

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN
LEGENDRE SIRALAMA YÖNTEMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYSUN GÜNER ALTUNTAŞ

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

MANİSA 2014

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN
LEGENDRE SIRALAMA YÖNTEMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYSUN GÜNER ALTUNTAŞ

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

MANİSA 2014

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN
LEGENDRE SIRALAMA YÖNTEMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYSUN GÜNER ALTUNTAŞ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06.01.2014

Tezin Savunulduğu Tarih : 21.01.2014

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Salih YALÇINBAŞ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Mehmet SEZER

: Yrd.Doç.Dr. Ali IŞIK

MANİSA 2014

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın hazırlanmasındaki her safhada önemli katkılarından, verdiği değerli bilgilerden ve bana kazandırdığı araştırma azminden dolayı Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ'a, yardımlarını esirgemeyen hocalarım Prof. Dr. Mehmet SEZER ve Arş.Gör. Kübra Erdem'e, eşim Mesut ALTUNTAŞ'a, arkadaşım Ayşe KURT'a ve kardeşim Meryem GÜNER'e teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Aysun GÜNER ALTUNTAŞ

2014

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
GRAFİKLER DİZİNİ.....	iv
TABLolar DİZİNİ.....	v
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Tarihi Gelişim.....	1
1.2. İlgili Çalışmalar.....	2
1.3. Problemin Tanıtılması.....	2
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Legendre Diferansiyel Denklemi.....	3
2.2. Legendre Polinomları.....	8
2.3. Rodrigues Formülü.....	11
2.4. Legendre Polinomlarının Özellikleri.....	13
2.4.1. Doğurucu Fonksiyonlar.....	13
2.4.2. Diferansiyel İndirgeme Bağıntısı.....	14
2.4.3. İndirgeme Bağıntılarını Yardımıyla Legendre Diferansiyel Denkleminin Elde Edilmesi.....	15
2.4.4. Legendre Polinomlarının Ortogonalliği.....	16
2.4.5. Legendre Polinomlarının İntegral Gösterimi.....	18

2.4.6. Birinci Tip Legendre Polinomları.....	22
2.4.7. Birinci Tip Legendre Polinomlarının Ardışık İntegrali.....	23
2.4.8. Birinci Tip Legendre Polinomlarının Ortogonallığı.....	24
2.4.9. Birinci Tip Legendre Polinomlarının Serileri.....	24
2.4.10. İkinci Tip Legendre Polinomları.....	24
2.4.11. Birleştirilmiş Legendre Polinomları.....	25
2.4.12. $P_n(x)$ 'in Özellikleri.....	28
2.4.13. Rekürans (Tekrarlama) Bağlıntıları.....	30
2.4.14. Legendre Polinomlarının Sıfırları.....	30
3. LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ.....	31
3.1. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözümü için Legendre Collocation (Sıralama) Yöntemi.....	31
3.2. Materyal ve Metot.....	32
3.3. Temel Matris Bağlıntıları.....	32
3.4. Sıralama (Collocation) Noktalarına Dayalı Matris Bağlıntıları.....	34
3.5. Çözümün Doğruluğu.....	38
4. LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İLE İLGİLİ NÜMERİK UYGULAMALAR.....	39
5. SONUÇ ve TARTIŞMA.....	77
6. KAYNAKLAR.....	78
ÖZGEÇMİŞ.....	81

GRAFİKLER DİZİNİ

Grafik No

Sayfa No

Grafik 2.1. $P_n(x)$ Legendre polinomunun grafiği.....	13
Grafik 4.1. Örnek 4.2'nin $N = 2$, $N = 5$ ve $N = 8$ için yaklaşık çözüm grafiği.....	45
Grafik 4.2. Örnek 4.2'nin $N = 2$, $N = 5$ ve $N = 8$ için hata analiz grafiği.....	45
Grafik 4.3. Örnek 4.4'ün $N = 3$, $N = 4$ ve $N = 5$ için yaklaşık çözüm grafiği.....	50
Grafik 4.4. Örnek 4.4'ün $N = 3$, $N = 4$ ve $N = 5$ için hata analiz grafiği.....	50
Grafik 4.5. Örnek 4.10'un $N = 2$, $N = 5$ ve $N = 8$ için yaklaşık çözüm grafiği.....	67
Grafik 4.6. Örnek 4.10'un $N = 2$, $N = 5$ ve $N = 8$ için hata analiz grafiği.....	67
Grafik 4.7. Örnek 4.11'in $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için yaklaşık çözüm grafiği.....	70
Grafik 4.8. Örnek 4.11'in $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için hata analiz grafiği.....	70
Grafik 4.9. Örnek 4.12'nin $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için yaklaşık çözüm grafiği.....	76
Grafik 4.10. Örnek 4.12'nin $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için hata analiz grafiği.....	76

TABLÖLAR DİZİNİ

<u>Tablo No</u>	<u>Sayfa No</u>
Tablo 4.1. Örnek 4.2'nin $N = 2$, $N = 5$ ve $N = 8$ için Nümerik Sonuçları.....	44
Tablo 4.2. Örnek 4.4'ün $N = 3$, $N = 4$ ve $N = 5$ için Nümerik Sonuçları.....	49
Tablo 4.3. Örnek 4.10'un $N = 2$, $N = 5$ ve $N = 8$ için Nümerik Sonuçları.....	66
Tablo 4.4. Örnek 4.11'in $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için Nümerik Sonuçları.....	69
Tablo 4.5. Örnek 4.12'nin $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için Nümerik Sonuçları.....	75

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$P_n(x)$: Birinci Tip Legendre Polinomu

$Q_n(x)$: İkinci Tip Legendre Polinomu

N : Kesme Sınırı

x_i : Sıralama Noktaları

$\overline{W}$: Koşullu Arttırılmış Matris

$\sum$: Toplam Sembolü

$\Gamma(x)$: Gama Fonksiyonu

$P[l, m, x]$: Birleştirilmiş Legendre Polinomları

ÖZET**LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN
LEGENDRE SIRALAMA YÖNTEMİ****AYSUN GÜNER ALTUNTAŞ**

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Legendre polinomlarının nerede kullanıldığından bahsedilmiş, teze giriş yapılmıştır. Ayrıca Legendre polinomları ile ilgili çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, tez için gerekli bazı temel kavramlar verilmiştir. Bu çalışmanın orijinal kısmı üçüncü ve dördüncü bölümde yer almaktadır. Üçüncü bölümde, Legendre polinomları ile ilgili matris bağıntıları elde edilmiş; bu bağıntıların ve Legendre sıralama noktalarının yardımıyla lineer olmayan diferansiyel denklemlerin karışık koşulları altında yaklaşık çözümü için yeni bir Legendre sıralama yöntemi sunulmuştur. Dördüncü bölümde sunulan bu yöntem yardımıyla bahsedilen tip denklemler için örnekler çözülmüş, bu örneklerin hata analizleri yapılmış ve grafikleri çizilmiştir. Ek olarak örneklerin hata analizlerinin incelenmesiyle yöntemin iyi çalıştığı, kullanılabilir olduğu sonucuna varılmıştır.

ANAHTAR KELİMELEER: Legendre Diferansiyel Denklemi, Legendre Polinomları, Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler, Legendre Sıralama Metodu

ABSTRACT**LEGENDRE COLLOCATION METHOD FOR SOLVING
NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS****AYSUN GÜNER ALTUNTAŞ**

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, it is mentioned about the using areas of the polinomials and there is an introduction to the thesis. Furthermore, it is discussed about the first study of the Legendre polynomial. In the second chapter, main definitions and concepts used in the thesis are given. Original results are contained in the thirth and fourth section. In the thirth part, the matrix relations associated with the Legendre polynomials are obtained and by means of the these relations and Legendre collocations points, a new Legendre collocation method for the approximate solution of the some first order nonlinear ordinary differantial equations with variable cofficients under the mixed conditions is proposed. In the fourth section, examples of these kinds of equations were solved by using this new method, error analysis was done and graphics were drawn. In addition, we conclude that this new method works well and it can be suitable by examining error analysis of examples.

KEYWORDS: Legendre polynomials, Nonlinear ordinary differential equations, Legendre differential equation, Legendre collocation method.

1. GİRİŞ

1.1. Tarihi Gelişim

Legendre polinomları en sık kullanılan ortogonal polinomlardan birisidir. Ortogonal polinomların alanı ise matematiksel fizik, mühendislik ve bilgisayar bilimindeki uygulamalarda olduğu kadar matematikte de aktif bir araştırma alanıdır. Bu alanlardaki fiziksel problemlerin matematiksel modelleri karşımıza bir diferansiyel, integral veya integro-diferansiyel denklem olarak çıkmaktadır. Bu tip denklemlerin bazıları elemanter metodlarla çözülebilir; fakat çoğunun tam (analitik) çözümünün bulunması ya çok zor ya da mümkün değildir. O zaman seri çözümlerine başvurulur; bunlardan birisi Legendre diferansiyel denkleminin çözümleri olan Legendre polinomlarına dayalı serilerdir.

Legendre polinomlarının ortaya çıkışını sağlayan Andrien-Marie Legendre'nin (1752-1833), özellikle gençliği hakkında fazla bilgi yoktur. Paris'de yaşamış zengin bir aileden gelmektedir. Mazarin Kolejinde matematik ve fizik alanında oldukça yüksek kalitede eğitim aldı ve 18 yaşlarında yoğun araştırmalarda bulundu. 1775-1780 yıllarında Laplace ile birlikte Ecole Askeriye Okulunda çalıştı. 1782'de Berlin Akademisinde makalesi ödül kazandı ve Langrange'nin dikkatini çekti; bu akademide bölüm başkanı oldu. Daha sonra bugün Legendre polinomları olarak bilinen polinomlara dayalı elipsoidler, gök mekaniği, sayılar teorisi ve eliptik fonksiyonlar teorisi üzerine makaleler yayınladı.

Legendre 1787'de "Londra Royal Society" ye seçilmiş ve küresel üçgenler ile ilgili Legendre teoremini içeren önemli bir makale yayınladı. 1791'de "Academie des Sciences" in bir üyesi oldu ve 1792'de metrik sistem ile ilgili logaritmik ve trigonometrik tablolar üzerine çalışmalar yaptı; 1801'de tamamladı. 1806'da Legendre, kuyruklu yıldızların yörüngelerini tanımlayan bir kitap yayınladı. Burada verilerin kullanışlılığı için eğri uydurma ile ilgili en küçük kareler metodunu verdi.

1.2. İlgili Çalışmalar

Legendre polinom ve serilerinin uygulamalarına ilişkin çalışmalar bilgisayarın çıkışı ile hızla artmıştır. Özellikle, yüksek mertebeden değişken katsayılı diferansiyel, integral, integro-diferansiyel ve integro-diferansiyel-fark denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılmışlardır. Bu tip denklemler fizik, mühendislik, biyoloji, tıp ve eczacılık, ekonomi, akışkanlar dinamiği vb. alanlardaki problemlerin matematik modelleri olarak ortaya çıkarlar. Legendre polinomlarına dayalı çözüm yöntemleri de araştırmacılar tarafından sıkça kullanılmaya başlanmıştır. Legendre polinomlarına dayalı yöntemler lineer ve lineer olmayan diferansiyel, Fredholm-Volterra integral ve integro-diferansiyel denklemleri çözmek için oldukça uygun olabilir (El-Mikkawy vd., 2005; Yousefi vd., 2005; Maleknejad vd., 2003; Elbarbary, 2002; Streltsov, 2000).

1.3. Problemin Tanıtılması

Bu çalışmada, birinci mertebeden lineer olmayan

$$N(x)(y'(x))^2 + Q(x)y(x)y'(x) + R(x)y'(x) + S(x)y(x) + T(x)(y(x))^2 = G(x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (1.1)$$

tipindeki diferansiyel denklemin,

$$\alpha y(a) + \beta y(b) = \lambda \quad (1.2)$$

karışık koşuluna göre

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (1.3)$$

biçiminde yaklaşık çözümü Legendre polinomları cinsinden kesilmiş bir Legendre serisi formunda bulunacaktır.

Burada a_n , ($n = 0,1,2,\dots,N$) katsayıları tayin edilecek Legendre katsayıları; $N(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$ ve $G(x)$ fonksiyonları $-1 \leq x \leq 1$ aralığında tanımlı bilinen fonksiyonlar; α , β ve λ sabitleri uygun sabitlerdir. Buradaki $P_n(x)$ fonksiyonları Legendre polinomlarıdır ve

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}, \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & , \quad n \text{ çift} \\ \frac{n-1}{2} & , \quad n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Legendre Diferansiyel Denklemini

Legendre diferansiyel denklemini adı verilen

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \quad (2.1)$$

denkleminin çözümünden Legendre polinomları elde edilir. $n = 0,1,2,3,\dots$ olması durumunda (2.1)'in genel çözümü,

$$y = d_1 P_n(x) + d_2 Q_n(x) \quad (2.2)$$

şeklinde dir. (2.2)'deki $P_n(x)$, birinci tip Legendre polinomları ve $Q_n(x)$ ikinci tip Legendre polinomları ve $Q_n(x)$ $x = +1$ 'de sınırlandırılmıştır. (Spiegel, 1994)

(2.1) denkleminde n bir sabittir. (2.1) denklemini tekrar yazılırsa

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2} y = 0$$

elde edilir. Burada da görüldüğü gibi $x = \mp 1$ noktaları düzgün tekil noktalardır. Ayrıca

$t = \frac{1}{x}$ dönüşümü yapılırsa, (2.1) denklemi

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left[\frac{2}{t} - \frac{2}{t(t^2 - 1)} \right] \frac{dy}{dt} + \frac{n(n+1)}{t^2(t^2 - 1)} y = 0$$

şekline dönüşür. Elde edilen diferansiyel denklem sonsuzda da bir düzgün tekilliğe sahiptir. Bu noktalar dışında,

$$P_1(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \quad \text{ve} \quad P_2(x) = \frac{n(n+1)}{1-x^2}$$

fonksiyonları analitik fonksiyonlardır ve $x = 0$ noktası komşuluğunda $|x| < 1$ aralığında (2.1) denkleminin

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$$

şeklinde bir seri çözümü elde edilir. Burada x 'e göre sırasıyla türevler alınır;

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k d_k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) d_k x^{k-2}$$

elde edilir. $y(x)$, $y'(x)$ ve $y''(x)$ değerleri (2.1) denkleminde yerlerine konursa,

$$(1-x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) d_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} k d_k x^{k-1} + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k = 0$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) d_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) d_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k d_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} n(n+1) d_k x^k = 0$$

olur. Burada indislerle ilgili düzenlemeler de yapılırsa,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)d_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)d_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k d_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} n(n+1)d_k x^k = 0$$

veya

$$2d_2 + n(n+1)d_0 + [3 \cdot 2d_3 + (n+2)(n-1)d_1]x + \sum_{k=2}^{\infty} \{(k+2)(k+1)d_k + 2[n(n+1) - k(k+1)]d_k\}x^k = 0$$

elde edilir. Burada

$$(i) \quad 2d_2 + n(n+1)d_0 = 0$$

$$(ii) \quad 3 \cdot 2d_3 + (n+2)(n-1)d_1 = 0$$

$$(iii) \quad (k+2)(k+1)d_{k+2} + (n+k+1)(n-k)d_k = 0, \quad k \geq 0$$

yazılır. $d \neq 0$ olduğu gibi göz önüne alınarak, (i) ve (ii) bağıntılarından

$$d_2 = \frac{-n(n+1)}{2!}d_0 \quad \text{ve} \quad d_3 = \frac{-(n+2)(n-1)}{3!}d_1$$

elde edilir. (iii)'den de;

$$d_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}d_k, \quad k \geq 0$$

rekürans formülü elde edilir. Geri kalan katsayılar bu formül yardımı ile d_0 ve d_1 cinsinden yani

$$\begin{aligned} k=2 \text{ için} \quad d_4 &= -\frac{(n-2)(n+3)}{3 \cdot 4}d_2 = (-1)^2 \frac{[(n-2)n][(n+1)(n+3)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}d_0 \\ k=3 \text{ için} \quad d_5 &= -\frac{(n-3)(n+4)}{4 \cdot 5}d_3 = (-1)^2 \frac{[(n-3)(n-1)][(n+2)(n+4)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}d_1 \\ k=4 \text{ için} \quad d_6 &= -\frac{(n-4)(n+5)}{5 \cdot 6}d_4 = (-1)^3 \frac{[(n-4)(n-2)n][(n+1)(n+3)(n+5)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}d_0 \\ k=5 \text{ için} \quad d_7 &= -\frac{(n-5)(n+6)}{6 \cdot 7}d_5 = (-1)^3 \frac{[(n-5)(n-3)(n-1)][(n+2)(n+4)(n+6)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}d_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde elde edilirler. Elde edilen katsayılar

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \dots + d_k x^k + \dots$$

denkleminde yerine yerleştirilirse böylece $|x| < 1$ aralığında Legendre denkleminin genel çözümü

$$y = d_0 \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} + \dots \right] \\ + d_1 \left[x - \frac{(n+2)(n-1)}{3!} x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots \right]$$

olarak elde edilir. Kısaca $-1 < x < 1$ aralığındaki iki lineer bağımsız çözüm

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{[(n-2k+2) \cdots (n-2)n][(n+1)(n+3) \cdots (n+2k-1)]}{(2k)!} x^{2k}$$

ve

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{[(n-2k+1) \cdots (n-3)(n-1)][(n+2)(n+4) \cdots (n+2k)]}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

şeklinde bulunur.

Eğer n çift ise $y_1(x)$ için sonsuz seri sınırlandırılır ve n . dereceden bir polinom elde edilir. Eğer n tek ise $y_2(x)$ sınırlandırılır ve yine n . dereceden bir polinom elde edilir. d_0 ve d_1 keyfi sabitler olduğundan her bir n için onların değerlerini seçebiliriz. Böylece Legendre denkleminin genel çözümü;

$$y(x) = d_0 y_1(x) + d_1 y_2(x)$$

şeklinde yazılabilir. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ lineer bağımsız çözümleri de $|x| < 1$ aralığında yakınsak ve $|x| > 1$ aralığında ıraksaktır. Çözüm $x = 1$ de 1 değerine sahiptir. Bu şekilde elde edilen çözüm Legendre polinomu olarak adlandırılır.

Aşağıda ilk dört Legendre polinomu verilmiştir. Bunlar,

$$n = 0; \quad d_0 = 1 \quad \text{ve} \quad y_1 \text{ çözümü} \\ P_0(x) = 1 \quad (2.4)$$

$$n = 1; \quad d_1 = 1 \quad \text{ve} \quad y_2 \text{ çözümü} \\ P_1(x) = x \quad (2.5)$$

$$n = 2; \quad d_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad y_1 \text{ çözümü} \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (2.6)$$

$$n = 3; \quad d_1 = -\frac{3}{2} \quad \text{ve} \quad y_2 \text{ çözümü} \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad (2.7)$$

şeklindedir.

Genel olarak, $n = 2, 4, 6, \dots$ için

$$d_0 = (-1)^{\frac{n}{2}} \left[\frac{1 \cdot 3 \dots (n-1)}{2 \cdot 4 \dots n} \right], \quad (2.8)$$

ve $n = 1, 3, 5, \dots$ için

$$d_1 = (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \left[\frac{1 \cdot 3 \dots n}{2 \cdot 4 \dots (n-1)} \right], \quad (2.9)$$

(2.8) ve (2.9)'daki d_0 ve d_1 değerleri $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ formüllerinde yerine yazılırsa çeşitli Legendre polinomları elde edilir.

Örneğin; $n = 4$ için

$$d_0 = (-1)^2 \left[\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right] = \frac{3}{8} \quad \text{bulunur ve } y_1(x) \text{ çözümü}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

olarak bulunur. Genel olarak $P_n(x)$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

denkleminin özel çözümüdür.

n . dereceden Legendre polinomunun toplam formülü

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^N \left[\frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-2k)!(n-k)!} \right] x^{n-2k}$$

dır. Burada eğer n çift ise $N = \frac{n}{2}$, eğer n tek ise $N = \frac{(n-1)}{2}$ dir.

2.2. Legendre Polinomları

Legendre polinomunun doğurucu fonksiyonu

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^N P_n(x)t^n$$

şeklindedir. Legendre polinomunun seri şekli bu bağıntıdan yararlanılarak elde edilir.

$$\begin{aligned} (a)_{2n} &= [a(a+2) \dots (a+2n-2)] [(a+1)(a+3) \dots (a+2n-1)] \\ &= 2^{2n} \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{a+1}{2} \right)_n \end{aligned} \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilir. Bu özdeşlikte $a=1$ alınmasıyla

$$2n! = 2^{2n} \left(\frac{1}{2} \right)_n n! \quad (2.11)$$

elde edilir.

$(a)_{n-k}$ değeri ise

$$\begin{aligned}
(a)_{n-k} &= \frac{[a(a+1) \dots (a+n-k-1)] [(a+n-k) \dots (a+n-1)]}{[(a+n-k) \dots (a+n-1)]} \\
&= \frac{(a)_n}{(-1)^k (1-a-n)_k}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

şeklinde hesaplanabilir. (2.12)'de $a = 1$ alınmasıyla

$$(n-k)! = \frac{n!}{(-1)^k (-n)_k} \tag{2.13}$$

elde edilir. $(1-t)^{-a}$ ifadesi binom açılımı yardımıyla

$$(1-t)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)(-a-1)\dots(-a+n+1)}{n!} (-1)^n t^n \tag{2.14}$$

şeklinde yazılabilir. Serilerin özelliklerinden de bilindiği gibi çift indisli ve $A(k,n)$ genel terimli bir seri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k,n-k) \tag{2.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} A(k,n-2k) \tag{2.16}$$

bağıntılarını sağlar.

Burada $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $\frac{n}{2}$ 'ye eşit olan ya da $\frac{n}{2}$ 'den küçük olan en büyük tam sayıyı

göstermektedir.

(2.15) ve (2.16)'nin bir sonucu olarak ve $A(k,n-k) = C(k,n)$ konularak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C(k,n-k) \tag{2.17}$$

yazılabilir. Bu ifadeler

$$(1 - 2xt + t^2)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{n=0}^N P_n(x) t^n$$

bağıntısıyla verilen $P_n(x)$ Legendre polinomunun serisel ifadesinin elde edilmesinde kullanılabilir. İfadenin sol tarafı

$$(1 - 2xt + t^2)^{\frac{-1}{2}} = (1 - (2xt - t^2))^{\frac{-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n \frac{(2xt - t^2)^n}{n!}$$

şeklinde yazılabilir. Binom açılımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} (1 - 2xt + t^2)^{\frac{-1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} (2xt)^n \left(1 - \frac{t}{2x}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} (2xt)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{k!} \left(\frac{t}{2x}\right)^k \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (2.17) eşitliğinin ve $\frac{(-n)_k}{k!} = \frac{(-1)_k}{(n-k)!}$ ifadesinin kullanılmasıyla

$$(1 - 2xt + t^2)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k} (2x)^{n-2k} (-1)^k}{(n-2k)! k!} t^n$$

yazılabilir.

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k} = \frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k} (n-k)!}$$

olduğundan

$$(1 - 2xt + t^2)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(2n-2k)(2x)^{n-2k} (-1)^k}{(n-2k)! k! 2^{2n-2k} (n-k)!} t^n \quad (2.18)$$

yazılır.

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

ifadesi ile (2.18) karşılaştırılır ve t^n ' in katsayıları eşitlenirse

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

elde edilir. Buradan

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ çift} \\ \frac{n-1}{2}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklindedir.

2.3. Rodrigues Formülü

Rordigues formülü, Legendre polinomlarını üretmek için kullanılır.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (2.19)$$

şeklindedir. Bu formülle hesaplanan ilk altı Legendre polinomu

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

şeklindedir.

x 'in kuvvetleri

$$x^0 = P_0(x)$$

$$x^1 = P_1(x)$$

$$x^2 = \frac{1}{3}[P_0(x) + 2P_2(x)]$$

$$x^3 = \frac{1}{5}[3P_1(x) + 2P_3(x)]$$

$$x^4 = \frac{1}{35}[7P_0(x) + 20P_2(x) + 8P_4(x)]$$

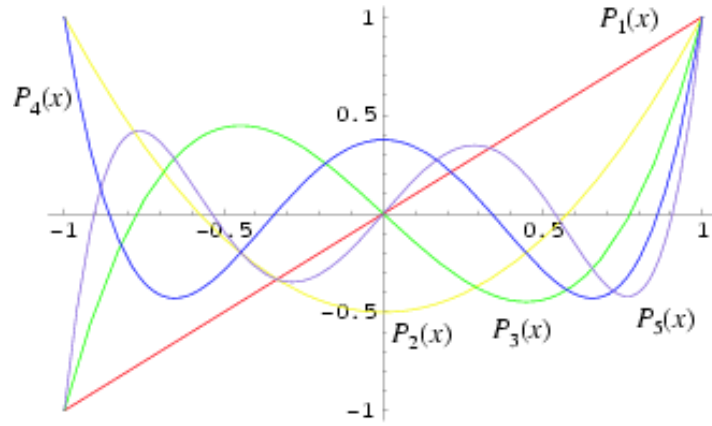
$$x^5 = \frac{1}{63}[27P_1(x) + 28P_3(x) + 8P_5(x)]$$

$$x^6 = \frac{1}{231}[33P_0(x) + 110P_2(x) + 72P_4(x) + 10P_6(x)]$$

şeklinde elde edilir. Buradan genel olarak

$$x^n = \sum_{l=n, n-2, n-4, \dots} \frac{(2l+1)n!}{2^{\binom{n-l}{2}} \left(\frac{1}{2}(n-l)\right)!(l+n+1)!} P_l(x)$$

biçiminde yazılır.



Grafik 2.1 Legendre Polinomlarının Grafiği

$P_n(x)$ 'in diğer formüllerini elde etmek için (2.19) denklemi kullanılabilir.

2.4. Legendre Polinomlarının Özellikleri

2.4.1. Doğurucu Fonksiyonlar

Küresel fonksiyonlar, matematiksel fizik problemlerinin çözümünde önemli rol oynarlar. Legendre polinomları ise $\frac{1}{R}$ Laplace denkleminin temel çözümü ile ilgilidir.

Burada R , M ve M_0 noktaları arasındaki mesafedir. Ayrıca r ve r_0 , M ve M_0 noktalarının yarıçap vektörleri, ψ ise onların arasındaki açı olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi + r^2}} = \begin{cases} \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} & r < r_0 \quad \text{için} \\ \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} & r > r_0 \quad \text{için} \end{cases}$$

yazılabilir. Burada $x = \cos \varphi$ ($-1 \leq x \leq 1$) ve $t = \frac{r}{r_0} < 1$ veya $t = \frac{r_0}{r} < 1$ dir.

$$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}, \quad (0 < t < 1, \quad 0 \leq x \leq 1).$$

fonksiyonuna Legendre polinomlarının doğurucu fonksiyonu denir.

2.4.2. Diferansiyel İndirgeme Bağıntısı

$$F(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (2.20)$$

ifadesinde her iki tarafın t ' ye göre türevinin alınmasıyla,

$$\frac{-1}{2} (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{3}{2}} (-2x + 2t) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1}$$

elde edilir. Her iki taraf $(1 - 2xt + t^2)$ ile çarpılırsa,

$$\frac{x - t}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1}$$

elde edilir. Bu son eşitlik de (2.20) yardımıyla

$$(x - t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1} \quad (2.21)$$

şeklinde yazılabilir. (2.21) ifadesi,

$$x \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n+1}$$

veya bu ifadenin düzenlenmesiyle,

$$\sum_{k=2}^{\infty} [-(k+1)P_{k+1} + (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x)] t^k = 0$$

şeklinde yazılabilir. t 'nin aynı kuvvetlerinin katsayılarının karşılaştırılmasıyla

$$[(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)] = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.22)$$

elde edilir.

Benzer indirgeme bağıntıları Legendre polinomlarının türevleri arasında da bulunmaktadır. Bu bağıntıları bulmak için önce (2.21)'in x ' e göre türevi alınır

$$\frac{-1}{2} (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{3}{2}} 2x = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı $(1 - 2xt + t^2)$ ile çarpılırsa

$$\frac{t}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n \quad (2.23)$$

veya

$$t \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^{n-1} \quad (2.24)$$

elde edilir. t 'nin aynı derecelerdeki katsayılarının karşılaştırılmasıyla bu kez

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) - 2xP'_n(x) \quad (2.25)$$

bağıntısına ulaşılır.

(2.22) ifadesinin bir kez türevi alınır,

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P'_n(x) + nP'_{n-1}(x) = 0$$

elde edilir. Son denklemden $P'_{n+1}(x)$ 'in değeri (2.25)'da yerine yazılırsa

$$nP_n(x) = xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) \quad (2.26)$$

elde edilir. (2.25) ve (2.26)'den $xP'_n(x)$ 'in yok edilmesiyle

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \quad (2.27)$$

bulunur. Şimdi

$$P'_{-1}(x) = 0$$

alınır ve (2.27) formülünde $n = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ yazılarak elde edilen bağlantılar toplanır,

$$\sum_{k=0}^n (2k+1)P_k(x) = P'_{n+1}(x) + P'_n(x) \quad (2.28)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı elde edilir.

(2.25) ve (2.27) denklemleri bağımsız indirgeme bağıntılarıdır. Böylece bu iki denklemden çeşitli bağıntılar elde edilebilir. (2.25) ve (2.27)'in birleştirilmesiyle

$$xP'_n(x) = P'_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x)$$

bulunur.

2.4.3. İndirgeme Bağıntıları Yardımıyla Legendre Diferansiyel Denkleminin Elde Edilmesi

Legendre diferansiyel denklemi indirgeme bağıntıları kullanılarak

$$xP'_n(x) = nP_n(x) + P'_{n-1}(x) \quad (2.29)$$

$$xP'_n(x) = P'_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x) \quad (2.30)$$

bağıntıları elde edilmişti.

Şimdi sadece $P_n(x)$ ve onun türevlerini içeren bir bağıntı bulmak için (2.30) denkleminde n yerine $n-1$ yazılırsa

$$xP'_{n-1}(x) = P'_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (2.31)$$

elde edilir.

(2.31)'de türev alınırsa

$$xP''_{n-1}(x) = P''_n(x) - (n+1)P'_{n-1}(x) \quad (2.32)$$

bulunur.

(2.29) denkleminde,

$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x)$$

yazılır ve türev alınırsa

$$P''_{n-1}(x) = P''_n(x) + xP''_n(x) - nP'_n(x)$$

bulunur.

Bu ifadeler (2.32) denkleminde yerine yazılırsa,

$$x[P'_n(x) + xP''_n(x) - nP'_n(x)] = P''_n(x) - (n+1)[xP'_n(x) - nP_n(x)]$$

elde edilir.

Terimlerin yeniden düzenlenmesiyle $P_n(x)$ için

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

Legendre diferansiyel denklemi elde edilir.

2.4.4. Legendre Polinomlarının Ortogonalliği

$P_n(x)$ ve $P_m(x)$ polinomları Legendre denkleminin birer çözümleri olduklarından $m \neq n$

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (2.33)$$

$$(1-x^2)P''_m(x) - 2xP'_m(x) + m(m+1)P_m(x) = 0 \quad (2.34)$$

bağıntılarını sağlamaktadırlar. Bu bağıntılar,

$$\left[(1-x^2)P'_n(x) \right]' + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (2.35)$$

$$\left[(1-x^2)P'_m(x) \right]' + m(m+1)P_m(x) = 0 \quad (2.36)$$

şeklinde yazılabilir. (2.35) $P_m(x)$ ile ve (2.36)'de $P_n(x)$ ile çarpılır taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} P_m(x) \left[(1-x^2) P_n'(x) \right]' + n(n+1) P_n(x) P_m(x) &= 0 \\ P_n(x) \left[(1-x^2) P_m'(x) \right]' + m(m+1) P_m(x) P_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$P_m(x) \left[(1-x^2) P_n'(x) \right]' - P_n(x) \left[(1-x^2) P_m'(x) \right]' + [n(n+1) - m(m+1)] P_n(x) P_m(x) = 0$$

elde edilir.

$$(1-x^2) P_m'(x) P_n'(x) + P_n(x) \left[(1-x^2) P_m'(x) \right]' - (1-x^2) P_m'(x) P_n'(x) - P_m(x) \left[(1-x^2) P_n'(x) \right]' \quad (2.37)$$

olduğundan (2.37) denklemi

$$(n-m)(n+m-1) P_n(x) P_m(x) = \left[(1-x^2) \{ P_m'(x) P_n(x) - P_m(x) P_n'(x) \} \right] \quad (2.38)$$

olarak yazılabilir.

(2.38) denkleminde integralin herhangi sonlu aralığı için,

$$(n-m)(n+m-1) \int_a^b P_n(x) P_m(x) d_x = \left[(1-x^2) \{ P_m'(x) P_n(x) - P_m(x) P_n'(x) \} \right]_a^b \quad (2.39)$$

elde edilir.

$x=1$ ve $x=-1$ için $(1-x^2)=0$ olduğundan,

$$(n-m)(n+m-1) \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) d_x = 0$$

yazılabilir.

m ve n negatif olmayan tam sayılar olsun. Bu durumda $(n+m+1) \neq 0$ dır. Ayrıca

$n \neq m, n-m \neq 0$ ise

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) d_x = 0, \quad m \neq n \quad (2.40)$$

elde edilir. Eğer $m=n$ ise

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 d_x = \frac{2}{2n+1} \quad (2.41)$$

olarak bulunur.

(2.40) ifadesi $-1 < x < 1$ aralığı üzerinde $P_n(x)$ polinomlar kümesinin dik olduğunu ifade eder. Böylece Legendre polinomları ortogonal polinomların sağladığı özelliklere sahiptir denilebilir.

2.4.5. Legendre Polinomlarının İntegral Gösterimi

Legendre polinomlarının integral gösterimi

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi)^n d\phi \quad (2.42)$$

biçimindedir. Bu formülü gerçeklemek için önce integral altındaki ifadeyi binom serisi şeklinde yazalım. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi)^n d\phi &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (x^2 - 1)^{\frac{k}{2}} \cos^k \phi d\phi \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (x^2 - 1)^{\frac{k}{2}} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^k \phi d\phi \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^k \phi d\phi = \begin{cases} \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} & k = 2m \\ 0 & k = 2m + 1 \end{cases}$$

olduğundan

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi)^n d\phi = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n! x^{n-2k} (x^2 - 1)^k}{2^{2k} (n - 2k)! (k!)^2} \quad (2.43)$$

elde edilir. Sağ taraftaki ifadenin Legendre polinomu olduğunu kanıtlamak için

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

doğurucu fonksiyonunu düzenleyelim. Bunun için

$$F(x, t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{1-xt} \right) \left[1 - \frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2} \right] \quad (2.44)$$

şeklinde yazalım. (2.44)'ün sağ tarafındaki ilk ifade

$$\frac{1}{1-xt} = \sum_{s=0}^{\infty} (xt)^s \quad (2.45)$$

şeklinde yazılabilir. (2.44)'ün sağ tarafındaki ikinci çarpan ise

$$\left[1 - \frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{t^{2k} (x^2-1)^k}{(1-xt)^{2k}} \quad (2.46)$$

şeklinde seriye açılabilir.

$$\frac{1}{(1-xt)^{2k}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-2k}{n} (xt)^n \quad (2.47)$$

olduğundan (2.47) serisi (2.46) yardımıyla

$$\left[1 - \frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+k} \binom{-1/2}{k} \binom{-2k}{n} x^n (x^2-1)^k t^{2k+n} \quad (2.48)$$

şeklinde yazılır. Son ifade $n \rightarrow n-2k$ alınarak t 'nin kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$\left[1 - \frac{t^2(x^2 - 1)}{(1 - xt)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{n-k} \binom{-1/2}{k} \binom{-2k}{n} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k t^n \quad (2.49)$$

veya

$$\left[1 - \frac{t^2(x^2 - 1)}{(1 - xt)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n \quad (2.50)$$

elde edilir. Burada

$$A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{n-k} \binom{-1/2}{k} \binom{-2k}{n-2k} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k \quad (2.51)$$

dir.

(2.45) ve (2.50) (2.44)'de yerine yazılırsa

$$F(x, t) = \sum_{s=0}^{\infty} (xt)^s \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_n x^s t^{n+s}$$

elde edilir. $n \rightarrow n - s$ alarak son ifade t 'nin kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{\infty} A_{n-s} x^s \right] t^n \quad (2.52)$$

veya

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (2.53)$$

elde edilmiş olur. Burada

$$F(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

açılımı uyarınca $P_n(x)$ 'ler Legendre polinomlarıdır. Devam edilecek olunursa

$$P_n(x) = \left[\sum_{s=0}^{n-s} A_{n-s} x^s \right]$$

veya (2.51) göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{s=0}^{n-s} \left[\sum_{k=0}^{[n-s/2]} (-1)^{n-s-k} \binom{-1/2}{k} \binom{-2k}{n-s-2k} x^{n-s-2k} (x^2-1)^k \right] x^s \\ &= \sum_{k=0}^{n/2} \left[(-1)^{-k} \binom{-1/2}{k} \sum_{s=0}^{n-2k} (-1)^{n-s} \binom{-2k}{n-s-2k} x^{n-2k} (x^2-1)^k \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

olduğu görülür. Son bağıntıyı sadeleştirmek için

$$(-1)^{n-s} \binom{-2k}{n-s-2k} = \binom{n-s-1}{2k-1}$$

ve

$$\sum_{s=0}^{n-2k} \binom{n-s-1}{2k-1} = \binom{n}{2k} = \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}$$

ifadesinden yararlanılırsa (2.54) ifadesi

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n/2} \left[(-1)^{-k} \binom{-1/2}{k} \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} x^{n-2k} (x^2-1)^k \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} x^{n-2k} (x^2-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n/2} \frac{n!}{2^{2k} (k!)^2 (2k)!(n-2k)!} x^{n-2k} (x^2-1)^k \end{aligned}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu ifade (2.43) ile karşılaştırılarak (2.42) ifadesi de elde edilir.

2.4.6. Birinci Tip Legendre Polinomları

(2.1) Legendre diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden biri olan birinci tip Legendre polinomları

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{(n)!} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right\} \quad (2.55)$$

şeklinde ifade edilir.

$P_n(x)$ n . dereceden bir polinomdur. İlk birkaç Legendre polinomları aşağıdaki gibidir:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

(El.Mikkawy vd., 2005)

$\vdots$

Ayrıca bu polinomları, x ' in kuvvetleri şeklinde ifade edebiliriz.

$$x^0 = P_0(x)$$

$$x^1 = P_1(x)$$

$$x^2 = \frac{1}{3}[P_0(x) + 2P_2(x)]$$

$$x^3 = \frac{1}{5}[3P_1(x) + 2P_3(x)]$$

$$x^4 = \frac{1}{35}[7P_0(x) + 20P_2(x) + 8P_4(x)]$$

$\vdots$

Bütün durumlarda $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$ dir.

2.4.7. Birinci Tip Legendre Polinomlarının Ardışık İntegrali (Elbarbari)

Teorem 2.1. $P_n(x)$ Legendre polinomları ile türevleri arasındaki tam bağıntı

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m e_{n,m,k} \binom{k}{m}}{w_{n,m,k}} P_{n+k-2m}^k(x) \quad (2.56)$$

ile verilir. Buradaki $w_{n,m,k}$ ve $e_{n,m,k}$

$$w_{n,m,k} = \prod_{i=0, i \neq m}^k (2n + 2k - 2m - 2i + 1)$$

$$e_{n,m,k} = \begin{cases} 0, & n < 2m - k \\ 1, & n \geq 2m - k \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.2. Birinci tip Legendre polinomlarının ardışık integrali Legendre polinomları cinsinden

$$\begin{aligned} [P_n(x)]_k &= \int_{-1}^x \int_{-1}^{t_{k-1}} \int_{-1}^{t_{k-2}} \cdots \int_{-1}^{t_2} \int_{-1}^{t_1} P_n(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{k-2} dt_{k-1} \\ &= \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m e_{n,m,k} \binom{k}{m}}{w_{n,m,k}} \xi_{k,m,n}(x) \\ \xi_{k,m,n}(x) &= P_{n+k-2m}(x) - \sum_{i=0}^{k-1} \eta_i P_{n+k-2m}^{(i)}(-1) \\ \eta_i &= \sum_{j=0}^i \frac{x^j}{j!(i-j)!} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

2.4.8. Birinci Tip Legendre Polinomlarının Ortogonalliği

Legendre polinomları $-1 < x < 1$ aralığında

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n \quad \text{ise}$$

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

olması durumunda ortogonaldır. (Gillis vd., 1988)

2.4.9. Birinci Tip Legendre Polinomlarının Serileri

$f(x)$ ve $f'(x)$ parçalı sürekli ise $-1 < x < 1$ aralığında $f(x)$ 'in her süreklilik noktasında

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$$

olmak üzere

$$f(x) = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) + A_2 P_2(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) \quad (2.57)$$

formuna sahip bir Legendre seri açılımı vardır. Herhangi bir süreksizlik noktasında (2.57) formülü,

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

ifadesine yakınsar. (Spiegel, 1994)

2.4.10. İkinci Tip Legendre Polinomları

(2.1) Legendre diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden biri olan ikinci tip Legendre polinomları $|x| < 1$ ise sırasıyla n 'in tek ya da çift olması durumuna göre sırası ile

$$Q_n(x) = \frac{(-1)^{n/2} 2^n [(n/2)!]^2}{n!} \left\{ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots \right\}$$

$$Q_n(x) = \frac{(-1)^{(n+1)/2} 2^{n-1} [((n-1)/2)!]^2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots n} \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots \right\}$$

şeklinde ifade edilir. $n > 1$ için baştaki katsayılar alınmıştır, bu yüzden $P_n(x)$ ’e ait olan rekürans bağıntıları aynı zamanda $Q_n(x)$ için de sağlanır. (Spiegel, 1994)

2.4.11. Birleştirilmiş Legendre Polinomları

$P_l^x(x)$ ve $P_l^{-m}(x)$ eş Legendre polinomları birleştirilmiş Legendre denkleminin çözümleridir. Burada l pozitif bir tamsayı ve $m = 0, 1, \dots, l$ dır. $P[l, m, x]$ olarak gösterilirler. m pozitif tam sayısı için

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (2.58)$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (2.59)$$

ile verilirler.

Burada $P_l(x)$ birleştirilmiş olmayan Legendre polinomudur. Birleştirilmiş Legendre polinomu negatif m sayısı için

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad (2.60)$$

ile tanımlanır.

Birleştirilmiş polinomlar Ferrers fonksiyonu olarak adlandırılır. $m = 0$ ise birleştirilmiş olmayan polinom olarak yazılırlar. Birleştirilmiş Legendre fonksiyonları küresel kordinatlarda Laplace denkleminin çözümü olan küresel harmoniklerin bir parçasıdır.

Bunlar $[-1,1]$ aralığında $w=1$ ve $w=\frac{-1}{1-x^2}$ ağırlık fonksiyonlar için diktirler. Bu nedenle

$$\int_{-1}^1 P_l^{-m}(x) P_l^{-m}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \quad (2.61)$$

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^{m'}(x) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{(l+m)!}{m(l-m)!} \delta_{mm'} \quad (2.62)$$

yazılabilirler.

Birleştirilmiş Legendre polinomları

$$(l-m)P_l^m(x) = x(2l-1)P_{l-1}^m(x) - (l+m-1)P_{l-2}^m(x)$$

indirgeme bağıntısını sağlarlar.

$x = \cos \theta$ alınmasıyla (genellikle μ ile gösterilir.)

$$\frac{dP_l^m}{d\theta} = \frac{l\mu P_l^m(\mu) - (l+m)P_{l-1}^m(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad (2.63)$$

ve

$$(2l+1)\mu P_l^m(\mu) = (l+m)P_{l-1}^m(\mu) + (l+m-1)P_{l+1}^m(\mu) \quad (2.64)$$

elde edilir. Ayrıca

$$P_l^l(x) = (-1)^l (2l-1)!(1-x^2)^{1/2} \quad (2.65)$$

$$P_{l+1}^l(x) = x(2l+1)P_l^l(x) \quad (2.66)$$

şeklindedir.

$(-1)^m$ 'yi içeren ilk beş birleştirilmiş Legendre polinomu

$$P_0^0(x) = 1$$

$$P_1^0(x) = x$$

$$P_1^1(x) = -(1-x^2)^{1/2}$$

$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^{1/2}$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2)$$

$$P_3^0(x) = \frac{1}{2}x(5x^2 - 3)$$

$$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(1-5x^2)(1-x^2)^{1/2}$$

$$P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$$

$$P_3^3(x) = -15(1-x^2)^{3/2}$$

$$P_4^0(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_4^1(x) = \frac{5}{2}x(3-7x^2)(1-x^2)^{1/2}$$

$$P_4^2(x) = \frac{15}{2}(7x^2 - 1)(1-x^2)$$

$$P_4^3(x) = -105x(1-x^2)^{3/2}$$

$$P_4^4(x) = -105(1-x^2)^2$$

$$P_5^0(x) = \frac{1}{8}x(63x^4 - 70x^2 + 15)$$

olarak bulunur.

$x = \cos \theta$ olarak alındığında ise

$$P_0^0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1^0(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta$$

$$P_2^0(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1)$$

$$P_2^1(\cos \theta) = -3\cos \theta \sin \theta$$

$$P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta$$

$$P_3^0(\cos \theta) = \frac{1}{2} \cos \theta (5 \cos \theta - 3)$$

$$P_3^1(\cos \theta) = \frac{3}{2} (1 - 5 \cos^2 \theta) \sin \theta$$

$$P_3^2(\cos \theta) = 15 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$P_3^3(\cos \theta) = -15 \sin^3 \theta$$

olarak elde edilir.

Orijindeki türev

$$\left[\frac{dP_v^\mu(x)}{d_x} \right]_{x=0} = \frac{2^{\mu+1} \sin \left[\frac{1}{2} \pi (\mu + \nu) \right] \Gamma \left(\frac{1}{2} \nu + \frac{1}{2} \mu + 1 \right)}{\pi^{1/2} \Gamma \left(\frac{1}{2} \nu - \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \right)}$$

şeklindedir. Logaritmik türev ise

$$\left[\frac{d \ln P_\lambda^\mu(z)}{d_z} \right]_{z=0} = 2 \tan \left[\frac{1}{2} \pi (\mu + \lambda) \right] \frac{\left[\frac{1}{2} (\mu + \lambda) \right]! \left[\frac{1}{2} (\lambda - \mu) \right]!}{\left[\frac{1}{2} (\mu + \lambda - 1) \right]! \left[\frac{1}{2} (\lambda - \mu - 1) \right]!}$$

biçiminde olur.

2.4.12. $P_n(x)$ 'in Özellikleri (El-Mikkawy vd., 2005)

$P_n(x)$ Legendre polinomları; lineer, ikinci dereceden,

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0$$

homojen diferansiyel denklemi sağlar.

$-1 < x < 1$ ve $n \geq 0$ için $P_n(x)$ Legendre polinomları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $P_n(x) = \frac{1}{2^n (n!)} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- $P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 (1-x)^k (1+x)^{n-k}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

- $P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x+1)^k (x-1)^{n-k} \quad , \quad n = 0,1,2,\dots$
- $P_n(x) = \sum_{k=0}^n 2^{-k} \binom{n}{k} \binom{-n-1}{k} (1-x)^k \quad , \quad n = 0,1,2,\dots$
- $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{n} (1-x)^k \quad , \quad n = 0,1,2,\dots$

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & , n \text{ çift} \\ \frac{n-1}{2} & , n \text{ tek} \end{cases}$$

n tek ise $P_n(x)$ tek fonksiyon, n çift ise $P_n(x)$ çift fonksiyondur.

- $P_n(1) = 1 \quad , \quad n = 0,1,2,\dots$
- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad , \quad n = 0,1,2,3,\dots$
- $(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad , \quad |t| \leq 1$
- $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & , m = n \end{cases}$
- $\frac{d^n}{dx^n} P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)} \quad , \quad n = 0,1,2,\dots$
- $\int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx = \frac{1}{2^n (n!)} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \left[\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right]dx$
- $P_0(0) = \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ tek} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{n/2} \frac{1}{2^n} & , \quad n \text{ çift} \end{cases}$
- $\int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x}} dx = \frac{2\sqrt{2}}{2n+1} \quad , \quad n = 0,1,2,\dots$
- $\int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1+x}} dx = (-1)^n \frac{2\sqrt{2}}{2n+1} \quad , \quad n = 0,1,2,\dots$
- $\int_{-1}^1 \frac{xP_n(x)}{\sqrt{1-x}^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{xP_n(x)}{\sqrt{1-x}^2} dx \quad (a \text{ herhangi bir reel sayı})$

2.4.13. Rekürans (Tekrarlama) Bağlıntıları (Spiegel, 1994)

Üreten fonksiyon, Legendre polinomlarının tekrarlarba bağıntılarını türetmede yararlıdır. Bu bağıntılar x cinsinden özdeşliklerdir ve trigonometrik özdeşlikler gibi işimizi kolaylaştırması ispatlarda, türevlerde yardımcı olması için kullanılır. Bazı tekrarlarba bağıntıları şunlardır:

- $n P_n(x) = (2n-1)x P_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)$
- $x P_n'(x) - P_{n-1}'(x) = n P_n(x)$
- $P_n'(x) - x P_{n-1}'(x) = n P_{n-1}(x)$
- $(1-x^2)P_n'(x) = n P_{n-1}(x) - n x P_n(x)$
- $(2n+1)P_n(x) = n P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)$
- $P_{n+1}'(x) = (n+1)P_n(x) + x P_n'(x)$
- $(1-x^2)P_n'(x) = (n+1)x P_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x)$
- $P_n' - 2x P_{n-1}' + P_{n-2}' = P_{n-1}$
- $P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}x P_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$

2.4.14. Legendre Polinomlarının Sıfırları

Legendre polinomlarının sıfırları Gaussian quadrature olarak bilinen belirli integral yaklaşımları için kullanılan nümerik metotlarda kısmi olarak faydalıdır.

$$\int_a^b f(x) d_x \quad \text{integrali yaklaşık olarak uygun}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i f(x_i) \quad (2.67)$$

toplamı yardımıyla hesaplanır.

Legendre polinomunun sıfırları x_i ve a_i lerin hesaplanması için kullanılır. (2.67) formülü $f(x)$ polinomu $2n-1$ ya da daha küçük dereceden polinom olduğunda tam sonuç verir. Metodun uygulanabilmesi için $P_n(x)$ 'in sıfırlarının reel olduğunun bilinmesine ihtiyaç vardır.

3. LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Lineer olmayan diferansiyel denklemler kimyasal reaksiyonlarda, kütle transfer problemlerinde, sinyal yayılımları gibi birçok fiziksel olayın matematiksel modellemesinde ortaya çıkmaktadır. (Corliss, 1995; Bulut vd, 2002)

Bu tip problemler son yıllarda ekonomi ve ekolojide de çok etkin rol oynarlar. Bu denklemlerin çözüm yöntemleri birçok bilim dalında ve mühendislikte büyük öneme sahiptir. Bununla birlikte birçok diferansiyel denklemlerin analitik veya yaklaşık çözümü bulunabilmesine karşın çok sayıda denklemlerin çözümü bulunmamaktadır (Bulut vd, 2002; Adomian, 1994). Belirtilen yöntemin önemli ve ilginç bir özelliği ise denklemin analitik çözümü N veya daha düşük mertebeli bir polinom ise çözümü tam olarak vermesidir.

Bilindiği üzere Lineer olmayan adi diferansiyel denklemleri, özel olarak basit görünmesine karşın birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemleri, analitik olarak çözmek genellikle kolay değildir. Bunların genel çözümü için bilinen genel bir yöntem yoktur. Bununla birlikte bu tip denkleminin özel durumlarının yaklaşık ve tam çözümlerinin bulunmasında birtakım bilinen yöntemler mevcuttur. Fakat birinci mertebeden bir kısım diferansiyel denklemlerin bilinen yöntemlerle çözülemediği durumlarda bu çalışmada sunulan Legendre sıralama yöntemi kullanılarak yeteri kadar doğrulukta yaklaşık çözümleri ve varsa polinom şeklinde tam çözümleri bulunabilir.

3.1. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözümü İçin Legendre Sıralama (Collocation)Yöntemi

Birinci mertebeden lineer olmayan

$$N(x)(y'(x))^2 + Q(x)y(x)y'(x) + R(x)y'(x) + S(x)y(x) + T(x)(y(x))^2 = G(x), -1 \leq x \leq 1 \quad (3.1)$$

tipindeki diferansiyel denklemin,

$$\alpha y(a) + \beta y(b) = \lambda \quad (3.2)$$

karışık koşulu altındaki yaklaşık çözümü Legendre polinomları cinsinden bir kesilmiş Legendre serisi formunda bulunacaktır. Burada $N(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$ ve $G(x)$ fonksiyonları $-1 \leq x \leq 1$ aralığında tanımlı, sürekli fonksiyonlar; α , β ve λ sabitleri değişmez sabitlerdir. Bu amaç için diferansiyel, integral ve integro-diferansiyel denklemlerin polinom çözümleri, verilen Taylor (matris ve collocation) metotları (Sezer, 1994; Sezer, 1996; Nas vd., 2000; Yalçınbaş vd., 2002; Karamete vd., 2002; Sezer vd., 2006; Gülsu vd., 2005) ve Chebyshev (matris ve collocation) metotları (Sezer vd., 1996; Akyüz vd., 1999) geliştirilerek “Legendre Sıralama (Collocation)” adlı yeni bir yöntem sunulacak ve (3.2) koşullu (3.1) denkleminde uygulanacaktır.

3.2. Materyal ve Metot

Bu çalışmadaki amacımız, (3.1) denkleminin (3.2) koşulları altında verilen

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(x) \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (3.3)$$

formunda ifade edilebilen bir çözümünü bulmaktır. Böylece Legendre katsayıları a_n , ($n = 0,1,2,...,N$)’ler belirlenir. Buradaki $P_n(x)$ fonksiyonları

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k} \quad , \quad n = 0,1,2,...,N \quad (3.4)$$

$$\left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & , n \text{ çift} \\ \frac{n-1}{2} & , n \text{ tek} \end{cases}$$

formülü ile tanımlanan Legendre polinomlarıdır.

3.3. Temel Matris Bağıntıları

Bu bölümde, (3.1) ile verilen lineer olmayan diferansiyel denkleminin her teriminin matris formları elde edilir. Bunun için önce (3.3) ile verilen Legendre polinom yaklaşımı matris formunda

$$y(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{A} \quad (3.5)$$

şeklinde matris formunda yazılır. Burada $\mathbf{P}(x)$ ve $\mathbf{A}$ matrisleri

$$\mathbf{P}(x) = [P_0(x) \ P_1(x) \ P_2(x) \ \dots \ P_N(x)]$$

$$\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]^T$$

şeklinde tanımlanır. Daha sonra $y(x)y'(x)$, $y'(x)$ ve $(y'(x))^2$ çözümlerini de matris formu şeklinde yazmamız gerekir. Bunun için ilk olarak (3.5) ifadesinin x 'göre türevi alınır;

$$\begin{aligned} y'(x) &= \mathbf{P}'(x)\mathbf{A} \\ &= \mathbf{P}(x)\mathbf{\Pi}^T \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir.

Burada n çift ise

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \dots & 2N-3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \dots & 0 & 2N-1 & 0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

n tek ise

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \dots & 2N-3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \dots & 0 & 2N-1 & 0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

şeklindedir. Diğer yandan $(y(x))^2$ ifadesi de

$$(y(x))^2 = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(x) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 A \\ a_1 A \\ \vdots \\ a_N A \end{bmatrix}$$

kısaca

$$y^2(x) = \mathbf{P}(x) \mathbf{P}^*(x) \mathbf{A}^* \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\mathbf{P}^*(x)$ ve $\mathbf{A}^*$

$$\mathbf{P}^*(x) = \begin{bmatrix} P(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(x) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} a_0 A \\ a_1 A \\ \vdots \\ a_N A \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(3.5), (3.6), (3.7) ifadelerini kullanarak

$$y(x)y'(x) = \mathbf{P}(x) \mathbf{P}^*(x) (\Pi^T)^* \mathbf{A}^* \quad (3.8)$$

ifadesini elde ederiz.

(3.7) bağıntısına benzer bir yol izlenerek ve (3.5) bağıntısı kullanılarak

$$(y'(x))^2 = \mathbf{P}(x) \Pi^T \mathbf{P}^*(x) (\Pi^T)^* \mathbf{A}^* \quad (3.9)$$

elde edilir. Burada $(\Pi^T)^*$

$$(\Pi^T)^*(x) = \begin{bmatrix} \Pi^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Pi^T & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Pi^T \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3.4. Sıralama (Collocation) Noktalarına Dayalı Matris Bağıntıları

Bu çalışmada kullanılacak sıralama noktaları

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.10)$$

ile tanımlanır. Bu sıralama noktaları (3.1) ile verilen denklem de yerine konulursa,

$$N(x_i)(y'(x_i))^2 + Q(x_i)y(x_i)y'(x_i) + R(x_i)y'(x_i) + S(x_i)y(x_i) + T(x_i)(y(x_i))^2 = G(x_i); \quad (3.11)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N; \quad -1 \leq x \leq 1$$

sistemi elde edilir. Bu sistem (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) ve (3.9) matris bağıntılarında (3.10) sıralama noktaları kullanılarak

$$(NP(\Pi^T)P^*(\Pi^T)^* + QPP^*(\Pi^T)^* + TPP^*)A^* + (RP\Pi^T + SP)A = G \quad (3.12)$$

şeklindeki temel matris denklemine dönüştürülür.

Burada;

$$N = \begin{bmatrix} N(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N(x_1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N(x_N) \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} Q(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q(x_1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q(x_N) \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} R(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R(x_1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R(x_N) \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} S(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S(x_1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S(x_N) \end{bmatrix};$$

$$T = \begin{bmatrix} T(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T(x_1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T(x_N) \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix};$$

$$P = \begin{bmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0(x_0) & P_1(x_0) & P_2(x_0) & \cdots & P_N(x_0) \\ P_0(x_1) & P_1(x_1) & P_2(x_1) & \cdots & P_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_0(x_N) & P_1(x_N) & P_2(x_N) & \cdots & P_N(x_N) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

(3.2) koşullarına karşı gelen matris denklemi (3.5) bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(a) &= \begin{bmatrix} 1 & a & \frac{1}{2}(3a^2 - 1) & \dots \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}(b) &= \begin{bmatrix} 1 & b & \frac{1}{2}(3b^2 - 1) & \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\{\alpha \mathbf{P}(a) + \beta \mathbf{P}(b)\} \mathbf{A} = \lambda \quad (3.13)$$

biçiminde elde edilir.

Lineer olmayan (3.1) denkleminin sıralama noktalarına dayalı (3.12) temel matris denklemi, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ bilinmeyen Legendre katsayıları $(N+1)$ lineer olmayan cebirsel denklemden oluşan bir sisteme karşı gelir.

(3.12) denklemi kısaca;

$$\mathbf{W}\mathbf{A}^* + \mathbf{V}\mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.14)$$

veya arttırılmış matris olarak

$$[\mathbf{W}; \mathbf{V} : \mathbf{G}] \quad (3.15)$$

biçiminde yazılabilir. Burada,

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = [w_{pq}] &= \mathbf{N}\mathbf{P}\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}^* (\mathbf{\Pi}^T)^* + \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{P}^* (\mathbf{\Pi}^T)^* + \mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{P}^*; \quad p, q = 0, 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{V} = [v_{pq}] &= \mathbf{R}\mathbf{P}\mathbf{\Pi}^T + \mathbf{S}\mathbf{P} \end{aligned}$$

şeklindedir.

(3.2) karışık koşullarına karşılık gelen (3.13) temel matris denklemi, kısaca

$$\mathbf{Z}\mathbf{A} = [\lambda]$$

veya arttırılmış matris olarak

$$[\mathbf{Z}; 0; \lambda] \quad (3.16)$$

biçiminde yazılabilir. Burada 0 ve Z matrisleri

$$\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times (N+1)}$$

ve

$$\mathbf{Z} = [z_0 \ z_1 \ z_2 \ \dots \ z_N] = \alpha P(a) + \beta P(b)$$

$$\mathbf{Z} = [z_j] = \left[1 \ a \ \frac{1}{2}(3a^2 - 1) \ \dots \right] + \left[1 \ b \ \frac{1}{2}(3b^2 - 1) \ \dots \right]$$

olarak tanımlanmıştır.

(3.1) denkleminin (3.2) koşuluna göre Legendre polinomu cinsinden çözümünü elde etmek için (3.15) arttırılmış matrisinin son satırı silinerek, yerine koşulla ilgili (3.16) satır matrisinin konulmasıyla elde edilen yeni arttırılmış matris

$$[\overline{\mathbf{W}}; \overline{\mathbf{V}} : \overline{\mathbf{G}}] = \quad (3.17)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|c} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & v_{00} & v_{01} & \cdots & v_{0N} & : & G(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & v_{10} & v_{11} & \cdots & v_{1N} & : & G(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ; & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & : & \vdots \\ w_{N-1,0} & w_{N-1,1} & \cdots & w_{N-1,N} & ; & v_{N-1,0} & v_{N-1,1} & \cdots & v_{N-1,N} & : & G(x_{N-1}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ; & z_0 & z_1 & \cdots & z_N & : & \lambda \end{array} \right]$$

veya karşılık gelen matris denklemini

$$\overline{\mathbf{W}}\mathbf{A}^* + \overline{\mathbf{V}}\mathbf{A} = \overline{\mathbf{G}} \quad (3.18)$$

şeklinde olur; burada

$$\overline{\mathbf{W}} = \left[\begin{array}{cccc} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N-1,0} & w_{N-1,1} & \cdots & w_{N-1,N} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]; \quad \overline{\mathbf{V}} = \left[\begin{array}{cccc} v_{00} & v_{01} & \cdots & v_{0N} \\ v_{10} & v_{11} & \cdots & v_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{N-1,0} & v_{N-1,1} & \cdots & v_{N-1,N} \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_N \end{array} \right];$$

$$\overline{\mathbf{G}} = \left[\begin{array}{c} G(x_0) \\ G(x_1) \\ \vdots \\ \lambda \end{array} \right]$$

biçiminde tanımlanırlar.

(3.18) matris denkleminin karşı gelen lineer olmayan cebirsel sisteminden, bilinmeyen a_n , $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ Legendre katsayıları belirlenebilir. Sonuç olarak (3.18) matris denklemini yardımıyla (3.3) kesilmiş seri formunda yaklaşık çözüm elde edilir.

3.5. Çözümün Doğruluğu

Çözümün doğruluğunu kontrol etmek için aşağıdaki yol izlenebilir. (Güçlü, İ., 2009)

(3.3) Legendre polinomu (3.1) denkleminin bir yaklaşık çözümü olduğu için $y(x)$ ve türevi (3.1) de yerine konulduğunda sonuç denklem yaklaşık olarak sağlanmalıdır; yani

$$x = x_i \in [a, b] \text{ için}$$

$$E(x_i) = \left| N(x_i)y'^2(x_i) + Q(x_i)y(x_i)y'(x_i) + R(x_i)y'(x_i) + S(x_i)y(x_i) + T(x_i)y^2(x_i) - G(x_i) \right| \cong 0$$

veya

$$E(x_i) \leq 10^{-k_i} \quad (k_i \in \mathbb{Z}^+).$$

Eğer $\max 10^{-k_i} \quad (k \in \mathbb{Z}^+) = 10^{-k} \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$ belirlenmiş ise, N kesme sınırı $E(x)$ farklı her bir noktada belirlenen 10^{-k} değerden daha küçük kalıncaya kadar arttırılır. Diğer yandan hata

$$E_N(x) = N(x) \left(y'_N(x) \right)^2 + Q(x) y_N(x) y'_N(x) + R(x) y'_N(x) + S(x) y_N(x) + T(x) y_N^2(x) - G(x)$$

fonksiyonu ile tanımlanabilir. Eğer N yeterince büyük olduğunda $E_N(x) \rightarrow 0$ ise o zaman hata azalır.

4. LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İLE İLGİLİ NÜMERİK UYGULAMALAR

Bu bölümde çalışmada sunulan “Legendre Sıralama (Collocation) Yöntemi” nin kullanılabilirliğini açıklamak için aşağıdaki birinci mertebeden değişken ve sabit katsayılı lineer olmayan diferansiyel denklem örnekleri incelenmiştir.

ÖRNEK 4.1. Birinci mertebeden lineer olmayan

$$(y'(x))^2 - x^2 y(x) = 1 - x^3, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.1)$$

diferansiyel denklemini ve

$$y(-1) + 2y(1) = 1,$$

koşulunu göz önüne alalım ve bu denklemin $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^2 a_n P_n(x),$$

sonlu Legendre serisiyle yaklaşalım.

$$N(x) = 1, Q(x) = 0, R(x) = 0, S(x) = -x^2, T(x) = 0, G(x) = 1 - x^3$$

olup $N = 2$ için

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i = -1 + \frac{2}{2}i ; i = 0,1,2,$$

$$\{x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1\}$$

olarak bulunur. (3.12)'de tanımlanan N, Q, R, S, T, A ve G matrisleri,

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, & \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ve (3.7) de tanımlanan $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^*$, $\mathbf{A}^*$ matrisleri ile (3.6) da tanımlanan Π matrisi de

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^* = [a_0 a_0 \quad a_0 a_1 \quad a_0 a_2 \quad a_1 a_0 \quad a_1 a_1 \quad a_1 a_2 \quad a_2 a_0 \quad a_2 a_1 \quad a_2 a_2]^T$$

olarak bulunur. Verilen denklem ve koşul için matris denklemleri

$$\mathbf{NP} \Pi^T \mathbf{P}^* (\Pi^T)^* \mathbf{A}^* + \mathbf{SPA} = \mathbf{G}$$

ve

$$\{\mathbf{P}(-1) + 2\mathbf{P}(1)\} \mathbf{A} = [1]$$

olarak elde edilir. İstenilen arttırılmış matris,

$$[\overline{\mathbf{W}}; \overline{\mathbf{V}} : \overline{\mathbf{G}}] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -9 & ; & -1 & 1 & -1 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 3 & 1 & 3 & : & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde; ve buna karşılık gelen matris denklemini

$$[\overline{WA}^* + \overline{VA}] = [\overline{G}]$$

yani açık olarak;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 a_0 \\ a_0 a_1 \\ a_0 a_2 \\ a_1 a_0 \\ a_1 a_1 \\ a_1 a_2 \\ a_2 a_0 \\ a_2 a_1 \\ a_2 a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Elde edilen sistemden $\{a_0, a_1, a_2\}$ katsayıları

$$\{a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0\}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar,

$$y(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = x$$

formundaki tam çözümü elde edilir.

ÖRNEK 4.2. Birinci mertebeden lineer olmayan

$$x(y'(x))^2 + yy' - xy^2 = e^{2x}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.2)$$

diferansiyel denklemini ve

$$y(0) = 1$$

başlangıç koşulunu göz önüne alalım ve $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^2 a_n P_n(x),$$

sonlu Legendre serisiyle $N = 2$ olarak yaklaşalım.

$N(x) = x$, $S(x) = R(x) = 0$, $T(x) = -x$, $Q(x) = 1$, $G(x) = e^{2x}$ olup $N = 2$ için

$$x_i = 0 + \frac{1}{N}i = 0 + \frac{1}{2}i ; i = 0,1,2,$$

$$\{x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1\}$$

bulunur. (3.12)'de tanımlanan N, Q, R, S, T, A ve G matrisleri,

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{1/2} \\ e^1 \end{bmatrix}$$

ve (3.7) de tanımlanan P, P^*, A^* matrisleri ile (3.6) da tanımlanan Π matrisi de

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^* = [a_0 a_0 \quad a_0 a_1 \quad a_0 a_2 \quad a_1 a_0 \quad a_1 a_1 \quad a_1 a_2 \quad a_2 a_0 \quad a_2 a_1 \quad a_2 a_2]^T$$

olarak bulunur. Böylece verilen denklem ve koşul için matris denklemleri

$$(NP\Pi^T P^*(\Pi^T)^* + QPP^*(\Pi^T)^* + TPP^*)A^* = G$$

ve

$$[P(0)]A = [1]$$

olarak elde edilir. İstenilen arttırılmış matris,

$$[\overline{W}; \overline{V} : \overline{G}] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -3/2 & ; & 0 & 0 & 0 & : & 1 \\ -1/2 & 1 & 1/4 & -1/4 & 7/8 & 49/32 & 1/16 & 11/16 & 31/16 & ; & 0 & 0 & 0 & : & e^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 & 0 & -1/2 & : & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir; ve buna karşılık gelen matris denklemi

$$[\overline{W}A^* + \overline{V}A] = [\overline{G}]$$

yani açık olarak,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \\ -1/2 & 1 & 1/4 & -1/4 & 7/8 & 25/32 & 1/16 & 11/16 & 31/16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 a_0 \\ a_0 a_1 \\ a_0 a_2 \\ a_1 a_0 \\ a_1 a_1 \\ a_1 a_2 \\ a_2 a_0 \\ a_2 a_1 \\ a_2 a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{1/2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Elde edilen sistemden a_0 , a_1 ve a_2 Legendre katsayıları

$$\left\{ a_0 = \frac{7}{6}, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{3} \right\}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar ,

$$y(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

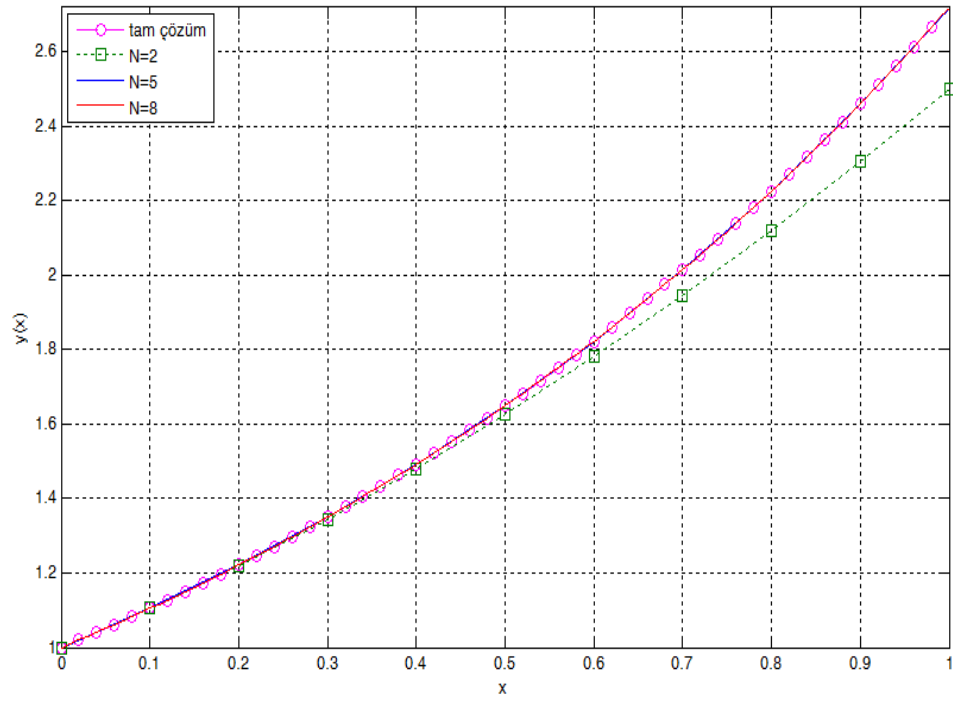
ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

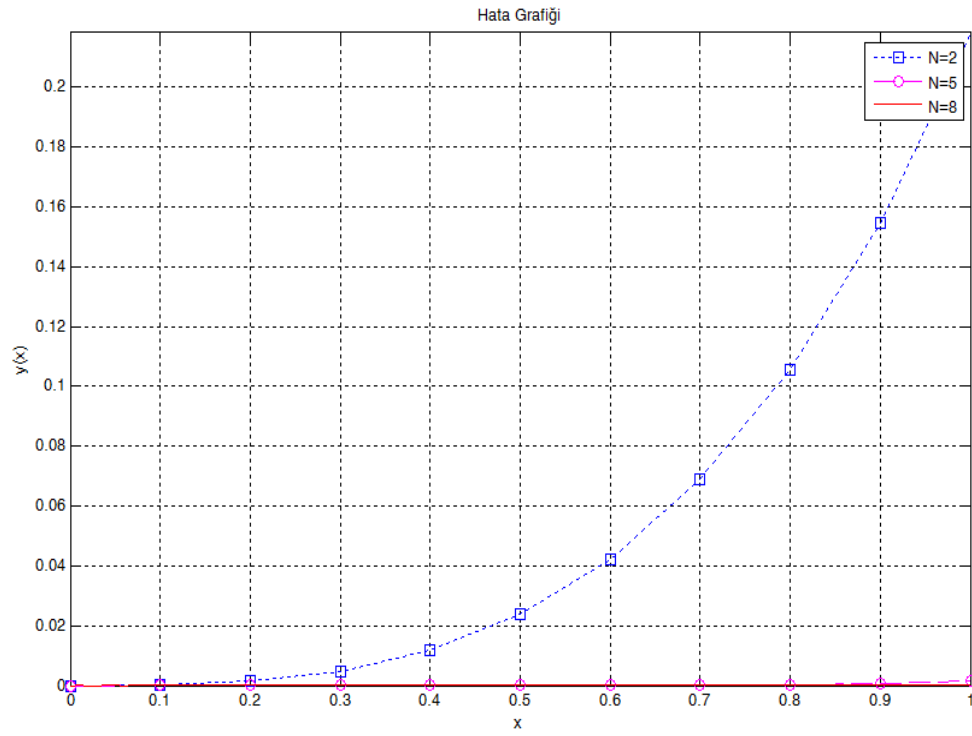
Legendre polinom çözümü elde edilir. Bu elde edilen çözüm e^x 'in Taylor açılımının ilk üç terimidir. Böylece N 'in farklı değerleri için bulunan çözümlerle denklemin tam çözümü olan $y = e^x$ 'in $[0,1]$ aralığındaki karşılaştırılması aşağıdaki Tablo 4.1, Grafik 4.1 ve Grafik 4.2'de verilmiştir.

Tablo 4.1. Örnek 4.2'nin $N = 2$, $N = 5$ ve $N = 8$ için Nümerik Sonuçları

	Tam çözüm	Legendre Collocation					
x_i	$y(x) = e^x$	$y(x_i), N = 2$	$E(x_i), N = 2$	$y(x_i), N = 5$	$E(x_i), N = 5$	$y(x_i), N = 8$	$E(x_i), N = 8$
0	1	1	0	1	0	1	0
0.1	1.10517091807	1.10500000000	1.7091807E-04	1.1051709166	1.4089809E-09	1.1051709180	2.7835418E-015
0.2	1.22140275816	1.22000000000	1.4027581E-03	1.2214026666	9.1493503E-08	1.2214027581	1.4396751E-012
0.3	1.34985880757	1.34500000000	4.8588075E-03	1.34985775	1.0575760E-06	1.3498588075	5.5913818E-011
0.4	1.49182469764	1.48000000000	1.1824697E-02	1.4918186666	6.0309746E-06	1.4918246968	7.5238142E-010
0.5	1.64872127070	1.62500000000	2.237213E-002	1.6486979166	2.3354033E-05	1.6487212650	5.6641658E-09
0.6	1.82211880039	1.78000000000	4.2118803E-02	1.8222048	7.0800390E-05	1.8221187708	2.95333608E-08
0.7	2.01375270747	1.94500000000	6.8752707E-02	2.0135714166	1.8129080E-04	2.0137525879	1.19513879E-07
0.8	2.2255409284	2.12000000000	1.0554098E-01	2.2251306666	4.1026182E-04	2.2255405367	4.01762308E-07
0.9	2.45960311115	2.30500000000	1.5460311E-01	2.45875825	8.4486115E-04	2.4596019389	1.17220828E-06
1	2.71828182845	2.50000000000	2.1828183E-01	2.7166666666	1.6151617E-03	2.718278769	3.05861775E-06



Grafik 4.1. Örnek 4.2'nin $N = 2$, $N = 5$ ve $N = 8$ için yaklaşık çözüm grafiği



Grafik 4.2. Örnek 4.2'nin $N = 2$, $N = 5$ ve $N = 8$ için hata analiz grafiği

ÖRNEK 4.3. Birinci mertebeden lineer olmayan

$$(y'(x))^2 + 3xy'(x) - y(x) = -\frac{3}{2}x^2, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.3)$$

diferansiyel denklemini ve

$$y(0) = 1$$

başlangıç koşulunu göz önüne alalım ve $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^2 a_n P_n(x),$$

sonlu Legendre serisiyle $N = 2$ alarak yaklaşalım.

$$N(x) = 1, Q(x) = 0, R(x) = 3x, S(x) = -1, T(x) = 0, G(x) = \frac{-3}{2}x^2$$

olup $N = 2$ için

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i = -1 + \frac{2}{2}i; \quad i = 0, 1, 2,$$

$$\{x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1\}$$

bulunur. (3.12)'de tanımlanan N, Q, R, S, T, A ve G matrisleri,

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

ve (3.7) de tanımlanan P, P^*, A^* matrisleri (3.6) da tanımlanan Π matrisi de

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^* = [a_0a_0 \quad a_0a_1 \quad a_0a_2 \quad a_1a_0 \quad a_1a_1 \quad a_1a_2 \quad a_2a_0 \quad a_2a_1 \quad a_2a_2]^T$$

olarak bulunur. Böylece verilen denklem ve koşul için matris denklemleri

$$\mathbf{NP}\Pi^T \mathbf{P}^*(\Pi^T)^* \mathbf{A}^* + (\mathbf{RP}\Pi^T + \mathbf{SP})\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

ve

$$[\mathbf{P}(0)]\mathbf{A} = [\mathbf{1}]$$

olarak elde edilir. İstenilen arttırılmış matris,

$$[\bar{\mathbf{W}}; \bar{\mathbf{V}} : \bar{\mathbf{G}}] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -9 & ; & -1 & -2 & 8 & : & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & -1 & 0 & 1/2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 & 0 & -1/2 & : & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buna karşılık gelen matris denklemi

$$[\bar{\mathbf{W}}\mathbf{A}^* + \bar{\mathbf{V}}\mathbf{A}] = [\bar{\mathbf{G}}]$$

yani açık olarak,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0a_0 \\ a_0a_1 \\ a_0a_2 \\ a_1a_0 \\ a_1a_1 \\ a_1a_2 \\ a_2a_0 \\ a_2a_1 \\ a_2a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu sistemin çözümünden

a_0, a_1 ve a_2 Legendre katsayıları

$$\left\{ a_0 = \frac{5}{6}, a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{3} \right\}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar ,

$$y(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

formundaki tam çözüm elde edilir.

ÖRNEK 4.4. Birinci mertebeden lineer olmayan (Riccati diferansiyel denklem)

$$xy'(x) - xy(x) + y^2(x) = e^{2x} \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.4)$$

diferansiyel denkleminin

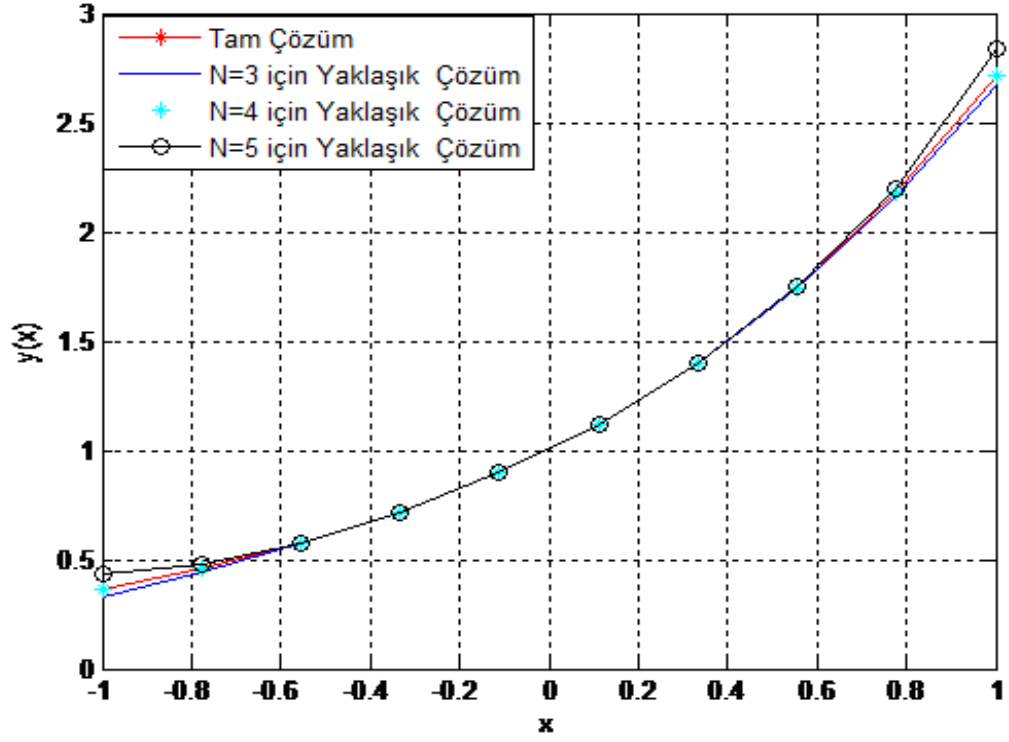
$$y(0) = 1$$

başlangıç koşuluna göre Legendre polinom cinsinden çözümünü araştıralım.

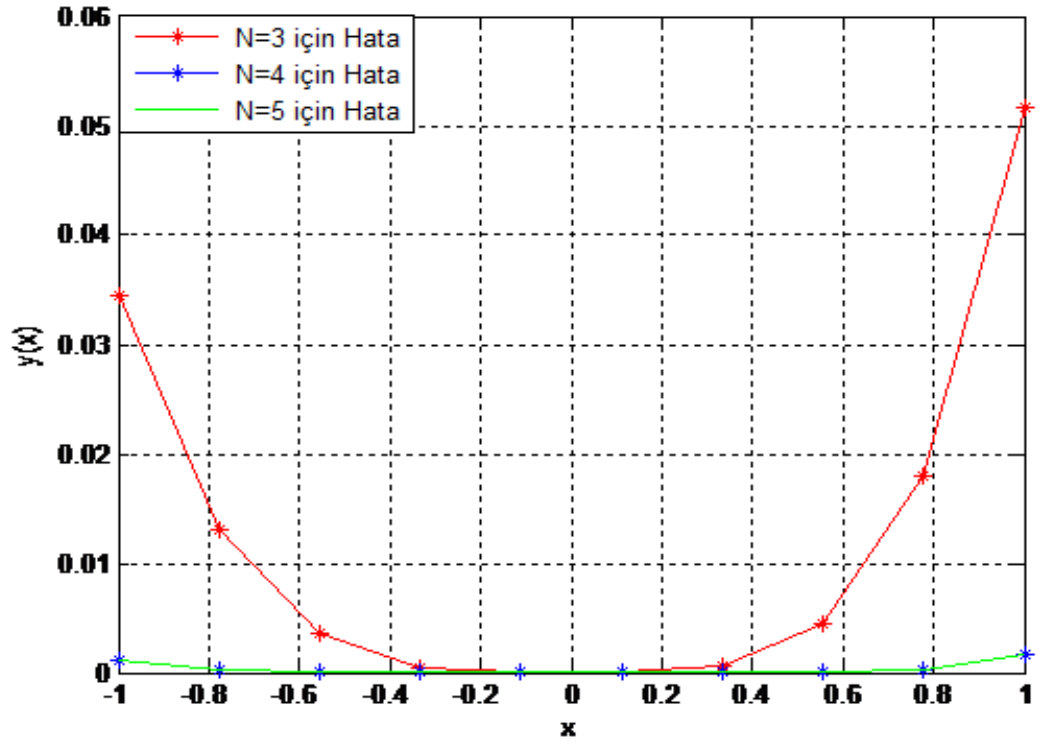
Önceki örneklerde yapılan işlemler tekrarlandığında verilen denklemin farklı N değerleri ($N = 3, 4, 5$) için bulunan yaklaşık çözümler ile denklemin tam çözümü olan $y(x) = e^x$ 'in $[-1, 1]$ aralığındaki karşılaştırılması Tablo 4.2, Grafik 4.3, Grafik 4.4'te verilmiştir.

Tablo 4.2. Örnek 4.4'ün $N = 3$, $N = 4$ ve $N = 5$ için Nümerik Sonuçları

	Tam çözüm	Legendre Collocation					
x_i	$y(x) = e^x$	$y(x_i), N = 3$	$E(x_i), N = 3$	$y(x_i), N = 4$	$E(x_i), N = 4$	$y(x_i), N = 5$	$E(x_i), N = 5$
-1	0.367879	0.334323	3.355627E-02	0.375008	7.129406E-03	0.366674	1.205123E-03
-0.8	0.449329	0.435370	1.39587E-02	0.451714	2.385336E-03	0.449005	3.234411E-04
-0.6	0.548811	0.544421	4.390231E-03	0.549368	5.565309E-04	0.548751	5.977526E-05
-0.4	0.67032	0.669516	8.033632E-04	0.670368	4.796019E-05	0.670313	6.920744E-06
-0.2	0.818730	0.818696	3.456772E-05	0.818712	1.854363E-05	0.818729	1.547447E-06
0.0	1.00000	1.000000	0.0	1.000000	0.0	1.000000	0.0
0.2	1.221403	1.221468	6.545648E-05	1.221431	2.867506E-05	1.221406	2.751472E-02
0.4	1.491825	1.491141	6.837805E-04	1.491807	1.730121E-05	1.491826	1.205291E-06
0.6	1.822119	1.817058	5.060605E-03	1.82153	5.891915E-04	1.822062	5.722084E-05
0.8	2.225541	2.20726	1.828079E-02	2.222601	2.940306E-03	2.225153	3.87694E-04
1	2.718282	2.669787	4.8495E-02	2.708624	9.658009E-03	2.716702	1.579906E-03



Grafik 4.3. Örnek 4.4'ün $N = 3$, $N = 4$ ve $N = 5$ için yaklaşık çözüm grafiği



Grafik 4.4. Örnek 4.4'ün $N = 3$, $N = 4$ ve $N = 5$ için hata analiz grafiği

ÖRNEK 4.5. Birinci mertebeden lineer olmayan

$$(y'(x))^2 - xy(x)y'(x) - x^2y(x) + y^2(x) = 1 - x^5 \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.5)$$

diferansiyel denklemini ve

$$y(-1) + 2y(1) = 1,$$

koşulunu göz önüne alalım ve $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^2 a_n P_n(x),$$

sonlu Legendre serisi ile $N = 2$ olarak yaklaşalım.

$$N(x) = 1, Q(x) = -x, R(x) = 0, S(x) = -x^2, T(x) = 1, G(x) = 1 - x^5 \text{ olup } N = 2$$

için

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i = -1 + \frac{2}{2}i ; i = 0,1,2,$$

$$\{x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1\}$$

bulunur. (3.12)'de tanımlanan N, Q, R, S, T, A ve G matrisleri,

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve (3.7) de tanımlanan P, P^*, A^* matrisleri ile (3.6) da tanımlanan Π matrisi de

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^* = [a_0a_0 \quad a_0a_1 \quad a_0a_2 \quad a_1a_0 \quad a_1a_1 \quad a_1a_2 \quad a_2a_0 \quad a_2a_1 \quad a_2a_2]^T$$

şeklinde elde edilir. Verilen denklem ve koşul için matris denklemleri;

$$(\mathbf{NP}\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}^*(\mathbf{\Pi}^T)^* + \mathbf{QPP}^*(\mathbf{\Pi}^T)^* + \mathbf{TPP}^*)\mathbf{A}^* + \mathbf{SPA} = \mathbf{G}$$

ve

$$\{\mathbf{P}(-1) + 2\mathbf{P}(1)\}\mathbf{A} = [1]$$

olarak elde edilir. İstenilen arttırılmış matris,

$$[\overline{\mathbf{W}}; \overline{\mathbf{V}} : \overline{\mathbf{G}}] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & -5 & ; & -1 & 1 & -1 & : & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & ; & 0 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 3 & 1 & 3 & : & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir; ve buna karşılık gelen matris denklemi

$$[\overline{WA}^* + \overline{VA}] = [\overline{G}]$$

yani açık olarak,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 a_0 \\ a_0 a_1 \\ a_0 a_2 \\ a_1 a_0 \\ a_1 a_1 \\ a_1 a_2 \\ a_2 a_0 \\ a_2 a_1 \\ a_2 a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Bu sistemin çözümünden a_0 , a_1 ve a_2 Legendre katsayıları

$$\{ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0 \}$$

bulunur. Elde edilen katsayılar,

$$y(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = x$$

formundaki tam çözüm elde edilir.

ÖRNEK 4.6. Birinci mertebeden lineer olmayan

$$y'(x) - x^2 y(x) + xy^2(x) = -x^5 + x + 1, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.6)$$

diferansiyel denklemini ve

$$y(0) = -1$$

başlangıç koşulunu göz önüne alalım ve $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^2 a_n P_n(x),$$

sonlu Legendre serisiyle $N = 2$ olarak yaklaşalım.

$$N(x) = Q(x) = 0, R(x) = 1, S(x) = -x^2, T(x) = x, G(x) = -x^5 + x + 1 \text{ olup}$$

$N = 2$ için

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i = -1 + \frac{2}{2}i ; i = 0,1,2,$$

$$\{x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1\}$$

bulunur. (3.12)'de tanımlanan N, Q, R, S, T, A ve G matrisleri,

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ve (3.7) de tanımlanan P, P^*, A^* matrisleri ile (3.6) da tanımlanan Π matrisi de

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^* = [a_0 a_0 \quad a_0 a_1 \quad a_0 a_2 \quad a_1 a_0 \quad a_1 a_1 \quad a_1 a_2 \quad a_2 a_0 \quad a_2 a_1 \quad a_2 a_2]^T$$

şeklinde elde edilir. Böylece verilen denklem ve koşul için matris denklemleri

$$TPP^* A^* + (RP \Pi^T + SP)A = G$$

ve

$$[P(0)]A = [-1]$$

olarak elde edilir. İstenilen arttırılmış matris,

$$[\overline{W}; \overline{V} : \overline{G}] =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & -1 & -1 & ; & -1 & 2 & -4 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 & 0 & -1/2 & : & -1 \end{bmatrix}$$

ve karşılık gelen matris denklemi

$$[\overline{W}A^* + \overline{V}A] = [\overline{G}]$$

yani açık olarak,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 a_0 \\ a_0 a_1 \\ a_0 a_2 \\ a_1 a_0 \\ a_1 a_1 \\ a_1 a_2 \\ a_2 a_0 \\ a_2 a_1 \\ a_2 a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Elde edilen sistemden a_0 , a_1 ve a_2 Legendre katsayıları

$$\{ a_0 = -1, a_1 = 1, a_2 = 0 \}$$

olarak bulunur. Böylece katsayılar

$$y(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

ifadesinde yerine yazılırsa,

$$y(x) = x - 1$$

formundaki tam çözüm elde edilir.

ÖRNEK 4.7.

$$(y'(x))^2 + 2xy'(x) - 4y(x) = 4x^2 - 2x - 3 \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.7)$$

diferansiyel denklemini ve

$$y(0) = 1$$

başlangıç koşulunu göz önüne alalım ve $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^2 a_n P_n(x),$$

sonlu Legendre serisiyle $N = 2$ alarak yaklaşalım.

$$N(x) = 1, Q(x) = 0, R(x) = 2x, S(x) = -4, T(x) = 0, G(x) = 4x^2 - 2x - 3 \text{ olup}$$

$N = 2$ için

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i = -1 + \frac{2}{2}i \quad ; \quad i = 0,1,2,$$

$$\{x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1\}$$

bulunur. (3.12)'de tanımlanan N, Q, R, S, T, A ve G matrisleri,

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ve (3.7) de tanımlanan P, P^*, A^* matrisleri ile (3.6) da tanımlanan Π matrisi de

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^* = [a_0a_0 \quad a_0a_1 \quad a_0a_2 \quad a_1a_0 \quad a_1a_1 \quad a_1a_2 \quad a_2a_0 \quad a_2a_1 \quad a_2a_2]^T$$

şeklinde elde edilir. Böylece verilen denklem ve koşul için matris denklemleri

$$\mathbf{NP}\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}^* (\mathbf{\Pi}^T)^* \mathbf{A}^* + (\mathbf{RP}\mathbf{\Pi}^T + \mathbf{SP})\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

ve

$$[\mathbf{P}(0)]\mathbf{A} = [1]$$

şeklindedir. İstenilen arttırılmış matris,

$$[\overline{\mathbf{W}}; \overline{\mathbf{V}} : \overline{\mathbf{G}}] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -9 & ; & -4 & 2 & 2 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & -4 & 0 & 2 & : & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 & 0 & -1/2 & : & 1 \end{bmatrix}$$

ve bunakarşılık gelen matris denklemi;

$$[\overline{WA}^* + \overline{VA}] = [\overline{G}]$$

yani açık olarak

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 a_0 \\ a_0 a_1 \\ a_0 a_2 \\ a_1 a_0 \\ a_1 a_1 \\ a_1 a_2 \\ a_2 a_0 \\ a_2 a_1 \\ a_2 a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Elde edilen sistemden $\{a_0, a_1, a_2\}$ katsayıları

$$\left\{ a_0 = \frac{4}{3}, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{2}{3} \right\}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar,

$$y(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = x^2 - x + 1$$

formundaki tam çözüm elde edilir.

ÖRNEK 4.8. Birinci mertebeden lineer olmayan

$$(y'(x))^2 + y(x)y'(x) - 2xy(x) = 8x^2 + 30x + 20, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.8)$$

diferansiyel denklemini ve

$$y(0) = 1$$

başlangıç koşulunu göz önüne alalım ve $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^2 a_n P_n(x),$$

sonlu Legendre serisiyle $N = 2$ alarak yaklaşalım.

$$N(x) = 1, \quad Q(x) = 1, \quad R(x) = T(x) = 0, \quad S(x) = -2x, \quad G(x) = 8x^2 + 30x + 20 \quad \text{olup}$$

$N = 2$ için

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i = -1 + \frac{2}{2}i ; i = 0,1,2,$$

$$\{x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1\}$$

bulunur. (3.12)'de tanımlanan N, Q, R, S, T, A ve G matrisleri,

$$N = Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad T = R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -2 \\ 20 \\ 58 \end{bmatrix}$$

ve (3.7) de tanımlanan P, P^*, A^* matrisleri ile (3.6) da tanımlanan Π matrisi de

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^* = [a_0 a_0 \quad a_0 a_1 \quad a_0 a_2 \quad a_1 a_0 \quad a_1 a_1 \quad a_1 a_2 \quad a_2 a_0 \quad a_2 a_1 \quad a_2 a_2]^T$$

şeklinde elde edilir. Böylece verilen denklem ve koşul için matris denklemleri

$$(NP\Pi^T P^*(\Pi^T)^* + QPP^*(\Pi^T)^*)A^* + SPA = G$$

ve

$$[P(0)]A = [1]$$

olarak elde edilir. İstenilen arttırılmış matris

$$[\overline{W}; \overline{V} : \overline{G}] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & ; & 2 & -2 & 2 & : & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -3/2 & ; & 0 & 0 & 0 & : & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 & 0 & -1/2 & : & 1 \end{bmatrix}$$

veya karşılık gelen lineer olmayan cebirsel denklem sistemi,

$$a_0 a_1 - 3a_0 a_2 - 2a_1 a_2 - 6a_2^2 + 2a_0 - 2a_1 + 2a_2 = -2$$

$$a_0 a_1 - 3a_0 a_2 + a_1^2 - \frac{a_1 a_2}{2} - \frac{3}{2} a_2^2 = 20$$

$$a_0 - \frac{a_2}{2} = 1$$

olarak elde edilir. Bu sistemin çözümünden a_0 , a_1 ve a_2 Legendre katsayıları

$$\left\{ a_0 = \frac{4}{3}, a_1 = 4, a_2 = \frac{2}{3} \right\}$$

bulunur. Elde edilen katsayılar,

$$y(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = x^2 + 4x + 1$$

formundaki tam çözüm elde edilir.

ÖRNEK 4.9.

$$(y'(x))^2 + 4xy'(x) - 2y(x) = -2x^2, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.9)$$

diferansiyel denklemini ve

$$y(0) = 2$$

başlangıç koşulunu göz önüne alalım ve $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^2 a_n P_n(x),$$

sonlu Legendre serisiyle $N = 2$ alarak yaklaşalım.

$$N(x)=1, Q(x)=T(x)=0, R(x)=4x, S(x)=-2, G(x)=-2x^2 \text{ olup } N=2 \text{ için}$$

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i = -1 + \frac{2}{2}i ; i = 0,1,2,$$

$$\{x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1\}$$

bulunur. (3.12)'de tanımlanan N, Q, R, S, T, A ve G matrisleri,

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ve (3.7) de tanımlanan P, P^*, A^* matrisleri ile (3.6) da tanımlanan Π matrisi de

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^* = [a_0 a_0 \quad a_0 a_1 \quad a_0 a_2 \quad a_1 a_0 \quad a_1 a_1 \quad a_1 a_2 \quad a_2 a_0 \quad a_2 a_1 \quad a_2 a_2]^T$$

şeklinde elde edilir. Böylece verilen denklem ve koşul için matris denklemleri

$$NP\Pi^T P^* (\Pi^T)^* A^* + (RP\Pi^T + SP)A = G$$

ve

$$[P(0)]A = [2]$$

olarak elde edilir. İstenilen artırılmış matris,

$$[\bar{W}; \bar{V} : \bar{G}] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -9 & ; & -2 & -2 & 10 & : & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & -2 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 & 0 & -1/2 & : & 2 \end{bmatrix}$$

ve buna karşılık gelen matris denklemi

$$[\bar{W}A^* + \bar{V}A] = [\bar{G}]$$

yani açık olarak,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 a_0 \\ a_0 a_1 \\ a_0 a_2 \\ a_1 a_0 \\ a_1 a_1 \\ a_1 a_2 \\ a_2 a_0 \\ a_2 a_1 \\ a_2 a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 & 10 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Elde edilen sistemden a_0 , a_1 ve a_2 Legendre katsayıları

$$\left\{ a_0 = \frac{11}{6}, a_1 = 2, a_2 = \frac{-1}{3} \right\}$$

olarak bulunur. Bulunan katsayılar ,

$$y(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = 2 \mp 2x - \frac{1}{2}x^2$$

formundaki tam çözüm elde edilir.

ÖRNEK 4.10.

$$x(y'(x))^2 - xy^2(x) + y(x) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.10)$$

diferansiyel denklemini ve

$$y(0) = 1$$

başlangıç koşulunu göz önüne alalım ve $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^2 a_n P_n(x),$$

sonlu Legendre serisiyle $N = 2$ alarak yaklaşalım.

$$N(x) = x, \quad Q(x) = R(x) = 0, \quad T(x) = -x, \quad S(x) = 1, \quad G(x) = e^x \text{ olup } N = 2$$

için

$$x_i = 0 + \frac{1}{N}i = 0 + \frac{1}{2}i; \quad i = 0, 1, 2,$$

$$\{x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1\}$$

bulunur. (3.12)'de tanımlanan N, Q, R, S, T, A ve G matrisleri,

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{1/2} \\ e \end{bmatrix}$$

ve (3.7) de tanımlanan P, P^*, A^* matrisleri ile (3.6) da tanımlanan Π matrisi de

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^* = [a_0a_0 \quad a_0a_1 \quad a_0a_2 \quad a_1a_0 \quad a_1a_1 \quad a_1a_2 \quad a_2a_0 \quad a_2a_1 \quad a_2a_2]^T$$

şeklindedir. Verilen denklem ve koşul için matris denklemi;

$$(\mathbf{NP}\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}^*(\mathbf{\Pi}^T)^* + \mathbf{TPP}^*)\mathbf{A}^* + \mathbf{SPA} = \mathbf{G}$$

ve

$$[\mathbf{P}(0)]\mathbf{A} = [\mathbf{1}]$$

olarak elde edilir. İstenilen arttırılmış matris,

$$[\overline{\mathbf{W}}; \overline{\mathbf{V}} : \overline{\mathbf{G}}] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 & 0 & -1/2 & : & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/4 & -1/4 & 3/8 & 25/32 & 1/16 & 13/16 & 37/16 & ; & 1 & 1/2 & -1/8 & : & e^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 & 0 & -1/2 & : & 1 \end{bmatrix}$$

ve buna karşılık gelen matris denklemi

$$[\overline{\mathbf{W}}\mathbf{A}^* + \overline{\mathbf{V}}\mathbf{A}] = [\overline{\mathbf{G}}]$$

yani açık olarak,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/4 & -1/4 & 3/8 & 25/32 & 1/16 & 13/16 & 37/16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 a_0 \\ a_0 a_1 \\ a_0 a_2 \\ a_1 a_0 \\ a_1 a_1 \\ a_1 a_2 \\ a_2 a_0 \\ a_2 a_1 \\ a_2 a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/8 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{1/2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Elde edilen sistemden a_0 , a_1 ve a_2 Legendre katsayıları

$$\left\{ a_0 = \frac{7}{6}, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{3} \right\}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar

$$y(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

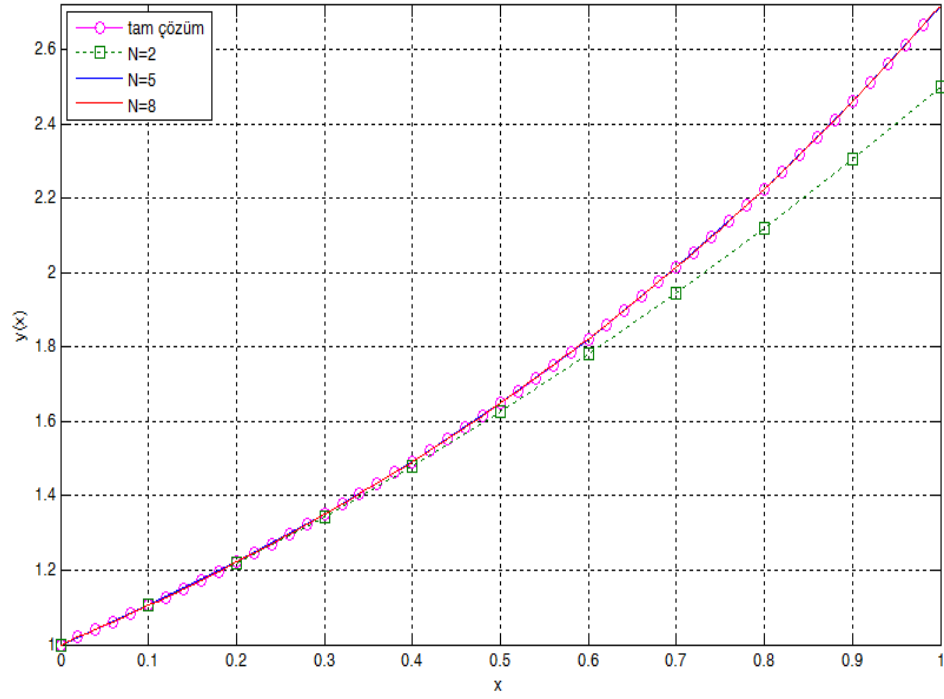
ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

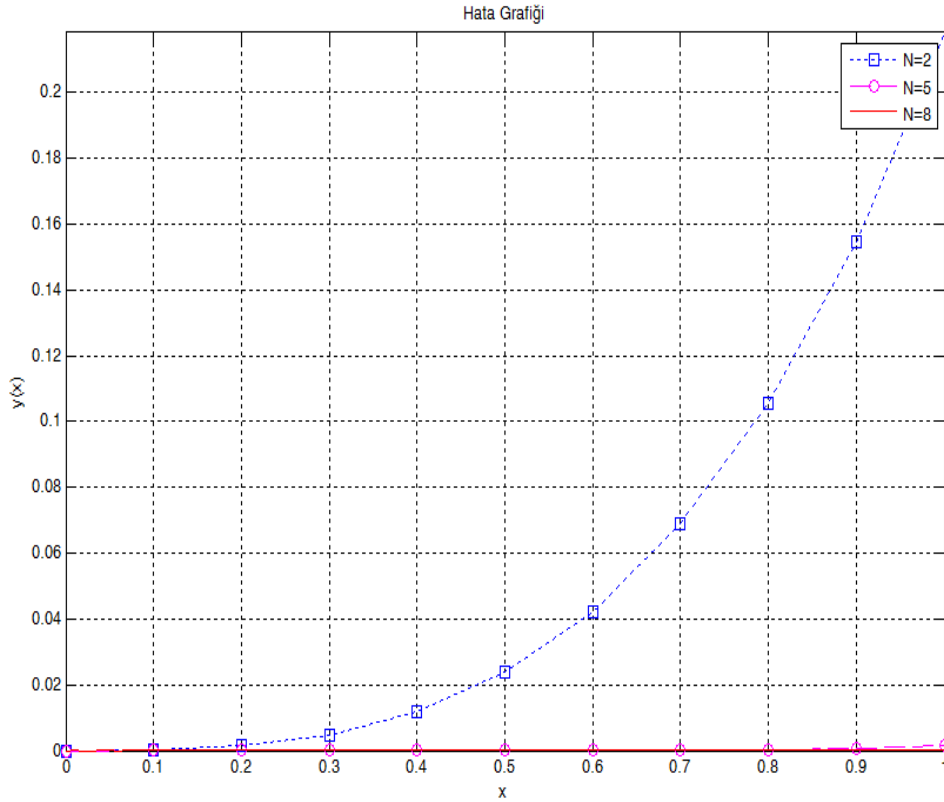
Legendre polinom çözümü elde edilir Önceki örneklerde yapılan işlemler tekrarlandığında verilen denklemin N 'in farklı değerleri için bulunan çözümlerle denklemin tam çözümü olan $y = e^x$ 'in $[0,1]$ aralığındaki karşılaştırılması aşağıdaki Tablo 4.3, Grafik 4.5 ve Grafik 4.6'da verilmiştir.

Tablo 4.3. Örnek 4.10'un $N = 2$, $N = 5$ ve $N = 8$ için Nümerik Sonuçları

	Tam çözüm	Legendre Collocation					
x_i	$y(x) = e^x$	$y(x_i), N = 2$	$E(x_i), N = 2$	$y(x_i), N = 5$	$E(x_i), N = 5$	$y(x_i), N = 8$	$E(x_i), N = 8$
0	1	1	0	1	0	1	0
0.1	1.10517091807	1.105000000000	1.7091807E-04	1.1051709166	1.4089809E-09	1.1051709180	2.7835418E-015
0.2	1.22140275816	1.220000000000	1.4027581E-03	1.2214026666	9.1493503E-08	1.2214027581	1.4396751E-012
0.3	1.34985880757	1.345000000000	4.8588075E-03	1.34985775	1.0575760E-06	1.3498588075	5.5913818E-011
0.4	1.49182469764	1.480000000000	1.1824697E-02	1.4918186666	6.0309746E-06	1.4918246968	7.5218142E-010
0.5	1.64872127070	1.625000000000	2.237213E-002	1.6486979166	2.3354033E-05	1.6487212650	5.66416588E-09
0.6	1.82211880039	1.780000000000	4.2118803E-02	1.8222048	7.0800390E-05	1.8221187708	2.95333608E-08
0.7	2.01375270747	1.945000000000	6.8752707E-02	2.0135714166	1.8129080E-04	2.0137525879	1.19513879E-07
0.8	2.2255409284	2.120000000000	1.0554098E-01	2.2251306666	4.1026182E-04	2.2255405367	4.01762308E-07
0.9	2.45960311115	2.305000000000	1.5460311E-01	2.45875825	8.4486115E-04	2.4596019389	1.17220828E-06
1	2.71828182845	2.500000000000	2.1828183E-01	2.7166666666	1.6151617E-03	2.718278769	3.05861775E-06



Grafik 4.5. Örnek 4.10'un $N = 2$, $N = 5$ ve $N = 8$ için yaklaşık çözüm grafiği



Grafik 4.6. Örnek 4.10'un $N = 2$, $N = 5$ ve $N = 8$ için hata analiz grafiği

ÖRNEK 4.11. Birinci mertebeden lineer olmayan (Riccati diferansiyel denklemi)

$$x(y'(x))^2 + xy^2(x) + y(x) = x + \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (4.11)$$

diferansiyel denkleminin

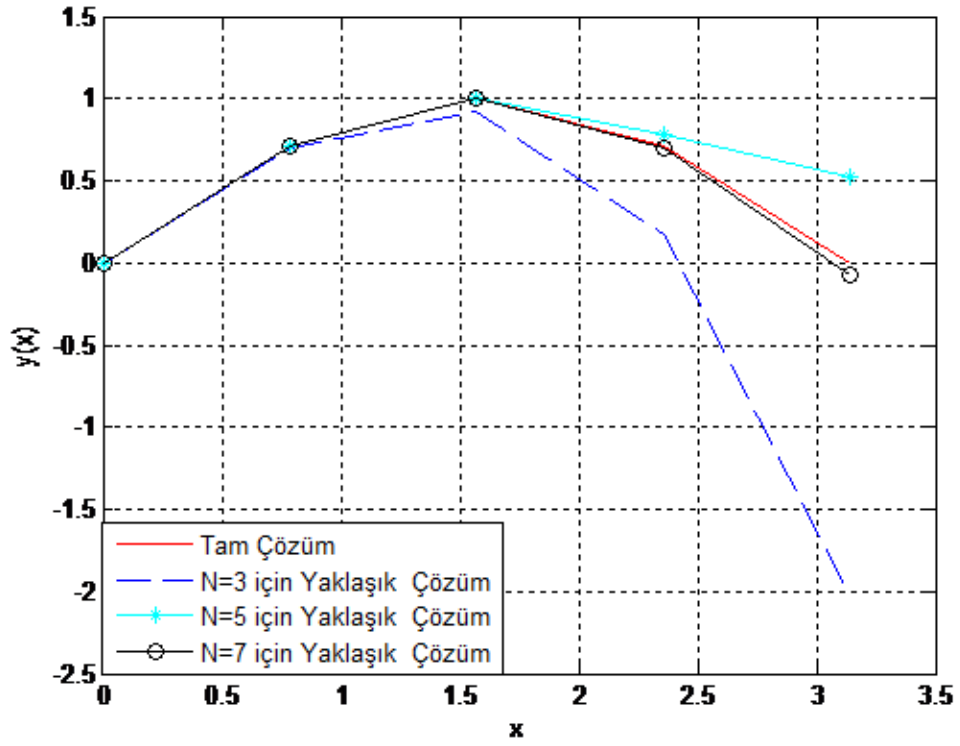
$$y(0) = 0$$

başlangıç koşuluna göre Legendre polinom cinsinden çözümünü araştıralım.

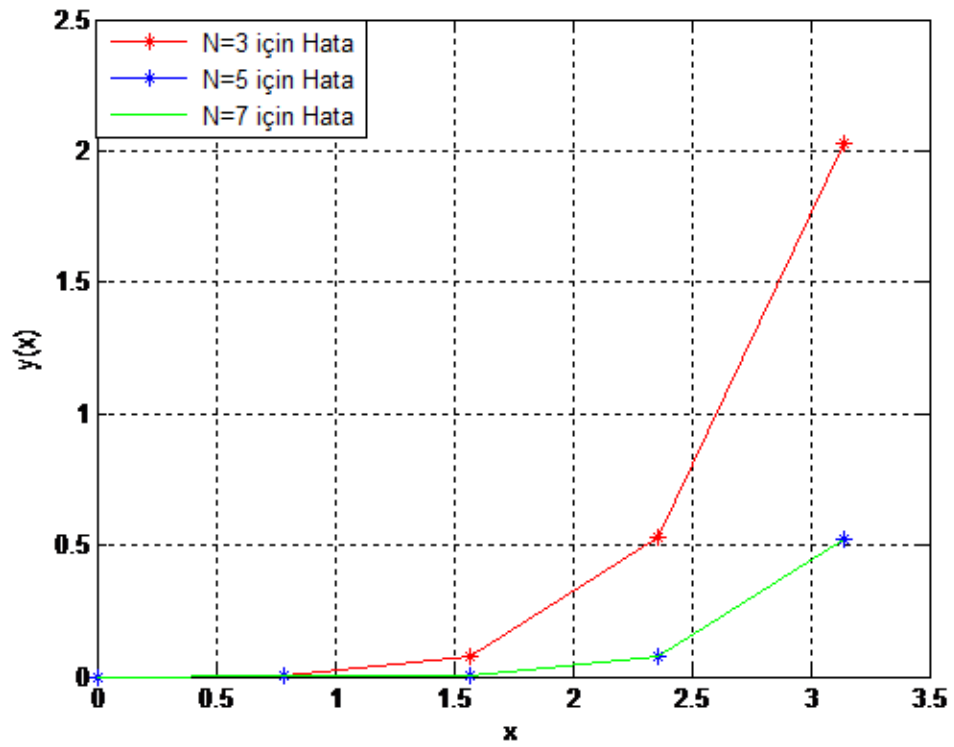
Önceki örneklerde yapılan işlemler tekrarlandığında verilen denklemin farklı N değerleri ($N = 3, 5, 7$) için bulunan yaklaşık çözümler ile denklemin tam çözümü olan $y(x) = \sin x$ 'in $[0, \pi]$ aralığındaki karşılaştırılması Tablo 4.4, Grafik 4.7 ve Grafik 4.8'de verilmiştir.

Tablo 4.4. Örnek 4.11'in $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için Nümerik Sonuçları

	Tam çözüm	Legendre Collocation					
x_i	$y(x) = e^x$	$y(x_i), N = 3$	$E(x_i), N = 3$	$y(x_i), N = 5$	$E(x_i), N = 5$	$y(x_i), N = 7$	$E(x_i), N = 7$
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\pi/4$	0.7071067811	0.70465184092	2.4549402E-03	0.7071423126	3.5531473E-05	0.707105686627	1.0945588E-06
$\pi/2$	1.0	0.92482574703	7.5174252E-02	1.0045207837	4.5207837E-03	0.999837391641	1.6260835E-04
$3\pi/4$	0.7071067811	0.17604378351	0.5310629	0.7812278858	7.4121104E-02	0.701222832870	5.8839483E-03
π	0.0	-2.0261719845	2.026171844	0.5240687199	0.524068719	-0.075252785	7.5252785E-02



Grafik 4.7. Örnek 4.11'in $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için yaklaşık çözüm grafiği



Grafik 4.8. Örnek 4.11'in $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için hata analiz grafiği

ÖRNEK 4.12. Birinci mertebeden lineer olmayan (Riccati) diferansiyel denklemi)

$$y'(x) + (y(x))^2 = 1, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.12)$$

diferansiyel denklemini ve

$$y(0) = 0,$$

başlangıç koşulunu göz önüne alalım ve $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 a_n P_n(x),$$

sonlu Legendre serisiyle $N = 3$ alarak yaklaşalım.

$N(x) = Q(x) = S(x) = 0, R(x) = T(x) = 1, G(x) = 1$ olup $N = 3$ için sıralama noktaları

$$\left\{ x_0 = -1, x_1 = \frac{-1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = 1 \right\}$$

bulunur. (3.12)'de tanımlanan N, Q, R, S, T, A ve G matrisleri,

$$N = Q = S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

ve (3.7) de tanımlanan P, P^* ve A^* matrisleri ile (3.6) da tanımlanan Π matrisi de

$$P^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 11/27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & -11/27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1/3 & -1/3 & 11/27 \\ 1 & 1/3 & -1/3 & -11/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* = [a_0a_0 \quad a_0a_1 \quad a_0a_2 \quad a_0a_3 \quad a_1a_0 \quad a_1a_1 \quad a_1a_2 \quad a_1a_3 \quad a_2a_0 \quad a_2a_1 \quad a_2a_2 \quad a_2a_3 \quad a_3a_0 \quad a_3a_1 \quad a_3a_2 \quad a_3a_3]^T$$

şeklindedir. Verilen denklem ve koşul için matris denklemleri

$$TPP^* \mathbf{A}^* + (RP \Pi^T) \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

ve

$$[\mathbf{P}(0)] \mathbf{A} = [\mathbf{0}]$$

olarak elde edilir. İstenilen artırılmış matris,

$$[\overline{\mathbf{W}}; \overline{\mathbf{V}} : \overline{\mathbf{G}}] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1/3 & 1/3 & -11/27 & 1 & 1/3 & -1/3 & -11/27 & -1 & -1 & -1 & -1 & ; & 0 & 1 & -3 & 6 & : & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1/3 & 1/9 & 1/9 & -11/81 & -1/3 & -1/9 & 1/9 & 11/81 & 11/27 & 11/27 & 11/27 & 11/27 & ; & 0 & 1 & -1 & -2/3 & : & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1/3 & -1/9 & -1/9 & 11/81 & -1/3 & -1/9 & 1/9 & 11/81 & -11/27 & -11/27 & -11/27 & -11/27 & ; & 0 & 1 & 1 & -2/3 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 & 0 & -1/2 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

ve buna karşılık gelen matris denklemi,

$$[\overline{\mathbf{W}}\mathbf{A}^* + \overline{\mathbf{V}}\mathbf{A}] = [\overline{\mathbf{G}}]$$

yani açık olarak,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1/3 & 1/3 & -11/27 & 1 & 1/3 & -1/3 & -11/27 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1/3 & 1/9 & 1/9 & -11/81 & -1/3 & -1/9 & 1/9 & 11/81 & 11/27 & 11/27 & 11/27 & 11/27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1/3 & -1/9 & -1/9 & 11/81 & -1/3 & -1/9 & 1/9 & 11/81 & -11/27 & -11/27 & -11/27 & -11/27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 a_0 \\ a_0 a_1 \\ a_0 a_2 \\ a_0 a_3 \\ a_1 a_0 \\ a_1 a_1 \\ a_1 a_2 \\ a_1 a_3 \\ a_2 a_0 \\ a_2 a_1 \\ a_2 a_2 \\ a_2 a_3 \\ a_3 a_0 \\ a_3 a_1 \\ a_3 a_2 \\ a_3 a_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 & -2/3 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Elde edilen sistemden a_0 , a_1 , a_2 ve a_3 Legendre katsayıları

$$\left\{ a_0 = 0, a_1 = \frac{4}{5}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{2}{15} \right\}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar ,

$$y(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

Legendre polinom çözümü elde edilir.

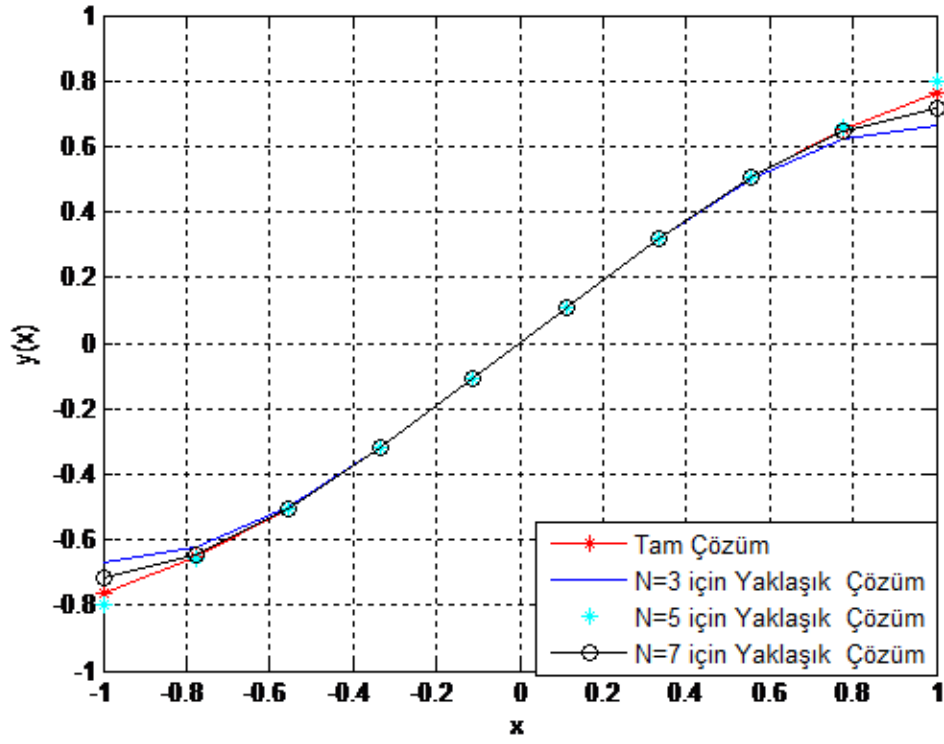
Önceki örneklerde yapılan işlemler tekrarlandığında verilen denklemin farklı N değerleri ($N = 3, 5, 7$) için bulunan yaklaşık çözümler ile denklemin tam çözümü olan

$$y(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \text{ in } [-1, 1] \text{ aralığındaki karşılaştırılması Tablo 4.5, Grafik 4.9 ve Grafik}$$

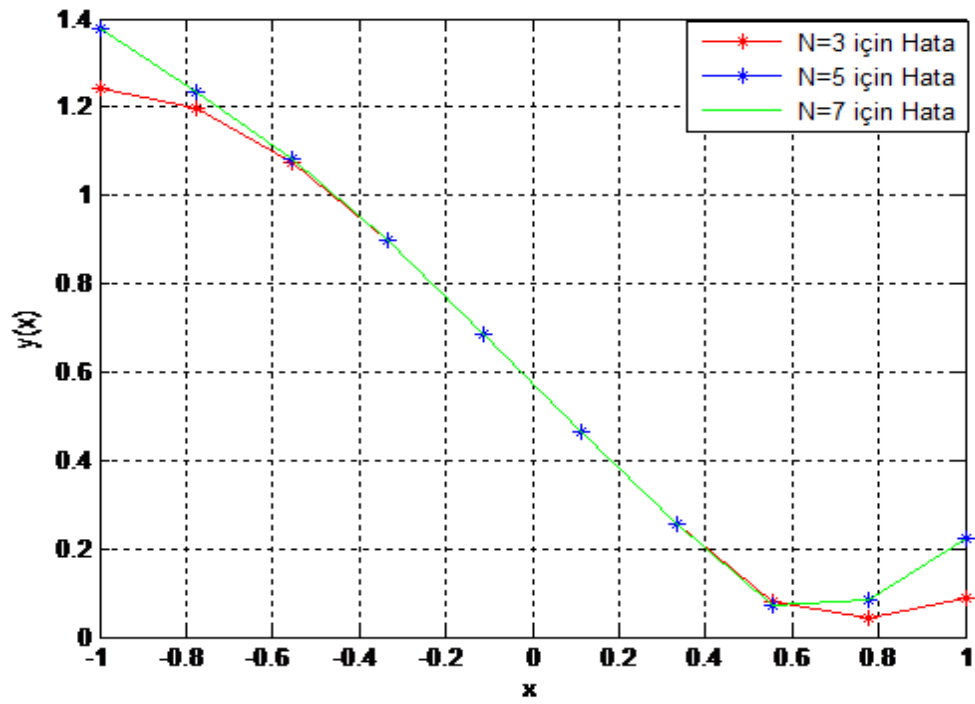
4.10'da verilmiştir.

Tablo 4.5. Örnek 4.12'nin $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için Nümerik Sonuçları

	Tam çözüm	Legendre Collocation					
x_i	$y(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$	$y(x_i), N = 3$	$E(x_i), N = 3$	$y(x_i), N = 5$	$E(x_i), N = 5$	$y(x_i), N = 7$	$E(x_i), N = 7$
-1	-0.7615941559	-0.6666666666	-9.4927489E-02	-0.800002000	3.8407844E-02	-0.719224150	-4.2370005E-02
-0.8	-0.6640367702	-0.629333333	-3.4703436E-02	-0.673024655	8.9878851E-03	-0.656084155	-7.9526150E-03
-0.6	-0.5370495669	-0.528	-9.0495669E-03	-0.538368155	1.3185885E-03	-0.536106826	-9.4274063E-04
-0.4	-0.3799489622	-0.3786666666	-1.2822955E-03	-0.380032020	8.3058225E-05	-0.379899662	-4.9299672E-05
-0.2	-0.1973753202	-0.1973333333	-4.1986891E-05	-0.197376000	6.8041513E-01	-0.197374966	-3.5395097E-07
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	0.1973753202	0.1973333333	4.1986891E-05	0.197376000	-6.8041513E-01	0.197374966	3.5395097E-07
0.4	0.3799489622	0.3786666666	1.2822955E-03	0.380032020	-8.3058225E-05	0.379899662	4.9299672E-05
0.6	0.5370495669	0.528	9.0495669E-03	0.538368155	-1.3185885E-03	0.536106826	9.4274063E-04
0.8	0.6640367702	0.629333333	3.4703436E-02	0.673024655	-8.9878851E-03	0.656084155	7.9526150E-03
1	0.7615941559	0.6666666666	9.4927489E-02	0.800002000	-3.8407844E-02	0.719224150	4.2370005E-02



Grafik 4.9. Örnek 4.12'nin $N=3$, $N=5$ ve $N=7$ için yaklaşık çözüm grafiği



Grafik 4.10. Örnek 4.12'nin $N=3$, $N=5$ ve $N=7$ için hata analiz grafiği

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Lineer olmayan diferansiyel denklemler kimyasal reaksiyonlarda, kütle transfer problemlerinde, sinyal yayılmaları gibi birçok fiziksel olayın matematiksel modellemesinde karşımıza çıkmaktadır. Bu tip problemler son yıllarda ekonomi ve ekolojide de çok etkin rol oynarlar. Bu denklemlerin çözüm yöntemleri birçok bilim dalında ve mühendislikte büyük öneme sahiptir. Bununla birlikte birçok diferansiyel denklemlerin analitik veya yaklaşık çözümü bulunabilmesine karşın çok sayıda denklemlerin çözümleri bulunamamaktadır.

Bu çalışmada, lineer olmayan diferansiyel denklemler için bir Legendre sıralama (collocation) yöntemi geliştirilmiştir. Geliştirilen Legendre sıralama yöntemi, önce lineer olmayan diferansiyel denklemdeki bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin sonlu Legendre seri açılımları ve bilinen katsayı fonksiyonlarının sıralama (collocation) noktalarındaki değerlerine bağlı matris formlarının elde edilmesi; sonra bunların yerine konulup sadeleştirilerek denklemin Legendre katsayılı bir matris denklemine dönüştürülmesinden ibarettir. Böylece bilinmeyen Legendre katsayılı lineer olmayan cebirsel bir sisteme karşılık gelen sonuç matris denklemi çözülebilir ve katsayılar yaklaşık olarak bulunabilir.

Legendre – Matris yöntemi güvenilir bir teknikle daha az çalışmayla ve hatasız yüksek oranda sonuçlar alınabilir. Bu yöntemin önemli avantajı çözümdeki Legendre katsayılarının bilgisayar programları kullanılarak kolaylıkla bulunmasıdır. Bu çalışmada verilen yöntemler, analitik olarak çözülemeyen, çözüm yöntemleri zor anlaşılan ya da anlatılmasında güçlük çekilen problemler, bazı değişikliklerle amaca uygun bir şekilde kullanılabilir. Ayrıca verilen yöntem daha yüksek mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlere ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerine genişletilebilir.

6. KAYNAKLAR

Adams, R.A., Calculus, Addison-Wesley Publihers Limited pp.562, 1990.

Akyüz, A., & Sezer, M., 1999. A Chebyshev Collocation Method for the Solution of Linear Integro-Differential Equations. Intern. J. Computer Math., 72, 4, 491-507.

Akyüz Daşcıoğlu, A., Çerdik Yaslan H., An approximation method for the solution of nonlinear integral equations. Appl.Math. Comput, 2006, 174: 619 – 629.

Bulut, H.& Evens, D.J., 2002. on the solution of Riccati equation by the Decomposition method, Intern. J. Computer Math., 79(1), 103-109.

Corliss, G.F., 1995. Guarented error bounds for ordinary differential equations, in theory and Numeric of ordinary and partial equations (M. Ainsworth, J. Levesley, W.A Light,M.Marletta, Eds), Oxford Universty press, Oxford, pp. 342.

Elbarbary, E.M.E., 2002. Legendre Expansion Method for the Solution of the Second and Fourth order Elliptic Equations, Math. Comp. Simul., 59, 389-399.

El-Mikkawy, M.E.A., Cheon, G.S., 2005. Combinatorial and Hypergeometric Identities via the Legendre Polynomials- A Computational Approach, Appl. Math. Comput., 166, 181-195.

Erdem, K., 2010. Lineer olmayan integral denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri (M.Sc.Thesis).

Gillis, J., Jedwab J., Zeilberger, D., 1988. A Combinatorial Interpretation of the Integral of the Product of Legendre Polynomials, Siam J. Math. Anal.

- Güçlü, İ., 2009. Yüksek Mertebeden Lineer Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerinin Çözümleri İçin Legendre Polinom Yaklaşımı (M.Sc.Thesis).
- Gülsu, M., Sezer, M., On the solution of the Riccati equation by the Taylor matrix method. *Appl. Math. Comput.*, 2006, 176: 414 – 421.
- Kabakçı, F., 2007. Lineer diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemlerin Legendre polinom çözümleri (M.Sc.Thesis).
- Kells, L.M., *Elementary Differential Equations*, Mcgraw-Hill Book Company, Newyork, 1965.
- Küçükşahin, E., 2008. Taylor Polynomial Solutions Of Some First Order Nonlinear Differential Equations (M.Sc.Thesis).
- Maleknejad, K., Tavassoli, Kajani, M., 2003. Solving Second Kind Integral Equation by Galerkin Methods with Hybrid Legendre and Block-Pulse Functions, *Appl. Math. Comput.*, 145, 623-629.
- Mavromatis, H.A., Alassar, R.S., 1999. A Generalized Formula for the Integral of Three Associated Legendre Polynomials, *Appl. Math. Letters*, 12, 101-105.
- Nas, Ş., Yalçınbaş S., Sezer, M., A Taylor polynomial approach for solving high-order linear Fredholm integro-differential equations, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 31(2), 213 - 225, 2000.
- Ross, S.L., 1974 *Differential Equations*, John Wiley and Sons, Inc. Newyork.
- Sezer, M., A method for the approximate solution of the second order linear differential equations in terms of Taylor polynomials, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 27(6), 821 - 834, 1996.

- Spiegel M.R., 1994. Schaum's Outline of Theory and Problems of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems.
- Streltsov, I.P., 2000. Approximation of Chebyshev and Legendre Polynomials on Discrete Point Set to Function Interpolation and Solving Fredholm Integral Equations, Computer Physics Communications, 126, 178-181.
- Temur, P., 2006. Legendre Polinomları. (M.Sc.Thesis).
- Yalçınbaş, S., Sezer, M., The approximate solution of high-order linear Volterra–Fredholm integrodifferential equations in terms of Taylor polynomials. *Appl. Math. Comput.* 112, 291 – 308, 2000.
- Yalçınbaş, S., Taylor polynomial solutions of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations, *Appl Math Comput*, 127, 195 - 206, 2002.
- Yousefi, S., Razzaghi, M., 2005. Legendre Wavelets Method for the Nonlinear Volterra-Fredholm Integral Equations, *Math. Comp. Simulat.*, (inpress).
- Yu, Y.K., 2003. On a Class of Integrals of Legendre Polynomials with Complicated Arguments- with Applications in Electrostatics and Biomolecular Modelling, 326, 522-533.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Aysun GÜNER ALTUNTAŞ
Doğum Yeri : Denizli
Doğum Tarihi : 1988
Medeni Hali : Evli

EĞİTİM VE AKADEMİK BİLGİLER

Lise : Denizli Cumhuriyet Süper Lisesi
Lisans : CBÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yabancı Dil : İngilizce