

T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
TAŞIYICI DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK
METOTLAR

Yılmaz IŞIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Şubat-2015

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamda lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin taşıyıcı dalga çözümleri için kullanılan bazı metotların analizi yapılmıştır. Analizleri yapılan metotlar ile CRWP denkleminin çözümleri elde edilmiştir. KDV(Su Dalga Denklemi) ve CRWP denklemi üzerinde çalışılıp uygulaması Mathematica programı ile bilgisayarla desteklenmiştir. Tabiat olayların modellenmesi diferansiyel denklemlerle olur.

Bu çalışmada beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd.Doç.Dr.Abdullah BAYKAL' a ve bugüne kadar beni destekleyen aileme çok teşekkür ediyorum.

Yılmaz IŞIK

Diyarbakır-2015

T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
TAŞIYICI DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK
METOTLAR

Yılmaz IŞIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Şubat-2015

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamda lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin taşıyıcı dalga çözümleri için kullanılan bazı metotların analizi yapılmıştır. Analizleri yapılan metotlar ile CRWP denkleminin çözümleri elde edilmiştir. KDV(Su Dalga Denklemi) ve CRWP denklemi üzerinde çalışılıp uygulaması Mathematica programı ile bilgisayarla desteklenmiştir. Tabiat olayların modellenmesi diferansiyel denklemlerle olur.

Bu çalışmada beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd.Doç.Dr.Abdullah BAYKAL' a ve bugüne kadar beni destekleyen aileme çok teşekkür ediyorum.

Yılmaz IŞIK

Diyarbakır-2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR	9
3. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAŞIYICI DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK METOTLAR	15
3.1. Analitik Metotların Analizi	15
3.1.1. Homojen Balans metot	15
3.1.2. Birleştirilmiş Rasyonel Açılım Metot	17
3.1.2.1. Jacobi Rasyonel Açılım Metot	21
3.1.2.2. Riccati Rasyonel Açılım Metot	22
3.1.3. Kudryashov Metot	23
3.1.4. Üstel Fonksiyon Metot	24
3.1.5. $\frac{G'}{G}$ -Açılım Metot	26
4. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAŞIYICI DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI UYGULAMALAR	27
4.1. CRPW Denkleminde Genelleştirilmiş Rasyonel Açılım Metotlarının Uygulanması	27
4.1.1. Jakobi Eliptik Fonksiyon Rasyonel Açılım Metot	27
4.1.2. Riccati Rasyonel Açılım Metot	31

4.2.	CRPW Denklemine Genelleştirilmiş Kudryashov Metodunun Uygulanması	36
4.3.	CRPW Denklemine Genelleştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodunun Uygulanması	38
4.4.	CRPW Denklemine Genelleştirilmiş $\frac{G'}{G}$ -Açılım Metodunun Uygulanması	41
5.	SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	45
6.	KAYNAKLAR	47
	ÖZGEÇMİŞ	53

ÖZET

LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAŞIYICI DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK METOTLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yılmaz IŞIK

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UYGULAMALI MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

Bu çalışma dört bölüm halinde oluşturulmuştur. Birinci bölümde temel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin taşıyıcı dalga çözümleri için kullanılan bazı metotların analizi yapılmıştır. Bu metotların temelinde homojen balans metodu önemli bir yere sahiptir ve bu metot ile lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem adi diferansiyel denkleme dönüşmektedir. Bu yüzden bu metotlar sadece lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde analizleri yapılan metotlar ile CRWP denkleminin çözümleri elde edilmiştir. KDV (Su Dalga Denklemi) ve CRWP denklemi üzerinde çalışılıp Mathematica programı ile bilgisayarla desteklenmiştir.

Dördüncü bölümde, bu çalışmada elde edilen sonuçlar literatürde bulunan çalışmalar ile desteklenerek genel bir değerlendirme yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Solitary dalgalar, Solitonlar, Jakobi eliptik fonksiyon, Dengeleme terimi, Analitik çözüm, Backlund Dönüşümü, Rasyonel Açılım metot, Jakobi eliptik fonksiyon metot, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metot, Üstel fonksiyon metot, CRWP denklemi.

ABSTRACT

SOME SEMI-ANALYTIC METHODS FOR TRAVELLING WAVE SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

MASTER'S THESIS

Yılmaz IŞIK

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF APPLIED SCIENCES

UNIVERSITY OF DICLE

2015

This study is constructed in four chapters. In chapter one, some fundamental definitions are given.

In chapter two, it is made a historical analyze of some methods to obtain periodic wave solutions of nonlinear partial differential equations. All of these methods are based on finding balance term with balancing of the highest order linear and nonlinear term. So, these methods can be only applied to nonlinear partial differential equation. Moreover, these methods convert a nonlinear partial differential equation to an ordinary differential equation. Therefore, solution can be obtained easily.

In chapter three, it is obtained periodic solutions of some nonlinear partial differential equations by using one of the methods whose analysis is made in chapter two. KDV(water wave equation) and is supported by computed with the equation CRWP assayed Mathematica program.

In chapter four, it is made a generalized assessment by supporting results which are obtained in this study with some studies in literature.

Keywords: Solitary waves, Solitons, Jacobi elliptic function, Balance term, Analytical solution,

Periodic solution, Tanh method, Jacobi elliptic function method, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -
expansion method, Exp-function method, CRWP equation.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1. Hareket eden, enine ilerleyen dalga.....	4
Şekil 2. Bir boyutta dalga atmasının sağa doğru v hızı ile ilerlemesi (a) $t = 0$ da atmanın ifadesi (b) t süre sonra şekil değişmez ve yer değiştirme $f(x - vt)$ ile verilir.....	5
Şekil 3. İki soliton etkileşimi	6
Şekil 4. Bir solitary dalga	7
Şekil 5. CRWP denkleminin 4. çözümünün reel kısmı için üç boyutlu hareket eden dalga görünümü.....	30
Şekil 6. CRWP denkleminin 4. çözümünün imajinel kısmı için üç boyutlu hareket eden dalga görünümü.....	30
Şekil 7. CRWP denkleminin Riccati 2.çözümü için üç boyutlu hareket eden dalga görünümü..	36
Şekil 8. CRWP denkleminin (3.5) çözümü için üç boyutlu periyodik dalga görünümü	37
Şekil 9. CRWP denkleminin 1. çözümü için üç boyutlu hareket eden dalga görünümü	41
Şekil 10. CRWP denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$ çözümü için üç boyutlu hareket eden dalga görünümü ..	44

SİMGELER LİSTESİ

M	: Dengeleme terimi
L	: Lineer Operatör
L^{-1}	: İntegral Operatörü
A_n	: Adomian Polinomları
ϕ_n, φ_n	: n – terim yaklaşımı
h	: Keyfi bir parametre
$H(x, t)$	: Keyfi bir fonksiyon
p	: Küçük bir parametre

KISALTMALAR

CRWP: Clannish periyodik rastlantısal hareket denklemi

KDV :Su Dalga Denklemi

1. GİRİŞ

Tarih içerisinde insanlar su kenarlarında, su birikintisine attıkları çakıl taşları sayesinde oluşturdukları dalga hareketini gözlemlemiştir. Birbirlerine seslenirken, yada tabiat kaynaklı oluşan dalga hareketini işitmişlerdir. Güneşten gelen ve 7 rengin birleşmesi ile oluşan dalga hareketini gözlemlemiştir. İlk ateşin bulunması ile beraber, ateşin çıkardığı ışık ve kızılötesi dalga olan ısı hissedilmiştir.

Dalga ifadesi fiziğin olmazsa olmazları haline gelmesi ise 19.y.y. dan itibaren gerçekleşmiş olup, konu ile ilgili birçok bilginin çalışması olmuştur. Dalga ifadesinin ilk tespiti ise ses dalgaları ile olmuştur. Sesin bir engele çarpıp geri dönmesi, yani yansıma olayı sesin dalga hareketi olduğuna dair güzel bir örneği oluşturmuştur.

Dalga ifadesi nedir? Ya da ne değildir? Bilindiği üzere Madde adı verdiğimiz topluluğun tamamı atomlardan oluşmuştur. Dalga denilince, bir atom düzeneği üzerinde hareket eden enerji düzeneği aklımıza gelmektedir. Nasıl ki, su kenarında duran bir kişi bir taş attığı zaman su haleleri oluşmaktadır; işte oluşan bu su haleleri birbirine çarparak hareket eden dalga hareketidir. Yani iç içe geçmiş su halelerinin her birisi diğer su halesinin hareketinin etkisi sonucu oluşmuştur. Biz bu harekete ise dalga hareketi adını veriyoruz.

Ses dediğimiz ve göremeyip kulaklarımız ile duyduğumuz dalga hareketi de, su dalgaları gibi birbiri içerisinde haleler oluşturan su dalgaları gibidir. Yani hareket için bir merkez ve bu merkezden yayılacak dalgaların hareket edeceği atom kütleleri, yani maddeye ihtiyaç duyulmaktadır. Uzay denilen ve madde parçacıklarının çok az olduğu bir ortamda sesiniz karşı tarafta sizi duymaya çalışan birileri olduğunda sizden çıkan dalga hareketinin ilerlemesi için yeterli madde bulunmadığı için karşı tarafa gitmeyecektir. Ama maddenin olduğu bir ortamda ses olunca, parçacıklar arasında sesin ilerlediğini kulağınız ile fark edilir. Bu dalga hareketi fizikte basit olarak osiloskop yardımıyla da görülebilir.

Tek dalga tipleme ses olmayıp; geniş bir spektrumda yer alan ve adına elektromanyetik spektrum denilen kısımda da değişik dalga tipleri bulunmaktadır. Bunlardan bazıları ise Radyo dalgaları, kızılötesi ışınlar grubunda yer almakta, arada

görünen dalgalar; ötesinde mor ötesi adı verilen ve röntgen ışınları, kozmik ışınlar gibi ışınların içerisinde yer aldığı ışınlar da bulunmaktadır.

Görünen ışınların dalga ya da tanecik olduğu konusu çok tartışılmış ve sonunda hem dalga ve hem de tanecik olduğu ifadesi kullanılmıştır. Yapılan deneyler, görünen ışınların yerine göre dalga ve yerine göre tanecik yapısı gösterdiğini ispatlamıştır.

Görünen ışıklardan daha büyük dalga boyuna sahip dalgalara ise kızılötesi dalgalar adı verilmiş ve bu dalgaların içerisinde radyo dalgaları ile televizyon dalgalarının bulunduğu tespit edilmiştir. Görünen ışıklardan daha küçük dalga boyuna sahip olan dalgalara ise mor ötesi ışınlar adı verilmiş ve bu ışınların içerisinde röntgen ışınları ile kozmik ışınların bulunduğu tespit edilmiştir.

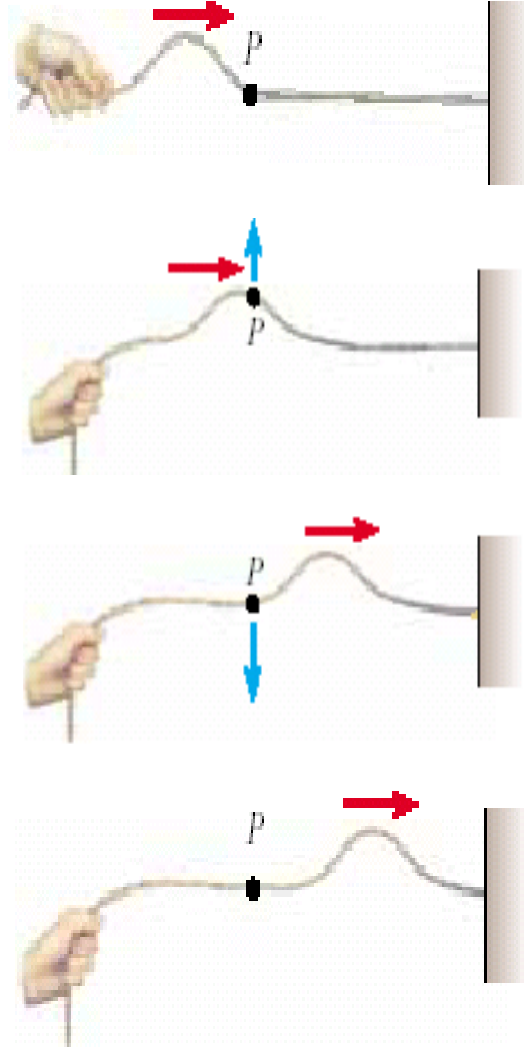
Genel olarak gerçek su dalgası olayı karmaşıktır ve doğrusal olmadıklarından dolayı matematiksel tarifi üç boyutlu karakterli ve görünen rastgele davranışından dolayı zordur. Bununla birlikte iki klasik teori vardır. Bunlar; biri Airy (1845) tarafından, diğeri Stokes (1880) tarafından basit dalgaları tarif etmek için geliştirilmiştir. Airy ve Stokes teorileri genel olarak su derinliğinin dalga uzunluğuna bağlı ve çok küçük olmadığı durumda dalga hareketini daha iyi açıklarlar. Sığ su için bir Cnoidal dalga teorisi, basit dalgaları kabul edilebilir bir yaklaşımla sağlar. Kırılma bölgesinin yakınındaki çok sığ su için, Solitary dalga teorisi, dalga hareketinin belli özelliklerini tatmin edici olarak sağlar. Bu teoriler dalga hareketini tarif eden matematiksel denklemlerle beraber başlıca karakteristiklerine göre tarif edilir. Bazı özel durumlar için literatürde birçok dalga teorisi bulunmaktadır.

İlk dalga teorisi küçük genlikli veya lineer dalga teorisi olarak isimlendirilip Airy (1845) tarafından geliştirilmiştir. Sadece kolay uygulanabilir olmasından değil, bütün dalga rejimlerinin geniş bir bölümü üzerinde güvenilir olmasından dolayı da, bu dalga teorisinin esas olarak önemi vardır. Matematiksel olarak Airy teorisi dalga hareketinin komple teorik tarifinin ilk yaklaşımı olarak düşünülebilir. Dalgaların daha komple teorik tarifi, serilerdeki her bir ilave terimin önceki terimlere bir düzeltme olduğu, sonsuz sayıdaki başarılı yaklaşımların toplamı olarak elde edilebilir. Bazı durumlar için dalgalar, sonlu genlikli teoriler olarak isimlendirilen, bu yüksek mertebe teorileri tarafından daha iyi tarif edilir.

Trochoidal teori olarak bilinen ilk sonlu genlik teorisi Gerstner (1802) tarafından geliştirilmiştir. Dalga profilinin bir trochoid olmasından ya da serbest yüzeyinden dolayı bu isim verilmiştir. Sadece klasik ilgisinden dolayı bu teoriden bahsedilmiştir. Açıklanan su parçacığı hareketinin gerçek doğada gözlenenden farklı olduğundan uygulama için tavsiye edilmez. Trochoidal teori dalga profilini oldukça hassas bir şekilde açıklar. Stokes (1880) trochoidal teoriden çok daha tatmin edici olan bir sonlu genlikli teori geliştirmiştir. Sığ su bölgeleri için Korteweg ve De Vries (1895) tarafından orijinal olarak geliştirilen cnoidal dalga teorisi bazı şartlar için dalga formunu ve birleşik hareketlerin oldukça güvenilir bir açıklamasını sağlar. Bununla birlikte cnoidal dalga teorisi, mühendislik problemlerinin çözümünde, gerçek uygulamaları dikkate almıştır. Bu, hesaplardaki zorluklara bağlı olabilir. Son zamanlarda cnoidal dalga teorisinin kullanılmasını gerektiren işler, fonksiyonların tablo ve grafiksel tanımı ile azalmıştır (Wiegel, 1960; Masch ve Wiegel, 1961); fakat teorinin uygulaması hala karmaşıktır. Cnoidal dalga teorisi sınırında dalga hareketinin görüşü solitary dalga teorisi tarafından tatmin edici bir şekilde açıklanabilir. Cnoidal dalga teorisine benzemeyen solitary dalga teorisini kullanmak, özel tablolara gerek kalmaksızın elde edilebilen fonksiyonlara indirgenebildiğinden dolayı kullanılması kolaydır.

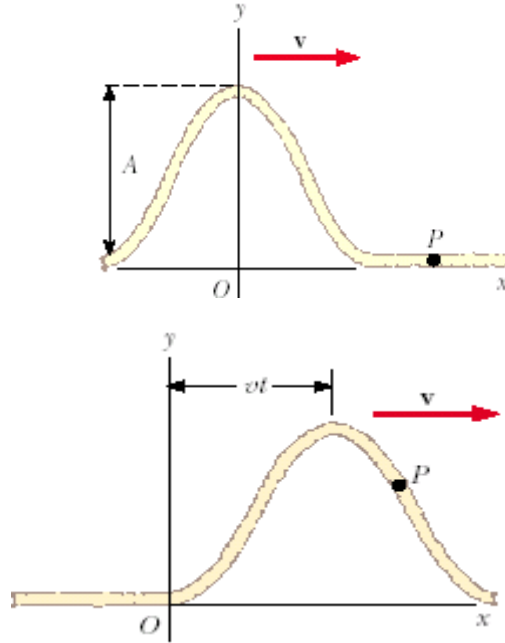
Dalga Esasları ve Dalgaların Sınıflandırılması;

Su dalgasının uygun fiziksel bir tarifi hem onun yüzey formunu hem de dalganın altındaki akışkan hareketini içerir. Basit matematik terimlerle ifade edilebilen dalgaya "basit dalga" denir. Birkaç bileşenden oluşan ve form yada hareket olarak tarifi zor olan dalgalara "kompleks dalgalar" denir. "Sinüzoidal" veya "basit harmonik dalgalar" yüzey profilinin sadece bir sinüs yada cosinüs fonksiyonu ile tariflenebildiği "basit dalgalara" örnektir. Hareketi ve yüzey profili eşit zaman aralıkları ile tekrarlanıyorsa dalga "periyodiktir". Sabit bir noktaya bağlı olarak hareket eden dalga formuna "ilerleyen dalga" denir.



Şekil 1. Hareket eden, enine ilerleyen dalga

Hareket ettiği yön "dalga yayılma yönü" olarak ifade edilir.



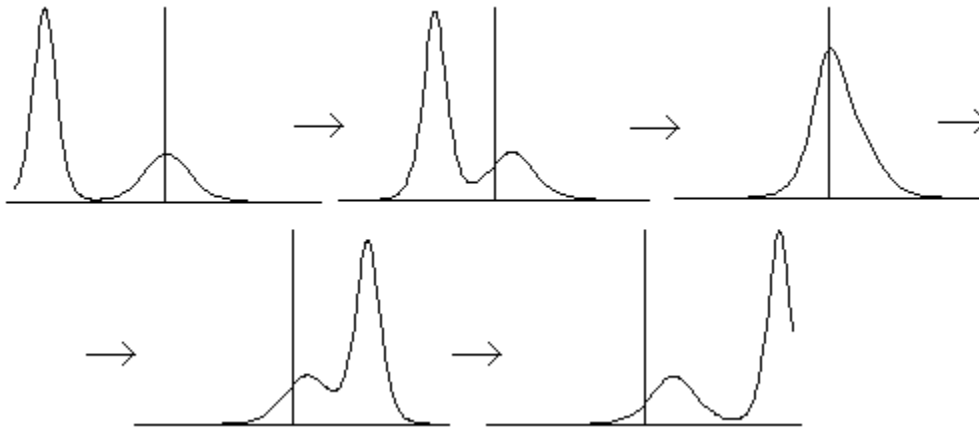
Şekil 2. Bir boyutta dalga atmasının sağa doğru v hızı ile ilerlemesi (a) $t = 0$ da atmanın ifadesi (b) t süre sonra şekil değişmez ve yer değiştirme $f(x - vt)$ ile verilir.

Eğer bir dalga formu sabit bir pozisyonda sadece yukarı aşağı hareket ediyorsa buna "komple sürekli dalga" yada "clapotis" denir. İlerleyen dalga serbest yüzey konfigürasyonunda herhangi bir değişikliğe uğramadan yayılıyorsa "sürekli formun" dalgası olarak bilinir. Şeklini ve genliğini muhafaza eden bu dalgalara Zabusky ve Kruskal (bu solitary dalgalara) solitonlar demiştir. Araştırmacılar, soliton kavramını dünya çapında bilimsel alanın değişik dallarına yaymışlardır. Soliton kavramı plazma fiziği, astrofizik, akışkanlar dinamiği gibi bilimin değişik alanlarındaki rolünden dolayı çalışmaların büyük bir kısmını etkilemiştir. Bir soliton aşağıdaki özellikleri taşıyan bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin bir çözümü olarak tanımlanabilir.

i) Çözüm, sürekli bir dalga formunda olmalıdır.

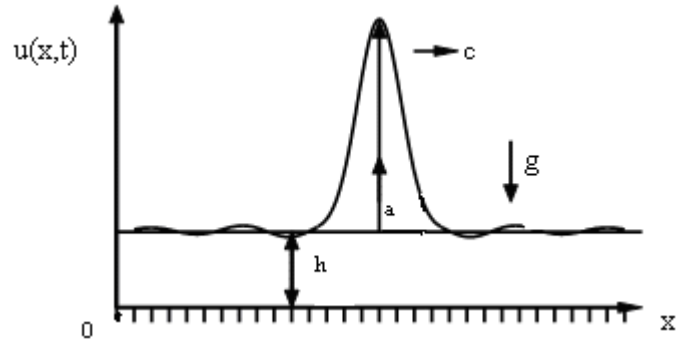
ii) Çözüm sınırlandırılır, yani; çözüm üstel olarak sıfıra doğru bozulur veya sonsuzda bir sabite yakınsar.

iii) Soliton, karakterini koruyan diğer solitonlar ile iç etkileşim içinde bulunur.



Şekil 3. İki soliton etkileşimi

Eğer su partikülleri hareketi her bir dalga periyodu için kapalı ve yakın olan yörüngeler tarafından tarif ediliyor ise su dalgaları "titreşimli" veya "hemen hemen titreşimli" olarak düşünülür. Lineer veya Airy teorisi sadece titreşimli dalgaları tarif eder. Sonlu genlikli dalga teorileri başarılı her dalga tarafından dalga yönünde küçük bir miktar hareket eden akışkan olduğundan hemen hemen titreşimli dalgaları tarif ederler. Bu hareket, dalgaların "kütle transportu" olarak tarif edilir. Su partikülleri dalga ile beraber ilerliyor ve orijinal pozisyonlarına dönmüyorsa bu dalgaya "çevrinti dalgası" denir. Solitary dalga buna (çevrinti dalgasına) bir örnektir.



Şekil 4. Bir solitary dalga

Şekil 4’de bahsi geçen Lineer Dalga Teorisi(Airy Dalga Teorisi), iki boyutlu ideal akışkan kavramları kullanılarak ifade edilebilir. Bu teori; dalgaların uzun mesafeler boyunca önemli bir enerji kaybına uğramadan ilerlemesinden ve ne yüzeysel gerilme etkisinin ne de viskozite etkisinin önemli olmamasından dolayı potansiyel (çevrintisiz) akım kabulü yapılarak geliştirilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR

Tanım 2.1. Bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun muhtelif türevlerini içeren matematiksel denklemlere diferansiyel *denklem*ler denir. Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev alınıyorsa, o değişkene *bağımsız değişken*, denklemde türevi alınan değişkene ise *bağımlı değişken* denir.

Bir tek bağımsız değişken içeren diferansiyel denkleme *adi* diferansiyel denklem denir ve genel olarak *n. mertebeden adi bir diferansiyel denklem*;

$$F(x, y, y', y'', K, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir.

İki veya daha fazla bağımsız değişken ihtiva eden diferansiyel denkleme *kısmi* diferansiyel denklem denir ve *n. mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem*

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, K, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0, \quad (2.2)$$

olarak yazılır.

Tanım 2.2. Bir diferansiyel denklem lineer veya lineer olmayan olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Eğer bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken ihtiva ediyor ise bu diferansiyel denkleme *lineer* diferansiyel denklem denir. Eğer bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım ya da bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik ya da logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyük ise bu tür diferansiyel denklemlere *lineer olmayan* diferansiyel denklem denir.

Tanım 2.3. Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk *n. mertebeden türevelere sahip fonksiyonu*

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \dots, \Phi^{(n)}) = 0, \quad (2.3)$$

ise Φ fonksiyonuna (2.1) denkleminin *çözümüdür* denir. Bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü, diferansiyel denklemin mertebesi kadar sabit içerir. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm*

denir. Bir adi diferansiyel denklemin çözümü eğri ailesine karşılık gelmesine karşın, bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü yüzey ailesine karşılık gelir.

Özel olarak, ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem göz önüne alındığında bu tip denklemlerin çözümleri iki sabit içerdiğinden bu sabitleri bulmak için iki ek şart verilmelidir. Eğer şartlar; bağımlı değişken ve türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değeri için verilen şartlar ise *başlangıç şartları*, bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar şeklinde ise *sınır şartları* ile tanımlanır. Bir diferansiyel denklemin başlangıç şartları ile incelenmesine *başlangıç değer problemi*, sınır şartları ile incelenmesine *sınır değer problemi* denir.

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (2.4)$$

(2.1) ve (2.4) ile birlikte verilen bir problem başlangıç değer veya Cauchy Problemi olarak bilinir. Diğer taraftan

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, \dots, y(x_n) = y_n, \quad (2.5)$$

(2.1) ve (2.5) ile birlikte verilen denkleme sınır değer problemi denir.

diferansiyel denklem bir fiziksel olayın modeli olduğundan kolaylık olması açısından genellikle ikinci mertebeden sabit katsayılı bir kısmi diferansiyel denklem alınarak sınıflandırmaya gidilmiştir, ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin genel hali;

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0, \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada a, b, c, d, e, f ve g sabitler ve $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere;

$\Delta = 0$ ise denklem Parabolik (Difüzyon Denklemi),

$\Delta > 0$ ise denklem Hiperbolik (Dalga Denklemi),

$\Delta < 0$ ise denklem Eliptik (Laplace Denklemi),

olarak sınıflandırılmaktadır. Parabolik tipteki bir kısmi diferansiyel denkleme

örnek olarak; difüzyon (ısı) denklemi, hiperbolik tipteki bir kısmi diferansiyel denklem; dalga denklemi, eliptik tipteki bir kısmi diferansiyel denkleme ise Laplace denklemi verilebilir.

$$u_t + c^2 u_{xx} = 0 \text{ Difüzyon Denklemi,}$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ Dalga Denklemi,}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ Laplace Denklemi,}$$

örneğin;

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.7)$$

denklemini göz önüne alalım. (2.7) ile verilen Laplace denkleminin çözümleri harmonik fonksiyonlardır. Yukarıda göz önüne alınan (2.7) denklemi

$$u(x, 0) = f(x) \text{ ve } u_x(x, 0) = g(x), \quad (2.8)$$

başlangıç şartları ile verilmiş ise probleme *Cauchy problemi*,

$$u(0, t) = p(t) \text{ ve } u(1, t) = q(t), \quad (2.9)$$

(2.7) denklemi (2.9) şartları ile verildiğinde, probleme *Dirichlet Problemi*, eğer çözüm bölgesinin dışında dış normal boyunca çözüm aranıyorsa yani;

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(t), \quad (2.10)$$

şartı ile verilen (2.7) denkleme ise *Neumann Problemi* denir.

Tanım 2. 4. $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. k pozitif bir reel sayı olmak üzere $\forall x \in A$ için;

$$f(x+k) = f(x),$$

eşitliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna *periyodiktir* denir ve k ya da f fonksiyonunun periyodudur denir.

Tanım 2.5. Kompleks düzlemde iki yönde periyodik olan fonksiyonlara *eliptik*

fonksiyon denir. Eliptik fonksiyon, eliptik integrallerin ters fonksiyonları olarak da tanımlanabilir. w herhangi bir kompleks sayı olmak üzere kompleks düzlemdeki bütün z sayıları için $f(z+w) = f(z)$ olacak şekilde f fonksiyonuna periyodiktir denir ve w ise f fonksiyonunun periyodu olarak adlandırılır. a ve b iki esas periyot olmak üzere $w = ma + nb$ olarak yazılabilir. Böylece her eliptik fonksiyon bir çift esas periyoda sahiptir.

Tanım 2. 6. Jakobi eliptik fonksiyonlar eliptik fonksiyonların standart formudur. Bu fonksiyonlar, m eliptik modül olmak üzere $cn(u, m)$, $dn(u, m)$, $sn(u, m)$ olacak şekilde üç temel fonksiyon ile gösterilir. Bu üç temel fonksiyon

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 t}}, \quad 0 < m^2 < 1 \quad (2.11)$$

şeklinde verilen birinci tip eliptik integralin versiyonundan ortaya çıkar. Burada $m = \text{mod } u$ ve $\varphi = am(u, m) = am(u)$ olmak üzere Jakobi genliktir ve ayrıca $\varphi = F^{-1}(u, m) = am(u, m)$ ile tanımlanır. Bu açıklamalardan sonra

$$\sin(\varphi) = \sin(am(u, m)) = sn(u, m), \quad (2.12)$$

$$\cos(\varphi) = \cos(am(u, m)) = cn(u, m),$$

$$\sqrt{1-m^2 \sin^2(\varphi)} = \sqrt{1-m^2 \sin^2(am(u, m))} = dn(u, m), \quad (2.13)$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ iken sırası ile bu fonksiyonlar

$$\begin{aligned} sn(u, 0) &= \sin(u) & sn(u, 1) &= \tanh(u), \\ cn(u, 0) &= \cos(u) & cn(u, 1) &= \text{sech}(u), \\ dn(u, 0) &= 1 & dn(u, 1) &= \text{sech}(u), \end{aligned} \quad (2.14)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca Jakobi eliptik fonksiyonlar üzerinde türev

$$\frac{d}{du}(sn(u)) = cn(u)dn(u),$$

$$\frac{d}{du}(cn(u)) = -sn(u)dn(u), \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{du}(dn(u)) = -m^2 sn(u)cn(u)$$

eşitlikleri ile açıklanır. Jakobi eliptik fonksiyonların bu özelliklerinin yanı sıra bu fonksiyonlar arasında

$$sn^2(u) + cn^2(u) = 1, \quad (2.16)$$

$$m^2 sn(u) + dn^2(u) = 1$$

bağıntıları vardır.

Tanım 2.7. Lineer olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q u}{d\xi^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim

$$u^p \left(\frac{d^r u}{d\xi^r} \right)^s \text{ ile verilsin. } M \text{ dengeleme terimi olmak üzere } M + q = Mp + s(M + r)$$

eşitliği yazılabilir.

Tanım 2.8. X ve Y iki uzay ve $I = \{t | 0 \leq t \leq 1\}$ aralığında tanımlı olsun. Eğer $\phi: X \times I \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşümü $\forall x \in X$ için $\phi(x, 0) = f(x)$ ve $\phi(x, 1) = g(x)$ oluyor ise $f, g: X \rightarrow Y$ dönüşümlerine *homotopiktirler* denir ve $f \approx g$ ile gösterilir. $\phi: f \rightarrow g$ ise ϕ , f 'den g 'ye bir *homotopi* kurar şeklinde ifade edilir.

3. LİNEER OLMAYAN KISMI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAŞIYICI DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK METOTLAR

Evulasyon ve dalga denklemleri zamana bağlı türevler içeren kısmi diferansiyel denklemlerdir. Bu tür denklemlerin çözümlerinin aranması son yıllarda matematikçiler tarafından yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Bazı bilgisayar programları özellikle Maple veya Mathematica kullanılmasıyla Evulasyon ve dalga denklemlerini çözümleri daha kolay bir hal almıştır. Bu denklemler fiziksel olayların matematiksel modelleri olduğundan, çözümleri fiziksel olayların daha iyi yorumlanması adına fizikçilere ve mühendislere yardımcı olabildiğinden bu tür denklemlerin çözümü için birçok metot geliştirilmiştir.

Bu bölümde kısmi diferansiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan bazı analitik metotların analizleri verilecektir.

3.1. Analitik Metotların Analizi

Tabiat olaylarının matematiksel modellemesi genellikle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler ile açıklanabildiğinden analitik çözümleri büyük bir öneme sahiptir. Bunun nedeni denklemin yorumlanabilmesi ancak bununla mümkün olmasıdır. Bu çözümleri elde etmek için birçok metot geliştirilmiştir. Birkaçını şöyle sıralayabiliriz: Hirota'nın bağımlı değişken metodu [19], Bäcklund dönüşümü [20], Cole-hopf dönüşümü [21], genelleştirilmiş Miura dönüşümü [22], ters saçılma metodu [23], darboux dönüşümü [24], painleve açılım metodu [25], homojen balans metodu [26], benzerlik indirgeme metodu [27], sine-cosine metodu [28], *tanh* metotları [29-43], *Jakobi eliptik fonksiyon metot* [44-48], ...

3.1.1.Homojen Balans metot

Wang [21] tarafından literatüre kazandırılan bu metodu açıklamak için

$$\psi(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (3.1)$$

$w = w(x, t)$ fonksiyonunu (3.1) denkleminin yaklaşık çözümü kabul edilir.

Ancak, (3.1) deki fonksiyonların uygun bir lineer kombinasyonu şeklinde yazılan ve sadece bir değişkene bağlı olan f fonksiyonu (3.1) denkleminin gerçek bir çözümdür. f dönüşümü kullanılarak (3.1) denklemini

$$\psi(1, f(w), f(w)_t, f(w)_x, f(w)_{xx}, f(w)_{xt}, f(w)_{tt}, \dots) = 0 \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır. Burada f fonksiyonunun bulunuşunu w ve (3.1) deki fonksiyona uygun bir lineer kombinasyonlarının yaklaşık çözümünün oluşturulması için üç durum söz konusudur.

(i) (3.1) denklemindeki fonksiyonun uygun bir lineer kombinasyonu seçilerek katsayılar hesaplanır. Yani, verilen denkleminin en yüksek mertebeden lineer terimi ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim için uygun bir lineer kombinasyon kullanılarak f fonksiyonun gerekli türevleri ile beraber w fonksiyonunun kısmi türevlerindeki en yüksek eşitlikle beraber f ve w kullanılarak (3.1) denklemi polinom şekline dönüşür. Burada oluşturulan en yüksek derecedeki eşitlikler önemlidir.

Örneğin verilen bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin en yüksek lineer olmayan terimi uu_x ve en yüksek mertebeden lineer olan terimi u_{xxx} olsun (3.2) deki fonksiyonların bir birleşiminin;

$$u = \frac{\partial^{m+n} f(w)}{\partial x^m \partial t^n} + f(w)$$

eşitliğinin $m+n$ mertebeden daha düşük tüm terimleri,

$$u = f^{(m+n)} w_x^m w_t^n + w(x, t) \quad (3.3)$$

eşitliğindeki mevcut kısmi türevlerin $m+n$ ($m \geq 0, n \geq 0$) mertebesinden daha düşük tüm terimleri şeklinde olsun. Bu durumda (3.3) kullanılırsa;

$$uu_x = f^{(m+n)} f^{(m+n+1)} w_x^{2m+1} w_t^{2n} + w(x, t) \quad (3.4)$$

eşitliğin mevcut kısmi türevlerinin $2(m+n)+1$ mertebesinden daha düşük tüm terimleri;

$$u_{xxx} = f^{(m+n+3)} w_x^{m+3} w_t^n + w(x, t) \quad (3.5)$$

eşitliğinin mevcut kısmi türevlerinin $m+n+3$ mertebesinden daha düşük terimleri (3.4) ve (3.5) teki w fonksiyonunun en yüksek mertebeden kısmi türevlerine eşitlenirse $2m+1=m+3$ ve $2n=n$ olur. Buradan $m=2$ ve $n=0$ bulunur. (3.3) de bu değerler yerine yazılırsa;

$$u = \frac{\partial^2 f(w)}{\partial x^2} + w(x, t) \quad (3.6)$$

elde edilir.

(ii) Birinci basamakta seçilen lineer kombinasyon (3.1) de yerine yazılarak w nin en yüksek mertebeden türevleri ile bütün terimler bir araya getirilerek sıfıra eşitlenir. Daha sonra f için bir adi diferansiyel denklemi haline gelir ve bu denklem çözülür. Burada bir çok fonksiyon logaritmik fonksiyondur.

(iii) f fonksiyonunun çeşitli türevlerine ait lineer olmayan terimler f nin daha yüksek mertebeli türevlerine dönüştürülür. Bu işlemten sonra f nin aynı mertebeli türevleri biraraya getirilir f nin aynı mertebeli türevlerinin katsayıları sıfıra eşitlenir ve w için denklem dizisi elde edilir. Bu denklem sol tarafları w fonksiyon muhtelif türevlerinde k . mertebeden homojen fonksiyondur. Buradaki k , $f^{(k)}$ nin mertebesidir. Burada w , homojen denlemin çözümü olan bazı sabitlerinin bulunması gereken üstel bir fonksiyon olarak kabul edilir. Buradan cebirsel denklemler elde edilir. Bu lineer olmayan cebirsel denklemler için çözüm mevcutsa w ve (i) de seçilen lineer kombinasyonların katsayıları hesaplanmış olur.

3.1.2. Birleştirilmiş Rasyonel Açılım Metot

2004 yılında Chen ve Zhang [46] Genelleştirilmiş Jakobi Eliptik Fonksiyon Metot da;

$$H(u, u_t, u_x, u_{xx}, K) = 0 \quad (3.7)$$

(3.7) kısmi diferansiyel denklemini $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = kx + wt$ dönüşümü ile

$$Q'(u', u'', u''', K) = 0, \quad (3.8)$$

şeklinde adi diferansiyel denklem haline getirmiş ve (3.7) denkleminin periyodik dalga çözümlerini bulmak için,

$$(F')^2 = A + BF^2 + CF^4, \quad (3.9)$$

şeklinde diferansiyel denklemi baz almıştır. Burada $F' = \frac{dF}{d\xi}$ ve A, B, C sabitlerdir. (3.7) diferansiyel denklemi için;

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{i=1}^m [a_i F^i(\xi) + b_i F^{-i}(\xi)], \quad (3.10)$$

formunda bir çözüm aramıştır. Burada m (3.8) denkleminde en yüksek mertebeden lineer olan terim ile lineer olmayan terimin dengelenmesi sonucu bulunan sabit bir sayıdır. Bu çözüm üzerinden gerekli türevler alınarak (3.8) diferansiyel denkleminde yerine yazılır. Daha sonra elde edilen denklemde F^i ve F^{-i} terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi yazılır. Elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülerek a_0, a_i, b_i sabitleri bulunur. Bulunan bu sabitler, (3.9) eliptik diferansiyel denklemin çözümleri olarak bilinen ve Chen ve Zhang [46] tarafından hesaplanan;

$$i) \begin{cases} A=1 \\ B=-(1+m^2), F(\xi)=sn\xi, cd\xi \\ C=m^2 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$ii) \begin{cases} A=1-m^2 \\ B=2m^2-1, F(\xi)=cn\xi \\ C=-m^2 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$iii) \begin{cases} A=m^2-1 \\ B=2-m^2, F(\xi)=dn\xi \\ C=-1 \end{cases} \quad (3.13)$$

$$iv) \begin{cases} A=-m^2(1-m^2) \\ B=2m^2-1, F(\xi)=ds\xi \\ C=1 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$v) \begin{cases} A=1-m^2 \\ B=2-m^2, F(\xi)=cs\xi \\ C=1 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$vi) \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=\frac{m^2-2}{2}, F(\xi)=\frac{sn\xi}{1\pm dn\xi} \\ C=\frac{m^2}{4} \end{cases} \quad (3.16)$$

$$vii) \begin{cases} A=\frac{m^2}{4} \\ B=\frac{m^2-2}{2}, F(\xi)=sn\xi \pm icn\xi, \frac{dn\xi}{i\sqrt{1-m^2}sn\xi \pm cn\xi} \\ C=\frac{m^2}{4} \end{cases} \quad (3.17)$$

$$viii) \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=\frac{1-2m^2}{2}, F(\xi)=\frac{dn\xi}{mcn\xi \pm i\sqrt{1-m^2}}, msn\xi \pm idn\xi, \frac{sn\xi}{1\pm cn\xi}, \\ C=\frac{1}{4}, \frac{cn\xi}{\sqrt{1-m^2}sn\xi \pm dn\xi}, \end{cases} \quad (3.18)$$

$$ix) \begin{cases} A=\frac{m^2-1}{4} \\ B=\frac{m^2+1}{2}, F(\xi)=\frac{dn\xi}{1\pm msn\xi} \\ C=\frac{m^2-1}{4} \end{cases} \quad (3.19)$$

$$x) \begin{cases} A=\frac{1-m^2}{4} \\ B=\frac{m^2+1}{2}, F(\xi)=\frac{cn\xi}{1\pm sn\xi} \\ C=\frac{1-m^2}{4} \end{cases} \quad (3.20)$$

$$xi) \begin{cases} A = -\frac{(1-m^2)^2}{4} \\ B = \frac{m^2+1}{2} \\ C = -\frac{1}{4} \end{cases}, F(\xi) = mc n \xi \pm dn \xi \quad (3.21)$$

$$xii) \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{m^2+1}{2} \\ C = \frac{(1-m^2)^2}{4} \end{cases}, F(\xi) = \frac{sn \xi}{dn \xi \pm cn \xi} \quad (3.22)$$

$$xiii) \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{m^2-2}{2} \\ C = \frac{m^4}{4} \end{cases}, F(\xi) = \frac{cn}{\sqrt{1-m^2} \pm dn \xi} \quad (3.23)$$

ifadeler fonksiyonlarda yerlerine yazılarak (3.7) diferansiyel denklemi için dalga çözümleri elde etmişlerdir.

Y. Chen, Q. Wang, B. Li, Z. yukarıdaki eliptik fonksiyon metotları üzerine çalışmalar yapılarak 2004 yılında *Jakobi eliptik rasyonel açılım metot* [47-49] u geliştirmiştir. Ve 2006 yılında literatüre kazandırılan bu metodu açıklamak için;

(3.7) ile verilen iki değişkenli lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (3.7) denklemi $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = kx - wt$ dönüşümü ile,

$$Q'(u', u'', u''', K) = 0, \quad (3.8)$$

şeklinde adi diferansiyel denklem haline dönüşür. Denkleminin aranan çözümü;

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{j=1}^m \frac{\sum_{r_1+r_2=j} a_j^{r_1 r_2} F^{r_1}(\xi) G^{r_2}(\xi)}{(\mu_1 F(\xi) + \mu_2 G(\xi) + 1)^j} \quad (3.24)$$

formunda aranır. Burada $a_0, a_{r_2}^j, \mu_1$ and $\mu_2 (i=1,2,...)$ ileride hesaplanacak sabitlerdir ve $F = F(\xi)$ ve $G = G(\xi)$

$$\frac{dF}{d\xi} = K_1(F, G), \frac{dG}{d\xi} = K_2(F, G) \quad \text{türevlerini sağlayan } F \text{ ve } G \text{ nin } K_1 \text{ ve } K_2$$

polinomlarına sahip fonksiyonlardır. m pozitif tam sayısı (3.8) denklemindeki en yüksek mertebeden lineer olmayan terim ile lineer terimin dengelenmesiyle belirlenebilir. Daha sonra u çözümü ve gerekli türevleri (3.8) denkleminde yerlerine yazılarak $F^p(\xi)G^q(\xi), (p=1,2,... \text{ ve } q=0,1)$ ye bağlı olan denklem elde edilir. Bu denklemde $F^p(\xi)G^q(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi bulunur. Bu cebirsel denklemin çözülmesi ile $a_0, a_{r_2}^j, \mu_1$ and μ_2 sabitleri bulunur. Rasyonel açılım metodunda iki tip çözüm aranmaktadır.

3.1.2.1. Jacobi Rasyonel Açılım Metot

Rasyonel açılım metodun lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin rasyonel Jacobi eliptik fonksiyon çözüm formunda uygulanmasıdır.

Burada Jacobi eliptik fonksiyonlar eliptik fonksiyonların standart formudur. Bu fonksiyonlar, m eliptik modül olmak üzere $cn(\xi, m), dn(\xi, m), sn(\xi, m)$ olacak şekilde üç temel fonksiyon ile gösterilir. Bu üç temel fonksiyon,

$$\xi = H(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 t}}, \quad 0 < m^2 < 1 \quad (2.11)$$

şeklinde verilen birinci tip eliptik integralin versiyonundan ortaya çıkar. Burada $k = \text{mod } u$ ve $\varphi = am(\xi, m) = am(\xi)$ olmak üzere Jakobi genliktir ve ayrıca $\varphi = F^{-1}(\xi, m) = am(\xi, m)$ ile tanımlanır. Bu açıklamalardan sonra

$$\sin(\varphi) = \sin(am(\xi, m)) = sn(\xi, m),$$

$$\cos(\varphi) = \cos(am(\xi, k)) = cn(\xi, k),$$

$$\sqrt{1-m^2 \sin^2(\varphi)} = \sqrt{1-m^2 \sin^2(am(\xi, m))} = dn(\xi, m),$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ iken sırası ile bu fonksiyonlar;

$$sn(\xi, 0) = \sin(\xi) \quad sn(\xi, 1) = \tanh(\xi),$$

$$cn(\xi, 0) = \cos(\xi) \quad cn(\xi, 1) = \operatorname{sech}(\xi),$$

$$dn(\xi, 0) = 1 \quad dn(\xi, 1) = \operatorname{sech}(\xi),$$

olarak tanımlanır. Ayrıca Jakobi eliptik fonksiyonlar üzerinde türev;

$$\frac{d}{d\xi}(sn(\xi)) = cn(\xi)dn(\xi)$$

$$\frac{d}{d\xi}(cn(\xi)) = -sn(\xi)dn(\xi)$$

$$\frac{d}{d\xi}(dn(\xi)) = -m^2 sn(\xi)cn(\xi)$$

eşitlikleri ile açıklanır. Jakobi eliptik fonksiyonların bu özelliklerinin yanı sıra bu fonksiyonlar arasında ;

$$sn(\xi)^2 + cn^2(\xi) = 1$$

$$m^2 sn(\xi)^2 + dn^2(\xi) = 1$$

bağıntıları vardır. Burada aranılan çözüm formu;

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{j=1}^m \frac{a_j sn^j(\xi) + b_j sn^{j-1}(\xi) cn(\xi)}{(\mu_1 sn(\xi) + \mu_2 cn(\xi))^j} \text{dur.} \quad (3.25)$$

3.1.2.2. Riccati Rasyonel Açılım Metot

Rasyonel açılım metodun lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin rasyonel form soliton çözüm formunda uygulanmasıdır ve F ve G Riccati denkleminin çözümleri içinde sınırlandırılırsa aranılan çözüm

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^m \frac{a_i F^i(\xi) + b_1 F^{i-1}(\xi) \sqrt{R + F^2(\xi)}}{(\mu_1 F(\xi) + \mu_2 \sqrt{R + F^2(\xi)} + 1)^i} \text{dur.} \quad (3.26)$$

Burada $F' = (R + F^2)$ Riccati denklemi olmak üzere, $F = F(\xi)$ Riccati denkleminin çözümüdür. Dolayısıyla Riccati diferansiyel denkleminin çözümleri olarak elde edilen

$$\begin{cases} F = -\sqrt{-b} \tanh[\sqrt{-b}\xi] \\ F = -\sqrt{-b} \coth[\sqrt{-b}\xi] \end{cases}, \quad b < 0 \quad \text{ise} \quad (3.27)$$

$$F = -\frac{1}{\xi}, \quad b = 0 \quad \text{ise} \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} F = \sqrt{b} \tan[\sqrt{b}\xi] \\ F = -\sqrt{b} \cot[\sqrt{b}\xi] \end{cases}, \quad b > 0 \quad \text{ise} \quad (3.28)$$

fonksiyonları yardımıyla (3.7) denkleminin taşıyıcı dalga çözümlerini elde etmiştir.

Bu metottan farklı olarak N.A. Kudryashov tarafından 2004 yılında kendi soyadını verdiği metot geliştirilmiştir.

3.1.3. Kudryashov Metot

N.A.Kudryashov tarafından 2004[50] yılında literatüre kazandırılan bu metodu açıklamak için;

$$Q_1(u_t, u_x, K, x, t) = 0. \quad (3.7)$$

ile verilen iki değişkenli lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (3.7) denklemi $u(x, t) = y(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü ile,

$$Q_1(-cy_\xi, y_\xi, c^2 y_{\xi\xi}, K) = 0 \quad (3.30)$$

şeklinde adi diferansiyel denklem haline dönüşür. (3.7) denkleminin çözümü

$$y(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i Q^i(\xi)$$

formunda aranır. Burada $a_0, a_1, a_2, \dots$ ileride hesaplanacak sabitlerdir ve

$$Q = Q(\xi) = \frac{1}{1 + e^\xi}$$

$Q_\xi = Q^2 - Q$ denklemini sağlayan fonksiyondur. m pozitif tam sayısını yani dengeleme terimini hesaplarken (3.30) denkleminde $y = z^p$ yazılarak tüm terimlerin dereceleri karşılaştırılarak en küçük dereceli iki veya daha fazla terim seçilir. p nin minimum değeri (3.30) denkleminin çözümünün kutbu olarak tanımlanır. Daha sonra y çözümü ve gerekli türevleri

$$y_\xi = \sum_{i=1}^m a_i i(Q-1)Q^i, \quad y_{\xi\xi} = \sum_{i=1}^m a_i i((i+1)Q^2 - (2i+1)Q + i)Q^i \quad (3.31)$$

(3.7) denkleminde yerlerine yazılarak $Q(\xi)$ ye bağlı olan denklem elde edilir. Bu denklemde $Q(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklemin çözülmesi ile $a_0, a_1, a_2, \dots$ sabitleri bulunur.

Kudryashov metotundan farklı olarak He [51] üstel fonksiyonlar kullanılarak 2006 yılında “*üstel fonksiyon metot*” u geliştirmiştir.

3.1.4. Üstel Fonksiyon Metot

He [51] tarafından 2006 yılında literatüre kazandırılan bu metodu açıklamak için;

$$Q_1(u_t, u_x, K, x, t) = 0. \quad (3.7)$$

ile verilen iki değişkenli lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (3.7) denklemi $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü ile,

$$Q'(u, -cu', c^2u'', K) = 0. \quad (3.30)$$

şeklinde adi diferansiyel denklem haline dönüşür. (3.30) denkleminin çözümü;

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n \exp(n\xi)}{\sum_{m=-p}^q b_m \exp(m\xi)}, \quad (3.32)$$

formunda kabul edilir. Burada c , d , p ve q daha sonra belirlenebilen pozitif tamsayılardır. a_n ve b_m bilinmeyen sabitlerdir. (3.30) denkleminin çözümü olarak kabul edilen (3.32) eşitliği daha açık olarak

$$u(\xi) = \frac{a_c \exp(c\xi) + K + a_{-d} \exp(-d\xi)}{a_p \exp(p\xi) + K + a_{-q} \exp(-q\xi)}, \quad (3.33)$$

şeklinde yazılabilir. Burada p, c, d ve q pozitif tam sayıları (3.30) denklemindeki en yüksek mertebeden lineer olmayan terim ile lineer terimin dengelenmesiyle belirlenebilir. Daha sonra (3.32) çözümü ve gerekli türevleri (3.30) denkleminde yerlerine yazılarak $\exp(\xi)$ ye bağlı olan denklem elde edilir. Bu denklemde $\exp(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi bulunur. Bu cebirsel denklemin çözülmesi ile a_n ve b_m sabitleri bulunur. Bulunan bu sabitler (3.32) eşitliğinde yerlerine yazıldığı zaman (3.7) denkleminin taşıyıcı dalga çözümleri bulunmuş olur. Bu metot yardımı ile periyodik dalga çözümü elde edilen çalışmalara [52–54] referanslarından ulaşılabilir.

Üstel metottan farklı olarak 2008 yılında Wang ve arkadaşları [55] tarafından sunulan $\frac{G'}{G}$ *açılım metot* gibi metotlar lineer olmayan diferansiyel denklemlerin bilimsel çalışmalarına büyük katkılar sağlamıştır. Bu metot üzerine çalışmalar yapılarak 2010 yılında Guo ve Zhou [56] tarafından *genişletilmiş* $\frac{G'}{G}$ *açılım metot* ve arkasından Lü ve arkadaşları [57] tarafından *genelleştirilmiş* $\frac{G'}{G}$ *açılım metot* literatüre kazandırılmıştır.

3.1.5. $\frac{G'}{G}$ -Açılım Metot

2008 yılında ilk olarak Wang ve arkadaşları tarafından sunulan metodun [55] yukarıda bahsedilen $\tanh$ metotlarından farklı olan tarafı Riccati diferansiyel denkleminin yerine $G = G(\xi)$ olmak üzere,

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (3.34)$$

şeklinde ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemin seçilebilmesidir. Ayrıca (3.7) denklemi için (3.30) şeklinde aranan çözüm yerine burada

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^M a_m \left(\frac{G'}{G} \right)^m \quad (3.35)$$

olacak şekilde çözüm aranır. (3.35) çözümü yazılırken $\frac{G'}{G}$ fonksiyonunun değeri (3.34) denkleminin çözümünde hesaplanan G çözüm fonksiyonu yardımıyla elde edilir.

4. LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAŞIYICI DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI UYGULAMALAR

Burada analizleri yapılan ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin taşıyıcı dalga çözümlerini veren metotlar ile CRWP denklemi için hareket eden dalga çözümler elde edilecektir.

4.1. CRPW Denkleminde Genelleştirilmiş Rasyonel Açılım Metotlarının Uygulanması

4.1.1. Jakobi Eliptik Fonksiyon Rasyonel Açılım Metot

Bu metodu CRWP denkleminde uygularsak;

$$u_t - u_x + 2uu_x - u_{xx} = 0 \quad (4.1)$$

$u(x, t) = y(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü ile (4.1) denklemi

$$-cu' - u' + 2uu' - u'' = 0 \quad (4.2)$$

adi diferansiyel denkleminde dönüşür. uu' ile u'' terimleri arasında dengeleme yapılırsa, $m=1$. Böylece arayacağımız çözüm formu ($k \rightarrow 0$)

$$u(\xi) = a_0 + \frac{a_1 \sin(\xi) + b_1 \cos(\xi)}{\mu_1 \sin(\xi) + \mu_2 \cos(\xi) + 1} \quad (4.3)$$

olur. (4.3) yi (4.2) denkleminde yerine yazar ve $\sin^i(\xi) \cos^i(\xi)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde ederiz.

$$b_1(1 - 2b_1\mu_1 - 2\mu_1^2 + (1 - 2a_0 + c)\mu_1\mu_2) - a_1(1 + c - 2b_1\mu_2 - 2\mu_1\mu_2 + \mu_2^2 + c\mu_2^2 - 2a_0(1 + \mu_2^2)) = 0$$

$$\frac{1}{2}(3a_1\mu_1 + 3b_1\mu_1 - 6a_0b_1\mu_1 + 3b_1c\mu_1 - 3a_1\mu_2 + 6a_0a_1\mu_2 + 3b_1\mu_2 - 3a_1c\mu_2) +$$

$$\frac{1}{2}(b_1((-1 + 2a_0 - c)\mu_1 - \mu_2) + a_1(4b_1 + \mu_1 + (-1 + 2a_0 - c)\mu_2)) = 0$$

$$2a_1 + 2b_1 - 4a_0b_1 + 2b_1c - 4a_1b_1\mu_1 + 2b_1\mu_1^2 - 4a_0b_1\mu_1^2 + 2b_1c\mu_1^2 + 4a_1^2\mu_2 - 2a_1\mu_1\mu_2 + 4a_0a_1\mu_1\mu_2 + 4b_1\mu_1\mu_2 - 2a_1c\mu_1\mu_2 - 4a_1\mu_2^2 = 0$$

$$2a_1^2 - 2b_1^2 - a_1\mu_1 + 2a_0a_1\mu_1 - b_1\mu_1 - a_1c\mu_1 - a_1\mu_2 + b_1\mu_2 - 2a_0b_1\mu_2 + b_1c\mu_2 = 0 \quad (4.4)$$

cebirsel denklem sisteminin çözümünden elde edilen katsayılar

1.durum

$$a_0 = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2} + 2c) \text{ veya } a_0 = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2} + 2c) \&$$

$$b_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{9 - 16a_1^2} \text{ veya } b_1 = \frac{1}{4}\sqrt{9 - 16a_1^2} \&$$

$$a_1 \neq 0 \& \mu_1 = -\frac{4}{3}(-a_1 + 2a_0a_1 + b_1 - a_1c) \& -2a_1 + 4a_0a_1 + b_1 - 2a_1c \neq 0$$

$$\& \mu_2 = \frac{4(2a_1^2 - b_1^2)(-1 + 2a_0 - c)}{3(-2a_1 + 4a_0a_1 + b_1 - 2a_1c)}$$

2.durum

$$(a_0 = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2} + 2c) \text{ veya } a_0 = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2} + 2c)) \& a_1 = 0 \&$$

$$(b_1 = -\frac{3}{4} \text{ veya } b_1 = \frac{3}{4}) \& \mu_1 = -\frac{4b_1}{3} \& \mu_2 = \frac{4}{3}(b_1 - 2a_0b_1 + b_1c)$$

3.durum

$$a_1 = 0 \& (b_1 = \frac{1}{2}(-2 + 4a_0 - 4a_0^2 - 2c + 4a_0c - c^2) \text{ veya } b_1 = \frac{1}{2}(2 - 4a_0 + 4a_0^2 + 2c - 4a_0c + c^2)) \&$$

$$b_1 \neq 0 \& \mu_1 = 1 \& \mu_2 = (-1 + 2a_0 - c)\mu_1 \& 1 - 8a_0 + 8a_0^2 + 4c - 8a_0c + 2c^2 \neq 0$$

4.durum

$$(a_0 = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2} + 2c) \text{ veya } a_0 = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2} + 2c)) \& (b_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{9 - 16a_1^2} \text{ veya } b_1 = \frac{1}{4}\sqrt{9 - 16a_1^2}) \&$$

$$a_1 \neq 0 \& \mu_1 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}a_1 + \sqrt{9 - 16a_1^2}) \& -2a_1 + 4a_0a_1 + b_1 - 2a_1c \neq 0 \& \mu_2 = \frac{-3 + 16a_1^2}{8a_1 + \sqrt{18 - 32a_1^2}}$$

ve katsayılar göre çözümler aşağıdaki gibidir.

1.çözüm

$$u(x,t) = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2} + 2c) + \frac{(a_1 \sin(x-ct) - \frac{1}{4}\sqrt{9-16a_1^2} \cos(x-ct))}{(-\frac{4}{3}(-a_1 + 2\frac{1}{4}(2 - \sqrt{2} + 2c)a_1 + -\frac{1}{4}\sqrt{9-16a_1^2} - a_1 c) \sin(x-ct) + \frac{4(2a_1^2 - (-\frac{1}{4}\sqrt{9-16a_1^2})^2)(-1 + 2\frac{1}{4}(2 - \sqrt{2} + 2c) - c)}{3(-2a_1 + 4\frac{1}{4}(2 - \sqrt{2} + 2c)a_1 + -\frac{1}{4}\sqrt{9-16a_1^2} - 2a_1 c)} \cos(x-ct) + 1)}$$

2.çözüm

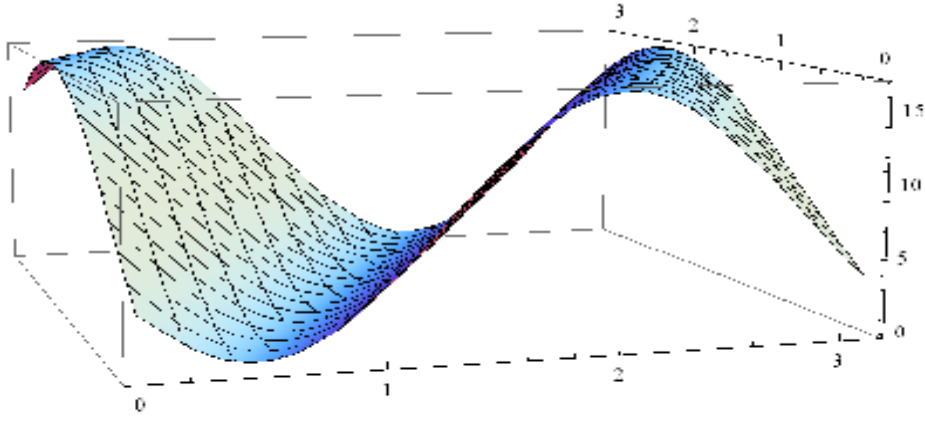
$$u(x,t) = \frac{\frac{1}{4}(2 - \sqrt{2} + 2c) + (-\frac{3}{4} \cos(x-ct))}{(\sin(x-ct) + \frac{4}{3}(-\frac{3}{4} + \frac{3}{8}(2 - \sqrt{2} + 2c) - \frac{3}{4}c) \cos(x-ct) + 1)}$$

3.çözüm

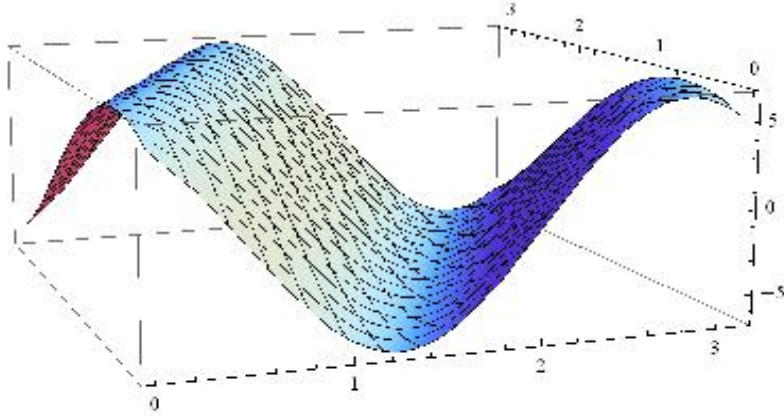
$$u(x,t) = a_0 + \frac{\frac{1}{2}(-2 + 4a_0 - 4a_0^2 - 2c + 4a_0c - c^2) \cos(x-ct)}{\sin(x-ct) + (-1 + 2a_0 - c) \cos(x-ct) + 1}$$

4.çözüm

$$u(x,t) = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2} + 2c) + \frac{a_1 \sin(x-ct) - \frac{1}{4}\sqrt{9-16a_1^2} \cos(x-ct)}{\frac{1}{3}(2\sqrt{2}a_1 + \sqrt{9-16a_1^2}) \sin(x-ct) + (\frac{-3+16a_1^2}{8a_1 + \sqrt{18-32a_1^2}}) \cos(x-ct) + 1}$$



Şekil 5. CRWP denkleminin 4. çözümünün reel kısmı için üç boyutlu hareket eden dalga görünümü $a_1 = i, c = 2, x = [0, \pi], t = [0, \pi]$



Şekil 6. CRWP denkleminin 4. çözümünün imajinel kısmı için üçboyutlu hareket eden dalga görünümü $a_1 = i, c = 2, x = [0, \pi], t = [0, \pi]$

4.1.2. Riccati Rasyonel Açılım Metot

Bu metodu CRWP denkleminde uygularsak;

$$u_t - u_x + 2uu_x - u_{xx} = 0 \quad (4.1)$$

$u(x, t) = y(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü ile (4.1) denklemi

$$-cu' - u' + 2uu' - u'' = 0 \quad (4.2)$$

adi diferansiyel denkleminde dönüşür. uu' ile u'' terimleri arasında dengeleme yapılırsa, $m=1$. Böylece arayacağımız çözüm formu

$$u(\xi) = a_0 + \frac{a_1 F(\xi) + b_1 \sqrt{R + F^2(\xi)}}{\mu_1 F(\xi) + \mu_2 \sqrt{R + F^2(\xi)} + 1} \quad (4.3)$$

olur. (4.3) yi (4.2) denkleminde yerine yazar ve

$F^i(\xi) \left(\sqrt{R + F^2(\xi)} \right)^j$ ($i = 0, 1, 2, \dots; j = 0, 1$) fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları

sıfıra eşitlenerek aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde ederiz.

$$R(b_1(-2b_1\mu_1 + (-1 + \mu_1 - 2a_0\mu_1 + c\mu_1)\mu_2)R + a_1(-1 + 2a_0 - c + (2\mu_1 + \mu_2(2b_1 + (-1 + 2a_0 - c)\mu_2))R)) \stackrel{!}{=} 0$$

$$2a_1^2 + a_1(-2 + (-1 + 2a_0 - c)\mu_1 + \mu_2^2 R) + b_1(2b_1 + \mu_2(-1 + 2a_0 - c - \mu_1 R)) = 0$$

$$R(2a_1\mu_2(-1 + 2a_0 - c + \mu_1 R) + b_1(-1 + 2a_1 + \mu_1(1 - 2a_0 + c - 2\mu_1 R))) = 0$$

$$-2b_1 + 4a_1b_1 - b_1\mu_1 + 2a_0b_1\mu_1 - b_1c\mu_1 - a_1\mu_2 + 2a_0a_1\mu_2 - a_1c\mu_2 - b_1\mu_1^2 R + a_1\mu_1\mu_2 R = 0$$

$$-a_1 + 2a_0a_1 - a_1c + 2a_1\mu_1 R - 2b_1^2\mu_1 R - b_1\mu_2 R + 2a_1b_1\mu_2 R + b_1\mu_1\mu_2 R$$

$$-2a_0b_1\mu_1\mu_2 R + b_1c\mu_1\mu_2 R - a_1\mu_2^2 R + 2a_0a_1\mu_2^2 R - a_1c\mu_2^2 R = 0$$

$$-b_1 + 2a_0b_1 - b_1c + 2b_1\mu_1 R - 2a_1b_1\mu_1 R + b_1\mu_1^2 R - 2a_0b_1\mu_1^2 R + b_1c\mu_1^2 R$$

$$-a_1\mu_2 R + 2a_1^2\mu_2 R - a_1\mu_1\mu_2 R + 2a_0a_1\mu_1\mu_2 R - a_1c\mu_1\mu_2 R = 0$$

$$\begin{aligned} & -2a_1R + 2a_1^2R + 2b_1^2R - a_1\mu_1R + 2a_0a_1\mu_1R - a_1c\mu_1R \\ & -b_1\mu_2R + 2a_0b_1\mu_2R - b_1c\mu_2R - b_1\mu_1\mu_2R^2 + a_1\mu_2^2R^2 = 0 \end{aligned}$$

cebirsal denklem sisteminin çözümünden elde edilen katsayılar,

1.durum

$$(a_0 = \frac{1+c}{2} \& b_1 = 0 \& a_1 = 1 \& \mu_1 = 0 \& \mu_2 \neq 0 \& R = 0)$$

2.durum

$$a_0 = \frac{1+c}{2} \& a_1 = \frac{1}{2} \& b_1 = 0 \& R = \frac{1}{\mu_2^2} \& \mu_1 = 0 \& \mu_2 = \mu_2$$

3.durum

$$a_0 = \frac{1+c}{2} \& a_1 = \frac{1}{2} \& \mu_1 = 0 \& \mu_2 \neq 0 \& R = \frac{1-4b_1^2}{\mu_2^2} \& -b_1 + 4b_1^3 \neq 0$$

4.durum

$$a_0 = \frac{1+c}{2} \& (b_1 = -\frac{1}{2} \text{ veya } b_1 = \frac{1}{2}) \& a_1 = \frac{1}{2} \& \mu_1 \neq 0 \& R = 0$$

5.durum

$$a_0 = \frac{1+c}{2} \& (b_1 = -\frac{1}{2} \text{ veya } b_1 = \frac{1}{2}) \& a_1 = \frac{1}{2} \& \mu_1 = 0 \& \mu_2 = 0 \& R = 0$$

6.durum

$$a_0 = \frac{1+c}{2} \& b_1 = 0 \& a_1 = 1 \& R = 0$$

7.durum

$$\begin{aligned} & b_1 = 0 \& a_1 = \frac{1}{2} \& -1 + 2a_0 - c \neq 0 \& \mu_1 = \frac{1}{-1 + 2a_0 - c} \& \\ & \mu_2 = 0 \& R = \frac{1}{2}(-1 + 4a_0 - 4a_0^2 - 2c + 4a_0c - c^2) \end{aligned}$$

8.durum

$$a_0 = a_0 \& b_1 = b_1 \& \mu_1 = \frac{1}{-1+2a_0-c} \& \mu_2 = \frac{b_1}{-1+2a_0-c} \& R = \frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)$$

ve bu katsayılarla göre çözümler aşağıdaki gibidir.

1.çözüm

$$u(x,t) = \frac{1+c}{2} + \frac{\left(\frac{-1}{x-ct}\right)}{\mu_2 \sqrt{\left(\frac{-1}{x-ct}\right)^2 + 1}}$$

2.çözüm

$R > 0$ için

$$u(x,t) = \frac{1+c}{2} + \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\mu_2^2}} \tan\left(\sqrt{\frac{1}{\mu_2^2}}(x-ct)\right)}{\mu_2 \sqrt{\frac{1}{\mu_2^2} + \left(\sqrt{\frac{1}{\mu_2^2}} \tan\left(\sqrt{\frac{1}{\mu_2^2}}(x-ct)\right)\right)^2 + 1}}$$

$R < 0$ için

$$u(x,t) = \frac{1+c}{2} + \frac{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{-1}{\mu_2^2}} \tanh\left(\sqrt{\frac{-1}{\mu_2^2}}(x-ct)\right)}{\mu_2 \sqrt{\frac{1}{\mu_2^2} + \left(\sqrt{\frac{-1}{\mu_2^2}} \tanh\left(\sqrt{\frac{-1}{\mu_2^2}}(x-ct)\right)\right)^2 + 1}}$$

3.çözüm

$R > 0$ için

$$u(x,t) = \frac{1+c}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-4b_1^2}{\mu_2^2}} \tan\left(\sqrt{\frac{1-4b_1^2}{\mu_2^2}}(x-ct)\right) + b_1 \left(\sqrt{\frac{1-4b_1^2}{\mu_2^2}} + \left(\sqrt{\frac{1-4b_1^2}{\mu_2^2}} \tan\left(\sqrt{\frac{1-4b_1^2}{\mu_2^2}}(x-ct)\right)\right)^2\right)\right)}{\left(\mu_2 \sqrt{\frac{1-4b_1^2}{\mu_2^2}} + \left(\sqrt{\frac{1-4b_1^2}{\mu_2^2}} \tan\left(\sqrt{\frac{1-4b_1^2}{\mu_2^2}}(x-ct)\right)\right)^2 + 1\right)}$$

$R < 0$ için,

$$u(x,t) = \frac{1+c}{2} + \frac{\left(\frac{-1}{2} \sqrt{\frac{-1+4b_1^2}{\mu_2^2}} \tanh\left(\sqrt{\frac{-1+4b_1^2}{\mu_2^2}}(x-ct)\right) + b_1 \left(\sqrt{\frac{1-4b_1^2}{\mu_2^2}} + \left(-\sqrt{\frac{-1+4b_1^2}{\mu_2^2}} \tanh\left(\sqrt{\frac{1-4b_1^2}{\mu_2^2}}(x-ct)\right)\right)^2\right)\right)}{\left(\mu_2 \sqrt{\frac{1-4b_1^2}{\mu_2^2}} + \left(-\sqrt{\frac{-1+4b_1^2}{\mu_2^2}} \tanh\left(\sqrt{\frac{-1+4b_1^2}{\mu_2^2}}(x-ct)\right)\right)^2 + 1\right)}$$

4.çözüm

$$u(x,t) = \frac{1+c}{2} + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{-1}{x-ct}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{-1}{x-ct}\right)^2}}{\mu_1 \left(\frac{-1}{x-ct}\right) + \mu_2 \sqrt{\left(\frac{-1}{x-ct}\right)^2} + 1}$$

5.çözüm

$$u(x,t) = \frac{1+c}{2} - \frac{1}{x-ct}$$

6.çözüm

$$u(x,t) = \frac{1+c}{2} + \frac{\left(\frac{-1}{x-ct}\right)}{\mu_1 \left(\frac{-1}{x-ct}\right) + \mu_2 \left(\frac{-1}{x-ct}\right) + 1}$$

7.çözüm

$R > 0$ için

$$u(x,t) = a_0 + \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)} \tan\left(\sqrt{\frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}(x-ct)\right)}{-1+2a_0-c \sqrt{\frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)} \tan\left(\sqrt{\frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}(x-ct)\right) + 1}$$

$R < 0$ için

$$u(x,t) = a_0 + \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}\tanh(\sqrt{\frac{-1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}(x-ct))}{-1+2a_0-c\sqrt{\frac{-1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}\tanh(\sqrt{\frac{-1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}(x-ct))+1}$$

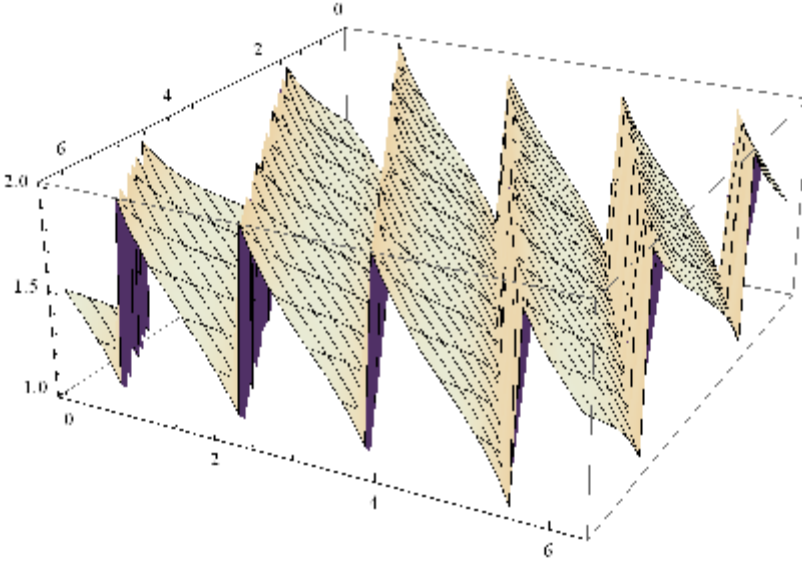
8.çözüm

$R > 0$ için

$$u(x,t) = a_0 + \frac{b_1\sqrt{\frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)} + (\sqrt{\frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}\tanh[\sqrt{\frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}(x-ct)])^2}{\left(\frac{1}{-1+2a_0-c}\sqrt{\frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}\tanh[\sqrt{\frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}(x-ct)] + \frac{b_1}{1-2a_0+c}\right)\sqrt{\frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)} + (\sqrt{\frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}\tanh[\sqrt{\frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}(x-ct)])^2 + 1}$$

$R < 0$ için

$$u(x,t) = a_0 + \frac{b_1\sqrt{\frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)} + (\sqrt{\frac{-1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}\tanh[\sqrt{\frac{-1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}(x-ct)])^2}{\left(\frac{-1}{-1+2a_0-c}\sqrt{\frac{-1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}\tanh[\sqrt{\frac{-1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}(x-ct)] + \frac{b_1}{1-2a_0+c}\right)\sqrt{\frac{1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)} + (\sqrt{\frac{-1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}\tanh[\sqrt{\frac{-1}{2}(-1+4a_0-4a_0^2-2c+4a_0c-c^2)}(x-ct)])^2 + 1}$$



Şekil 7. CRWP denkleminin Riccati 2. çözümünün için üç boyutlu hareket eden dalga görünümü $\mu_2 = 1, c = 2, x = [0, 2\pi], t = [0, 2\pi]$

4.2. CRPW Denklemine Genelleştirilmiş Kudryashov Metodunun Uygulanması

Bu metodu CRWP denklemine uygularsak;

$$u_t - u_x + 2uu_x - u_{xx} = 0 \quad (4.1)$$

$u(x, t) = y(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü ile

$$-cy_\xi - y_\xi + 2yy_\xi - y_{\xi\xi} = 0 \quad (4.2)$$

(4.1) denkleminin kutbu $m = 1$ dır. Böylece arayacağımız çözüm formu

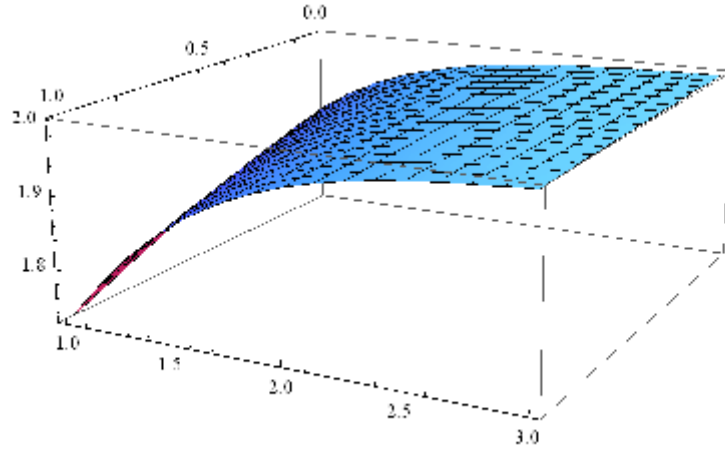
$$y = a_0 + a_1 Q(\xi) \text{ dır.} \quad (4.3)$$

(4.3) ü (4.2) denkleminde yerine yazarak ve $Q(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlersek aşağıdaki cebirsel denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{aligned}
-2a_0a_1 + a_1c &= 0 \\
2a_1 + 2a_0a_1 - 2a_1^2 - a_1c &= 0 \\
-2a_1 + 2a_1^2 &= 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.4) cebirsel denklem sisteminin çözümünden $a_0 = \frac{c}{2}$ & $a_1 = 1$ katsayılarını elde ederiz. Böylece (4.1) denkleminin çözüm fonksiyonu

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{c}{2} + \frac{1}{1 + e^{x-ct}} \\
&= \frac{c}{2} + \frac{1}{1 + \text{Cosh}[ct - x] - \text{Sinh}[ct - x]}
\end{aligned} \tag{4.5}$$



Şekil 8. CRWP denkleminin (4.5) çözümü için üç boyutlu periyodik dalga görünümü, ($c = 2$)

4.3. CRPW Denklemine Genelleştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodunun Uygulanması

Bu metodu CRWP denklemine uygularsak;

$$u_t - u_x + 2uu_x - u_{xx} = 0 \quad (4.1)$$

$u(x, t) = y(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü ile (4.1) denklemi

$$-cu' - u' + 2uu' - u'' = 0 \quad (4.2)$$

Adi diferansiyel denklemine dönüşür. uu' ile u'' terimleri arasında dengelem yapılırsa, $p = q = c = d$ olur. Burada $p = q = c = d = 1$ alınırsa aranılan çözüm formu,

$$u(\xi) = \frac{a_{-1} \exp(-\xi) + a_0 + a_1 \exp(\xi)}{b_{-1} \exp(-\xi) + b_0 + \exp(\xi)} \quad (4.3)$$

olur. (4.3) ü (4.2) denleminde yerine yazar ve $\exp(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlersek aşağıdaki cebirsel denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{aligned} -6a_{-1}a_0 + 6a_0b_{-1} + 6a_0a_1b_{-1} - 6a_1b_{-1}b_0 + 3a_{-1}b_0c - 3a_1b_{-1}b_0c &= 0 \\ 2a_{-1}a_0b_{-1} - 2a_0b_{-1}^2 - 2a_{-1}^2b_0 + 2a_{-1}b_{-1}b_0 - a_0b_{-1}c + a_{-1}b_{-1}b_0c &= 0 \\ -4a_{-1}^2 + 6a_{-1}b_{-1} + 2a_0^2b_{-1} + 4a_{-1}a_1b_{-1} - 6a_1b_{-1}^2 - 2a_{-1}a_0b_0 + 2a_{-1}b_{-1}c - 2a_1b_{-1}^2c - a_0b_{-1}b_0c + a_{-1}b_0^2c &\stackrel{!}{=} 0, \\ -2a_{-1} - 2a_0^2 - 4a_{-1}a_1 + 2a_1b_{-1} + 4a_1^2b_{-1} + 2a_0b_0 + 2a_0a_1b_0 - 2a_1b_0^2 + 2a_{-1}c - 2a_1b_{-1}c + a_0b_0c - a_1b_0^2c &\stackrel{!}{=} 0, \\ -2a_0a_1 + 2a_1^2b_0 + a_0c - a_1b_0c &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.8) cebirsel denklem sisteminin çözümünden;

$$1.\text{durum: } a_{-1} = 0 \& a_1 = \frac{c}{2} \& b_{-1} = 0 \& c(2+c) \neq 0 \& b_0 = \frac{2a_0}{2+c}$$

$$2.\text{durum: } a_1 = \frac{c}{2} \& 2+c \neq 0 \& b_{-1} = \frac{2a_{-1}}{2+c} \& a_{-1}(a_{-1}-b_{-1}) \neq 0 \&$$

$$b_0 = \frac{2a_{-1}a_0b_{-1} - a_0b_{-1}^2 - \sqrt{-4a_{-1}^2b_{-1}^3 + 4a_{-1}b_{-1}^4 + a_0^2b_{-1}^4}}{2(a_{-1}^2 - a_{-1}b_{-1})} \text{ veya}$$

$$b_0 = \frac{2a_{-1}a_0b_{-1} - a_0b_{-1}^2 + \sqrt{-4a_{-1}^2b_{-1}^3 + 4a_{-1}b_{-1}^4 + a_0^2b_{-1}^4}}{2(a_{-1}^2 - a_{-1}b_{-1})}$$

$$3.\text{durum: } c = -3 \& a_{-1} = 0 \& a_0 = 0 \& a_1 = -2 \& b_0 = 0$$

$$4.\text{durum: } c = -2 \& a_{-1} = 0 \& a_0 = 0 \& a_1 = -1 \& b_{-1} = 0$$

$$5.\text{durum: } c = -2 \& a_{-1} = 0 \& a_1 = -1 \& a_0 \neq 0 \& b_0 = \frac{-a_0^2 - b_{-1}}{a_0}$$

$$6.\text{durum: } a_{-1} \neq 0 \& a_1 = \frac{2+c}{2} \& a_1 \neq 0 \& b_{-1} = \frac{a_{-1}}{a_1} \& b_0 = \frac{a_0b_{-1}}{a_{-1}}$$

$$7.\text{durum: } a_{-1} = 0 \& a_1 = \frac{c}{2} \& a_0 \neq 0 \& b_{-1} = 0 \& c(2+c) \neq 0 \&$$

$$b_0 = \frac{2a_0 - 2\sqrt{a_0^2} + 2a_0c}{2c + c^2} \text{ veya } b_0 = \frac{2a_0 + 2\sqrt{a_0^2} + 2a_0c}{2c + c^2}$$

(4.5) katsayıları elde edilir. Sırasıyla katsayılarla bağlı çözümler

1.durum için,

$$u(x,t) = \frac{a_0 + \frac{c}{2}e^{-ct+x}}{\frac{2a_0}{2+c} + e^{-ct+x}}$$

2.durum

için,

$$u(x,t) = \frac{a_{-1}e^{ct-x} + a_0 + \frac{c}{2}e^{-ct+x}}{\frac{2a_{-1}}{2+c}e^{ct-x} + \frac{2a_{-1}a_0\frac{2a_{-1}}{2+c} - a_0(\frac{2a_{-1}}{2+c})^2 - \sqrt{-4a_{-1}^2(\frac{2a_{-1}}{2+c})^3 + 4a_{-1}(\frac{2a_{-1}}{2+c})^4 + a_0^2(\frac{2a_{-1}}{2+c})^4}}{2(a_{-1}^2 - a_{-1}\frac{2a_{-1}}{2+c})} + e^{-ct+x}}$$

3.durum için,

$$u(x,t) = \frac{-2e^{3t+x}}{b_{-1}e^{-3t-x} + e^{3t+x}}$$

4.durum için,

$$u(x,t) = \frac{-e^{x+2t}}{b_0 + e^{x+2t}}$$

5.durum için,

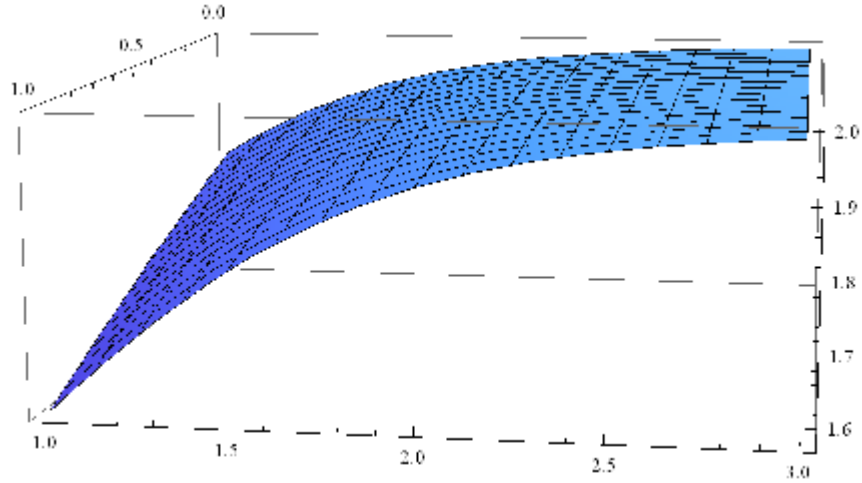
$$u(x,t) = \frac{a_0 - e^{x+2t}}{b_{-1}e^{-x-2t} - \frac{a_0^2 + b_{-1}}{a_0} + e^{x+2t}}$$

6.durum için,

$$u(x,t) = \frac{a_{-1}e^{-x+ct} + a_0 + \frac{2+c}{2}e^{x-ct}}{\frac{a_{-1}}{a_1}e^{-x+ct} - \frac{a_0b_{-1}}{a_{-1}} + e^{x-ct}}$$

7.durum için,

$$u(x,t) = \frac{a_0 + \frac{c}{2}e^{x-ct}}{\frac{2a_0 - 2\sqrt{a_0^2} + 2a_0c}{2c + c^2} + e^{x-ct}}$$



Şekil 9. CRWP denkleminin 1. çözümü için üç boyutlu hareket eden dalga görünümü,

$$a_0 = 1, c = 2, x = [0, 1], t = [1, 3]$$

4.4. CRPW Denklemine Genelleştirilmiş $\frac{G'}{G}$ -Açılım Metodunun

Uygulanması

CRWP denklemini ele alırsak,

$$u_t - u_x + 2uu_x - u_{xx} = 0 \quad (10)$$

$u(x, t) = y(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü ile (10) denklemi

$$-cu' - u' + 2uu' - u'' = 0 \quad (11)$$

adi diferansiyel denklemine dönüştür. uu' ile u'' terimleri arasında dengelem yapılırsa $m=1$. Böylece arayacağımız çözüm formu,

$$u(\xi) = a_1 \left(\frac{G'}{G} \right) + a_0, \quad (12)$$

olur. (12) yi (11) denkleminde yerine yazar ve $\left(\frac{G'}{G} \right)$ fonksiyonunun

kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlersek aşağıdaki cebirsel denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{aligned} a_1\mu - 2a_0a_1\mu + a_1c\mu - a_1\lambda\mu &= 0, \\ a_1\lambda - 2a_0a_1\lambda + a_1c\lambda - a_1\lambda^2 - 2a_1\mu - 2a_1^2\mu &= 0 \\ a_1 - 2a_0a_1 + a_1c - 3a_1\lambda - 2a_1^2\lambda &= 0 \\ 2a_1 + 2a_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

(13) cebirsel denklem sisteminin çözümünden,

$$a_0 = \frac{1}{2}(1+c-\lambda) \text{ \& } a_1 = -1 \quad (14)$$

katsayılarına göre (14) ü (12) denkleminde yerine yazarsak (10) denkleminin aşağıdaki üç tip çözümünü elde ederiz.

(i) $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda hiperbolik fonksiyon hareket eden dalga çözümü elde ederiz ,

$$u_1(\xi) = \frac{1}{2}(1+c-\lambda) - \left(\frac{ACosh[\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(x-ct)] + BSinh[\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(x-ct)]}{BCosh[\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(x-ct)] + ASinh[\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(x-ct)]} \right). \quad (15)$$

Burada A ve B keyfi sabitlerdir.

(ii) $\lambda^2 - 4\mu < 0$, olduğunda trigonometrik fonksiyon hareket eden dalga çözümü elde ederiz.

$$u_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+c-\lambda) - \left(\frac{ACos[\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(x-ct)] + BSin[\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(x-ct)]}{BCos[\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(x-ct)] + ASin[\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(x-ct)]} \right). \quad (16)$$

Burada A ve B keyfi sabitlerdir.

(iii) $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğunda rasyonel fonksiyon çözümü elde ederiz.

$$u_3(\xi) = \frac{1}{2}(1+c-\lambda) - \left(\frac{B}{A+Bx} \right). \quad (17)$$

Burada A ve B keyfi sabitlerdir.

$$\mu = 0 \& a_0 \neq \frac{1}{2}(1+c-\lambda) \& a_1 = -1 \quad (18)$$

katsayılarına göre de (18) ü (12) denkleminde yerine yazarsak (10) denkleminin aşağıdaki iki tip çözümünü elde ederiz.

(i) $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda hiperbolik fonksiyon hareket eden dalga çözümü elde ederiz ,

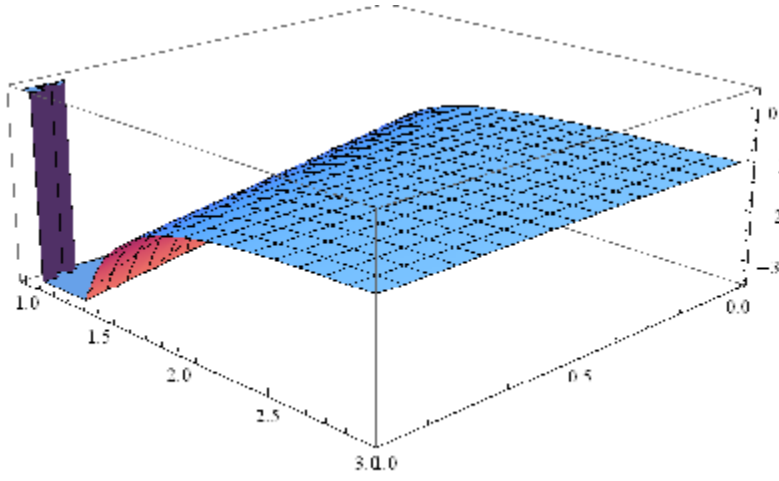
$$u_4(\xi) = \frac{1}{2}(1+c-\lambda) - \left(\frac{ACosh[\frac{\sqrt{\lambda^2}}{2}(x-ct)] + BSinh[\frac{\sqrt{\lambda^2}}{2}(x-ct)]}{BCosh[\frac{\sqrt{\lambda^2}}{2}(x-ct)] + ASinh[\frac{\sqrt{\lambda^2}}{2}(x-ct)]} \right). \quad (19)$$

Burada A ve B keyfi sabitlerdir.

(ii) $\lambda^2 < 0$, olduğunda trigonometrik fonksiyon hareket eden dalga çözümü elde ederiz.

$$u_5(\xi) = \frac{1}{2}(1+c-\lambda) - \left(\frac{ACos[\frac{\sqrt{\lambda^2}}{2}(x-ct)] + BSin[\frac{\sqrt{\lambda^2}}{2}(x-ct)]}{BCos[\frac{\sqrt{\lambda^2}}{2}(x-ct)] + ASin[\frac{\sqrt{\lambda^2}}{2}(x-ct)]} \right). \quad (20)$$

Burada A ve B keyfi sabitlerdir.



Şekil 10. CRWP denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$ çözümü için üç boyutlu hareket eden dalga görünümü $A=2, B=1, c=2, x=[0,1], t=[1,3]$

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Uygulamalı bilimlerde, üzerinde çalışılan olayı matematiksel olarak modelleyerek bu modelin analitik çözümleri hakkında bilgi sahibi olmak çok önemlidir. Çünkü bu çözümler modellenen olayın karakteri hakkında bilgi verir. Bu yüzden lineer veya lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik alanlarında oldukça önemli bir yere sahiptir. Son zamanlarda özellikle uygulamalı matematik alanında çalışan bilim adamları lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin taşıyıcı dalga çözümleri üzerine odaklanmışlardır. Elde edilen bu dalga çözümleri, dalganın yapısı ve dalgaların birbirleri ile olan etkileşimleri gibi birçok konuda uygulama sahasında çalışan bilim adamlarına ilham vermektedir. Böyle bir ihtiyaçtan dolayı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini veren birçok etkili metot geliştirilmiştir. Bu metotların çoğu sadece lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir. Çünkü bu metotların işleyişi “dengeleme terimi” olarak adlandırılan ve en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin karşılaştırılmasına dayanır.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin dalga çözümlerini bulmak için kullanılan ve ikinci bölümde analizleri yapılan metotlara bakıldığında temelde hepsi, ele alınan kısmi diferansiyel denklemi bir değişken dönüşümü altında adi bir diferansiyel denkleme dönüştürerek çözüme ulaşma esasına dayanır. Bu metotların birbirlerinden farklı olan tek tarafı seçilen Riccati diferansiyel denkleminin ve dolayısıyla kullanılan çözüm fonksiyonunun farklı olmasıdır. Ancak bazı metotlarda Riccati diferansiyel denklemin yerine farklı denklemler alınarak çözüme ulaşılmıştır. Örneğin, $\frac{G'}{G}$ açılım metodunda Riccati diferansiyel denklemi yerine ikinci mertebeden sabit katsayılı adi bir diferansiyel denklem kullanılmıştır. Bu şekilde denklemin seçilmesi konusunda bilim adamlarının özgür olması, bu çalışmada bahsedilmeyen fakat literatürde *direkt cebirsel metot* ve *keyfi denklem metodu* olarak geçen metotların ortaya çıkmasına yol açmıştır. Bahsedilen metotların hepsi lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin taşıyıcı dalga çözümlerini verir. Bu çözümler içerisinde periyodik olan dalga çözümleri ayrı bir yer tutar. Bu metotların hepsi dengeleme terimini bulma esasına dayandığından

dengeleme teriminin negatif olması durumunda ortaya çıkabilecek bazı güçlükler bu metotların bir çıkmazı olarak görülebilir. Ancak bu durum ile ilgili yapılan ve yapılmakta olan çalışmalar da vardır.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri lineer denklemlere göre daha zordur. Bu yüzden ikinci bölümde bahsedilen metotlar ile yukarıda genişçe tanımını verdiğimiz bir popülasyonun bir habitattan diğerine rastlantısal hareketinin modellendiği ve daha önce bu metotlar ile ele alınmamış lineer olmayan kısmi diferansiyel CRWP denkleminin farklı analitik çözümlerini elde ettik.

6. KAYNAKLAR

- [1] **Serway, R., Jewett, J.**, 2004. Physics for Scientists and Engineers, 6th Edition, Thomson, USA.
- [2] **Russell, J.S.**, 1844. Report on Waves, 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London: BAAS.
- [3] **Zabusky, N.J., Kruskal, M.D.**, 1965. Interaction of solitons in collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Physical Review Letters*, **15**, 240-243.
- [4] **Debnath L.**, 1997. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientist and Engineers, Birkhauser, Boston, MA.
- [5] **Wazwaz, A.M.**, 2002. Partial Differential Equations: Methods and Applications, Balkema, Rotterdam.
- [6] **Hirota, R.**, 1980. Direct methods in soliton theory, In Solitons (Bullogh, R.K. and Caudrey, P.J., eds). Springer, Berlin.
- [7] **Nimmo, J.J.C., Freeman, N.C.**, 1984. The use of Bäcklund transformations in obtaining N-soliton solutions in wronskian form, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **17**, 1415-1424.
- [8] **Shang, Y., Guo, B.**, 2003. Analysis of chebyshev pseudospectral method for multi-dimensional generalized SRLW equations, *Applied Mathematics and Mechanics*, **24**, 1168-1183.
- [9] **Guo, S., Zhou, Y.**, 2010. The extended $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like equations and coupled Hirota–Satsuma KdV equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3214-3221.

- [10] **Iskandar, L., Jain, P.C.,** 1980. Numerical solutions of the improved Boussinesq equation, *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, **89**, 171-181.
- [11] **Soerensen, M.P., Christainsen, P.L. and Lomdahl P.S.,** 1984. Solitary waves on nonlinear elastic rods, *Journal of the Acoustical Society of America*, **76**, 871-879.
- [12] **Bogolubsky, J.L.,** 1977. Some examples of inelastic soliton interaction, *Computer Physics Communications*, **13**, 149-155.
- [13] **Chen, L.,** 1998. Stability and instability of solitary waves for generalized symmetric regularized long wave equations, *Physica D*, **118**, 53-68.
- [14] **Guo, B.,** 1987. The spectral method for symmetric regularized wave equations, *Journal of Computational Mathematics*, **5**, 297-306.
- [15] **Zheng, J.,** 1989. The pseudo spectral collocation method for the generalized SRLW equations, *Mathematics Numerical Sinica*, **11**, 64-72.
- [16] **Guo, B.,** 1992. The existence of global solutions and "blow up" phenomena for a system of multidimensional symmetric regularized wave equations, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **8**, 59-72.
- [17] **Shang, Y. and Li, Z.,** 1999. The Fourier spectral methods for solving the multidimensional generalized symmetric regularized long wave equations, *Numerical Mathematics: A Journal of Chinese Universities*, **21**, 48-60.
- [18] **Zheng, X., Chen, Y. and Zhang, H.** 2003. Generalized extended tanh-function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation, *Applied Physics Letters A*, **311**, 145-157.
- [19] **Hu, X.B. and Ma, W.X.,** 2002. Application of Hirota's bilinear formalism to the Toeplitz lattice-some special soliton-like solutions, *Physics Letters A*, **293**, 161-165.

- [20] **Shang, Y.**, 2007. Bäcklund transformation, Lax pairs and explicit exact solutions for the shallow water waves equation, *Applied Mathematics and Computation*, **187**, 1286-1297.
- [21] **Wang, M.**, 1996. Exact solutions for compound KdV-Burgers equations, *Physics Letters A*, **213**, 279-287.
- [22] **Bock, T.L., Kruskal, M.D.**, 1979. A two-parameter Miura transformation of the Benjamin-Ono equation, *Physics Letters A*, **74**, 173-176.
- [23] **Drazin, P.G., Jhonson, R.S.**, 1989. Solitons: An Introduction, Cambridge University Press, Cambridge.
- [24] **Matveev, V.B., Salle, M.A.**, 1991. Darboux transformations and solitons, Springer, Berlin.
- [25] **Cariello, F., Tabor, M.**, 1989. Painlevé expansions for nonintegrable evolution equations, *Physica D*, **39**, 77-94.
- [26] **Fan, E.**, 2000. Two new applications of the homogeneous balance method, *Physics Letters A*, **265**, 353-357.
- [27] **Clarkson, P.A.**, 1989. New Similarity Solutions for the Modified Boussinesq Equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **22**, 2355-2367.
- [28] **Chuntao, Y.**, 1996. A simple transformation for nonlinear waves, *Physics Letters A*, **224**, 77-84.
- [29] **Hereman, W., Korpel, A. and Banerjee, P.P.**, 1985. A general physical approach to solitary wave construction from linear solutions, *Wave Motion*, **7**, 283-289.
- [30] **Hereman, W., Takaoka, M.**, 1990. Solitary wave solutions of nonlinear evolution and wave equations using a direct method and MACSYMA, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**, 4805-4822.

- [31] **Lan, H., Wang, K.**, 1990. Exact solutions for two nonlinear equations, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**, 3923-3928.
- [32] **Lou, S., Huang, G. and Ruan, H.**, 1991. Exact solitary waves in a convecting fluid, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **24**, L587-L590.
- [33] **Malfliet, W.**, 1992. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *American Journal of Physics*, **60**, 650-654.
- [34] **Wazwaz, A.**, 2005. The tanh method: Solitons and periodic solutions for the Dodd–Bullough–Mikhailov and the Tzitzeica–Dodd–Bullough equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **25**, 55-63.
- [35] **Wazwaz, A.**, 2006. Solitons and periodic solutions for the fifth-order KdV equation, *Applied Mathematics Letters*, **19**, 1162-1167.
- [36] **Wazwaz, A.**, 2007. New solitary wave solutions to the modified Kawahara equation, *Physics Letters A*, **360**, 588-592.
- [37] **Parkes, E.J., Duffy, B.R.**, 1996. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations, *Computer Physics Communications*, **98**, 288-300.
- [38] **Fan, E.**, 2000. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, *Physics Letters A*, **277**, 212-218.
- [39] **Elwakil, S.A., El-labany, S.K., Zahran, M.A. and Sabry, R.**, 2002. Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations, *Physics Letters A*, **299**, 179-188.
- [40] **Xia T., Lü Z. and Zhang H.**, 2004. Symbolic computation and new families of exact soliton-like solutions of Konopelchenko–Dubrovsky equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **20**, 561-566.

- [41] **Zheng, X., Chen, Y. and Zhang, H.,** 2003. Generalized extended tanh-function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation, *Physics Letters A*, **311**, 145-157.
- [42] **Chen, H., Zhang, H.,** 2004. New multiple soliton solutions to the general Burgers-Fisher equation and the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **19**, 71-76.
- [43] **El-Wakil S.A., Abdou M.A.,** 2008. New exact travelling wave solutions of two nonlinear physical models, *Nonlinear Analysis*, **68**, 235–245.
- [44] **Fu, Z., Liu, S., Liu, S. and Zhao, Q.,** 2001. New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations, *Physics Letters A*, **290**, 72-76.
- [45] **Shen S., Pan, Z.,** 2003. A note on the Jacobi elliptic function expansion method, *Physics Letters A*, **308**, 143-148.
- [46] **Chen, H.T., Hong-Qing, Z.,** 2004. New double periodic and multiple soliton solutions of the generalized (2 + 1)-dimensional Boussinesq equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **20**, 765-769.
- [47] **Chen, Y., Wang, Q. and Li B.,** 2004. Jacobi elliptic function rational expansion method with symbolic computation to construct new doubly periodic solutions of nonlinear evolution equations, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **59**, 529-536.
- [48] **Chen, Y., Wang, Q. and Li B.,** 2006. A unified rational expansion method to construct a series of explicit exact solutions to nonlinear evolution equations. *Applied Mathematics and Computation*, **177** (2006) 396-409
- [49] **Chen, Y., Yan, Z.,** 2006. The Weierstrass elliptic function expansion method and its applications in nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, **29**, 948-964

- [50] **Kudryashov, N.A.**, Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations, chaos, solitons & *Fractals*, **24**, 1217-1231.
- [51] **He, J.H., Wu, X.H.**, 2006. Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **30**, 700-708.
- [52] **Xu, F.**, 2008. Application of Exp-function method to Symmetric Regularized Long Wave (SRLW) equation, *Physics Letters A*, **372**, 252-257.
- [53] **Chun, C.**, 2008. Solitons and periodic solutions for the fifth-order KdV equation with the Exp-function method, *Physics Letters A*, **372**, 2760-2766.
- [54] **Wu, X.H., He, J.H.**, 2007. Solitary solutions, periodic solutions and compacton-like solutions using the Exp-function method, *Computers & Mathematics with Applications*, **54**, 966–986.
- [55] **Wang, M., Li, X. and Zhang, J.**, 2008. The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Physics Letters A*, **372**, 417-423.
- [56] **Guo, S., Zhou, Y.**, 2010. The extended $\left(\frac{G'}{G}\right)$ - expansion method and its applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like equations and coupled Hirota–Satsuma KdV equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3214-3221.
- [57] **Lü, H.L., Liu, X.Q. and Niu, L.**, 2009. A generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation*, (in press).

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Ağrı'nın Hamur ilçesinde doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Ağrı da tamamladım.1993 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünde lisans öğrenimime başladım. 1997 yılında mezun oldum. 1997 yılında Matematik Öğretmeni olarak göreve başladım. 2012 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2012 yılından beri Dicle Üniversitesi Silvan Meslek Yüksek Okulunda Öğretim Görevlisi olarak görevime devam etmekteyim.