

T.C.
BANDIRMA ONYEDİ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN LİNEERLEŞTİRME
DÖNÜŞÜMLERİ

KADİR ERYÜREK

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

KASIM – 2024

T.C.
BANDIRMA ONYEDİ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN LİNEERLEŞTİRME
DÖNÜŞÜMLERİ**

KADİR ERYÜREK

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Özlem ORHAN

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

KASIM – 2024

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Kadir ERYÜREK tarafından hazırlanan "**Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler İçin Lineerleştirme Dönüşümleri**" adlı tez çalışması 13/11/2024 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki danışman tarafından Bandırma Onyedli Eylül Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Dr. Öğr. ÜyesiÖzlem ORHAN

(Danışman)

Prof. Dr. Hüseyin IŞIK

(Üye)

Doç. Dr. Zehra PINAR

(Üye)

Bu tezin kabulü, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../.....gün ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ahmet AYDIN

Enstitü Müdürü

BANDIRMA ONYEDİ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ETİK BEYANI

Bandırma Onyedi Eylül Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum “**Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler İçin Lineerleştirme Dönüşümleri**”adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde yararlandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim. 13/11/2024

Kadir ERYÜREK

ÖNSÖZ

Doğada meydana gelen fiziksel olayların hepsi matematiksel olarak bir sisteme karşılık gelmektedir. Bu olayları açıklamak, yorumlamak ve bilgi sahibi olmak için nasıl gerçekleştiğini ve nasıl sonuçlandığını anlamak kadar matematiksel olarak çözümlemek de önemlidir. Doğa olaylarının çözümüne ulaşmak için karşımıza çıkan sistemler diferansiyel denklemlerle ifade edilebilmektedir. Geçmişten günümüze diferansiyel denklemlerin çözümüne ulaşmak için ünlü bilim insanları pek çok çalışmalar yapmışlar ve başarılı sonuçlar elde etmişlerdir. Benzerlik ve kurallar bütünü içeren denklemler için yöntemler geliştirilerek formülize edilmiştir. Çözümü klasik yöntemlerle mevcut olmayan denklemler için çalışmalar yapılmış ve matematik bilimine ışık tutacak yeni yöntemler keşfedilmiştir.

Çözümlerine ulaşılmakta zorlanan veya bilinen yöntemlerle çözümü olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan yöntemlerden biri de lineerleştirme yöntemleridir. Bu tez çalışmasında lineer olmayan diferansiyel denklemler için lineerleştirme yapılarak bu süreçte izlenecek bilimsel adımlar üzerinde çalışmalar yürütülmüştür.

Bu teze başlamadan ders döneminde, teze ön hazırlık çalışması sırasında, tez konusunun belirlenmesinden itibaren son aşamaya kadar tüm konularda, kendisini tanıdığım ilk günden itibaren ilgisini, emeğini, bilgisini ve desteğini esirgemeyen, her konuda bir yol göstericim bir öğretmenim olarak yardımcı olan kıymetli danışman hocam değerli büyüğüm sayın Dr. Öğr. Üyesi Özlem ORHAN'a sonsuz şükranlarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca maddi, manevi tüm desteğini gösterip sevgi, saygı, hoşgörüsünü eksik etmeyen bugünlere gelmemde en büyük katkısı olan koca bir dağ gibi arkamda duran babam Mehmet ERYÜREK, annem ve iki kardeşime sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca doğduğu andan itibaren ve bu tez çalışmasına başladığım günden beri neşe, moral ve motivasyon kaynağı olan biricik oğlum Serkan Eray'a çok çok teşekkür ederim.

Desteğini esirgemeyen, çalışmalarımı teşvik eden ve tez çalışmamda olduğu gibi hayatıma yardımcı olan hayat arkadaşım olan eşim Döne'ye teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN LİNEERLEŞTİRME DÖNÜŞÜMLERİ

Kadir ERYÜREK

**Bandırma Onyedi Eylül Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Özlem ORHAN
Kasım 2024, 96 sayfa**

Bu yüksek lisans tezinde, ilk olarak Lie nokta simetrisi hakkında temel tanım ve teoremler ele alınmıştır. Lie simetrilerini elde etmek için lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlere Lie nokta simetri uzanımları uygulanarak sonsuz küçük üreteçler elde edilmiş ve bu üreteçler kullanılarak Lie üretici bulunmuştur.

Ayrıca, lineerleştirme yapılarak denklemlerin simetrilerinin elde edilmesi ve bu simetrilerin yardımıyla matematiksel fizik denklemlerinin analitik çözümlerinin bulunarak denklemlerin fiziksel yorumlarının yapılması amaçlanmıştır.

Sonuç olarak matematiksel fizik denklemleri ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerine ulaşabilmek için Lie simetri dönüşümü kullanılmış ve ele alınan örneklerin çözümlerinin fiziksel özellikleri yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Denklemler, Lie Grupları, Sonsuz Küçük Üreteçler, Korunum Kanunları.

ABSTRACT

M.Sc. THESIS

LINEARIZATION TRANSFORMATIONS FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Kadir ERYÜREK

**Bandırma Onyedi Eylül University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics**

**Supervisor: Asst. Prof. Dr.Özlem ORHAN
November 2024, 96 pages**

In this master's thesis, firstly the basic definitions and theorems about Lie point symmetry are discussed. In order to obtain Lie symmetries, infinitesimal generators are obtained by applying Lie point symmetry extensions to linear and nonlinear differential equations and using these generators, Lie generators are found.

In addition, it is aimed to obtain the symmetries of the equations by linearization and to find the analytical solutions of mathematical physics equations with the help of these symmetries and to make physical interpretations of the equations.

As a result, Lie symmetry transformation is used to reach the solutions of mathematical physics equations and nonlinear differential equations and the physical properties of the solutions of the examples are interpreted.

Keywords: Differential Equations, Lie Groups, Infinitesimal Generators, Conservation Laws.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	
ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
SİMGELER ve KISALTMA LİSTESİ.....	IV
1. GİRİŞ.....	1
2. DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	5
2.1. TEMEL KAVRAMLAR.....	6
2.2. BAZI ÖZEL DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	12
3. LİE SİMETRİ YÖNTEMİ.....	17
3.1. GRUP.....	18
3.2. LİE GRUP ANALİZİ.....	20
3.3. ÜRETEÇLERİN DÖNÜŞÜMLERİ.....	33
3.4. ÜRETECİN NORMAL FORMU.....	35
3.5. LİE GRUP DÖNÜŞÜMLERİNDE İNVARİYANTLIK.....	37
3.6. LİE CEBİR.....	42
3.7. UZATIM(PROLANGASYON) FORMÜLLERİ.....	51
3.8. LİE-BÄCKLUND OPERATÖRÜ.....	61
4. KORUNUM KANUNLARI.....	77
4.1. KORUNUM KANUNLARI VE SİMETRİ ARASINDAKİ İLİŞKİ.....	77
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	94
6. KAYNAKLAR.....	95

SİMGELER ve KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\frac{\delta}{\delta t}$	:Euler-Lagrange Operatörü
$[,]$	:Kamutatör operatörü
L	:Lagrangian
D	:Total Türev Operatörü
V, B	:Vektör Alanı
τ, ξ, Φ, η	:Sonsuz Küçükler
N	:Noether Operatörü
Σ	:Toplam Sembolü
$\int$	:İntegral Sembolü

Kisaltmalar	Açıklama
ADD	:Adi Diferansiyel Denklem
KDD	:Kısmi Diferansiyel Denklem
Kdv	:Korteweg-de Vries Denklemi
MKdv	:Modifiye Korteweg-de Vries Denklemi

1. GİRİŞ

Mühendislik, doğa bilimleri, fizik ve birçok bilim dalında oluşan problemleri çözebilmek için diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi oldukça önemlidir. Ortaya çıkan problemlerin yorumlanması ve analizi; matematiksel olarak gösterilen diferansiyel denklemlerin çözümü üzerinden yapılmaktadır. Dolayısıyla oluşan problemin analizi için ortaya konulan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması çok önemlidir.

Doğa olayları ve özellikle fiziksel olayların hemen hemen hepsi matematiksel olarak diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Söz konusu ifade edilen bu diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilebilmesi için farklı yöntemler mevcuttur. Doğa bilimleri, mühendislik bilimleri ve fiziğe ait olan matematiksel problemler lineer olmayan diferansiyel denklemlerle ifade edildiğinden bu denklemlerin analitik çözümlerinin bulunması için kullanılan yöntemler ve keşfedilecek yöntemler matematik bilimine ışık tutacaktır.

Diferansiyel denklemler tiplerine göre adi diferansiyel denklemler (ADD) ve kısmi diferansiyel denklemler (KDD) olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Bu denklemler lineerliğine göre ise lineer ve lineer olmayan denklemler olarak gruplandırılmaktadır. Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri lineer diferansiyel denklemlere göre daha kompleks bir şekilde bulunmaktadır. Söz konusu ifade edilen diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için literatürde nümerik ve analitik yöntemler mevcuttur.

Diferansiyel denklemlerin çözümlerine ulaşabilmek için kullanılan nümerik yöntemler net ve kesin çözümleri vermezler, yani bu çözümlerde hata payı mevcut olup denklemi tam sağlamamaktadırlar. Aksine, analitik yöntemlerle elde edilen çözümler kesin çözümler olarak adlandırılır ve denklemi tam olarak sağlarlar. Bu nedenle, denklemlerin analitik çözümlerini bulmak nümerik çözümlerini bulmaya kıyasla daha önemlidir. Analitik çözümlerin bulunması nümerik yöntemlerle elde edilen çözümlere göre daha zor olmasına karşın uygulamalarda yaygın ve sık kullanılır. Bilhassa, lineer olmayan diferansiyel denklemin analitik çözümlerinin elde edilmesi daha zor olduğundan dolayı farklı yöntemler tanımlanmıştır. Bunlardan en önemlilerinden biri de simetri yöntemidir.

Isaac Newton ile Alman bilimci Leibnitz, 17. yüzyılın son çeyreğinde diferansiyel ve integral hesabın keşfedilmesinden sonra diferansiyel denklemler üzerine çalışmaya başlamışlardır. 19. yüzyıla kadar adi diferansiyel denklemin çözümüne ilişkin birbirinden farklı ve kolay yöntemler keşfedilmiştir. 19. yüzyıldan sonra ise diferansiyel denklemlerin çözümlerine ilişkin; kuvvet serilerini kullanarak çözüm bulmak ve varlık teklilik çözümleri önemli hale

gelmiştir. Cauchy 19. yüzyılda belirli koşullar altında çözümlerinin varlığını ispatlamış ve Sophus Lie, David Hilbert, Evariste Galois gibi matematikçilerin dönüşüm grupları üzerine yaptığı çalışmalara ışık tutmuştur ve 20. yüzyılın başlarına kadar değişmezlik (invariant) teorisi en popüler araştırma konularından biri olmuştur (Özceylan, 2007).

Fransız matematikçi Évariste Galois'den etkilenen Norveçli matematikçi Sophus Lie diferansiyel denklemlerin integrasyon yöntemleri ve geometri üzerine çalışmalar yapmıştır. Sophus Lie diferansiyel denklemi simetri analizi, Lie grubu ile tanımlanan dönüşümlerde diferansiyel denklemin tanımlandığı manifoldun üstünde değişmez bırakılan yerel dönüşüm gruplarını keşfetmiştir. Elde edilen dönüşüm grupları ile diferansiyel denklemlerin çözümleri bulunmuş ve bulunan bu çözümlere algoritmik yöntemler ile erişilmiştir. Sophus Lie tarafından yürütülen çalışmaların değeri başlarda anlaşılmamış olup Lie teorisinin diferansiyel denklemlerin çözümünde uygulanması 1950 yılından itibaren anlam kazanmaya ve uygulanmaya başlayabilmiştir (Bluman ve Anco, 2002; Ovsyannikov, 1982).

Lie grup teorisinin yenilenmesinde ve gelişmesinde Cole, Ovsyannikov, Olver, ve Bluman gibi bilim adamları büyük katkılar yapmışlardır. Fizikteki önemli adımlardan olan istatistiksel mekanik, tanecik fiziği, elektrodinamik, kuantum teorisi, sicim teorisi ve hidrodinamikte oluşan problemlerin çözümüne ulaşabilmek için Lie grup teorisinden yararlanılmıştır.

Çağımızda diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde simetri yöntemleri önemli role sahiptir. Bunun nedeni ise bu yöntemi diğer çözüm yöntemlerinden ayıran önemli farklılığının kısaltmalar ve integrallenebilme şartının olmamasıdır. Sophus Lie yaptığı çalışmalarda dönüşüm grupları olarak bilinen cebirsel yapıları incelemiş ve diferansiyel denklemlerin dönüşümleri kullanılarak integrallenebildiğini göstermiştir. Bunlara ek olarak, Sophus Lie adi diferansiyel denklemlerin sürekli, bir parametrelili dönüşüm grupları ile değişmezse bu denklemlerin mertebesinin bir derece indirgenebileceğini ispat etmiştir. Ek olarak, iki bağımsız değişkenli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri sürekli ve bir parametrelili dönüşüm grupları altında değişmez kalırsa, bu kısmi diferansiyel denklemleri adi diferansiyel denklemlere indirgeyebilmekte ve indirgenmiş olan adi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde edebilmektedir. Bu nedenle Sophus Lie tarafından oluşturulan Lie grup teorisi çağımızda çok popülerdir.

Günümüzde Lie simetri üreteçlerinin katsayıları göz önüne alınıp incelendiğinde Lie simetri dönüşümleri; nokta, kontakt (ilişki) Bäcklund ve non-local (yerel olmayan) simetriler şeklinde kümelenmiştir. Simetri üreteçlerindeki katsayı fonksiyonlarında bulunan bağımlı ile bağımsız değişkenleri ihtiva eden ve tek bir türevli terim dahi olmayan dönüşümler Lie nokta

simetrileri olarak tanımlanır. Öteleme, ölçekleme, dönme ve kaydırma dönüşümleri nokta simetrilerinin en tanınmış örnekleridir. Fakat simetri üreticilerinde katsayı fonksiyonlarını oluşturan bağımlı ve bağımsız değişkenlerin herhangi bir teriminin birinci mertebeden türevi mevcutsa bu dönüşümlere ise Lie kontakt simetrileri adı verilir ve katsayı fonksiyonlarında bağımlı ve bağımsız değişkenler dışında yüksek mertebeden türevler bulunan simetri üreticileri Lie Bäcklund simetrisi olarak adlandırılır. Dönüşümler de simetri üreticinin katsayıları, çözümü olmayan integraller ihtiva ediyorsa bunlarda non-local (yerel olmayan) simetriler olarak tanımlanmaktadır.

Diferansiyel denklemlerin analizi, fiziksel özelliklerin bulunup yorumlanması, gruplandırılması ve çözümlerin incelenmesinde özetle hemen hemen her alanda korunum kanunları çok önemli bir yere sahiptir. Bunlara ek olarak korunum kanunları; kararlılık teorisinin araştırılmasında yorumlanmasında çözümlerin analizinde, sayısal şekillerin kurulması ve diferansiyel denklemlerin integrasyonu gibi alanlarda yaygın kullanılabilir. Diferansiyel denklemlerin başlangıç değeri verildiğinde korunum kanunları denklem üzerinde çalışırken temel oluşturur (Yaşar, 2009).

Diferansiyel denklemlere Lie simetri teorisi uygulandığında bazen denklemlerin çözümüne ulaşılamamaktadır. Bunun nedeni ise Lie simetrilerine sahip olmayan diferansiyel denklemler vardır. Bu tür diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde edebilmek için farklı simetriler bulunup, bu simetriler yardımıyla diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için yeni yöntemlere ihtiyaç duyulmuştur.

Korunum kanunlarına ulaşabilmek için kullanılan farklı yöntemlerden bir tanesi de Noether teoremidir. Noether teoremini diferansiyel denkleme uyguladığımızda, Noether simetrileri elde edilmektedir. Noether simetrileri, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin ilk integrallerinin bulunması için kullanılmaktadır. Matematiksel fizik üzerine çalışmalar yapan Alman matematikçi Emily Noether; Noether simetrileri üzerine ilk çalışma yapan kişidir. Noether teoremi doğadaki her simetrinin korunum yasasıyla bağlantılı olduğunu belirtir. Doğal olayları, fiziksel olaylar, mühendislik dallarındaki olayların yorumlanması ve analizinin yapılması için ortaya atılan diferansiyel denkleme Noether teoreminin uygulanması oldukça önemlidir. Noether teoreminin diferansiyel denklem üzerinden uygulanabilme koşulu standart Lagrangian'a sahip olmasından geçer. Eğer diferansiyel denklem standart Lagrangian'a sahip değilse Noether simetrilerini bulmak için Euler-Lagrange denklemi yardımıyla diferansiyel denklemlere kısmi Lagrange yöntemi uygulanır (Orhan, 2018).

Bu tez çalışmasında lineer olmayan diferansiyel denklemler için Lie grup analizi yapılarak simetrilerinin bulunmasıyla korunum kanunlarının elde edilmesi ve analitik

özömlerlerinin yapılması çalışılmıştır. Korunum kanunları ve simetri arasındaki ilişki anahtar kilit uyumu gibi bağlantılı olduğundan korunum kanunlarının fizik ve doğa olaylarının yorumlaması ve analiz edilmesi için ne kadar gerekli olduğu üzerinde durulmuştur.



2. DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Tarih boyunca bilim insanları tarafından yapılan çalışmalar göz önüne alındığında; evrende meydana gelen fiziksel olayların her birinin belli düzen, prensip, kural çerçevesinde ortaya çıktığı görülmektedir. Bulutların hareketi, dünyamızın-gezegenlerin-yıldızların hareketi, mıknatısların çekimi, suyun buza dönüşmesi, mumun erimesi gibi olaylar analiz edilecek olursa bir sistematik içerisinde gerçekleştiği açıktır. Bu fiziksel olaylar üzerinde gerekli gözlemler, dikkatli incelemeler ve çalışmalar yapıldığında belirli bir kanuna tabi olduğu bu kanunlarında bir matematiksel model ortaya çıkardığı kesindir. Söz konusu bu matematiksel modellerde tam olarak diferansiyel denklemlerle ifade edilmektedir. Fiziksel problemlerin analizi için cebirsel metodlar genellikle yeterli olmadığı için diferansiyel denklemlere ihtiyaç duyulmuştur. Doğa olaylarındaki problemlerin çözülebilmesi için matematiksel olarak modellenmesi formülize edildiği anlamına gelmektedir. Sonra başlangıç ve sınır şartları kullanılarak problemi ortadan kaldıracak çözüme ulaşılır.

Diferansiyel denklemler matematik bilim dalında önemli bir branştır. En basit tabiriyle ifade edilecek olursa içerisinde türevlenmiş fonksiyon ihtiva eden ifadelere diferansiyel denklem denir. Başka bir anlatımla tanımlanmış fonksiyon ve bu fonksiyonun türevleri arasındaki ilişkiyi gösteren ifadeye diferansiyel denklem denir, bu açıklamayı tarihte ilk kez 1676 yılında Leibniz'in kullandığı bilinmektedir. Diferansiyel denklemleri anlamak çözümlerine ulaşmak kadar zordur. 18. yüzyılın sonlarından itibaren; matematik bilimcilerin artması, türev ve kısmi integrasyonun keşfedilmesi diferansiyelin daha fazla anlam kazanmasına yol açmıştır. Euler ve Bernoulli bu gelişime ışık tutan en önemli temsilcilerin başında gelir. Diferansiyel denklemler uygulamalı matematik branşına atfedilse de matematik biliminin her alanında kullanılmaktadır.

Diferansiyel denklemler, mühendis ve matematikçilerin ortak paydada bulunduğu konu olması sebebiyle sürekli olarak gelişim göstermektedir. Uzay biliminde, hava araçlarının hareketi diferansiyel denklemlerin oluşturduğu çözümler sayesinde gerçekleşmektedir.

İsviçreli bilim adamı Leonhard Euler (1707-1783) mekanik, akışkan dinamiği, optik, astronomi gibi alanlarda çalışmalar yaparak diferansiyel denklemlere oldukça fazla açıklama getirmiştir. Lagrange, Charbit, Laplace, Clairaut, D'alambert, Mange, Jacobi, Chrystal, Darboux, Cauchy, Frobeniüs, Picard, Ampere, Fusch diferansiyel denklemler üzerine çalışmalar yapıp geliştiren ve ileri düzeye ulaştıran ünlü matematik bilimcilerdir.

Bu bölümde, diferansiyel denklemlere ilişkin tanımlar ile örnekler verilecek ve daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan kısmi diferansiyel denklemlerden bahsedilecektir.

2.1 TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1.1 (Diferansiyel Denklem)

Diferansiyel denklemler, içerisinde türevi alınmış fonksiyon içeren denklemler olarak tanımlanmaktadır. Yani içerisinde türev ve diferansiyel içeren matematiksel ifadelere diferansiyel denklem denilmektedir.

$y = f(x)$ şeklindeki bir fonksiyonun x bağımsız değişkenine göre türevi;

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

olarak ifade edilmektedir.

Örneğin;

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$$

ifadesi diferansiyel denklemdir. Diferansiyel denklemler tiplerine göre iki gruba ayrılmaktadır.

Tanım 2.1.2 (Adi Diferansiyel Denklem)

Bir diferansiyel denklemde bir bağımsız değişkenden oluşan türevler mevcutsa bu diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklemler denir. Bağımlı değişkenin y , bağımsız değişkenin x olduğu durumda en genel tabirle bir diferansiyel denklem;

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

olarak tanımlanırsa

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

biçiminde bir fonksiyon olarak tanımlanır. Bu fonksiyonda $y^{(n)}$; y bağımlı değişkenin, x bağımsız değişkenine göre n . türevi anlamına gelmektedir.

Örneğin;

$$y'' + 3y' - 4xy - e^{x+1} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 5x - 3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - x = 0,$$

denklemleri adi diferansiyel denklemlerdir.

Tanım 2.1.3 (Kısmi Diferansiyel Denklem)

İki ya da daha fazla bağımsız değişken ile minimum bir tane bağımlı değişkeni ihtiva eden, farklı mertebelerden bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlerce türevlerinin mevcut olduğu denklemlere kısmi diferansiyel denklemler denir. z bağımlı, x ve y bağımsız değişkenler olsun. Bu durumda kısmi diferansiyel denklemin en genel hali;

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$$

alınarak,

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0,$$

formatında gösterilmektedir (Koca, 2008).

Örneğin;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

denklemleri kısmi diferansiyel denklemlerdir.

Tanım 2.1.4 (Diferansiyel Denklemin Mertebesi)

Bir diferansiyel denklemin içerisinde bulunan en yüksek türevinin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi adı verilir.

Tanım 2.1.5 (Diferansiyel Denklemin Derecesi)

Bir diferansiyel denklemin içerisinde bulunan en yüksek türevinin mertebesinin kuvvetine mevcut diferansiyel denklemin derecesi adı verilir.

Örneğin;

$$y''' + 2(y')^2 + y' - \cos x = 0, \quad 3. \text{ mertebe, } 1. \text{ derece}$$

$$(y'')^3 + (y')^6 + 5y - 5x - 1 = 0, \quad 2. \text{ mertebe, } 3. \text{ derece}$$

Dikkat edilmelidir ki her diferansiyel denklem bir mertebeye sahipken bir dereceye sahip olmayabilir.

Örneğin;

$$e^{y'} - y' + x = 0, \quad 1. \text{ mertebe, derece tanımlı değil}$$

Tanım 2.1.6 (Diferansiyel Denklemin Çözümleri)

$y = f(x)$ şeklindeki bir fonksiyon diferansiyel denklemde yerine konulduğunda denklemi sağlıyorsa; $y = f(x)$ fonksiyonuna diferansiyel denklemin çözümü denir. Diferansiyel denklemlerin çözümleri; genel (ilkel), özel ve tekil (aykırı, singüler) olacak şekilde üç gruba ayrılmaktadır. Bu çözümlerin her biri diferansiyel denklemi sağlarlar.

n . mertebeden bir diferansiyel denklem göz önüne alındığında, bu denklemin genel çözümü n tane keyfi sabit içermektedir. Genel çözümde diferansiyel denklemin mertebesi kadar birbirlerinden bağımsız keyfi sabit vardır. Özel çözümlerde genel çözümde bulunan keyfi sabitlere özel değerlerin verilmesiyle bulunur. Bazı diferansiyel denklemlerin genel çözümlerinin dışında ve genel çözümlerinde bulunan keyfi sabitlere özel değerler verilerek ulaşılamayan farklı çözümleri olabilir. Bu çözümlere de tekil çözümler denir.

Örneğin;

$$(z')^2 + z^2 - 1 = 0,$$

diferansiyel denklemi çözülürse

genel çözümü : $z = \sin(x + c)$ 'dir.

$c = \frac{\pi}{2}$ alınırsa; özel çözüm: $z = \cos x$ olacaktır.

Diğer taraftan; $z = \pm 1$ de bu diferansiyel denklemi sağlar. $z = \pm 1$ çözümünün $z = \sin(x + c)$ genel çözümünden elde edilmediği aşıkardır. Doğal olarak $z = \pm 1$ verilen diferansiyel denklemin tekil çözümleridir. Sonuç olarak bu üç çözümde denklemi özdeş olarak sağlamaktadırlar.

Tanım 2.1.7 (Lineer ve Lineer olmayan Diferansiyel Denklemler)

Bağımlı değişken veya bağımlı değişkenleri (birden fazla olma durumu) içeren, bu bağımlı değişkenlerin bütün kısmi türevlerinin birinci dereceden olduğu ve katsayıları sadece bağımsız değişken cinsinden yazılan kısmi diferansiyel denklemlere lineer kısmi diferansiyel denklemler denir.

Bir bağımlı, iki bağımsız değişkeni içeren birinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemin genel şekli;

$$K(x, y)z_x + L(x, y)z_y + M(x, y)z = N(x, y),$$

formatındadır. Örneğin; u bağımlı, x, y ve t bağımsız değişken, k sabit olarak alınırsa;

$$u_t - k(u_{xx} + u_{yy}) = 0,$$

ikinci mertebeden iki boyutlu ısı denklemi lineerdir. Öte yandan;

$$zz_{xy} - z_x z_y = 0,$$

denklemini lineer olmayan kısmi bir diferansiyel denklemdir (Koca, 2008).

Eğer;

$$K(x, y)z_x + L(x, y)z_y + M(x, y)z = N(x, y),$$

formatındaki lineer diferansiyel denkleminde; $N(x, y) = 0$ ise lineer diferansiyel denkleme homojen denir.

Örneğin;

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0,$$

$$y'' + y \sin x = 0,$$

$$u_t - ku_{xx} = 0,$$

denklemleri homojen denklemlerdir.

Aksi halde $N(x, y) \neq 0$ olduğu durumda ise homojen olmayan diferansiyel denklem olarak adlandırılır.

Örneğin;

$$y'' + 8y' + 9y = e^x,$$

$$(\sin x)y''' - (\cos x)y' = 4,$$

$$uu_y + 2yxu = \cos(xy),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{x^2},$$

denklemleri ise homojen olmayan diferansiyel denklemlerdir.

Tanım 2.1.8 (Yarı Lineer Diferansiyel Denklem)

Bir kısmi diferansiyel denklemin ihtiva ettiği mertebesi en yüksek kısmi türevler cinsinden (diferansiyel denklemde küçük basamaklı, bağımlı değişkenin bağımsız olarak bulunmasıyla) lineerse bu tip diferansiyel denklemlere yarı-lineer (quasi-lineer) kısmi diferansiyel denklem denir.

Bir bağımlı, iki bağımsız değişkeni içeren birinci mertebeden yarı-lineer kısmi diferansiyel denklemin genel şekli;

$$K(x, y, z)z_x + L(x, y, z)z_y = M(x, y, z),$$

olarak ifade edilir (Koca, 2008).

Örneğin;

$$z_x z_{xx} + x z z_y = \sin y,$$

$$xy z z_x + x^2 z y = x^2 z^2 \cos x,$$

$$xy z z_{xx} + z^2 z_{xy} + x^2 \cos y z_{yy} = 2z^3 x,$$

denklemleri yarı lineer diferansiyel denklemlerdir.

Tanım 2.1.9 (Hemen Hemen Lineer Diferansiyel Denklem)

Yarı-lineer bir kısmi diferansiyel denkleme ait en yüksek mertebeden kısmi türevlerinin çarpanları (katsayıları) sadece bağımsız değişkenlerden oluşuyorsa bu kısmi diferansiyel denklemlere hemen hemen lineer kısmi diferansiyel denklemler denir (San, 2011).

Bir bağımlı, iki bağımsız değişkeni içeren birinci mertebeden hemen hemen lineer kısmi diferansiyel denkleme ait genel formülasyon;

$$K(x, y)z_x + L(x, y)z_y = M(x, y, z, z_x, z_y),$$

olarak ifade edilir.

Örneğin;

$$x^2 z_x + y^2 z_y = z^3,$$

$$xyz_x + y^2 z_y = |z^3| + g(x, y),$$

denklemleri hemen hemen lineer kısmi diferansiyel denklemlerdir.

2.2 BAZI ÖZEL DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Tanım 2.2.1 (Bernoulli Diferansiyel Denklemini)

$y' + A(x)y = B(x)y^n$ ve $n \neq 1$, $n \neq 0$ formundaki denklemlere Bernoulli diferansiyel denklemleri denir. Denklemin çözümü için

$$z = y^{1-n},$$

$$dz = (1 - n)y^{-n}dy,$$

dönüşümü denkleme uygulandığı takdirde denklem lineer hale gelir. O halde lineerleştirilen denklem

$$\frac{dz}{dx} + (1 - n)A(x)z = (1 - n)B(x),$$

olur.

Örneğin;

$$xy' + y = y^2 \ln x,$$

denkleminin çözümü; denklem

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2,$$

şeklinde yeniden yazılırsa Bernoulli denklemi olduğu görülmektedir. Denkleme

$$z = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1},$$

$$z' = -y^{-2}y',$$

dönüşümleri uygulanırsa

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x},$$

şeklinde z değişkeni cinsinden lineer denklem elde edilir.

$$\mu(x) = e^{\int A(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x},$$

integral çarpanının bulunup genel çözümde yerine yazılmasıyla,

$$z = z(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} \left[\int \frac{1}{x} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) dx + C \right] = x \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C \right)$$

yada

$$\ln x + 1 + Cx = \frac{1}{y}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.2 (Lagrange Diferansiyel Denklemi)

$y = xA\left(\frac{dy}{dx}\right) + B\left(\frac{dy}{dx}\right)$ şeklinde verilen denkleme $y' = z$ dönüşümünün uygulanmasıyla elde edilen diferansiyel denkleme Lagrange diferansiyel denklemi denir. Örneğin;

$$y' = x(y')^2 + (y')^2,$$

denkleminin çözümü; denklemde $y' = z$ dönüşümü yerine yazılırsa

$$y = xz^2 + z^2,$$

elde edilir. Denklemin x 'e göre türevi alınır

$$y' = 1z^2 + x2zz' + 2zz',$$

elde edilir ve son denklemde tekrardan $y' = z$ yazılırsa

$$z = z^2 + 2xzz' + 2zz',$$

ifadesi ulaşılmış olunur ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$x' + \frac{2}{z-1}x = \frac{2}{1-z}$$

x 'e göre lineer diferansiyel denklem elde edilir. Ek olarak,

$$\mu = e^{\int \frac{2}{z-1} dz} = e^{2 \ln(z-1)} = (z-1)^{2 \ln e} = (z-1)^2,$$

integral çarpanının bulunup genel çözümde yerine yazılmasıyla

$$y = \left[\frac{-z^2 + 2z + C}{(z-1)^2} \right] z^2 + z^2,$$

çözümü elde edilir.

Tanım 2.2.3 (Ricatti Diferansiyel Denklemi)

$y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$ şeklindeki diferansiyel denklemlere Ricatti diferansiyel denklem denir.

Eğer; $C(x) = 0$ ise bu denkleme lineer diferansiyel denklem ve $A(x) = 0$ ise bu denkleme Bernoulli diferansiyel denklem denir.

Ricatti diferansiyel denklemin çözümüne ulaşmak için bilinen genel bir yöntem yoktur.

$$y = -\frac{\varphi'(x)}{C(x)\varphi(x)}$$

dönüşümü yardımıyla denklem ikinci basamaktan değişken katsayılı lineer homojen denkleme dönüştürülür.

Ricatti diferansiyel denklemin $y_0(x)$ özel çözümü varsa

$$y = y_0(x) + \frac{1}{\varphi(x)}$$

dönüşümü ile denklem

$$\frac{d\varphi}{dx} + [B(x) + 2C(x)y_0(x)]\varphi + C(x) = 0$$

lineer diferansiyel denkleme dönüşür. Burada bağımlı değişken $\varphi(x)$ 'dir.

Örneğin;

$$y' = 3 + 3x^2y - xy^2,$$

Ricatti diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_0(x) = 3x$ ise

$$y = 3x + \frac{1}{\varphi(x)}$$

dönüşümü uygulanarak, ele alınan Ricatti denklemi

$$\frac{d\varphi}{dx} - 3x^2\varphi - x = 0$$

şeklinde lineer hale getirilir. Ek olarak, bu denklemin integral çarpanı

$$\mu(x) = e^{-x^3}$$

şeklindedir. Dolayısıyla Ricatti diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y(x) = 3x + \frac{1}{e^{x^3}(\int e^{x^3} x dx + C)}$$

şeklinde olur.

Tanım 2.2.4 (Clairaut Diferansiyel Denklemi)

$y' = xy' + A(y')$ şeklindeki diferansiyel denklemlere Clairaut diferansiyel denklemleri denir. Clairaut diferansiyel denklemlerin genel çözümüne ulaşmak için y' yerine keyfi C sabiti konulur.

Dolayısıyla genel çözüm;

$$y = xC + A(C),$$

olur.

Örneğin;

$$y = xy' + y' - y'^2$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünde $y' = C$ alınırsa çözüm $y = xC + C - C^2$ şekline dönüşür. Bu denklemde C 'ye göre türev alındığı takdirde

$$x + 1 - 2C = 0 \text{ dolayısıyla } C = \frac{x+1}{2}$$

bulunur ve genel çözümde yerine yazılırsa

$$y = \frac{x}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 \text{veya } y = \frac{1}{4}(x+1)^2$$

olur.

3. LİE SİMETRİ YÖNTEMİ

Fiziksel bir olayın simetrisi, o olayı meydana getiren düzene korunum yada dönüşüm uygulandığında düzenin aynı versiyonda kaldığı matematiksel ve fiziksel bir özelliğidir.

Bir dönüşüm sınıfı sürekli (tekerleğin dönüşü gibi) veya ayrık (simetrik bir şeklin yansımaları gibi) olabilir. Simetrinin oluşumu da tam olarak sürekli ve ayrık dönüşümlerin hareketiyle olur. Lie grupları sürekli simetriler, sonlu gruplar ise ayrık simetriler ile tanımlanırlar.

Modern fiziğin temelini Lie grupları ve sonlu gruplar oluşturur. Simetriler matematiksel gösterimlerle ifade edilip mevcut problemi en basit hale getirmek için kullanılır.

Fizikte simetrilerin en önemli temsili, ışık hızının özel bağıntılı Poincaré simetri grubunun matematiksel ifadelerle bilinen tüm referanslarda aynı sonuçta olmasıdır. Diğer bir önemli örnekte, keyfi farklılaşabilen koordinat dönüşümleri altında fiziksel yasaların biçimlerinin değişmemesidir.

Simetri, değişmezlik anlamında nitelenebilir. Değişmezlik, özellikleri değiştirmeden aynı bırakabilen dönüşümlerle matematiksel olarak formüle edilir. Mesela, oda içerisindeki sıcaklığı göz önüne aldığımızda sıcaklık odanın her noktasında aynı olabilir. Sıcaklığın odanın her yerinde homojen olmasını gözlemleyen kişinin oda içerisindeki yerine bakılmaksızın oda içerisindeki sıcaklığın değişmediği aşîkardır.

Tanımlanan bir kısmi diferansiyel denkleme Lie grup dönüşümü uygulandığında değişmez kalıyorsa bu gruba kısmi diferansiyel denklemlerin Lie simetrisi denir. Yani kısacası, Lie simetrisi veya Lie simetri grubu Lie grup dönüşümüyle değişmeden kalan kısmi diferansiyel denkleme denir. Bağımlı, bağımsız değişkenlerin tamamının verilen dönüşümlerle diferansiyel denklemi, değişmez (invariant) kılan sonsuz küçük üreteçlerle tanımlanır. Söz konusu sonsuz küçük üreteçler, kısmi diferansiyel denklemlerin Lie grubuna tekabül eden Lie cebirini meydana getiren bir bazının lineer gösterimidir (Kiraz, 2007).

Literatürde adi diferansiyel denklemlerin genel çözümüne ulaşmak için kullanılan; homojen hale getirme yöntemi, diferansiyel denklemin mertebesinin indirgenmesi yöntemi, integral çarpanı yöntemi, belirsiz katsayılar yöntemi, ayrılabilir denklem yöntemi gibi yöntemlerin yanı sıra Lie simetri yöntemi de çok önemli bir yöntemdir. Lie grupları, bağımlı-bağımsız değişkenlerin olduğu ve türevlerini içeren, uzayda nokta dönüşümlerini ihtiva eden diferansiyel denklemin çözümüne ulaşmak için kullanılan bir yöntemdir. Dönme, kaydırma, öteleme, yansıma, ölçüm grupları Lie gruplarının en bilinen örnekleridir. Lie gruplarına

uygulanan nokta dönüşümlerinde, diferansiyel denklem değişmeyip aynı kalır. Adi diferansiyel denklemin ise mertebesi indirgenir. Kısmi diferansiyel denklemde bağımsız değişken adeti minimum olan bir değişkene indirgenir (Ahmad, 2005).

Bu bölümde, Lie simetrilerinin genel özellikleri ele alınacaktır. Lie grup teorisine dair tanımlar ve teoremler verilecektir. Lie grup dönüşümü üzerinden sonsuz küçük üreteçlere ait kavramlar incelenecektir. Lie grup dönüşümü uygulanan diferansiyel denklemlere ait değişmezlik tanımları ve Lie cebir yapısı kavramları ele alınacaktır.

3.1 GRUP

Tanım 3.1.1 (Grup)

$G \neq \emptyset$ küme olsun. ∇ , G kümesinde ikili bir işlem olsun. Eğer;

1) Kapalılık Özelliği:

$\forall x, y \in G$ için $x \nabla y \in G$ oluyorsa,

2) Birleşme Özelliği:

$\forall x, y, z \in G$ için $(x \nabla y) \nabla z = x \nabla (y \nabla z)$ oluyorsa,

3) Birim Eleman Özelliği:

$\forall x \in G$ için $x \nabla e = x = e \nabla x$ olacak şekilde $e \in G$ varsa (e grubun birim elemanı),

4) Ters Eleman Özelliği:

$\forall x \in G$ için $x \nabla y = e = y \nabla x$ olacak şekilde $y \in G$ varsa ($y = x^{-1}$ olarak ifade edilir, burada y' ye x elemanının tersi denir.)

özelliklerini sağlayan (G, ∇) ikilisine grup denir.

Yukarıda tanımlanan (G, ∇) ikilisi sadece 1 ve 2 numaralı özellikleri sağlıyorsa yarı grup, 1, 2 ve 3 numaralı özellikleri sağlıyorsa monoid grup denir. Bunlara ek olarak (G, ∇) grubu için;

5) Değişme Özelliği:

(G, ∇) bir grup ve $\forall x, y \in G$ için $x \nabla y = y \nabla x$ ifadesi sağlanıyorsa (G, ∇) ikilisine değişmeli grup denir (Taşçı, 2007; San, 2011).

Örneğin;

Z : Tam sayılar kümesi olacak şekilde, $(Z, +)$ ikilisi;

$$1) \forall x, y \in Z \text{ için } x + y \in Z,$$

$$2) \forall x, y, z \in Z \text{ için } (x + y) + z = x + (y + z),$$

$$3) \forall x \in Z \text{ için } x + 0 = x = 0 + x, (e = 0),$$

$$4) \forall x \in Z \text{ için } x + (-x) = 0 = (-x) + x, -x = x^{-1},$$

özelliklerini sağladığı için bir gruptur.

Tanım 3.1.2 (Sonlu Grup)

G , sonlu bir küme olduğu takdirde (G, ∇) grubuna sonlu grup denir. Örneğin;

$G = \{1, -1, i, -i\}$ kümesi sonlu bir küme olduğu için, $(G, +)$ grubu yukarıda ifade edilen 1, 2, 3 ve 4 numaralı özellikleri sağladığı için sonlu gruptur.

Tanım 3.1.3 (Alt Grup)

A kümesi, B kümesinin alt kümesi olarak tanımlansın. Eğer, (A, ∇) grubu, (B, ∇) grubunun tüm özelliklerini sağlıyorsa; A 'ya B 'nin alt grubu denir.

Örneğin; $(\mathbb{R}, +)$ reel sayıların oluşturduğu bir gruptur. Bu grubun birim elemanı 0 dır. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $-x \in \mathbb{R}$ dir. $Q \subset \mathbb{R}$ olduğu için; $(Q, +)$ grubu, $(\mathbb{R}, +)$ grubunun alt grubudur.

3.2 LİE GRUP ANALİZİ

Tanım 3.2.1 (Dönüşüm Grupları)

$a = (a_1, a_2, a_3, \dots, n)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde bir nokta olsun. A bölgesinde tanımlı olan her a 'nın dönüşüm grupları

$$a^* = B(a, \varepsilon),$$

olacak şekilde tanımlansın. $C \subset \mathbb{R}$ bölgesinde, ε parametresi tanımlı olsun. ε ve δ parametrelerinin oluşturduğu $\mathbb{Y}(\varepsilon, \delta)$ dönüşümü C bölgesinde tanımlansın. O halde, $\mathbb{Y}$ dönüşümünün A bölgesinde dönüşüm grubu olması için aşağıdaki özellikleri sağlaması gerekmektedir:

- 1) C bölgesinde tanımlı her ε parametresi için dönüşümler, A bölgesinde bire-birdir.
- 2) $(C, \mathbb{Y})$ G grup yapısındadır.
- 3) Eğer $\varepsilon = e$ ise $a^* = a$ dır. Yani, $B(a; \varepsilon) = a$ dır.
- 4) Eğer $a^* = B(a; \varepsilon)$ ve $a^{**} = B(a^*, \delta)$ olarak tanımlanırsa $a^{**} = B(a; \mathbb{Y}(\varepsilon, \delta))$ dır (Bluman ve Kumei, 1989).

Tanım 3.2.2 (Bir Parametrelili Lie Grup Dönüşümleri)

$\mathbb{Y}$ dönüşümü yukarıda tanımlanan 1-2-3 ve 4 numaralı özelliklere ek olarak aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathbb{Y}$ dönüşümüne bir parametrelili Lie grubu denir.

- 5) ε ; sürekli bir parametre, C bölgesi; $\mathbb{R}$ de tanımlı bir aralık olmak üzere, $\varepsilon = 0$, etkisiz eleman e 'ye denk gelir.
- 6) B, a 'ya göre A bölgesi içerisinde bütün mertebelerden sürekli türevlere sahiptir.

7) $\varepsilon \in C$ ve $\delta \in C$ için $\Psi(\varepsilon, \delta)$; δ ve ε 'nin analitik fonksiyonudur.

Tanım 3.2.3 (Sonsuz Küçük Dönüşümler)

$$a^* = B(a, \varepsilon), \quad (3.1)$$

ε parametrelili $\varepsilon_0 = 0$ noktasında Ψ işlemi ile Lie grup dönüşümünü ele alalım. (3.1) denkleminin $\varepsilon = 0$ noktasında seri açılımı;

$$\begin{aligned} a^* &= a + \varepsilon \left(\frac{\partial B(a; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 B(a; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + \dots \\ &= a + \varepsilon \left(\frac{\partial B(a; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

olur. (3.2) denkleminde ε parametresinin katsayı fonksiyonu

$$\xi(a) = \frac{\partial B(a; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad (3.3)$$

ile tanımlanırsa, $x + \varepsilon \xi(a)$ dönüşümüne (3.1) denklemi ile verilen Lie grup dönüşümüne ait sonsuz küçük dönüşümü denir. $\xi(x)$ fonksiyonuna da (3.2) denkleminin sonsuz küçüğü (infinitesimal) denir (Bluman ve Anco, 2002).

Yardımcı Teorem: $a^* = B(a, \varepsilon)$ bir parametrelili Lie Grubu;

$$B(a; \varepsilon + \Delta \varepsilon) = B(B(a; \varepsilon); \Psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta \varepsilon)),$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$B(a; \varepsilon + \Delta \varepsilon) = B(B(a, \varepsilon); \Psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta \varepsilon))$$

$$= B(a; \Psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta \varepsilon))$$

$$= B(a; \mathbb{Y}(\mathbb{Y}(\varepsilon, \varepsilon^{-1}), \varepsilon + \Delta\varepsilon))$$

$$= B(a; \mathbb{Y}(0, \varepsilon + \Delta\varepsilon))$$

$$= B(a; \varepsilon + \Delta\varepsilon).$$

Teorem 3.2.1 (Lie'nin Birinci Temel Teoremi)

$a^* = B(a, \varepsilon)$ bir parametrelili olacak şekilde Lie grup dönüşümü olarak tanımlansın.
 $\tau = 0$ ve $x^* = x$ iken

$$\frac{dx^*}{d\tau} = \xi(x^*),$$

formundaki birinci mertebeden diferansiyel denklemin çözümü; $a^* = B(a, \varepsilon)$ Lie grup dönüşümlerine $\tau(\varepsilon)$ parametrizasyonu ile elde edilir:

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \Gamma(\varepsilon') d\varepsilon',$$

$$\Gamma(\varepsilon) = \left(\frac{\partial \mathbb{Y}(a, b)}{\partial b} \Big|_{(a, b) = (\varepsilon^{-1}, \varepsilon)} \right),$$

$$\Gamma(0) = 1.$$

İspat: $a^* = B(a, \varepsilon)$ Lie grup dönüşümünün yukarıda verilen yardımcı teoremden verilerle;

$$B(a; \varepsilon + \Delta\varepsilon) = B(B(a, \varepsilon); \mathbb{Y}(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)),$$

olduğu açıktır. $B(a; \varepsilon + \Delta\varepsilon)$ ifadesi $\Delta\varepsilon = 0$ civarında seri açılırsa;

$$B(a; \varepsilon + \Delta\varepsilon) = B(a, \varepsilon) + \left(\frac{\partial B(a, \varepsilon + \Delta\varepsilon)}{\partial (\varepsilon + \Delta\varepsilon)} \Big|_{\Delta\varepsilon=0} \right) \Delta\varepsilon + \dots$$

$$= a^* + \frac{\partial B(a, \varepsilon) \Delta\varepsilon}{\partial \varepsilon} + O((\Delta\varepsilon)^2),$$

olur. $\Psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)$ ifadesi $\Delta\varepsilon = 0$ civarında seri açılırsa;

$$\begin{aligned}\Psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon) &= \Psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + \left(\frac{\partial \Psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)}{\partial (\varepsilon + \Delta\varepsilon)} \Big|_{\Delta\varepsilon=0} \right) + \dots \\ &= \Psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + \Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2), \\ &= \Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2),\end{aligned}$$

olur. Öte yandan,

$$\begin{aligned}B(a; \varepsilon + \Delta\varepsilon) &= B(B(a, \varepsilon); \Psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)) = B(a^*; \Psi(\varepsilon^{-1}, \Delta\varepsilon), \\ &= B(a^*; \Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2), \\ &= B(a^*, 0) + \Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon \left(\frac{\partial B(a^*; \delta)}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} \right) + O((\Delta\varepsilon)^2), \\ &= a^* + \Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon \xi(a^*) + O((\Delta\varepsilon)^2),\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu ifadeden;

$$\frac{\partial B(a; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \Gamma(\varepsilon)\xi(a^*),$$

$$\frac{\partial a^*}{\partial \varepsilon} = \Gamma(\varepsilon)\xi(a^*) ; \varepsilon = 0 \text{ ise}$$

$$a^* = a,$$

olmuş olur (Bluman ve Anco, 2002).

Örnek 3.1: $-1 < \varepsilon < \infty$ olacak şekilde

$$a^* = (1 + \varepsilon)a,$$

$$b^* = (1 + \varepsilon)^2 b,$$

grup dönüşümleri için

$$\mathbb{Y}(p, r) = p + r + pr \quad , \quad \varepsilon^{-1} = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

olsun. O halde;

$$\frac{\partial \mathbb{Y}(p, r)}{\partial r} = 1 + p$$

ve

$$\Gamma(\varepsilon) = \left(\frac{\partial \mathbb{Y}(p, r)}{\partial r} \right)_{(\varepsilon^{-1}, \varepsilon)} = 1 + \varepsilon^{-1} = \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

olur. $a = (a, b)$ olsun.

$$B(a, \varepsilon) = ((1 + \varepsilon)a, (1 + \varepsilon)^2 b),$$

$$\frac{\partial B(a, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = (a, 2(1 + \varepsilon)b),$$

ve

$$\xi(a) = \frac{\partial B(a, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = (a, 2b),$$

olur. Parametrizasyon da,

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \Gamma(\varepsilon') d\varepsilon' = \int_0^\varepsilon \frac{1}{1+\varepsilon'} d\varepsilon' = \log(1+\varepsilon)$$

elde edilir. Başta bahsedilen grup dönüşümleride, $-\infty < \tau < \infty$ için

$$a^* = e^\tau a,$$

$$b^* = e^{2\tau} b,$$

olacaktır ve

$$\forall(\tau_1, \tau_2) = \tau_1 + \tau_2,$$

olur (Bluman ve Anco, 2002).

Tanım 3.2.4 (Sonsuz Küçük Üreteçler)

$a^* = B(a, \varepsilon)$ Lie grup dönüşümünü ele alalım. $a = a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ bölgesinde bir nokta ve ∇ operatörü;

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial a_1}, \frac{\partial}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial a_n} \right)$$

olacak şekilde

$$B = \xi(a) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^n \xi^i(a) \frac{\partial}{\partial a_i} \quad (3.4)$$

biçiminde tanımlanan operatöre Lie grup dönüşümüne ait sonsuz küçük üretici (simetrisi) denir. (3.4) denkleminde katsayı fonksiyonları

$$\xi^i(a) = \left. \frac{\partial B(a_i, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.2: $a^* = B(a, \varepsilon)$ bir parametrelı Lie grup dönüşümünden

$$a^* = B(a, \varepsilon)$$

$$= e^{\varepsilon B} a$$

$$= a + \varepsilon B a + \frac{\varepsilon^2}{2} B^2 a + \dots$$

$$= \left(1 + \varepsilon B + \frac{\varepsilon^2}{2} B^2 + \dots \right) a$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} B^k a$$

ve

$$B^k = B^k(a) = B B^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$B^k F(a) = B \left(B^{k-1} F(a) \right) \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$B^0 F(a) = F(a),$$

olur. Sonuç olarak $F(a)$ her mertebeden diferansiyellenebilir ise

$$F(a^*) = F(e^{\varepsilon B} a) = e^{\varepsilon B} F(a),$$

olur (Bluman ve Anco, 2002).

Örnek 3.2:

$$a^* = a \cos \varepsilon - b \sin \varepsilon,$$

$$b^* = a \sin \varepsilon + b \cos \varepsilon,$$

dönme simetrisini simgeleyen dönüşümler verilsin.

$$\frac{\partial a^*}{\partial \varepsilon} = -a \sin \varepsilon - b \cos \varepsilon$$

$$\frac{\partial b^*}{\partial \varepsilon} = a \cos \varepsilon - b \sin \varepsilon,$$

$$\xi(a, b) = \left. \frac{da^*}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -b,$$

$$\eta(a, b) = \left. \frac{db^*}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = a,$$

olacağından dolayı simetri üretici

$$B = -b \frac{\partial}{\partial a} + a \frac{\partial}{\partial b}$$

olarak ifade edilir.

$$(a^*, b^*) = (e^{\varepsilon B} a, e^{\varepsilon B} b),$$

olmak üzere

$$Ba = -b \frac{\partial a}{\partial a} + a \frac{\partial a}{\partial b} = -b,$$

$$B^2 a = B(Ba) = -b \frac{\partial(-b)}{\partial a} + a \frac{\partial(-b)}{\partial b} = -a,$$

$$B^3 a = B^2(Ba) = -b \frac{\partial(-a)}{\partial a} + a \frac{\partial(-a)}{\partial b} = b,$$

$$B^4 a = B^3(Ba) = -b \frac{\partial b}{\partial a} + a \frac{\partial b}{\partial b} = a,$$

olduğu için

$$B^{4n}a = a, \quad B^{4n-1}a = b, \quad B^{4n-2}a = -a, \quad B^{4n-3}a = -b, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olacağından

$$\begin{aligned} a^* &= e^{\varepsilon B} a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} B^k a = a - \varepsilon b - \frac{\varepsilon^2}{2!} a + \frac{\varepsilon^3}{3!} b + \dots \\ &= a \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} + \dots \right) - b \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} + \dots \right) \\ &= a \cos \varepsilon + b \sin \varepsilon \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Benzer yolla B operatörünü b 'ye uygularsak;

$$\begin{aligned} Bb &= -b \frac{\partial b}{\partial a} + a \frac{\partial b}{\partial b} = a, \\ B^2 b &= B(Bb) = -b \frac{\partial a}{\partial a} + a \frac{\partial a}{\partial b} = -b, \end{aligned}$$

$$B^3 b = B^2(Bb) = -b \frac{\partial(-b)}{\partial a} + a \frac{\partial(-b)}{\partial b} = -a,$$

$$B^4 b = B^3(Bb) = -b \frac{\partial(-a)}{\partial a} + a \frac{\partial(-a)}{\partial b} = b,$$

olduğu için

$$B^{4n}b = b, \quad B^{4n-1}b = -a, \quad B^{4n-2}b = -b, \quad B^{4n-3}b = a \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olacağından

$$b^* = e^{\varepsilon B} b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} B^k b = b + \varepsilon a - \frac{\varepsilon^2}{2!} b - \frac{\varepsilon^3}{3!} a + \dots$$

$$= a \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} + \dots \right) + b \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} + \dots \right)$$

$$= a \sin \varepsilon + b \cos \varepsilon,$$

olarak bulunur (Bluman ve Anco, 2002).

Örnek 3.3:

$$B = a^2 \frac{\partial}{\partial a} + ab \frac{\partial}{\partial b}$$

sonsuz küçük üretici için a^* ve b^* dönüşümleri;

$$a^* = e^{\varepsilon B} a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} B^k a = \left(1 + \varepsilon B + \frac{\varepsilon^2}{2!} B^2 + \frac{\varepsilon^3}{3!} B^3 + \frac{\varepsilon^4}{4!} B^4 + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} B^n + \dots \right) a$$

$$b^* = e^{\varepsilon B} b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} B^k b = \left(1 + \varepsilon B + \frac{\varepsilon^2}{2!} B^2 + \frac{\varepsilon^3}{3!} B^3 + \frac{\varepsilon^4}{4!} B^4 + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} B^n + \dots \right) b$$

$$Ba = a^2$$

$$B^2 a = 2! a^3$$

$$B^3 a = 3! a^4$$

.

.

.

$$B^n a = n! a^{n+1}$$

olur. Benzer şekilde,

$$Bb = ab$$

$$B^2b = 2! ba^2$$

$$B^3b = 3! ba^3$$

.

.

.

$$B^nb = n! ba^n$$

olarak bulunur. Burada $|\varepsilon a| < 1$ için

$$a^* = e^{\varepsilon B} a = (1 + \varepsilon B + \varepsilon^2 B^2 + \varepsilon^3 B^3 + \varepsilon^4 B^4 + \dots + \varepsilon^n B^n) a = \frac{a}{1 - \varepsilon}$$

$$b^* = e^{\varepsilon B} b = (1 + \varepsilon B + \varepsilon^2 B^2 + \varepsilon^3 B^3 + \varepsilon^4 B^4 + \dots + \varepsilon^n B^n) b = \frac{b}{1 - \varepsilon}$$

dönüşümleri elde edilir (Bluman ve Anco, 2002).

Tanım 3.2.5 (Bir Parametrelili Lie Grup Nokta Dönüşümleri)

n tane bağımsız değişkeni x ile, k tane bağımlı değişkeni t ile gösterelim. O halde,

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$t = (t^1, t^2, t^3, \dots, t^k),$$

olacak şekilde $n + k$ değişkenli uzayda,

$$x^* = B(x, t; \varepsilon),$$

$$t^* = T(x, t; \varepsilon),$$

formatındaki grup dönüşümlerine bir parametrelili Lie grup nokta dönüşümleri adı verilir (Bluman ve Anco, 2002).

Tanım 3.2.6 (Total Türev)

n tane bağımsız değişkeni x ile, k tane bağımlı değişkeni t ile gösterelim. O halde,

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$t = (t^1, t^2, t^3, \dots, t^k),$$

olsun.

$$t_i^\mu = \frac{\partial t^\mu}{\partial x_i}$$

olmak üzere total türev operatörü;

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + t_i^\mu \frac{\partial}{\partial t^\mu} + t_{ij}^\mu \frac{\partial}{\partial t_j^\mu} + \dots + t_{i,i_1,i_2,\dots,i_n}^\mu \frac{\partial}{\partial t_{i,i_1,i_2,\dots,i_n}^\mu}$$

biçiminde gösterilir (Bluman ve Kumei, 1989).

Tanım 3.2.7 (Sonsuz Küçük Üretcin m. Uzanımı)

$$x^* = B(x, t; \varepsilon),$$

$$t^* = T(x, t; \varepsilon),$$

Lie grup dönüşümlerine ait

$$B = \sum_{i=1}^n \xi_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.5)$$

sonsuz küçük üreticine ait birinci uzanım

$$B^{(1)} = B + \xi_i \frac{\partial}{\partial t_i}$$

olur. Burada,

$$\xi_0 = \eta,$$

$$\xi_i = D_i(\eta) - \sum_{m=1}^n t_m D_i(\xi_m),$$

dir. (3.5) numaralı denklemin üreticinin ikinci uzanımı

$$B^{(2)} = B^{(1)} + \xi_i^j \frac{\partial}{\partial t_i^j} + \xi_{im}^j \frac{\partial}{\partial t_{im}^j}$$

olacaktır. Burada,

$$\xi_{im}^j = D_m(\eta_i^j) - \sum_{m=1}^n t_{im}^j D_m(\xi_i)$$

dır. İki büyük uzanımlarda;

$$qm(B^m) - qm(B^{m-1}) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} \xi_{i_1, i_2, \dots, i_m}^j \frac{\partial}{\partial t_{i_1, i_2, \dots, i_m}^j}$$

olacaktır. (3.5) numaralı denklemin sonsuz küçük üreticinin m . uzanımı;

$$\begin{aligned} B^m = & \xi_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, t) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x, t, t_k) + \dots \\ & + \xi_{i_1, i_2, \dots, i_m}(x, t, t_1, \dots, t_{i_1, i_2, \dots, i_m}) \frac{\partial}{\partial t_{i_1, i_2, \dots, i_m}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklindedir. Burada sonsuz küçük fonksiyonları,

$$\xi_k = D_k(\eta) - \sum_{k=1}^n t_i D_k(\xi^i)$$

$$\xi_{i_1, i_2, \dots, i_m} = D_{i_m}(\xi_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}) - \sum_{s=1}^n t_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}} s D_{i_m}(\xi^s) \quad (3.7)$$

olarak tanımlanır.

3.3 ÜRETEÇLERİN DÖNÜŞÜMLERİ

Sonsuz küçük üretç

$$B_j = \sum_{i=1}^n \xi^i(a) \frac{\partial}{\partial a_i}$$

oparatörü; $a = a(a_i)$ ye bağlı olup dönüşüm şartları ile $\acute{a}_i$ değişkenine dönüştürülebilir. $\acute{a}_i = \acute{a}_i(a_i)$ olsun.

$$\left| \frac{\partial \acute{a}_i}{\partial a_i} \right| \neq 0$$

zincir kuralından;

$$\frac{\partial}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial \acute{a}_i} \cdot \frac{\partial \acute{a}_i}{\partial a_i}$$

bulunur. B_j sonsuz küçük üretecini tekrar düzenlersek;

$$\begin{aligned} B_j &= \sum_{i=1}^n \xi^i(a) \frac{\partial}{\partial a_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \xi^i(a) \frac{\partial}{\partial \acute{a}_i} \cdot \frac{\partial \acute{a}_i}{\partial a_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i(a) \frac{\partial}{\partial \acute{a}_i} \end{aligned}$$

olacaktır. Burada,

$$\xi_i(a) = \xi_i(a) \frac{\partial \dot{a}_i}{\partial a_i}$$

olmak üzere;

$$B_j a_k = \sum_{i=1}^n \xi_i(a) \frac{\partial a_k}{\partial a_i} = \xi^k(a)$$

$$B_j \dot{a}_k = \sum_{i=1}^n \xi_i(a) \frac{\partial \dot{a}_k}{\partial \dot{a}_i} = \xi_k(a)$$

$1 \leq k \leq n$ için sonsuz küçük üreticiler

$$B_j = \sum_{i=1}^n (B_j a_i) \frac{\partial}{\partial a_i} = \sum_{i=1}^n (B_j \dot{a}_i) \frac{\partial}{\partial \dot{a}_i} \quad (3.8)$$

olur. Bu durumda a_i koordinatlarına göre yazılan B_j üretici $\dot{a}_i$ ile ifade edilen yeni koordinatlara göre yazılmış olur (Ahmad, 2005).

Örnek 3.4:

$$B = a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b}$$

şeklinde verilen simetri üreticini p ve q yeni değişkenlerini,

$$q = \frac{b}{a}, \quad p = a.b,$$

biçiminde tanımlayalım. Sonsuz küçük simetri üretici olan B ye p ve q değişkenlerini uygularsak;

$$Bq = a \frac{\partial q}{\partial a} + b \frac{\partial q}{\partial b} = 0,$$

$$Bp = a \frac{\partial p}{\partial a} + b \frac{\partial p}{\partial b} = 2ab = 2p,$$

bulunur. Böylece B üretici yeni koordinatlarına göre

$$B = 2p \frac{\partial}{\partial p}$$

şeklinde ifade edilir (Ahmad, 2005).

3.4 ÜRETECİN NORMAL FORMU

(3.8) ile ifade edilen denklemin kısmi diferansiyel sistemleri için

$$B_{\gamma} = \sum_{i=1}^n \xi^i(a) \frac{\partial \gamma}{\partial a_i} = 1 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$B\dot{a}_k = \sum_{i=1}^n \xi^i(a) \frac{\partial \dot{a}_k}{\partial a_i} = 0 \quad k = 2, 3, 4, \dots, n$$

$\{\gamma(a_i), \dot{a}_k(a_i)\}$ olacak şekilde daima açık olmayan çözümler vardır. Buradan sonsuz küçük simetri üretici

$$B = \sum_{i=1}^n \xi^i(a) \frac{\partial}{\partial a_i}$$

formundan;

$$B = \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

formuna indirgenebilir. Bu forma B üreticine ait normal formu denir (Stephani, 1989).

Örnek 3.5: Dönme dönüşümleri;

$$a^* = a \cos \varepsilon - b \sin \varepsilon,$$

$$b^* = a \sin \varepsilon + b \cos \varepsilon,$$

ve simetri üretici

$$B = -b \frac{\partial}{\partial a} + a \frac{\partial}{\partial b}$$

şeklinde verilsin. Kutupsal koordinatlarda

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ve } \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

olacağından yeni değişkenler B üreticisine uygulanırsa;

$$Br = -b \frac{\partial r}{\partial a} + a \frac{\partial r}{\partial b} = 0$$

$$B\theta = -b \frac{\partial \theta}{\partial a} + a \frac{\partial \theta}{\partial b} = 1$$

olur ve B nin normal formu

$$B = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

şeklinde bulunur (Stephani, 1989).

3.5 LİE GRUP DÖNÜŞÜMLERİNDE İNVARİYANTLIK

Lie grup dönüşümleri değişmez işlevlere, yüzey, eğri ve noktalara sahip olabilir. Bu olay Lie grup teorisinin en doğal ve temel özelliğidir. Değişmezlik özelliği nedeniyle simetri grubuna ait sonsuz küçük üreteç altında kompleks lineer olmayan koşullar daha basit lineer koşullara dönüştürülebilir.

Tanım 3.5.1 (Değişmez Fonksiyonlar)

$g(x)$ sürekli ve her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olarak tanımlansın. $g(x)$ fonksiyonu değişmez bir fonksiyon olması için ancak ve ancak, $a^* = B(a, \varepsilon)$ dönüşümü için $g(x) = g(x^*)$ olmalıdır (Bluman ve Anco, 2002).

Teorem 3.5.1: Sürekli bir g fonksiyonu için $g(x), a^* = B(a, \varepsilon)$ Lie grup dönüşümü altında değişmez $\Leftrightarrow Bg(x) = 0$ (Bluman ve Kumei, 1989).

İspat:

$$(\Rightarrow) \quad g(x^*) = e^{\varepsilon B} g(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} B^n g(x)$$

$$= g(x) + \varepsilon Bg(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} B^2 g(x) + \dots$$

$g(x^*) = g(x)$ olması için eşitliğin sağındaki ikinci terimden itibaren sıfır olmalıdır. Yani; $Bg(x) = 0$ dır.

$$(\Leftarrow) \quad Bg(x^*) = 0 \Rightarrow B^n g(x) = 0$$

$$g(x^*) = g(x) + \varepsilon Bg(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} B^2 g(x) + \dots$$

olup,

$$Bg(x) = B^2 g(x) = \dots = B^n g(x) = 0$$

olacağından

$$g(x^*) = g(x)$$

olur.

Teorem 3.5.2: $a^* = B(a, \varepsilon)$ Lie grup dönüşümü için $g(x) = g(x) + \varepsilon \Leftrightarrow Bg(x) = 1$ dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $g(x^*)e^{\varepsilon B}g(x) = g(x) + \varepsilon Bg(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!}B^2g(x) + \dots + g(x) + \varepsilon$

$$= g(x) + \varepsilon Bg(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!}B^2g(x) + \dots$$

olup eşitliğin sağlanması için

$$Bg(x) = 1$$

ve

$$B^n g(x) = 0 \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

olmalıdır.

$$(\Leftarrow) \quad Bg(x) = 1 \text{ ise } B^n g(x) = 0 \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

ve

$$g(x^*) = e^{\varepsilon B}g(x) = g(x) + \varepsilon Bg(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!}B^2g(x) + \dots$$

olur. Bu durumda

$$g(x^*) = g(x) + \varepsilon$$

olur (Bluman ve Anco, 2002).

Tanım 3.5.2 (Değişmez Noktalar)

$a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ bir nokta olsun ve $a^* = B(a, \varepsilon)$ bir parametrelili Lie grup dönüşümü altında değişmez $\Leftrightarrow a^* = a$ (Ahmad, 2005).

Tanım 3.5.3 (Değişmez Eğriler)

$g(x) = 0$ fonksiyonu n boyutlu uzayda ($\mathbb{R}^n$) bir eğriyi temsil etsin ve bir parametrelili Lie grup dönüşümü $\mathbb{R}^n$ içinde

$$a_i^* = a_i + \varepsilon \xi_i(a) + O(\varepsilon^2) , \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

olarak verilsin. Bu dönüşümle ilgili üretic

$$B = \sum_{i=1}^n \xi^i(a) \frac{\partial}{\partial a_i}$$

olsun. $g(x) = 0$ eğrisi değişmezdir (invarianttır) $\Leftrightarrow g(x^*) = 0$ dır (Ahmad, 2005).

Tanım 3.5.4 (Değişmez Yüzeyler)

$x \in \mathbb{R}^n$ n-boyutlu uzayda $g(x) = 0$ fonksiyonu düzgün bir yüzeyi temsil etsin ve $a^* = B(a, \varepsilon)$ bir parametrelili Lie grup dönüşümünü temsil etsin. $g(x) = 0$ olarak tanımlanan yüzey simetri dönüşümü altında değişmezdir $\Leftrightarrow g(x^*) = 0$ dır (Ahmad, 2005).

Tanım 3.5.5 (Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Değişmezliği)

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ noktasında n tane bağımsız değişken ve t bağımlı değişken olsun. m . mertebeden

$$G(a, t, t^1, t^2, t^3, \dots, t^m) = 0 \quad (3.9)$$

kısmi diferansiyel denklemi için

$$a^* = B(a, t; \varepsilon) \quad (3.10)$$

$$t^* = T(a, t; \varepsilon) \quad (3.11)$$

tek parametrelili Lie grup dönüşümü olsun. Bu durumda kısmi diferansiyel denklem Lie grup dönüşümü altında değişmez olması için aşağıda verilen teorem bir dayanaktır.

Teorem 3.5.3 (Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Değişmezliği için Sonsuz Küçükler Ölçütü)

(3.10) ve (3.11) dönüşümleri için sonsuz küçük simetri üretici

$$B = \xi_i(a, t) \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta(a, t) \frac{\partial}{\partial t}$$

olacak şekilde verilsin. Bu durumda sonsuz küçük üreticinin m . uzanımı

$$B^m = \xi_i(a, t) \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta(a, t) + \eta^{(1)}(a, t, \partial t) \frac{\partial}{\partial t_i} + \dots + \eta^{(m)}(a, t, \partial t, \partial^2 t, \dots, \partial^m t) \frac{\partial}{\partial t_{i_1, i_2, \dots, i_m}}$$

olacaktır. Burada sonsuz küçükler $\eta_i^{(1)}$ ve $\eta_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{(j)}$ ler

$$\eta_i^{(1)} = D_i \eta - (D_i \xi_j) t_j, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\eta_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(m)} = D_{i_m} \eta_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}^{(m-1)} - (D_{i_m} \xi_j) t_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1} j}$$

$$m \geq 2 \text{ ve } j = 1, 2, \dots, m; i_j = 1, 2, \dots, n$$

formülleri ile hesap edilir.

$$\xi(a, t) = (\xi_1(a, t), \xi_2(a, t), \dots, \xi_n(a, t))$$

ve total türev operatörü D olarak tanımlanmıştır. (3.10) ve (3.11) tek parametrelili Lie grup dönüşümü (3.9) denkleminin nokta simetrisi olur $\Leftrightarrow G(a, t, t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}, \dots, t^{(m)}) = 0$ olduğunda $B^m G(a, t, t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}, \dots, t^{(m)}) = 0$ olur (Olver, 1991).

Tanım 3.5.6 (Nokta Simetri)

$$B = \sum_{i=1}^n \xi^i(a, t) \frac{\partial}{\partial t^i} + \eta(a, t) \frac{\partial}{\partial t}$$

şeklindeki üreteçlere nokta simetrisi denir. B üretecinin katsayıları yalnız bağımlı ve bağımsız değişkenlere bağlı fonksiyonlardan ibarettir.

Tanım 3.5.7 (Kontakt Simetri)

$$B = \sum_{i=1}^n \xi^i(a, t, t_i) \frac{\partial}{\partial t^i} + \eta(a, t, t_i) \frac{\partial}{\partial t}$$

şeklindeki üreteçlere kontakt simetri denir. B üretecinin katsayıları bağımlı ve bağımsız değişkenlere ilaveten birinci mertebeden türevleri de ihtiva eden fonksiyonlardır.

Tanım 3.5.8 (Bäcklund Simetri)

B üretecinin katsayıları bağımlı ve bağımsız değişkenlere ilaveten yüksek mertebeden türevleri de ihtiva eden fonksiyonların içermektedir. Başka bir deyişle, kontakt simetrilerin geniş bir halidir.

Tanım 3.5.9 (Non-Local (Yerel Olmayan) Simetri)

B üretecinin katsayıları, bağımlı ve bağımsız değişkenlere ilaveten çözümü olmayan integralleri ihtiva eden fonksiyonların olduğu simetridir.

3.6 LİE CEBİR

Her tek parametrelili Lie grup dönüşümü, bir B sonsuz küçük simetri üreteline denk gelir. n parametrelili Lie grup dönüşümlerine ait, n boyutlu sonsuz küçük üreteleri bir Lie grup cebri oluşturur (Gilmore, 1974).

$a = (a_1, a_2, \dots, a_i)$ noktasının

$$a_i^* = a_i + \varepsilon \xi_i(a)$$

formundaki $a \in \mathbb{R}^n$ noktasındaki geometrik olarak sonsuz küçük dönüşümleri

$$\xi(a) = (\xi_1(a), \xi_2(a), \dots, \xi_n(a))$$

tanjant vektörüyle belirtilir. Bu sebeple $\xi(a)$ 'ya belirtilen dönüşümlerin tek parametrelili Lie grubunun tanjant vektör cismi denir ve birinci mertebeden lineer diferansiyel operatörle gösterilir, $\xi(a)$ ile ifade edilir (Kiraz, 2007).

$$\xi(a) = (\xi_i(a))$$

ve

$$B = \xi(a) \frac{\partial}{\partial a_i}$$

dir.

Tanım 3.6.1 (Komütatör)

B_i , n parametrelili Lie grup dönüşümü için denk gelen sonsuz küçük simetri üreteci ve $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ parametresine bağlı biçimde verilsin.

$$B_i = \xi_i(a) \frac{\partial}{\partial a_i} \text{ ve } B_j = \xi_j(a) \frac{\partial}{\partial a_j}$$

iki simetri üreteci olacak şekilde $[,]$ komütatörü

$$[B_i, B_j] = B_i B_j - B_j B_i$$

$$B_i B_j = \sum_{k=1}^n \xi_i^k \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\sum_{l=1}^n \xi_j^l (a, \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial a_l}) \right)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.6.2 (n -Boyutlu Lie Cebiri)

G bir cisim ve G cismi üzerindeki vektör uzayını L temsil etsin. Şayet G vektör uzayı $[,]$ komütatör işlemi altında kapalı ve aşağıda belirtilen özellikleri sağlıyorsa G cismine n boyutlu Lie cebri denir ve L_n ile sembolize edilir.

Antisimetri Özelliği:

Her $B_i, B_j \in L_n$ için $[B_i, B_j] = -[B_j, B_i]$,

Bilineerlik Özelliği:

Her $t_1, t_2 \in G$ ve $B_i, B_j, B_k \in L_n$ için

$$[B_i, t_1 B_j + t_2 B_k] = t_1 [B_i, B_j] + t_2 [B_i, B_k],$$

$$[t_1 B_i + t_2 B_j, B_k] = t_1 [B_i, B_k] + t_2 [B_j, B_k].$$

Jacobi Özelliği:

Her $B_i, B_j, B_k \in L_n$ için

$$[B_i, [B_j, B_k]] + [B_j, [B_k, B_i]] + [B_k, [B_i, B_j]] = 0$$

antisimetri özelliğinden her $B_i \in L_n$ için

$$[B_i, B_i] = 0$$

olduğu aşıkardır.

Eğer her $B_i, B_j \in L_n$ için

$$[B_i, B_j] = 0$$

olursa Lie cebirine değişmeli (abelyan) denir.

Özel olarak, L_n vektör uzayı $\mathbb{R}$ cismi üzerinde Lie cebiri olarak tanımlanırsa genel bir ifadeyle aşağıdaki özellikler sağlanır:

$B_i, B_j, B_k \in L_n$ ve $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;

1) $t_1 B_i + t_2 B_j \in L_n$

2) $B_i + B_j = B_j + B_i$

3) $B_i + (B_j + B_k) = (B_i + B_j) + B_k$

4) $[B_i, B_j] \in L_n$

5) $[B_i, B_j] = -[B_j, B_i]$

6) $[B_i, [B_j, B_k]] + [B_j, [B_k, B_i]] + [B_k, [B_i, B_j]] = 0$

7) $[t_1 B_i + t_2 B_j, B_k] = t_1 [B_i, B_k] + t_2 [B_j, B_k]$

(Bluman ve Kumei, 1989).

Örnek 3.6:

$$a^* = e^{\varepsilon_4} (a \cos \varepsilon_1 - b \sin \varepsilon_1) + \varepsilon_2,$$

$$b^* = e^{\varepsilon_4} (a \sin \varepsilon_1 - b \cos \varepsilon_1) + \varepsilon_3,$$

Lie grup dönüşümü ve bu dönüşümün sonsuz küçük üreteçleri

$$B_1 = -b \frac{\partial}{\partial a} + a \frac{\partial}{\partial b}$$

$$B_2 = \frac{\partial}{\partial a}$$

$$B_3 = \frac{\partial}{\partial b}$$

$$B_4 = a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b}$$

olsun. Lie parantez operatörü yardımıyla komütatör tablosunu bulalım:

$$[B_1, B_1] = B_1 B_1 - B_1 B_1 = 0,$$

$$[B_1, B_1] = B_1 B_1 - B_1 B_1 = 0,$$

$$[B_3, B_3] = B_3 B_3 - B_3 B_3 = 0,$$

$$[B_4, B_4] = B_4 B_4 - B_4 B_4 = 0,$$

$$[B_1, B_2] = B_1 B_2 - B_2 B_1$$

$$= \left(-b \frac{\partial}{\partial a} + a \frac{\partial}{\partial b} \right) \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial a} \left(-b \frac{\partial}{\partial a} + a \frac{\partial}{\partial b} \right)$$

$$= -b \frac{\partial^2}{\partial a^2} + a \frac{\partial^2}{\partial b \partial a} + b \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{\partial}{\partial b} - a \frac{\partial^2}{\partial a \partial b}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial b}$$

$$= -B_3$$

$$[B_1, B_3] = B_1 B_3 - B_3 B_1$$

$$= \left(-b \frac{\partial}{\partial a} + a \frac{\partial}{\partial b} \right) \frac{\partial}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b} \left(-b \frac{\partial}{\partial a} + a \frac{\partial}{\partial b} \right)$$

$$= -b \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} + a \frac{\partial^2}{\partial b^2} + \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} - a \frac{\partial^2}{\partial b^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial a}$$

$$= B_2$$

$$[B_1, B_4] = B_1 B_4 - B_4 B_1$$

$$= \left(-b \frac{\partial}{\partial a} + a \frac{\partial}{\partial b} \right) \left(a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b} \right) - \left(a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b} \right) \left(-b \frac{\partial}{\partial a} + a \frac{\partial}{\partial b} \right)$$

$$= -b \frac{\partial}{\partial a} - ab \frac{\partial^2}{\partial a^2} - b^2 \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} + a \frac{\partial}{\partial b} + ab \frac{\partial^2}{\partial b^2} + ab \frac{\partial^2}{\partial a^2}$$

$$-a \frac{\partial}{\partial b} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} + b \frac{\partial}{\partial a} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} - ab \frac{\partial^2}{\partial b^2}$$

$$= 0$$

$$[B_2, B_1] = B_2 B_1 - B_1 B_2$$

$$= -[B_1, B_2]$$

$$= B_3$$

$$[B_2, B_3] = B_2 B_3 - B_3 B_2$$

$$= \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial}{\partial a}$$

$$= 0$$

$$[B_2, B_4] = B_2 B_4 - B_4 B_2$$

$$= \frac{\partial}{\partial a} \left(a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b} \right) - \left(a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b} \right) \frac{\partial}{\partial a}$$

$$= \frac{\partial}{\partial a}$$

$$= B_2$$

$$[B_3, B_1] = B_3 B_1 - B_1 B_3$$

$$= -[B_1, B_3]$$

$$= -B_2$$

$$[B_3, B_2] = B_3 B_2 - B_2 B_3$$

$$= -[B_2, B_3]$$

$$= 0$$

$$[B_3, B_4] = B_3 B_4 - B_4 B_3$$

$$= \frac{\partial}{\partial b} \left(a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b} \right) - \left(a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b} \right) \frac{\partial}{\partial b}$$

$$= a \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} + \frac{\partial}{\partial b} + b \frac{\partial^2}{\partial b^2} - a \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} - b \frac{\partial^2}{\partial b^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial b}$$

$$= B_3$$

$$[B_4, B_1] = B_4 B_1 - B_1 B_4$$

$$= -[B_1, B_4]$$

$$= 0$$

$$[B_4, B_2] = B_4 B_2 - B_2 B_4$$

$$= -[B_2, B_4]$$

$$= -B_2$$

$$[B_4, B_3] = B_4 B_3 - B_3 B_4$$

$$= -[B_3, B_4]$$

$$= -B_3$$

Bulunan bu değerler için komütatör tablosunu elde edelim:

$[B_i, B_j]$	B_1	B_2	B_3	B_4
B_1	0	$-B_3$	B_2	0
B_2	B_3	0	0	B_2
B_3	$-B_2$	0	0	B_3
B_4	0	$-B_2$	$-B_3$	0

(Bluman ve Anco, 2002).

Örnek 3.7: B , G cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Her $a, b \in B$ için $[a, b] = ab - ba$ olarak tanımlayalım. Böylece B nin Lie cebir olduğu şu şekilde gösterilebilir:

- a) $x, y \in G$ ve $a, b, c \in B$ için $[c, xa + yb] = x[c, a] + y[c, b]$ olur.
- b) Her $a \in B$ için $[a, a] = aa - aa = 0$ dır.
- c) $a, b, c \in B$ için

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]]$$

$$= [a, bc - cb] + [b, ca - ac] + [c, ab - ba]$$

$$= abc - acb - yca + cba + bca - bac$$

$$-cab + acb + cab - cba - abc + bac$$

$$= 0$$

dır.

Örnek 3.8: $G = \mathbb{R}$ ve $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ için

$$[A, B] = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

olacağından $\mathbb{R}^3$ ün, $\mathbb{R}$ üzerinde Lie cebir olduğunu gösterelim:

1) $x, y \in \mathbb{R}$ ve $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ için

$$[xA + yB, C] = [(xa_1 + yb_1, xa_2 + yb_2), (c_1, c_2, c_3)]$$

$$= ((xa_2 + yb_2)c_3 - (xa_3yb_3)c_2, \\ (xa_3 + yb_3)c_1 - (xa_1 + yb_1)c_3, \\ (xa_1 + yb_1)c_2 - (xa_2 + yb_2)c_1)$$

$$= (xa_2c_3 + yb_2c_3 - xa_3c_2 - yb_3c_2, \\ xa_3c_1 + yb_3c_1 - xa_1c_3 - yb_1c_3, \\ xa_1c_2 + yb_1c_2 - xa_2c_1 - yb_2c_1)$$

$$= x(a_2c_3 - a_3c_2, a_3c_1 - a_1c_3, a_1c_2 - a_2c_1) + \\ y(b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1) \\ = x[A, C] + y[B, C]$$

Benzer şekilde $[C, xA + yB] = x[C, A] + y[C, B]$ olur.

2) Her $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ için

$$[A, A] = (a_2a_3 - a_3a_2, a_3a_1 - a_1a_3, a_1a_2 - a_2a_1) = (0, 0, 0)$$

3) $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3), C = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$

$$[A, [B, C]] = (a_2b_1c_3 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 - a_3b_1c_3, \\ a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1, \\ a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2)$$

$$\begin{aligned}
[B, [C, A]] &= (b_2c_1a_2 - b_2c_2a_1 - b_3c_3a_1 + b_3c_1a_3, \\
&\quad b_3c_1a_3 - b_3c_3a_2 - b_1c_1a_2 + b_1c_2a_1, \\
&\quad b_1c_3a_1 - b_1c_1a_3 - b_2c_1a_3 + b_2c_3a_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[C, [A, B]] &= (c_2a_1b_2 - c_2a_2b_1 - c_3a_3b_1 + c_3a_1b_3, \\
&\quad c_3a_2b_3 - c_3a_3b_2 - c_1a_1b_2 + c_1a_2b_1, \\
&\quad c_1a_3b_1 - c_1a_1b_3 - c_2a_2b_3 + c_2a_3b_2)
\end{aligned}$$

dolayısıyla

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

dır.

3.7 UZATIM (PROLONGASYON) FORMÜLLERİ

Tam türevin yardımıyla sonsuz küçük simetri üreticine dair uzatım (prolongasyon) formülleri ile uzatımı meydana getiren sonsuz küçüklere ait formüller gösterilmiştir. Özel durumlardaki bağımsız ve bağımlı değişken sayılarına dair sonsuz küçüklere ait uzatımları hesap edilmiştir.

3.7.1 Durum 1: Bir bağımlı, bir bağımsız değişken için

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \dots + y^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(n)}} + \dots$$

şeklinde ifade edilen diferansiyel (D) tam türev operatörü denir.

$G(x, y, y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ şeklinde tanımlanan fonksiyon diferansiyellenebilir olsun ve tam türevi;

$$DG = \frac{\partial G}{\partial x} + y' \frac{\partial G}{\partial y} + y'' \frac{\partial G}{\partial y'} + \dots + y^{(n+1)} \frac{\partial G}{\partial y^{(n)}}$$

şeklinde verilir.

$$a^* = B(a, b; \varepsilon),$$

$$b^* = C(a, b; \varepsilon),$$

şeklinde verilen tek parametrelili Lie grup dönüşümüne ait m . uzatımın hesaplanabilmesi tam türev yardımıyla olur;

$$b_i^* = C_i(a, b, b_1, \dots, b_i; \varepsilon) = \frac{DC_{i-1}(a, b, b_1, \dots, b_{i-1}; \varepsilon)}{DB(a, b; \varepsilon)}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ve

$$C_0 = C(a, b; \varepsilon),$$

olur (Bluman ve Kumei, 1989).

Tek parametrelili Lie grup dönüşümleri

$$a^* = B(a, b; \varepsilon) = a + \varepsilon \xi(a, b) + O(\varepsilon^2) \quad (3.12)$$

$$b^* = C(a, b; \varepsilon) = b + \varepsilon \eta(a, b) + O(\varepsilon^2) \quad (3.13)$$

şeklinde verilsin. (a, b) uzayındaki sonsuz küçükleri

$$\xi(a, b), \quad \eta(a, b)$$

olur ve sonsuz küçük üreticileri ise

$$B = (a, b) \frac{\partial}{\partial a} + \eta(a, b) \frac{\partial}{\partial b}$$

şeklindedir. (3.12) ve (3.13) ile ifade edilen denklemlerin m . uzatımı

$$a^* = B(a, b; \varepsilon) = a + \varepsilon \xi(a, b) + O(\varepsilon^2)$$

$$b^* = C(a, b; \varepsilon) = b + \varepsilon \eta(a, b) + O(\varepsilon^2)$$

$$(b')^* = C'(a, b, b'; \varepsilon) = b' + \varepsilon \eta'(a, b, b') + O(\varepsilon^2)$$

.

.

.

$$(b^{(m)})^* = C^{(m)}(a, b', b'', \dots, b^{(m)}; \varepsilon) = b^{(m)} + \varepsilon \eta^{(m)}(a, b, b', b'', \dots, b^{(m)}) + O(\varepsilon^2)$$

şeklinde verilir. m . uzatımın sonsuz küçükleri;

$$\xi(a, b) , \eta(a, b) , \eta'(a, b, b') , \dots \eta^{(m)}(a, b, b', b'', \dots, b^{(m)})$$

olacaktır ve m . uzatımının sonsuz küçükleri de

$$B^{(m)} = \xi(a, b) \frac{\partial}{\partial a} + \eta(a, b) \frac{\partial}{\partial b} + \eta'(a, b, b') \frac{\partial y}{\partial x} + \dots \eta^{(m)}(a, b, b', b'', \dots, b^{(m)}) \frac{\partial}{\partial b^m}$$

olur. $m = 1, 2, 3, \dots$ için $\eta^{(m)}$ uzatım sonsuz küçükleri aşağıda tanımlanan teorem yardımıyla bulunur.

Teorem 3.7.1: Uzatımın sonsuz küçükleri $\eta^{(m)}$ ler aşağıda verilen eşitliği sağlarlar:

$$\eta^{(m)} = (a, b, b', b'', \dots, b^{(m)}) D \eta^{(m-1)}(a, b, b', b'', \dots, b^{(m-1)}) - b^{(m)} D \xi \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\eta^{(0)} = \eta$$

olur (Bluman ve Kumei, 2002).

3.7.2 Durum 2: Bir bağımlı, r -bağımsız değişken için

Tanım 3.7.1: Tek parametrelili değişken t ve r bağımsız değişken $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ için r . mertebeden diferansiyel denklemi

$$G(a, t, t^1, t^2, \dots, t^{(r)}) = 0 \quad (3.14)$$

şeklindeki denklemin tam türevi;

$$D_i G = \frac{\partial G}{\partial a_i} + t_i \frac{\partial G}{\partial t} + t_{ij} \frac{\partial G}{\partial t_i} + \dots + t_{i_1, i_2, \dots, i_r} \frac{\partial G}{\partial t_{i_1, i_2, \dots, i_{r-1}}} + \dots \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlanır (Cicogna ve Gaeta, 1999).

Bir parametrelili Lie grup dönüşümleri;

$$a_i^* = a_i + \varepsilon \xi_i(a, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$t^* = t + \varepsilon \eta(a, t) + O(\varepsilon^2)$$

şeklinde verilsin. $i = 1, 2, \dots, r$ için (a, t) uzayındaki sonsuz küçük üretici,

$$B = \xi_i(a, t) \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta(a, t) \frac{\partial}{\partial t}$$

şeklindedir. Tek parametrelili Lie grubun r . uzatımı aşağıda verildiği gibidir:

$$a_i^* = B_i(a, t; \varepsilon) = a_i + \varepsilon \xi_i(a, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$t^* = T(a, t; \varepsilon) = t + \varepsilon \eta(a, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$t_i^* = T_i(a, t, \partial t; \varepsilon) = t_i + \varepsilon \eta_i^{(1)}(a, t, \partial t) + O(\varepsilon^2)$$

$$t_{i_1, i_2, \dots, i_m} = T_{i_1, i_2, \dots, i_m}(a, t, \partial t, \dots, \partial t^m; \varepsilon)$$

$$= t_{i_1, i_2, \dots, i_m} + \varepsilon \eta_{t_{i_1, i_2, \dots, i_m}}^m(a, t, \partial t, \dots, \partial t^m) + O(\varepsilon^2)$$

$i = 1, 2, \dots, r$ için m . uzatımın sonsuz küçükleri ise

$$\xi(a, t), \eta(a, t), \eta'(a, t, \partial t), \dots \eta^{(m)}(a, t, \partial t, \dots, \partial t^m)$$

olacaktır ve m . uzatımın üretici

$$B^{(m)} = \xi_i \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta \frac{\partial}{\partial t} + \eta'_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \dots + \eta_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(m)} \frac{\partial}{\partial t_{i_1, i_2, \dots, i_m}}$$

olacaktır. r . uzatım yardımıyla, r . mertebeden diferansiyel denkleme sonsuz küçük üretici uygulanabilir. Tam türev yardımıyla genel uzatım formülü elde edilir. Uzatımın sonsuz küçükleri için ise aşağıda verilen teorem sağlanır (Oliver, 1991).

Teorem 3.7.2: Uzatımın sonsuz küçükleri aşağıda verilen eşitliği sağlar:

$$\eta_i^1 = D_i \eta - t_j D_i \xi_j$$

$$\eta_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(m)} = D_{i_m} \eta_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}}^{(m-1)} - (D_{i_m} \xi_j) t_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}, j}$$

şeklinde verilir ve simetri üreticinin r . uzatımı

$$B^{(r)} = B + \sum_j \eta_j(a, t^{(r)}) \frac{\partial}{\partial t_j}$$

olarak verilir (Bluman ve Anco, 2008).

Teoremin özel halini t bağımlı değişkeni ve iki bağımsız değişken olarak a_1 ve a_2 olacak şekilde alınırsa tek parametrelili Lie grup dönüşümleri;

$$a_i = B_i(a_1, a_2, t; \varepsilon) = a_i + \varepsilon \xi_i(a_1, a_2, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$t^* = T(a_1, a_2, t; \varepsilon) = t + \varepsilon \eta(a_1, a_2, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$t_i^* = T_i(a_1, a_2, t, t_1, t_2, \varepsilon) = t_i + \varepsilon \eta_i^{(1)}(a_1, a_2, t, t_1, t_2) + O(\varepsilon^2)$$

$$t_{ij}^* = T_{ij}(a_1, a_2, t, t_1, t_2, t_{11}, t_{12}, t_{22}, \varepsilon)$$

$$= t_{ij} + \varepsilon \eta_{ij}^{(2)}(a_1, a_2, t, t_1, t_2, t_{11}, t_{12}, t_{22}, \varepsilon) + O(\varepsilon^2) \quad i, j = 1, 2, \dots$$

ve sonsuz küçük üreteçleri ise

$$\begin{aligned} \eta_1^{(1)} &= D_{a_1} - (Da_1\xi_1)t_{a_1} - (Da_1\xi_2)t_{a_2} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial a_1} + \frac{\partial \eta}{\partial t} t_{a_1} - t_{a_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial a_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \right) - t_{a_2} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial a_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} t_{a_1} \right) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial a_1} + t_{a_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \xi_1}{\partial a_1} \right) - t_{a_1}^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + t_{a_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial a_1} - t_{a_1} t_{a_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \\ \eta_2^{(1)} &= D_{a_2} - (Da_2\xi_1)t_{a_1} - (Da_2\xi_2)t_{a_2} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial a_2} + \frac{\partial \eta}{\partial t} t_{a_2} - t_{a_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial a_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial t} t_{a_2} \right) - t_{a_2} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial a_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} t_{a_2} \right) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial a_2} + t_{a_2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \xi_2}{\partial a_2} \right) - t_{a_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial a_2} + t_{a_2}^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - t_{a_1} t_{a_2} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \\ \eta_{11}^{(1)} &= D_{a_1} \eta^{(1)} - (Da_1\xi_1)t_{a_1 a_1} - (Da_1\xi_2)t_{a_1 a_2} \\ &= D_{a_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial a_1} + t_{a_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \xi_1}{\partial a_1} \right) - t_{a_1}^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + t_{a_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial a_1} - t_{a_1} t_{a_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right) \\ &\quad - t_{a_1 a_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial a_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial t} t_{a_1} \right) - t_{a_1} t_{a_2} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial a_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} t_{a_1} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial a_1 \partial t} t_{a_1} + t_{a_1 a_2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \xi_1}{\partial a_1} \right) + \\ &\quad + t_{a_1} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial a_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} t_{a_1} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a_1^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a_1 \partial t} t_{a_1} \right) \end{aligned}$$

$$-t_{a_2}(\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial a_1 \partial t} t_{a_1}) - \frac{\partial \xi_2}{\partial a_1} t_{a_1 a_2}$$

$$-t_{a_1}^2(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} t_{a_1}) - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} t_{a_1} t_{a_1 a_1}$$

$$-t_{a_1} t_{a_2}(\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial a_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} t_{a_1}) - \frac{\partial \xi_2}{\partial t} t_{a_1 a_1} t_{a_2}$$

$$-\frac{\partial \xi_2}{\partial t} t_{a_1} t_{a_1 a_2} - t_{a_1 a_1}(\frac{\partial \xi_1}{\partial a_1} t_{a_1})$$

$$-t_{a_1} t_{a_2}(\frac{\partial \xi_2}{\partial a_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} t_{a_1})$$

$$\eta_{12}^{(2)} = \eta_{21}^{(2)} = D_{a_2} \eta^{(1)} - (D_{a_2} \xi_1) t_{a_1 a_1} - (D_{a_2} \xi_2) t_{a_1 a_2}$$

$$= D_{a_2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial a_1} + t_{a_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \xi_1}{\partial a_1} \right) - t_{a_1}^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + t_{a_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial a_1} - t_{a_1} t_{a_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right)$$

$$-(D_{a_2} \xi_1) t_{a_1 a_1} - (D_{a_2} \xi_2) t_{a_1 a_2}$$

$$= \frac{\partial^2 \eta}{\partial a_1 a_2} + t_{a_2} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial a_1 \partial t} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial a_1 \partial a_2} \right) + t_{a_1} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial a_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a_1 \partial a_2} t_{a_1} \right)$$

$$-\frac{\partial \xi_2}{\partial a_1} t_{a_2} t_{a_2} + t_{a_1 a_2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \xi_1}{\partial a_1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial a_2} \right) - \frac{\partial \xi_1}{\partial a_2} t_{a_1 a_1}$$

$$-\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial a_1 \partial t} t_{a_2}^2 + t_{a_1 a_2} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a_1 \partial t} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial a_2 \partial t} \right)$$

$$-\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a_2 \partial t} t_{a_1}^2 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} t_{a_2}^2 t_{a_1} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} t_{a_1}^2 t_{a_2}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} t_{a_2} t_{a_1 a_2} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} t_{a_1} t_{a_1 a_2} \\
& - \frac{\partial \xi_1}{\partial t} t_{a_2} t_{a_1 a_1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial t} t_{a_1} t_{a_2 a_2} \\
& \eta_{22}^{(2)} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial a_2^2} + t_{a_2} (2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial a_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial a_2^2}) - t_{a_1} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a_2^2} - t_{a_2 a_2} (\frac{\partial \eta}{\partial t} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial a_2}) \\
& - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial a_2} t_{a_1 a_2} + t_{a_2}^2 (\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial a_2 \partial t}) - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial a_2 \partial t} t_{a_1 a_2} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} t_{a_2}^3 \\
& - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} t_{a_1} t_{a_2}^2 - 3 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} t_{a_2} t_{a_2 a_2} - 3 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} t_{a_1} t_{a_2 a_2} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} t_{a_2} t_{a_1 a_2}
\end{aligned}$$

özel olarak bu şekilde bulunmuş olur.

3.7.3. Durum 3: p -bağımlı, r -bağımsız değişken için

r . mertebeden diferansiyel denklem p tane bağımlı değişkenleri ihtiva eden $t = (t^1, t^2, \dots, t^p)$ ve r tane bağımsız değişkenler $a = (a^1, a, \dots, a^p)$ olsun. Bu durumda tek parametrelili Lie grup dönüşümleri ve k . uzatımı

$$a_i^* = a_i + \varepsilon \xi_i(a, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$(t^\alpha)^* = T(a, t; \varepsilon) = t^\alpha + \varepsilon \eta^\alpha(a, t) + O(\varepsilon^2)$$

olsun.

$$(t_i^\alpha) = T_i^\alpha(a, t, \partial t; \varepsilon) = t_i^\alpha + \varepsilon \eta_i^{(1)\alpha}(a, t, \partial t) + O(\varepsilon^2)$$

.

.

.

$$(t_{i_1, i_2, \dots, i_k}^\alpha)^* = T_{i_1, i_2, \dots, i_k}^\alpha(a, t, \partial t, \dots, \partial t^k; \varepsilon)$$

$$= t_{i_1, i_2, \dots, i_k}^\alpha + \varepsilon \eta_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(k)\alpha}(a, t, \partial t, \dots, \partial t^k) + O(\varepsilon^2)$$

olur. Bu durumda tam türev operatörü ise

$$D_i = \frac{\partial}{\partial a_i} + t_i^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + t_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial t_j^\alpha} + \cdots + t_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial t_{i_1, i_2, \dots, i_r}^\alpha} \quad k = 1, 2, \dots, r, \alpha = 1, 2, \dots, p$$

olacak şekilde tanımlanır.

Teorem 3.7.3: Tam türev operatörü yardımıyla sonsuz küçükleri $\eta_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(k)\alpha}$ ları bulmak için aşağıda verilen formül kullanılır:

$$\eta_i^{(1)\alpha} = D_i \eta^\alpha - (D_i \xi_j) t_j^\alpha \quad (3.16)$$

$$\eta_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(k)\alpha} = D_{i_k} \eta_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}^{(k-1)\alpha} - (D_{i_k} \xi_j) t_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, j}^\alpha \quad (3.17)$$

k . uzatımın sonsuz küçük üretici

$$B^k = \xi_i \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta_i \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + \eta_i^{(1)\alpha} \frac{\partial}{\partial t_i^\alpha} + \cdots + \eta_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(k)\alpha} \frac{\partial}{\partial t_i^\alpha t_{i_1, i_2, \dots, i_k}^\alpha}, \quad 1 \leq k$$

olur (Bluman ve Anco, 2002).

Bu durumda t ve v iki bağımlı değişken ve a, b iki bağımsız değişkeni özel olarak ele alalım. O halde a için tam türevi;

$$D_a = \frac{\partial}{\partial a} + t_a \frac{\partial}{\partial t} + v_a \frac{\partial}{\partial v} + t_{aa} \frac{\partial}{\partial t_a} + t_{ab} \frac{\partial}{\partial t_b} + v_{aa} \frac{\partial}{\partial v_a} + v_{ab} \frac{\partial}{\partial v_b} + \cdots$$

olur. Sonsuz küçük üretici

$$B = \xi_1 \frac{\partial}{\partial a} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial b} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial t} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial v}$$

şeklinde bulunur. ξ_1 yerine ξ , ξ_2 yerine σ , η^1 yerine η ve η^2 yerine φ yazalım. O halde üreticinin birinci uzatımı

$$B^{(1)} = B + \eta_a^{(1)} \frac{\partial}{\partial t_a} + \eta_b^{(1)} \frac{\partial}{\partial t_b} + \varphi_a^{(1)} \frac{\partial}{\partial v_a} + \varphi_b^{(1)} \frac{\partial}{\partial v_b}$$

olur. (3.16) numaralı denklem yardımıyla $\eta_a^{(1)}$ ve $\varphi_a^{(1)}$ i bulalım:

$$\begin{aligned}\eta_a^{(1)} &= D_a(\eta) - t_a(D_a\xi) - t_b(D_a\sigma) \\ &= (\eta_a + t_a\eta_t + v_a\eta_v) - t_a(\xi_a + t_a\xi_t + v_a\xi_v) - t_b(\sigma_a + t_a\sigma_t + v_a\sigma_v)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned}\varphi_a^{(1)} &= D_a(\varphi) - v_a(D_a\xi) - v_b(D_b\sigma) \\ &= (\varphi_a + t_a\varphi_t + v_a\varphi_v) - v_a(\xi_a + t_a\xi_t + v_a\xi_v) - v_b(\sigma_a + t_a\sigma_t + v_a\sigma_v)\end{aligned}$$

olarak bulunmuş olur. Son olarak (3.17) numaralı denklem yardımıyla $\eta_a^{(2)}$ 'yi hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\eta_a^{(2)} &= D_a(\eta_a^{(1)}) - t_{aa}(D_a\xi) - t_{at}(D_a\sigma) \\ &= D_a(\eta_a + t_a\eta_t + v_a\eta_v - t_a\xi_a - t_a^2\xi_t - t_av_a\xi_v - t_b\sigma_a \\ &\quad - t_bt_a\sigma_t - t_bv_a\xi_v) - t_{aa}(D_a\xi) - t_{ab} - D_a\xi \\ &= \eta_{aa} + t_a\eta_{at} + v_a\eta_{av} + t_a(\eta_{ta} + t_a\eta_{aa} + v_a\eta_{tv}) + \eta_t t_{aa} \\ &\quad + v_a(\eta_{va} + t_a\eta_{tv} + v_a\eta_{vv}) + \eta_v v_{aa} \\ &\quad - t_a(\xi_{aa} + t_a\xi_{at} + v_a\xi_{av}) - \xi_a t_{aa} - t_a^2(\xi_{ta} + t_a\xi_{tv} + v_a\xi_{tv}) \\ &\quad - t_a^2(\xi_{ta} + t_a\xi_{tv} + v_a\xi_{tv}) - \xi_{tv}(2t_a t_{aa}) - \xi_v(v_{aa}t_a + v_a t_{aa}) \\ &\quad - v_a t_a(\xi_{va} + t_a\xi_{vt} + v_a\xi_{vv} - t_b(\sigma_{aa} + t_a\sigma_{at} + v_a\sigma_{av})) - \sigma_a t_{ab} \\ &\quad - t_b t_a(\sigma_{ta} + t_a\sigma_{tt} + v_a\sigma_{tv}) - \sigma_t(t_{ba}t_a + v_a t_{aa}) \\ &\quad - v_a t_b(\sigma_{va} + t_a\sigma_{vt} + v_a\sigma_{vv}) - \sigma_v(v_{aa}t_b + v_a t_{ab})\end{aligned}$$

$$-t_{aa}(\xi_a + t_a \xi_t + v_a \xi_v) - t_{ab}(\sigma_a + t_a \sigma_t + v_a \sigma_v)$$

olarak bulunur.

3.8 LİE-BÄCKLUND OPERATÖRÜ

$g(a, t, t_1, \dots, t_{(k)})$ fonksiyonlarına ait sonlu miktardaki argümanlarına ilişkin yerel olacak şekilde analitik olduğunu diğer bir deyişle tüm argümanlarına ilişkin yerel olacak şekilde yakınsak Taylor serisine açılabilceğini varsayalım. Bu şekildeki fonksiyonlara genel tabirle Ritt'in diferansiyel polinomları adı verilir ve sonlu mertebeden diferansiyel fonksiyonlar olacak şekilde adlandırılır. Burada g fonksiyonundaki en yüksek türev denklemin mertebesidir. Sonlu mertebeden diferansiyel fonksiyonları A kümesi ile gösterelim. A uzayı, fonksiyonların standart toplama işlemi altında vektör uzayı oluşturur ve standart çarpma işlemi fonksiyonların bildiğimiz çarpma işlemi olarak tanımlanırsa değişmeli cebir oluşturur.

$$B = \xi^i \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \quad (\xi^i, \eta^\alpha \in A) \quad (3.18)$$

şeklindeki operatörleri düşünelim.

$$\xi_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha - \xi^j t_j^\alpha) + \xi^j t_{ji}^\alpha \quad (3.19)$$

$$\xi_{i_1 i_2}^\alpha = D_{i_1} D_{i_2}(\eta^\alpha - \xi^j t_j^\alpha) + \xi^j t_{j i_1 i_2}^\alpha \quad (3.20)$$

·
·
·

olacak şekilde tüm türevlerin uzanımı

$$B = \xi^i \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + \eta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial t_i^\alpha} + \eta_{i_1 i_2}^\alpha \frac{\partial}{\partial t_{i_1 i_2}^\alpha} + \dots \quad (3.21)$$

olarak gösterilsin. ξ^i ve η^α sonlu mertebeden diferansiyel fonksiyonlar olup $\xi^i, \eta^\alpha \in A$ dır.

(3.21)denklemleri ile tanımlanan operatörler Lie-Bäcklund operatörüdür. (3.18) denklemi ile verilen kısaltılmış operatör de Lie-Bäcklund operatörü diye adlandırılır.

Katsayıları A kümesine ait formal kuvvet serilerinin uzayı $[[A]]$ ile gösterilsin. Aşağıda verilen operatörle Ibragimov, rastgele Lie-Bäcklund operatörünün $[[A]]$ uzayına ait tanjant dönüşümlerinin formal bir parametrelili grubu ürettiğini açıklar.

Teorem 3.8.1: (3.18) denklemi gibi rastgele Lie-Bäcklund operatörü verilsin. $[[A]]$ uzayı için Lie-Bäcklund denklemlerinin tek çözümü

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial a} = \xi^i(\bar{a}, \bar{t}, \dots, t_l) \quad , \quad \bar{a}_i|_{a=0} = a_i$$

$$\frac{\partial \bar{t}^\alpha}{\partial a} = \eta^\alpha(\bar{a}, \bar{t}, \dots, t_k) \quad , \quad \bar{t}^\alpha|_{a=0} = t^\alpha$$

olacak şekildedir. Bu çözüm formal kuvvet serileri ile

$$\bar{a}_i = a_i + \sum_{r=1}^{\infty} X_r^i a^r$$

$$\bar{t}^\alpha = t^\alpha + \sum_{r=1}^{\infty} Y_r^\alpha a^r$$

olarak verilir, burada katsayılar $X_r^i, Y_r^\alpha \in A$ dır ve

$$X_1^i = \xi^i(a, t, \dots, t_l),$$

$$Y_1^\alpha = \eta^\alpha(a, t, \dots, t_k),$$

dır. Formal tek parametrelili grup

$$dt^\alpha - t_j^\alpha da_j = 0,$$

$$dt_i^\alpha - t_{ij}^\alpha da_j = 0,$$

sonlu mertebeden teğet koşullarını değişmez kılar.

Bu teoremden oluşturulan formal gruplar formal Lie-Bäcklund dönüşüm grupları olarak tanımlanır. Rastgele bir formal Lie-Bäcklund dönüşüm grubu formal kuvvet serileri ile verilir ve Lie-Backlund operatörü ile oluşturulur.

$$dt^\alpha - t_j^\alpha da_j = 0, dt_i^\alpha - t_{ij}^\alpha da_j = 0$$

denklemleri ile verilen seri yakınsaksa Lie-Bäcklund grubu tek parametrelidir ve tek parametrelidir Lie-Bäcklund dönüşüm grubu olarak tanımlanır.

Teorem 3.8.2: $G \in A$, k . mertebeden diferansiyel denklem olsun.

$$G(a, t, t_{(1)}, \dots, t_{(k)}) = 0, \quad (3.22)$$

k . mertebeden diferansiyel denklemi ele alalım. $[G]$ ve (3.22) denklemlerinin türev dizinlerini ve kendisini gösterelim. O halde (3.22) denklemi

$$BG|_{[G]} = 0 \quad (3.23)$$

ise Lie-Bäcklund operatörü aracılığıyla üretilen formal Lie-Bäcklund dönüşüm grubunu temsil eder.

(3.23) ile verilen denklem Lie-Bäcklund simetri grubunun belirleyici (determining) denklemi olarak tanımlanır. Belirleyici denklemin neticesinde

$$B^* = \xi^i D_i, \quad (\xi^i \in A, \quad i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.24)$$

biçiminde bütün Lie-Bäcklund operatörleri rastgele bir diferansiyel denklem tarafından kabul edilmiş olur.

(3.24) formundaki Lie-Bäcklund operatörleri için Lie-Bäcklund denklemlerinin çözümünün olduğunu ifade edebiliriz.

(3.18) denklemi ile verilen Lie-Bäcklund operatörü için $\xi^i = 0$ olursa

$$B = \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \quad , \quad (\eta^\alpha \in A \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots, m)$$

olacak şekilde bulunur ve kanonik Lie-Bäcklund operatörü denir. Bilhassa, bütün (3.18) operatörleri aşağıda belirtildiği gibi kanonik forma çevrilebilir (Ibragimov, 1993):

$$\bar{B} = B - \xi^i D_i = \left(\eta^\alpha \xi^i t_i^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + \dots \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Örnek 3.9: u, a bağımsız değişkenleri temsil etsin. Galilean dönüşüm üretici ve Lie-Bäcklund formu

$$B = \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial a} \quad \sim \quad \bar{B} = (1 + ut_a) \frac{\partial}{\partial t} + \dots$$

olacak şekildedir (Yaşar, 2009).

Örnek 3.10: Homojen olmayan (non-uniform) genleşme üretici ve kanonik Lie-Bäcklund formu

$$B = 2t \frac{\partial}{\partial t} - 3t \frac{\partial}{\partial a} - a \frac{\partial}{\partial a} \quad \sim \quad \bar{B} = (2t + 3ut_u + at_a) \frac{\partial}{\partial t} + \dots$$

olacak şekildedir (Yaşar, 2009).

Örnek 3.11: u zaman ve a konumu temsil etmek üzere

$$t_u = t_{aa}$$

bir boyutlu ısı denkleminde ait Lie simetri üreticilerini bulalım:

a ve u bağımsız değişkenleri ve t bağımlı değişkeni temsil etsin o halde simetri üretici

$$B = \xi(a, u, t) \frac{\partial}{\partial a} + \tau(a, u, t) \frac{\partial}{\partial u} + \eta(a, u, t) \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.25)$$

olur.

İkinci mertebeden diferansiyel denklemler için (3.25) ile verilen simetri üreticinin ikinci uzanımı

$$B^2 = B + \eta_a \frac{\partial}{\partial t_a} + \eta_u \frac{\partial}{\partial t_u} + \eta_{aa} \frac{\partial}{\partial t_{aa}} + \eta_{au} \frac{\partial}{\partial t_{at}} + \eta_{uu} \frac{\partial}{\partial t_{uu}} \quad (3.26)$$

olur.

$$B^2(t_u - t_{aa}) = 0$$

olacak şekilde (3.26) denklemindeki ikinci uzanımı $t_u = t_{aa}$ denkleminde uygularsak

$$\eta_u - \eta_{aa} = 0 \quad (3.27)$$

olur. η_u , η_{aa} ve t_u yerine t_{aa} değerleri (3.27) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \eta_u + (\eta_t - \tau_u)t_{aa} - \xi_u t_a - \xi_t t_a t_{aa} - \tau_t t_{aa}^2 - \eta_{aa} - (2\eta_{tu} - \xi_{aa})t_a \\ & + \xi_{aa} t_a - (\eta_t - 2\xi_a)t_a^2 + 2\tau_{at} t_a t_{aa} + \xi_{tt} t_a^3 + \tau_{tt} t_a^2 t_{aa} \\ & - (\eta_t - 2\xi_a)t_{aa} + 2\tau_a t_{au} + 3\xi_t t_a t_{aa} + \tau_t t_{aa}^2 + 2\tau_t t_a t_{au} = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

olarak bulunur. (3.28) denklemindeki t' 'nin türevlerinden;

$$t_u t_{at} : \tau_t = 0$$

$$t_{au} : \tau_a = 0$$

$$t_{aa}^2 : \tau_t = \tau_t$$

$$t_a^2 t_{aa} : \tau_{tt} = 0$$

$$t_a t_{aa} : \xi_t = 2\tau_{at} + 3\xi_t$$

$$t_{aa} : \tau_u - \eta_t = \tau_{aa} - \eta_t + 2\xi_a$$

$$t_a^3 : \xi_{tt} = 0$$

$$t_a^2 : \eta_{tt} = 2\xi_{au}$$

$$t_a : \xi_u = \xi_{aa} - \eta_{at}$$

$$sabitler : \eta_u = \eta_{aa}$$

belirleyici (tanımlayıcı) denklemleri bulunmuş olur ve bu denklemleri çözersek;

$$\tau = c_1 u^2 + c_2 u + c_3$$

$$\xi = c_1 ua + \frac{1}{2} c_2 a + c_4 u + c_5$$

$$\eta = \left(-\frac{1}{4} c_1 a^2 - \frac{1}{2} c_4 a - \frac{1}{2} c_1 u + c_6\right)$$

olarak bulunur. Lie simetri üreteçleri:

$$B_1 = t \frac{\partial}{\partial t} (c_6 = 1) \quad (c_6 = 1)$$

$$B_2 = \frac{\partial}{\partial a} (c_5 = 1) \quad (c_5 = 1)$$

$$B_3 = u \frac{\partial}{\partial a} - \frac{at}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (c_4 = 1)$$

$$B_4 = \frac{\partial}{\partial u} \quad (c_3 = 1)$$

$$B_5 = \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial a} + u \frac{\partial}{\partial u} \quad (c_2 = 1)$$

$$B_6 = au \frac{\partial}{\partial a} + u^2 \frac{\partial}{\partial u} - \left(\frac{a^2 t}{4} + \frac{tu}{2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \quad (c_1 = 1)$$

$$B_\alpha = \alpha \frac{\partial}{\partial t}$$

olarak bulunmuş olur ve bulunan bu değerlerin komütatör tablosunu aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$[B_i, B_j]$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
B_1	0	0	0	B_1	$-B_3$	$2B_5$
B_2	0	0	0	$2B_2$	$2B_1$	$4B_4 - 2B_3$
B_3	0	0	0	0	0	0
B_4	$-B_1$	$-2B_2$	0	0	B_5	$2B_6$
B_5	B_3	$-2B_1$	0	$-B_5$	0	0
B_6	$-2B_5$	$2B_3 - 4B_4$	0	$-2B_6$	0	0

(Ahmad, 2005).

İkili işleme göre B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ve B_6 üreteçleri kapalı olduğu için

$$B_6 = \langle B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 \rangle$$

Lie cebirini oluşturur. Bu durumda her bir üretece denk gelen dönüşüm grupları;

B_i simetri üreticinin dönüşüm grupları

$$\xi^i(a^*, b^*) = \frac{\partial a_i^*}{\partial \varepsilon}$$

ifadesine

$$a_i^* \big|_{\varepsilon=0} = a_i$$

başlangıç şartının uygulanmasıyla bulunur.

$$B_2 = \frac{\partial}{\partial a} \text{ üretici için}$$

1)

$$\frac{\partial a^*}{\partial \varepsilon} = \xi(a^*, u^*, t^*) = 1$$

$$a^* = \varepsilon + ca^* \big|_{\varepsilon=0} = c$$

$$a^* = a + \varepsilon$$

2)

$$\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon} = \tau(a^*, u^*, t^*) = 0$$

$$u^* = cu^* \big|_{\varepsilon=0} = u$$

$$u^* = u$$

3)

$$\frac{\partial t^*}{\partial \varepsilon} = \eta(a^*, u^*, t^*) = 0$$

$$t^* = ct^* \big|_{\varepsilon=0} = t$$

$$u^* = u$$

$$G_2(a^*, u^*, t^*) = (a + \varepsilon, u, t)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$G_1(a^*, u^*, t^*) = (a, u + \varepsilon, t)$$

$$G_3(a^*, u^*, t^*) = (a + \varepsilon u, u, t e^{\frac{-(\varepsilon a + \varepsilon^2 u)}{2}})$$

$$G_4(a^*, u^*, t^*) = (a, u, t e^\varepsilon)$$

$$G_5(a^*, u^*, t^*) = (a e^{\frac{\varepsilon}{2}}, u e^\varepsilon, t)$$

$$G_6(a^*, u^*, t^*) = (\frac{a}{1 - \varepsilon u}, \frac{u}{1 - \varepsilon u}, \frac{e^{\frac{a^2 \varepsilon}{4(1 - \varepsilon u)}}}{1 - \varepsilon u})$$

olarak bulunur (Oliver, 1991).

Örnek 3.12: Fiziksel uygulamalarda sıkça kullanılan denklemlerden biri de Burger denklemdir. Yayılma terimi ve lineer olmayan terimi bir arada ihtiva eder. a ve u iki bağımsız değişken ve t bağımlı değişken olmak üzere lineer olmayan bir boyutlu Burger denklemi

$$t_u = t_{aa} + t_a^2$$

şeklindedir. Burger denkleminin sonsuz küçük simetri üretici

$$B = \xi(a, u, t) \frac{\partial}{\partial a} + \tau(a, u, t) \frac{\partial}{\partial u} + \eta(a, u, t) \frac{\partial}{\partial t}$$

olur.

İkinci mertebeden diferansiyel denklem olduğu için ikinci uzatımı

$$B^2 = B + \eta_a \frac{\partial}{\partial t_a} + \eta_u \frac{\partial}{\partial t_u} + \eta_{aa} \frac{\partial}{\partial t_{aa}} + \eta_{au} \frac{\partial}{\partial t_{au}} + \eta_{uu} \frac{\partial}{\partial t_{uu}}$$

olur. Değişmezlik kriteri Burger denklemine uygulanırsa

$$\eta_u = \eta_{aa} + 2t_a \eta_a$$

olur. $\eta_a, \eta_{aa}, \eta_u$ terimleri teorem 3.7.3' e göre düzenlenip hesaplanırsa ve ifadede t_u yerine $t_{aa} + t_a^2$ yazılıp ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \eta_u + \xi_u t_a + \eta_t t_{aa} + \eta_t t_a^2 - \tau_u t_{aa} - \tau_a t_a^2 - \xi_t t_a t_{aa} - \xi_t t_a^3 - \tau_t t_{aa}^2 \\
& - 2\tau_t t_{aa} t_a^2 - \tau_t t_a^4 - \eta_{aa} - 2\eta_{at} t_a + \xi_{aa} t_a + \tau_{aa} t_{aa} + \tau_{aa} t_a^2 \\
& - \eta_{tt} t_a^2 + 2\xi_{at} t_a^2 + 2\tau_{at} t_a t_{aa} + 2\tau_{at} t_a^3 + \xi_{tt} t_a^3 + \tau_{tt} t_a^2 t_{aa} + \tau_{tt} t_a^4 \\
& - \eta_t t_{aa} + 2\xi_a t_{aa} + 2\tau_a t_{au} + 3\xi_t t_a t_{aa} + \tau_t t_{aa}^2 + \tau_t t_{aa} t_a^2 + 2\tau_t t_a t_{ua} \\
& - 2\eta_a t_a - 2\eta_t t_a^2 + 2\xi_a t_a^2 + 2\tau_a t_{aa} t_a + 2\tau_a t_a^3 + 2\xi_t t_a^3 + \\
& + 2\tau_t t_{aa} t_a^2 + 2\tau_t t_a^4 = 0
\end{aligned}$$

olur. t nin kısmi türevleri vasıtasıyla tanımlayıcı denklemler;

$$t_a t_{au} : 2\tau_t = 0$$

$$t_{au} : 2\tau_a = 0$$

$$t_a t_{aa} : -\xi_t + 2\tau_{at} + 3\xi_t + 2\tau_a = 0$$

$$t_{aa} : \eta_t - \tau_u + \tau_{aa} - \eta_t + 2\xi_a = 0$$

$$t_a^2 : \eta_t - \tau_u + \tau_{aa} - \eta_{tt} + 2\xi_{at} - 2\eta_t + 2\xi_a = 0$$

$$t_a : -\xi_u - 2\eta_{at} + \xi_{aa} - 2\eta_a = 0$$

olur. Bu denklemlerin çözümü yapılırsa

$$\xi = c_1 + c_4 a + 2c_5 u + 4c_6 au$$

$$\tau = c_2 + 2c_4u + 4c_6u^2$$

$$\eta = \alpha(a, u)e^{-t} + c_3 - c_5a - 2c_6u - c_6a^2$$

olarak bulunur. Bulunan sonsuz küçükler B simetri üretecinde yerine yazılmasıyla c_i katsayılarını içeren B_i simetri üreticileri bulunur (Hydon, 2000; Tang ve Lou, 2002). Dolayısıyla B_i üreticileri

$$B_1 = \frac{\partial}{\partial a}$$

$$B_2 = \frac{\partial}{\partial u}$$

$$B_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$B_4 = a \frac{\partial}{\partial a} + 2u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$B_5 = 2u \frac{\partial}{\partial a} - a \frac{\partial}{\partial t}$$

$$B_6 = 4ua \frac{\partial}{\partial a} + 4u^2 \frac{\partial}{\partial u} - (a^2 - 2u) \frac{\partial}{\partial t}$$

olur. Bulunan bu değerler yardımıyla komütatör tablosu:

$[B_i, B_j]$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
B_1	0	0	0	B_1	$-B_3$	$2B_5$
B_2	0	0	0	$2B_2$	$2B_1$	$4B_4 - 2B_3$
B_3	0	0	0	0	0	0
B_4	$-B_1$	$-2B_2$	0	0	B_5	$2B_6$
B_5	B_3	$-2B_1$	0	$-B_5$	0	0
B_6	$-2B_5$	$2B_3 - 4B_4$	0	$-2B_6$	0	0

B_i simetri üreticinin dönüşüm grupları

$$\xi^i(a^*, u^*, t^*) = \frac{\partial a_i^*}{\partial \varepsilon}$$

formülünde

$$a_i^* \Big|_{\varepsilon=0} = a_i$$

başlangıç şartının uygulanmasıyla bulunur.

$$B_6 = 4ua \frac{\partial}{\partial a} + 4u^2 \frac{\partial}{\partial u} - (a^2 - 2u) \frac{\partial}{\partial t} \text{ üretici için grup dönüşümünün bileşenleri}$$

1)

$$\frac{\partial a^*}{\partial \varepsilon} = \xi(a^*, u^*, t^*) = 4ua$$

$$\ln a^* = 4u\varepsilon + ca^* \Big|_{\varepsilon=0} = a$$

başlangıç şartı uygulanırsa

$$a^* = e^{4u\varepsilon} a$$

olarak bulunur.

2)

$$\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon} = \tau(a^*, u^*, t^*) = 4u^2$$

$$-\frac{1}{u^*} = 4\varepsilon + ct^* \Big|_{\varepsilon=0} = t$$

başlangıç şartı uygulanırsa

$$u^* = -\frac{1}{4\varepsilon - \frac{1}{u}}$$

olarak bulunur.

3)

$$\frac{\partial t^*}{\partial \varepsilon} = \eta(a^*, u^*, t^*) = -a^2 + 2u$$

$$t^* = (-a^2 + 2u)\varepsilon + ct^* \Big|_{\varepsilon=0} = t$$

başlangıç şartı uygulanırsa

$$t^* = (-a^2 + 2u)\varepsilon + t$$

olur. Dolayısıyla G_6 dönüşüm grubu B_6 üretici tarafından

$$G_6: (a^*, u^*, t^*) = (e^{4u\varepsilon}a, -\frac{1}{4\varepsilon - \frac{1}{u}}, (-a^2 + 2u)\varepsilon + t)$$

şeklinde üretilir. Benzer yöntemle, diğer dönüşüm gruplarına ait aynı işlemler uygulanırsa

$$G_1: (a^*, u^*, t^*) = (a + \varepsilon, u, t)$$

$$G_2: (a^*, u^*, t^*) = (a, u + \varepsilon, t)$$

$$G_3: (a^*, u^*, t^*) = (a, u, t + \varepsilon)$$

$$G_4: (a^*, u^*, t^*) = (ae^\varepsilon, ue^{2\varepsilon}, t)$$

$$G_5: (a^*, u^*, t^*) = (a + 2u\varepsilon, u, t - \varepsilon a - 2u\varepsilon^2)$$

$$G_6: (a^*, u^*, t^*) = (e^{4u\varepsilon}a, -\varepsilon - \frac{1}{4\varepsilon - \frac{1}{u}}, (-a^2 + 2u)\varepsilon + t)$$

Lie grup dönüşümleri bulunmuş olur (Olver, 1991).

Örnek 3.13: Yüksek dereceden Korteweg-de Vries denklemini ele alırsak

$$t_u + t_{aaa} + tt_a = 0 \quad (3.29)$$

sığ suların hareketinde ve doğrusal olmayan fiziksel sistemlerde uzun dalgalar teorisinden meydana çıkar.

$v = \xi \partial a + \tau \partial u + \Phi \partial t$ vektör alanı, tek parametrelili simetri grubunu üretir:

$$\Phi^u + \Phi^{aaa} + t\Phi^a + t_a\Phi = 0 \quad (3.30)$$

Burada Φ^u ve $\Phi^a v$ vektör alanının birinci uzatım katsayılarıdır. v vektör alanı için $\frac{\partial}{\partial t_{aaa}}$ katsayısı

$$\Phi^{aaa} = D_a^3 \Phi - t_a D_a^3 \xi - t_u D_a^3 \tau - 3t_{aaa} D_a^2 \xi - 3t_{au} D_a^2 \tau - 3t_{aaa} D_a \xi - 3t_{aau} D_a \tau$$

t_u yerine $-t_{aaa} - tt_a$ kullanılıp ve Φ^{aaa} değeri (3.30) denkleminde yerine yazılırsa simetri grubu için belirleyici denklem elde edilir.

t 'nin katsayısı, t_{aa} ve $D_a \tau = 0$ olup dolayısıyla yalnızca u 'ya bağlıdır. t_{aa}^2 nın katsayısı, $\xi_t = 0$ olduğunu gösterir. t_{aaa} nın katsayısından, $\tau_u = 3\xi_a$ yı buluruz ve

$$\xi = \frac{1}{3} \tau_u a + \sigma(u)$$

dır. $\Phi_{tt} = 0 = \Phi_{at}$ olup dolayısıyla Φ ; t de doğrusaldır. t 'nin katsayısı yalnızca u 'nun bir fonksiyonudur.

(3.30) denkleminde geri kalan terimler t_a yı kapsayan terimlerdir:

$$\xi_u - t(\Phi_t - \tau_u) + t(\Phi_t - \xi_a) + \Phi = 0$$

ve t 'nin herhangi bir türevi olmayanlar

$$\Phi_u + \Phi_{aaa} + t\Phi_a = 0$$

olup bunların hepsinin genel çözümü

$$\xi = c_1 + c_3u + c_4a$$

$$\tau = c_2 + 3c_4u$$

$$\Phi = c_3 - 2c_4t$$

şeklindedir. Burada c_1, c_2, c_3, c_4 keyfî sabitlerdir. Dolayısıyla Korteweg-de Vries denkleminin simetri cebiri dört vektör alanına yayılır. Bu vektör alanları

$$V_1 = \partial_a$$

Uzay çevirisi

$$V_2 = \partial_u$$

Zaman çevirisi

$$V_3 = u\partial_a + \partial_t$$

Glileo artışı

$$V_4 = a\partial_a + 3u\partial_u - 2t\partial_t$$

Ölçeklendirme

olacak şekildedir. Eğer $t = g(a, u)$ Korteweg-de Vries denkleminin bir çözümü ise

$$t^{(1)} = g(a - \varepsilon, u)$$

$$t^{(2)} = g(a, u - \varepsilon)$$

$$t^{(3)} = g(a - \varepsilon u, u) + \varepsilon$$

$$t^{(4)} = e^{-2\varepsilon} g(e^{-\varepsilon} a, e^{-3\varepsilon} u)$$

olur. Bu veriler yardımıyla komütatör tablosu:

$[V_i, V_j]$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	0	0	V_1
V_2	0	0	V_1	$3V_2$
V_3	0	$-V_1$	0	$-2V_3$
V_4	$-V_1$	$-3V_2$	$2V_3$	0

şeklinde bulunur (Olver, 1991).

4. KORUNUM KANUNLARI

Fizikte korunum; değişmeyen, bir başka tabirle aynı kalan olayı veya ifadeyi temsil eder. Niceliğin korunduğu, olayın öncesinde ve sonrasında aynı değere karşılık geldiği anlamına gelmektedir.

Korunum kanunları, doğa ve evreni anlamamanın temeli ve püf noktasıdır. Korunum kanunları ile korunumlu nicelikleri ve hareketleri tanımlayabiliriz.

4.1. KORUNUM KANUNLARI VE SİMETRİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

Fiziksel olayların bir parçası olan enerji, momentum, elektrik yükü gibi durumların korunumu simetrilerle ilişkilidir. Simetri daima basit kalıplar çerçevesinde açık anlaşılır ve net olup evrenin bir parçasıdır.

Esasında pek çok fizik yasasının evrim geçirerek ilerlemesi simetriye dayanır. Örneğin, yapılmış olan bir deneyin koşullar aynı olma şartıyla ileri bir tarihte tekrar yapılmasıyla ortaya çıkan sonuçların aynı olmasıdır.

Fiziksel olarak bu olay ancak ve ancak simetri ve korunumla ilişkilendirilir. Zamanda öteleme simetrisini-enerjinin korunumu ile, dönme simetrisini-açısız momentumun korunması ile, uzayda öteleme simetrisini-çizgisel momentumun korunması ile ilişkilendirmek matematiksel fiziğin bir parçasıdır.

Fizikte simetri ve korunum kanunları düşünüldüğünde akıllara gelen önemli isimlerden bir tanesi Emmy Noether'dir. Emmy Noether tarafından 20. yüzyılın başlarında ortaya konan teorem, simetri ve korunumlar arasındaki ilişkiyi gösterir. Cebirsel anlamda çalışmalarını yürüten Emmy Noether matematiksel fizik alanlarında çalışmalar yapmıştır.

Bu bölümde, korunum kanunlarını elde etmek için gereken Euler-Lagrange operatörü, eşlenik denklem sistemleri, eşlenik denklem sistemleri yardımıyla formal Lagrangianların bulunması ve temel korunum teoreminden bahsedip korunum kanunlarını irdedeceğiz.

Tanım 4.1.1 (Euler-Lagrange operatörü)

A uzayı için Euler-Lagrange operatörü,

$$\frac{\delta}{\delta t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r D_{i_1, i_2, \dots, i_r} \frac{\partial}{\partial t_{i_1, i_2, \dots, i_r}^\alpha} \quad , \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m) \quad (4.1)$$

olacak şekilde tanımlanır. Bu denklemde her r için toplam 1 den m 'ye kadar $i_1, i_2, \dots, i_r$ tekrarı olan indislerin üzerinde olduğu aşıkardır. Örneğin; tanımlı olan bir g fonksiyonu için 1 bağımlı değişkenin ve 3 bağımsız değişkenin olduğu ve en yüksek türev mertebesinin 2 olduğunu düşünelim. t bağımlı değişken ve a, b, c bağımsız değişkenler olmak üzere Euler-Lagrange operatörü

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} &+ (-1) \left(D_a \frac{\partial}{\partial t_a} + D_b \frac{\partial}{\partial t_b} + D_c \frac{\partial}{\partial t_c} \right) \\ &+ (-1)^2 \left(D_a^2 \frac{\partial}{\partial t_{aa}} + D_b^2 \frac{\partial}{\partial t_{bb}} + D_c^2 \frac{\partial}{\partial t_{cc}} \right) \\ &+ (-1)^2 \left(D_a D_b \frac{\partial}{\partial t_{ab}} + D_a D_c \frac{\partial}{\partial t_{ac}} + D_b D_c \frac{\partial}{\partial t_{bc}} \right) \end{aligned}$$

olacak şekilde bulunur. Burada $D_a, D_b, D_c, D_a^2, D_b^2, D_c^2, D_a D_b, D_a D_c, D_b D_c$ total türevi temsil eder (Eriksson, 2008).

$\frac{\delta}{\delta t^\alpha}$ türevine varyasyonel türev denir:

$$\frac{\delta}{\delta t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + \sum_{r \geq 1} (-1)^r D_{i_1, i_2, \dots, i_r} \frac{\partial}{\partial t_{i_1, i_2, \dots, i_r}^\alpha} \quad , \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m)$$

olacak şekilde tanımlanır (Oliver, 1993).

Tanım 4.1.2 (Euler-Lagrange denklemi)

$$L = L(a, t, t_1, t_2, \dots, t_k) \in A$$

Lagrangian olmak üzere,

$$\frac{\delta L}{\delta t^\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m) \quad (4.2)$$

şeklinde gösterilen denklemlere Euler-Lagrange denklemi denir (Ibragimov, 1993).

Tanım 4.1.3 (N^i operatörü)

N^i operatörü için

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j t_j^\alpha$$

olmak üzere

$$B = \xi^i D_i + W^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + D_i(W^\alpha) \frac{\partial}{\partial t_i^\alpha} + D_{i_1 i_2}(W^\alpha) \frac{\partial}{\partial t_{i_1 i_2}^\alpha} + \dots \quad (4.3)$$

biçimindeki Lie-Bäcklund operatörü için $i = 1, 2, \dots, n$ olacak şekilde N^i operatörü

$$N^i = \xi^i + W^\alpha \frac{\delta}{\delta t_i^\alpha} + \sum_{r=1}^{\infty} D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_r} (W^\alpha) \frac{\delta}{\delta t_{i i_1, i_2, \dots, i_r}^\alpha} \quad (4.4)$$

olarak tanımlanır (Eriksson, 2008).

Teorem 4.1.1: Euler-Lagrange, Lie-Bäcklund ve N^i operatörleri arasında

$$B + D_i(\xi^i) = W^\alpha \frac{\delta}{\delta t^\alpha} + D_i N^i$$

olacak şekilde verilen eşitlik sağlanır ve bu özdeşliğe Noether özdeşliği denir (Eriksson, 2008).

Burada,

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j t_j^\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m)$$

dir (Eriksson, 2008).

Teorem 4.1.2: $i = 1, 2, \dots, n$ ve $\alpha = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde

$$\bar{a}_i = g^i(a, t, b)$$

$$\bar{t}^\alpha = \varphi(a, t, b)$$

tek parametrelili G nokta dönüşüm grubu için

$$B = \xi^i(a, t) \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta^\alpha(a, t) \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \quad (4.5)$$

sonsuz küçük üretici olsun. G grubu altında rastgele bir $t(a)$ fonksiyonu, $\bar{t}(\bar{a})$ fonksiyonuna ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ alanı $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ alanına dönüşür (Yakut, 2012).

Tanım 4.1.4: Her Ω alanı tüm $t(a)$ fonksiyonları için

$$\int_{\Omega} L(L(a, t(a), t_1(a), t_2(a), \dots, t_k(a))) da = \int_{\bar{\Omega}} L(\bar{a}, \bar{t}(\bar{a}), \bar{t}_1(\bar{a}), \bar{t}_2(\bar{a}), \dots, \bar{t}_k(\bar{a})) d\bar{a}$$

şeklinde integral tanımlıysa $\bar{a}_i, \bar{t}^\alpha$ dönüşümlerinin G grubu altında

$$\int_{\Omega} L da \quad , \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

integrali değişmezdir (Yakut, 2012).

Teorem 4.1.3:

$$B = \xi^i(a, t) \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta^\alpha(a, t) \frac{\partial}{\partial t^\alpha}$$

sonsuz küçük üretici için tek parametrelili nokta dönüşüm grubu olan G altında

$$\int_{\Omega} L da \quad , \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

integrali değişmezdir ancak ve ancak

$$B(L) + LD_i(\xi^i) = 0$$

olmasıdır.

Teorem 4.1.4:

$$\int_{\Omega} L da \quad , \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

integrali (4.5) numaralı denklemde tanımlanan sonsuz küçük üretici ile G grubu işlemlerine göre değişmez ise

$$T^i = N^i(L)$$

olarak tanımlanan $T = (T^1, T^2, \dots, T^n)$ vektörü (4.2) numaralı denklem ile ifade edilen Euler-Lagrange denklemi için korunmuş vektördür.

$T = (T^1, T^2, \dots, T^n)$ vektörünü korunmuş vektör olarak tanımlayabilmek için

$$D_i(T^i) = 0$$

olması gerekir.

Teorem 4.1.4 (Noether teoremi)

Emmy Noether'in bu teoremdaki amacı diferansiyel denklem sistemlerinin Euler-Lagrange denklemleri ve simetrileri ile yerel korunum kanunlarını bulmaktır.

$$B = \xi^i \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + \dots, \quad (\xi^i, \eta^\alpha \in A)$$

ile verilen Lie-Bäcklund operatörü L diferansiyel n -formu bu gruba göre değişmezdir ancak ve ancak

$$B(L) + LD_i(\xi^i) = 0$$

olmasıdır (Ibragimov, 1993).

Teorem 4.1.5: $L(a, t, t_1, t_2, \dots, t_k) \in A$ herhangi mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. O halde Euler-Lagrange denklemleri (4.2) numaralı denklemde tanımlanmıştır.

$$B(L) + LD_i(\xi^i) = D_i(C^i), \quad (C^i \in A)$$

olduğunda (4.2) ile tanımlanan Euler-Lagrange denklemi için

$$T^i = N^i(L) - C^i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

korunum kanunu bulunur.

Eğer diferansiyel denklem;

$$B = \xi^i(a, t) \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta^\alpha(a, t) \frac{\partial}{\partial t^\alpha}$$

şeklinde $B_1, B_2, \dots, B_s$ olmak üzere s tane simetriye sahipse

$$B_\mu = \xi_\mu^i(a, t) \frac{\partial}{\partial a_i} \eta_\mu^i(a, t) \frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \quad (\mu = 1, 2, \dots, s)$$

ise

$$T^i = L\xi^i + (\eta^\alpha - \xi^i t_j^\alpha) \frac{\partial L}{\partial t_j^\alpha}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

korunmuş vektörü $T_1, T_2, \dots, T_s$ olacak şekilde s tane

$$T_{\mu}^i = L\xi_{\mu}^i + \left(\eta_{\mu}^{\alpha} - \xi_{\mu}^i t_j^{\alpha}\right) \frac{\partial L}{\partial t_i^{\alpha}} \quad , \quad (\mu = 1, 2, \dots, s)$$

biçiminde korunum vektörlerini üretir (Eriksson, 2008).

Tanım 4.1.5 (Eşlenik denklemler)

L herhangi mertebeden lineer diferansiyel operatörünü temsil etsin. L nin L^* eşlenik operatörü her t, u için

$$wL[t] - tL^*[w] = D_i(P^i)$$

şeklindedir. $P = (p^1, p^2, \dots, p^n)$ vektör alanıdır. $L^*[w] = 0$ ifadesine $L[t] = 0$ ifadesinin eşlenik denklemi denir.

Genel bir tabirle ikinci mertebeden L operatörü,

$$L = x^{ij}(a)D_iD_j + y^i(a)D_i + z(a)$$

şeklindedir. $i, j = 1, 2, \dots, n$ için $x^{ij} = x^{ji}$ olup katsayılar simetriktr (Yakut, 2012).

Teorem 4.1.6: L nin L^* eşlenik operatörü

$$L^*[w] = D_iD_j(x^{ij}w) - D_i(y^iw) + zw$$

şeklindedir (Eriksson, 2008).

Tanım 4.1.6 (Öz eşlenik denklemler)

Rastgele bir t fonksiyonu için

$$L[t] = L^*[t]$$

eşitliği sağlanıyorsa L operatörüne öz eşleniktir denir (Eriksson, 2008).

Teorem 4.1.7:

$$L = x^{ij}(a)D_i D_j + y^i(a)D_i + z(a)$$

operatörü öz eşleniktir ancak ve ancak

$$y^i(a) = D_j(x^{ij})$$

olmasıdır.

Tanım 4.1.6 (Eşlenik denklem sistemleri)

$$G_\alpha(a, t, t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(k)}) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m) \quad (4.6)$$

biçiminde k . mertebeden kısmi diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminde $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ bağımsız değişkenler ve $t = (t^1, t^2, \dots, t^n)$ bağımlı değişkenler ve $G_\alpha(a, t, t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(k)}) \in A$ diferansiyel fonksiyonlar olsun. O halde k . mertebeden kısmi diferansiyel denklem sistemi için eşlenik denklem sistemi

$$G_\alpha^*(a, t, w, \dots, t_{(k)}, w_{(k)}) = \frac{\delta(w G_\beta)}{\delta t^\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m) \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlanır ve burada $w = (w^1, w^2, \dots, w^m)$; $w = w(\alpha)$ olacak şekilde yeni bağımsız değişkenler olup eşlenik değişkeni adı verilir (Eriksson, 2008).

Örnek 4.1:

$$t_u - c(a)t_{aa} = 0,$$

ısı denklemi için $c(a)$ keyfi fonksiyondur. Isı denkleminin eşlenik denklemi

$$G = G(a, u, t, t_{(1)}, t_{(2)})$$

$$= c(a)t_{aa} - t_u$$

$$= 0$$

olacak şekilde a, u bağımsız değişkenler ve t bağımlı değişken olup eşlenik denklem,

$$\begin{aligned}
G^* &= G^*(a, u, t, w, t_{(1)}, t_{(2)}, w_{(1)}, w_{(2)}) \\
&= \frac{\delta}{\delta t} (w[c(a)t_{aa} - t_u]) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial t} - D_u \frac{\partial}{\partial t_u} - D_a \frac{\partial}{\partial t_a} + D_a^2 \frac{\partial}{\partial t_{aa}} + D_u^2 \frac{\partial}{\partial t_{uu}} + D_a D_u \frac{\partial}{\partial t_{au}} \right] (w[c(a)t_{aa} - t_u]) \\
&= \left[-D_u \frac{\partial}{\partial t_u} + D_a^2 \frac{\partial}{\partial t_{aa}} \right] (w[c(a)t_{aa} - t_u]) \\
&= -D_u(-w) + D_a^2(c(a)w) \\
&= w_u + (cw)_{aa} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur (Eriksson, 2008).

Örnek 4.2:

$$t_u = t_{aaa} + tt_{aa} = 0$$

Korteweg-de Vries denklemini ele alalım. Öz eşlenik olup olmadığını inceleyelim.

$$G = G(a, u, t, t_{(1)}, t_{(2)}, t_{(3)})$$

$$= t_u - t_{aaa} - tt_a$$

$$= 0$$

olacak şekilde a, u bağımsız değişkenler ve t bağımlı değişken olsun. Eşlenik denklem:

$$\begin{aligned}
G^* &= G^*(a, u, t, w, t_{(1)}, t_{(2)}, t_{(3)}, w_{(1)}, w_{(2)}, w_{(3)}) \\
&= \frac{\delta}{\delta t} (w[t_u - t_{aaa} - tt_a]) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial t} - D_u \frac{\partial}{\partial t_u} - D_a \frac{\partial}{\partial t_a} - D_a^3 \frac{\partial}{\partial t_{aaa}} \right] (w[t_u - t_{aaa} - tt_a]) \\
&= -wt_a - D_u w + D_a(wt) + D_a^3 w \\
&= -wt_a - w_u + w_a t + wt_a + w_{aaa} \\
&= -w_u + w_a t + w_{aaa}
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve eşlenik denklem

$$w_u = w_a t + w_{aaa}$$

olur. Eşlenik denklemde w yerine t yazılırsa

$$t_u = tt_a + t_{aaa}$$

$$G^* = -(t_u - t_{aaa} - tt_a)$$

$$= G$$

olur. Dolayısıyla Korteweg-de Vries denklemi öz eşlenik bir denklemdir (Eriksson, 2008).

Tanım 4.1.7 (Eşlenik denklem sistemleriyle formal Lagrangianların üretilmesi)

k . mertebeden (4.6) ile belirtilen diferansiyel denklemi (4.7) ile belirtilen eşlenik denklemi ile Lagrangiana sahip olduğunu varsayalım.

m bağımsız değişkenli $t = (t^1, t^2, \dots, t^m)$ ve $w = (w^1, w^2, \dots, w^m)$ ile (4.6), (4.7) ve (4.2) ile ifade edilen denklem sisteminin formal Lagrangianı

$$L = w^\beta G_\beta$$

olarak tanımlanır (Eriksson, 2008).

Örnek 4.3:

$$t_u - c(a)t_{aa} = 0$$

ı1 denkleminin formal Lagrangianını bulalım.

Isı denklemi, eşlenik denklemi ile birlikte formal Lagrangiana sahip olsun. O halde formal Lagrangianı $L = w^\beta G_\beta$ ile verilen operatörle bulunursa

$$L = wt_u - wc(a)t_{aa}$$

olur. Burada,

$$\frac{\delta L}{\delta w} = t_u - c(a)t_{aa} = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta t} = w_u + (cw)_{aa} = G^* = 0$$

olacağından dolayı bulunan formal Lagrangian, Euler-Lagrange denklemini sağlar (Eriksson, 2008).

Teorem 4.1.7: n bağımsız $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve m bağımlı $t = (t^1, t^2, \dots, t^m)$ değişkenli (4.6) ile belirtilen denklemin üretici

$$B = \xi^i \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}$$

olsun. (4.7) ile belirtilen eşlenik sistem gerçek sistemin simetrisini kabul eder. (4.6) ile belirtilen kısmi diferansiyel denklem B 'yi onaylarsa (4.7) ile belirtilen eşlenik denklem sistemi;

$$C = \xi^i \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + \eta_*^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha}$$

şeklinde $\eta_*^\alpha = \eta_*^\alpha(a, t, v, \dots)$ katsayılarıyla eşlenik değişkenine (w^α) büyüyen B 'yi onaylar (Eriksson, 2008).

Teorem 4.1.7: (4.6) numaralı denklem ile m bağımlı ve n bağımsız değişkeni içeren k . mertebeden diferansiyel denklem sistemi için

$$B = \xi^i \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}$$

ile tanımlanan üretici ve (4.7) numaralı denklem ile belirtilen eşlenik denklem sistemi olsun. Burada,

$$w = w(a) = (w^1, w^2, \dots, w^m)$$

eşlenik değişkendir.

O halde (4.6) ile belirtilen denklem sistemi için her Lie nokta simetrisi, lokal olmayan simetrisi ve Lie Bäcklund simetrisi (4.6) ve (4.7) denklem sistemleri için korunum kanunu üretir. Korunmuş vektörler için bileşenler,

$$L = w^\alpha G_\alpha(a, t, t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(k)})$$

ve formal Lagrangianıyla,

$$T^i = \xi^i L + W^\alpha \frac{\delta L}{\delta t_i^\alpha} + \sum_{r \geq 1} D_1 D_2 \dots D_k (W^\alpha) \frac{\partial}{\partial t_{i_1, i_2, \dots, i_r}^\alpha}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.8)$$

şeklindedir. Burada,

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j t_j^\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m)$$

dir. (4.8) denkleminde bulunan korunmuş vektörler (4.7) de belirtilen eşlenik denklemin keyfi w çözümlerini ihtiva eder ve (4.7) denklem sistemi için sonsuz miktardaki korunum kanunlarının bir tanesi w belirtilerek bulunur (Yaşar, 2010a).

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ bağımsız değişkenler ve $t = (t^1, t^2, \dots, t^m)$ bağımlı değişkenler olmak üzere

$$L = (a, t, t_{(1)})$$

birinci mertebeden Lagrangianı için (4.2) ile tanımlanan Euler-Lagrange denklemi,

$$\frac{\delta L}{\delta t} \equiv \frac{\partial L}{\partial t^\alpha} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial t_i^\alpha} \right) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m)$$

olur. Eğer $L = (a, t, t_{(1)})$ Lagrangianlı varyasyonel integrali,

$$B = \xi^i(a, t, t_{(1)}, t_{(2)}, \dots) \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta^\alpha(a, t, t_{(1)}, t_{(2)}, \dots) \frac{\partial}{\partial t^\alpha}$$

üreteçli G grubu altında değişmez ise

$T = (T^1, T^2, \dots, T^n)$ korunum vektörleri (4.8) formülünden,

$$T^i = \xi^i L + (\eta^\alpha - \xi^j t_j^\alpha) \frac{\partial}{\partial t_i^\alpha}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

olur.

$$L = (a, t, t_{(1)}, t_{(2)})$$

şeklindeki ikinci mertebeden Lagrangianı için (4.2) ile tanımlanan Euler-Lagrange denklemi,

$$\frac{\partial L}{\partial t^\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial t^\alpha} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial t_i^\alpha} \right) + D_i \left(\frac{\partial L}{\partial t_{ik}^\alpha} \right) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m)$$

olur. $T = (T^1, T^2, \dots, T^n)$ korunmuş vektörleri (4.8) formülünden,

$$T^i = \xi^i L + (\eta^\alpha - \xi^j t_j^\alpha) \left[\frac{\partial L}{\partial t_i^\alpha} - D_k \left(\frac{\partial L}{\partial t_{ik}^\alpha} \right) \right] + D_k (\eta^\alpha - \xi^j t_j^\alpha) \frac{\partial L}{\partial t_{ik}^\alpha}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

olur.

Teorem 4.1.7: (4.6) ile belirtilen k . mertebeden n bağımlı ve m bağımsız değişkeni içeren diferansiyel denklemlerin Lie nokta simetrisi, Lie Bäcklund simetrisi ve yerel olmayan simetrisi,

$$B = \xi^i(a, t, t_{(1)}, t_{(2)}, \dots) \frac{\partial}{\partial t_i} + \eta^\alpha(a, t, t_{(1)}, t_{(2)}, \dots) \frac{\partial}{\partial t^\alpha}$$

(4.6) diferansiyel denklemi ve denklemin eşlenik sistemi için korunum kanununu verir (Eriksson, 2008).

Örnek 4.4:

$$t_u = t_{aaa} + t^2 t_a$$

Modifiye Korteveg-de Vries (MKdV) denkleminin korunum kanunlarını bulalım.

Modifiye Korteveg-de Vries denklemi için

$$B_1 = \frac{\partial}{\partial a}$$

$$B_2 = \frac{\partial}{\partial u}$$

$$B_3 = -a \frac{\partial}{\partial a} - 3u \frac{\partial}{\partial u} + t \frac{\partial}{\partial t}$$

olacak şekilde Lie simetri üreteçleri vardır.

Modifiye Korteveg-de Vries denklemi klasik Lagrangiana sahip değildir. Dolayısıyla eşlenik denklemi;

$$G^*(a, u, t, w, \dots, w_{aaa}) = \frac{\delta L}{\delta t} [(t_u - t_{aaa} - t^2 t_a)w] = 0$$

denklemi ile bulunursa

$$G^* = w_u - t^2 w_a - w_{aaa} = 0$$

olur ve

$$w = w(a, t)$$

eşlenik değişkendir. Eşlenik denklemde w yerine t yazıldığında Modifiye Korteveg-de Vries denklemi elde edilir. Bu denklem sistemi için formal Lagrangian,

$$L = (t_u - t_{aaa} + t^2 t_a)w$$

olur. Eşlenik denklem için Lie simetri üreteçleri vardır. B_3 için bunu gösterecek olursak:

$$\tilde{B}^3(G^*) \Big|_{G^*=0} = 3(-w_u + t^2 w_a + w_{aaa}) = 0$$

olduğu için G^* ın B_3 simetrisi vardır. Ayrıca Modifiye Korteveg-de Vries denklemi B_1, B_2, B_3 simetri üreteçlerinden her biri için

$$B(L) + LD_i(\xi^i) = 0$$

değişmezlik testini sağlar. $B_1 = \frac{\partial}{\partial a}$ simetrisi için gösterelim.

$$\xi = 1$$

$$\tau = 0$$

$$\eta = 0$$

olduğu için

$$B(L) = 0$$

dır. Dolayısıyla değişmezlik koşulu sağlanır.

Modifiye Korteveg-de Vries ve eşlenik denklemleri için (4.8) denkleminde;

$$W = \eta - \tau t_u - \xi t_a$$

olmak üzere,

$$T^1 = \tau L W \frac{\partial L}{\partial t_u}$$

$$T^2 = \xi L + W \left[\frac{\partial L}{\partial t_a} D_a^2 \left(\frac{\partial L}{\partial t_{aaa}} \right) \right] - D_a(W) \left[D_a \left(\frac{\partial L}{\partial t_{aaa}} \right) \right] + D_a^2(W) \frac{\partial L}{\partial t_{aaa}}$$

korunum kanunları bulunur.

Durum 1: $B_1 = \frac{\partial}{\partial a}$ için korunum kanunları

$$C = \xi^i \frac{\partial}{\partial a_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + \eta_*^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha}$$

denklemine göre C_1, B_1 eşit olur.

$$\xi = 1$$

$$\tau = 0$$

$$\eta = 0$$

olduğundan ξ, τ, η, W değerleri T^1 ve T^2 eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$T^1 = -wt_a$$

$$T^2 = wt_u + t_a w_{aa} - w_a t_{aa}$$

korunum kanunları bulunmuş olur. Modifiye Korteveg-de Vries özdeşlenik olduğu için korunum kanunlarında w yerine t yazılırsa;

$$T^1 = -wt_a$$

$$T^2 = tt_u$$

olarak bulunur.

Durum 2: $B_2 = \frac{\partial}{\partial u}$ üretici için korunum kanunları

$$\xi = 0$$

$$\tau = 1$$

$$\eta = 0$$

olduğundan ξ, τ, η, W değerleri T^1 ve T^2 eşitliklerinde yerine yazılırsa,

$$T^1 = -tt_{aaa}$$

$$T^2 = t_u t_{aa} - t_a t_{au} + tt_{aa u}$$

olarak bulunur.

Durum 3: $B_3 = -a \frac{\partial}{\partial a} - 3u \frac{\partial}{\partial u} + t \frac{\partial}{\partial t}$ üretici için korunum kanunları

$$\xi = -a$$

$$\tau = -3u$$

$$\eta = t$$

olduğundan dolayı

$$W = t + at_a + 3ut_u$$

olur. ξ, τ, η, W değerleri T^1 ve T^2 eşitliklerinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} T^1 &= 3utt_{aaa} + 3ut^3 t_a + t^2 + att_a \\ T^2 &= -4tt_{aa} - att_u - 3ut^3 t_u - 3ut_u t_{aa} \\ &\quad + 2t_a^2 + 3ut_a t_{au} - 3utt_{aa u} - t^4 \end{aligned}$$

olarak bulunur (Yaşar, 2010 b).

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında diferansiyel denklemler hakkında genel bilgiler verilerek bir parametrelili Lie grup dönüşümleri incelenmiştir. Sürekli olan parametrelerin sürekli Lie grup dönüşümü oluşturduğu görülmüştür. Lie grubuna ait dönüşüm ile meydana gelen sonsuz küçük simetri operatörünün kısmi diferansiyel denklemlerin çözümüne ulaşılmasındaki önemine değinilmiştir. Lie grup dönüşümlerinden faydalanılarak kısmi diferansiyel denklemlerin (lineer ve lineer olmayan) sonsuz küçük simetri üreteçleri içinde değişmezliğini koruyan uzanım formülleri bulunarak sonsuz küçükler ve simetri üreteçleri bulunmuştur. Lie cebir yapısına değinilerek elde edilen üreteçlerin Lie cebir yapısına bakılıp komütatör tablosu üzerinden gösterilmiştir. Sonsuz küçük simetri üreteçleri için grup dönüşümleri bulunup, iki boyutlu alt cebir veya sonsuz küçük simetri üreteçleri altında adi diferansiyel denklemlere indirgenerek çözümlerine ulaşılmıştır. Dolayısıyla ele alınan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümüne ulaşabilmek için kompleks bir formdan daha basit bir hale getirilerek çözümlerine ulaşılmıştır. Lie simetri üreteçleri yardımıyla hesaplamalar yapıp korunum kanunları hesaplanmıştır.

Kısmi diferansiyel denklemlere Lie grup dönüşümü uygulandığında ortaya çıkan simetri özelliği o kısmi diferansiyel denklemi meydana getiren fiziksel olayın sistem ve bu fiziksel sistemin özellikleri ile ipuçları vermektedir. Doğada simetrinin olduğu her yerde grup yapısından söz etmek mümkündür. Korunum kanunları ile simetri arasında direkt bir ilişki vardır. Korunum, değişmeyen aynı kalan anlamında olduğu için korunan nicelik zamanla aynı kalır ve bu olay sadece simetri ile ilişkilendirilerek açıklanabilir.

Bu tez çalışmasında bir parametrelili Lie grup dönüşümleri üzerinden çalışmalar yapılmıştır. Lie nokta dönüşümleri incelenmiştir. Başka çalışmalarda kısmi diferansiyel denklemlere çok parametrelili Lie grup dönüşümleri uygulanarak farklı çalışmalar ve uygulamalar yapılabilir. Lie-kontakt, Lie-Bäcklund dönüşümleri incelenerek diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

6. KAYNAKLAR

- [1] Ahmad, A., 2005, Symmetry Solutions of Some Nonlinear Pde,s, Master Thesis, Deanship of Graduate Studies, King Fahd University of Petroleum and Minerals Dhahran 31261Saudi Arabia.
- [2] Bluman, G.W., Anco, S.C., 2002, Symmetry and Integration Methods for Differential Equations with 18 Illustrations, Springer-Verlag, New York.
- [3] Bluman,, G.W., Kumei, S., 1989, Symmetries Differential Equations with 21 Illustrations, Springer-Verlag, New York.
- [4] Cicogna, G. And Gaeta, G., 1999, Symmetry and Perturbation Theory in Nonlinear Dynamics, Springer-Verlag, Berlin.
- [5] Eriksson, M., 2008 Symmetries and Conservation Laws Obtained by Lie Group Anlysis for Certain Physical Systems, Diploma Thesis, Uppsala School of Engineering and Department of Astronomy and Space Physics, Uppsala Universty, Sweden.
- [6] Gilmore, R., 2008, Lie Group, Physics and Geometry, Cambridge Universty Press, Cambridge, UK.,
- [7] Gilmore, R., 1974, Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications, A. Wiley-Inter Science Publication, Canada.
- [8] Giresunlu, İ.B., 2017, Oluşum Türü Denklemlerin Simetri İndirgemeleri Korunum Kanunları veTam Çözümleri Üzerine, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Bursa.
- [9] Hydon, P.E., 2000, Symmetry Methods for Differential Equantions A Beginner's Guide, Cam-Bridge Universty Press, New York.
- [10] Ibraimov, N.H., 1993, CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume Symmetries Exact and Conservation Laws, CRC pres. Inc, United States of America.
- [11] Kiraz, Açıl F., 2007, Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Lie Simetrileri Üzerine, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,Matematik Ana Bilim Dalı, İzmir.
- [12] Koca, K., 2008, Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler, Gündüz Eğitim Yayıncılık, Ankara.

- [13] Olver, P.J., 1991, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, New York.
- [14] Olver, P.J., 1993, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Second edition, Springer-Verlag, New York.
- [15] Orhan, Ö., 2018, On μ -symmetries, μ -reductions, and μ -conservation laws of Gardner equation, Journal of nonlinear mathematical physics, 26(1), 69-90.
- [16] Ovsyannikov, L.V., 1982, Group Analysis of Differential Equations, Academic Pres, New York.
- [17] Özceylan, M., 2007, Bir Parametrelili Lie Gruplarının Diferansiyel Denklemlere Uygulanması Üzerine Yüksek Lisans Tezi, Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Edirne.
- [18] San, S., 2011, Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Simetrileri ve Çözümleri Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Ana Bilim Dalı, Eskişehir.
- [19] Stephani, H., 1989, Differential Equations (Their Solution Using Symmetries), Cambridge University Press, New York.
- [20] Taşçı, D., 2007, Soyut Cebir, Alp Yayınevi, Ankara.
- [21] Yakut, A., 2012, Kısmi Diferansiyel Denklemler İçin Korunum Kanunları Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Ana Bilim Dalı, Eskişehir.
- [22] Yaşar, E., 2009, Oluşum Türü Denklemlerin Yerel ve Yerel Olmayan Yeni Korunum Kanunları, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Bursa.
- [23] Yaşar, E., 2010a, Conservation Laws For A Class of Soil Water Equations, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.
- [24] Yaşar, E., 2010 b, On the Conservation Laws and Invariant Solutions of the mKdV Equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications.