}} = [y_0 y_0 y_0 \quad y_0 y_0 y_1 \quad y_0 y_0 y_2 \quad y_0 y_1 y_0 \quad y_0 y_1 y_1 \quad y_0 y_1 y_2 \quad y_0 y_2 y_0 \quad y_0 y_2 y_1 \quad y_0 y_2 y_2 \\ y_1 y_0 y_0 \quad y_1 y_0 y_1 \quad y_1 y_0 y_2 \quad y_1 y_1 y_0 \quad y_1 y_1 y_1 \quad y_1 y_1 y_2 \quad y_1 y_2 y_0 \quad y_1 y_2 y_1 \quad y_1 y_2 y_2 \\ y_2 y_0 y_0 \quad y_2 y_0 y_1 \quad y_2 y_0 y_2 \quad y_2 y_1 y_0 \quad y_2 y_1 y_1 \quad y_2 y_1 y_2 \quad y_2 y_2 y_0 \quad y_2 y_2 y_1 \quad y_2 y_2 y_2]^T$$

biçiminde bulunur. Koşul için matris denklemi

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{Y} - \{\mathbf{B}(0)\bar{\mathbf{B}}(0)\}\bar{\mathbf{Y}} + \{\mathbf{B}(0)\bar{\mathbf{B}}(0)\bar{\bar{\mathbf{B}}}(0)\}\bar{\bar{\mathbf{Y}}} = 0$$

olarak elde edilir. Arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{Z}} : \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(0) & 0 & 0 & ; \mathbf{V}(0) & 0 & 0 & ; \mathbf{Z}(0) & 0 & 0 & : g(0) \\ 0 & \mathbf{W}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & ; 0 & \mathbf{V}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & ; 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & : g\left(\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & ; 0 & 0 & \mathbf{L} & ; 0 & 0 & \mathbf{N} & : 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradaki matrisler açık olarak

$$\mathbf{W}(0) = [-2 \ 2 \ 0] \quad , \quad \mathbf{W}\left(\frac{1}{2}\right) = [-1 \ 0 \ 1]$$

$$\mathbf{V}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] ,$$

$$\mathbf{V}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}(0) = [1 \ 0]$$

$$\mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = [1 \ 0 \ 0] \quad , \quad \mathbf{L} = [-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{N}(0) = [1 \ 0]$$

$$g(0) = 0, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{57}{64}, \quad g(1) = 1, \quad \lambda = 0.$$

biçimindedir. Elde edilen sistemden bulunan

$$\{y_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = 1\}$$

katsayılar

$$y(x) = y_0 B_{0,2}(x) + y_1 B_{1,2}(x) + y_2 B_{2,2}(x)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = x^2$$

formundaki tam çözüm bulunur.

ÖRNEK 5.3. Birinci mertebeden lineer olmayan [43]

$$\left(y'(x)\right)^2 + 3xy'(x) - y(x) = -\frac{3}{2}x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

diferansiyel denklemi

$$2y(0) - y^2(0) = 1$$

koşulu ile göz önüne alınıp bu denklemin $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 y_n B_{n,3}(x)$$

sonlu Bernstein serisiyle yaklaşıldığında,

$$P(x) = -1, \quad Q(x) = 3x, \quad T(x) = 1, \quad R(x) = S(x) = U(x) = 0, \quad g(x) = -\frac{3}{2}x^2$$

olup $N = 3$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 1 \right\}$$

olarak bulunur. Kısım 3.1.2'deki yöntem izlenerek verilen denklem ve koşul için temel matris denklemi

$$\left[P(x_i) \mathbf{B}(x_i) \mathbf{I} + Q(x_i) \mathbf{B}(x_i) \mathbf{H} \right] \mathbf{Y} + \left[T(x_i) \mathbf{B}(x_i) \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}(x_i) \bar{\mathbf{H}} \right] \bar{\mathbf{Y}} = g(x_i)$$

şeklindedir. Kapalı formdaki temel matris denklemi ve sınır koşulunun temel matris denklemi,

$$\mathbf{W}(x_i) \mathbf{Y} + \mathbf{V}(x_i) \bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{Z}(x_i) \bar{\bar{\mathbf{Y}}} = g(x_i) \quad (5.3)$$

olarak elde edilir. Sıralama noktaları (5.3) matris denkleminde yerine yazılarak yeni matris denklemi elde edilir. Böylece yeni temel matris denklemi,

$$\mathbf{WY}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}}^* + \mathbf{Z}\bar{\bar{\mathbf{Y}}}^* = \mathbf{G}$$

şeklinde olup bu denklemdeki matrisler

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{W}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{W}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{V}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{V}(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Z}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(0) \\ g\left(\frac{1}{3}\right) \\ g\left(\frac{2}{3}\right) \\ g(1) \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Koşul için matris denklemi

$$2\mathbf{B}(0)\mathbf{Y} - \{\mathbf{B}(0)\bar{\mathbf{B}}(0)\}\bar{\mathbf{Y}} = 1$$

olarak elde edilir. Arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{Z}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(0) & 0 & 0 & 0, & \mathbf{V}(0) & 0 & 0 & 0, & \mathbf{Z}(0) & 0 & 0 & 0 : g(0) \\ 0 & \mathbf{W}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0, & 0 & \mathbf{V}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0, & 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 : g\left(\frac{1}{3}\right) \\ 0 & 0 & \mathbf{W}\left(\frac{2}{3}\right) & 0, & 0 & 0 & \mathbf{V}\left(\frac{2}{3}\right) & 0, & 0 & 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 : g\left(\frac{2}{3}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}, & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L}, & 0 & 0 & 0 & \mathbf{N} : \lambda \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradaki matrisler açık olarak

$$\mathbf{W}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{44}{27} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{8}{27} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{19}{27} & -\frac{20}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{64}{27} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}(0) = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 & 0 & -9 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{16}{9} & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{16}{9} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(0) = 0 \quad , \quad g\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6} \quad , \quad g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} \quad , \quad \lambda = 1.$$

biçimindedir. Elde edilen sistemden bulunan

$$\left\{ y_0 = 1, y_1 = \frac{4}{3}, y_2 = \frac{3}{2}, y_3 = \frac{3}{2} \right\}$$

katsayıları

$$y(x) = y_0 B_{0,3}(x) + y_1 B_{1,3}(x) + y_2 B_{2,3}(x) + y_3 B_{3,3}(x)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

formundaki tam çözüm bulunur.

ÖRNEK 5.4. Birinci mertebeden lineer olmayan

$$x\left(y'(x)\right)^2 - xy(x)y'(x) + y^3(x) = e^{3x}$$

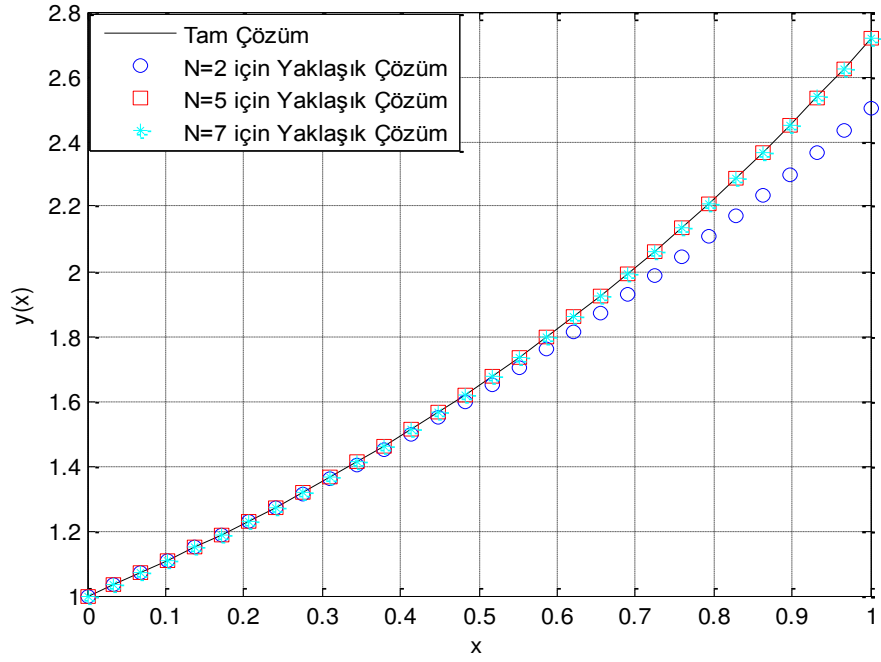
diferansiyel denklemi ve

$$2y(0) - y^2(0) - y^3(0) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

koşulu ele alındığında, verilen denklemin farklı N değerleri ($N = 2, 5, 7$) için bulunan yaklaşık çözümleri ile denklemin tam çözümü olan $y(x) = e^x$ in $[0, 1]$ aralığındaki karşılaştırılması Tablo 5.1, Şekil 5.1' de verilmiştir.

Tablo 5.1. Örnek 5.4.' ün Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması

x_i	Tam Çözüm	$N = 2$		$N = 5$		$N = 7$	
		$y(x_i)$	Mutlak Hatalar	$y(x_i)$	Mutlak Hatalar	$y(x_i)$	Mutlak Hatalar
0	1	1	0	1	0	1	0
0.1	1.105170918	1.105	1.70918E-4	1.105170917	1E-9	1.105170918	0
0.2	1.221402758	1.22	1.40275E-3	1.221402667	9.1E-8	1.221402758	0
0.3	1.349858807	1.345	4.85880E-3	1.34985775	1.058E-6	1.349858806	2E-9
0.4	1.491824697	1.48	1.11824E-2	1.491818667	6.031E-6	1.491824681	1.7E-8
0.5	1.648721271	1.625	2.37212E-2	1.648697917	2.335E-5	1.648721168	1.03E-7
0.6	1.822118801	1.78	4.21188E-2	1.822048	7.08E-5	1.822118354	4.46E-7
0.7	2.013752707	1.945	6.87527E-2	2.013571417	1.812E-4	2.013751158	1.549E-6
0.8	2.225540928	2.12	1.0554E-1	2.225130667	4.102E-4	2.225536366	4.562E-6
0.9	2.459603111	2.305	1.54603E-1	2.45875825	8.448E-4	2.459591263	1.184E-5
1	2.718281828	2.5	2.18281E-1	2.716666667	1.615E-3	2.718253968	2.786E-5



Şekil 5.1. Örnek 5.4.'ün $N = 2, 5, 7$ için Yaklaşık Çözüm Grafiği

ÖRNEK 5.5. İkinci mertebeden lineer olmayan [25, 42]

$$(x-1)y''(x) + xy'(x) - y^2(x) = -x^4 + x^3 + 2x - 2 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

diferansiyel denklemi

$$y(0) + y^2(0) = 0$$

$$y'(0) + y(0)y'(0) = 0$$

koşulları göz önüne alınıp bu denklemin $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 y_n B_{n,3}(x)$$

sonlu Bernstein serisiyle yaklaşıldığında,

$$a_0(x) = x, \quad a_2(x) = x-1, \quad a_3(x) = -1 \quad , \quad g(x) = -x^4 + x^3 + 2x - 2$$

$$a_1(x) = a_4(x) = a_5(x) = a_6(x) = a_7(x) = a_8(x) = a_9(x) = 0$$

olup $N = 3$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1 \right\}$$

olarak bulunur. Kısım 3.2.2'deki yöntem izlenerek verilen denklem ve koşullar temel matris denkleminde

$$\left[a_0(x_i) \mathbf{B}(x_i) \mathbf{I} + a_2(x_i) \mathbf{B}(x_i) \mathbf{H}^2 \right] \mathbf{Y} + \left[a_3(x_i) \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{B}}(x_i) \right] \bar{\mathbf{Y}} = g(x_i)$$

şeklindedir. Kapalı formdaki temel matris denklemini ve sınır koşulları temel matris denkleminde,

$$\mathbf{W}(x_i) \mathbf{Y} + \mathbf{V}(x_i) \bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{Z}(x_i) \bar{\bar{\mathbf{Y}}} = g(x_i) \quad (5.4)$$

olarak elde edilir. Sıralama noktaları (5.4) matris denkleminde yerine yazılarak yeni matris denklemini elde edilir. Böylece yeni temel matris denklemini,

$$\mathbf{WY}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}}^* + \mathbf{Z}\bar{\bar{\mathbf{Y}}}^* = \mathbf{G}$$

şeklinde olup bu denklemdeki matrisler

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{W}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{W}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{V}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{V}(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Z}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(0) \\ g\left(\frac{1}{3}\right) \\ g\left(\frac{2}{3}\right) \\ g(1) \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Koşulların matris denklemi

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(0)\mathbf{Y} + \{\mathbf{B}(0)\bar{\mathbf{B}}(0)\}\bar{\mathbf{Y}} &= [0] \\ \mathbf{B}(0)\mathbf{H}\mathbf{Y} + \{\mathbf{B}(0)\bar{\mathbf{B}}(0)\bar{\mathbf{H}}\}\bar{\mathbf{Y}} &= [0] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{Z}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(0) & 0 & 0 & 0 & , & \mathbf{V}(0) & 0 & 0 & 0 & : & \mathbf{Z}(0) & 0 & 0 & 0 & : & g(0) \\ 0 & \mathbf{W}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & , & 0 & \mathbf{V}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & : & 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & : & g\left(\frac{1}{3}\right) \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_0 & 0 & , & 0 & 0 & \mathbf{L}_0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 0 & : & \lambda_0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_1 & , & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L}_1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 & : & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradaki matrisler açık olarak

$$\mathbf{W}(0) = \begin{bmatrix} -6 & 12 & -6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{208}{81} & \frac{112}{27} & \frac{2}{27} & -\frac{107}{81} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{64}{729} & -\frac{32}{243} & -\frac{16}{243} & -\frac{8}{729} & -\frac{32}{243} & -\frac{16}{81} & -\frac{8}{81} & -\frac{4}{243} & -\frac{16}{243} & -\frac{8}{81} & -\frac{4}{81} & -\frac{2}{243} & -\frac{8}{729} & -\frac{4}{243} & -\frac{2}{243} & -\frac{1}{729} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(0) = -2, \quad g\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{106}{81}, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 0.$$

biçimindedir. Elde edilen sistemden bulunan

$$\left\{ y_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = \frac{1}{3}, y_3 = 1 \right\}$$

katsayıları

$$y(x) = y_0 B_{0,3}(x) + y_1 B_{1,3}(x) + y_2 B_{2,3}(x) + y_3 B_{3,3}(x)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = x^2$$

formundaki tam çözüm bulunur.

ÖRNEK 5.6. İkinci mertebeden lineer olmayan [25,42]

$$y''(x)y(x) + xy^2(x) + y(x)y'(x) = x^5 + 2x^2 - x - 2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

diferansiyel denklemi

$$y(0) - y^2(0) = 0$$

$$y'(0) + y(0)y'(0) = 0$$

koşulları göz önüne alınıp bu denklemin $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 y_n B_{n,3}(x)$$

sonlu Bernstein serisiyle yaklaşıldığında,

$$a_3(x) = x, a_4(x) = 1, a_6(x) = 1, \quad g(x) = x^5 + 2x^2 - x - 2$$

$$a_0(x) = a_1(x) = a_2(x) = a_5(x) = a_7(x) = a_8(x) = a_9(x) = 0$$

olup $N = 3$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1 \right\}$$

olarak bulunur. Kısım 3.2.2'deki yöntem izlenerek verilen denklem ve koşullar temel matris denkleminde

$$\left[a_3(x_i) \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{B}}(x_i) + a_4(x_i) \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{B}}(x_i) \bar{\mathbf{H}} + a_6(x_i) \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{B}}(x_i) \bar{\bar{\mathbf{H}}} + \right] \bar{\mathbf{Y}} = g(x_i)$$

şeklindedir. Kapalı formdaki temel matris denklemini ve sınır koşulları temel matris denkleminde,

$$\mathbf{W}(x_i) \mathbf{Y} + \mathbf{V}(x_i) \bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{Z}(x_i) \bar{\bar{\mathbf{Y}}} = g(x_i) \quad (5.5)$$

olarak elde edilir. Sıralama noktaları (5.4) matris denkleminde yerine yazılarak yeni matris denklemini elde edilir. Böylece yeni temel matris denklemini,

$$\mathbf{WY}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}}^* + \mathbf{Z}\bar{\bar{\mathbf{Y}}}^* = \mathbf{G}$$

şeklinde olup bu denklemdeki matrisler

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{W}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{W}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{V}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{V}(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Z}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(0) \\ g\left(\frac{1}{3}\right) \\ g\left(\frac{2}{3}\right) \\ g(1) \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Koşulların matris denklemini

$$\mathbf{B}(0) \mathbf{Y} - \{\mathbf{B}(0) \bar{\mathbf{B}}(0)\} \bar{\mathbf{Y}} = [0]$$

$$\mathbf{B}(0) \mathbf{H} \mathbf{Y} + \{\mathbf{B}(0) \bar{\mathbf{B}}(0) \bar{\mathbf{H}}\} \bar{\mathbf{Y}} = [0]$$

olarak elde edilir. Arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{Z}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(0) & 0 & 0 & 0 & , & \mathbf{V}(0) & 0 & 0 & 0 & : & \mathbf{Z}(0) & 0 & 0 & 0 & : & g(0) \\ 0 & \mathbf{W}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & , & 0 & \mathbf{V}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & : & 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & : & g\left(\frac{1}{3}\right) \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_0 & 0 & , & 0 & 0 & \mathbf{L}_0 & 0 & : & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & : & \lambda_0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_1 & , & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L}_1 & : & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & : & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradaki matrisler açık olarak

$$\mathbf{W}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad , \quad \mathbf{W}\left(\frac{1}{3}\right) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{V}(0) = [3 \ -9 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{v}\left(\frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1792}{2187} \ -\frac{1264}{729} \ \frac{232}{729} \ \frac{1520}{2187} \ \frac{896}{729} \ -\frac{632}{243} \ \frac{116}{243} \ \frac{760}{729} \ \frac{448}{729} \ -\frac{316}{243} \ \frac{58}{243} \ \frac{380}{729} \ \frac{224}{2187} \ -\frac{158}{729} \ \frac{29}{729} \ \frac{190}{2187} \right]$$

$$\mathbf{K}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad , \quad \mathbf{K}_1 = [-3 \ 3 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{L}_0 = [-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{L}_1 = [-3 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$g(0) = -2 \quad , \quad g\left(\frac{1}{3}\right) = -2.106995885 \quad , \quad \lambda_0 = 0 \quad , \quad \lambda_1 = 0.$$

biçimindedir. Elde edilen sistemden bulunan

$$\left\{ y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = \frac{2}{3}, y_3 = 0 \right\}$$

katsayıları

$$y(x) = y_0 B_{0,3}(x) + y_1 B_{1,3}(x) + y_2 B_{2,3}(x) + y_3 B_{3,3}(x)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = 1 - x^2$$

formundaki tam çözüm bulunur.

ÖRNEK 5.7. İkinci mertebeden lineer olmayan [25, 42]

$$y''(x)y(x) - y^2(x) + xy(x) = xe^x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

diferansiyel denklemi

$$y(0) + y(0)y'(0) = 2$$

$$y'(0) - 2y^2(0) = -1$$

koşulları göz önüne alınıp bu denklemin $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 y_n B_{n,3}(x)$$

sonlu Bernstein serisiyle yaklaşıldığında,

$$a_0(x) = x, a_3(x) = -1, a_6(x) = 1, \quad g(x) = xe^x$$

$$a_1(x) = a_2(x) = a_4(x) = a_5(x) = a_7(x) = a_8(x) = a_9(x) = 0$$

olup $N = 3$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1 \right\}$$

olarak bulunur. Kısım 3.2.2'deki yöntem izlenerek verilen denklem ve koşullar temel matris denkleminde

$$\left[a_0(x_i) \mathbf{B}(x_i) \mathbf{I} \right] \mathbf{Y} + \left[a_3(x_i) \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{B}}(x_i) + a_6(x_i) \mathbf{B}(x_i) \bar{\mathbf{B}}(x_i) \bar{\bar{\mathbf{H}}} + \right] \bar{\mathbf{Y}} = g(x_i)$$

şeklindedir. Kapalı formdaki temel matris denklemi ve sınır koşulları temel matris denkleminde,

$$\mathbf{W}(x_i) \mathbf{Y} + \mathbf{V}(x_i) \bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{Z}(x_i) \bar{\bar{\mathbf{Y}}} = g(x_i) \quad (5.6)$$

olarak elde edilir. Sıralama noktaları (5.6) matris denkleminde yerine yazılarak yeni matris denklemi elde edilir. Böylece yeni temel matris denklemi,

$$\mathbf{W}\mathbf{Y}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}}^* + \mathbf{Z}\bar{\bar{\mathbf{Y}}}^* = \mathbf{G}$$

şeklinde olup bu denklemdeki matrisler

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{W}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{W}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{V}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{V}(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Z}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(0) \\ g\left(\frac{1}{3}\right) \\ g\left(\frac{2}{3}\right) \\ g(1) \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Koşulların matris denklemi

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{Y} + \{\mathbf{B}(0)\bar{\mathbf{B}}(0)\bar{\mathbf{H}}\}\bar{\mathbf{Y}} = [2]$$

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{H}\mathbf{Y} - 2\{\mathbf{B}(0)\bar{\mathbf{B}}(0)\}\bar{\mathbf{Y}} = [-1]$$

olarak elde edilir. Arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{Z}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(0) & 0 & 0 & 0 & , & \mathbf{V}(0) & 0 & 0 & 0 & : & \mathbf{Z}(0) & 0 & 0 & 0 & : & g(0) \\ 0 & \mathbf{W}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & , & 0 & \mathbf{V}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & : & 0 & \mathbf{Z}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & : & g\left(\frac{1}{3}\right) \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_0 & 0 & , & 0 & 0 & \mathbf{L}_0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 0 & : & \lambda_0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_1 & , & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L}_1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 & : & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradaki matrisler açık olarak

$$\mathbf{W}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad \mathbf{W}\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{8}{81} & \frac{4}{27} & \frac{2}{27} & \frac{1}{81} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}(0) = [5 \ -12 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{v}\left(\frac{1}{3}\right)=\begin{bmatrix} \frac{800}{729} & -\frac{464}{243} & -\frac{16}{243} & \frac{424}{729} & \frac{400}{243} & -\frac{232}{81} & -\frac{8}{81} & \frac{212}{243} & \frac{200}{243} & -\frac{116}{81} & -\frac{4}{81} & \frac{106}{243} & \frac{100}{729} & -\frac{58}{243} & -\frac{2}{243} & \frac{53}{729} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_0=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_1=\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_0=\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_1=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(0)=0 \quad , \quad g\left(\frac{1}{3}\right)=0.4652041417 \quad , \quad \lambda_0=2 \quad , \quad \lambda_1=-1.$$

biçimindedir. Elde edilen sistemden bulunan

$$\left\{ y_0=1, y_1=\frac{4}{3}, y_2=\frac{11}{6}, y_3=\frac{8}{3} \right\}$$

katsayıları

$$y(x)=y_0 B_{0,3}(x)+y_1 B_{1,3}(x)+y_2 B_{2,3}(x)+y_3 B_{3,3}(x)$$

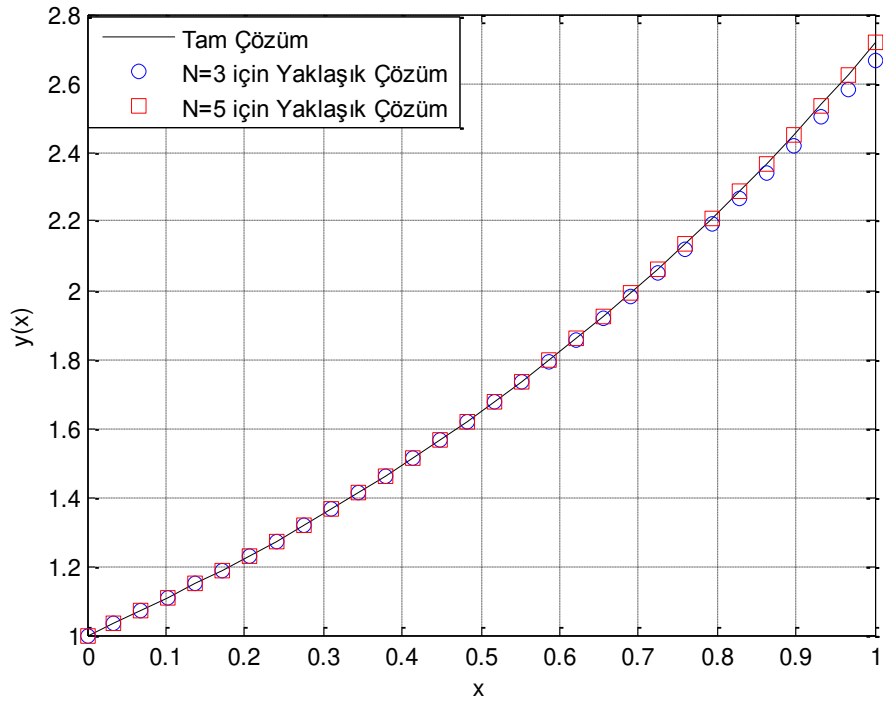
ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

Bernstein polinom çözümü elde edilir. Bu elde edilen çözüm e^x 'in Taylor açılımının ilk dört terimidir. Benzer şekilde işlemler yapılarak $N=5$ için de yaklaşık çözüm elde edilir. Bu yaklaşık çözümler ile denklemin tam çözümü olan $y(x)=e^x$ 'in $[0,1]$ aralığındaki karşılaştırılması Tablo 5.2. , Şekil 5.2.'de verilmiştir.

Tablo 5.2. Örnek 5.7.'nin Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması

x_i	Tam Çözüm	$N = 3$ Nümerik Çözüm	$N = 5$ Nümerik Çözüm	$N = 3$ Hata	$N = 5$ Hata
0	1	1	1	0	0
0.1	1.105170918	1.105166667	1.105170917	4.251E-6	1E-9
0.2	1.221402758	1.221333333	1.221402672	6.9425E-5	8.6E-8
0.3	1.349858808	1.3495	1.349857778	3.58808E-4	1.03E-6
0.4	1.491824698	1.490666667	1.491818763	1.15803E-3	5.935E-6
0.5	1.648721271	1.645833333	1.648698171	2.88793E-3	2.31E-5
0.6	1.822118800	1.816	1.822048567	6.1188E-3	7.0233E-5
0.7	2.013752707	2.002166667	2.013572544	1.15861E-2	1.80163E-4
0.8	2.225540928	2.205333333	2.225132719	2.02075E-2	4.08209E-4
0.9	2.459603111	2.4265	2.458761744	3.31031E-2	8.41367E-4
1	2.718281828	2.666666667	2.716672308	5.16151E-2	1.60952E-3

**Şekil 5.2. Örnek 5.7.'nin $N = 3, 5$ için Yaklaşık Çözüm Grafiği**

ÖRNEK 5.8. İkinci mertebeden lineer olmayan

$$y^3(x) - y'(x)y''(x) = e^{-3x} - e^{-2x}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

diferansiyel denklemi ve

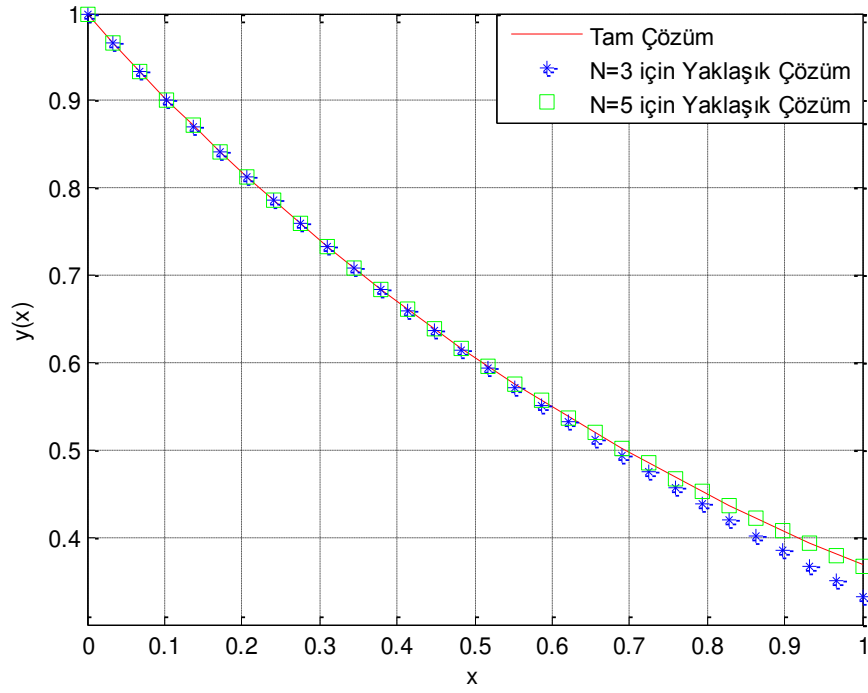
$$y(0) + y^2(0) = 2$$

$$y'(0) - y(0)y'(0) = 0$$

koşulları ile ele alındığında, verilen denklemin farklı N değerleri ($N = 3, 5$) için bulunan yaklaşık çözümleri ile denklemin tam çözümü olan $y(x) = e^{-x}$, in $[0, 1]$ aralığındaki karşılaştırılması Tablo 5.3. , Şekil 5.3.'de verilmiştir.

Tablo 5.3. Örnek 5.8.' in Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması

x_i	Tam Çözüm	$N = 3$		$N = 5$	
		$y(x_i)$	Mutlak Hatalar	$y(x_i)$	Mutlak Hatalar
0	1	1	0	1	0
0.1	0.904837418	0.9048333333	4.0847E-6	0.9048374157	2.3E-9
0.2	0.8187307531	0.8186666667	6.40864E-5	0.81873066	9.31E-8
0.3	0.7408182207	0.7405	3.18221E-4	0.7408172317	9.89E-7
0.4	0.670320046	0.6693333333	9.86713E-4	0.6703146333	5.4127E-6
0.5	0.6065306597	0.6041666667	2.36399E-3	0.6065103704	2.02893E-5
0.6	0.5488116361	0.544	4.81164E-3	0.5487519518	5.96843E-5
0.7	0.4965853038	0.4878333333	8.75197E-3	0.4964368889	1.48415E-4
0.8	0.4493289641	0.4346666667	1.46622E-2	0.4490026956	3.26268E-4
0.9	0.4065696597	0.3835	2.30696E-2	0.4059168883	6.52771E-4
1	0.3678794412	0.3333333333	3.45461E-2	0.366666985	1.21245E-3



Şekil 5.3. Örnek 5.8.’ in $N = 3, 5$ için Yaklaşık Çözüm Grafiği

ÖRNEK 5.9. Birinci mertebeden lineer olmayan

$$\left. \begin{aligned} ty_1' + y_2' - y_1 y_2 &= t^4 - 2t^3 - t^2 + 3t - 1 \\ y_1' + 2ty_2' + y_1 y_2 &= -t^4 + 2t^3 + 3t^2 - 4t + 1 \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned} y_1(0) - y_1(1) y_2(1) &= 0 \\ y_2(0) + y_2(1) y_1(1) &= 0 \end{aligned}$$

sınır koşulları göz önüne alındığında, $N = 2$ için sıralama noktaları

$$\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1 \right\} \text{ olarak bulunur. (4.8) 'den}$$

$$\left\{ \begin{aligned} t[\mathbf{B}(t)\mathbf{H}]\mathbf{Y}_1 + [\mathbf{B}(t)\mathbf{H}]\mathbf{Y}_2 - \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} &= t^4 - 2t^3 - t^2 + 3t - 1 \\ [\mathbf{B}(t)\mathbf{H}]\mathbf{Y}_1 + 2t[\mathbf{B}(t)\mathbf{H}]\mathbf{Y}_2 + \bar{\mathbf{Y}}_{j,i} &= -t^4 + 2t^3 + 3t^2 - 4t + 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^2 & 2t(1-t) & t^2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{C}_1(t) = t[\mathbf{B}(t)\mathbf{H}] \Rightarrow \mathbf{C}_1(t) = \begin{bmatrix} -2t + 2t^2 & 2t - 4t^2 & 2t^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{C}_2(t) = \begin{bmatrix} -2 + 2t & 2 - 4t & 2t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{D}_1(t) = \begin{bmatrix} -2 + 2t & 2 - 4t & 2t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2(t) = 2t[\mathbf{B}(t)\mathbf{H}] \Rightarrow \mathbf{D}_2(t) = \begin{bmatrix} -4t + 4t^2 & 4t - 8t^2 & 4t^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Sistemin kapalı formdaki temel matris denklemi ve sınır koşulunun temel matris denklemi,

$$\mathbf{P}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{N}(t)\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(t) \quad (5.7)$$

ve koşullar

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{Y}_1 - \mathbf{B}(1)\bar{\mathbf{B}}(1)\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} = 0$$

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}(1)\bar{\mathbf{B}}(1)\bar{\mathbf{Y}}_{2,1} = 0$$

olarak elde edilir. Buradaki matrisler

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} -2t + 2t^2 & 2t - 4t^2 & 2t^2 & -2 + 2t & 2 - 4t & 2t \\ -2 + 2t & 2 - 4t & 2t & -4t + 4t^2 & 4t - 8t^2 & 4t^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} t^4 - 2t^3 - t^2 + 3t - 1 \\ -t^4 + 2t^3 + 3t^2 - 4t + 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_1(t) = \begin{bmatrix} -(1-t)^4 & -2t(1-t)^3 & -t^2(1-t)^2 & -2t(1-t)^3 & -4t^2(1-t)^2 & -2t^3(1-t) & -t^2(1-t)^2 & -2t^3(1-t) & -t^4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_2(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^4 & 2t(1-t)^3 & t^2(1-t)^2 & 2t(1-t)^3 & 4t^2(1-t)^2 & 2t^3(1-t) & t^2(1-t)^2 & 2t^3(1-t) & t^4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{1,0} & y_{1,1} & y_{1,2} & y_{2,0} & y_{2,1} & y_{2,2} \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{2,0} \mathbf{Y}_1 & y_{2,1} \mathbf{Y}_1 & y_{2,2} \mathbf{Y}_1 & y_{1,0} \mathbf{Y}_2 & y_{1,1} \mathbf{Y}_2 & y_{1,2} \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}^T$$

ve

$$\begin{aligned} [1 \ 0 \ 0] \mathbf{Y}_1 &= 0, & [1 \ 0 \ 0] \mathbf{Y}_2 &= 0 \\ [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1] \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} &= 0 \\ [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Sıralama noktaları (5.7) matris denkleminde yerine yazılarak yeni denklem sistemi elde edilir. Böylece yeni temel matris denklemini,

$$\mathbf{W} \mathbf{Y}^* + \mathbf{V} \bar{\mathbf{Y}}^* = \mathbf{G}^*$$

şeklinde olup bu denklemdeki matrisler

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(0) \\ \mathbf{G}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{G}(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^* = [\mathbf{Y}_1 \ \mathbf{Y}_2 \ \mathbf{Y}_1 \ \mathbf{Y}_2 \ \mathbf{Y}_1 \ \mathbf{Y}_2]_{18 \times 1}^T, \quad \bar{\mathbf{Y}}^* = [\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \ \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \ \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1}]_{54 \times 1}^T,$$

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}(1)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^*=\begin{bmatrix}-1 & 1 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & 1\end{bmatrix}^T$$

ve koşulun temel matrisi

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}} : \tilde{\mathbf{G}}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) & 0 & 0 & ; \mathbf{N}(0) & 0 & 0 & : \mathbf{G}(0) \\ 0 & \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & ; 0 & \mathbf{N}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & : \mathbf{G}\left(\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & ; 0 & 0 & \mathbf{L} & : \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

veya buna karşılık gelen matris denklemi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & & & & & & \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}$$

[illegible]

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen sistemden $\{y_{1,0}, y_{1,1}, y_{1,2}, y_{2,0}, y_{2,1}, y_{2,2}\}$ katsayıları

$$\left\{ y_{1,0} = 0, y_{1,1} = \frac{1}{2}, y_{1,2} = 0, y_{2,0} = 0, y_{2,1} = -\frac{1}{2}, y_{2,2} = 0 \right\}$$

olarak elde edilir. Bu katsayılar,

$$y_1(t) = y_{1,0}B_{0,2}(t) + y_{1,1}B_{1,2}(t) + y_{1,2}B_{2,2}(t)$$

$$y_2(t) = y_{2,0}B_{0,2}(t) + y_{2,1}B_{1,2}(t) + y_{2,2}B_{2,2}(t)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y_1(t) = t - t^2, \quad y_2(t) = t^2 - t$$

formundaki tam çözüm bulunur.

ÖRNEK 5.10. Birinci mertebeden lineer olmayan

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2' - ty_1y_2 = t^5 - 2t^4 + t^3 - 2t + 1 \\ y_1' + 2ty_2' - y_1y_2 = t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 4t - 1 \end{array} \right\}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

diferansiyel denklem sistemi

$$y_1(0) + y_1(1)y_2(1) = 0$$

$$y_2(1) + y_2(0)y_1(0) = 0$$

sınır koşulları göz önüne alındığında, $N = 2$ için sıralama noktaları

$$\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1 \right\} \text{ olarak bulunur. (4.8) 'den}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{B}(t)\mathbf{H}] \mathbf{Y}_2 - t\bar{\mathbf{Y}}_{i,j} = t^5 - 2t^4 + t^3 - 2t + 1 \\ [\mathbf{B}(t)\mathbf{H}] \mathbf{Y}_1 + 2t[\mathbf{B}(t)\mathbf{H}] \mathbf{Y}_2 - \bar{\mathbf{Y}}_{j,i} = t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 4t - 1 \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^2 & 2t(1-t) & t^2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{C}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{C}_2(t) = \begin{bmatrix} -2+2t & 2-4t & 2t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{D}_1(t) = \begin{bmatrix} -2+2t & 2-4t & 2t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2(t) = 2t[\mathbf{B}(t)\mathbf{H}] \Rightarrow \mathbf{D}_2(t) = \begin{bmatrix} -4t+4t^2 & 4t-8t^2 & 4t^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Sistemin kapalı formdaki temel matris denklemi ve sınır koşulunun temel matris denklemi,

$$\mathbf{P}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{N}(t)\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(t) \quad (5.8)$$

ve koşullar

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{Y}_1 + \mathbf{B}(1)\bar{\mathbf{B}}(1)\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} = 0$$

$$\mathbf{B}(1)\mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}(0)\bar{\mathbf{B}}(0)\bar{\mathbf{Y}}_{2,1} = 0$$

olarak elde edilir. Buradaki matrisler

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2+2t & 2-4t & 2t \\ -2+2t & 2-4t & 2t & -4t+4t^2 & 4t-8t^2 & 4t^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} t^5 - 2t^4 + t^3 - 2t + 1 \\ t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 4t - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_1(t) = \begin{bmatrix} -t(1-t)^4 & -2t^2(1-t)^3 & -t^3(1-t)^2 & -2t^2(1-t)^3 & -4t^3(1-t)^2 & -2t^4(1-t) & -t^3(1-t)^2 & -2t^4(1-t) & -t^5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_2(t) = \begin{bmatrix} -(1-t)^4 & -2t(1-t)^3 & -t^2(1-t)^2 & -2t(1-t)^3 & -4t^2(1-t)^2 & -2t^3(1-t) & -t^2(1-t)^2 & -2t^3(1-t) & -t^4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{1,0} & y_{1,1} & y_{1,2} & y_{2,0} & y_{2,1} & y_{2,2} \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{2,0}\mathbf{Y}_1 & y_{2,1}\mathbf{Y}_1 & y_{2,2}\mathbf{Y}_1 & y_{1,0}\mathbf{Y}_2 & y_{1,1}\mathbf{Y}_2 & y_{1,2}\mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}^T$$

ve

$$\begin{aligned}
[1 \ 0 \ 0] \mathbf{Y}_1 &= 0 \quad , \quad [0 \ 0 \ 1] \mathbf{Y}_2 = 0 \\
[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} &= 0 \\
[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} &= 0
\end{aligned}$$

şeklindedir. Sıralama noktaları (5.8) matris denkleminde yerine yazılarak yeni denklem sistemi elde edilir. Böylece yeni temel matris denklemini,

$$\mathbf{W} \mathbf{Y}^* + \mathbf{V} \bar{\mathbf{Y}}^* = \mathbf{G}^*$$

şeklinde olup bu denklemdeki matrisler

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(0) \\ \mathbf{G}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{G}(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^* = [\mathbf{Y}_1 \ \mathbf{Y}_2 \ \mathbf{Y}_1 \ \mathbf{Y}_2 \ \mathbf{Y}_1 \ \mathbf{Y}_2]_{18 \times 1}^T, \quad \bar{\mathbf{Y}}^* = [\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \ \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \ \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1}]_{54 \times 1}^T,$$

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{32} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{32} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{32} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

ve koşulun temel matrisi

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}} : \tilde{\mathbf{G}}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) & 0 & 0 & ; \mathbf{N}(0) & 0 & 0 & : \mathbf{G}(0) \\ 0 & \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & ; 0 & \mathbf{N}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & : \mathbf{G}\left(\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & ; 0 & 0 & \mathbf{L} & : \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

veya buna karşılık gelen matris denklemi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & & & & & \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{32} \\ \frac{1}{16} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen sistemden $\{y_{1,0}, y_{1,1}, y_{1,2}, y_{2,0}, y_{2,1}, y_{2,2}\}$ katsayıları

$$\left\{ y_{1,0} = 0, y_{1,1} = -\frac{1}{2}, y_{1,2} = 0, y_{2,0} = 0, y_{2,1} = \frac{1}{2}, y_{2,2} = 0 \right\}$$

olarak elde edilir. Bu katsayılar,

$$y_1(t) = y_{1,0}B_{0,2}(t) + y_{1,1}B_{1,2}(t) + y_{1,2}B_{2,2}(t)$$

$$y_2(t) = y_{2,0}B_{0,2}(t) + y_{2,1}B_{1,2}(t) + y_{2,2}B_{2,2}(t)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y_1(t) = t^2 - t, \quad y_2(t) = t - t^2$$

formundaki tam çözüm bulunur.

ÖRNEK 5.11. Birinci mertebeden lineer olmayan

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' - y_2' - t^2 y_1 y_2 = e^t + e^{-t} - t^2 \\ y_1' + y_2' + (t-1) y_1 y_2 = e^t - e^{-t} + t - 1 \end{array} \right\}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

diferansiyel denklem sistemi

$$y_1(0) - y_1(1) y_2(1) = 0$$

$$y_2(0) + y_2(1) y_1(1) = 0$$

sınır koşulları göz önüne alındığında, $N = 3$ için sıralama noktaları

$$\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = \frac{2}{3}, t_3 = 1 \right\} \text{ olarak bulunur. (4.8) 'den}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{B}(t)\mathbf{H}] \mathbf{Y}_1 - [\mathbf{B}(t)\mathbf{H}] \mathbf{Y}_2 - t^2 \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} = e^t + e^{-t} - t^2 \\ [\mathbf{B}(t)\mathbf{H}] \mathbf{Y}_1 + [\mathbf{B}(t)\mathbf{H}] \mathbf{Y}_2 + (t-1) \bar{\mathbf{Y}}_{j,i} = e^t - e^{-t} + t - 1 \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}(t) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{C}_1(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{C}_1(t) = \begin{bmatrix} -3+6t-3t^2 & 3-12t+9t^2 & 6t-9t^2 & 3t^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2(t) = -[\mathbf{B}(t)\mathbf{H}] \Rightarrow \mathbf{C}_2(t) = \begin{bmatrix} +3-6t+3t^2 & -3+12t-9t^2 & -6t+9t^2 & -3t^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{D}_1(t) = \begin{bmatrix} -3+6t-3t^2 & 3-12t+9t^2 & 6t-9t^2 & 3t^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{D}_2(t) = \begin{bmatrix} -3+6t-3t^2 & 3-12t+9t^2 & 6t-9t^2 & 3t^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. Sistemin kapalı formdaki temel matris denklemi ve sınır koşulunun temel matris denklemi,

$$\mathbf{P}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{N}(t)\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(t) \quad (5.9)$$

ve koşullar

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{Y}_1 - \mathbf{B}(1)\bar{\mathbf{B}}(1)\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} = 0$$

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}(1)\bar{\mathbf{B}}(1)\bar{\mathbf{Y}}_{2,1} = 0$$

olarak elde edilir. Buradaki matrisler

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} -3+6t-3t^2 & 3-12t+9t^2 & 6t-9t^2 & 3t^2 & +3-6t+3t^2 & -3+12t-9t^2 & -6t+9t^2 & -3t^2 \\ -3+6t-3t^2 & 3-12t+9t^2 & 6t-9t^2 & 3t^2 & -3+6t-3t^2 & 3-12t+9t^2 & 6t-9t^2 & 3t^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} e^t + e^{-t} - t^2 \\ e^t - e^{-t} + t - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 32}$$

$$\mathbf{N}_1(t) = -t^2 [\mathbf{B}(t) \bar{\mathbf{B}}(t)], \quad \mathbf{N}_2(t) = (t-1) [\mathbf{B}(t) \bar{\mathbf{B}}(t)],$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{1,0} & y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} & y_{2,0} & y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{2,0} \mathbf{Y}_1 & y_{2,1} \mathbf{Y}_1 & y_{2,2} \mathbf{Y}_1 & y_{2,3} \mathbf{Y}_1 & y_{1,0} \mathbf{Y}_2 & y_{1,1} \mathbf{Y}_2 & y_{1,2} \mathbf{Y}_2 & y_{1,3} \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}^T$$

ve

$$\begin{aligned} [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{Y}_1 &= 0 \quad , \quad [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{Y}_2 = 0 \\ [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1] \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} &= 0 \\ [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ile tanımlanır. Sıralama noktaları (5.9) matris denkleminde yerine yazılarak yeni denklem sistemi

$$\mathbf{WY}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}}^* = \mathbf{G}^*$$

olarak elde edilir. Arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}} : \tilde{\mathbf{G}}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) & 0 & 0 & 0 & , & \mathbf{N}(0) & 0 & 0 & 0 & : & \mathbf{G}(0) \\ 0 & \mathbf{P}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & , & 0 & \mathbf{N}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & : & \mathbf{G}\left(\frac{1}{3}\right) \\ 0 & 0 & \mathbf{P}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 & , & 0 & 0 & \mathbf{N}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 & : & \mathbf{G}\left(\frac{2}{3}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K} & , & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & : & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buna karşılık gelen matris denkleminde elde edilen

$\{y_{1,0}, y_{1,1}, y_{1,2}, y_{1,3}, y_{2,0}, y_{2,1}, y_{2,2}, y_{2,3}\}$ Bernstein katsayıları

$$\left\{ y_{1,0} = 1, y_{1,1} = \frac{4}{3}, y_{1,2} = \frac{11}{6}, y_{1,3} = \frac{8}{3}, y_{2,0} = 1, y_{2,1} = \frac{2}{3}, y_{2,2} = \frac{1}{2}, y_{2,3} = \frac{1}{3} \right\}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar,

$$y_1(t) = y_{1,0}B_{0,3}(t) + y_{1,1}B_{1,3}(t) + y_{1,2}B_{2,3}(t) + y_{1,3}B_{3,3}(t)$$

$$y_2(t) = y_{2,0}B_{0,3}(t) + y_{2,1}B_{1,3}(t) + y_{2,2}B_{2,3}(t) + y_{2,3}B_{3,3}(t)$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$y_1(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \quad , \quad y_2(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}$$

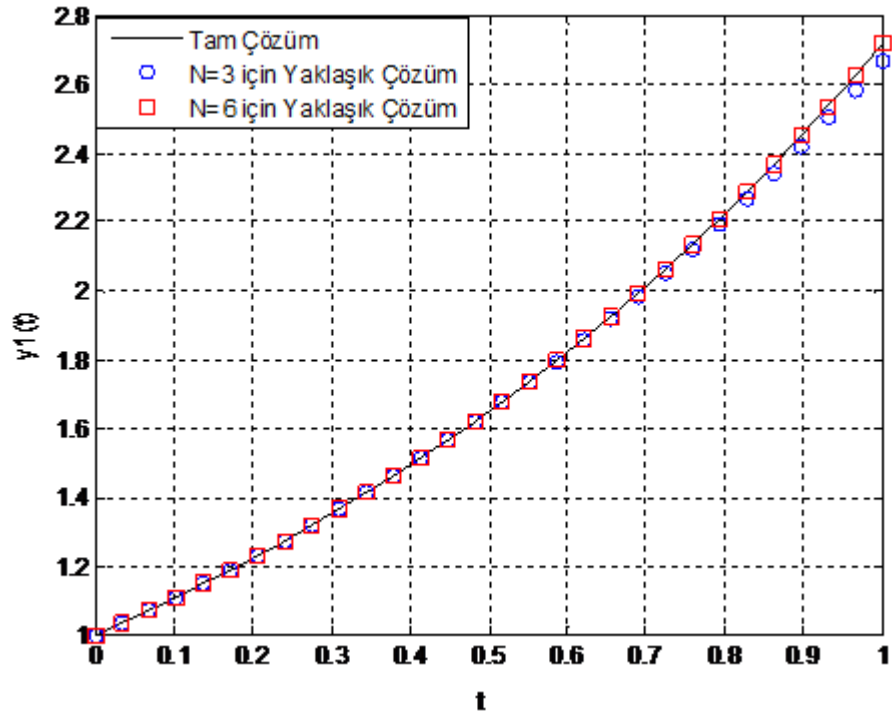
Bernstein polinom çözümleri elde edilir. Bu elde edilen çözümler $y_1(t) = e^t$ ve $y_2(t) = e^{-t}$ 'nin Taylor açılımının ilk dört terimidir. Benzer şekilde işlemler yapılarak $N = 6$ için de yaklaşık çözümler elde edilir. Bu yaklaşık çözümler ile denklemin tam çözümlerinin $[0,1]$ aralığındaki karşılaştırılması Tablo 5.4. , Tablo 5.5. ve Şekil 5.4., Şekil 5.5.'de verilmiştir.

Tablo 5.4. Örnek 5.11.' in $y_1(t)$ için Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması

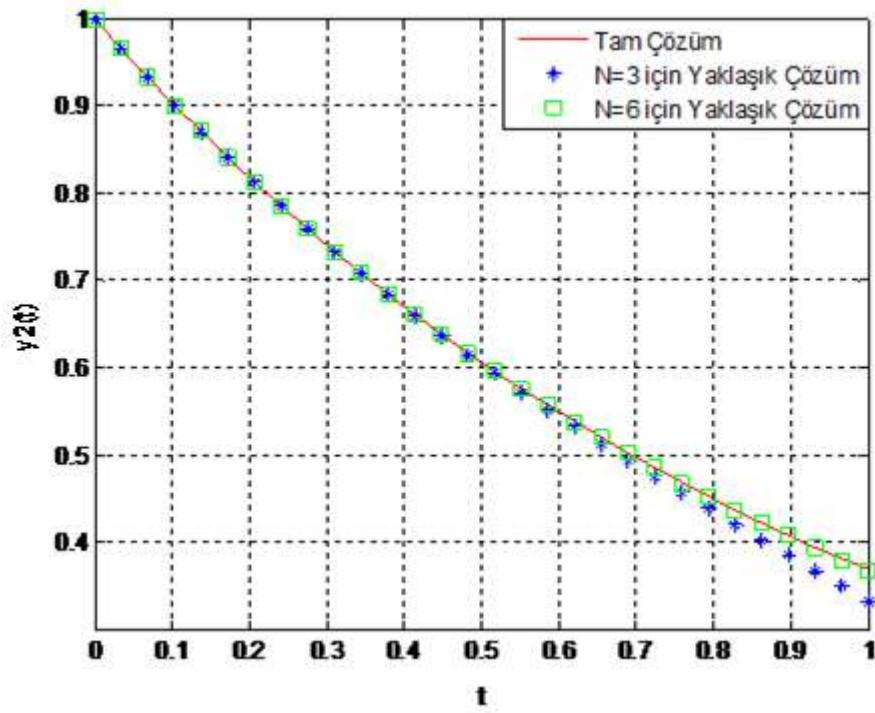
t_i	Tam Çözüm	$N = 3$	Mutlak	$N = 6$	Mutlak
		$y_{1,3}(t_i)$	Hata	$y_{1,6}(t_i)$	Hata
0	1	1	0	1	0
0.1	1.105170918	1.105166667	4.251E-6	1.105170918	0
0.2	1.221402758	1.221333333	6.9425E-5	1.221402756	2E-9
0.3	1.349858808	1.3495	3.58808E-4	1.349858763	4.5E-8
0.4	1.491824698	1.490666667	1.158031E-3	1.491824356	3.42E-7
0.5	1.648721271	1.645833333	2.887938E-3	1.648719618	1.653E-6
0.6	1.8221188	1.816	6.118E-3	1.8221128	6E-6
0.7	2.013752707	2.002166667	1.158604E-2	2.013734818	1.7889E-5
0.8	2.225540928	2.205333333	2.020759E-2	2.225494756	4.6172E-5
0.9	2.459603111	2.4265	3.310311E-2	2.459496363	1.06748E-4
1	2.718281828	2.666666667	5.161516E-2	2.7180055556	2.26272E-4

Tablo 5.5. Örnek 5.11.' in $y_2(t)$ için Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması

t_i	Tam Çözüm	$N = 3$	Mutlak	$N = 6$	Mutlak
		$y_{2,3}(t_i)$	Hata	$y_{2,6}(t_i)$	Hata
0	1	1	0	1	0
0.1	0.904837418	0.9048333333	4.0847E-6	0.9048374181	1E-10
0.2	0.8187307531	0.8186666667	6.40864E-5	0.8187307556	2.5E-9
0.3	0.7408182207	0.7405	3.182207E-4	0.7408182625	4.18E-8
0.4	0.670320046	0.6693333333	9.867127E-4	0.6703203556	3.096E-7
0.5	0.6065306597	0.6041666667	2.363993E-3	0.6065321181	1.4584E-6
0.6	0.5488116361	0.544	4.811636E-3	0.5488168	5.1639E-6
0.7	0.4965853038	0.4878333333	8.751971E-3	0.4966003181	1.50143E-5
0.8	0.4493289641	0.4346666667	1.466229E-2	0.4493667556	3.77915E-5
0.9	0.4065696597	0.3835	2.306965E-2	0.4066548625	8.52028E-5
1	0.3678794412	0.3333333333	3.45461E-2	0.3680555556	1.761144E-4



Şekil 5.4. Örnek 5.11. $y_1(t)$ 'nin $N = 3,6$ için Yaklaşık Çözüm Grafiği



Şekil 5.5. Örnek 5.11. $y_2(t)$ 'nin $N = 3,6$ için Yaklaşık Çözüm Grafiği

ÖRNEK 5.12. İkinci mertebeden lineer olmayan [29]

$$\left. \begin{aligned} y_1'' + ty_1 + ty_2 &= 2 \\ y_2'' + 2ty_2 + 2ty_1 &= -2 \end{aligned} \right\} , \quad 0 \leq t \leq 1$$

diferansiyel denklem sistemi $y_1(0) = y_1(1) = 0$ ve $y_2(0) = y_2(1) = 0$ sınır koşulları göz önüne alındığında,

$N = 2$ için sıralama noktaları $\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1 \right\}$ olarak bulunur. (4.23) 'den

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 + t\mathbf{B}(t)]\mathbf{Y}_1 + t\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}_2 &= 2 \\ 2t\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}_1 + [\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 + 2t\mathbf{B}(t)]\mathbf{Y}_2 &= -2 \end{aligned} \right\}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^2 & 2t(1-t) & t^2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{C}_1(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 + t\mathbf{B}(t) \Rightarrow \mathbf{C}_1(t) = \begin{bmatrix} t - 2t^2 + t^3 + 2 & 2t^2 - 2t^3 - 4 & t^3 + 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2(t) = t\mathbf{B}(t) \Rightarrow \mathbf{C}_2(t) = \begin{bmatrix} t - 2t^2 + t^3 & 2t^2 - 2t^3 & t^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1(t) = 2t\mathbf{B}(t) \Rightarrow \mathbf{D}_1(t) = \begin{bmatrix} 2t - 4t^2 + 2t^3 & 4t^2 - 4t^3 & 2t^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 + 2t\mathbf{B}(t) \Rightarrow \mathbf{D}_2(t) = \begin{bmatrix} 2t - 4t^2 + 2t^3 + 2 & 4t^2 - 4t^3 - 4 & 2t^3 + 2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Sistemin kapalı formdaki temel matris denklemi ve sınır koşulunun temel matris denklemi,

$$\mathbf{P}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{N}(t)\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(t) \quad (5.10)$$

ve koşullar

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{Y}_1 = 0, \quad \mathbf{B}(1)\mathbf{Y}_1 = 0$$

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{Y}_2 = 0, \quad \mathbf{B}(1)\mathbf{Y}_2 = 0$$

olarak elde edilir. Buradaki matrisler

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} t - 2t^2 + t^3 + 2 & 2t^2 - 2t^3 - 4 & t^3 + 2 & t - 2t^2 + t^3 & 2t^2 - 2t^3 & t^3 \\ 2t - 4t^2 + 2t^3 & 4t^2 - 4t^3 & 2t^3 & 2t - 4t^2 + 2t^3 + 2 & 4t^2 - 4t^3 - 4 & 2t^3 + 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_1(t) = \mathbf{N}_2(t) = 0$$

$$\mathbf{Y} = [y_{1,0} \quad y_{1,1} \quad y_{1,2} \quad y_{2,0} \quad y_{2,1} \quad y_{2,2}]^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{2,0} \mathbf{Y}_1 & y_{2,1} \mathbf{Y}_1 & y_{2,2} \mathbf{Y}_1 & y_{1,0} \mathbf{Y}_2 & y_{1,1} \mathbf{Y}_2 & y_{1,2} \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}^T$$

ve

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Y}_1 = 0, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Y}_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Y}_2 = 0, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Y}_2 = 0$$

ile tanımlanır. Sıralama noktaları (5.10) matris denkleminde yerine yazılarak yeni denklem sistemi

$$\mathbf{W}\mathbf{Y}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}}^* = \mathbf{G}^*$$

şeklinde olup bu denklemdeki matrisler

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(0) \\ \mathbf{G}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{G}(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^* = [\mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_2 \quad \mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_2 \quad \mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_2]_{18 \times 1}^T,$$

$$\bar{\mathbf{Y}}^* = [\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \quad \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \quad \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \quad \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \quad \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \quad \bar{\mathbf{Y}}_{2,1}]_{54 \times 1}^T,$$

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{17}{8} & -\frac{15}{4} & \frac{17}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{7}{2} & \frac{9}{4} \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{N}(0) = \mathbf{N}\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{N}(1) = 0 \quad ,$$

$$\mathbf{G}^* = [2 \quad -2 \quad 2 \quad -2 \quad 2 \quad -2]^T$$

ve koşulun temel matrisi

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}} : \tilde{\mathbf{G}}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) & 0 & 0 & ; & \mathbf{N}(0) & 0 & 0 & : & \mathbf{G}(0) \\ 0 & \mathbf{K}_0 & 0 & ; & 0 & \mathbf{0} & 0 & : & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_1 & ; & 0 & 0 & \mathbf{0} & : & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

veya buna karşılık gelen matris denklemi

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Bu matris denklemi düzenlendiğinde elde edilen sistemden

$\{y_{1,0}, y_{1,1}, y_{1,2}, y_{2,0}, y_{2,1}, y_{2,2}\}$ katsayıları

$$\left\{ y_{1,0} = 0, y_{1,1} = -\frac{1}{2}, y_{1,2} = 0, y_{2,0} = 0, y_{2,1} = \frac{1}{2}, y_{2,2} = 0 \right\}$$

olarak elde edilir. Bu katsayılar,

$$y_1(t) = y_{1,0}B_{0,2}(t) + y_{1,1}B_{1,2}(t) + y_{1,2}B_{2,2}(t)$$

$$y_2(t) = y_{2,0}B_{0,2}(t) + y_{2,1}B_{1,2}(t) + y_{2,2}B_{2,2}(t)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y_1(t) = t^2 - t, \quad y_2(t) = t - t^2$$

formundaki tam çözüm elde edilir.

ÖRNEK 5.13. İkinci mertebeden lineer olmayan [29]

$$\left. \begin{aligned} y_1'' - ty_2' + y_1 &= t^3 - 2t^2 + 6t \\ y_2'' + ty_1' + y_1y_2 &= t^5 - t^4 + 2t^3 + t^2 - t + 2 \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

diferansiyel denklem sistemi $y_1(0) = y_1(1) = 0$ ve $y_2(0) = y_2(1) = 0$ sınır koşulları

göz önüne alındığında, $N = 3$ için sıralama noktaları $\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = \frac{2}{3}, t_3 = 1 \right\}$

olarak bulunur. (4.23) 'den

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 + \mathbf{B}(t)]\mathbf{Y}_1 - t[\mathbf{B}(t)\mathbf{H}]\mathbf{Y}_2 &= t^3 - 2t^2 + 6t \\ t[\mathbf{B}(t)\mathbf{H}]\mathbf{Y}_1 + [\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2]\mathbf{Y}_2 + \bar{\mathbf{Y}}_{j,i} &= t^5 - t^4 + 2t^3 + t^2 - t + 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^2 = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{C}_1(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 + \mathbf{B}(t) \Rightarrow \mathbf{C}_1(t) = \begin{bmatrix} -t^3 + 3t^2 - 9t + 7 & 3t^3 - 6t^2 + 21t - 12 & -3t^3 + 3t^2 - 18t + 6 & t^3 + 6t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2(t) = -t\mathbf{B}(t)\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{C}_2(t) = \begin{bmatrix} 3t^3 - 6t^2 + 3t & -9t^3 + 12t^2 - 3t & 9t^3 - 6t^2 & -3t^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1(t) = t\mathbf{B}(t)\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{D}_1(t) = \begin{bmatrix} -3t^3 + 6t^2 - 3t & 9t^3 - 12t^2 + 3t & -9t^3 + 6t^2 & 3t^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 \Rightarrow \mathbf{D}_2(t) = \begin{bmatrix} -6t + 6 & 18t - 12 & -18t + 6 & 6t \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Sistemin kapalı formdaki temel matris denklemi ve sınır koşulunun temel matris denklemi,

$$\mathbf{P}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{N}(t)\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(t) \quad (5.11)$$

ve koşullar

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{Y}_1 = 0, \quad \mathbf{B}(1)\mathbf{Y}_1 = 0$$

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{Y}_2 = 0, \quad \mathbf{B}(1)\mathbf{Y}_2 = 0$$

olarak elde edilir. Buradaki matrisler

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} -t^3 + 3t^2 - 9t + 7 & -3t^3 + 6t^2 - 3t \\ 3t^3 - 6t^2 + 21t - 12 & 9t^3 - 12t^2 + 3t \\ -3t^3 + 3t^2 - 18t + 6 & -9t^3 + 6t^2 \\ t^3 + 6t & 3t^3 \\ 3t^3 - 6t^2 + 3t & -6t + 6 \\ -9t^3 + 12t^2 - 3t & 18t - 12 \\ 9t^3 - 6t^2 & -18t + 6 \\ -3t^3 & 6t \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} t^3 - 2t^2 + 6t \\ t^5 - t^4 + 2t^3 + t^2 - t + 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 32}$$

$$\mathbf{N}_1(t) = 0, \quad$$

$$\mathbf{N}_2(t) = \begin{bmatrix} (t-1)^6 & 3t-15t^2+30t^3-30t^4+15t^5-3t^6 & 3t^2-12t^3+18t^4-12t^5+3t^6 & t^3-3t^4+3t^5-t^6 \\ 3t-15t^2+30t^3-30t^4+15t^5-3t^6 & 9t^2-36t^3+54t^4-36t^5+9t^6 & 9t^3-27t^4+27t^5-9t^6 & 3t^4-6t^5+3t^6 \\ 3t^2-12t^3+18t^4-12t^5+3t^6 & 9t^3-27t^4+27t^5-9t^6 & 9t^4-18t^5+9t^6 & 3t^5-3t^6 \\ t^3-3t^4+3t^5-t^6 & 3t^4-6t^5+3t^6 & 3t^5-3t^6 & t^6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{1,0} & y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} & y_{2,0} & y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{2,0}\mathbf{Y}_1 & y_{2,1}\mathbf{Y}_1 & y_{2,2}\mathbf{Y}_1 & y_{2,3}\mathbf{Y}_1 & y_{1,0}\mathbf{Y}_2 & y_{1,1}\mathbf{Y}_2 & y_{1,2}\mathbf{Y}_2 & y_{1,3}\mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}^T$$

ve

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Y}_1 &= 0, & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Y}_1 &= 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Y}_2 &= 0, & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Y}_2 &= 0 \end{aligned}$$

ile tanımlanır. Sıralama noktaları (5.11) matris denkleminde yerine yazılarak yeni denklem sistemi

$$\mathbf{W}\mathbf{Y}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}}^* = \mathbf{G}^*$$

şeklinde olup bu denklemdeki matrisler

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{P}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{N}(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(0) & \mathbf{G}\left(\frac{1}{3}\right) & \mathbf{G}\left(\frac{2}{3}\right) & \mathbf{G}(1) \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}_{32 \times 1}^T,$$

$$\bar{\mathbf{Y}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} & \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} & \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} & \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} & \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} & \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} & \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} & \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \end{bmatrix}_{128 \times 1}^T ,$$

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & 6 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{116}{27} & -\frac{50}{9} & \frac{2}{9} & \frac{55}{27} & \frac{4}{9} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 4 & -6 & 0 & 2 \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{55}{27} & \frac{2}{9} & -\frac{50}{9} & \frac{116}{27} & \frac{2}{9} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{8}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{8}{9} & 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -12 & 7 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 6 & -12 & 6 \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{N}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & & & & & & \mathbf{0} & & & & & & & & \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 32} ,$$

$$\mathbf{N}\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & & & & & & \mathbf{0} & & & & & & & & \\ \mathbf{0} & \frac{64}{729} & \frac{32}{243} & \frac{16}{243} & \frac{8}{729} & \frac{32}{243} & \frac{16}{81} & \frac{8}{81} & \frac{4}{243} & \frac{16}{243} & \frac{8}{81} & \frac{4}{81} & \frac{2}{243} & \frac{8}{729} & \frac{4}{243} & \frac{2}{243} & \frac{1}{729} \end{bmatrix}_{2 \times 32} ,$$

$$\mathbf{N}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & & & & & & \mathbf{0} & & & & & & & & \\ \mathbf{0} & \frac{1}{729} & \frac{2}{243} & \frac{4}{243} & \frac{8}{729} & \frac{2}{243} & \frac{4}{81} & \frac{8}{81} & \frac{16}{243} & \frac{4}{243} & \frac{8}{81} & \frac{16}{81} & \frac{32}{243} & \frac{8}{729} & \frac{16}{243} & \frac{32}{243} & \frac{64}{729} \end{bmatrix}_{2 \times 32} ,$$

$$\mathbf{N}(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & & & & & & \mathbf{0} & & & & & & & & \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 32} ,$$

$$\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \frac{49}{27} & \frac{448}{243} & \frac{92}{27} & \frac{560}{243} & 5 & 4 \end{bmatrix}^T$$

ve koşulların temel matrisi

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}} : \tilde{\mathbf{G}}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) & 0 & 0 & 0 & , \mathbf{N}(0) & 0 & 0 & 0 & : \mathbf{G}(0) \\ 0 & \mathbf{P}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & , 0 & \mathbf{N}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & : \mathbf{G}\left(\frac{1}{3}\right) \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_0 & 0 & , 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & : \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_1 & , 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & : \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

veya buna karşılık gelen matris denklemi

$$\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -12 & 6 & 0 \\ & & \mathbf{0} & & \frac{116}{27} & -\frac{50}{9} & \frac{2}{9} & \frac{55}{27} & \frac{4}{9} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ & & & & -\frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 4 & -6 & 0 & 2 \\ & & \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} & & & & & \\ & & \mathbf{0} & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathbf{0} & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \mathbf{0} & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \mathbf{0} & \frac{64}{729} & \frac{32}{243} & \frac{16}{243} & \frac{8}{729} & \frac{32}{243} & \frac{16}{81} & \frac{8}{81} & \frac{4}{243} & \frac{16}{243} & \frac{8}{81} & \frac{4}{243} & \frac{2}{243} & \frac{8}{729} & \frac{4}{243} & \frac{2}{243} & \frac{1}{729} \\ & & \mathbf{0} & & & & & & & & & & & & \mathbf{0} & & & & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{0} & & & & & & & & & & & & \mathbf{0} & & & & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{0} & & & & & & & & & & & & \mathbf{0} & & & & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{49}{27} \\ \frac{448}{243} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Elde edilen bu sistemden $\{y_{1,0}, y_{1,1}, y_{1,2}, y_{1,3}, y_{2,0}, y_{2,1}, y_{2,2}, y_{2,3}\}$

Bernstein katsayıları

$$\left\{ y_{1,0} = 0, y_{1,1} = -\frac{1}{3}, y_{1,2} = -\frac{2}{3}, y_{1,3} = 0, y_{2,0} = 0, y_{2,1} = -\frac{1}{3}, y_{2,2} = -\frac{1}{3}, y_{2,3} = 0 \right\}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar,

$$y_1(t) = y_{1,0}B_{0,3}(t) + y_{1,1}B_{1,3}(t) + y_{1,2}B_{2,3}(t) + y_{1,3}B_{3,3}(t)$$

$$y_2(t) = y_{2,0}B_{0,3}(t) + y_{2,1}B_{1,3}(t) + y_{2,2}B_{2,3}(t) + y_{2,3}B_{3,3}(t)$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$y_1(t) = t^3 - t, \quad y_2(t) = t^2 - t$$

formundaki tam çözüm elde edilir.

ÖRNEK 5.14. İkinci mertebeden lineer olmayan

$$\left\{ \begin{aligned} y_1'' - ty_2 + y_1y_2 &= -(t-1)^2(\sin^2 t + \sin t) - 2\cos t \\ y_2'' + ty_1' - y_2' - ty_2 &= -(t^2 + t)\sin t - (t^2 - 3)\cos t \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

diferansiyel denklem sistemi

$$y_1(0) - y_1(1)y_2(1) = 0$$

$$y_2(0) + y_2(1)y_1(1) = 0$$

ve

$$y_1(1) - y_1(0)y_2(0) = 0$$

$$y_2(1) + y_2(0)y_1(0) = 0$$

sınır koşulları göz önüne alındığında, $N = 3$ için sıralama noktaları

$$\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = \frac{2}{3}, t_3 = 1 \right\} \text{ olarak bulunur. (4.23) 'den}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2\mathbf{Y}_1 - t\mathbf{B}(t)\mathbf{Y}_2 + \bar{\mathbf{Y}}_{i,j} &= -(t-1)^2(\sin^2 t + \sin t) - 2\cos t \\ t\mathbf{B}(t)\mathbf{H}\mathbf{Y}_1 + [\mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 - \mathbf{B}(t)\mathbf{H} - t\mathbf{B}(t)]\mathbf{Y}_2 &= -(t^2 + t)\sin t - (t^2 - 3)\cos t \end{aligned} \right\}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{H}^2 = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{C}_1(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 \Rightarrow \mathbf{C}_1(t) = \begin{bmatrix} -6t+6 & 18t-12 & -18t+6 & 6t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2(t) = -t\mathbf{B}(t) \Rightarrow \mathbf{C}_2(t) = \begin{bmatrix} -t+3t^2-3t^3+t^4 & -3t^2+6t^3-3t^4 & -3t^3+3t^4 & -t^4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_1(t) = t\mathbf{B}(t)\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{D}_1(t) = \begin{bmatrix} -3t+6t^2-3t^3 & 3t-12t^2+9t^3 & 6t^2-9t^3 & 3t^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{H}^2 - \mathbf{B}(t)\mathbf{H} - t\mathbf{B}(t)$$

$$\mathbf{D}_2(t) = \begin{bmatrix} -13t+6t^2-3t^3+t^4+9 & 30t-12t^2+6t^3-3t^4-15 & -24t+9t^2-3t^3+3t^4+6 & 6t-3t^2-t^4 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Sistemin kapalı formdaki temel matris denklemi ve sınır koşulunun temel matris denklemi,

$$\mathbf{P}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{N}(t)\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(t) \quad (5.12)$$

ve koşullar

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{Y}_1 - \mathbf{B}(1)\bar{\mathbf{B}}(1)\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} = 0$$

$$\mathbf{B}(0)\mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}(1)\bar{\mathbf{B}}(1)\bar{\mathbf{Y}}_{2,1} = 0$$

$$\mathbf{B}(1)\mathbf{Y}_1 - \mathbf{B}(0)\bar{\mathbf{B}}(0)\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} = 0$$

$$\mathbf{B}(1)\mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}(0)\bar{\mathbf{B}}(0)\bar{\mathbf{Y}}_{2,1} = 0$$

olarak elde edilir. Buradaki matrisler

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} -6t+6 & -3t+6t^2-3t^3 \\ 18t-12 & 3t-12t^2+9t^3 \\ -18t+6 & 6t^2-9t^3 \\ 6t & 3t^3 \\ -t+3t^2-3t^3+t^4 & -13t+6t^2-3t^3+t^4+9 \\ -3t^2+6t^3-3t^4 & 30t-12t^2+6t^3-3t^4-15 \\ -3t^3+3t^4 & -24t+9t^2-3t^3+3t^4+6 \\ -t^4 & 6t-3t^2-t^4 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} -(t-1)^2(\sin^2 t + \sin t) - 2\cos t \\ -(t^2+t)\sin t - (t^2-3)\cos t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_2(t) \end{bmatrix}_{2 \times 32},$$

$$\mathbf{N}_1(t) = \begin{bmatrix} (t-1)^6 & 3t-15t^2+30t^3-30t^4+15t^5-3t^6 & 3t^2-12t^3+18t^4-12t^5+3t^6 & t^3-3t^4+3t^5-t^6 \\ 3t-15t^2+30t^3-30t^4+15t^5-3t^6 & 9t^2-36t^3+54t^4-36t^5+9t^6 & 9t^3-27t^4+27t^5-9t^6 & 3t^4-6t^5+3t^6 \\ 3t^2-12t^3+18t^4-12t^5+3t^6 & 9t^3-27t^4+27t^5-9t^6 & 9t^4-18t^5+9t^6 & 3t^5-3t^6 \\ t^3-3t^4+3t^5-t^6 & 3t^4-6t^5+3t^6 & 3t^5-3t^6 & t^6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_2(t) = 0,$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{1,0} & y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} & y_{2,0} & y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{2,0}\mathbf{Y}_1 & y_{2,1}\mathbf{Y}_1 & y_{2,2}\mathbf{Y}_1 & y_{2,3}\mathbf{Y}_1 & y_{1,0}\mathbf{Y}_2 & y_{1,1}\mathbf{Y}_2 & y_{1,2}\mathbf{Y}_2 & y_{1,3}\mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}^T$$

ve

$$\begin{aligned} [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{Y}_1 &= 0, & [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{Y}_2 &= 0 \\ [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1] \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} &= 0 \\ [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{Y}_1 &= 0, & [0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{Y}_2 &= 0 \\ [-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} &= 0 \\ [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} &= 0 \end{aligned}$$

ile tanımlanır. Sıralama noktaları (5.12) matris denkleminde yerine yazılarak yeni denklem sistemi

$$\mathbf{W}\mathbf{Y}^* + \mathbf{V}\bar{\mathbf{Y}}^* = \mathbf{G}^*$$

şeklinde olup bu denklemdaki matrisler

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{P}(1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{N}(1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(0) & \mathbf{G}\left(\frac{1}{3}\right) & \mathbf{G}\left(\frac{2}{3}\right) & \mathbf{G}(1) \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Y}^* = [\mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_2 \quad \mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_2 \quad \mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_2 \quad \mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_2]_{32 \times 1}^T,$$

$$\bar{\mathbf{Y}}^* = [\bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \quad \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \quad \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \quad \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \quad \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \quad \bar{\mathbf{Y}}_{2,1} \quad \bar{\mathbf{Y}}_{1,2} \quad \bar{\mathbf{Y}}_{2,1}]_{128 \times 1}^T,$$

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -15 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 & 2 & -\frac{8}{81} & -\frac{4}{27} & -\frac{2}{27} & -\frac{1}{81} \\ -\frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{424}{81} & -\frac{166}{27} & -\frac{29}{27} & \frac{134}{81} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 & 4 & -\frac{2}{81} & -\frac{4}{27} & -\frac{8}{27} & -\frac{16}{81} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{8}{9} & \frac{187}{81} & \frac{23}{27} & -\frac{170}{27} & \frac{200}{81} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 6 & -9 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ & & & & & & & & \mathbf{0} & & & & & & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{2 \times 32},$$

$$\mathbf{N}\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{64}{729} & \frac{32}{243} & \frac{16}{243} & \frac{8}{729} & \frac{32}{243} & \frac{16}{81} & \frac{8}{81} & \frac{4}{243} & \frac{16}{243} & \frac{8}{81} & \frac{4}{81} & \frac{2}{243} & \frac{8}{729} & \frac{4}{243} & \frac{2}{243} & \frac{1}{729} & \mathbf{0} \\ & & & & & & & & \mathbf{0} & & & & & & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{2 \times 32},$$

$$\mathbf{N}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{729} & \frac{2}{243} & \frac{4}{243} & \frac{8}{729} & \frac{2}{243} & \frac{4}{81} & \frac{8}{81} & \frac{16}{243} & \frac{4}{243} & \frac{8}{81} & \frac{16}{81} & \frac{32}{243} & \frac{8}{729} & \frac{16}{243} & \frac{32}{243} & \frac{64}{729} & \mathbf{0} \\ & & & & & & & & \mathbf{0} & & & & & & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{2 \times 32},$$

$$\mathbf{N}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ & & & & & & & & \mathbf{0} & & & & & & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{2 \times 32},$$

$$\mathbf{G}^* = [-2 \quad 3 \quad -2.082914367 \quad 2.584455757 \quad -1.682969079 \quad 1.321300996 \quad -1.080604612 \quad -0.6023373579]^T$$

ve koşulların temel matrisi

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}}; \tilde{\mathbf{G}}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0) & 0 & 0 & 0 & , \mathbf{N}(0) & 0 & 0 & 0 & : \mathbf{G}(0) \\ 0 & \mathbf{P}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & , 0 & \mathbf{N}\left(\frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & : \mathbf{G}\left(\frac{1}{3}\right) \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_0 & 0 & , 0 & 0 & \mathbf{L}_0 & 0 & : \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_1 & , 0 & 0 & 0 & \mathbf{L}_1 & : \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buna karşılık gelen matris denkleminde elde edilen

$\{y_{1,0}, y_{1,1}, y_{1,2}, y_{1,3}, y_{2,0}, y_{2,1}, y_{2,2}, y_{2,3}\}$ Bernstein katsayıları

$$\left\{ y_{1,0} = 0, y_{1,1} = \frac{1}{3}, y_{1,2} = \frac{1}{3}, y_{1,3} = -\frac{1}{6}, y_{2,0} = 0, y_{2,1} = -\frac{1}{3}, y_{2,2} = -\frac{1}{3}, y_{2,3} = \frac{1}{6} \right\}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar,

$$y_1(t) = y_{1,0}B_{0,3}(t) + y_{1,1}B_{1,3}(t) + y_{1,2}B_{2,3}(t) + y_{1,3}B_{3,3}(t)$$

$$y_2(t) = y_{2,0}B_{0,3}(t) + y_{2,1}B_{1,3}(t) + y_{2,2}B_{2,3}(t) + y_{2,3}B_{3,3}(t)$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$y_1(t) = t - t^2 - \frac{t^3}{6} \quad , \quad y_2(t) = t^2 - t + \frac{t^3}{6}$$

Bernstein polinom çözümleri elde edilir. Bu elde edilen çözümler $y_1(t) = (1-t) \sin t$ ve $y_2(t) = (t-1) \sin t$ 'nin Taylor açılımının ilk dört terimidir. Benzer şekilde işlemler yapılarak $N=5,7$ için de yaklaşık çözümler elde edilir. Bu yaklaşık çözümler ile denklemin tam çözümlerinin $[0,1]$ aralığındaki karşılaştırılması

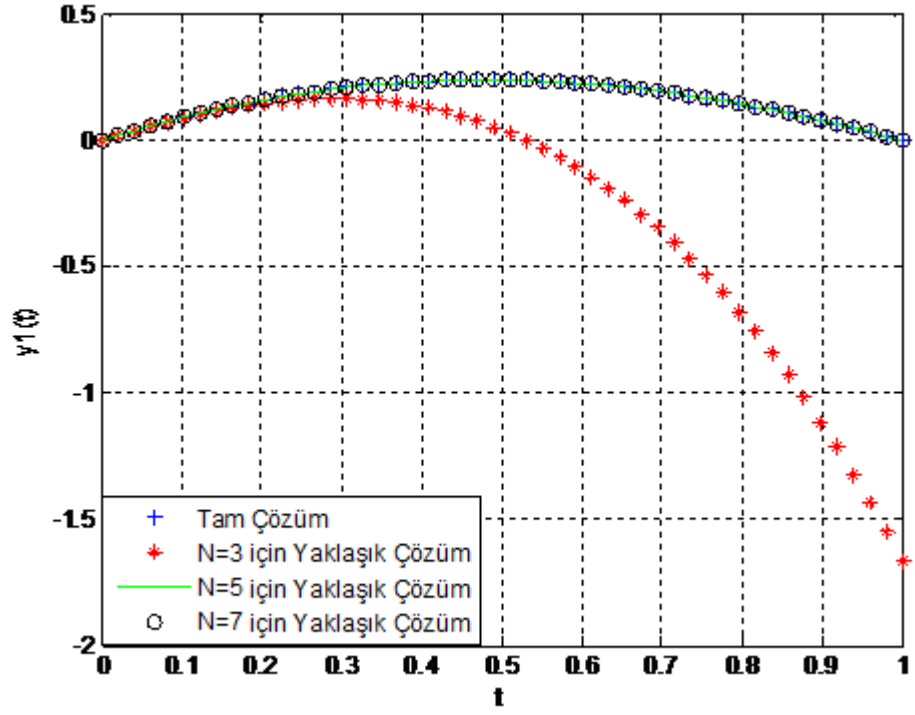
Tablo 5.6. , Tablo 5.7. ve Şekil 5.6. , Şekil 5.7. 'de verilmiştir.

Tablo 5.6. Örnek 5.14.' ün $y_1(t)$ için Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması

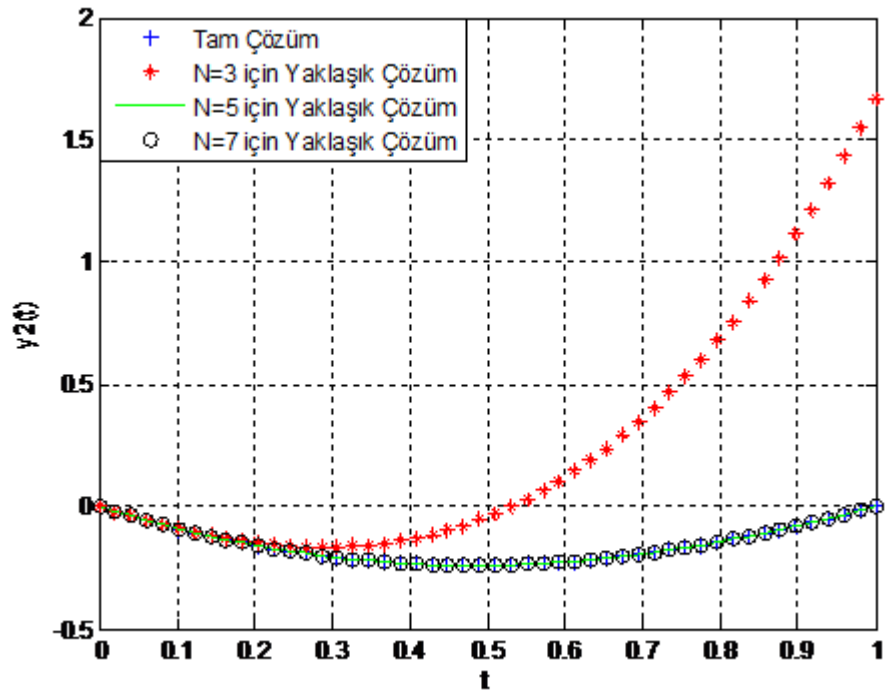
t_i	Tam Çözüm	$N = 3$ Mutlak		$N = 5$ Mutlak		$N = 7$ Mutlak	
		$y_{1,3}(t_i)$	Hata	$y_{1,5}(t_i)$	Hata	$y_{1,7}(t_i)$	Hata
0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	0.1589354646	0.1589330587	2.4059E-6	0.158935382	8.26E-8	0.1589354166	4.8E-8
0.4	0.2336510054	0.2335993152	5.16902E-5	0.2336508855	1.199E-7	0.2336508109	1.945E-7
0.6	0.2258569894	0.225600216	2.567734E-4	0.2258585950	1.6056E-6	0.2258565469	4.425E-7
0.8	0.1434712182	0.1429383083	5.329099E-4	0.1434786344	7.4162E-6	0.1434703984	8.198E-7
1	0	0.00001724	1.724E-5	-0.000000895	8.95E-7	-0.000000113	1.137E-6

Tablo 5.7. Örnek 5.14.' ün $y_2(t)$ için Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması

t_i	Tam Çözüm	$N = 3$ Mutlak		$N = 5$ Mutlak		$N = 7$ Mutlak	
		$y_{2,3}(t_i)$	Hata	$y_{2,5}(t_i)$	Hata	$y_{2,7}(t_i)$	Hata
0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	-0.1589354646	-0.1589330587	2.4059E-6	-0.158935382	8.26E-8	-0.1589354166	4.8E-8
0.4	-0.2336510054	-0.2335993152	5.16902E-5	-0.2336508855	1.199E-7	-0.2336508109	1.945E-7
0.6	-0.2258569894	-0.225600216	2.567734E-4	-0.2258585950	1.6056E-6	-0.2258565469	4.425E-7
0.8	-0.1434712182	-0.1429383083	5.329099E-4	-0.1434786344	7.4162E-6	-0.1434703984	8.198E-7
1	0	-0.00001724	1.724E-5	0.000000895	8.95E-7	0.000000113	1.137E-6



Şekil 5.6. Örnek 5.14. $y_1(t)$ 'nin $N = 3, 5, 7$ için Yaklaşık Çözüm Grafiği



Şekil 5.7. Örnek 5.14. $y_2(t)$ 'nin $N = 3, 5, 7$ için Yaklaşık Çözüm Grafiği

6. SONUÇ VE TARTIŞMA

Lineer olmayan diferansiyel denklemler kimyasal reaksiyonlar, kütle transfer problemleri ve sinyal yayılmaları gibi birçok fiziksel olayın matematiksel modellemesinde karşımıza çıkmaktadır. Bu denklemlerin çözüm yöntemleri birçok bilim dalında ve mühendislikte büyük öneme sahiptir.

Bu çalışmada, birinci ve ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler için bir Bernstein sıralama (collocation) yöntemi geliştirilmiştir. Ayrıca biyoloji, ekoloji, tıp alanlarında sıkça karşılaşılan birinci ve ikinci mertebeden lineer olmayan denklem sistemleri için de Bernstein polinomuna dayalı sıralama yöntemi oluşturularak Bernstein seri çözümleri bulunmuştur.

Geliştirilen Bernstein sıralama yöntemi, önce lineer olmayan diferansiyel denklemdaki bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin sonlu Bernstein seri açılımları ve bilinen katsayı fonksiyonlarının sıralama (collocation) noktalarındaki değerlerine bağlı matris formlarının elde edilmesi; sonra bunların yerine konulup sadeleştirilerek denklemin Bernstein katsayılı bir matris denklemine dönüştürülmesinden ibarettir. Böylece bilinmeyen Bernstein katsayılı lineer olmayan cebirsel bir sisteme karşılık gelen sonuç matris denklemi çözülebilir ve katsayılar yaklaşık olarak bulunabilir. Daha sonra, Bernstein matris yöntemi birinci ve ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerine uygulanmış ve denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen yaklaşık çözümler, tam çözümler ile karşılaştırılmış ve bu çözümlerin N kesme sınırı yeterince artırıldığında tam çözüme daha da yaklaştığı saptanmıştır.

Bu yöntemin önemli avantajı çözümdeki Bernstein katsayılarının bilgisayar programları kullanılarak kolaylıkla bulunmasıdır. Bu çalışmada verilen yöntemler, analitik olarak çözülemeyen, çözüm yöntemleri zor anlaşılan ya da anlatılmasında güçlük çekilen problemler, bazı değişikliklerle amaca uygun bir şekilde kullanılabilir.

Verilen yöntem daha yüksek mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlere ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerine genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Adams, R.A. Calculus. Addison-Wesley Publihers Limited, 1990, 562 s.
- [2] Ross, S.L., Differential Equations. Ed: John Wiley and Sons, Inc. Newyork, 1974.
- [3] Corliss, G.F., Guarented error bounds for ordinary differential equations, in theory and numeric of ordinary and partial equations. (Ed: M.Ainsworth, J.Levesley, W.A Light, M.Marletta, Eds), Oxford Universty pres, Oxford, 1995, pp.342.
- [4] Adomian, G. Solving Frontier Problems of Physics the decomposition Method. Kluwer Academic Publisher Boston.
- [5] Horadam, A.F. Jacobsthal Representation Numbers. University of New England, Australia, 1996.
- [6] Zhou, J.K. Differential Transformation and Its Application for Electrical Circuits. Huarjung University Press, Wuuhahn, China, 1986.
- [7] Zwillling, D. Handbook of Differential Equations. Academic Press, Boston, 1997.
- [8] Joy, K.I. Bernstein Polynomials. University of California, Davis, 2000, 13s.
- [9] Bernstein, S. N., Demonstration du théorème de Weierstrass fondée sur la calcul des probabilites. Communications of the Mathematical Society of Charkow, 1912-1913, 2(13), 1-2.
- [10] Dohaa, E.H., Bhrawy, A.H., Saker, M.A. Integrals of Bernstein Polynomials: An Application for Solution of High Even-Order Differential Equations. Appl. Math. Comput. 2011, 24(4), 559-565.
- [11] Bulut, H., Evens, D.J. On the solution of Riccati equation by the Decomposition method. 2002, 79(1), 103-109.
- [12] Matsuno, Y. Two-dimensional dynamical system associated with Abel's nonlinear differential equation. J. Math. Phys. 1992, 33, 412-421.
- [13] Mak, M.K. Solutions generating technique for Abel-type nonlinear ordinary differential equations. Comput.Math. Appl. 2001, 41, 1395-1401.
- [14] Harko, T., Mak, M.K. Relativistic dissipative cosmological models and differential equation. Comput. Math. Appl. 2003, 46, 849-853.
- [15] Garcia, A., Macias, A., Mielke, E.W. Stewart-Lyth second-order approach as Abel equation for reconstructing inflationary dynamics. Phys. Lett. 1997, A229, 32-36.
- [16] Alvarez, M.J., Gasull, A., Giacomini, H. A new uniqueness criterion for the number of periodic orbits Abel equations. J. Diff. Eq. 2007, 234, 161-176.

- [17] Güler, C. A new numerical algorithm for the Abel equation of the second kind. *Int. J. Comput. Math.* 2007, 84, 109–119.
- [18] Sezer, M. A method for the approximate solution of the second order linear differential equations in terms of Taylor polynomials. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 1996, 27(6), 821-834.
- [19] Yalçınbaş, S. Taylor polynomial solutions of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2002, 127, 195-206.
- [20] Gürler, H., Yalçınbaş, S. A new algorithm for the numerical solution of the first order nonlinear differential equations with the mixed non-linear conditions by using Bernstein polynomials. *New Trends in Mathematical Sciences*. 2015,
- [21] Yalçınbaş, S., Gürler, H. Bernstein collocation method for solving the first order nonlinear differential equations with the mixed non-linear conditions. *Mathematical & Computational Applications*. 2015,
- [22] Yalçınbaş, S., Erdem, K. Approximate solutions of nonlinear Volterra integral equation systems. *International Journal of Modern Physics B*. 2010, 24 (32), 6235-6258.
- [23] Güner, A., Yalçınbaş, S. Legendre collocation method for solving nonlinear differential equations. *Mathematical & Computational Applications*. 2013, 18 (3), 521-530.
- [24] Taştekin, D., Yalçınbaş, S., Sezer, M. Taylor collocation method for solving a class of the first order nonlinear differential equations. *Mathematical & Computational Applications*. 2013, 18(3), 383-391.
- [25] Yalçınbaş, S., Taştekin, D. Fermat collocation method for solving a class of the second order nonlinear differential equations. *Applied Mathematics and Physics*. 2014, 2 (2), 33-39.
- [26] Taştekin, D., Yalçınbaş, S. Fermat collocation method for solving a class of the first order nonlinear differential equations. *Journal of Mathematical Sciences and Applications*. 2014, 2 (1), 4-9.
- [27] Yalçınbaş, S., Erdem, K. A New Approximation Method for the Systems of Nonlinear Fredholm Integral Equations. *Applied Mathematics and Physics*. 2014, 2 (2), 40-48.
- [28] Gülsu, M., Sezer, M. On the solution of the Riccati equation by the Taylor matrix method. *Applied Mathematics and Computation*. 2006, 176, 414-421.
- [29] Gökmen, E., Sezer, M. Taylor collocation method for nonlinear system of second-order boundary value problems. *Düzce University Journal of Science & Technology*. 2013, 1, 11-23.

- [30] Bülbül, B., Sezer, M. A numerical approach for solving generalized Abel-type nonlinear differential equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2015, 262, 169-177.
- [31] Gülsu, M., Öztürk, Y., Sezer, M. On the solution of the Abel equation of the second kind by the shifted Chebyshev polynomials. *Applied Mathematics and Computation*. 2011, 217, 4827-4833.
- [32] Dehghan, M., Lakestani, M. Numerical solution of nonlinear system of second-order boundary value problems using cubic B-spline scaling functions. *Inter. Journal of Comput. Math.* 2008, 85(9), 1455-1461.
- [33] Dehghan, M., Saadatmandi, A. The numerical solution of a nonlinear system of second-order boundary value problems using the sinc-collocation method. *Math. Comput. Modelling*. 2007, 46, 1434-1441.
- [34] He, J.H. Variational iteration method a kind of nonlinear analytical technique some examples. *Int. J. Nonlinear Mech.* 1999, 34, 699-708.
- [35] Lu, J. Variational iteration method for solving a nonlinear system of second-order boundary value problems. *Comput. And Math. With Appl.* 2007, 54, 1133-1138.
- [36] Ramos, J.I. Linearization techniques for singular initial-value problems of ordinary differential equations. *Appl. Math. Comput.* 2005, 161, 525-542.
- [37] Saadatmandi, A., Dehghan, M., Eftekhari, A. Application of He's homotopy perturbation method for non-linear system of second order boundary value problems. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 2009, 10, 1912-1922.
- [38] Saadatmandi, A., Farsangi, J.A. Chebyshev finite difference method for a nonlinear system of second-order boundary value problems. *Appl. Math. Comput.* 2007, 192(2), 586-591.
- [39] Elyıldırım, Ö. Bernstein Polinomunun Genelleşmesi ve Uygulamaları. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 1997, (Yüksek Lisans Tezi).
- [40] Bozkurt, G. Lineer İntegral ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Bernstein Polinom Çözümleri. Muğla Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Muğla, 2011, 116 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [41] Erdem, K. Lineer Olmayan İntegral Denklemlerinin Yaklaşık Çözümleri. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2010, 119 s. (Yüksek Lisans Tezi).
- [42] Taştekin, D. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Belli Bir Sınıfının Yaklaşık Çözümleri İçin Fermat Sıralama Yöntemi. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2014, 114 s. (Yüksek Lisans Tezi).

[43] Küçükşahin, E. Birinci Mertebeden Bazı Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Taylor Polinom Çözümleri. Muğla Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Muğla, 2008, 46 s. (Yüksek Lisans Tezi).

[44] Güçlü, İ. Yüksek Mertebeden Lineer Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerinin Çözümleri İçin Legendre Polinom Yaklaşımı. Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, 2009, 84 s. (Yüksek Lisans Tezi).

[45] O'Connor, J.J., Robertson, E.F. Sergei Natanovich Bernstein. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. 2010, http://www.history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Bernstein_Sergi.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Huriye GÜRLER

Doğum Yeri ve Yılı : Manisa, 1991

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : gurler-h@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Saruhanlı Anadolu Lisesi, 2009

Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013

Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2016

Mesleki Deneyim

Manisa Bilim ve Sanat Merkezi 2015-2016

Yayınları

Gürler, H., Yalçınbaş, S. A new algorithm for the numerical solution of the first order nonlinear differential equations with the mixed non-linear conditions by using Bernstein polynomials. New Trends in Mathematical Sciences. 2015, 3, 114-124.

Yalçınbaş, S., Gürler, H. Bernstein collocation method for solving the first order nonlinear differential equations with the mixed non-linear conditions. Mathematical & Computational Applications. 2015, 20(3), 160-173.