

**T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER OLMAYAN KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREVLİ KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HOMOTOPİ ANALİZ YÖNTEMİ İLE
ÇÖZÜMÜ**

Orkun TAŞBOZAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**MALATYA
2011**

Tezin Başlığı : Lineer Olmayan Kesirli Mertebeden Türevli Kısmi Diferan-
siyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi İle Çözümü

Tezi Hazırlayan : Orkun TAŞBOZAN

Sınav Tarihi : 12.08.2011

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değeriendirilerek Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY (İnönü Üniv.) _____

Prof. Dr. A. Refik BAHADIR (İnönü Üniv.) _____

Doç. Dr. Alaattin ESEN (İnönü Üniv.) _____

Doç. Dr. Alaattin ESEN
Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Asım KÜNKÜL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Lineer Olmayan Kesirli Mertebeden Türevli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi İle Çözümü" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Orkun TAŞBOZAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Lineer Olmayan Kesirli Mertebeden Türevli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi İle Çözümü

Orkun TAŞBOZAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

81+xi sayfa

2011

Danışman: Doç. Dr. Alaattin ESEN

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü Giriş bölümü olarak düzenlendi ve literatür özeti de bu bölümde verildi.

İkinci bölümde, bazı özel fonksiyonlar tanıtıldıktan sonra kesirli mertebeden türev ve integral hesaplamalarında kullanılan Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo yaklaşımları verildi.

Üçüncü bölümde, Homotopi Analiz yöntemi hakkında genel kavramlar verildi ve ardından yöntemin kısmi diferansiyel denklemlere uygulamasına örnek olarak bir ve iki boyutlu ısı iletim problemlerinin Homotopi Analiz çözümleri araştırıldı.

Tezin esas kısmı olan dördüncü bölümde, Homotopi Analiz yöntemi başlangıç koşulları ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu ısı iletim, iki boyutlu ısı iletim, Sharmo-Tasso-Olver ve coupled Modified Korteweg de Vries (mKdV) denklemlerine uygulandı ve elde edilen her bir problemin seri çözümü için yakınsaklık aralıkları belirlendikten sonra nümerik çözümleri elde edildi.

ANAHTAR KELİMELER: Kesirli Mertebe Diferansiyel Denklem, Homotopi Analiz Yöntemi, Nümerik Çözüm, Kesirli Mertebe Sharmo-Tasso-Olver Denklemi, Kesirli Mertebe Coupled mKdV Denklemi

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Solution of the nonlinear fractional order derivative partial differential equations with
Homotopy Analysis method

Orkun TAŞBOZAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

81+xi pages

2011

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Alaattin ESEN

The first chapter of this thesis consisting of four chapters is designed as introductory and a literature summary is presented.

In the second chapter, after presenting some special functions, Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo approximations which are used in the calculations of fractional order derivative and integral are given.

In the third chapter, general concepts are given about Homotopy Analysis method and then Homotopy Analysis solutions of one-dimensional and two-dimensional heat transfer problem as an example of its application to partial differential equations.

In the fourth chapter which is the main body of the thesis, Homotopy Analysis method is applied to fractional order one-dimensional heat transfer, two-dimensional heat transfer, Sharmo-Tasso-Olver and coupled Modified Korteweg de Vries (mKdV) equations given with initial conditions, and after determining the convergence range of each problem's series solution, their numerical solutions are obtained.

KEY WORDS: Fractional Order Diferantial Equation, Homotopy Analysis Method, Numerical solution, Fractional Order Sharmo-Tasso-Olver Equation, Fractional Order Coupled mKdV Equation

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince engin bilgisi ve titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan tez danışmanım çok değerli hocam Doç. Dr. Alaattin ESEN'e, araştırmalarım sırasında görüşleriyle yol gösteren, ilgi ve desteğini esirgemeyen ve her zaman bana yardımcı olan Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a, bölüm başkanımız Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e, yardımlarından dolayı Öğr. Grv. Murat YAĞMURLU'ya, her zaman desteklerini aldığım araştırma görevlisi arkadaşlarıma, sevgili aileme ve çok kıymetli eşime teşekkürü bir borç bilirim.

Aldığım bu akademik katkıların yanı sıra eğitimim süresince bana burs desteği gösteren TUBİTAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Orkun TAŞBOZAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
TABLolar DİZİNİ	ix
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Özel Fonksiyonlar	3
2.1.1 Gama fonksiyonu	3
2.1.2 Beta fonksiyonu	5
2.1.3 Hata fonksiyonu	5
2.1.4 Mittag-Leffler fonksiyonu	5
2.1.5 Mellin-Ross fonksiyonu	6
2.2 Kesirli Türev ve İntegral Hesaplamaları	6
2.2.1 Grünwald-Letnikov yaklaşımı	7
2.2.2 Riemann-Liouville yaklaşımı	9
2.2.3 Caputo yaklaşımı	12
2.2.4 Bazı elemanter fonksiyonların kesir mertebeden türevleri ve integralleri . .	14
3 HOMOTOPİ ANALİZ YÖNTEMİ	20

3.1	Sıfırıncı-Derece Deformasyon Denklemi	21
3.2	Homotopi Türevinin Özellikleri	23
3.3	Yüksek-Derece Deformasyon Denklemi	24
3.4	Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulamalar	26
3.4.1	Bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim denklemi	26
3.4.2	İki boyutlu ısı iletim denklemi	31
4	KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HOMO- TOPI ANALİZ YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	37
4.1	Kesirli Mertebeden Bir Boyutlu Değişken Katsayılı Isı İletim Denklemi . .	37
4.2	Kesirli Mertebeden İki Boyutlu Isı İletim Denklemi	45
4.3	Kesirli Mertebeden Sharmo-Tasso-Olver (STO) Denklemi	52
4.4	Kesirli Mertebeden Coupled mKdV Denklemi	62
	KAYNAKLAR	75
	ÖZGEÇMİŞ	81

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Gama fonksiyonu	4
Şekil 3.1	(3.4.1)-(3.4.3) ile verilen bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $\hbar$ eğrileri	28
Şekil 3.2	(3.4.1)-(3.4.3) ile verilen bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde değişik $\hbar$ değerleri için $u_{app30}(0.5, t)$ yaklaşık çözüm ve $u(0.5, t)$ tam çözüm eğrileri	28
Şekil 3.3	(3.4.1)-(3.4.3) ile verilen bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $0 \leq t \leq 1$ zaman aralığında (a) $\hbar = -1$ için Homotopi Analiz çözümü, (b) $u(x, t)$ tam çözümü	29
Şekil 3.4	(3.4.1)-(3.4.3) ile verilen bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $0 \leq t \leq 5$ zaman aralığında (a) $\hbar = -1$ için Homotopi Analiz çözümü, (b) $u(x, t)$ tam çözümü	29
Şekil 3.5	(3.4.10)-(3.4.13) ile verilen iki boyutlu ısı iletim probleminde $\hbar$ eğrileri	33
Şekil 3.6	(3.4.10)-(3.4.13) ile verilen iki boyutlu ısı iletim probleminde değişik $\hbar$ değerleri için $u_{app25}(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, t)$ ve $u(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, t)$ tam çözüm eğrileri	33
Şekil 3.7	(3.4.10)-(3.4.13) ile verilen iki boyutlu ısı iletim probleminde $x = \frac{\pi}{2}$ ve $0 \leq t \leq 1$ zaman aralığında (a) $\hbar = -1$ için Homotopi Analiz çözümü, (b) $u(x, y, t)$ tam çözümü	34
Şekil 3.8	(3.4.10)-(3.4.13) ile verilen iki boyutlu ısı iletim probleminde $x = \frac{\pi}{2}$ ve $0 \leq t \leq 5$ zaman aralığında (a) $\hbar = -1$ için Homotopi Analiz çözümü, (b) $\hbar = -0.57$ için Homotopi Analiz çözümü, (c) $u(x, y, t)$ tam çözümü	35
Şekil 4.1	(4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ durumunda $u'_{app10}(0.5, 0.1)$ için $\hbar$ eğrisi	39

Şekil 4.2	(4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken kat-sayılı ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ durumunda değişik h değerlerinde $u_{app10}(0.5, t)$ yaklaşık çözüm ve $u(0.5, t)$ tam çözüm eğrileri	39
Şekil 4.3	(4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken kat-sayılı ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ durumunda (a) $h = -1.1$ için Homotopi Analiz çözümü, (b) $u(x, t)$ tam çözümü	40
Şekil 4.4	(4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken kat-sayılı ısı iletim probleminde $u'_{app10}(0.5, 0.1)$ için h eğrileri	41
Şekil 4.5	(4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken kat-sayılı ısı iletim probleminde h değerleri için $u_{app10}(0.5, t)$ Homotopi Analiz çözümleri	41
Şekil 4.6	(4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken kat-sayılı ısı iletim probleminde $h = -1.1$ için Homotopi Analiz çözümleri	42
Şekil 4.7	(4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ durumunda $u'_{app10}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0.1)$ için h eğrisi	47
Şekil 4.8	(4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ durumunda farklı h değerleri için $u_{app10}(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, t)$ Homotopi analiz çözüm ve $u(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, t)$ tam çözüm grafikleri	48
Şekil 4.9	(4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ durumunda (a) $h = -0.96$ için $u_{app10}(\frac{\pi}{2}, y, t)$ yaklaşık çözümü, (b) $u(\frac{\pi}{2}, y, t)$ tam çözümü	48
Şekil 4.10	(4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde $u'_{app10}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0.1)$ için h eğrileri	49
Şekil 4.11	(4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde farklı h değerleri için $u_{app10}(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, t)$ Homotopi Analiz çözüm eğrileri	50
Şekil 4.12	(4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde $h = -0.96$ için $u_{app10}(\frac{\pi}{2}, y, t)$ yaklaşık çözümleri	51

Şekil 4.13 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde $\alpha = 1$ ve $a = 1$ değerlerinde $u_{app4}(0, 0.01)$ için $\hbar$ eğrisi	54
Şekil 4.14 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde $\alpha = 1$ ve $a = 1$ durumunda farklı $\hbar$ değerleri için $u_{app4}(0, t)$ Homotopi Analiz çözüm ve $u(0, t)$ tam çözüm eğrileri	55
Şekil 4.15 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde $\alpha = 1$ ve $a = 1$ değerlerinde (a) $\hbar = -1.003$ için Homotopi Analiz çözümü, (b) $u(x, t)$ tam çözümü	55
Şekil 4.16 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde $a = 1$ değerinde $u_{app4}(0, 0.01)$ için $\hbar$ eğrileri	56
Şekil 4.17 (4.3.1)-(4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde farklı $\hbar$ değerleri için $u_{app4}(0, t)$ Homotopi Analiz çözüm eğrileri	56
Şekil 4.18 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde $a = 1$ ve $\hbar = -1.003$ için Homotopi Analiz çözümü	57
Şekil 4.19 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\alpha, \beta = 1$ durumunda $u_{app3}(0, 0.01)$ için $\hbar$ eğrisi	66
Şekil 4.20 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\alpha, \beta = 1$ durumunda $v_{app3}(0, 0.01)$ için $\hbar$ eğrisi	66
Şekil 4.21 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\alpha, \beta = 1$ durumunda farklı $\hbar$ değerleri için $u_{app3}(0, t)$ Homotopi Analiz çözüm ve $u(0, t)$ tam çözüm eğrileri	67
Şekil 4.22 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\alpha, \beta = 1$ durumunda farklı $\hbar$ değerleri için $v_{app3}(0, t)$ Homotopi Analiz çözüm ve $v(0, t)$ tam çözüm eğrileri	67
Şekil 4.23 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\alpha, \beta = 1$ ve (a) $\hbar = -0.968$ için $u_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümü, (b) $u(x, t)$ tam çözümü	68

Şekil 4.24 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\alpha, \beta = 1$ ve (a) $\hbar = -0.968$ için $v_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümü, (b) $v(x, t)$ tam çözümü	68
Şekil 4.25 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $u_{app3}(0, 0.01)$ için $\hbar$ eğrileri	69
Şekil 4.26 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $v_{app3}(0, 0.01)$ için $\hbar$ eğrileri	69
Şekil 4.27 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde farklı $\hbar$ değerleri için $u_{app3}(0, t)$ Homotopi Analiz çözüm eğrileri	70
Şekil 4.28 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde farklı $\hbar$ değerleri için $v_{app3}(0, t)$ Homotopi Analiz çözüm eğrileri	70
Şekil 4.29 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\hbar = -0.968$ için $u_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümü	71
Şekil 4.30 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\hbar = -0.968$ için $v_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümü	71

TABLolar DİZİNİ

Tablo 3.1 (3.4.1)-(3.4.3) ile verilen bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $\hbar = -1$ için Homotopi Analiz ve tam çözümün karşılaştırılması	30
Tablo 3.2 (3.4.10)-(3.4.13) ile verilen iki boyutlu ısı iletim probleminde $\hbar = -1$ ve $\hbar = -0.57$ için Homotopi Analiz çözümünün tam çözüm ile karşılaştırılması	36
Tablo 4.1 (4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ ve $\hbar = -1.1$ için Homotopi Analiz çözümünün ADM [59], VIM [61] ve tam çözüm ile karşılaştırılması . .	43
Tablo 4.2 (4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.9$ değerlerinde $\hbar = -1.1$ için Homotopi Analiz çözümünün ADM [59] ve VIM [61] ile karşılaştırılması	44
Tablo 4.3 (4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ ve $\hbar = -0.96$ için Homotopi Analiz yöntemi çözümünün tam çözüm ile karşılaştırılması	50
Tablo 4.4 (4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde farklı α değerleri ve $\hbar = -0.96$ için Homotopi Analiz çözümleri	51
Tablo 4.5 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde $\alpha = 1$, $a = 1$, $\hbar = -1.003$ ve $t = 0.01$ zamanı için Homotopi Analiz çözümünün VIM [62], ADM [62], HPM [62] çözümleri ve tam çözüm ile karşılaştırılması	58
Tablo 4.6 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde farklı α değerleri, $a = 1$, $\hbar = -1.003$ ve $t = 0.01$ zamanı için Homotopi Analiz çözümleri	59

Tablo 4.7 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde $\alpha = 1$, $a = 1$, $\hbar = -1.01$ ve $t = 0.05$ zamanı için Homotopi Analiz yöntemi çözümünün tam çözüm ile karşılaştırılması . . .	60
Tablo 4.8 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde farklı α değerleri, $a = 1$, $\hbar = -1.01$ ve $t = 0.05$ zamanı için Homotopi Analiz çözümleri	61
Tablo 4.9 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\alpha, \beta = 1$ ve $\hbar = -0.968$ için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $u_{app3}(x, t)$ ve $v_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin tam çözümler ile karşılaştırılması	72
Tablo 4.10 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde farklı α, β değerleri ve $\hbar = -0.968$ için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $u_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümleri	73
Tablo 4.11 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde farklı α, β değerleri ve $\hbar = -0.968$ için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $v_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümleri	74

1. GİRİŞ

Kesirli hesaplama kavramı ilk olarak 1695 yılında G.W. Leibnitz tarafından L' Hospital'a yöneltilen soru ile ortaya çıkmıştır. Bu soruda Leibnitz "*Tamsayı mertebeli $\frac{d^n y}{dx^n}$ türevi tamsayı mertebeli olmayan türev için genellenebilir mi?*" olmuştur. Daha sonra bu soruyu "*n herhangi bir sayı olabilir mi?*" şeklinde sormuştur. L' Hospital bu soruya "*n, $\frac{1}{2}$ olduğu zaman ne olacak?*" sorusuyla karşılık vermiştir [1–9].

Keyfi mertebeden diferansiyel ve integrasyon kavramı 17. yüzyıldan itibaren Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann, Liouville ve diğer bir çok matematikçinin çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır.

1730 yılında L. Euler kuvvet fonksiyonunun kesirli mertebeden türevi hesaplanırken büyük öneme sahip Gama fonksiyonunu tanımladı.

1819 da S.F. Lacroix kesirli türev konusuna ilk katkı yapan matematikçi olmuştur. m pozitif tamsayı olmak üzere $y = x^m$ ifadesini Gama fonksiyonunu kullanarak n . mertebeden türevini

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \quad (1.0.1)$$

olarak elde etti. Daha sonra S.F. Lacroix (1.0.1) ifadesinde $m = 1$ ve $n = \frac{1}{2}$ alarak x fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}$$

olarak elde etti. Fakat kesirli türev operatörünü uygulamada ilk kullanan S.F. Lacroix değildir. Kesirli hesaplamaları ilk olarak Abel, Tautochrone probleminin formülünden ortaya çıkan bir integral denkleminin çözümünde kesirli hesaplamaları kullanmıştır. Abel' in bu çalışması Liouville' nin bu konu üzerine yoğunlaşmasını sağladı. 1832-1837 yılları arasında Liouville kesirli integral ve kesirli diferansiyel ile ilgili çalışmalar yaptı. Riemann ise ölümünden on yıl sonra 1876 yılında yayınlanan, 1847 de yazmış olduğu yazılarda kesirli integral tanımını verdi. Bu tanım Liouville tanımıyla birleştirilerek çok yaygın hale geldi [1–9].

Grünwald ve Letnikov (1967-1968) kesirli hesaplama için sonlu fark yaklaşımını

kullandı. Daha sonra bu tanım bazı şartlar altında Riemann-Liouville tanımına denk olduğu ispatlandı [1–9].

1967 yılında M.Caputo, Riemann-Liouville tanımına benzer bir şekilde kesirli türevin bir versiyonunu tanımladı. Tamsayı mertebeden türevlerin başlangıç şartları ile verilen kesirli türevlere sahip diferansiyel denklemler için Caputo tarafından verilen yaklaşımın uygunluğundan dolayı bu yaklaşım son yıllarda kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için sıklıkla kullanılmaktadır [1–9].

Son yıllarda bilgisayar teknolojisinin de hızlı gelişimi ile birlikte ortaya çıkan yeni yöntemler lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin bulunmasında oldukça sık kullanılmaya başlanmıştır. Bu yöntemlerden bazıları homojen denge [10–12], F- açılımı [13–16], Hiperbolik Tanjant açılımı [17–19], sine-cosine [20, 21], Jacobi eliptik fonksiyon [22–28], Varyasyonel iterasyon [29–31], (G'/G) -açılım [32–36], Homotopi Perturbasyon [37–39], Exp-fonksiyon [40–43] vb. yöntemler olarak sıralanabilir. Bu çalışmada 1992 de S.J. Liao [44] tarafından önerilen, fen ve mühendislikte ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde güçlü bir yöntem olan, Homotopi Analiz yöntemi gözönüne alınmıştır. Yöntem çalışmanın üçüncü bölümünde ayrıntılı olarak incelenmiş ve bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri araştırılmıştır. Çalışmanın dördüncü bölümünde ise, ele alınan bazı kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri Homotopi Analiz yöntemi yardımıyla elde edilmiştir. Bulunan çözümler, literatürdeki Adomian Ayrıştırma, Varyasyonel İterasyon ve Homotopi Perturbasyon yöntemleri ile elde edilen çözümlerle karşılaştırılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Özel Fonksiyonlar

Bu kısımda sonraki kısımlarda kullanılacak olan bazı özel fonksiyonlar verilecektir. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler teorisinde sıkça rastlanan bu fonksiyonlar; Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonu ve Mellin-Ross fonksiyonlarıdır.

2.1.1 Gama fonksiyonu

Gama fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0 \quad (2.1.1)$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır [1]. Gama fonksiyonuna bazen genelleştirilmiş faktoriyel fonksiyonu da denir.

$x > 0$ olmak üzere Gama fonksiyonunun en çok kullanılan özellikleri

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0$$

$$\Gamma(x) = (x-1)!, \quad x \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

şeklindedir.

x in pozitif değerleri için tanımlanan Gama fonksiyonu,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

özellği kullanılarak negatif x değerleri için $\Gamma(x)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$-1 < x < 0$ ise

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

de $0 < x + 1 < 1$ olacağından ve $x + 1 \in (0, 1)$ deki $\Gamma(x + 1)$ değerleri bilindiğinden $x \in (-1, 0)$ için $\Gamma(x)$ ler bulunabilmektedir.

Benzer şekilde $-2 < x < -1$ ise $0 < x + 2 < 1$ olup

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}$$

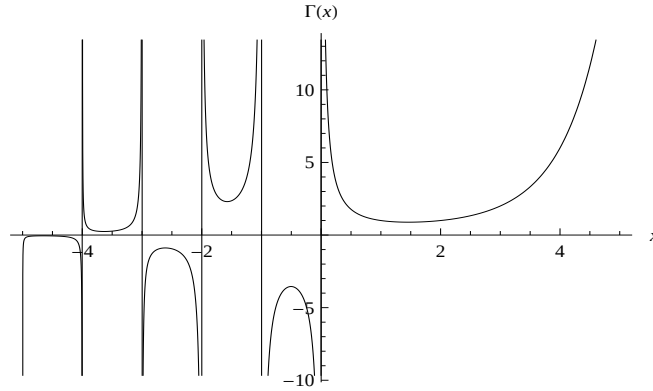
yardımla, $-3 < x < -2$ ise $0 < x + 3 < 1$ olup

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+3)}{x(x+1)(x+2)}$$

yardımla ve bu şekilde devam edilerek $-n < x < -n+1$ ise $0 < x + n < 1$ olup

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}$$

eşitliklerinden $\Gamma(x)$ ler bulunabilirler. Şekil 2.1 den görüldüğü gibi $\Gamma(x)$ fonksiyonu 0 ve negatif tam sayılar için sınırsızdır.



Şekil 2.1 Gama fonksiyonu

Tamamlanmamış Gama fonksiyonu

$$\Gamma^*(v, t) = \frac{1}{\Gamma(v)t^v} \int_0^t e^{-x} x^{v-1} dx, \quad v > 0 \quad (2.1.2)$$

olarak tanımlanır [1].

2.1.2 Beta fonksiyonu

Beta fonksiyonu,

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x > 0, \quad y > 0 \quad (2.1.3)$$

integrali ile tanımlanır. Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasındaki bağıntı

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

biçiminde verilir [1].

2.1.3 Hata fonksiyonu

Hata fonksiyonu,

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbf{R} \quad (2.1.4)$$

olarak tanımlanır. Hata fonksiyonu,

$$\text{erf}(0) = 0$$

$$\text{erf}(\infty) = 1$$

özelliklerine sahiptir. erfc ile gösterilen tamamlayıcı Hata fonksiyonu, Hata fonksiyonu cinsinden

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$$

biçimindedir [1].

2.1.4 Mittag-Leffler fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonunun bir ve iki parametrelili gösterimleri, kuvvet serisi cinsinden

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (2.1.5)$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (2.1.6)$$

olarak tanımlanır. α ve β nın belli değerleri için, Mittag-Leffler fonksiyonunu temel fonksiyonlara indirgenebilir. Örneğin,

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}$$

dir [1].

2.1.5 Mellin-Ross fonksiyonu

$E_t(v, a)$ ile gösterilen Mellin-Ross fonksiyonu, e^{at} üstel fonksiyonunun kesirli integralini alırken kullanılır. Mellin-Ross fonksiyonu tamamlanmamış Gama fonksiyonu yardımıyla

$$E_t(v, a) = t^v e^{at} \Gamma^*(v, at)$$

olarak ve Mittag-Leffler fonksiyonu yardımıyla

$$E_t(v, a) = t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+v+1)} = t^v E_{1,v+1}(at) \quad (2.1.7)$$

olarak tanımlanır [1].

2.2 Kesirli Türev ve İntegral Hesaplamaları

Bu kısımda kesirli türev ve integral hesaplamaları için sıkça kullanılan yaklaşımlar ve bunlar arasındaki ilişkiler verilecektir. Bu yaklaşımlar Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo kesirli mertebeden türev ve integral yaklaşımlarıdır.

2.2.1 Grünwald-Letnikov yaklaşımı

$m, m \leq p < m + 1$ şartını sağlayan bir tamsayı, $f(t)$ fonksiyonu sürekli ve $f^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, m + 1$) türevleri de $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Bu durumda $f(t)$ fonksiyonunun p -inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\binom{p}{r} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-r+1)}{r!}$$

şeklinde alınmıştır.

$f(t)$ fonksiyonu $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun p mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli integrali

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.2.2)$$

biçiminde tanımlanır. Burada

$$\left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] = \frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+r+1)}{r!}$$

dir.

Eğer $f'(t)$ türevi $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli ise o zaman (2.2.2) denkleminin sağ tarafına bir defa kısmi integrasyon uygularsak

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau$$

elde edilir. $f(t)$ fonksiyonu $[a, t]$ kapalı aralığında $m + 1$ defa sürekli diferansiyellenebilir ise o zaman (2.2.2) denkleminde

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

bulunur [2].

Grünwald-Letnikov yaklaşımının özellikleri

Grünwald-Letnikov yaklaşımının önemli özellikleri aşağıdaki gibidir [2].

- Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türev operatörü lineerdir.
- n tamsayı ve $p > 0$ olmak üzere $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ ise

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^p\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = {}_aD_t^{p+n} f(t)$$

dir.

- $0 \leq m < p < m+1$ ve $0 \leq n < q < n+1$ olsun. Eğer $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, r-1; r = \max(n, m))$ ise

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t)$$

dir.

- $0 \leq m < p < m+1$ ve $q < 0$ olsun. Eğer $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, m-1)$

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t)$$

dir.

- $p < 0$ ve q herhangi bir reel sayı olmak üzere

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t)$$

dir.

2.2.2 Riemann-Liouville yaklaşımı

$p > 0$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonu her (a, t) sonlu aralığında sürekli ve integral-
lenebilir olsun. Bu durumda Riemann-Liouville kesirli p mertebeden integrali

$${}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

olarak tanımlanır.

$k - \alpha > 0$ olacak şekilde α sayısını ele alalım. Bu durumda Riemann-Liouville
kesirli $k - \alpha$ mertebeden türevi

$${}_a\mathbf{D}_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, (0 < \alpha \leq 1) \quad (2.2.3)$$

olarak tanımlanır. Bu integralin yakınsak olması için $\alpha > 0$ olmalıdır. (2.2.3) ifadesinde
 $p = k - \alpha$ alınırsa

$$\begin{aligned} {}_a\mathbf{D}_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t - \tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^k}{dt^k} ({}_a\mathbf{D}_t^{-(k-p)} f(t)), (k-1 \leq p < k) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

elde edilir [2].

Riemann-Liouville yaklaşımının özellikleri

Riemann-Liouville yaklaşımının önemli özellikleri aşağıdaki gibidir [2].

- Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev operatörü lineerdir.
- $p > 0, q > 0$ olmak üzere

$${}_a\mathbf{D}_t^{-q} ({}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t)) = {}_a\mathbf{D}_t^{-p} ({}_a\mathbf{D}_t^{-q} f(t)) = {}_a\mathbf{D}_t^{-p-q} f(t)$$

dır.

- $p > 0$ olmak üzere

$${}_a\mathbf{D}_t^p({}_a\mathbf{D}_t^{-p}f(t)) = f(t)$$

dir. Fakat $(k-1 \leq p < k)$ için

$${}_a\mathbf{D}_t^{-p}({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a\mathbf{D}_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}, \quad (2.2.5)$$

dir. Eğer $0 \leq p < 1$ ise (2.2.5) ifadesi

$${}_a\mathbf{D}_t^{-p}({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)) = f(t) - [{}_a\mathbf{D}_t^{p-1} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-1}}{\Gamma(p)}$$

olarak elde edilir.

- $p > 0, q > 0$ olmak üzere

$${}_a\mathbf{D}_t^p({}_a\mathbf{D}_t^{-q} f(t)) = {}_a\mathbf{D}_t^{p-q} f(t) \quad (2.2.6)$$

$${}_a\mathbf{D}_t^{-p}({}_a\mathbf{D}_t^q f(t)) = {}_a\mathbf{D}_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a\mathbf{D}_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}, \quad (0 \leq k-1 \leq q < k)$$

dir.

- n tamsayı olmak üzere eğer $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ ise

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)) = {}_a\mathbf{D}_t^p\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{p+n} f(t)$$

dir.

- $m-1 \leq p < m$ ve $n-1 \leq q < n$ olmak üzere

$${}_a\mathbf{D}_t^p({}_a\mathbf{D}_t^q f(t)) = {}_a\mathbf{D}_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_a\mathbf{D}_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(-p-j+1)} \quad (2.2.7)$$

$${}_a\mathbf{D}_t^q({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)) = {}_a\mathbf{D}_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^m [{}_a\mathbf{D}_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(-q-j+1)} \quad (2.2.8)$$

dir. (2.2.7) ve (2.2.8) denklemlerinin eşit olması için

$$[{}_a\mathbf{D}_t^{p-j} f(t)]_{t=a} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$[{}_a\mathbf{D}_t^{q-j} f(t)]_{t=a} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

şartlarının sağlanması gerekir.

Riemann-Liouville yaklaşımının Grünwald-Letnikov yaklaşımı ile ilişkisi

Eğer $f(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve $m + 1$ defa sürekli diferansiyellenebilir ise her p ($0 \leq m \leq p < m + 1$) için ${}_a\mathbf{D}_t^p f(t)$ Riemann-Liouville kesirli türevi mevcuttur ve Grünwald-Letnikov kesirli türevine eşittir. Gerçekten de Riemann-Liouville kesirli türev tanımında $m + 1$ kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$${}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.2.10) \\ &= {}_aD_t^p f(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak eğer $t \geq a$ için $f(t)$ fonksiyonu $m + 1$ mertebeden sürekli türevlere sahipse o zaman (2.2.1) de verilen Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımı ile (2.2.9) de verilen Riemann-Liouville kesirli türev tanımı birbirine denktir. Bunun yanında (2.2.9) de verilen Riemann-Liouville kesirli türev tanımı $f(t)$ fonksiyonu üzerinde zayıf şartlar gerektirir. Gerçekten de $f(t)$ fonksiyonunun integrallenebilir olması (2.2.9) da verilen integralin varlığı için yeterlidir [2].

Şimdi (2.2.10) denkleminin özel halini düşünelim. $f(t)$ fonksiyonu sürekli ve $f'(t)$, $[a, t]$ aralığında sürekli olsun. O zaman her p ($0 < p < 1$) için Riemann-Liouville kesirli türevi ve Grünwald-Letnikov kesirli türevi mevcut ve

$${}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = {}_aD_t^p f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau$$

olarak yazılır.

$f(t)$ fonksiyonu $m + 1$ mertebeden sürekli türevlere sahip ve $m \leq p < m + 1$ olmak üzere

$$[{}_a\mathbf{D}_t^p f(t)]_{t=a} = 0 \quad (2.2.11)$$

şartı

$$f^{(j)}(a) = 0, (j = 0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (2.2.12)$$

şartına denktir. Gerçekten de (2.2.12) şartı sağlanır ve sonra (2.2.10) de $t \rightarrow a$ alınır (2.2.11) elde edilir. Diğer taraftan (2.2.11) şartı sağlanırsa (2.2.10) in her iki tarafı $(t - a)^{p-j}$ ($j = m - 1, m - 2, \dots, 2, 1, 0$) ile çarpılır ve $t \rightarrow a$ için limit alınır $f^{(m-1)}(a) = 0$, $f^{(m-2)}(a) = 0$, ..., $f''(a) = 0$, $f'(a) = 0$, $f(a) = 0$ elde edilir. Bu da (2.2.12) şartıdır. Böylece

$$[{}_a\mathbf{D}_t^p f(t)]_{t=a} = 0 \Leftrightarrow f^{(j)}(a) = 0, (j = 0, 1, 2, \dots, m - 1)$$

elde edilir [2].

2.2.3 Caputo yaklaşımı

Riemann-Liouville yaklaşımı $t = a$ da Riemann-Liouville kesirli türevinin limit değerlerini içeren başlangıç şartlarını içermektedir. Örneğin;

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha-1} f(t) &= b_1, \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha-2} f(t) &= b_2, \\ &\vdots \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha-n} f(t) &= b_n \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

dir. Burada b_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ dir. Böyle başlangıç koşullarından oluşan başlangıç değer problemi Riemann-Liouville yaklaşımı ile başarıyla çözülebilir. Bu çözümler pratikte kullanışsızdır. Çünkü böyle başlangıç şartlarının fiziksel yorumu mevcut değildir.

Bu sorun Caputo tarafından geliştirilen; $y'(a)$, $y''(a)$, ... gibi tamsayı mertebeden türevlerin $t = a$ noktasındaki limit değerlerini içeren kesirli türevlere sahip diferansiyel denklemler için verilen başlangıç-değer problemlerinin başlangıç şartlarını formülize eden Caputo yaklaşımı ile çözülmüştür. Caputo anlamında kesirli mertebeden türev tanımı, $f(t)$ fonksiyonu n defa sürekli diferansiyellenebilir olmak üzere $n - 1 < \alpha < n$ için

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = D^{\alpha-n} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \tag{2.2.14}$$

olarak Caputo tarafından tanımlanmıştır [2]. $f(t)$ fonksiyonu $\alpha \rightarrow n$ için (2.2.14) de

tanımlanan Caputo kesir mertebeden türevi $f(t)$ fonksiyonunun n tamsayı mertebeden türevi verir. Gerçekten $0 \leq n-1 < \alpha < n$ ve $f(t)$ fonksiyonu her $T > a$ için $[a, T]$ aralığında $n+1$ mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t \frac{f^{(n+1)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n}} \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau = f^{(n)}(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

dir. Böylece Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville yaklaşımlarında olduğu gibi Caputo yaklaşımında da tamsayı mertebeden türevin arasındaki noktalarda Caputo anlamında kesirli türev hesaplanabilir.

Caputo yaklaşımının en büyük avantajı Caputo türevlerinden oluşan kesirli diferansiyel denklem için başlangıç koşullarının tamsayı mertebeden diferansiyel denklemler için verilen başlangıç koşullarıyla benzer durum göstermektedir. Yani $t = a$ da bilinmeyen fonksiyonların tamsayı mertebeden limit değerlerini içermektedir. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerinin Laplace dönüşümleri sırasıyla $t = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-pt} \{ {}_0 \mathbf{D}_t^\alpha f(t) \} dt &= p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k {}_0 \mathbf{D}_t^{\alpha-k-1} f(t)|_{t=0}, \quad (n-1 \leq \alpha < n) \\ \int_0^\infty e^{-pt} \{ {}^C D_t^\alpha f(t) \} dt &= p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 < \alpha \leq n) \end{aligned}$$

dir. Buradan görülüyor ki Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü (2.2.13) tipindeki başlangıç şartlarının kullanımına izin vermektedir. Bunun aksine Caputo türevinin Laplace dönüşümü fiziksel yorumu bilinen tamsayı mertebeden türevlerden oluşan başlangıç değerleri içermektedir.

Riemann-Liouville yaklaşımı ve Caputo yaklaşımı arasındaki başka bir fark ise sabitin Caputo türevi 0, sabitin Riemann-Liouville kesirli türevi a nın sonlu bir değeri için ise 0 a eşit değildir. Yani

$${}_0 \mathbf{D}_t^\alpha A = \frac{At^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

dır. Eğer $f(t)$ fonksiyonu her (a, t) sonlu aralığında sürekli ve integallenebilir; $m, m-1 < \alpha < m$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı $f^{(k)}(t)$, $(k = 1, 2, \dots, m+1)$ türevleride $[a, t]$ aralığında sürekli ve integallenebilir olsun. Bu takdirde $k = 0, 1, \dots, m-1$ için $f^{(k)}(a) = 0$ şartları sağlanırsa

$${}_a\mathbf{D}_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^\alpha f(t)$$

dır [2].

Caputo kesirli türevinin uygulamalarda sıkça kullanılan

$$\begin{aligned} D^\alpha D^{-\alpha} f(t) &= f(t) \\ D^{-\alpha} D^\alpha f(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \end{aligned}$$

özellikleri mevcuttur [2].

2.2.4 Bazı elemanter fonksiyonların kesir mertebeden türevleri ve integralleri

ν bir reel sayı olmak üzere $f(t) = (t-a)^\nu$ fonksiyonunun ${}_a D_t^p f(t)$ Grünwald-Letnikov kesirli türevini bulalım. İlk olarak p nin negatif değerini düşünelim. Yani $p < 0$ olsun. O halde (2.2.2) denkleminde

$${}_a D_t^p f(t) = {}_a D_t^p (t-a)^\nu = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} (\tau-a)^\nu d\tau \quad (2.2.15)$$

elde edilir. Bu integralin yakınsak olması için $\nu > -1$ olmalıdır. (2.2.15) denkleminde $\tau = a + \varepsilon(t-a)$ değişken değiştirmesi yapılırsa (2.1.3) ifadesinde verilen Beta fonksiyonu tanımından

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p (t-a)^\nu &= \frac{(t-a)^{\nu-p}}{\Gamma(-p)} \int_0^1 \varepsilon^\nu (1-\varepsilon)^{-p-1} d\varepsilon \\ &= \frac{(t-a)^{\nu-p}}{\Gamma(-p)} \beta(-p, \nu+1) \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(-p+\nu+1)} (t-a)^{\nu-p}, (p < 0, \nu > -1) \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

olarak elde edilir. Şimdi $0 \leq m \leq p < m+1$ durumunu düşünelim. (2.2.1) ile verilen kesirli türev formülü kullanılırsa

$${}_a D_t^p (t-a)^\nu = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} \frac{d^{m+1}(\tau-a)^\nu}{d\tau^{m+1}} d\tau \quad (2.2.17)$$

elde edilir. (2.2.17) integralinin yakınsak olması için $v > m$ olmalıdır.

$$\frac{d^{m+1}(\tau-a)^v}{d\tau^{m+1}} = v(v-1)(v-2)\dots(v-m)(\tau-a)^{v-m-1} = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)}(\tau-a)^{v-m-1}$$

olduğu göz önüne alınır ve $\tau = a + \xi(t-a)$ değişken değiştirmesi yapılırsa (2.2.17) denklemi

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p(t-a)^v &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m}(\tau-a)^{v-m-1} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(v+1)\beta(-p+m+1, v-m)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)} (t-a)^{v-p} \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(-p+v+1)} (t-a)^{v-p}, (0 \leq m \leq p < m+1, v > m) \quad (2.2.18) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak (2.2.16) ve (2.2.18) denklemlerinden $f(t) = (t-a)^v$ fonksiyonunun Grünwald-Letnikov kesirli türevi ($0 \leq m \leq p < m+1, v > m$ veya $p < 0, v > -1$) olmak üzere

$${}_aD_t^p(t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(-p+v+1)} (t-a)^{v-p},$$

olarak elde edilir.

$f(t) = t^2$ fonksiyonun Grünwald-Letnikov kesirli türevini hesaplayalım. $m \leq \frac{1}{2} < m+1$ olduğundan $m = 0$ olmalıdır. Grünwald-Letnikov kesirli türev formülünden,

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{\frac{1}{2}} f(t) &= \sum_{k=0}^0 \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\frac{1}{2}+k}}{\Gamma(-\frac{1}{2}+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2}+0+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}+0} f^{(0+1)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{f^{(0)}(a)(t-a)^{-\frac{1}{2}+0}}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} f'(\tau) d\tau \\ &= \frac{a^2(t-a)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} 2\tau d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{8t^2 - a^2 - 4at}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Şimdi v bir reel sayı olmak üzere $f(t) = (t-a)^v$ fonksiyonunun ${}_aD_t^p f(t)$ Riemann-Liouville kesirli türevini bulalım. Varsayalım ki $n-1 \leq p \leq n$ olsun. Bu durumda (2.2.4)

Riemann-Liouville kesirli türev tanımından

$${}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n}({}_a\mathbf{D}_t^{-(n-p)} f(t)), \quad (n-1 \leq p < n)$$

olarak yazılır. $f(t)$ fonksiyonunun $\alpha = n - p$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli integralini alırsak

$${}_a\mathbf{D}_t^{-\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu+\alpha)}(t-a)^{\nu+\alpha}$$

elde edilir. O halde

$${}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-p)}(t-a)^{\nu-p}$$

elde edilir. Burada $f(t)$ fonksiyonunun integrallenebilir olması için $\nu > -1$ olmalıdır.

$f(t) = t^2$ fonksiyonunun $p = \frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville türevini hesaplayalım. $m-1 \leq \frac{1}{2} < m$ olduğundan $m = 1$ olmalıdır. Riemann-Liouville kesirli türev formülünden,

$$\begin{aligned} {}_a\mathbf{D}_t^{\frac{1}{2}} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{1-\frac{1}{2}-1} \tau^2 d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^2 d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^{t-a} (t-u)^2 u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{8t^2 - a^2 - 4at}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

bulunur.

Özel olarak $a = 0$ seçelim.

$n-1 \leq p < n$, $\nu \geq 0$ olmak üzere kesirli mertebeden ${}_0\mathbf{D}_t^p t^\nu$ türevini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} {}_0\mathbf{D}_t^p f(t) &= D^n \left[{}_0\mathbf{D}_t^{-(n-p)} f(t) \right] \\ &= D^n \left[{}_0\mathbf{D}_t^{-(n-p)} t^\nu \right] \\ &= D^n \left[\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n-p+\nu+1)} t^{n-p+\nu} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(-p+\nu+1)} t^{\nu-p} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Özel olarak $p = \frac{1}{2}$ seçilirse t^0 , t ve t^2 fonksiyonlarının $\frac{1}{2}$ mertebeden türevleri sırasıyla

$${}_0\mathbf{D}_t^{\frac{1}{2}}t^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

$${}_0\mathbf{D}_t^{\frac{1}{2}}t^1 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}t^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

$${}_0\mathbf{D}_t^{\frac{1}{2}}t^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})}t^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{t^3}{\pi}}$$

şeklindedir.

$p > 0$, $v > -1$ olmak üzere ${}_0\mathbf{D}_t^{-p}t^v$ kesirli integralini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-p}t^v &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} \tau^v d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{p-1} t^{p-1} \tau^v d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1-u)^{p-1} t^{p-1} (tu)^v t du \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} t^{v+p} \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^v du \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} t^{v+p} \beta(v+1, p) \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(p+v+1)} t^{v+p} \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

elde edilir. Burada $t > 0$ dır. Böylece k sabitinin kesirli integrali (2.2.19) formülünden

$${}_0D_t^{-p}k = \frac{k}{\Gamma(p+1)} t^p$$

olarak elde edilir. Eğer özel olarak $p = \frac{1}{2}$ seçilirse

$${}_0D_t^{-\frac{1}{2}}t^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})}t^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

$${}_0D_t^{-\frac{1}{2}}t^1 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}t^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{t^3}{\pi}}$$

$${}_0D_t^{-\frac{1}{2}}t^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})}t^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{t^5}{\pi}}$$

olarak elde edilir.

Yukarıda hesaplanan kesirli mertebeden türev ve integralleri bulmak oldukça basitti. Üstel, sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının kesirli mertebeden türev ve integrallerini elde etmek biraz daha karmaşıktır.

$f(t) = e^{at}$ alırsak

$${}_0D_t^{-p} e^{at} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} e^{a\tau} d\tau, \quad p > 0 \quad (2.2.20)$$

olur. Burada $x = t - \tau$ dönüşümü yapılırsa (2.2.20) denklemi

$${}_0D_t^{-p} e^{at} = \frac{e^{at}}{\Gamma(p)} \int_0^t x^{p-1} e^{-ax} dx, \quad p > 0 \quad (2.2.21)$$

olarak elde edilir. (2.1.2) de verilen tamamlanmamış Gama fonksiyonu ve (2.1.7) de verilen Mellin-Ross fonksiyonu tanımlarından, (2.2.21) denklemi

$${}_0D_t^{-p} e^{at} = t^p e^{at} \Gamma^*(p, at) = E_t(p, a) = t^p E_{1,p+1}(at)$$

olarak elde edilir. Benzer olarak kesirli integral tanımında $\xi = t - \tau$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-p} \cos(at) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t \xi^{p-1} \cos[a(t-\xi)] d\xi = C_t(p, a), \quad p > 0 \\ {}_0D_t^{-p} \sin(at) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t \xi^{p-1} \sin[a(t-\xi)] d\xi = S_t(p, a), \quad p > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $p = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-\frac{1}{2}} e^{at} &= E_t\left(\frac{1}{2}, a\right) = a^{-\frac{1}{2}} e^{at} \operatorname{erf}(at)^{\frac{1}{2}} \\ {}_0D_t^{-\frac{1}{2}} \cos(at) &= C_t\left(\frac{1}{2}, a\right) = \sqrt{\frac{2}{a}} [C(x) \cos(at) + S(x) \sin(at)] \\ {}_0D_t^{-\frac{1}{2}} \sin(at) &= S_t\left(\frac{1}{2}, a\right) = \sqrt{\frac{2}{a}} [C(x) \sin(at) - S(x) \cos(at)] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $x = \sqrt{\frac{2at}{\pi}}$ olmak üzere

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$$

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$$

dir. Bazı durumlarda trigonometrik fonksiyonların kesirli hesaplamasını yaparken temel trigonometrik eşitlikler kullanılır. Örneğin

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

eşitliği kullanılırsa

$${}_0D_t^{-p} \cos^2(at) = \frac{t^v}{2\Gamma(p+1)} + \frac{1}{2}C_t(p, 2a)$$

$${}_0D_t^{-p} \sin^2(at) = \frac{t^v}{2\Gamma(p+1)} - \frac{1}{2}C_t(p, 2a)$$

olarak elde edilir. $n-1 \leq p < n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}_0D_t^p e^{at} &= D^n [{}_0D_t^{-(n-p)} e^{at}] \\ &= D^n [E_t(n-p, a)] \\ &= E_t(n-p-n, a) \\ &= E_t(-p, a) \end{aligned}$$

bulunur. Özel olarak $p = \frac{1}{2}$ ve $a = 1$ alınırsa

$${}_0D_t^{\frac{1}{2}} e^t = t^{-\frac{1}{2}} E_{1, \frac{1}{2}}(t)$$

elde edilir. Benzer olarak

$${}_0D_t^p \cos(at) = C_t(-p, a)$$

$${}_0D_t^p \sin(at) = S_t(-p, a)$$

olur.

3. HOMOTOPİ ANALİZ YÖNTEMİ

Bu bölümde, verilen genel bir lineer olmayan diferansiyel denkleme Homotopi Analiz yönteminin sistematik olarak nasıl uygulandığı verildikten sonra bir ve iki boyutlu ısı iletim problemlerinin yaklaşık çözümleri Homotopi Analiz yöntemi ile bulunarak tam çözümlerle karşılaştırıldı.

Lineer olmayan denklemlerin tam çözümünü bulmak bazen oldukça zor bazende imkansızdır. 1992 yılında, Shijun Liao homotopi kavramını kullanarak lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için Homotopi Analiz yöntemi olarak adlandırılan yeni bir yöntem verdi. Son yıllarda birçok matematikçi tarafından çeşitli mühendislik ve fizik problemi bu yöntemle başarılı şekilde çözülmüştür [45–56] . Homotopi Analiz yöntemi; cebirsel denklemler, adi ve kısmi diferansiyel denklemler, integro-diferansiyel denklemler gibi birçok değişik tipteki lineer olmayan denklemlerin seri çözümlerini elde etmek için kullanılan genel bir nümerik yaklaşımdır. Homotopi Analiz yöntemi, topolojinin temel kavramlarından biri olan homotopi kavramı üzerine kurulmuştur. Yöntemin önemli bir avantajı elde edilen çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesi, kullanılan yardımcı parametreler sayesinde kontrol edilebilir olmasıdır. Yöntemin esasında problemin başlangıç yaklaşımından tam çözümüne götüren sürekli bir dönüşüm bir yardımcı lineer operatör yardımıyla oluşturulur. Böylece Homotopi Analiz yöntemi yardımıyla lineer olmayan problem, daha basit çözülebilen sonsuz sayıda lineer alt probleme dönüştürülür.

Tanım 1. X ve Y topolojik uzayları arasındaki $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümleri arasında her $x \in X$ için $h(x, 0) = f(x)$ ve $h(x, 1) = g(x)$ olacak şekilde $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşümü varsa f ve g ye homotopiktir denir ve $f \simeq g$ ile gösterilir. h dönüşümüne f ve g arasında homotopidir denir [57]. Yani

$$h(x, q) = (1 - q)f(x) + qg(x)$$

$f(x)$ ve $g(x)$ dönüşümleri arasında bir homotopi oluşturur. Burada q parametresine homotopi parametresi veya gömme parametresi denir.

3.1 Sıfırıncı-Derece Deformasyon Denklemi

$\mathcal{N}$ lineer olmayan bir operatör, $u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyon, x ve t sırasıyla konum ve zaman değişkenleri olmak üzere

$$\mathcal{N}[u(x, t)] = 0 \quad (3.1.1)$$

lineer olmayan genel bir diferansiyel denklemi gözönüne alalım.

$u_0(x, t)$ bir başlangıç yaklaşımı, $\hbar$ sıfırdan farklı bir yardımcı parametre, $H(x, t) \neq 0$ bir yardımcı fonksiyon ve $\mathcal{L}$ ise

$$f(x, t) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}[f(x, t)] = 0 \quad (3.1.2)$$

şartını sağlayan bir yardımcı lineer operatör olsun. $q \in [0, 1]$ gömme parametresi olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[\Phi(x, t; q); u_0(x, t), H(x, t), \hbar, q] = \\ (1 - q)\{\mathcal{L}[\Phi(x, t; q) - u_0(x, t)]\} - q\hbar H(x, t)\mathcal{N}[\Phi(x, t; q)] \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

homotopisi oluşturulur. $\hbar$ yardımcı parametresi ve $H(x, t)$ fonksiyonu Homotopi Analiz yönteminde önemli rol oynamaktadır. Yöntemin en önemli avantajlarından biri; $u_0(x, t)$ başlangıç tahminini, $\mathcal{L}$ yardımcı lineer operatörünü, $\hbar$ parametresini ve $H(x, t)$ fonksiyonunu seçme serbestliğinin bulunmasıdır.

(3.1.3) homotopisinin sıfır alınmasıyla, yani

$$\mathcal{H}[\Phi(x, t; q); u_0(x, t), H(x, t), \hbar, q] = 0$$

seçimi ile

$$(1 - q)\{\mathcal{L}[\Phi(x, t; q) - u_0(x, t)]\} = q\hbar H(x, t)\mathcal{N}[\Phi(x, t; q)] \quad (3.1.4)$$

sıfırıncı-derece deformasyon denklemi elde edilir.

$q = 0$ alınırsa, (3.1.4) sıfırıncı-derece deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}[\Phi(x, t; 0) - u_0(x, t)] = 0 \quad (3.1.5)$$

haline gelir. (3.1.5) de (3.1.2) özelliğinin kullanılmasıyla

$$\Phi(x, t; 0) = u_0(x, t) \quad (3.1.6)$$

elde edilir. $q = 1$ alınır, $\hbar \neq 0$ ve $H(x, t) \neq 0$ olduğu için (3.1.4) sıfırıncı-derece deformasyon denklemi

$$\mathcal{N}[\Phi(x, t; 1)] = 0 \quad (3.1.7)$$

haline gelir. Açık olarak (3.1.7) ve (3.1.1) den

$$\Phi(x, t; 1) = u(x, t) \quad (3.1.8)$$

elde edilir. (3.1.6) ve (3.1.8) denklemlerine göre q parametresi 0 dan 1'e artarken $\Phi(x, t; q)$, $u_0(x, t)$ başlangıç koşulundan $u(x, t)$ tam çözümüne değişir. Bu tip bir değişime Homotopi'de deformasyon denir.

$u_0^{[m]}$ ile tanımlanan

$$u_0^{[m]}(x, t) = \left. \frac{\partial^m \Phi(x, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}$$

ifadesine m . derece deformasyon türevi adı verilir. $\Phi(x, t; q)$, q ya göre Taylor serisine açılırsa

$$\Phi(x, t; q) = \Phi(x, t; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_0^{[m]}(x, t)}{m!} q^m \quad (3.1.9)$$

elde edilir. Burada

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Phi(x, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} = D_m(\Phi) \quad (3.1.10)$$

olarak alınır ve (3.1.6) özelliği kullanılırsa, $\Phi(x, t; q)$ nin (3.1.9) kuvvet serisi

$$\Phi(x, t; q) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x, t) q^m \quad (3.1.11)$$

olarak yazılır. (3.1.10) ifadesindeki $D_m(\Phi)$ 'ye, Φ ' nin m . dereceden homotopi türevi denir ve (3.1.11) serisi, homotopi serisi olarak adlandırılır [56].

(3.1.4) sıfırıncı-derece deformasyon denkleminde; $u_0(x, t)$ başlangıç şartı, $\mathcal{L}$ operatörü, $H(x, t)$ fonksiyonu ve $\hbar$ parametresi aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde seçilir:

1. Her $q \in [0, 1]$ için $\Phi(x, t; q)$, (3.1.4) sıfırcı-derece deformasyon denkleminin çözümüdür.
2. $m = 1, 2, 3, \dots$ için $u_0^{[m]}(x, t)$ deformasyon türevi mevcuttur.
3. $\Phi(x, t; q)$ 'nin (3.1.11) kuvvet serisi $q = 1$ de yakınsaktır.

(3.1.8) ve (3.1.11) eşitliklerinden ve yukarıdaki varsayımlar altında

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x, t) \quad (3.1.12)$$

seri çözümü elde edilir [58].

3.2 Homotopi Türevinin Özellikleri

Teorem 3.2.1. $m \geq 0$ ve $k \geq 1$ pozitif tam sayılar olmak üzere

$$\phi = \sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i$$

homotopi serisi için

$$D_m(\phi^k) = \sum_{r_1=0}^m u_{m-r_1} \sum_{r_2=0}^{r_1} u_{r_1-r_2} \sum_{r_3=0}^{r_2} u_{r_2-r_3} \dots \sum_{r_{k-2}=0}^{r_{k-3}} u_{r_{k-3}-r_{k-2}} \sum_{r_{k-1}=0}^{r_{k-2}} u_{r_{k-2}-r_{k-1}} u_{r_{k-1}}$$

ve

$$D_m(\phi^{k+1}) = \sum_{j=0}^m u_{m-j} D_j(\phi^k) = \sum_{j=0}^m u_j D_{m-j}(\phi^k)$$

dir [54].

İspat. k ya göre tümevarımla ispatlayalım. $k = 2$ için

$$D_m(\phi^2) = \sum_{j=0}^m u_{m-j} u_j$$

elde edilir. $\phi^{k+1} = \phi^k \phi$ alınır ve çarpımın türevi için Leibnitz kuralı kullanılırsa

$$(\phi^{k+1})^{(m)} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (\phi^k)^{(j)} \phi^{(m-j)}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
D_m(\phi^{k+1}) &= \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (\phi^k)^{(j)} \phi^{(m-j)} \right)_{q=0} \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (j! D_j(\phi^k)) (m-j)! u_{m-j} \\
&= \sum_{j=0}^m u_{m-j} D_j(\phi^k)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{j=0}^m u_{m-j} D_j(\phi^k) = \sum_{j=0}^m u_j D_{m-j}(\phi^k)$$

olduğundan ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 3.2.1. Teorem 3.2.1 den

$$D_m(\phi^{k-1} \phi_x) = \sum_{r_1=0}^m u_{m-r_1} \sum_{r_2=0}^{r_1} u_{r_1-r_2} \sum_{r_3=0}^{r_2} u_{r_2-r_3} \dots \sum_{r_{k-2}=0}^{r_{k-3}} u_{r_{k-3}-r_{k-2}} \sum_{r_{k-1}=0}^{r_{k-2}} u_{r_{k-2}-r_{k-1}} (u_{r_{k-1}})_x$$

elde edilir [54].

3.3 Yüksek-Derece Deformasyon Denklemi

$\vec{u}_n = \{u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)\}$ vektörü tanımlansın. (3.1.10) tanımına göre, $u_m(x, t)$ değerleri (3.1.4) sıfıncı-derece deformasyon denkleminde türetilebilir. (3.1.4) sıfıncı- derece deformasyon denkleminde q gömme parametresine göre m kez türev alındıktan sonra $m!$ ile bölünür ve son olarak da $q = 0$ alınırsa, m . derece deformasyon denklemi olarak adlandırılan

$$\mathcal{L}[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar H(x, t) R_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (3.3.1)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \text{ ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

ve

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\Phi(x, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (3.3.3)$$

olarak tanımlıdır. (3.3.3) denkleminde (3.1.11) kullanılırsa, (3.3.3) ifadesi

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \mathcal{N} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x,t) q^n \right] \right\} \Big|_{q=0}$$

olarak yazılır.

Verilen herhangi bir lineer olmayan $\mathcal{N}$ operatörü için (3.3.1) yüksek-derece deformasyon denklemi, (3.3.3) ile kolayca elde edilen $R_m(\vec{u}_{m-1})$ terimi ve $\mathcal{L}$ yardımcı lineer operatörü ile oluşturulur. (3.3.3) tanımına göre, (3.3.1) yüksek-derece deformasyon denkleminin sağ tarafı sadece u_{m-1} 'e bağlı olduğundan iteratif olarak çözülerek $u_1(x,t), u_2(x,t), \dots$ değerleri bulunur. $u(x,t)$ 'nin m . yaklaşımı

$$\sum_{k=0}^m u_k(x,t) \quad (3.3.4)$$

serisi ile verilir [58].

Liao [58], (3.1.12) çözüm serisinin yeterince geniş bölgede hızlı yakınsamasını sağlamak için $\hbar$ yardımcı parametresinin seçimi ile ilgili olarak, $\hbar$ parametresini bir bağımsız değişken olarak gözönüne alınarak $\hbar$ eğrilerinin çizimini önermiştir. Örneğin,

$$\gamma = u_{tt}(x,t)|_{x=0,t=0}$$

ifadesini ele alalım. Burada, γ , $\hbar$ 'nın bir fonksiyonu olduğundan $\gamma \sim \hbar$ eğrisi çizilebilir. Farklı $\hbar$ değerlerinde γ için verilen bütün yakınsak seriler, alınan terim sayısına bağlı olarak tam çözüme yakınsar. Bu yüzden $\gamma \sim \hbar$ eğrisinin grafiğinde eğrinin bir kısmı $\hbar$ eksenine paralel bir doğru parçası olarak görülür. Bu paralel doğru parçasına karşı gelen $\hbar$ değerlerinin oluşturduğu aralık serinin yakınsak olduğu bölgedir. Bu bölgeye $\hbar$ 'nın geçerlilik bölgesi denir ve $R_{\hbar}$ ile gösterilir. Gözönüne alınan probleme göre, seri çözümünden $\hbar$ 'ya bağlı bir fonksiyon elde etmek için türevin mertebesi ve hangi değişkene göre türev alınacağı farklılık gösterir. Eğer $\hbar$ yerine $\hbar$ 'nın geçerli bölgesinden herhangi bir değer konursa Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen seri çözümü yakınsak olur [58].

3.4 Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulamalar

Yöntemin kısmi diferansiyel denklemlere uygulamalarını göstermek için bu kısımda, değişik başlangıç koşulları ile verilen kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri Homotopi Analiz yöntemi ile araştırıldı.

3.4.1 Bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim denklemi

İlk örnek olarak,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (3.4.1)$$

bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim denklemini

$$u(x, 0) = x^2 \quad (3.4.2)$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = e^t \quad (3.4.3)$$

sınır koşulları ile göz önüne alalım. Problemin analitik çözümü

$$u(x, t) = x^2 e^t \quad (3.4.4)$$

dir [59].

Yaklaşık çözümün bulunmasında c integral sabiti olmak üzere, $\mathcal{L}[c] = 0$ olacak şekilde

$$\mathcal{L}[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t}$$

lineer operatörünü seçelim. (3.4.1) denkleminde $\mathcal{N}[\phi(x, t; q)]$ operatörü

$$\mathcal{N}[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} - \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial x^2}$$

olarak tanımlanır. $H(x, t) = 1$ seçilmesiyle sıfırıncı-derece deformasyon denklemi

$$(1 - q)\mathcal{L}[\phi(x, t; q) - u_0(x, t)] = q\hbar\mathcal{N}[\phi(x, t; q)] \quad (3.4.5)$$

ve

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{\partial u_{m-1}(x,t)}{\partial t} - \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 u_{m-1}(x,t)}{\partial x^2}$$

olmak üzere m . derece deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (3.4.6)$$

olur. Burada $\vec{u}_{m-1} = \{u_0(x,t), u_1(x,t), \dots, u_{m-1}(x,t)\}$ dir. $m \geq 1$ için (3.4.6) m . derece deformasyon denkleminde

$$u_m(x,t) = \chi_m u_{m-1}(x,t) + \hbar \mathcal{L}^{-1}[R_m(\vec{u}_{m-1})] \quad (3.4.7)$$

yazılabilir. (3.4.2) başlangıç koşulunun kullanılmasıyla, (3.4.7) iterasyonundan sırasıyla $m = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= x^2 \\ u_1(x,t) &= -\hbar t x^2 \\ u_2(x,t) &= -\hbar(1+\hbar)t x^2 + \frac{1}{2}\hbar^2 t^2 x^2 \\ u_3(x,t) &= -\hbar(1+\hbar)^2 t x^2 + \hbar^2(1+\hbar)t^2 x^2 - \frac{1}{6}\hbar^3 t^3 x^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

terimleri elde edilir. Böylece Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen seri çözümü (3.1.12) eşitliğinden

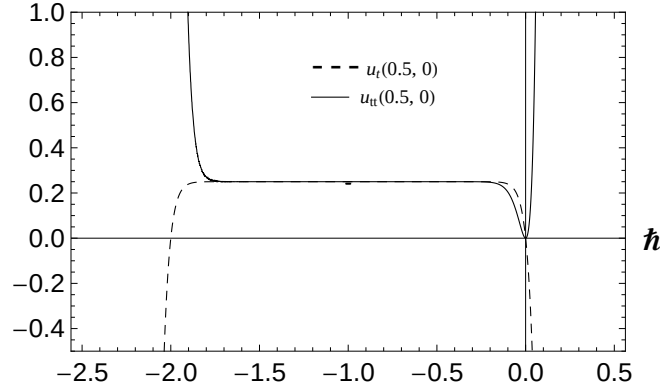
$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \dots \quad (3.4.8)$$

şeklinde yazılabilir.

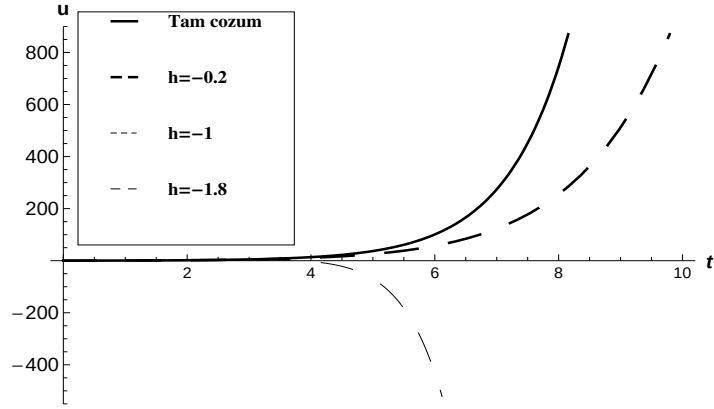
Hesaplamalar Mathematica yardımıyla ilk 30 terim için yapılarak

$$u_{app30}(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \dots + u_{30}(x,t) \quad (3.4.9)$$

yaklaşık çözümü elde edildi. Bu çözüm yakınsak olacak şekilde $\hbar$ yardımcı parametresinin uygun aralığını belirlemek için kullanılan $\hbar$ eğrisi Şekil 3.1 de verildi. Şekil 3.1 incelendiğinde seri çözümünün yaklaşık olarak $-1.8 \leq \hbar \leq -0.2$ aralığı içerisinde seçilen $\hbar$ değerleri için yakınsak sonuçlar verdiği görülür.

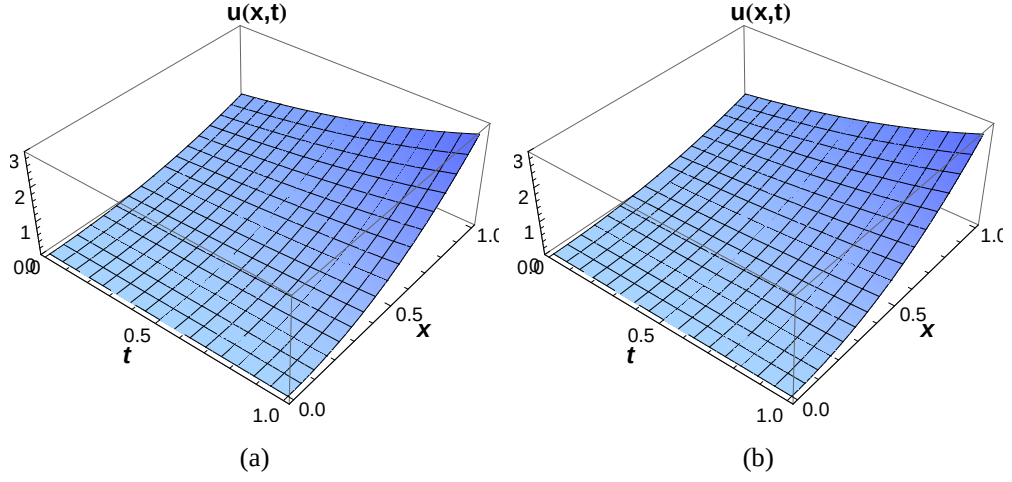


Şekil 3.1 (3.4.1)-(3.4.3) ile verilen bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde h eğrileri

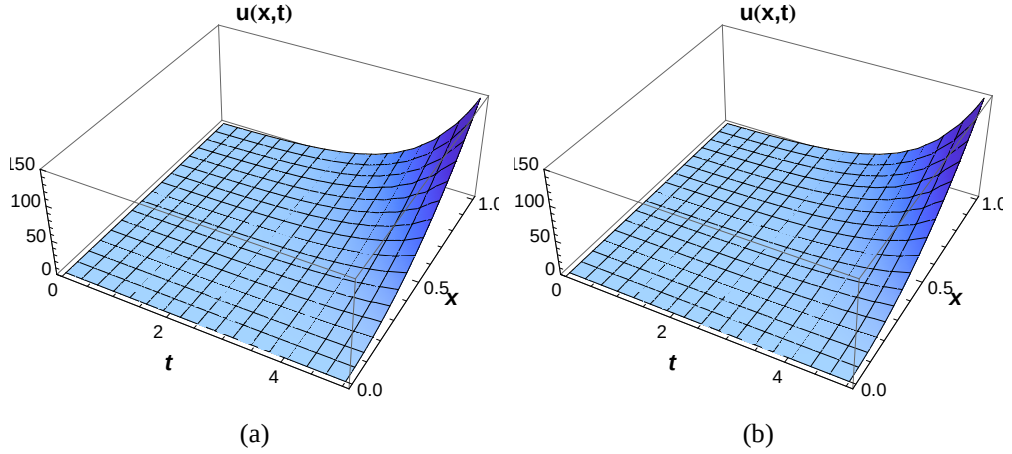


Şekil 3.2 (3.4.1)-(3.4.3) ile verilen bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde değişik h değerleri için $u_{app30}(0.5, t)$ yaklaşık çözüm ve $u(0.5, t)$ tam çözüm eğrileri

Şekil 3.2 de farklı h değerleri için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümler ve problemin tam çözümü gösterildi. Grafikten de açıkça görüldüğü gibi serinin yakınsaklık aralığı her ne kadar $-1.8 \leq h \leq -0.2$ olarak tespit edilse de aralığın uç noktalarındaki değerler bu aralığın içine düşmüş olmasına rağmen Homotopi Analiz yöntemi ile ilk 30 terime kadar seri terimlerinin hesaplanması t 'nin artan değerleri için istenilen sonuçlardan uzaklaştıkları, seçtiğimiz $h = -1$ için ise tam çözüme oldukça yakın olduğu görüldü.



Şekil 3.3 (3.4.1)-(3.4.3) ile verilen bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $0 \leq t \leq 1$ zaman aralığında (a) $h = -1$ için Homotopi Analiz çözümü, (b) $u(x,t)$ tam çözümü



Şekil 3.4 (3.4.1)-(3.4.3) ile verilen bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $0 \leq t \leq 5$ zaman aralığında (a) $h = -1$ için Homotopi Analiz çözümü, (b) $u(x,t)$ tam çözümü

Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 de sırasıyla $0 \leq t \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 5$ zaman aralıklarında 30. yaklaşımda elde edilen $u_{app30}(x,t)$ yaklaşık ve $u(x,t)$ tam çözüm yüzeyleri verildi. Yüzeyler incelendiğinde $h = -1$ için bulunan çözümler ile tam çözümlerin uyumlu olduğu görülmektedir. Tablo 3.1 de $h = -1$ için $u_{app30}(x,t)$ yaklaşık ve (3.4.4) ile verilen $u(x,t)$ tam çözüm karşılaştırıldı.

Tablo 3.1 (3.4.1)-(3.4.3) ile verilen bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $\hbar = -1$ için Homotopi Analiz ve tam çözümün karşılaştırılması

t	x	$u_{app30}(x, t)$	$u(x, t)$	Mutlak Hata
0.5	0.3	0.14838	0.14838	2.776×10^{-17}
	0.6	0.59354	0.59354	1.110×10^{-16}
	0.9	1.33546	1.33546	0
1.0	0.3	0.24465	0.24465	0
	0.6	0.97858	0.97858	0
	0.9	2.20181	2.20181	0
1.5	0.3	0.40335	0.40335	5.551×10^{-17}
	0.6	1.61341	1.61341	2.220×10^{-16}
	0.9	3.63017	3.63017	4.481×10^{-16}
2.0	0.3	0.66502	0.66502	1.110×10^{-16}
	0.6	2.66006	2.66006	4.441×10^{-16}
	0.9	5.98514	5.98514	0
3.0	0.3	1.80770	1.80770	2.220×10^{-16}
	0.6	7.23079	7.23079	8.882×10^{-16}
	0.9	16.26928	16.26928	0
4.0	0.3	4.91383	4.91383	0
	0.6	19.65533	19.65533	0
	0.9	44.22450	44.22450	0
5.0	0.3	13.35718	13.35718	5.862×10^{-14}
	0.6	53.42874	53.42874	2.345×10^{-13}
	0.9	120.21467	120.21467	5.542×10^{-13}

3.4.2 İki boyutlu ısı iletim denklemi

İkinci örnek olarak,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x, y < 2\pi, \quad t > 0 \quad (3.4.10)$$

iki boyutlu lineer ısı iletim denklemini

$$u(x, y, 0) = \sin x \sin y \quad (3.4.11)$$

başlangıç ve

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(2\pi, y, t) = 0 \quad (3.4.12)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, 2\pi, t) = 0 \quad (3.4.13)$$

sınır koşulları ile göz önüne alalım. Problemin analitik çözümü

$$u(x, y, t) = e^{-2t} \sin x \sin y \quad (3.4.14)$$

dir [59].

Yaklaşık çözümü Homotopi Analiz yöntemi ile bulmak için, c integral sabiti olmak üzere $\mathcal{L}[c] = 0$ olacak şekilde

$$\mathcal{L}[\phi(x, y, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, y, t; q)}{\partial t}$$

lineer operatörünü seçelim. (3.4.10) denkleminde

$$\mathcal{N}[\phi(x, y, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, y, t; q)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi(x, y, t; q)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi(x, y, t; q)}{\partial y^2}$$

olarak tanımlanır. $H(x, y, t) = 1$ seçilirse sıfırıncı-derece deformasyon denklemi

$$(1 - q)\mathcal{L}[\phi(x, y, t; q) - u_0(x, y, t)] = q\hbar\mathcal{N}[\phi(x, y, t; q)] \quad (3.4.15)$$

ve

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{\partial u_{m-1}(x, y, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_{m-1}(x, y, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}(x, y, t)}{\partial y^2}$$

olmak üzere m . derece deformasyon denklemi

$$\mathcal{L}[u_m(x, y, t) - \chi_m u_{m-1}(x, y, t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (3.4.16)$$

olur. $m \geq 1$ için (3.4.16) m . derece deformasyon denkleminde

$$u_m(x, y, t) = \chi_m u_{m-1}(x, y, t) + \hbar \mathcal{L}^{-1}[R_m(\vec{u}_{m-1})] \quad (3.4.17)$$

yazılabilir. (3.4.11) başlangıç koşulunun kullanılmasıyla, (3.4.17) iterasyonundan sırasıyla $m = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= \sin x \sin y \\ u_1(x, y, t) &= 2\hbar t \sin x \sin y \\ u_2(x, y, t) &= 2\hbar t \sin x \sin y + 2\hbar^2 t \sin x \sin y + 2\hbar^2 t^2 \sin x \sin y \\ u_3(x, y, t) &= 2\hbar t \sin x \sin y + \frac{2}{3}\hbar^2 t(3(1+t) + \hbar(3+6t+2t^2)) \sin x \sin y \\ &\quad + \hbar(2\hbar t \sin x \sin y + 2\hbar^2 t^2 \sin x \sin y) \\ &\vdots \end{aligned}$$

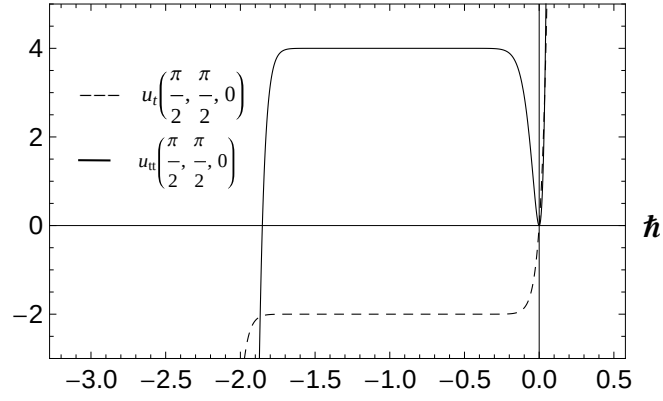
elde edilir.

Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen ilk 25 terim için seri çözümü

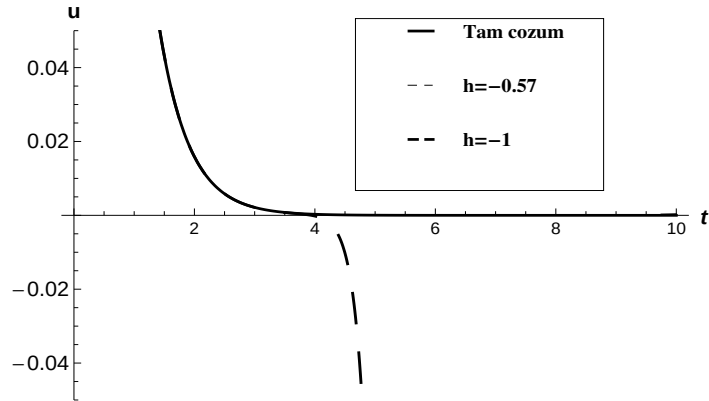
$$u_{app25}(x, y, t) = u_0(x, y, t) + u_1(x, y, t) + u_2(x, y, t) + \dots + u_{25}(x, y, t)$$

Mathematica yardımıyla hesaplandı. Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $u_{app25}(x, y, t)$ yaklaşık çözümünün yakınsaklık aralığının belirlenmesi için $\hbar$ eğrisi Şekil 3.5 de verildi. Şekil 3.5 incelendiğinde, $\hbar$ 'nın yaklaşık olarak $-1.8 \leq \hbar \leq -0.2$ aralığı içerisinde seçilen değerleri için çözüm yakınsak olur.

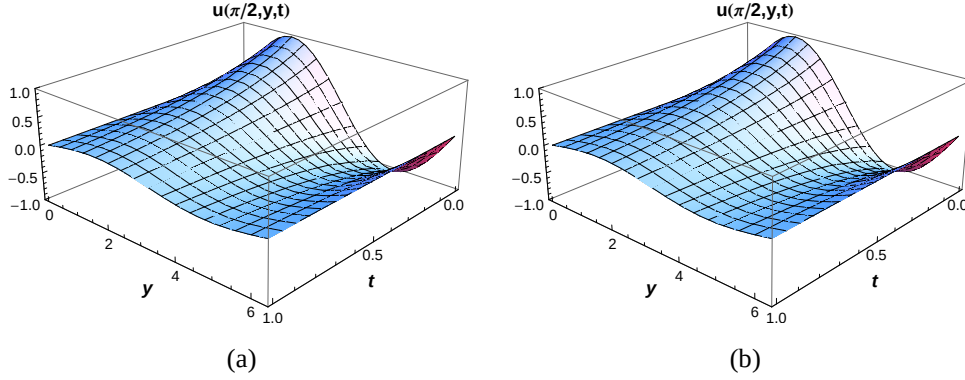
Şekil 3.6 da değişik $\hbar$ değerleri için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümler ve problemin tam çözümü gösterildi. Grafikten de açıkça görüldüğü gibi serinin yakınsaklık aralığı her ne kadar $-1.8 \leq \hbar \leq -0.2$ olarak tespit edilse de $\hbar = -1$ bu aralığın içine düşmüş olmasına rağmen t 'nin artan değerleri için $\hbar = -1$ değeri istenilen sonuçlardan uzaklaştığı, seçtiğimiz $\hbar = -0.57$ için ise tam çözümle ayırt edilemeyecek derecede grafiksel olarak yakın olduğu görüldü. Zaten Homotopi Analiz yönteminin benzer yöntemlere göre avantajı yakınsaklık parametresi olarak da bilinen $\hbar$ parametresini seçme serbestliğinin olmasıdır.



Şekil 3.5 (3.4.10)-(3.4.13) ile verilen iki boyutlu ısı iletim probleminde h eğrileri

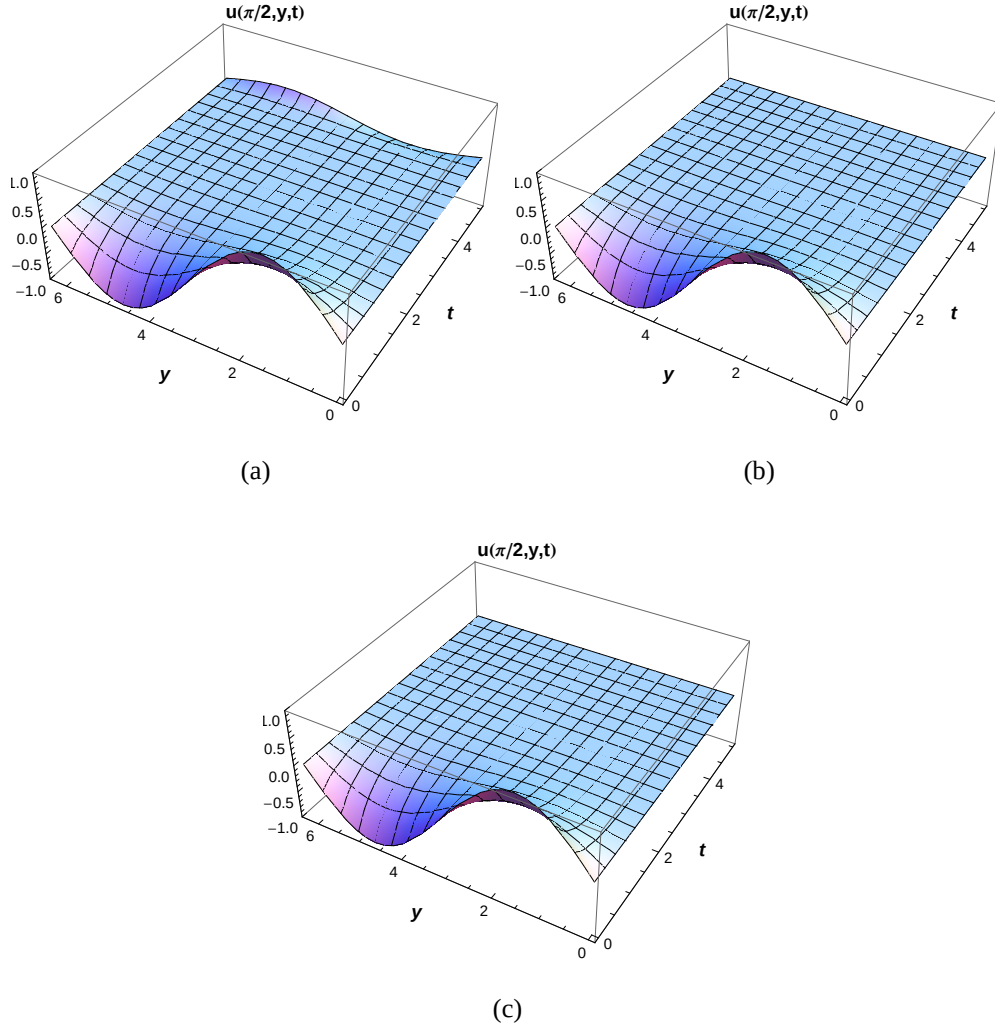


Şekil 3.6 (3.4.10)-(3.4.13) ile verilen iki boyutlu ısı iletim probleminde değişik h değerleri için $u_{app25}(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, t)$ ve $u(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, t)$ tam çözüm eğrileri



Şekil 3.7 (3.4.10)-(3.4.13) ile verilen iki boyutlu ısı iletim probleminde $x = \frac{\pi}{2}$ ve $0 \leq t \leq 1$ zaman aralığında (a) $\hbar = -1$ için Homotopi Analiz çözümü, (b) $u(x, y, t)$ tam çözümü

Şekil 3.7 ve Şekil 3.8 de sırasıyla $x = \frac{\pi}{2}$ için $0 \leq t \leq 1$ ve $0 \leq t \leq 5$ zamanlarında 25. yaklaşım olan $u_{app25}(x, y, t)$ Homotopi Analiz çözümü ve (3.4.14) ile verilen $u(x, y, t)$ tam çözüm yüzeyleri verildi. Yüzeyler incelendiğinde bulunan çözümlerin tam çözümler ile uyumlu olduğu görülmektedir. Tablo 3.2 de $\hbar$ 'nın farklı değerleri için $0 \leq t \leq 5$ zaman aralığında Homotopi Analiz çözümü ile $u(x, y, t)$ tam çözümü karşılaştırıldı. Tablodan görüldüğü gibi $x = \frac{\pi}{2}$ için $t = 2$ zamanına kadar $\hbar = -1$ uygun bir değer olarak alınmasına rağmen artan t zamanlarında $\hbar = -1$ değerinin uygun bir değer olarak alınamayacağı açıkça görülmektedir. $\hbar = -1$ özel değerinin alınması durumunda Homotopi Analiz yöntemi ile Homotopi Perturbasyon yöntemlerinden elde edilen sonuçlar aynıdır [60]. Bir başka deyişle serinin ilk 25 terimi alınarak $t = 5$ de Homotopi Perturbasyon yöntemi ile problemin çözümüne iyi bir yaklaşım elde edilemez.



Şekil 3.8 (3.4.10)-(3.4.13) ile verilen iki boyutlu ısı iletim probleminde $x = \frac{\pi}{2}$ ve $0 \leq t \leq 5$ zaman aralığında (a) $\hbar = -1$ için Homotopi Analiz çözümü, (b) $\hbar = -0.57$ için Homotopi Analiz çözümü, (c) $u(x, y, t)$ tam çözümü

Tablo 3.2: (3.4.10)-(3.4.13) ile verilen iki boyutlu ısı iletim probleminde $\hbar = -1$ ve $\hbar = -0.57$ için Homotopi Analiz çözümünün tam çözüm ile karşılaştırılması

t	x	y	$u(x, t)$	$\hbar = -1$		$\hbar = -0.57$	
				$u_{app25}(x, t)$	Mutlak Hata	$u_{app25}(x, t)$	Mutlak Hata
0.5	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.31859	0.31859	0	0.31859	4.345×10^{-11}
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.31859	-0.31859	0	-0.31859	4.344×10^{-11}
1.0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.11720	0.11720	0	0.11720	2.677×10^{-11}
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.11720	-0.11720	0	-0.11720	2.677×10^{-11}
1.5	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.43120	0.43120	4.920×10^{-15}	0.4312	1.542×10^{-10}
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.43120	-0.43120	4.920×10^{-15}	-0.43120	1.542×10^{-10}
2.0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.01586	0.01586	8.418×10^{-12}	0.01586	3.039×10^{-10}
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.01586	-0.01586	8.418×10^{-12}	-0.01586	3.039×10^{-10}
3.0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.00215	0.00215	2.993×10^{-7}	0.00215	5.422×10^{-10}
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.00215	-0.00215	2.993×10^{-7}	-0.00215	5.421×10^{-10}
4.0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.00029	-0.00021	4.997×10^{-4}	0.00029	4.759×10^{-9}
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.00029	0.00021	4.997×10^{-4}	-0.00029	4.759×10^{-9}
5.0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.00004	-0.15624	0.15628	0.00004	2.487×10^{-8}
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.00004	0.15624	0.15628	-0.00004	2.487×10^{-8}

4. KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HOMOTOPİ ANALİZ YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

4.1 Kesirli Mertebeden Bir Boyutlu Değişken Katsayılı Isı İletim Denklemi

Bu kısımda, Homotopi Analiz yönteminin kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere uygulanmasına ilk örnek olarak

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad t > 0 \quad (4.1.1)$$

kesirli mertebeden bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim denklemini

$$u(x, 0) = x^2 \quad (4.1.2)$$

başlangıç ve

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = e^t \quad (4.1.3)$$

sınır koşulları ile göz önüne alalım [59].

$\alpha = 1$ olması durumunda (3.4.1)-(3.4.3) ile verilen bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim problemi elde edilir. (4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden problemin yaklaşık çözümünü elde etmek için, c integral sabiti olmak üzere $\mathcal{L}[c] = 0$ olacak şekilde

$$\mathcal{L}[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial^\alpha \phi(x, t; q)}{\partial t^\alpha}$$

lineer operatörünü seçelim. (4.1.1) denkleminde lineer olmayan operatör

$$\mathcal{N}[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial^\alpha \phi(x, t; q)}{\partial t^\alpha} - \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial x^2}$$

şeklinde tanımlanır. $H(x, t) = 1$ seçilmesiyle sıfırıncı-derece deformasyon denklemi

$$(1 - q) \mathcal{L}[\phi(x, t; q) - u_0(x, t)] = q \hbar \mathcal{N}[\phi(x, t; q)] \quad (4.1.4)$$

olur. m . derece deformasyon denklemi ise

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{\partial^\alpha u_{m-1}(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^2}$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (4.1.5)$$

şeklinde yazılır. (4.1.5) m . derece deformasyon denkleminde $m \geq 1$ için

$$u_m(x,t) = \chi_m u_{m-1}(x,t) + \hbar \mathcal{L}^{-1}[R_m(\vec{u}_{m-1})] \quad (4.1.6)$$

elde edilir. (4.1.6) da (4.1.2) başlangıç koşulunun kullanılması ve sırasıyla $m = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= x^2 \\ u_1(x,t) &= -\frac{\hbar x^2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ u_2(x,t) &= -\frac{\hbar x^2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\hbar^2 x^2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\hbar^2 x^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

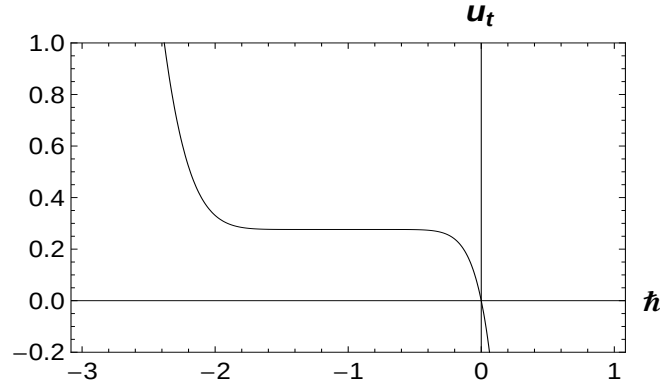
bulunur.

(4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden problemin Homotopi Analiz çözümü ilk 10 terime kadar Mathematica yardımıyla hesaplanarak

$$u_{app10}(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \dots + u_{10}(x,t) \quad (4.1.7)$$

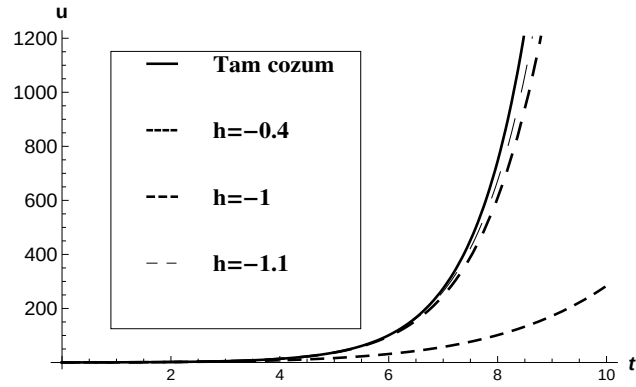
şeklinde bulundu.

(4.1.7) yaklaşık çözümü yakınsak olacak şekilde $\hbar$ parametresinin uygun aralığını belirlemede kullanılan $\hbar$ eğrisi $\alpha = 1$ için Şekil 4.1 de verildi. Açıkça görüldüğü gibi, $\hbar$ 'nın uygun değeri yaklaşık olarak $-1.6 \leq \hbar \leq -0.4$ aralığı içerisinde kaldığından, $\hbar$ 'nın bu aralık içerisinde seçilen değerleri için (4.1.7) çözümü yakınsak olur.



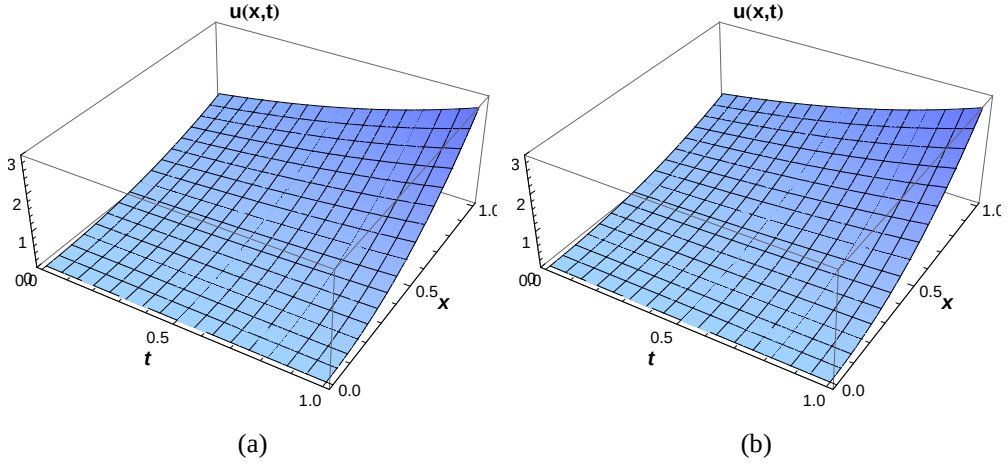
Şekil 4.1 (4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ durumunda $u'_{app10}(0.5, 0.1)$ için h eğrisi

Şekil 4.2 de $\alpha = 1$ olması durumunda değişik h değerleri için elde edilen $u_{app10}(0.5, t)$ yaklaşık ve tam çözüm grafikleri verildi. Grafikten $h = -1.1$ değerinde yaklaşık çözümünün grafiği tam çözümün grafiğine oldukça yakın olduğu görülmektedir.



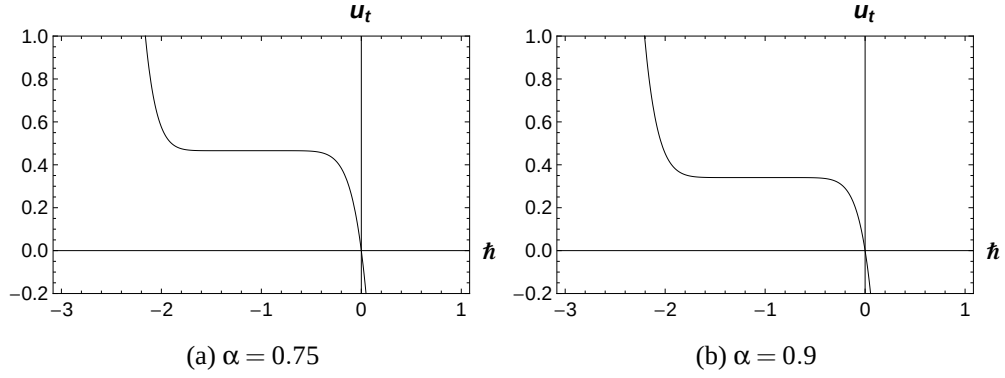
Şekil 4.2 (4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ durumunda değişik h değerlerinde $u_{app10}(0.5, t)$ yaklaşık çözüm ve $u(0.5, t)$ tam çözüm eğrileri

Şekil 4.3 (a) ve (b) de sırasıyla $\alpha = 1$ durumunda Homotopi Analiz ve tam çözüm yüzeyleri verildi. Yüzeyler incelendiğinde elde edilen yaklaşık çözüm ile tam çözümün uyumlu olduğu görülmektedir.



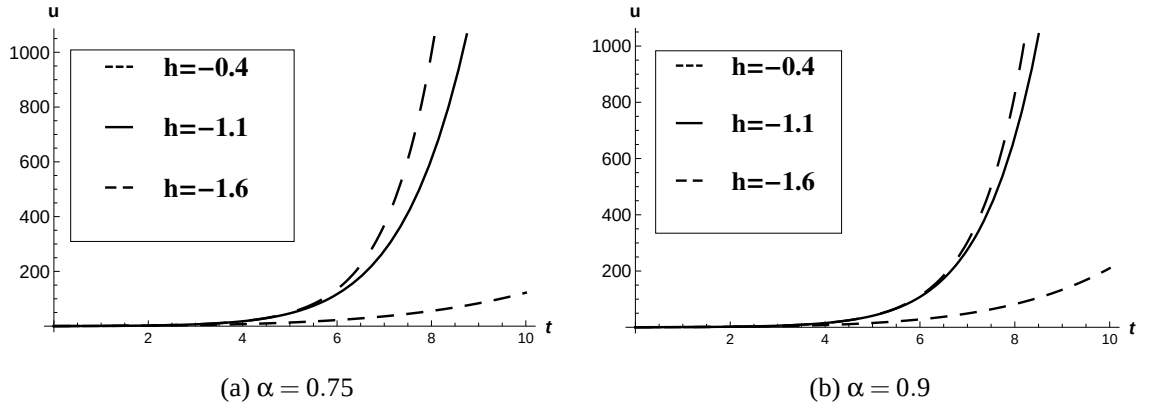
Şekil 4.3 (4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ durumunda (a) $h = -1.1$ için Homotopi Analiz çözümü, (b) $u(x,t)$ tam çözümü

α 'nın farklı değerleri için verilen kesirli mertebeden problemin Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $u_{app10}(x,t)$ yaklaşık çözümünün $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.9$ değerlerinde ki yakınsaklık aralığını belirlemek için h eğrileri sırasıyla Şekil 4.4 (a) ve (b) de verildi. Şekil 4.4 eğrileri incelendiğinde h için uygun değerler yaklaşık olarak $-1.6 \leq h \leq -0.4$ aralığı içerisinde kalmaktadır. Bu aralıktan seçilen h değerleri ile bulunan yaklaşık çözüm problemin tam çözümüne yakınsar. Şekil 4.6 (a) ve (b) de sırasıyla $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.9$ değerlerinde $u_{app10}(x,t)$ yaklaşık çözüm yüzeyleri verildi.

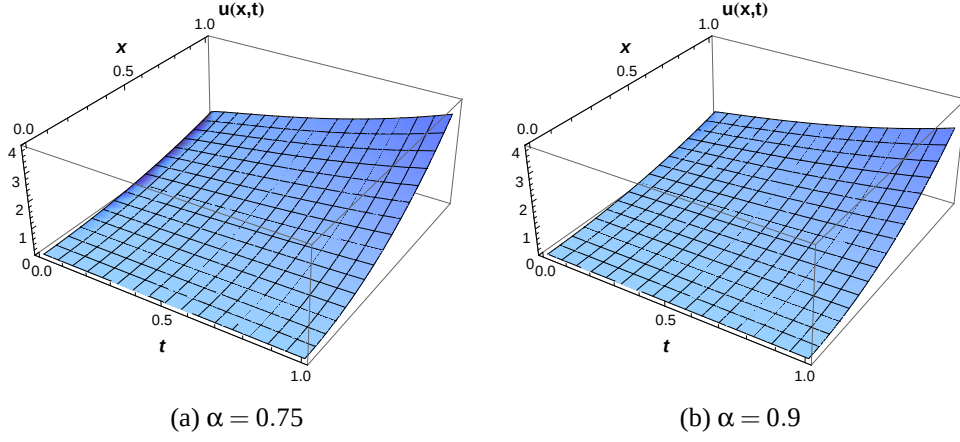


Şekil 4.4 (4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $u'_{app10}(0.5, 0.1)$ için h eğrileri

Şekil 4.5 (a) ve (b) de sırasıyla $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.9$ değerlerinde farklı h değerleri için $u_{app10}(0.5, t)$ Homotopi Analiz çözüm grafikleri verildi. Şekil 4.6 (a) ve (b) de sırasıyla $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.9$ değerlerinde $u_{app10}(x, t)$ yaklaşık çözüm yüzeyleri verildi.



Şekil 4.5 (4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde h değerleri için $u_{app10}(0.5, t)$ Homotopi Analiz çözümleri



Şekil 4.6 (4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $\hbar = -1.1$ için Homotopi Analiz çözümleri

(4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden problemin Homotopi Analiz çözümünün Adomian Ayrışım(ADM) [59] ve Varyasyonel İterasyon(VIM) [61] yöntemleri ile elde edilen çözümleri ile karşılaştırılması Tablo 4.1 de verildi. Tablo 4.1 incelendiğinde $\alpha = 1$ için Homotopi Analiz yöntemi için seçtiğimiz $\hbar = -1.1$ değeri ile elde edilen yaklaşık çözümün, tam çözüm ve diğer yaklaşık çözümlerle uyumlu olduğu görülmektedir. Tablo 4.2 de $\hbar = -1.1$ değeri için $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.9$ farklı değerlerinde Homotopi Analiz yöntemiyle elde edilen çözümler, ADM [59] ve VIM [61] ile elde edilen çözümler ile karşılaştırıldı.

Tablo 4.1 (4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ ve $\hbar = -1.1$ için Homotopi Analiz çözümünün ADM [59], VIM [61] ve tam çözüm ile karşılaştırılması

t	x	u_{ADM} [59]	u_{VIM} [61]	$u_{app10}(x, t)$	$u(x, t)$
0.25	0.3	0.1155468750	0.1155468750	0.1155105648	0.1155622875
	0.6	0.4621875000	0.4621875000	0.4620422591	0.4622491500
	0.9	1.0399218750	1.0399218750	1.0395950830	1.0400605880
0.5	0.3	0.1481250000	0.1481250000	0.1482765448	0.1483849144
	0.6	0.5925000000	0.5925000000	0.5931061791	0.5935396575
	0.9	1.3331250000	1.3331250000	1.3344889030	1.3354642290
0.75	0.3	0.1891406250	0.1891406250	0.1908202088	0.1905300015
	0.6	0.7565625000	0.7565625000	0.7632808351	0.7621200060
	0.9	1.7022656250	1.7022656250	1.7173818790	1.7147700130
1.0	0.3	0.2400000000	0.2400000000	0.2456638256	0.2446453646
	0.6	0.9600000000	0.9600000000	0.9826553025	0.9785814582
	0.9	2.1600000000	2.1600000000	2.2109744310	2.2018082810

Tablo 4.2: (4.1.1)-(4.1.3) ile verilen kesirli mertebeden bir boyutlu değişken katsayılı ısı iletim probleminde $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.9$ değerlerinde $\hbar = -1.1$ için Homotopi Analiz çözümünün ADM [59] ve VIM [61] ile karşılaştırılması

t	x	$\alpha = 0.75$			$\alpha = 0.9$		
		u_{VIM} [61]	u_{ADM} [59]	$u_{app10}(x,t)$	u_{VIM} [61]	u_{ADM} [59]	$u_{app10}(x,t)$
0.25	0.3	0.1293874976	0.1346451171	0.1349131956	0.1210397676	0.1218114954	0.1218608187
	0.6	0.5175499905	0.5385804682	0.5396527823	0.4841590707	0.4872459816	0.4874432748
	0.9	1.1644874790	1.2118060540	1.2142187600	1.0893579090	1.0963034590	1.0967473680
0.5	0.3	0.1695230653	0.1795854459	0.1819547997	0.1567105173	0.1588846090	0.1595251074
	0.6	0.6780922615	0.7183417838	0.7278191988	0.6268420693	0.6355384360	0.6381004296
	0.9	1.5257075890	1.6162690140	1.6375931970	1.4103946560	1.4299614810	1.4357259670
0.75	0.3	0.2154529375	0.2313760034	0.2401550591	0.1998201782	0.2041415584	0.2070926250
	0.6	0.8618117502	0.9255040135	0.9606202364	0.7992807125	0.8165662337	0.8283704999
	0.9	1.9390764380	2.0823840300	2.1613955320	1.7983816030	1.8372740260	1.8638336250
1.0	0.3	0.2687892072	0.2909330275	0.3137279614	0.2517711958	0.2588407967	0.2677445168
	0.6	1.0751568280	1.1637321100	1.2549118460	1.0070847830	1.0353631870	1.0709780670
	0.9	2.4191028630	2.6183972470	2.8235516530	2.2659407620	2.3295671700	2.4097006510

4.2 Kesirli Mertebeden İki Boyutlu Isı İletim Denklemi

Yönteminin kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmasını görmek için ikinci problem olarak

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x, y < 2\pi, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad t > 0 \quad (4.2.1)$$

kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim denklemini

$$u(x, y, 0) = \sin x \sin y \quad (4.2.2)$$

başlangıç ve

$$u(0, y, t) = 0, u(2\pi, y, t) = 0 \quad (4.2.3)$$

$$u(x, 0, t) = 0, u(x, 2\pi, t) = 0 \quad (4.2.4)$$

sınır koşulları ile göz önüne alalım [59].

$\alpha = 1$ olması durumunda (3.4.10)-(3.4.13) ile verilen iki boyutlu ısı iletim problemi elde edilir. (4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu kısmi diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için, c bir integral sabiti olmak üzere $\mathcal{L}[c] = 0$ olacak şekilde

$$\mathcal{L}[\phi(x, y, t; q)] = \frac{\partial^\alpha \phi(x, y, t; q)}{\partial t^\alpha}$$

lineer operatörünü seçelim. (4.2.1) denkleminde

$$\mathcal{N}[\phi(x, y, t; q)] = \frac{\partial^\alpha \phi(x, y, t; q)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 \phi(x, y, t; q)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi(x, y, t; q)}{\partial y^2}$$

olarak tanımlanır. $H(x, y, t) = 1$ seçilmesiyle sıfırıncı-derece deformasyon denklemi

$$(1 - q)\mathcal{L}[\phi(x, y, t; q) - u_0(x, y, t)] = q\hbar\mathcal{N}[\phi(x, y, t; q)] \quad (4.2.5)$$

olur. Açık olarak $q = 0$ ve $q = 1$ alınırsa sırasıyla

$$\phi(x, y, t; 0) = u_0(x, y, t) = u(x, y, 0)$$

$$\phi(x, y, t; 1) = u(x, y, t)$$

elde edilir. Böylece q gömme parametresi 0'dan 1'e artarken $\phi(x, y, t; q)$ çözümü $u_0(x, y, t)$ başlangıç çözümünden $u(x, y, t)$ tam çözümüne değişir. $\phi(x, y, t; q)$, q gömme parametresine göre Taylor serisine açılırsa

$$u_m(x, y, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(x, y, t; q)}{\partial q^m}$$

olmak üzere

$$\phi(x, y, t; q) = u_0(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, y, t) q^m \quad (4.2.6)$$

olarak bulunur. Lineer operatör, başlangıç şartı ve $\hbar$ parametresi uygun seçilirse (4.2.6) serisi $q = 1$ için yakınsaktır. Böylece

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, y, t)$$

ifadesi (4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden problemin bir çözümüdür. (4.2.5) sıfırıncı-derece deformasyon denkleminde, q gömme parametresine göre m defa türev alındıktan sonra $m!$ ile bölünür ve son olarak $q = 0$ alınırsa, m . derece deformasyon denklemi

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{\partial^\alpha u_{m-1}(x, y, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u_{m-1}(x, y, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}(x, y, t)}{\partial y^2}$$

olmak üzere

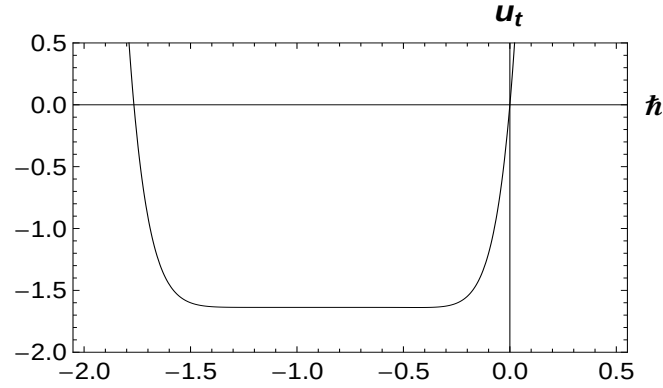
$$\mathcal{L}[u_m(x, y, t) - \chi_m u_{m-1}(x, y, t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (4.2.7)$$

elde edilir. $m \geq 1$ için (4.2.7) m . derece deformasyon denkleminde

$$u_m(x, y, t) = \chi_m u_{m-1}(x, y, t) + \hbar \mathcal{L}^{-1}[R_m(\vec{u}_{m-1})] \quad (4.2.8)$$

yazılabilir. (4.2.2) başlangıç koşulu ile (4.2.8) kullanılarak $m = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= \sin x \sin y \\ u_1(x, y, t) &= \frac{2\hbar t^\alpha \sin x \sin y}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ u_2(x, y, t) &= \frac{2\hbar t^\alpha \sin x \sin y}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2\hbar^2 t^{2\alpha} \sin x \sin y}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{4\hbar^2 t^{2\alpha} \sin x \sin y}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\ &\vdots \end{aligned}$$



Şekil 4.7 (4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ durumunda $u'_{app10}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0.1)$ için h eğrisi

elde edilir.

(4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden problemin Homotopi Analiz çözümü ilk 10 terime kadar Mathematica yardımıyla hesaplanarak

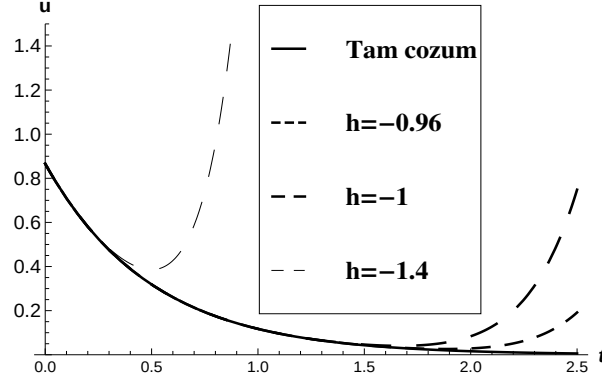
$$u_{app10}(x,y,t) = u_0(x,y,t) + u_1(x,y,t) + u_2(x,y,t) + \dots + u_{10}(x,y,t) \quad (4.2.9)$$

şeklinde bulundu. (4.2.9) yaklaşık çözümü yakınsak olacak şekilde h yardımcı parametresinin uygun aralığını belirlemek için kullanılan h eğrisi $\alpha = 1$ durumunda Şekil 4.7 de verildi. Açıkça görüldüğü gibi, h 'nin uygun değeri yaklaşık olarak $-1.4 \leq h \leq -0.3$ aralığı içerisinde kaldığından, h 'nin bu aralık içerisinde seçilen değerleri Homotopi Analiz çözümünü yakınsak yapar.

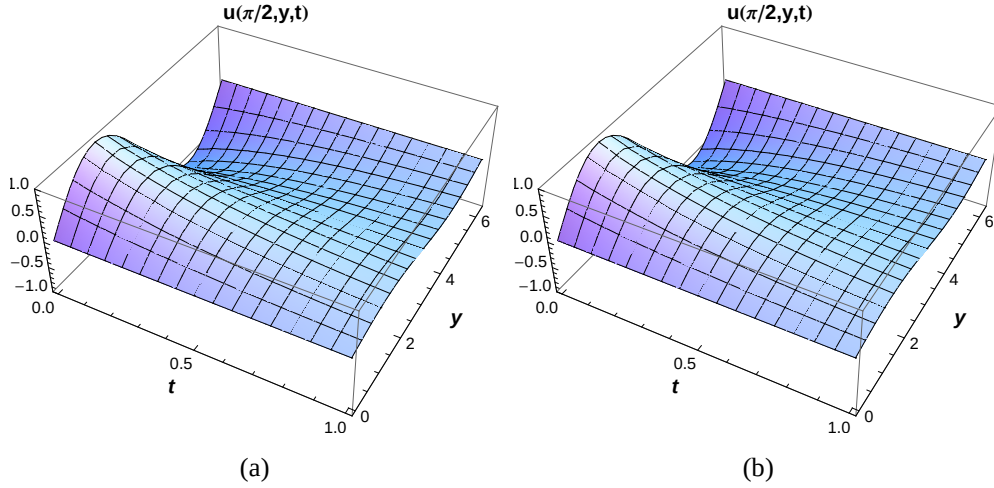
Şekil 4.8 de $\alpha = 1$ olması durumunda değişik h değerleri için elde edilen $u_{app10}(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, t)$ yaklaşık ve $u(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, t)$ tam çözüm grafikleri verildi. Grafikten $h = -0.96$ değerinde yaklaşık çözümünün grafiği tam çözümün grafiğine oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Şekil 4.9 (a) da $\alpha = 1$ durumunda $h = -0.96$ için $u_{app10}(\frac{\pi}{2}, y, t)$ Homotopi Analiz ve Şekil 4.9 (b) de (3.4.14) ile verilen $u(\frac{\pi}{2}, y, t)$ tam çözüm yüzeyleri verildi. Yüzeyler incelendiğinde elde edilen çözümün tam çözüm ile uyumlu olduğu görülmektedir.

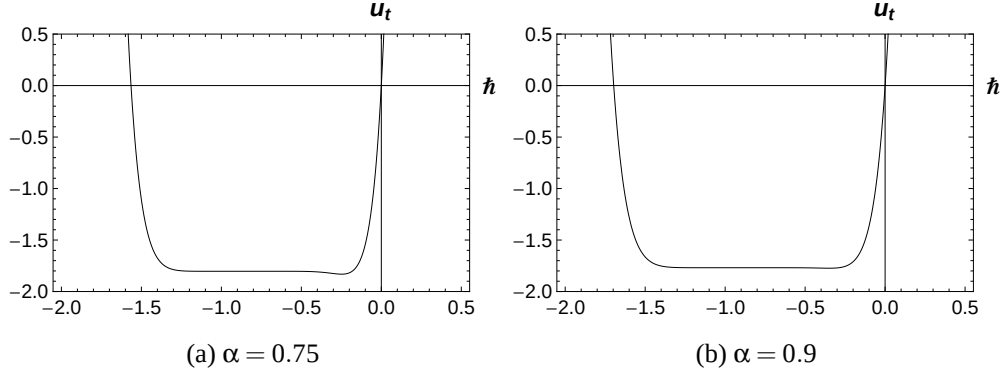
$\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.9$ değerlerinde Homotopi Analiz çözümlerinin yakınsak olduğu



Şekil 4.8 (4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ durumunda farklı $\hbar$ değerleri için $u_{app10}(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, t)$ Homotopi analiz çözüm ve $u(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, t)$ tam çözüm grafikleri



Şekil 4.9 (4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ durumunda (a) $\hbar = -0.96$ için $u_{app10}(\frac{\pi}{2}, y, t)$ yaklaşık çözümü, (b) $u(\frac{\pi}{2}, y, t)$ tam çözümü

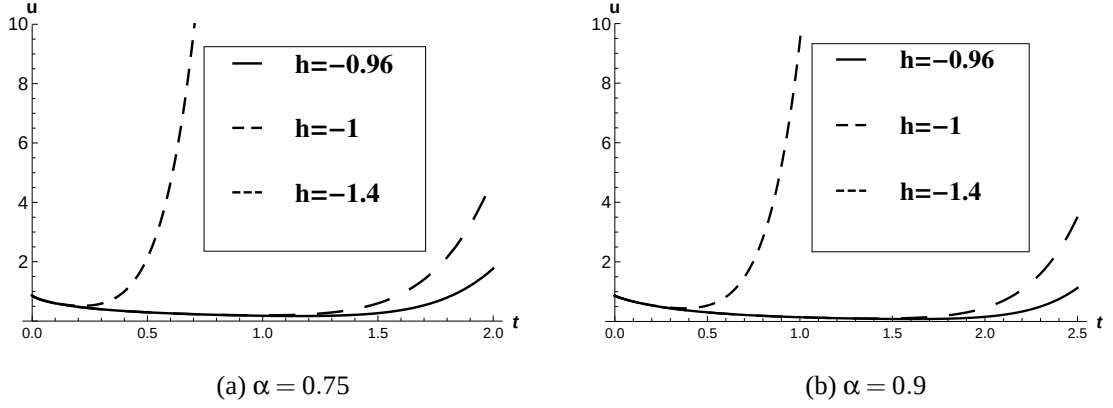


Şekil 4.10 (4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde $u'_{app10}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0.1)$ için h eğrileri

h aralığını belirlemek için h eğrileri sırasıyla Şekil 4.10 (a) ve (b) de verildi. Verilen eğrilerden kolayca görülmektedir ki, h 'nın uygun değerleri yaklaşık olarak $-1.4 \leq h \leq -0.4$ aralığı içerisinde kalmaktadır. Bu aralıktan seçilen h değerleri için elde edilen Homotopi Analiz çözümü verilen kesirli mertebeden problemin tam çözümüne yakınsar.

Şekil 4.11 (a) ve (b) de sırasıyla $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.9$ değerlerinde farklı h değerleri için $u_{app10}(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, t)$ Homotopi Analiz çözüm grafikleri verildi. Şekil 4.12 (a) ve (b) de sırasıyla $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.9$ değerlerinde $h = -0.96$ seçilerek $u_{app10}(\frac{\pi}{2}, y, t)$ yaklaşık çözümleri verildi.

Tablo 4.3 de $\alpha = 1$ durumunda $h = -0.96$ için $u_{app10}(x, y, t)$ yaklaşık çözümü tam çözüm ile karşılaştırıldı. Farklı α değerlerinin $h = -0.96$ için $u_{app10}(x, y, t)$ Homotopi Analiz çözümleri Tablo 4.4 de verildi.



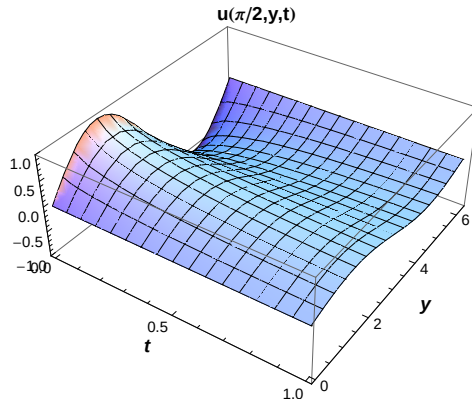
Şekil 4.11 (4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde farklı h değerleri için $u_{app10}(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, t)$ Homotopi Analiz çözüm eğrileri

Tablo 4.3 (4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde $\alpha = 1$ ve $h = -0.96$ için Homotopi Analiz yöntemi çözümünün tam çözüm ile karşılaştırılması

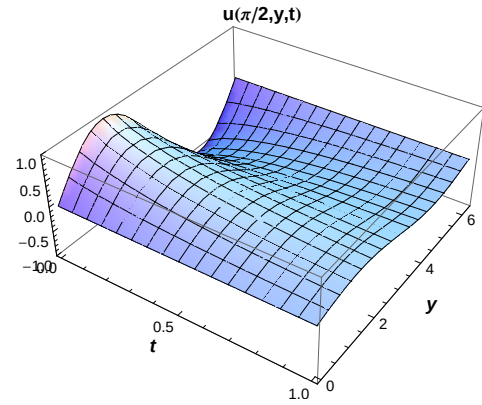
t	x	y	$u_{app10}(x, y, t)$	$u(x, y, t)$
0.1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.7090416310	0.7090416310
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.7090416310	-0.7090416310
0.2	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.5805141885	0.5805141885
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.5805141885	-0.5805141885
0.3	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.4752848187	0.4752848187
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.4752848187	-0.4752848187
0.4	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.4752848187	0.4752848187
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.4752848187	-0.4752848187
0.5	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.3185929416	0.3185929416
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.3185929416	-0.3185929416

Tablo 4.4 (4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde farklı α değerleri ve $\hbar = -0.96$ için Homotopi Analiz çözümleri

t	x	y	$\alpha = 0.45$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.9$
0.1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.4569717942	0.5267279613	0.6000585552	0.6689827481
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.4569717942	-0.5267279613	-0.6000585552	-0.6689827481
0.2	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.3847827948	0.4259455766	0.4779061511	0.5382589260
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.3847827948	-0.4259455766	-0.4779061511	-0.5382589260
0.3	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.3499623654	0.3652181902	0.3971332466	0.4403936728
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.3499623654	-0.3652181902	-0.3971332466	-0.4403936728
0.4	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.3487525524	0.3232549207	0.3388530430	0.3647534890
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.3487525524	-0.3232549207	-0.3388530430	-0.3647534890
0.5	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0.4026226691	0.2927588248	0.2947091005	0.3051967239
		$\frac{4\pi}{3}$	-0.4026226691	-0.2927588248	-0.2947091005	-0.3051967239



(a) $\alpha = 0.75$



(b) $\alpha = 0.9$

Şekil 4.12 (4.2.1)-(4.2.4) ile verilen kesirli mertebeden iki boyutlu ısı iletim probleminde $\hbar = -0.96$ için $u_{app10}(\frac{\pi}{2}, y, t)$ yaklaşık çözümleri

4.3 Kesirli Mertebeden Sharmo-Tasso-Olver (STO) Denklemi

Üçüncü örnek olarak, a keyfi bir sabit olmak üzere

$$D_t^\alpha u + 3au_x^2 + 3au^2 u_x + 3auu_{xx} + au_{xxx} = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad t > 0 \quad (4.3.1)$$

kesirli mertebeden lineer olmayan STO denklemi

$$u(x, 0) = \frac{2 + 4 \tanh x}{2 + \tanh x} \quad (4.3.2)$$

başlangıç koşulu ile gözönüne alalım.

$\alpha = 1$ alınırsa (4.3.1) denklemi lineer olmayan STO denkleme indirgenir. Bu durumda (4.3.1) denklemin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{2 + 4 \tanh(x - 4at)}{2 + \tanh(x - 4at)} \quad (4.3.3)$$

olur [62].

(4.3.2) başlangıç koşulu ile verilen (4.3.1) kesirli mertebeden STO denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için, c integral sabiti olmak üzere $\mathcal{L}[c] = 0$ olacak şekilde

$$\mathcal{L}[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial^\alpha \phi(x, t; q)}{\partial t^\alpha}$$

lineer operatörü seçelim. (4.3.1) denkleminde lineer olmayan operatör

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[\phi(x, t; q)] = & \frac{\partial^\alpha \phi(x, t; q)}{\partial t^\alpha} + 3a \left(\frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x} \right)^2 + 3a (\phi(x, t; q))^2 \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x} \\ & + 3a \phi(x, t; q) \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial x^2} + a \frac{\partial^3 \phi(x, t; q)}{\partial x^3} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. $H(x, t) = 1$ seçilmesiyle sıfırıncı-derece deformasyon denklemi

$$(1 - q) \mathcal{L}[\phi(x, t; q) - u_0(x, t)] = q \hbar \mathcal{N}[\phi(x, t; q)] \quad (4.3.4)$$

olur. m . derece deformasyon denklemi

$$\begin{aligned}
R_m(\vec{u}_{m-1}) = & \frac{\partial^\alpha u_{m-1}(x,t)}{\partial t^\alpha} + 3a \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x} \frac{\partial u_{m-1-n}(x,t)}{\partial x} \\
& + 3a \sum_{n=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^n u_k(x,t) u_{n-k}(x,t) \right) \frac{\partial u_{m-1-n}(x,t)}{\partial x} \\
& + 3a \sum_{n=0}^{m-1} u_n(x,t) \frac{\partial^2 u_{m-1-n}(x,t)}{\partial x^2} + a \frac{\partial^3 u_{m-1}(x,t)}{\partial x^3}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (4.3.5)$$

şeklinde elde edilir. $m \geq 1$ için (4.3.5) m . derece deformasyon denkleminde

$$u_m(x,t) = \chi_m u_{m-1}(x,t) + \hbar \mathcal{L}^{-1}[R_m(\vec{u}_{m-1})] \quad (4.3.6)$$

yazılabilir. (4.3.2) başlangıç koşulu ile (4.3.6) kullanılarak $m = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\begin{aligned}
u_0(x,t) &= \frac{2 + 4 \tanh x}{2 + \tanh x} \\
u_1(x,t) &= \frac{24a\hbar t^\alpha}{\cosh^2 x (2 + \tanh x)^2 \Gamma(\alpha + 1)} \\
u_2(x,t) &= \frac{24a\hbar(1 + \hbar)t^\alpha}{\cosh^2 x (2 + \tanh x)^2 \Gamma(\alpha + 1)} - \frac{192a^2\hbar^2 t^{2\alpha}}{\cosh^2 x (2 + \tanh x)^2 \Gamma(2\alpha + 1)} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

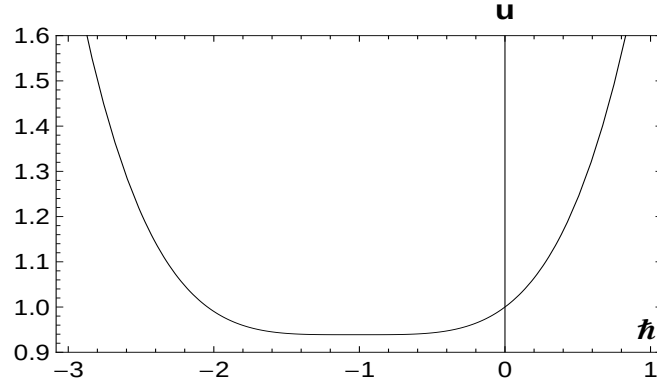
elde edilir.

(4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden problemin Homotopi Analiz yöntemi kullanılarak elde edilen ilk 4 terimi Mathematica yardımıyla hesaplanarak Homotopi Analiz çözümü

$$u_{app4}(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t) \quad (4.3.7)$$

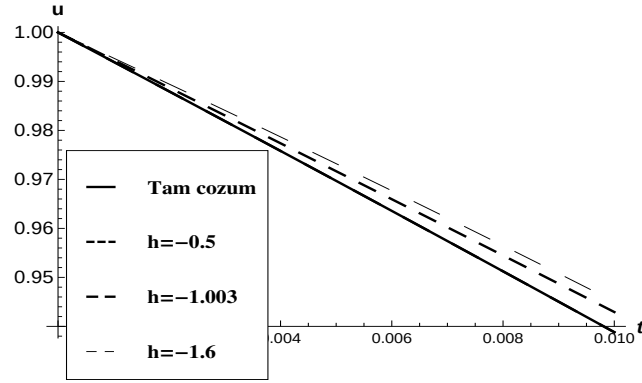
şeklinde bulundu. (4.3.7) yaklaşık çözümü yakınsak olacak şekilde $\hbar$ yardımcı parametresinin uygun aralığını belirlemek için $\alpha = 1$ ve $a = 1$ değerlerinde $\hbar$ eğrisi Şekil 4.13 de verildi. Açıkça görüldüğü gibi, Homotopi Analiz çözümünü yakınsak yapacak $\hbar$ 'nın uygun değerleri yaklaşık olarak $-1.6 \leq \hbar \leq -0.4$ aralığı içerisinde kalır. Şekil 4.15 (a)

ve (b) de sırasıyla $\alpha = 1$ ve $a = 1$ değerlerinde Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $u_{app4}(x,t)$ yaklaşık ve (4.3.3) ile verilen $u(x,t)$ tam çözüm yüzeyleri verildi. Yüzeyler incelendiğinde Homotopi Analiz çözümü ile tam çözümün uyumlu olduğu görülmektedir.

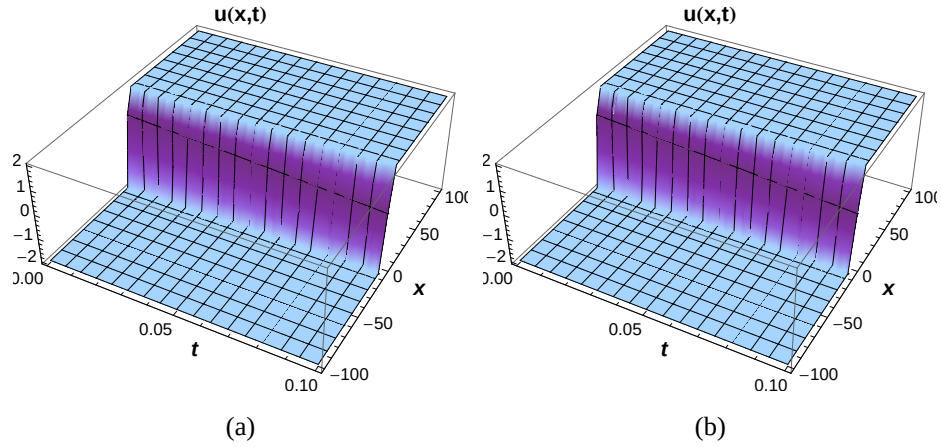


Şekil 4.13 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde $\alpha = 1$ ve $a = 1$ değerlerinde $u_{app4}(0,0.01)$ için h eğrisi

Şekil 4.14 de $\alpha = 1$ olması durumunda değişik h değerleri ve $a = 1$ için elde edilen $u_{app4}(0,t)$ yaklaşık ve $u(0,t)$ tam çözüm grafikleri verildi. Grafikten $h = -1.003$ değerinde yaklaşık çözümünün grafiği tam çözümün grafiğine oldukça yakın olduğu görülmektedir.

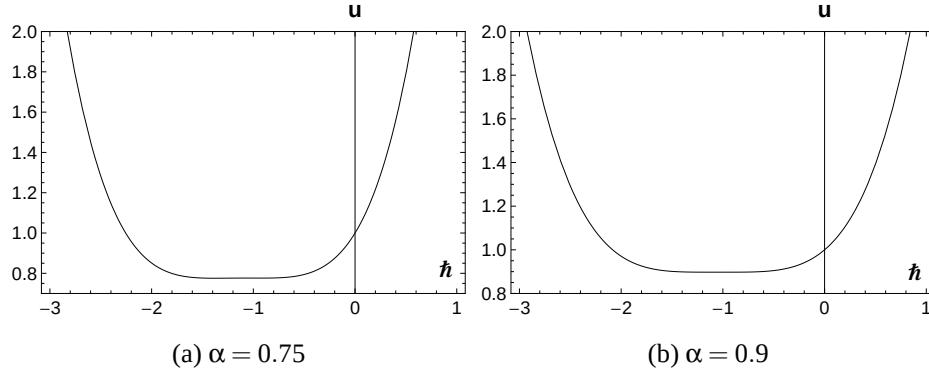


Şekil 4.14 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde $\alpha = 1$ ve $a = 1$ durumunda farklı $\hbar$ değerleri için $u_{app4}(0,t)$ Homotopi Analiz çözüm ve $u(0,t)$ tam çözüm eğrileri

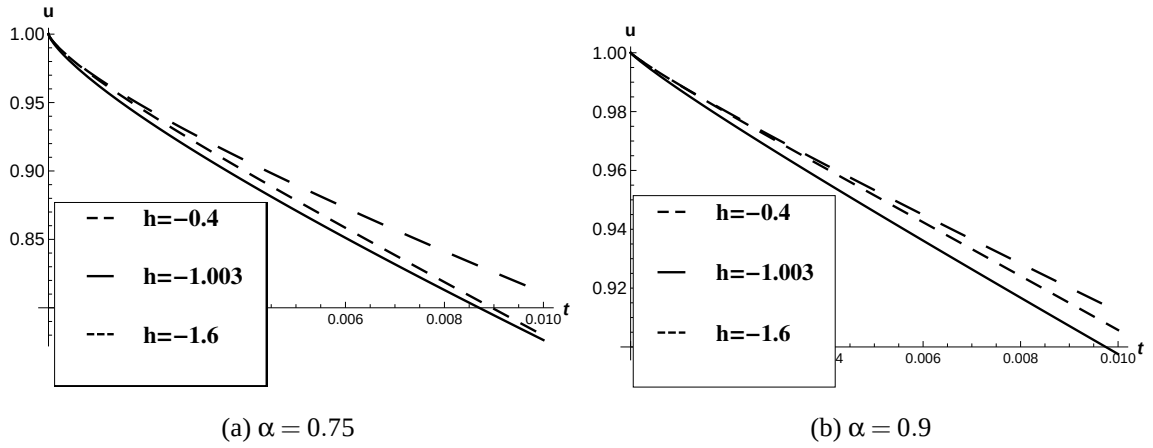


Şekil 4.15 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde $\alpha = 1$ ve $a = 1$ değerlerinde (a) $\hbar = -1.003$ için Homotopi Analiz çözümü, (b) $u(x,t)$ tam çözümü

α 'nın farklı değerleri için verilen kesirli mertebeden problemin Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $u_{app4}(x,t)$ yaklaşık çözümünün $a = 1$ için $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.9$ değerlerinde ki yakınsaklık aralığını belirlemek için $\hbar$ eğrileri sırasıyla Şekil 4.16 (a) ve (b) de verildi. Verilen eğrilerden kolayca görülmektedir ki $\hbar$ 'nın uygun değerleri yaklaşık olarak $-1.6 \leq \hbar \leq -0.4$ aralığı içerisinde kalmaktadır. Bu aralıktan seçilen

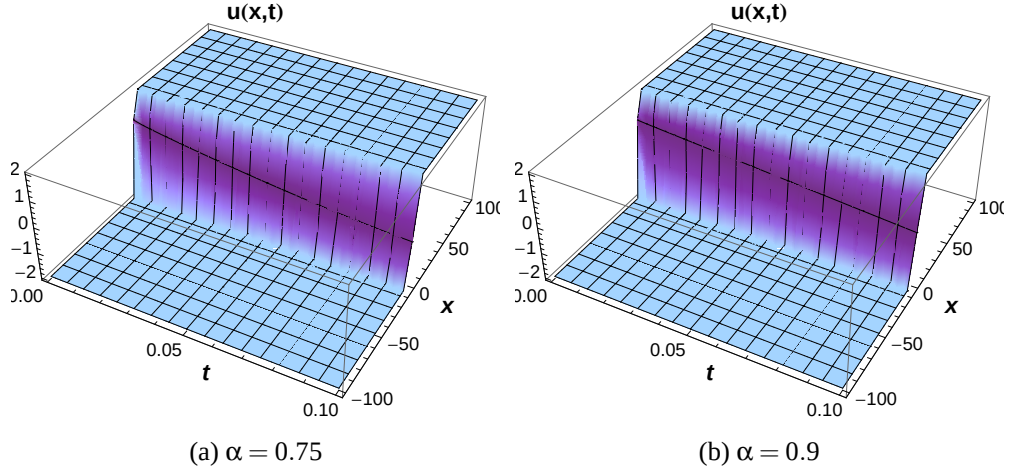


Şekil 4.16 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde $a = 1$ değerinde $u_{app4}(0, 0.01)$ için $\hbar$ eğrileri



Şekil 4.17 (4.3.1)-(4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde farklı $\hbar$ değerleri için $u_{app4}(0, t)$ Homotopi Analiz çözüm eğrileri

$\hbar$ değerleri için $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.9$ değerlerinde $u_{app4}(x, t)$ yaklaşık çözümü, verilen kesirli mertebeden denklemin tam çözümüne yakınsar. Şekil 4.17 (a) ve (b) de sırasıyla $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.9$ değerlerinde farklı $\hbar$ değerleri için $u_{app4}(0, t)$ Homotopi Analiz çözüm grafikleri verildi. Şekil 4.18 (a) ve (b) de $a = 1$ için sırasıyla $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.9$ değerlerinde $u_{app4}(x, t)$ yaklaşık çözümleri verildi.



Şekil 4.18 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde $a = 1$ ve $\hbar = -1.003$ için Homotopi Analiz çözümü

(4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden problemin Homotopi Analiz çözümünün Varyasyonel İterasyon(VIM) [62], Adomian Ayrışım(ADM) [62] ve Homotopi Perturbasyon(HPM) [62] yöntemleri ile elde edilen çözümleri ile karşılaştırılması Tablo 4.5 de verildi. Tablo 4.5 incelendiğinde $a = 1$, $\alpha = 1$ değerleri ve $t = 0.01$ zamanında Homotopi Analiz yöntemi için seçtiğimiz $\hbar = -1.003$ değeri ile elde edilen $u_{app4}(x,t)$ yaklaşık çözümün, tam çözüm ve diğer yaklaşık çözümlerle uyumlu olduğu görülmektedir. Tablo 4.6 da ise $t = 0.01$ zamanında α 'nın farklı değerleri ve $\hbar = -1.003$ için kesirli mertebeden STO denkleminin (4.3.7) yaklaşık çözümü verildi.

Tablo 4.7 de $\alpha = 1$ ve $\hbar = -1.01$ için kesirli mertebeden STO denkleminin, $t = 0.05$ zamanında ve değişik x noktalarındaki (4.3.7) yaklaşık çözümü, tam çözümü ve mutlak hataları verildi. Tablo 4.8 de ise $t = 0.05$ zamanında $a = 1$ ve α 'nın farklı değerleri için kesirli mertebeden STO denkleminin (4.3.7) yaklaşık çözümünün nümerik değerleri verildi.

Tablo 4.5 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde $\alpha = 1$, $a = 1$, $\hbar = -1.003$ ve $t = 0.01$ zamanı için Homotopi Analiz çözümünün VIM [62], ADM [62], HPM [62] çözümleri ve tam çözüm ile karşılaştırılması

x	u_{VIM} [62]	u_{ADM} [62]	u_{HPM} [62]	$u_{app4}(x, t)$	$u(x, t)$
0	0.938798380	0.938800000	0.938800000	0.938808809	0.938808808
1	1.813642383	1.813642415	1.813642415	1.813631680	1.813631681
2	1.973721044	1.973721044	1.973721044	1.973719022	1.973719022
3	1.996423221	1.996423221	1.996423221	1.996422935	1.996422935
4	1.999515561	1.999515561	1.999515561	1.999515522	1.999515522
5	1.999934431	1.999934431	1.999934431	1.999934426	1.999934426
6	1.999991127	1.999991127	1.999991127	1.999991125	1.999991125
7	1.999998799	1.999998799	1.999998799	1.999998799	1.999998799
8	1.999999839	1.999999839	1.999999839	1.999999837	1.999999837
9	1.999999978	1.999999978	1.999999978	1.999999978	1.999999978
10	1.999999997	1.999999997	1.999999997	1.999999997	1.999999997

Tablo 4.6 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde farklı α değerleri, $a = 1$, $\hbar = -1.003$ ve $t = 0.01$ zamanı için Homotopi Analiz çözümleri

x	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.45$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.9$
0	3.702365090	0.073775110	0.506271554	0.776416680	0.897585324
1	-1.447380505	1.326532518	1.687882009	1.773758336	1.804052889
2	1.286578104	1.889679773	1.954316265	1.967776214	1.972306514
3	1.897871080	1.984657943	1.993748261	1.995607792	1.996229484
4	1.986073162	1.997915965	1.999152637	1.999405003	1.999489299
5	1.998113273	1.999717815	1.999885298	1.999919465	1.999930877
6	1.999744624	1.999961808	1.999984476	1.999989101	1.999990645
7	1.999965438	1.999994831	1.999997899	1.999998525	1.999998734
8	1.999995323	1.999999300	1.999999716	1.999999800	1.999999829
9	1.999999367	1.999999905	1.999999962	1.999999973	1.999999977
10	1.999999914	1.999999987	1.999999995	1.999999996	1.999999997

Tablo 4.7 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde $\alpha = 1$, $a = 1$, $\hbar = -1.01$ ve $t = 0.05$ zamanı için Homotopi Analiz yöntemi çözümünün tam çözüm ile karşılaştırılması

x	$u_{app4}(x, t)$	$u(x, t)$	Mutlak Hata
0	0.671519576	0.671520108	5.32×10^{-7}
1	1.747774973	1.747778834	3.86×10^{-6}
2	1.963898162	1.963897191	9.71×10^{-7}
3	1.995075757	1.995075585	1.72×10^{-7}
4	1.999332867	1.999332843	2.40×10^{-8}
5	1.999909700	1.999909697	3.00×10^{-9}
6	1.999987779	1.999987779	0
7	1.999998346	1.999998346	0
8	1.999999776	1.999999776	0
9	1.999999970	1.999999970	0
10	1.999999996	1.999999996	0

Tablo 4.8 (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen kesirli mertebeden Sharmo-Tasso-Olver probleminde farklı α değerleri, $a = 1$, $\hbar = -1.01$ ve $t = 0.05$ zamanı için Homotopi Analiz çözümleri

x	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.45$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.9$
0	34.68336996	2.77423192	-0.116518129	0.171386363	0.520666476
1	-13.35334987	-1.062715134	1.085881569	1.557785968	1.703224916
2	-1.578936880	1.382954032	1.845765703	1.933213561	1.957026165
3	1.481260796	1.911957669	1.978468733	1.990819053	1.994128563
4	1.929146680	1.987999368	1.997073732	1.998754844	1.999204359
5	1.990399098	1.998374321	1.999603746	1.999831438	1.999892303
6	1.998700440	1.999779959	1.999946369	1.999977187	1.999985424
7	1.999824120	1.999970220	1.999992742	1.999996913	1.999998027
8	1.999976197	1.999995970	1.999999018	1.999999582	1.999999733
9	1.999996779	1.999999455	1.999999867	1.999999943	1.999999964
10	1.999999564	1.999999926	1.999999982	1.999999992	1.999999995

4.4 Kesirli Mertebeden Coupled mKdV Denklemi

Yöntemin kesirli mertebeden coupled denklemlere uygulamasını göstermek için, dördüncü örnek olarak

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u - \frac{1}{2}u_{xxx} + 3u^2u_x - 3(vv_x)_x - 3(uv^2)_x &= 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ D_t^\beta v + v_{xxx} + 3(vu_x)_x - 6uvu_x - 3(u^2 - v^2)v_x &= 0, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

kesirli mertebeden coupled mKdV denklemini

$$u(x, 0) = \tanh(2x), v(x, 0) = \tanh(2x) \quad (4.4.2)$$

başlangıç koşulları ile gözönüne alarak problemin Homotopi Analiz yöntemi ile yaklaşık çözümlerini araştıracağız.

$\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ alınırsa (4.4.1) coupled denklemi coupled mKdV denklemine indirgenir. Bu durumda (4.4.1) denklemin analitik çözümü

$$u(x, t) = \tanh(2x + 4t) \quad (4.4.3)$$

$$v(x, t) = \tanh(2x + 4t) \quad (4.4.4)$$

dır [63].

(4.4.2) başlangıç koşulları ile verilen (4.4.1) denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için, c_1 ve c_2 integral sabitleri olmak üzere $\mathcal{L}_1[c_1] = 0$ ve $\mathcal{L}_2[c_2] = 0$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1[\phi_1(x, t; q)] &= \frac{\partial^\alpha \phi_1(x, t; q)}{\partial t^\alpha} \\ \mathcal{L}_2[\phi_2(x, t; q)] &= \frac{\partial^\beta \phi_2(x, t; q)}{\partial t^\beta} \end{aligned}$$

lineer operatörleri seçelim. (4.4.1) denkleminde lineer olmayan operatörler

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1[\phi_1(x, t; q)] &= \frac{\partial^\alpha \phi_1(x, t; q)}{\partial t^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi_1(x, t; q)}{\partial x^3} + 3(\phi_1(x, t; q))^2 \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial x} \\ &\quad - 3 \frac{\partial(\phi_2(x, t; q) \frac{\partial \phi_2(x, t; q)}{\partial x})}{\partial x} - 3 \frac{\partial(\phi_1(x, t; q) (\phi_2(x, t; q))^2)}{\partial x} \\ \mathcal{N}_2[\phi_2(x, t; q)] &= \frac{\partial^\beta \phi_2(x, t; q)}{\partial t^\beta} + \frac{\partial^3 \phi_2(x, t; q)}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial(\phi_2(x, t; q) \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial x})}{\partial x} \\ &\quad - 6\phi_1(x, t; q)\phi_2(x, t; q) \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial x} - 3(\phi_1(x, t; q))^2 \\ &\quad - (\phi_2(x, t; q))^2 \frac{\partial \phi_2(x, t; q)}{\partial x}\end{aligned}$$

elde edilir. $H_1(x, t) = 1$ ve $H_2(x, t) = 1$ seçilmesiyle sıfırıncı-derece deformasyon denklemleri

$$(1 - q)\mathcal{L}_1[\phi_1(x, t; q) - u_0(x, t)] = q\hbar_1\mathcal{N}_1[\phi_1(x, t; q)] \quad (4.4.5)$$

$$(1 - q)\mathcal{L}_2[\phi_2(x, t; q) - v_0(x, t)] = q\hbar_2\mathcal{N}_2[\phi_2(x, t; q)] \quad (4.4.6)$$

olur. Açık olarak $q = 0$ ve $q = 1$ alınır sırasıyla

$$\phi_1(x, t; 0) = u_0(x, t) = u(x, 0),$$

$$\phi_2(x, t; 0) = v_0(x, t) = v(x, 0),$$

$$\phi_1(x, t; 1) = u(x, t),$$

$$\phi_2(x, t; 1) = v(x, t)$$

bulunur. (4.4.5) ve (4.4.6) sıfırıncı-derece deformasyon denklemlerinde q gömme parametresine göre m defa türev alındıktan sonra $m!$ ile bölünür ve son olarak da $q = 0$ alınır, sırasıyla m . derece deformasyon denklemleri

$$\mathcal{L}_1[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar_1 R_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (4.4.7)$$

$$\mathcal{L}_2[v_m(x, t) - \chi_m v_{m-1}(x, t)] = \hbar_2 R_m(\vec{v}_{m-1}) \quad (4.4.8)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
R_m(\vec{u}_{m-1}) &= \frac{\partial^\alpha u_{m-1}(x,t)}{\partial t^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_{m-1}(x,t)}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=0}^{m-1} v_n(x,t) \frac{\partial v_{m-1-n}(x,t)}{\partial x} \right) \\
&\quad + 3 \sum_{n=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^n u_k(x,t) u_{n-k}(x,t) \right) \frac{\partial u_{m-1-n}(x,t)}{\partial x} \\
&\quad - 3 \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=0}^n u_k(x,t) v_{n-k}(x,t) \right) v_{m-1-n}(x,t) \\
R_m(\vec{v}_{m-1}) &= \frac{\partial^\beta v_{m-1}(x,t)}{\partial t^\beta} + \frac{\partial^3 v_{m-1}(x,t)}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=0}^{m-1} v_n(x,t) \frac{\partial u_{m-1-n}(x,t)}{\partial x} \right) \\
&\quad - 6 \sum_{n=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^n u_k(x,t) v_{n-k}(x,t) \right) \frac{\partial u_{m-1-n}(x,t)}{\partial x} \\
&\quad - 3 \sum_{n=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^n (u_k(x,t) u_{n-k}(x,t) - v_k(x,t) v_{n-k}(x,t)) \right) \frac{\partial v_{m-1-n}(x,t)}{\partial x}
\end{aligned}$$

dır. $m \geq 1$ için (4.4.7) ve (4.4.8) m . derece deformasyon denklemlerinden

$$u_m(x,t) = \chi_m u_{m-1}(x,t) + \hbar_1 \mathcal{L}_1^{-1}[R_m(\vec{u}_{m-1})] \quad (4.4.9)$$

$$v_m(x,t) = \chi_m v_{m-1}(x,t) + \hbar_2 \mathcal{L}_2^{-1}[R_m(\vec{v}_{m-1})] \quad (4.4.10)$$

yazılabilir. Burada $\hbar_1 = \hbar_2$ alınarak ve (4.4.2) de verilen başlangıç koşulları kullanılarak, (4.4.9) ve (4.4.10) m . derece deformasyon denklemlerinden sırasıyla $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
u_0(x,t) &= \tanh(2x) \\
u_1(x,t) &= -\frac{4\hbar t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1) \cosh^2(2x)} \\
u_2(x,t) &= -\frac{4\hbar(1+\hbar)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1) \cosh^2(2x)} - \frac{128\hbar^2 \tan(2x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1) \cosh^2(2x)} + \frac{384\hbar^2 \tan(2x)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1) \cosh^4(2x)} \\
&\quad + \frac{96\hbar^2 \tan(2x)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1) \cosh^2(2x)} - \frac{384\hbar^2 \tan(2x)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1) \cosh^4(2x)} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
v_0(x, t) &= \tanh(2x) \\
v_1(x, t) &= -\frac{4\hbar t^\beta}{\Gamma(\beta + 1) \cosh^2(2x)} \\
v_2(x, t) &= -\frac{4\hbar(1 + \hbar)t^\beta}{\Gamma(\beta + 1) \cosh^2(2x)} + \frac{256\hbar^2 \tan(2x)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1) \cosh^2(2x)} - \frac{576\hbar^2 \tan(2x)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1) \cosh^4(2x)} \\
&\quad - \frac{288\hbar^2 \tan(2x)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1) \cosh^2(2x)} + \frac{576\hbar^2 \tan(2x)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1) \cosh^4(2x)} \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

elde edilir.

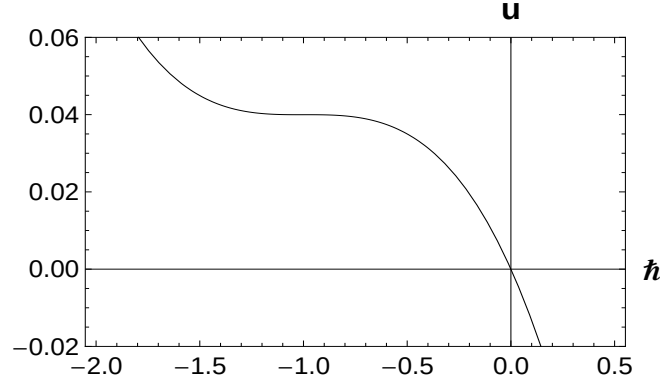
(4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden problemin Homotopi Analiz yöntemi kullanılarak elde edilen ilk 3 terimi Mathematica yardımıyla hesaplanarak Homotopi Analiz çözümleri

$$u_{app3}(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) \quad (4.4.11)$$

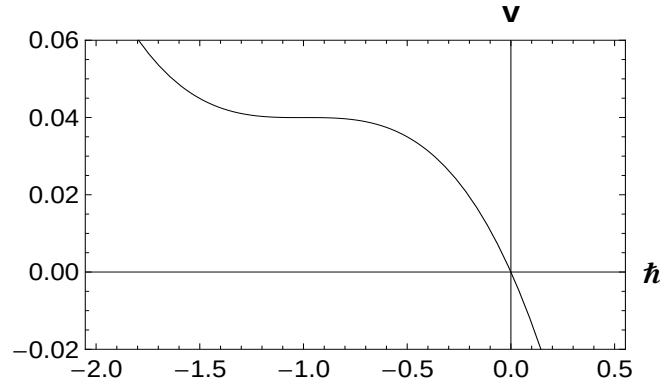
$$v_{app3}(x, t) = v_0(x, t) + v_1(x, t) + v_2(x, t) + v_3(x, t) \quad (4.4.12)$$

şeklinde bulundu.

(4.4.11) ve (4.4.12) yaklaşık çözümlerinin yakınsak olacak şekilde $\hbar$ yardımcı parametresinin uygun aralığını belirlemek için $\alpha, \beta = 1$ durumunda $\hbar$ eğrisi $u_{app3}(0, 0.01)$ için Şekil 4.19 ve $v_{app3}(0, 0.01)$ için Şekil 4.20 de verildi. Açıkça görüldüğü gibi, seri çözümlerini yakınsak yapacak $\hbar$ 'nın uygun değerleri yaklaşık olarak $-1.2 \leq \hbar \leq -0.8$ aralığı içerisinde kalır.



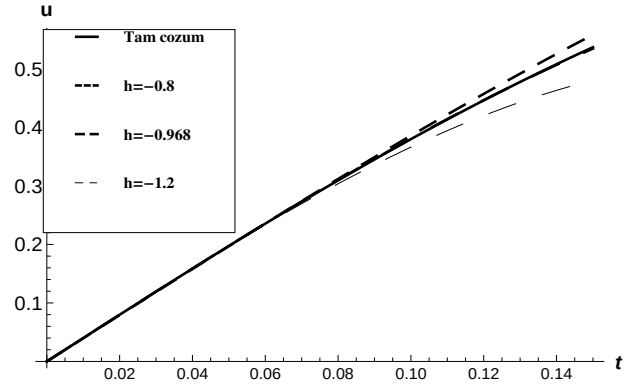
Şekil 4.19 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\alpha, \beta = 1$ durumunda $u_{app3}(0, 0.01)$ için h eğrisi



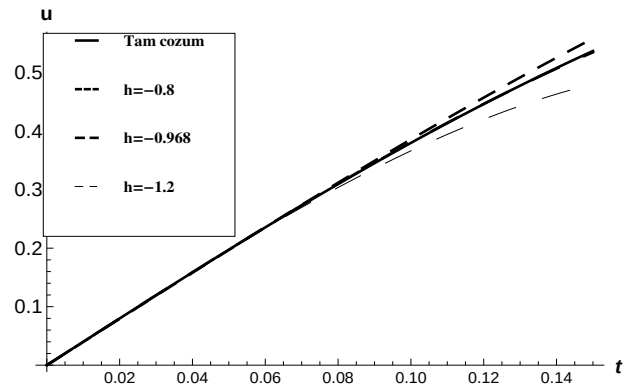
Şekil 4.20 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\alpha, \beta = 1$ durumunda $v_{app3}(0, 0.01)$ için h eğrisi

Şekil 4.21 ve Şekil 4.22 de sırasıyla $\alpha, \beta = 1$ olması durumunda değişik h değerleri için elde edilen $u_{app3}(0, t)$, $v_{app3}(0, t)$ yaklaşık çözümlerin ve $u(0, t)$, $v(0, t)$ tam çözümlerin grafikleri verildi. Grafiklerden $h = -0.968$ değerinde yaklaşık çözümlerin grafikleri tam çözümlerin grafiklerine oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Şekil 4.23 (a) ve (b) de $\alpha, \beta = 1$ ve $h = -0.968$ için sırasıyla $u_{app3}(x, t)$ yaklaşık ve (4.4.3) de verilen $u(x, t)$ tam çözüm yüzeyleri verildi. Şekil 4.24 (a) ve (b) de ise sırasıyla $\alpha, \beta = 1$ ve $h = -0.968$ için $v_{app3}(x, t)$ yaklaşık ve (4.4.4) de verilen $v(x, t)$

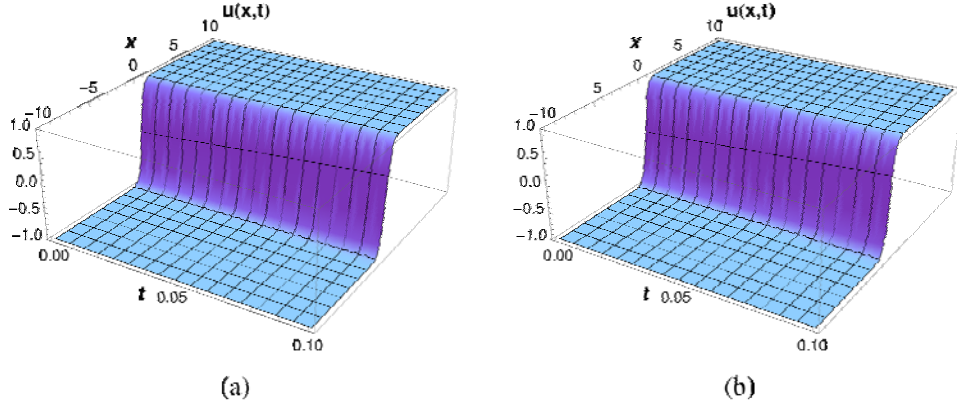


Şekil 4.21 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\alpha, \beta = 1$ durumunda farklı h değerleri için $u_{app3}(0, t)$ Homotopi Analiz çözüm ve $u(0, t)$ tam çözüm eğrileri

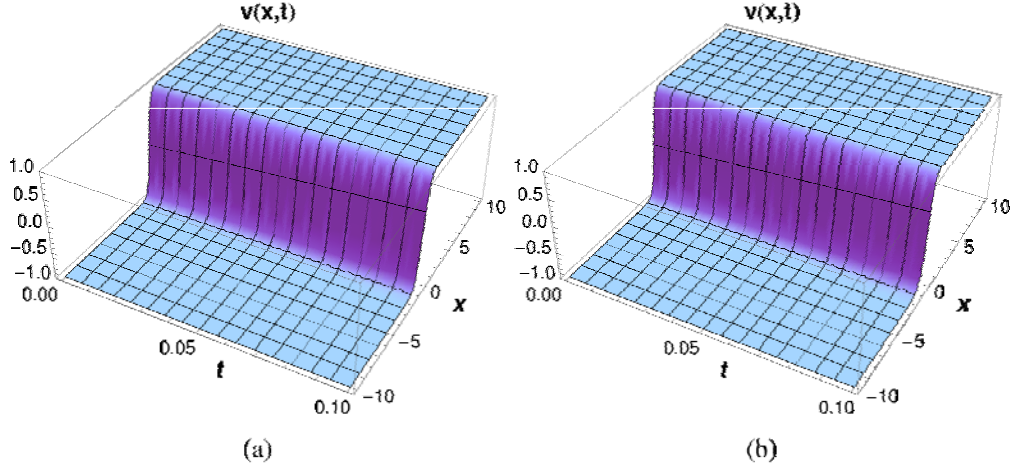


Şekil 4.22 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\alpha, \beta = 1$ durumunda farklı h değerleri için $v_{app3}(0, t)$ Homotopi Analiz çözüm ve $v(0, t)$ tam çözüm eğrileri

tam çözüm yüzeyleri verildi. Yüzeyler incelendiğinde Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen çözümler ile tam çözümlerin uyumlu olduğu görülmektedir.



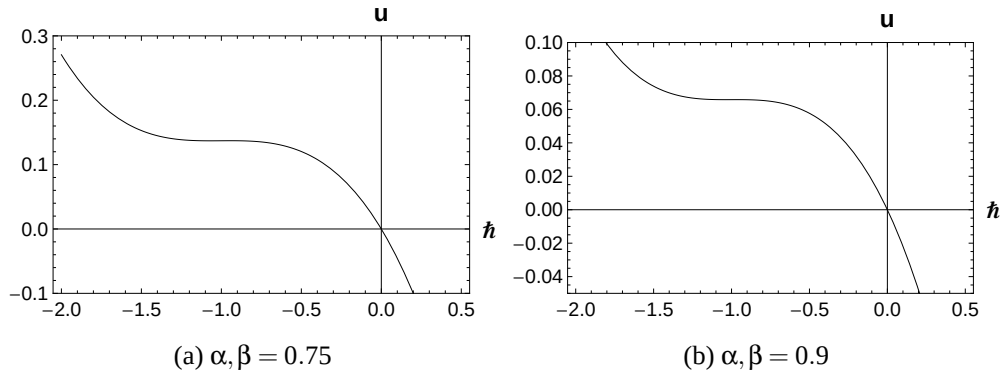
Şekil 4.23 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\alpha, \beta = 1$ ve (a) $\hbar = -0.968$ için $u_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümü, (b) $u(x, t)$ tam çözümü



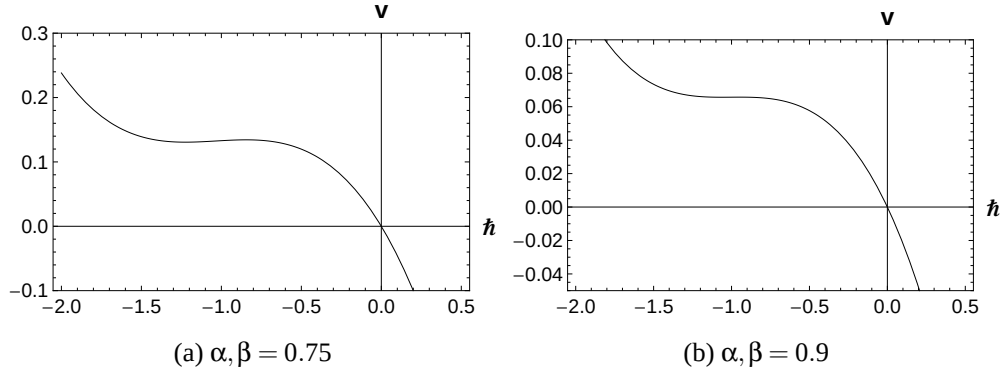
Şekil 4.24 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\alpha, \beta = 1$ ve (a) $\hbar = -0.968$ için $v_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümü, (b) $v(x, t)$ tam çözümü

α ve β 'nin farklı değerleri için verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminin Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen sırasıyla $u_{app3}(x, t)$ ve $v_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin $\alpha, \beta = 0.75$ ve $\alpha, \beta = 0.9$ değerlerinde ki yakınsaklık aralığını belirlemek

için $\hbar$ eğrileri Şekil 4.25 (a)-(b) ve Şekil 4.26 (a)-(b) de verildi. Verilen eğrilerden kolayca görülmektedir ki $\hbar$ 'nın uygun değerleri yaklaşık olarak $-1.2 \leq \hbar \leq -0.8$ aralığı içerisinde kalmaktadır. Bu aralıktan seçilen $\hbar$ değerleri için elde edilen $u_{app3}(x,t)$ ve $v_{app3}(x,t)$ yaklaşık çözümleri verilen kesirli mertebeden denklemin (4.4.3) ve (4.4.4) de verilen $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ tam çözümlerine yakınsar.

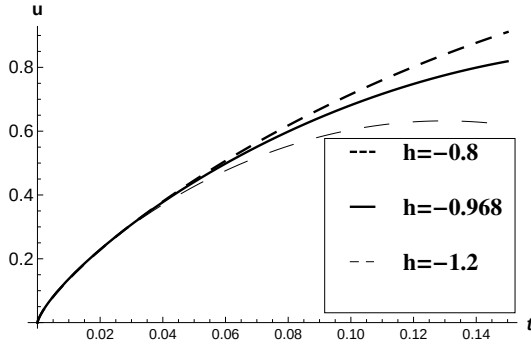


Şekil 4.25 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $u_{app3}(0,0.01)$ için $\hbar$ eğrileri

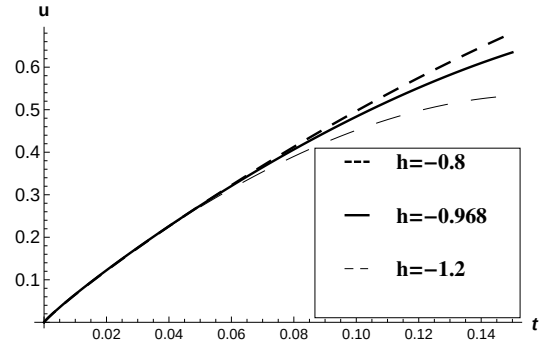


Şekil 4.26 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $v_{app3}(0,0.01)$ için $\hbar$ eğrileri

Şekil 4.27 ve Şekil 4.28 de $\alpha, \beta = 0.75$ ve $\alpha, \beta = 0.9$ değerlerinde farklı $\hbar$ değerleri için sırasıyla $u_{app4}(0,t)$ ve $v_{app4}(0,t)$ Homotopi Analiz çözüm grafikleri verildi.

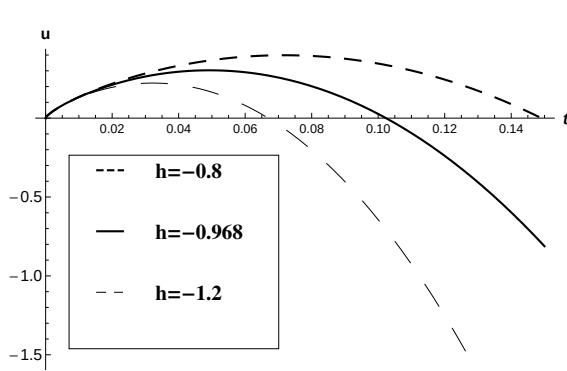


(a) $\alpha, \beta = 0.75$

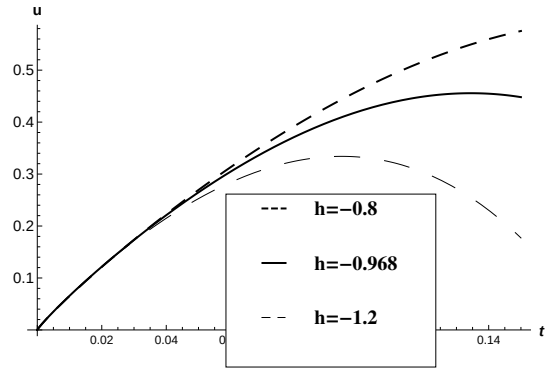


(b) $\alpha, \beta = 0.9$

Şekil 4.27 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde farklı $\hbar$ değerleri için $u_{app3}(0,t)$ Homotopi Analiz çözüm eğrileri



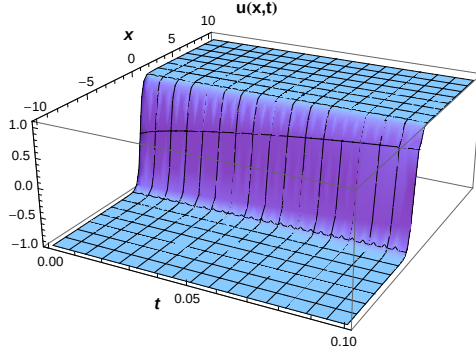
(a) $\alpha, \beta = 0.75$



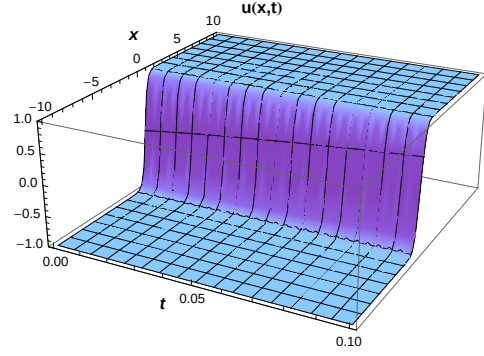
(b) $\alpha, \beta = 0.9$

Şekil 4.28 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde farklı $\hbar$ değerleri için $v_{app3}(0,t)$ Homotopi Analiz çözüm eğrileri

Şekil 4.29 (a)-(b) ve Şekil 4.30 (a)-(b) de $\alpha, \beta = 0.75$ ve $\alpha, \beta = 0.9$ durumunda $\hbar = -0.968$ için sırasıyla $u_{app3}(x, t)$ ve $v_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümlerin yüzeyleri verildi.

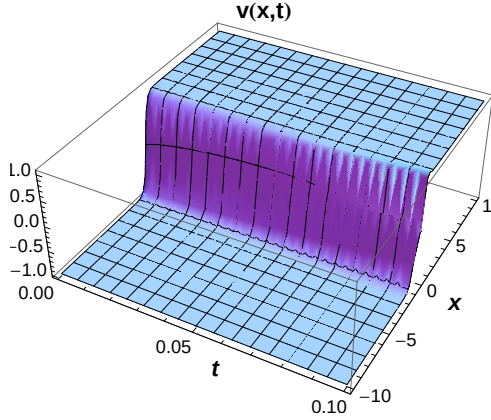


(a) $\alpha, \beta = 0.75$

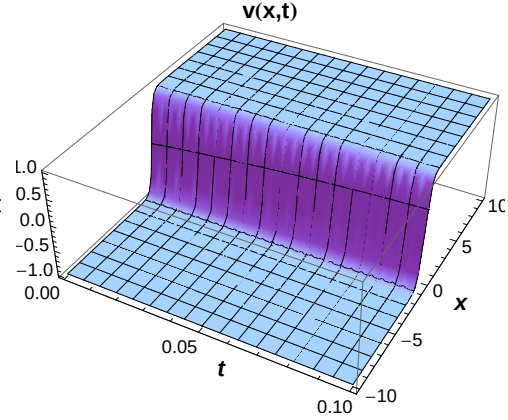


(b) $\alpha, \beta = 0.9$

Şekil 4.29 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\hbar = -0.968$ için $u_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümü



(a) $\alpha, \beta = 0.75$



(b) $\alpha, \beta = 0.9$

Şekil 4.30 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\hbar = -0.968$ için $v_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümü

Tablo 4.9 da $\alpha, \beta = 1$, $\hbar = -0.968$ için kesirli mertebeden coupled mKdV denkleminin Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $u_{app3}(x, t)$ ve $v_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümleri tam çözümler ile karşılaştırıldı. Elde edilen çözümlerin tam çözümlerle uyumlu olduğu

Tablo 4.9 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde $\alpha, \beta = 1$ ve $\hbar = -0.968$ için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $u_{app3}(x, t)$ ve $v_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümlerinin tam çözümler ile karşılaştırılması

t	x	$u_{app3}(x, t)$	$u(x, t)$	$v_{app3}(x, t)$	$v(x, t)$
0.01	1	0.9667473176	0.9667472878	0.9667473176	0.9667472878
	2	0.9993808502	0.9993808497	0.9993808502	0.9993808497
	3	0.9999886564	0.9999886564	0.9999886564	0.9999886564
	4	0.9999997922	0.9999997922	0.9999997922	0.9999997922
	5	0.9999999962	0.9999999962	0.9999999962	0.9999999962
0.02	1	0.9692644272	0.9692645889	0.9692644272	0.9692645889
	2	0.9994284361	0.9994284386	0.9994284361	0.9994284386
	3	0.9999895285	0.9999895286	0.9999895285	0.9999895286
	4	0.9999998082	0.9999998082	0.9999998082	0.9999998082
	5	0.9999999965	0.9999999965	0.9999999965	0.9999999965
0.03	1	0.9715935755	0.9715940773	0.9715935755	0.9715940773
	2	0.9994723682	0.9994723707	0.9994723682	0.9994723707
	3	0.9999903336	0.9999903336	0.9999903336	0.9999903336
	4	0.9999998230	0.9999998230	0.9999998230	0.9999998230
	5	0.9999999968	0.9999999968	0.9999999968	0.9999999968
0.04	1	0.9737494293	0.9737493633	0.9737494293	0.9737493633
	2	0.9995129573	0.9995129269	0.9995129573	0.9995129269
	3	0.9999910774	0.9999910768	0.9999910774	0.9999910768
	4	0.9999998366	0.9999998366	0.9999998366	0.9999998366
	5	0.9999999970	0.9999999970	0.9999999970	0.9999999970

açıkça görüldü.

Tablo 4.10 ve Tablo 4.11 de $\alpha, \beta = 0.3, 0.45, 0.6, 0.75$ ve 0.9 değerleri için kesirli mertebeden coupled mKdV denkleminin $u_{app3}(x, t)$ ve $v_{app3}(x, t)$ Homotopi Analiz

Tablo 4.10 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde farklı α, β değerleri ve $\hbar = -0.968$ için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $u_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümleri

t	x	$\alpha, \beta = 0.3$	$\alpha, \beta = 0.45$	$\alpha, \beta = 0.6$	$\alpha, \beta = 0.75$	$\alpha, \beta = 0.9$
0.01	1	1.0848429130	0.9886449973	0.9780346995	0.9722815461	0.9683723050
	2	1.0029139220	0.9999009570	0.9996000203	0.9994855367	0.9994115777
	3	1.0000538890	0.9999982279	0.9999926753	0.9999905750	0.9999892196
	4	1.0000009870	0.9999999676	0.9999998658	0.9999998274	0.9999998025
	5	1.0000000180	0.9999999994	0.9999999975	0.9999999968	0.9999999964
0.02	1	1.1930172270	1.0037155350	0.9828634884	0.9765426683	0.9716711722
	2	1.0061229990	1.0003657530	0.9997102140	0.9995670143	0.9994738563
	3	1.0001131320	1.0000068130	0.9999947018	0.9999920685	0.9999903609
	4	1.0000020720	1.0000001250	0.9999999030	0.9999998547	0.9999998235
	5	1.0000000380	1.0000000020	0.9999999982	0.9999999973	0.9999999968
0.03	1	1.3019433460	1.0228990230	0.9870119754	0.9796549237	0.9744533421
	2	1.0092949450	1.0009496000	0.9998197279	0.9996284489	0.9995263505
	3	1.0001716750	1.0000175950	0.9999967204	0.9999931954	0.9999913229
	4	1.0000031450	1.0000003220	0.9999999399	0.9999998754	0.9999998411
	5	1.0000000580	1.0000000060	0.9999999989	0.9999999977	0.9999999971
0.04	1	1.4109941620	1.0459195470	0.9915093579	0.9821901569	0.9768630949
	2	1.0124365100	1.0016371820	0.9999472723	0.9996810708	0.9995719238
	3	1.0002296490	1.0000302890	0.9999990736	0.9999941616	0.9999921581
	4	1.0000042070	1.0000005550	0.9999999830	0.9999998931	0.9999998564
	5	1.0000000770	1.0000000100	0.9999999997	0.9999999980	0.9999999974

çözümleri verildi.

Tablo 4.11 (4.4.1) ve (4.4.2) ile verilen kesirli mertebeden coupled mKdV probleminde farklı α, β değerleri ve $\hbar = -0.968$ için Homotopi Analiz yöntemi ile elde edilen $v_{app3}(x, t)$ yaklaşık çözümleri

t	x	$\alpha, \beta = 0.3$	$\alpha, \beta = 0.45$	$\alpha, \beta = 0.6$	$\alpha, \beta = 0.75$	$\alpha, \beta = 0.9$
0.01	1	1.2709546950	1.0049197390	0.9792125004	0.9723485870	0.9683745752
	2	1.0029873380	0.9999073769	0.9996004849	0.9994855632	0.9994115786
	3	1.0000539140	0.9999982300	0.9999926754	0.9999905750	0.9999892196
	4	1.0000009870	0.9999999676	0.9999998658	0.9999998274	0.9999998025
	5	1.0000000180	0.9999999994	0.9999999975	0.9999999968	0.9999999964
0.02	1	1.5403140920	1.0452018240	0.9869648292	0.9768615704	0.9716859244
	2	1.0062599980	1.0003821180	0.9997118318	0.9995671401	0.9994738621
	3	1.0001131780	1.0000068180	0.9999947023	0.9999920686	0.9999903609
	4	1.0000020720	1.0000001250	0.9999999030	0.9999998547	0.9999998235
	5	1.0000000380	1.0000000020	0.9999999982	0.9999999973	0.9999999968
0.03	1	1.8021886230	1.0946169600	0.9955212027	0.9804490009	0.9744974283
	2	1.0094922780	1.0009778910	0.9998230846	0.9996287621	0.9995263679
	3	1.0001717420	1.0000176040	0.9999967215	0.9999931955	0.9999913229
	4	1.0000031450	1.0000003220	0.9999999399	0.9999998754	0.9999998411
	5	1.0000000580	1.0000000060	0.9999999989	0.9999999977	0.9999999971
0.04	1	2.0590730290	1.1516731290	1.005791056	0.9837071194	0.9769589547
	2	1.0126921590	1.0016788990	0.9999529060	0.9996816692	0.9995719616
	3	1.0002297350	1.0000303030	0.9999990755	0.9999941618	0.9999921581
	4	1.0000042070	1.0000005550	0.9999999830	0.9999998931	0.9999998564
	5	1.0000000770	1.0000000100	0.9999999997	0.9999999980	0.9999999974

KAYNAKLAR

- [1] K.S. Miller and B. Ross, *An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, J. Wiley-Sons, Canada, 1993.
- [2] L. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, London, 1999.
- [3] K.B. Oldham and J. Spainer, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [4] P. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus In Physics*, World Scientific, Germany, 2000.
- [5] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, New York, 2006.
- [6] L. Debnath and D. Bhatta, *Integral Transforms and Their Applications*, Chapman-Hall/CRC, USA, 2007.
- [7] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivative Theory and Applications*, Gordon and Breach, Longhorne, 1993.
- [8] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, New Jersey, 2000.
- [9] R. Bertram, *Fractional Calculus and Its Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [10] M.L. Wang, *Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations*, **Phys. Lett. A**, 199 (1995) 169-172.
- [11] M.L. Wang, Y. Zhou and Z.B. Li, *Applications of a homogenous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics*, **Phys. Lett. A**, 216 (1996) 67-75.
- [12] E. Fan, *To new applications of the homogenous balance method*, **Phys. Lett. A**, 265 (2000) 353-357.

- [13] Y.B. Zhou, M.L. Wang and Y.M. Wang, *Periodic wave solutions to coupled KdV equations with variable coefficients*, **Phys. Lett. A**, 308 (2003) 31-36.
- [14] J.B. Liu and K.Q. Yang, *The extended F-expansion method and exact solutions of nonlinear PDE's*, **Chaos Soliton. Fract.**, 22 (2004) 111-121.
- [15] D.S. Wang and H.Q. Zhang, *Further improved F-expansion method and new exact solutions of Konopelchenko-Dubrovsky equation*, **Chaos Soliton. Fract.**, 25 (2005) 601-610.
- [16] E. Yomba, *The extended F-expansion method and its application for solving the nonlinear wave, DKGZ, GDS, DS and GZ equations*, **Phys. Lett. A**, 340 (2005) 149-160.
- [17] W. Malfeit, *Solitary wave solutions of nonlinear wave equations*, **Am. J. Phys.**, 60 (1992) 650-654.
- [18] E.J. Parkes and B.R. Duffy, *An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to nonlinear evolution equations*, **Comp. Phys. Commun.**, 98 (1996) 288-300.
- [19] Z.B. Li and S.Q. Zhang, *Exact solitary wave solutions for nonlinear wave equations using symbolic computation*, **Acta Math. Sci.**, 17 (1997) 81-89.
- [20] C. Yang, *A simple transformation for nonlinear waves*, **Phys. Lett. A**, 224 (1996) 77-84.
- [21] A.M. Wazwaz, *Analytic study for fifth-order KdV-type equations with arbitrary power nonlinearities*, **Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**, 12 (2007) 904-909.
- [22] S. Liu, Z. Fu, S. Liu and Q. Zhao, *Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations*, **Phys. Lett. A**, 289 (2001) 69-74.

- [23] Z. Fu, S. Liu, S. Liu and Q. Zhao, *New Jacobi elliptic function expansion method and new periodic solutions of nonlinear wave equations*, **Phys. Lett. A**, 290 (2001) 72-76.
- [24] Z. Huiqun, *Extended Jacobi elliptic function expansion method and its applications*, **Comm. Nonlinear Sci. Num. Simul.**, 12 (2007) 627-635.
- [25] J.B. Liu, L. Yang and K. Yang, *Jacobi elliptic function solutions of some nonlinear PDE's*, **Phys. Lett. A**, 325 (2004) 268-275.
- [26] M.A. Abdou and A. Elhanbaly, *Construction of periodic and solitary wave solutions by the extended Jacobi elliptic function expansion method*, **Comm. Nonlinear Sci. Num. Simul.**, 12 (2007) 1229-1241.
- [27] E.J. Parkes, B.R. Duffy and P.C. Abbott, *The Jacobi elliptic-function method for finding periodic wave solutions to nonlinear evolution equations*, **Phys. Lett. A**, 295 (2002) 280-286.
- [28] E. Fan and J. Zhang, *Applications of Jacobi elliptic function method to special type nonlinear equations*, **Phys. Lett. A**, 305 (2002) 383-392.
- [29] J.H. He and X.H. Wu, *Construction of solitary solution and compacton-like solution by a variational iteration method*, **Chaos Soliton. Fract.**, 29 (2006) 108-113.
- [30] A.M. Wazwaz, *The variational iteration method for rational solutions for KdV, K(2,2), Burgers and cubic Boussinesq equations*, **J. Comp. Appl. Math.**, 207 (2007) 18-23.
- [31] E. Yusufoglu and A. Bekir, *Application of Variational Iteration Method to the Regularized Long Wave Equation*, **Comp. Math. Appl.**, 54 (2007) 1154-1161.
- [32] M.L. Wang, X. Li and J. Zhang, *The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics* **Phys. Lett. A**, 372 (2008) 417-423.

- [33] M.L. Wang, J. Zhang and X. Li, *Application of the $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion to travelling wave solutions of the Broer-Kaup and the approximate long water wave equations*, **Appl. Math. Comput.**, 206 (2008) 321-326.
- [34] A. Bekir, *Application of the $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method for nonlinear evolution equations*, **Phys. Lett. A**, 372 (2008) 3400-3406.
- [35] L.X. Li and W.L. Wang, *The (G'/G) -expansion method and travelling wave solutions for a higher-order nonlinear schrödinger equation*, **Appl. Math. Comput.**, 208 (2009) 440-445.
- [36] S. Kutluay, A. Esen, and O. Tasbozan, *The (G'/G) -expansion method for some nonlinear evolution euations*, **Appl. Math. Comput.**, 217 (2010) 384-391.
- [37] J.H. He, *Homotopy perturbation method for bifucation of nonlinear problems*, **Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**, 6 (2005) 207-208.
- [38] J.H. He, *Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations*, **Chaos Soliton. Fract.**, 26 (2005) 695-700.
- [39] J.H. He, *New interpretation of homotopy perturbation method method*, **Int. J. Modern Phys. B**, 20 (2006) 2561-2568.
- [40] J.H. He and X.H. Wu, *Exp-function method for nonlinear wave equations*, **Chaos Soliton. Fract.**, 30 (2006) 700-708.
- [41] X.H. Wu and J.H. He, *Solitary solutions, periodic solutions and compacton-like solutions using the Exp-function method*, **Comp. Math. Appl.**, 54 (2007) 966-986.
- [42] A. Bekir and A. Boz, *Exact solutions for a class of nonlinear partial differential equations using Exp-function Method*, **Int. J. Nonlinear Sci. Num. Simul.**, 8 (2007) 505-512.

- [43] A. Esen and S. Kutluay, *New Solitary Solutions for the Generalized RLW Equation by He's Exp-function Method*, **Int. J. Nonlinear Sci. Num. Simul.**, 10 (2009) 551-556.
- [44] S.J. Liao, "*The Homotopy Analysis Method and its applications in mechanics*" PhD Thesis, Shanghai Jiao Tong University, 1992.
- [45] S.J. Liao, *On the homotopy analysis method for nonlinear problems*, **Appl. Math. Comput.**, 147 (2004) 499-513.
- [46] T. Hayat and M. Sajid, *Homotopy analysis of MHD boundary layer flow of an upper-convected Maxwell fluid*, **Int. J. Eng. Sci.**, 45 (2007) 393-401.
- [47] S. Abbasbandy, *Soliton solutions for the 5th-order KdV equation with the homotopy analysis method*, **Nonlinear Dyn.**, 51 (2008) 83-87.
- [48] S. Abbasbandy, *The application of the homotopy analysis method to solve a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation*, **Phys. Lett. A**, 361 (2007) 478-483.
- [49] L. Song and H.Q. Zhang, *Application of homotopy analysis method to fractional KdV-Burgers-Kuramoto equation*, **Phys. Lett. A**, 367 (2007) 88-94.
- [50] S. Abbasbandy, *The application of the homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer*, **Phys. Lett. A**, 360 (2006) 109-113.
- [51] S. Abbasbandy, *Homotopy analysis method for heat radiation equations*, **Int. Commun. Heat Mass. Transf.** 34 (2007) 380-387.
- [52] Y. Bouremel, *Explicit series solution for the Glauert-jet problem by means of the homotopy analysis method*, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.**, 12 (5) (2007) 714-724.
- [53] Z. Wang, L. Zou and H. Zhang, *Applying homotopy analysis method for solving differential-difference equation*, **Phys. Lett. A**, 369 (2007) 77-84.

- [54] A. Molabahrami and F. Khani, *The homotopy analysis method to solve the Burgers-Huxley equation*, **Nonlinear Anal. B: Real World Appl.**, 10 (2009) 589-600.
- [55] H. Xu and J. Cang, *Analysis of a time fractional wave-like equation with the homotopy analysis method*, **Phys. Lett. A**, 372 (2008) 1250-1255.
- [56] S.J. Liao, *Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems*, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.**, 14 (2009) 983-997.
- [57] J. Klaus, *Topologie*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [58] S.J. Liao, *Beyon Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*, CRC Press, Chapman&Hall, Boca Raton, 2003.
- [59] S. Momani, *Analytic approximate solution for fractional heat-like and wave-like equations with variable coefficients using the decomposition method*, **Appl. Math. Comput.**, 165 (2005) 459-472.
- [60] S.J. Liao, *Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method*, **Appl. Math. Comput.**, 169 (2005) 1186-1194.
- [61] R.Y. Molliq, M.S.M. Noorani and I. Hashim, *Variational iteration method for fractional heat- and wave-like equations*, **Nonlinear Anal. R.W.A.**, 10 (2009) 1854-1869.
- [62] L. Song, Q. Wang, and H. Zhang, *Rational approximation solution of the fractional Sharma-Tasso- Olevier equation*, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 224 (2009) 210-218.
- [63] D.B. Cao, J.R. Yanb and Y. Zhangc, *Exact solutions for a new coupled MKdV equations and a coupled KdV equations*, **Phys. Lett. A**, 297 (2002) 68-74.

ÖZGEÇMİŞ

4 Eylül 1986 tarihinde Bandırma’da doğdu. İlköğretim ve lise öğrenimini Bandırma’da tamamladı. 2004 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Haziran 2008’de bölüm üçüncüsü olarak öğrenimini tamamlayıp yine 2008’de Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. Aynı yıl Tübitak Yurt İçi Yüksek Lisans burs programını kazandı. Eylül 2009’da İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen görevine devam etmektedir. 2009-2010 bahar döneminde Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programından kaydını aldrıp İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kaydını yaptırdı.