



**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

LİNEER OLMAYAN q - FARK DENKLEMLERİNİN TERS q - FARK OPERATÖRÜ İLE ÇÖZÜMÜ

Yüksek Lisans Tezi

Kübra IŞIK

Danışman
Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

SAMSUN
2023

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI



LİNEER OLMAYAN q - FARK DENKLEMLERİNİN TERS q - FARK OPERATÖRÜ İLE ÇÖZÜMÜ

Yüksek Lisans Tezi

Kübra IŞIK

Danışman

Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

SAMSUN
2023

TEZ KABUL VE ONAYI

Kübra IŞIK tarafından, **Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK** danışmanlığında hazırlanan “**LİNEER OLMAYAN q- FARK DENKLEMLERİNİN TERS q- FARK OPERATÖRÜ İLE ÇÖZÜMÜ**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 22.9.2023 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	Sonuç
Başkan	Doç.Dr.Nihat ALTINIŞIK Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Fatma HIRA Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı	☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Hatice MUTİ Samsun Üniversitesi Havacılık Yönetimi Ana Bilim Dalı	☒ Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

Prof. Dr. Ahmet TABAK
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi ?

Evet ☐ (Gerekli ise ekler kısmına ekleyiniz)

Hayır ☒

22 /09 / 2023

Kübra IŞIK

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı : LİNEER OLMAYAN q-FARK DENKLEMLERİNİN TERS q- FARK OPERATÖRÜ İLE ÇÖZÜMÜ

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 04/07/2023 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 28

Tek kaynak oranı : % 5 çıkmıştır.

04/07/2023

Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

ÖZET

LİNEER OLMAYAN q - FARK DENKLEMLERİNİN TERS q - FARK OPERATÖRÜ İLE ÇÖZÜMÜ

Kübra IŞIK

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans, Eylül/2023

Danışman: Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

Bu çalışmada adi farktan yola çıkılarak, Q -analizin temelini oluşturan q -fark denklemi ve q -operatörü hakkında bilgi verilmiş, tanım ve uygulamalardan sonra D_q ve $D_{q^{-1}}$ operatörleri tanıtılmıştır. Çalışmanın ilerleyen bölümlerinde çözüm ailesi keyfi bir sabite bağlı olarak verilen q -fark denkleminin oluşum süreci anlatılmıştır. Klasik diferansiyel denklemler ile q -fark denklemlerinin bazı noktalardaki benzerlikleri ve farklılıkları gösterilerek çözüm ailelerinde türevin olmadığı tanım aralıklarında q -türevin varlığı, bazı durumlarda türev ve q -türevin çakıştığı örnekler ile gösterilmiştir.

Fark denklemleri kapsamında, lineer olmayan tip denklemlerin genel çözümlerine ulaşmanın mümkün olmadığı veya uzun uğraşlar gerektirdiği bilinsede mühendislik ve doğa bilimlerinin birçok alanında lineer olmayan fark denklemleri kullanılmaktadır.

Bundan dolayı çalışma da birçok problemin modellenmesinde kullanılan lineer olmayan q -fark denklemlerinin ters q -fark operatörü ile çözüm ailelerinin bulunma yöntemleri teoriler ve örneklerle açıklanmaktadır.

Lineer olmayan q -fark denklemlerinin homojen olma homojen olmama durumlarına göre uygunsa lineer hale getirerek ya da çalışma da verilen formlara dönüştürerek çözüm aileleri bulunmuştur.

Anahtar Sözcükler: Quantum Kalkülüs, q - Fark Operatörü, Ters q -Fark

ABSTRACT

SOLUTION OF NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS WITH INVERS q -DIFFERENCE OPERATOR

Kübra IŞIK

Ondokuz Mayıs University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics

Master, September/2023

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nihat ALTINIŞIK

In this study, information is given about the q -difference equation and the q -operator, which form the basis of Q -analysis, based on ordinary difference, and after the definitions and applications, D_q and $D_{q^{-1}}$ operators are introduced. In the following sections of the study, the formation process of the q -difference equation, whose solution family is given depending on an arbitrary constant, is explained. The similarities and differences between classical differential equations and q -difference equations at some points are shown, and the existence of q -derivative in definition intervals where there is no derivative in the solution families, and in some cases the situations where the derivative and q -derivative overlap are shown with examples.

Within the scope of difference equations, although it is known that it is not possible to reach general solutions of non-linear type equations or requires long efforts, non-linear difference equations are used in many fields of engineering and natural sciences.

Therefore, in this study, methods of finding solution families of nonlinear q -difference equations, which are used in modeling many problems, with the inverse q -difference operator are explained with theories and examples.

Solution families of nonlinear q -difference equations were found by making them linear, if appropriate, or by transforming them into the forms given in the study, depending on whether they are homogeneous or non-homogeneous.

Keywords: Quantum Calculus, q -Difference Operator, Inverse q -Difference

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitim yolunda yürümeme vesile olan öngörüsü ve tecrübesine çok güvendiğim desteğini hiçbir zaman esirgemeyen Matematik Bölümü Anabilim Dalı başkanı Prof. Dr. Emin KASAP'a

Süreç boyunca akademik desteğini ilgisini, sabrını fazlasıyla gördüğüm, danışman yapıcılığını tattığım kıymetli hocam, tez danışmanım Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK'a,

Lisans eğitimim boyunca dersini dinlemekten ayrıca mutlu olduğum derdimle dertlenen , yüreklendiren ,göremediğim şeylere ışık olan, çok sevdiğim Doç. Dr. Esen ERSOY'a

Her aşamasında kahrımı çeken kardeşim Şevval Ece IŞIK'a ,sürekli bittiğini biraz daha dışımı sıkmamı nihayete ermesi gerektiğini söyleyen motivasyon kaynaklarım annem Nilgün IŞIK , babam Mehmet Emin IŞIK' a teşekkür ediyorum.

Bu yolu yürümeyi tercih edenlere ;

Bazen kırılırsınız, kırıldığınız yerden dallanıp budaklanın çünkü vazgeçmek literatürde yok.

Kübra IŞIK

İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI	i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	ii
TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	3
2.1 Fark Operatörü	3
2.2 Δ^{-1} Operatör	6
2.3 Fark Denklemleri	7
3. q-ANALİZDE TEMEL KAVRAMLAR	10
3.1 q -Analog Fonksiyonları	10
4. q - DİFERANSİYEL VE q -TÜREV.....	12
4.1 q-Diferansiyel	12
4.2 h- Diferansiyel	12
4.3 q-Türev	13
4.4 q-Türevin Özellikleri	14
4.5 Örnekler	14
4.6. Üstel Fonksiyon ve ln Fonksiyonlarının Analogları.....	15
5. q-FARK DENKLEMİNİN ELDE EDİLMESİ	17
5.1 q-Fark Denkleminin Elde Edilmesi	17
5.2 D_q^{-1} Operatörü ve Toplam Analizi.....	20
5.3 Bazı q-Fark Denklemlerinin Çözüm Aileleri	22
5.4 Belirli q-İntegral.....	36
5.5.Belirsiz q-İntegral.....	37
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	44
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	46

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar
Δ	: Fark Operatörü
Δ^{-1}	: Ters Fark Operatörü
I	: Birim Operatör
$[x]_q$	: q -Reel Sayı
$[n]_q!$	: q -Faktöriyeli
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$	: q -Binom Katsayısı
e_q^x	: q -Üstel Fonksiyonun q -Analoğu
D_q	: q -Fark Operatörü
$\sin_q$	: q -Sinüs
$\cos_q$	: q -Cosinüs
$d_q f$	: f Fonksiyonunun q -Diferansiyeli
$D_q f$	: f Fonksiyonun q -Türevi
$\int f(x) d_q x$	: f Fonksiyonunun q -İntegrali

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler Newton ve Leibniz'in çalışmaları ile başlar. Matematikte diferansiyel denklem bir ya da birden fazla fonksiyonu ve bunların türevlerini içeren denklemdir (Zill, 2012).

Diferansiyel denklemler teorisi, kimya, ekonomi , astronomi , mühendislik uygulamaları, evrim teorisindeki süreçlerin hesabında bile yer bulmuştur. Newton 1671 yılında yayınlanan "*Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum*" isimli kitabında genel hatları ile diferansiyel denklemleri tanımlamış ve sonsuz seriler yöntemini kullanarak çözümün varlığı ve tekliğini sorgulamıştır. Bununla birlikte x bağımsız değişkenin sürekli olduğu durumlarda bağımlı değişkenin değişimi türevler yardımı ile açıklanabilir. Ancak x 'in sürekli olmadığı kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımı ile açıklanamaz (Elaydi, 1996).

Diferansiyel denklemlerde karşılaşılan süreksizlik durumlarını, fark denklemleri ile kaldırmak mümkündür. 1755 yılında Euler sonlu fark analizi üzerine çalışmış ve ilk defa fark operatörünü kullanmıştır. Sonlu fark işlemleri Newton ile yayılmaya başlamıştır. 1825 yılından önce lineer fark denklemleri incelenmemiştir. 1885 yılında Poincaré ile lineer fark denklem teorisine girilmiştir (Çatal, 2004).

Süreksiz noktalarda çözüm olanağı sunması sebebiyle fark denklemlerine ilgi artmıştır. Fark denklemleri adi fark ve q -fark olarak iki başlıkta incelenmiştir aslında 1700'lü yıllardan beri limitsiz türev olarak açıklanan "Quantum Calculus" ve tanımlardaki " q " nun geliştirilip fonksiyonel hale gelmesi 1900'lü yılları bulmaktadır. q -fark hesabı ve temel kuralları Jackson ile 1910 yılında açıklanmıştır (Jackson, 1908).

q -analizde q -gerçek sayıların analogunun tanımlanması ile gelişmeler başlamış yakın tarihli olarak da integral eşitsizlikleri ile ilgili sonuçlar 2004 yılında Gauchman tarafından ispatlanmıştır (Gauchman, 2004).

Yakın tarihli olarak 2010 yılında El-Shahed ve Hassan lineer sınır değer problemlerinin pozitif çözümlerinin varlığı üzerine, 2011 yılında doğrusal olmayan q -fark sınır değer problemi üzerine çalışmalarını yayınlamıştır (El-Shaed ve Hassan,2010). Bu çalışmalara ek olarak Ferreira q -fark denklemlerinin pozitif

özmleri ve bilgisayar programları ile çözümleri üzerine çalışmalarını paylaşmıştır (Ferreira, 2011).

q -Analiz anlamında günümüzdeki çalışmaların çoğunun Sturm-Liouville problemi olduğu görülür ve yine sınır değer problemlerinin büyük çoğunluğu da bu kapsamdadır. Sınır değer problemlerinin anlamlı olabilmesi için iyi tanımlanmış olması bu koşullar altında tek ve sürekli bir çözüme sahip olması beklenir.

q -fark denklemleri, mühendislik, kuantum mekaniği, kuantum fiziği gibi uygulamalı bilimleri temsilen ortaya çıkan problemlerin modellenmesinde karşımıza çıkmaktadır.

Modellenen denklemlerin çözümlerin de kullanılmak üzere, klasik analizden bilinen fonksiyonların karşılığı olarak q -analogların tanımlanması ve çözümlerin, özüm ailelerinin bulunmasında kullanılması ile analitik anlamda özümü zor ve uzun uğraşlar gerektiren problemleri nihayetlendirmek amaçlanmıştır.

q -türev, q -integral kavramları tanımlanma aralıkları ile klasik analizde yer yer benzerlik gösterse de, ayrıldığı tamamen farklılaştığı durumlar da mevcuttur. q -analogları ve q -fark denklemleri kolaylıkla algoritmaya dönüştürülebildiği için bilgisayar programları ile özüm yapmak için oldukça uygundur. Bu nedenle son yıllarda bilim insanları tarafından sık sık kullanılmaya başlamıştır. Halen üzerinde çalışmalar devam etmekte ve güncelliğini korumaktadır. Son yıllar da q -kesirli fark denklemleri, bu denklemlerin varlığı ve tekliği, caputo q -kesir türevin tanımı, Hardy tipi eşitsizlikler güncel çalışmalardan sadece bazılarıdır.

Bu tez altı bölümden oluşmuştur. Quantum analiz kavramının oluşum süreci ve literatür araştırmalarında ortaya çıkışından günümüze gelişmeleri ele alınarak ,kullanım amaçları ve yerleri açıklanmıştır. İkinci başlıkta konu bütünlüğü oluşturması için fark operatörü özellikleri ve fark denklemleri açıklanmıştır.

Üüncü bölüm de q -analizin temel kavramları, q -analog fonksiyoları ve özelliklerine değinilmiştir. Dördüncü bölümde q -difeansiyel ve q -türev kavramları açıklanmış ve örnekler verilmiştir. Son bölüm de q -fark denklemlerinin elde edilmesi lineer olma durumuna göre özüm ailesi araştırılması ,özümlere yardımcı olacak teoremlere yer verilmiş konu örnekler ile desteklenmiştir yapılan işlemlerde kullanımı olduğu için q -antitürev ve q -integral arasındaki ilişki açıklanmış ve çalışma sonlanmıştır.

2. ÖNBİLGİLER

2.1. Fark Operatörü

Bir $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ fark operatörü

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Örnek olarak $f(n) = n$, $f(n) = n^2$, $f(n) = \sin(n)$ olmak üzere

$$\Delta n = n + 1 - n = 1$$

$$\Delta n^2 = (n+1)^2 - n^2$$

$$= (n+1-n)(n+1+n)$$

$$= 2n + 1$$

$$\Delta \sin(n) = \sin(n+1) - \sin(n)$$

$$= 2 \sin\left(\frac{n+1-n}{2}\right) \cos\left(\frac{n+1+n}{2}\right)$$

$$= 2 \sin\left(\frac{1}{2}\right) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

f 'nin ikinci basamaktan farkı ;

$$\Delta^2 f(n) = \Delta(\Delta f(n)) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$$

f fonksiyonunun k . basamaktan farkı

$$\Delta^k f(n) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f(n+k-j) \quad (2.2)$$

şeklinde hesaplanır (Bereketoğlu ve Kutay , 2012).

Burada $f(n)$ fonksiyonunun n . mertebeden farkının hesaplanmasında binom açılımından yararlanılmıştır.

Tanım 2.1.1. Herhangi bir f fonksiyonuna uygulandığında, f 'ye özdeş olan bir fonksiyon üreten operatöre *birim operatör* denir ve f 'nin tanım kümesindeki herhangi bir n için aşağıdaki gibi yazılır.

$$\Delta^0 f(n) = If(n) = f(n)$$

Yani

$$\Delta^0 = I$$

şeklinde gösterilir.

$m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$I^m f(n) = I f(n) = f(n)$$

olarak genelleştirilebilir.

Teorem 2.1.2.

1) c , sabit bir sayı olmak üzere

$$\Delta c = c - c = 0$$

2) Dağılıma özelliği

Burada $f_n := f(n)$ olmak üzere

$$\Delta[f_n + g_n] = \Delta(f_n) + \Delta(g_n)$$

3) İki fonksiyonun çarpımının farkı

$$\Delta[f_n g_n] = f_{n+1} g_{n+1} - f_n g_n = f_{n+1} \Delta g_n + g_n \Delta f_n$$

4) İki fonksiyonun bölümünün farkı

$$\Delta\left(\frac{f_n}{g_n}\right) = \frac{f_{n+1}}{g_{n+1}} - \frac{f_n}{g_n} = \frac{g_n \Delta f_n + f_n \Delta g_n}{g_n g_{n+1}}$$

5) a . ve b . dereceden farkların çarpımı

$$\Delta^a(\Delta^b f_n) = \Delta^{a+b} f_n$$

Tanım 2.1.3 (Faktöriyel Polinom)

$n = 1, 2, \dots$ olmak üzere n . dereceden bir faktöriyel kuvveti

$$[x]^n = x(x-1)(x-2) \dots [x-(n-1)]$$

ile tanımlıdır.

Aşağıda faktöriyel polinomun bazı özellikleri verilmiştir.

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$i) k \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } [x]^k = x(x-1)(x-2) \dots (x-k+1)$$

ii) $k = 0$ için $[x]^0 = 1$

iii) $k \in \mathbb{Z}^-$ için $[x]^k = \frac{1}{(x+1)(x+2) \dots (x-k)}$

(Bereketoğlu ve Kutay, 2012)

$$[x]^1 = x$$

$$[x]^2 = x(x-1) = x^2 - x$$

$$[x]^3 = x(x-1)(x-2)$$

örnek olarak verilebilir. Bu örneği kullanarak faktöriyel fonksiyonun farkını hesaplırsak ,

$$\Delta[x]^2 = \Delta(x^2 - x)$$

$$= \Delta x^2 - \Delta x$$

$$= 2x + 1 - 1$$

$$= 2x$$

$$= 2[x]$$

$$\Delta[x]^3 = \Delta(x \cdot (x-1)(x-2))$$

$$= \Delta x^3 - 3\Delta x^2 + 2\Delta x$$

$$= (x+2)^3 - x^3 - (2x+1) + 2$$

$$= 3(x^2 - x)$$

$$= 3[x]^2$$

olacaktır.

Aynı şekilde n . mertebeden faktöriyel fonksiyonun farkını

$$\Delta[x]^n = n[x]^{n-1}$$

şeklinde genelleştirebiliriz. Diğer taraftan

$$\Delta^n [x]^k = k \cdot (k-1) \dots (k-n+1) [x]^{n-k}$$

$$\Delta^n [x]^n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

dir.

2.2. Δ^{-1} Operatörü

Tanım: $n \geq n_0$ için $\Delta F_n = f_n$ ve c keyfi sabit olmak üzere

$$\Delta^{-1}f_n = F_n + c$$

şeklinde tanımlanan Δ^{-1} operatörüne ters fark operatörü denir. Burada ki F_n fonksiyonuna da f_n nin birinci mertebeden ters farkı denir (Bereketoğlu, 2012).

Lemma 2.2.1.

$$i) \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta f_i = f_n - f_{n_0}$$

$$ii) \Delta \sum_{i=n_0}^{n-1} f_i = f_n$$

Bu lemma dan yararlanarak f_n nin ters farkı aynı zamanda

$n \geq n_0$ için

$$\Delta^{-1}f_n = \sum_{i=n_0}^{n-1} f_i + c$$

elde edilir. Burada c keyfi sabittir. Buna ek olarak Δ^{-1} in lineerliği ispatlanabilir (Kutay, 2016).

Uyarı: $\Delta\Delta^{-1} = I$ olmasına rağmen $\Delta^{-1}\Delta \neq I$ dır.

Gerçekten ,

$$\Delta\Delta^{-1}f_n = f_n \text{ ve } \Delta^{-1}\Delta f_n = f_n + c \text{ dir.}$$

burada c keyfi sabittir.

Tanım 2.2.2. Δ^{-1} Operatörünün Özellikleri

$$1) \Delta^{-1}f_n = \sum_{i=n_0}^{n-1} f_i + c$$

$$2) \Delta^{-2}f_n = \sum_{m=n_0}^{n-1} \sum_{i=n_0}^{m-1} f_i + c_1 n + c_2$$

$$3) \Delta^{-1}(f_n g_n) = f_{n-1} \Delta^{-1}g_n - \Delta^{-1}(\Delta f_{n-1} \Delta g_n)$$

$$4) \Delta^{-1}[af_n + bg_n] = a\Delta^{-1}f_n + b\Delta^{-1}g_n$$

$$5) \Delta^{-m}0 = c_1n^{m-1} + c_2n^{m-2} + \dots + c_m$$

$$6) \Delta^{-m}1 = \frac{n^m}{m!} + c_1n^{m-1} + c_2n^{m-2} + \dots + c_m$$

$$7) \Delta^{-1}[x]^n = \frac{[x]^{n+1}}{n+1} + c$$

Örnek 2.2.3.

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 3 \quad (2.3)$$

için $\Delta^{-1}f(x)$ hesaplayalım.

Burada $f(x)$ polinomunun faktöriyel gösterimi,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 2x - x - 3 \\ &= 2x(x-1) - x - 3 \\ &= 2[x]^2 - [x] + 3 \end{aligned}$$

olur.

Buradan

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}f(x) &= \Delta^{-1}(2[x]^2 - [x] + 3) \\ &= \frac{2[x]^3}{3} - \frac{[x]^2}{2} + 3x + c \\ &= \frac{2}{3}(x(x-1)(x-2)) - \frac{1}{2}(x(x-1)) + 3x + c \\ &= \frac{2}{3}(x^3 - 3x^2 + 2x) - \frac{1}{2}(x^2 - x) + 3x + c \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{29x}{6} + c \end{aligned}$$

2.3. Fark Denklemleri

Bir S kümesi üzerinde tanımlı y fonksiyonunun değeri ve bu y fonksiyonunun her x değeri için bir veya daha yüksek mertebeden farkları $\Delta y, \Delta^2 y, \dots$ olan terimleri içeren bir bağıntıya, S kümesi üzerinde fark denklemi denir.

Fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin mertebesi denir.

Tanım 2.3.1. x sürekli bir değişken olmak üzere genel olarak fark denklemi

$$G(x, f(x), f(x+h), \dots, f(x+mh)) = 0$$

olarak tanımlanmakla birlikte $h = 1$ için

$$G(x, f(x), f(x+1), \dots, f(x+m)) = 0 \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır ve buna fonksiyonel fark denklemi denir.

$h = 1$ ve $n \in N$ olmak üzere x_n ayrık noktaları üzerinde tanımlı fark denklemi ise

$$F(n, f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+m}) = 0$$

olarak tanımlanır ve bu denkleme skaler fark denklemi denir (Elaydi, 2000).

Tanım 2.3.2. (Lineer fark denklemi)

k . mertebeden lineer fark denklemi ;

$a_0(n), a_1(n), \dots, a_k(n)$ katsayı fonksiyonları ile $g(n)$ fonksiyonu $n_0 \leq n$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar

$$a_k(n) \neq 0 \text{ ve } a_0(n) \neq 0$$

olmak üzere :

$$a_0(n)y(n+k) + a_1(n)y(n+k-1) + \dots + a_k(n)y(n) = g(n) \quad (2.5)$$

veya

$$a_0(n)y_{n+k} + a_1(n)y_{n+k-1} + \dots + a_k(n)y_n = g(n) \quad (2.6)$$

biçiminde gösterilir (Elaydi , 2000).

Fark denklemleri klasik lineer diferansiyel denklemlerden de bilindiği gibi

$g(n) = 0$ olarak verildiğin de homojen , $g(n) \neq 0$ olarak verildiğin de ise homojen olmayan fark denklemi olarak sınıflandırılır.

i) $a_0(n), a_1(n), \dots, a_k(n)$ katsayı fonksiyonları sabit fonksiyonlar ise denklem sabit katsayılı lineer fark denklemi

ii) $a_0(n), a_1(n), \dots, a_k(n)$ katsayı fonksiyonlarında en az birisi değişken içeren bir fonksiyon ise denklem değişken katsayılı lineer fark denklemi olarak adlandırılır.

2.3.3. Lineer Olmayan Fark Denklemleri

Lineer fark denklemleri ile ifade edilen problemlerin çözülmesi lineer olmayan fark denklemlerinin çözülmesine göre nispeten daha kolaydır ve çoğunlukla analitik bir genel çözüme sahiptirler. Bu denklemlerin sürekli olduğu öngörülen çözüm bölgesinde tek bir çözümü vardır. Bu durum lineer olmayan fark denklemlerinde

biraz daha zor olmaktadır. Nedeni ise verilen çözüm bölgesinde bir çözümün varlığının bile kesin olmaması durumundan kaynaklanmaktadır.

Bu tür denklemleri çözebilmek için genel bir çözüm metodu olmayıp bunun yerine analitik çözümleri var olan belirli diferansiyel denklemlerden yararlanarak bu denklemlere değişken değişimi yaparak lineer olmayan fark denklemi lineer hale getirilip lineer fark denklemleri için çözüm araştırma yöntemleri kullanılabilir.

Çözümü olduğu bilinen lineer olmayan fark denklemlerine, lineer olmayan periyodik denklemleri ve ricatti fark denklemleri örnek verilebilir.

Lineer olmayan fark denklemleri, çözümleri ve çözümlerinin kararlılık analizi kendi içerisinde dallanan geniş bir konu olduğundan tezimizde yer verilmemiştir.



3. q- ANALİZDE TEMEL KAVRAMLAR

q -analize dair önemli bilgiler literatüre 1908 yılında Frank Hilton Jackson tarafından q - fonksiyonlarının tanımlanması ile kazandırılmıştır. Bu alanda sistematik incelemeleri yapan ilk kişi de Jackson olmuştur. Bu bölümde q -analizin bazı kavramlarına değinilmiştir .

3.1. q-Analog Fonksiyonları

Tanım 3.1.1. $q > 0$, $q \neq 1$ ve $a \in \mathbb{R}$ için $[a]_q$ ile gösterilen q -reel sayılar

$$[a]_q = \frac{1 - q^a}{1 - q}$$

şeklinde tanımlanır (Aral , 2013).

Tanım 3.1.2. $a \in \mathbb{N}$ için $[a]_q!$ ile gösterilen q -faktöriyel

$$[a]_q! = \begin{cases} [a]_q! = [a]_q [a-1]_q [a-2]_q \dots [1]_q & , \quad a = 1, 2, 3 \dots \\ 1 & , \quad a = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Aral , 2013).

Tanım 3.1.3. $a, b \in \mathbb{N}$ için $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_q$ ile gösterilen q -binom katsayıları

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_q = \frac{[a]_q!}{[b]_q! [a-b]_q!} , \quad 0 \leq a \leq b \quad (3.1)$$

ile tanımlıdır.

Tanım 3.1.4. Polinomların q -analogları aşağıdaki gibi ifade edilir ;

$$(1+x)_q^n = \begin{cases} (1+x)(1+qx) \dots (1+q^{n-1}x) & , \quad n = 1, 2, 3 \dots \\ 1 & , \quad n = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$(x-a)_q^n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ (x-a)(x-qa) \dots (x-q^{n-1}a) & , \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$

$$(1-q)_q^n = (1-q)(1-q^2)(1-q^3) \dots (1-q^n)$$

dir.

Ve

$$(x - a)_q^{n+m} = (x - a)_q^m (x - q^m a)_q^n, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

olarak tanımlanır (Ernst, 2012).

Tanım 3.1.5. Gauss binom formülü ;

$$(x + a)_q^n = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{\frac{j(j-1)}{2}} a^j x^{n-j} \quad (3.3)$$

ile tanımlıdır.

Tanım 3.1.6. $(a - b)^k$ kuvvetinin q -analoğu

$$k = 0 \text{ için } (a - b)_q^0 = 1$$

$$(a - b)_q^k = \prod_{i=0}^{k-1} (a - q^i b), \quad \forall a, b \in R \quad (3.4)$$

ve

$$(1 - b)_q^a = \frac{(1 - b)_q^\infty}{(1 - q^a b)_q^\infty}, \quad \forall a, b \in R \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca

$$(1 - b)_q^a = \frac{1}{(1 - q^a b)_q^{-a}}, \quad \forall a, b \in R \quad (3.6)$$

şeklinde de ifade edilir (Ernst, 2012).

4. q -DİFERANSİYEL VE q - TÜREV

4.1. q -Diferansiyel

f sürekli reel bir fonksiyonun q -diferansiyeli

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x) \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır.

$f(x)$ ve $g(x)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere ;

$$d_q(f(x)g(x)) = f(qx)g(qx) - f(x)g(x)$$

$$= f(qx)g(qx) - f(qx)g(x) + f(qx)g(x) - f(x)g(x)$$

$$= f(qx)(g(qx) - g(x)) + g(x)(f(qx) - f(x)).$$

Böylece

$$d_q(f(x)g(x)) = f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x) \quad (4.2)$$

olur (Oney, 2007).

İki fonksiyonun çarpımının diferansiyeli adi diferansiyelden farklı olarak elde edilir. Bu bağlamda çarpımın q -diferansiyelinde simetri olmadığı görülmüş olur. Çarpımın q -diferansiyelinde olduğu gibi (4.2) den yararlanarak iki fonksiyonun bölümünün diferansiyelini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$d_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x)d_q f(x) - f(x)d_q g(x)}{g(qx)g(x)} \quad (4.3)$$

4.2. h -Diferansiyel

$f(x)$ sürekli reel bir fonksiyonun h -diferansiyeli

$$d_h f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanır.

$f(x)$ ve $g(x)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere (4.4) ifadesi kullanarak iki fonksiyonun çarpımının h -diferansiyeli;

$$\begin{aligned}
d_h(f(x)g(x)) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\
&= f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)
\end{aligned}$$

olur (Ernst, 2012).

Böylece

$$d_h(f(x)g(x)) = f(x+h)d_hg(x) + g(x)d_hf(x) \quad (4.5)$$

olur (Cieřliński, 2010).

4.3. q -Türev

f sürekli reel bir fonksiyon olsun. f fonksiyonun q -türevi

$$D_qf(x) \equiv \begin{cases} \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, & q \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, x \neq 0 \\ \frac{df}{dx}(x), & q = 1 \\ \frac{df}{dx}(0), & x = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlıdır (Ernst, 2012).

f fonksiyonu x değişkenine göre diferansiyellenebilir olsun.

Buna göre

$$\begin{aligned}
\lim_{q \rightarrow 1} (D_qf)(x) &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x} \\
&= \frac{df}{dx}
\end{aligned} \quad (4.7)$$

olur.

Böylece klasik türevle q -türev çakışmış olur ancak bunun tersi doğru değildir yani $f(x)$ fonksiyonun q -türevi varsa klasik türevinin olması gerekmez.

Örneğin, $q \in (0,1)$ için

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Fonksiyonun sadece $x = 0$ da klasik türevi varken, q -türev tüm reel ekseninde vardır bu da q -türevin klasik türevden daha genel olduğunu gösterir. q -türev aynı zamanda Jackson türevi olarak da bilinir.

Eğer $f'(0)$ varsa

$$D_q f(0) = f'(0)$$

dır.

4.4. q -Türevin Özellikleri

Önerme:

$$1) D_q(af(x) + bg(x)) = aD_q f(x) + bD_q g(x) \quad a, b \text{ keyfi sabit}$$

$$2) D_q(cf(x)) = cD_q f(x) \quad c \text{ keyfi sabit}$$

$$\begin{aligned} 3) D_q(f(x)g(x)) &= \frac{d_q(f(x)g(x))}{(q-1)x} \\ &= \frac{f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x)}{(q-1)x} \\ &= f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x) \end{aligned}$$

$$4) D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)} \quad , \quad g(x)g(qx) \neq 0$$

$$5) D_q x^n = [n]_q x^{n-1} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$$6) D_q(x-a)_q^n = [n]_q(x-a)_q^{n-1}$$

4.5. Örnekler

$$(a) D_q x = \frac{qx - x}{(q-1)x} = \frac{(q-1)x}{(q-1)x} = 1$$

$$\begin{aligned} (b) D_q x^2 &= \frac{(qx)^2 - x^2}{(q-1)x} = \frac{q^2 x^2 - x^2}{(q-1)x} = \frac{(q^2 - 1)x^2}{(q-1)x} = \frac{(q-1)(q+1)x^2}{(q-1)x} \\ &= (q+1)x \end{aligned}$$

$$(c) D_q \ln x = \frac{\ln(qx) - \ln x}{(q-1)x} = \frac{\ln q + \ln x - \ln x}{(q-1)x} = \frac{\ln q}{(q-1)x}$$

$$(d) D_q \cos x = \frac{\cos(qx) - \cos x}{(q-1)x} = \frac{-2 \sin \frac{(qx+x)}{2} \cdot \sin \frac{(qx-x)}{2}}{(q-1)x}$$

4.6. Üstel Fonksiyon ve $\ln$ Fonksiyonlarının Analogları

Tanım 4.6.1. Klasik analizde e^x in seri açılımı

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

dir.

e^x üstel fonksiyonun q - analoğu yani e^x fonksiyonun q -analizdeki karşılığı

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]_q!} \quad (4.8)$$

ile tanımlanır (Cieřliński, 2010).

Burada q pozitif bir sayı ve z de kompleks bir sayı olmak üzere ;

$$e_q^z = \prod_{j=0}^{\infty} \left((1 - (1-q)q^j z) \right)^{-1}$$

ile tanımlıdır.

Bu analoğun q -türevi

$$D_q e_q^x = e_q^x$$

$$D_q e_q^{az} = a e_q^{az}$$

olup klasik türev ile aynı şekildedir.

Üstel fonksiyon için (4.8) denklemi kullanılarak trigonometrik fonksiyonların da q -analog eşitleri gösterilebilir.

Örneğin ,

$$\sin_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i} \quad \text{ve} \quad \cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2i}$$

olarak tanımlanır. Klasik trigonometrik fonksiyonlardan farklı olarak

$$\sin_q^2 x + \cos_q^2 x \neq 1$$

dır (Kac ve Pokman, 2002).

Tanım 4.6.2. $\ln$ fonksiyonun q - analizdeki karşılığı

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanır (Yamano, 2002).

Teorem 4.6.3. x ve y 'nin çarpımının $\ln_q$ fonksiyonu

$$\ln_q(x.y) = \ln_q x + \ln_q y + (1 - q)(\ln_q x)(\ln_q y) \quad (4.10)$$

eşitliğini sağlar.

İspat:

Eşitliğin sağ tarafının doğru olduğunu kabul edip sol tarafının doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} & \ln_q x + \ln_q y + (1 - q)(\ln_q x)(\ln_q y) \\ &= \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} + \frac{y^{1-q} - 1}{1 - q} + (1 - q) \left(\frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \right) \left(\frac{y^{1-q} - 1}{1 - q} \right) \\ &= ((x^{1-q} - 1) + (y^{1-q} - 1) + (x^{1-q} - 1)(y^{1-q} - 1)) \frac{1}{1 - q} \\ &= ((x^{1-q} - 1)(1 + y^{1-q} - 1) + y^{1-q} - 1) \frac{1}{1 - q} \\ &= ((x^{1-q} - 1)y^{1-q} + y^{1-q} - 1) \frac{1}{1 - q} \\ &= (x^{1-q} y^{1-q} - y^{1-q} + y^{1-q} - 1) \frac{1}{1 - q} \\ &= \frac{x^{1-q} y^{1-q} - 1}{1 - q} \\ &= \ln_q(x.y) \end{aligned}$$

5. q -FARK DENKLEMİNİN ELDE EDİLMESİ

Quantum diferansiyel denklemler kapsamında lineer olmayan tipteki denklemlerin genel çözümlerine ulaşmanın mümkün olmadığı ya da uzun uğraşlar gerektirdiği bilinmektedir ancak lineer olmayan diferansiyel denklemler mühendislik ve fen bilimlerinin birçok alanında kullanılmaktadır. Bundan dolayı lineer olmayan q -fark denklemlerinin çözüm ailelerinin bulunması, çözüm ailesinden q -fark denkleminin elde edilmesi teorem ve örnekler ile açıklanmıştır.

5.1. q -Fark Denklemi

n tane keyfi sabite bağlı;

$$f(x, y(x), c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad (5.1)$$

fonksiyonu verilsin. Bunu çözüm ailesi kabul eden q -fark denklemi (5.1) ve (5.1)'in n defa q -farkının alınması ile elde edilen ifadeler arasında $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitlerinin yok edilmesi ile elde edilir.

Eğer son ifade de keyfi sabitler yok ise aranan q -fark denklemi en son ifadedir.

Örnek 5.1.1.

$$y = c_1x + c_2 \quad (5.2)$$

fonksiyon ailesi verilsin.

Keyfi sabit sayısı iki olduğundan iki kez q - farkı alınır

$$D_q y(x) = D_q(c_1x + c_2)$$

$$= c_1 D_q x + D_q c_2$$

$$= c_1$$

$$D_q(D_q y(x)) = D_q c_1 = 0$$

olacaktır.

En son ifadede keyfi sabit olmadığından

$$y(x) = c_1x + c_2$$

fonksiyon ailesini çözüm kabul eden q - fark denklemi

$$D_q^2 y(x) = 0$$

olur.

Örnek 5.1.2.

$$x^2 + y^2 = c \quad (5.3)$$

çözüm ailesi verilsin.

Keyfi sabit sayısı bir olduğundan bir kez q -farkı alındığında keyfi sabit yok olacağından (5.3) ifadesini çözüm ailesi kabul eden q -fark denklemi

$$D_q x^2 + D_q y^2 = 0 \quad (5.4)$$

olur.

Burada

$$\begin{aligned} D_q y^2 &= \frac{y(qx)^2 - y(x)^2}{(q-1)x} \\ &= \frac{1}{(q-1)x} (y(qx) - y(x))(y(qx) + y(x)) \\ &= (y(qx) + y(x))D_q y(x) \end{aligned}$$

olur.

Diğer taraftan

$$y(qx) = (q-1)x D_q y + y(x)$$

olduğu kullanılırsa

$$D_q y^2 = ((q-1)x D_q y + y(x))D_q y$$

veya

$$D_q y^2 = (q-1)x (D_q y)^2 + y D_q y$$

olur.

$$D_q x^2 = (q+1)x$$

olduğu göz önüne alınırsa (5.4) denklemi ile gösterilen q -fark denklemi;

$$(q-1)x (D_q y)^2 + y D_q y + (q+1)x = 0 \quad (5.5)$$

şeklinde de yazılır.

Örnek 5.1.3.

$$y = cx + c^2 \quad (5.6)$$

fonksiyon ailesi verilsin.

Tek bir keyfi sabit olduğundan bir kez q -fark almak yeterlidir.

Buna göre

$$\begin{aligned} D_q y &= D_q (cx + c^2) \\ &= cD_q x + D_q c^2 \\ &= c \end{aligned}$$

olur.

(5.6) fonksiyon ailesinde c yerine eşiti yazılırsa

$$y = xD_q y + (D_q y)^2$$

şeklinde q -fark denklemi elde edilir.

Örnek 5.1.4.

$$y = \ln x + c \quad (5.7)$$

fonksiyon ailesi verilsin.

Keyfi sabit bir tane olduğu için bir kez q -fark alınırsa

$$\begin{aligned} D_q y &= D_q (\ln x + c) \\ &= D_q (\ln x) + D_q (c) \end{aligned}$$

olur.

Burada

$$D_q (\ln x) = \frac{\ln q}{(q-1)x} \quad \text{ve} \quad D_q (c) = 0$$

olduğundan

$$D_q y = \frac{\ln q}{(q-1)x}$$

veya

$$(q-1)x D_q y = \ln q$$

şeklinde (5.7) çözüm ailesini sağlayan q -fark denklemi bulunur.

Örnek 5.1.5.

$$y = c_1 \ln x + c_2 \quad (5.8)$$

fonksiyon ailesi verilsin.

Keyfi sabit iki tane olduğu için iki kez q -farkı alınmalıdır.

Bir kez q -farkı alınırsa

$$\begin{aligned} D_q y &= D_q (c_1 \ln x + c_2) \\ &= c_1 D_q \ln x + D_q c_2 \\ &= c_1 \frac{\ln q}{(q-1)x} \end{aligned}$$

olur.

Buradan

$$x D_q y = c_1 \frac{\ln q}{(q-1)}$$

yazılır.

Bir kez daha q -farkı alınırsa

$$\begin{aligned} D_q (x D_q y) &= D_q \left(c_1 \frac{\ln q}{(q-1)} \right) \\ x q D_q^2 y + D_q y D_q x &= 0 \\ x q D_q^2 y + D_q y &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

5.2. D_q^{-1} Operatörü ve Toplam Analizi

$$D_q (D_q^{-1} f(x)) = f(x) \quad (5.9)$$

olacak şekilde $D_q^{-1} f$ ifadesini tanımlayalım.

Burada

$$g(x) = D_q^{-1} f(x) \quad (5.10)$$

olduğunu kabul edelim.

Buna göre

$$\begin{aligned} D_q g(x) &= \frac{g(qx) - g(x)}{(q-1)x} \\ &= D_q (D_q^{-1} f(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olur.

Bu durumda

$$\frac{g(qx) - g(x)}{(q - 1)x} = f(x)$$

elde edilir.

Buna göre

$$\begin{aligned} g(qx) - g(x) &= (q - 1)xf(x) \\ g(q^2x) - g(qx) &= (q - 1)qx f(qx) \\ g(q^3x) - g(q^2x) &= (q - 1)q^2x f(q^2x) \\ &\vdots \\ g(q^nx) - g(q^{n-1}x) &= (q - 1)q^{n-1}x f(q^{n-1}x) \end{aligned} \quad (5.11)$$

olur.

Bu ifadeler taraf tarafa toplandığında

$$g(q^nx) - g(x) = (q - 1)x \sum_{r=0}^{n-1} q^r f(q^r x) \quad (5.13)$$

bulunur.

Burada her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınır ve $0 \leq q < 1$ olduğu göz önünde tutulursa

$$g(x) = (1 - q)x \sum_{r=0}^{\infty} q^r f(q^r x) + g(0)$$

elde edilir.

Burada $g(x)$ ' in $x = 0$ da tanımlı olduğu kabul edilmiştir. $g(0)$ sabit bir reel sayı olduğundan $g(0) = c$ alınabilir. Böylece

$$D_q^{-1}f(x) = (1 - q)x \sum_{r=0}^{\infty} q^r f(q^r x) + c \quad (5.14)$$

şeklinde yazılır.

5.3. Bazı q -Fark Denklemlerinin Çözüm Aileleri

Teorem 5.3.1.

$$P(x) = -D_q(Q(x))$$

olmak üzere

$$D_q y + \frac{P(x)}{Q(x)} y = 0 \quad (5.15)$$

denkleminin bir çözüm ailesi

$$y(x) = cQ(x)$$

veya

$$y(x) = cD_q^{-1}(-P(x))$$

tir.

Burada D_q^{-1} , D_q nun ters operatörüdür.

Örnek 5.3.2.

$$D_q y - \frac{1}{x} y = 0 \quad (5.16)$$

denkleminin çözüm ailesini bulalım.

Denklem de

$$P(x) = -1, \quad Q(x) = x$$

alınırsa

$$-D_q x = -1$$

olduğundan

$$P(x) = -D_q Q(x)$$

eşitliği sağlanır.

Buna göre çözüm ailesi

$$y = cQ(x)$$

den

$$y = cx$$

olur.

Bulunan çözüm ailesi q -diferansiyel denklemde yerine yazılırsa denklemi sağladığı görülür.

Gerçekten

$$\begin{aligned} D_q y - \frac{1}{x} y &= D_q(cx) - \frac{1}{x} cx \\ &= c D_q x - c \\ &= c - c \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

Örnek 5.3.3.

$$D_q y - \frac{\ln q}{(q-1)x \ln x} y = 0 \quad (5.17)$$

denkleminin çözüm ailesini bulalım.

Denklemde

$$Q(x) = \ln x, \quad P(x) = \frac{-\ln q}{(q-1)x}$$

alınırsa

$$-D_q \ln x = -\frac{\ln q}{(q-1)x}$$

olduğundan

$$P(x) = -D_q Q(x)$$

eşitliği sağlanır.

O halde çözüm ailesi

$$y(x) = c \ln x$$

şeklinde bulunur.

Örnek 5.3.4.

$$D_q y - \frac{(q+1)}{x} y = 0 \quad (5.18)$$

denkleminin çözüm ailesini bulalım.

Denklem

$$D_q y - \frac{(q+1)x}{x^2} y = 0$$

şeklinde yazılır.

$$Q(x) = x^2, \quad P(x) = -(q+1)x$$

alınırsa

$$-D_q Q(x) = P(x)$$

eşitliği sağlanır.

Buna göre çözüm ailesi,

$$y(x) = cQ(x)$$

den

$$y(x) = cx^2$$

olur.

Teorem 5.3.5.

$$P(x) = -D_q(Q(x))$$

olmak üzere

$$D_q y + \frac{P(x)}{Q(x)} y = (1-q)x(P(x)) + Q(x) \quad (5.19)$$

denkleminin bir çözüm ailesi

$$y(x) = (x+c)Q(x)$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} D_q y &= D_q((x+c)Q(x)) \\ &= (qx+c)D_q Q(x) + Q(x)D_q(x+c) \\ &= qx D_q Q(x) + c D_q Q(x) + Q(x) \\ &= -qxP(x) - cP(x) + Q(x) \\ &= -qxP(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} cQ(x) + Q(x) \\ &= -qxP(x) - xP(x) + xP(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} cQ(x) + Q(x) \\ &= (-qx+x)P(x) - x \frac{P(x)}{Q(x)} Q(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} cQ(x) + Q(x) \end{aligned}$$

$$= (1 - q)xP(x) - \frac{P(x)}{Q(x)}(x + c)Q(x) + Q(x)$$

olur.

Bu ifade düzenlenirse

$$D_q y + \frac{P(x)}{Q(x)} y = (1 - q)xP(x) + Q(x)$$

denklemini elde edilir.

Örnek 5.3.6.

$$D_q y - \frac{1}{x} y = qx \quad (5.20)$$

denkleminin çözüm ailesini bulalım.

Denklem

$$D_q y - \frac{1}{x} y = (q - 1)x + x$$

şeklinde yazılır.

$$Q(x) = x \quad P(x) = -1$$

alınırsa

$$-D_q Q(x) = P(x)$$

sağlanır.

Diğer taraftan denklemin sağ tarafı

$$(q - 1)x + x = (1 - q)x(P(x)) + Q(x)$$

şeklinde olduğundan çözüm ailesi

$$y(x) = (x + c)x$$

veya

$$y(x) = x^2 + cx$$

olur.

Teorem 5.3.7.

$$p(x) = -D_q Q(x) \text{ ve } D_q u = B(x)$$

denkleminin bir özel çözümü $v(x)$ olmak üzere;

$$D_q y + \frac{P(x)}{Q(x)} y = ((1-q)x(P(x)) + Q(x)) B(x) \quad (5.21)$$

denkleminin bir çözüm ailesi

$$y(x) = (v(x) + c)Q(x)$$

dir.

Eğer $B(x) = 1$ alınırsa (5.19) denklemi elde edilir.

İspat:

$$\begin{aligned} D_q y &= D_q((v(x) + c)Q(x)) \\ &= Q(qx)D_q(v(x) + c) + (v(x) + c)D_q Q(x) \\ &= ((q-1)x D_q Q(x) + Q(x)) D_q v(x) + \frac{D_q Q(x)}{Q(x)} (v(x) + c)Q(x) \\ &= ((q-1)x(P(x)) + Q(x)) B(x) + \frac{-P(x)}{Q(x)} y(x) \end{aligned}$$

olur.

Bu denklem düzenlenirse

$$D_q y + \frac{P(x)}{Q(x)} y = ((1-q)xP(x) + Q(x)) B(x) \quad (5.22)$$

elde edilir

Örnek 5.3.8.

$$D_q y - \frac{1}{x} y = q(q+1)x^2 \quad (5.23)$$

denkleminin çözüm ailesini bulalım.

Denklemi

$$D_q y - \frac{1}{x} y = ((q-1)x + x)(q+1)x$$

şeklinde yazalım.

Burada

$$Q(x) = x, \quad P(x) = -1, \quad B(x) = (q+1)x$$

olur.

Böylece

$$-D_q(Q(x)) = P(x)$$

eşitliği sağlanır.

Diğer taraftan

$$B(x) = D_q v(x)$$

den

$$D_q v(x) = (q+1)x, \quad v(x) = x^2$$

olur.

O halde çözüm ailesi

$$y(x) = (v(x) + c)Q(x)$$

ifadesinden

$$y(x) = (x^2 + c)x$$

bulunur.

Teorem 5.3.9.

$$D_q u(x) = P(x)$$

denkleminin bir özel çözümü $v(x)$

ve

$$g(x) = D_q f(x)$$

olmak üzere

$$((q-1)xP(x)y + f(x))D_q y - g(x)y + P(x)y^2 = 0 \quad (5.24)$$

denkleminin çözüm ailesi

$$y(x) = \frac{f(x)}{v(x) + c}$$

dir.

Eğer,

$$P(x) = 1$$

ise

$$((q-1)xy + f(x))D_q y - g(x)y + y^2 = 0 \quad (5.25)$$

denkleminin çözüm ailesi

$$y(x) = \frac{f(x)}{x + c}$$

olur.

İspat:

$$((q-1)xP(x)y + f(x))D_q y - g(x)y + P(x)y^2 = 0$$

denklemini düzenlenirse

$$(q-1)xP(x)yD_q y + f(x)D_q y - g(x)y + P(x)y^2 = 0$$

$$((q-1)xD_q y + y)yP(x) + f(x)D_q y - g(x)y = 0$$

$$g(x)y - f(x)D_q y = ((q-1)xD_q y + y)yP(x)$$

$$\frac{g(x)y - f(x)D_q y}{((q-1)xD_q y + y)y} = P(x)$$

olur.

Denkleimde

$$g(x) = D_q f(x)$$

$$D_q v(x) = P(x)$$

$$((q-1)xD_q y + y) = y(qx)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$D_q \left(\frac{f(x)}{y} \right) = D_q v(x)$$

olur.

Her iki tarafı ters operatör ile işleme tabi tutarsak

$$y(x) = \frac{f(x)}{v(x) + c}$$

bulunur.

Örnek 5.3.10.

$$((q^2 - 1)x^2 y + x)D_q y - y + (q+1)xy^2 = 0 \quad (5.26)$$

denkleminin çözüm ailesini bulalım.

Denklem

$$((q-1)x(q+1)xy+x)D_q y - y + (q+1)xy^2 = 0$$

şeklinde yazıldığında

$$f(x) = x \text{ ve } g(x) = 1$$

olduğundan

$$D_q f(x) = g(x)$$

sağlanır.

Diğer taraftan denklemde

$$p(x) = (q+1)x$$

ve

$$D_q v(x) = (q+1)x$$

olacağından

$$v(x) = x^2$$

olur.

Buradan denklemin çözüm ailesi

$$y(x) = \frac{x}{x^2 + c}$$

bulunur.

Örnek 5.3.11.

$$(2(1-q)xy + x^2 - 1)D_q y - (q+1)xy - 2y^2 = 0 \quad (5.27)$$

denkleminin çözüm ailesini bulalım.

Verilen denklemde

$$f(x) = x^2 - 1 \quad g(x) = (q+1)x$$

olduğundan

$$D_q f(x) = g(x)$$

sağlanır.

Diğer taraftan

$$p(x) = -2$$

olduğundan ve

$$D_q v(x) = -2$$

olacağından

$$v(x) = -2x$$

olur.

O halde çözüm ailesi teorem gereğince

$$y(x) = \frac{f(x)}{v(x) + c}$$

ifadesinden

$$y(x) = \frac{1 - x^2}{2x + c}$$

olur.

Teorem 5.3.12.

$$g(x) = -D_q f(x) \text{ ve } D_q u = P(x)$$

denklemin bir özel çözümü $v(x)$ olmak üzere

$$(q - 1)x(D_q y)^2 + 2yD_q y + \frac{g(x)}{f(x)}y^2 = ((1 - q)xg(x) + f(x))P(x) \quad (5.28)$$

denkleminin çözüm ailesi

$$y^2 = (v(x) + c)f(x)$$

dir.

İspat:

Denklemden

$$w = y^2$$

dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} D_q w &= D_q y^2 \\ &= (q - 1)x(D_q y)^2 + 2yD_q y \end{aligned}$$

olduğundan denklem

$$D_q w + \frac{g(x)}{f(x)}w = ((1 - q)xg(x) + f(x))p(x) \quad (5.29)$$

şeklinde lineer denkleme dönüşür. Bu denklem teorem 5.3.7' de ifade edilen denklem olduğundan (5.29) denkleminin çözüm ailesi

$$w = (v(x) + c)f(x)$$

dir.

$$w = y^2$$

olduğundan (5.28) denkleminin çözüm ailesi

$$y^2 = (v(x) + c)f(x)$$

olur.

Örnek 5.3.13.

$$(q - 1)(D_q y)^2 + 2y D_q y - \frac{1}{x} y^2 = q(q + 1)x \quad (5.30)$$

denkleminin çözüm ailesini bulalım.

Denklem de

$$f(x) = x, g(x) = -1$$

olduğundan

$$g(x) = -D_q f(x)$$

sağlanır.

Diğer taraftan denklemin sağ tarafı uygun şekilde düzenlenirse,

$$\begin{aligned} ((q - 1)x + x)(q + 1)x &= ((1 - q)x(-1) + x)(q + 1)x \\ &= (1 - q)xg(x) + f(x))(q + 1)x \end{aligned}$$

olur.

Burada

$$p(x) = (q + 1)x$$

ve

$$D_q v(x) = p(x)$$

eşitliğinden

$$v(x) = x^2$$

olduğundan çözüm ailesi

$$y^2(x) = (v(x) + c)f(x)$$

ifadesinden

$$y^2(x) = (x^2 + c)x$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi de

$$y(qx) := y_q$$

olmak üzere y^n fonksiyonun q -türev operatörü altında ki eşitliğini yazalım.

$n = 2$ olsun. (5.31)

$$D_q y = \frac{y_q - y}{(q - 1)x}$$

Eşitliğinde y_q yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned} (q - 1)x D_q y &= y_q - y \\ y_q &= (q - 1)x D_q y + y \end{aligned} \quad (5.32)$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned} D_q y^2 &= \frac{y_q^2 - y^2}{(q - 1)x} \\ &= \frac{y_q - y}{(q - 1)x} (y_q + y) \\ &= D_q y ((q - 1)x D_q y + 2y) \end{aligned}$$

dir.

Böylece

$$D_q y^2 = D_q y ((q - 1)x D_q y + 2y) \quad (5.33)$$

şeklinde yazılır.

$n = 3$ olsun.

$$\begin{aligned} D_q y^3 &= \frac{y_q^3 - y^3}{(q - 1)x} \\ &= \frac{y_q - y}{(q - 1)x} (y_q^2 + y_q y + y^2) \end{aligned}$$

$$= D_q y \left(\left((q-1)x D_q y + y \right)^2 + \left((q-1)x D_q y + y \right) y + y^2 \right)$$

olur. Böylece

$$D_q y^3 = D_q y \left(\left((q-1)x D_q y + y \right)^2 + 3 \left((q-1)x D_q y \right) y + 3y^2 \right) \quad (5.34)$$

şeklinde yazılır.

$n = 4$ olsun.

$$\begin{aligned} D_q y^4 &= \frac{y_q^4 - y^4}{(q-1)x} \\ &= \frac{(y_q^2 - y^2)(y_q^2 + y^2)}{(q-1)x} \\ &= \frac{y_q - y}{(q-1)x} (y_q + y)(y_q^2 + y^2) \\ &= D_q y (y_q^3 + y_q^2 y + y_q y^2 + y^3) \\ &= D_q y \left(\left((q-1)x D_q y + y \right)^3 + \left((q-1)x D_q y + y \right)^2 y \right. \\ &\quad \left. + \left((q-1)x D_q y + y \right) y^2 + y^3 \right) \end{aligned}$$

Olur. Böylece

$$\begin{aligned} D_q y^4 &= D_q y \left(\left((q-1)x D_q y \right)^3 + 4 \left((q-1)x D_q y \right)^2 y + 6 \left((q-1)x D_q y \right) y^2 \right. \\ &\quad \left. + 4y^3 \right) \end{aligned} \quad (5.35)$$

şeklinde yazılır.

Buna göre aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.3.14.

$$D_q y^n = D_q y \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \left((q-1)x D_q y \right)^{n-1-i} y^i \quad (5.36)$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 5.3.15.

$$g(x) = -D_q f(x) \text{ ve } D_q u = p(x)$$

denkleminin bir özel çözümü $v(x)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& ((q-1)x)^2 (D_q y)^3 + 3 \left((q-1)x (D_q y)^2 \right) y + 3 (D_q y) y^2 + \frac{g(x)}{f(x)} y^3 \quad (5.37) \\
& = ((1-q)xg(x) + f(x))p(x)
\end{aligned}$$

denkleminin çözüm ailesi

$$y^3 = (v(x) + c)f(x)$$

dır.

Eğer

$$p(x) = 0$$

ise

$$((q-1)x)^2 (D_q y)^3 + 3 \left((q-1)x (D_q y)^2 \right) y + 3 (D_q y) y^2 + \frac{g(x)}{f(x)} y^3 = 0 \quad (5.38)$$

olur.

Bu durumda denklemin genel çözümü

$$y^3 = cf(x)$$

dır.

Eğer

$$p(x) = a \quad (a, \text{keyfi bir sabit})$$

ise

$$\begin{aligned}
& ((q-1)x)^2 (D_q y)^3 + 3 \left((q-1)x (D_q y)^2 \right) y + 3 (D_q y) y^2 + \frac{g(x)}{f(x)} y^3 \quad (5.39) \\
& = ((1-q)xg(x) + f(x))a
\end{aligned}$$

denkleminin genel çözümü

$$y^3 = (ax + c)f(x)$$

dir.

İspat :

Bu teoremin ispatı teorem 5.3.12.'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.3.16.

$$D_q y \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \left((q-1)x D_q y \right)^{n-1-i} y^i + \frac{g(x)}{f(x)} y^n = ((1-q)xg(x) + f(x))p(x)$$

denkleminin çözüm ailesi;

$$g(x) = -D_q f(x),$$

ve $v(x)$

$$D_q u = p(x)$$

denkleminin bir özel çözümü olmak üzere

$$y^n = (v(x) + c)f(x)$$

dir.

Örnek 5.3.17.

$$(1-2x) \left(D_q y \left((q-1)x D_q y \right)^2 + 3y((q-1)x D_q y) + 3y^2 \right) + 2y^3 = 0 \quad (5.40)$$

denkleminin çözüm ailesini bulalım.

Bu denklem

$$D_q y \left((q-1)x D_q y \right)^2 + 3y \left((q-1)x D_q y \right) + 3y^2 + \frac{2}{1-2x} y^3 = 0$$

şeklinde yazılır.

Burada

$$f(x) = 1-2x \text{ ve } g(x) = 2$$

dir.

Buna göre

$$D_q(1-2x) = -2$$

olduğundan

$$D_q f(x) = -g(x)$$

şartı sağlanır.

Diğer taraftan (5.40) denkleminde $p(x) = 0$ olduğundan denklemin çözüm ailesi

$$y^3 = cf(x)$$

den

$$y^3 = c(1 - 2x)$$

olur.

5.4. Belirli q -İntegral

Tanım 5.4.1.

$0 < a < b$ olmak üzere belirli q -integrali

$$\int_0^b f(x) d_q x = b(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(bq^n) q^n \quad (5.41)$$

ve

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x \quad (5.42)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 5.4.2. (q -Calculusun Temel Teoremi)

$F(x)$, $f(x)$ fonksiyonun bir ters türevi ve $F(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli ve $0 \leq a < b < \infty$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x) d_q x = F(b) - F(a) \quad (5.43)$$

şeklindedir (Kac ve Pokman, 2002).

Tanım 5.4.3. q - Kısmi İntegrasyon

$$\int_a^b g(x) D_q f(x) d_q x = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(qx) D_q g(x) d_q x \quad (5.44)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Burada $g(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarının çarpımının q -türevini kullanılarak (5.44) formülün oluşumunu gösterebiliriz. Buna göre

$$D_q(g(x)f(x)) = g(x)D_qf(x) + f(qx)D_qg(x)$$

ifadesinin her tarafının q -integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int_a^b D_q(g(x)f(x)) &= \int_a^b g(x)D_qf(x)d_qx + \int_a^b f(qx)D_qg(x)d_qx \\ g(b)f(b) - g(a)f(a) &= \int_a^b g(x)D_qf(x)d_qx + \int_a^b f(qx)D_qg(x)d_qx\end{aligned}$$

olur.

Buradan

$$\int_a^b g(x)D_qf(x)d_qx = g(b)f(b) - g(a)f(a) - \int_a^b f(qx)D_qg(x)d_qx$$

elde edilir.

5.5. Belirsiz q -integral

Tanım 5.5.1.

$$D_qF(x) = f(x) \tag{5.45}$$

ise F fonksiyonuna f 'in bir belirsiz q - integrali veya q -antitürevi denir,

ve

$$F(x) = \int f(x) d_qx$$

şeklinde ifade edilir (Oney ,2007).

Burada

$$D_qF(x) = \frac{d_qF(x)}{d_qx} = f(x)$$

olduğundan

$$d_qF(x) = f(x)d_qx$$

$$\int d_qF(x) = \int f(x) d_qx$$

$$F(x) = \int f(x)d_qx + c , \quad c \text{ keyfi sabit}$$

olur.

Yani

$$\int f(x) d_q x = F(x) + c \quad (5.46)$$

bulunur.

c keyfi sabit olmak üzere,

$$D_q c = \frac{d_q c}{d_q x} = 0$$

$$\frac{d_q c}{d_q x} = 0 \text{ ise } d_q c = 0 \cdot d_q x$$

$$\int 0 \cdot d_q x = c$$

olur.

Klasik analizde olduğu gibi bir fonksiyonun birden fazla q -antitüreve sahip olması mümkündür.

Örnek 5.5.1.

$$\int (q+1)x d_q x \quad (5.47)$$

integralinin sonucunu bulalım.

$$D_q x^2 = (q+1)$$

olduğundan

$$\frac{d_q x^2}{d_q x} = (q+1)x$$

olur.

Buradan

$$(q+1)x d_q x = d_q x^2$$

denklemin integrali alınırsa

$$\int (q+1)x d_q x = x^2 + c$$

bulunur.

Örnek 5.5.2.

$$\int (q^2 + q + 1) x^2 d_q x \quad (5.48)$$

integralinin sonucunu da aynı şekilde hesaplayalım.

$$\begin{aligned} D_q x^3 &= \frac{(qx)^3 - x^3}{qx - x} \\ &= (qx)^2 + qx^2 + x^2 \\ &= (q^2 + q + 1)x^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\int (q^2 + q + 1) x^2 d_q x = \int d_q x^3 = x^3 + c$$

olarak bulunur.

Genelleme yapacak olursak,

$$D_q x^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} x^{n-1}$$

olduğundan

$$\int \frac{q^n - 1}{q - 1} x^{n-1} d_q x = x^n + c$$

olur.

Teorem 5.5.3.

$$y = xD_q y + f(D_q y) \quad (5.49)$$

denkleminin çözüm ailesi $D_q y = c$ olmak üzere

$$y = xc + f(c)$$

dir.

İspat:

Gerçekten de

$$D_q y = D_q (xc + f(c)) = cD_q x + 0 = c$$

dir.

Bunun dışında p , x ' e bağlı bir fonksiyon olmak üzere

$$D_q y = p$$

olsun.

Buna göre (5.49) denklemi

$$y = xp + f(p)$$

şeklinde yazılmış olur.

Her iki tarafın q -farkı alınır

$$D_q y = D_q (xp) + D_q f(p)$$

$$p = qx D_q p + p D_q x + \frac{d_q f(p)}{d_q p} \cdot \frac{d_q p}{d_q x}$$

$$qx D_q p + \frac{d_q f(p)}{d_q p} \cdot D_q p = 0$$

$$(D_q p) \left(qx + \frac{d_q f(p)}{d_q p} \right) = 0$$

olur.

Buradan

$$D_q p = 0 \text{ veya } qx + \frac{d_q f(p)}{d_q p} = 0$$

olmalıdır. Buna göre

$$D_q p = 0 \Rightarrow p = c$$

Yani

$$D_q y = c$$

bulunur. Diğer taraftan

$$qx + \frac{d_q f(p)}{d_q p} = 0$$

durumu ise bu çalışmada incelenmemiştir. Burada $D_q f(p)$ 'nin var olduğu kabul edilmiştir.

Şimdi de

$$D_q y = x D_q^2 y + f(D_q^2 y) \quad (5.50)$$

verilsin.

$$D_q^2 y = c$$

olmak üzere denklemin çözüm ailesini bulalım.

$$D_q y = xc + f(c)$$

olarak düzenlenirse ve q -integrali alınırsa

$$\begin{aligned} y &= \int (xc + f(c)) d_q x \\ &= c \int x d_q x + f(c) \int d_q x \\ &= c \frac{x^2}{(q+1)} + f(c)x + c_1 \end{aligned}$$

olur.

Böylece (5.50) denkleminin çözüm ailesi bulunmuş olur.

Benzer şekilde

$$D_q^2 y = x D_q^3 y + f(D_q^3 y) \quad (5.51)$$

denklemini verilsin.

$$D_q^3 y = c$$

olmak üzere

$$D_q^2 y = xc + f(c)$$

olur.

Buradan

$$\int D_q^2 y d_q x = c \int x d_q x + f(c) \int d_q x \quad (5.52)$$

$$D_q y = \frac{c}{q+1} x^2 + f(c)x + c_1$$

bulunur.

Bir kez daha her iki tarafın q -integralini alırsak

$$\begin{aligned}\int D_q y d_q x &= \frac{c}{q+1} \cdot \frac{q-1}{q^3-1} \int \frac{q^3-1}{q-1} x^2 d_q x + f(c) \cdot \frac{q-1}{q^2-1} \int \frac{q^2-1}{q-1} x d_q x \\ &+ \int c_1 d_q x\end{aligned}$$

$$y = \frac{c}{(q+1)(q^2+q+1)} x^3 + \frac{f(c)}{q+1} + c_1 x + c_2$$

şeklinde denklemin çözüm ailesi elde edilmiş olur.

Bu tip denklemleri genellersek

$$D_q^{n-1} y = x D_q^n y + f(D_q^n y) \quad (5.53)$$

formunda yazılır.

$$D_q^n y = c$$

olmak üzere bu ifade (5.53) ifadesinde yerine yazılırsa

$$D_q^{n-1} y = xc + f(c)$$

olur.

Her iki tarafın q -integrali $n-1$ kez alınırsa

$$\int D_q^{n-1} y d_q x = \int x c d_q x + \int f(c) d_q x$$

$$D_q^{n-2} y = c \frac{q-1}{q^2-1} x^2 + f(c) x + c_1$$

$$\begin{aligned}\int D_q^{n-2} y d_q x &= c \frac{q-1}{q^2-1} \cdot \frac{q-1}{q^3-1} \int \frac{q^3-1}{q-1} x^2 d_q x + f(c) \cdot \frac{q-1}{q^2-1} \int \frac{q^2-1}{q-1} x d_q x \\ &+ c_1 \int d_q x\end{aligned}$$

$$D_q^{n-3} y = c \frac{q-1}{q^2-1} \frac{q-1}{q^3-1} x^3 + f(c) \frac{q-1}{q^2-1} x^2 + c_1 x + c_2$$

$$\begin{aligned}D_q^{n-4} y &= c \frac{q-1}{q^2-1} \frac{q-1}{q^3-1} \cdot \frac{q-1}{q^4-1} x^4 + f(c) \frac{q-1}{q^2-1} \frac{q-1}{q^3-1} x^3 + c_1 \frac{q-1}{q^2-1} x^2 + c_2 x \\ &+ c_3\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
D_q y &= c \frac{(q-1)^{n-2}}{(q^2-1)(q^3-1)\dots(q^{n-1}-1)} x^{n-1} \\
&+ f(c) \frac{(q-1)^{n-3}}{(q^2-1)(q^3-1)\dots(q^{n-2}-1)} x^{n-2} \\
&+ c_1 \frac{(q-1)^{n-4}}{(q^2-1)(q^3-1)\dots(q^{n-3}-1)} x^{n-3} + \dots + c_{n-4} \frac{q-1}{q^2-1} x^2 \\
&+ c_{n-3} x + c_{n-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= c \frac{(q-1)^{n-1}}{(q^2-1)(q^3-1)\dots(q^n-1)} x^n \\
&+ f(c) \frac{(q-1)^{n-2}}{(q^2-1)(q^3-1)\dots(q^{n-1}-1)} x^{n-1} + \dots + c_{n-3} \frac{q-1}{q^2-1} x^2 + c_{n-4} x + c_{n-1} \\
y &= c \frac{(q-1)^{n-1}}{\prod_{k=2}^n (q^k-1)} x^n + f(c) \frac{(q-1)^{n-2}}{\prod_{k=2}^{n-1} (q^k-1)} x^{n-1} + c_1 \frac{(q-1)^{n-3}}{\prod_{k=2}^{n-2} (q^k-1)} x^{n-2} + \dots \\
&+ c_{n-3} \frac{q-1}{q^2-1} x^2 + c_{n-2} x + c_{n-1}
\end{aligned}$$

olur.

Düzenlenirse (5.53) denkleminin

$$\begin{aligned}
y &= c \frac{(q-1)^{n-1}}{\prod_{k=2}^n (q^k-1)} x^n + f(c) \frac{(q-1)^{n-2}}{\prod_{k=2}^{n-1} (q^k-1)} x^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-3} c_i \frac{(q-1)^{n-i-2}}{\prod_{k=1}^{n-i-1} (q^k-1)} x^{n-i-1} \\
&+ c_{n-2} x + c_{n-1}
\end{aligned}$$

şeklinde çözüm ailesi bulunur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma da q - fark denklemlerinin kurulması, lineer q -fark denklemlerinin çözüm ailelerinin bulunması ve lineer olmayan q -fark denklemlerinin ters q -fark operatörü ile çözümlerinin bulunması ele alınmıştır.Çeşitli teoremlerden yararlanarak sonuçlara ulaşılmış örnekler üzerinden çözüm metotları incelenmiştir.

q -fark denklemlerinin çözümünde, homojen olma, homojen olmama durumuna göre çözüm yapılmış, lineer durumdaki denklemlerin örnekleri çözümlenip, lineer olmama durumunda ise öncelikle lineer olacak şekilde düzenleme üzerinde durulmuş, değişken dönüşümü ile çözüm ailesi aranmıştır.

q -fark operatörü ve ters q -fark operatörü ile lineer olmayan denklemlerin çözülebilirliği gösterilmiş, q -integral tanımı akabinde örnekleri açıklanarak çalışma tamamlanmıştır. Çalışmanın kapsamını genişletmek istersek;

Mühendislik, fizik, ekonomi, biyolojik gelişmeler ya da yakın gelecekte ihtiyaç duyulacak pil batarya denklemlerinin modellenmesinde q -fark denklemleri ve bu denklemlerin çözümlenmesinde q -fark operatörü kullanımı araştırılabilir.

Buna zemin oluşturmak amacıyla ısı, sıcaklık, enerji denklemlerinin kurulabilmesi gerekliliğinden iki değişkenli, üç değişkenli fonksiyonların q -analiz de programlanması, bilgisayar programları üzerinde modellenmesi ve problemi oluşturulan denklemlerin verilen operatörler ile çözümlenme süreçleri üzerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- Aral, A., Gupta, V. and Agarwal, R.P. (2013). *Applications of q-Calculus in Operator Theory*. New York: Springer, 73-112.
- Bereketoğlu, H. ve Kutay, V. (2012). *Fark Denklemleri*. Ankara: Gazi Kitabevi.
- Cieřliński, J.L. (2010). *Improved q-Exponential and q-Trigonometric Functions*. Poland: University of Bialystok, 3-7.
- Çatal, S. (2004). Cebirsel Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemlerin Fark Denklemleri ile Çözümü. *İzmir : Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 6 (1).129-138.
- Elaydi, S. (1996). *An Introduction to Difference Equations*. New York: Springer-Verlag, 49-111.
- Elaydi, S. (2000). *An Introduction to Difference Equations Third Edition*. New York: Springer, 57-75.
- El-Shahed, M. and Hassan, H.A. (2010). *Positive solutions of q-difference equation*. Proceedings Of The American Mathematical Society. 138 (5). 1733-1738.
- Ernst, T. (2012). *A Comprehensive Treatment of q-Calculus*. Basel: Birkhauser, 27-61.
- Ferreira, R.A.C. (2011). Positive solutions for a class of boundary value problems with fractional q-differences. *Comput. Math. Appl.* , 61 (2). 367-373.
- Gauchman, H. (2004). Integral inequalities in q-calculus. *Comput. Math. Appl.* , 47 (2-3). 281-300.
- Jackson, F.H. (1908). On q-functions and a certain difference operator. *Trans. R. Soc. Edinb.* 46; 253-281.
- Kutay, V. (2016). *Neutral Gecikmeli Fark Denklemleri Üzerine*. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı.
- Kac, V. and Pokman, C. (2002). *Quantum Calculus*. New York : Springer, 30-31.
- Oney, S. (2007). *The Jackson Integral*. USA: University of Michigan, 1-10.
- Yamano, T. (2002). Some Properties Of q-Logarithm and q-Exponential Functions In Tsallis Statistics. *Physica A*. 305 (3-4). 486-496.
- Zill, D.G. (2013). *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*. USA: Brooks/Cole,Cengage Learning.

ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimimi Amasya/Merzifon'da tamamladı. 2013 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne başlayıp 2017 yılında mezun oldu. 2018 Yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalı bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. Halen yüksek lisans öğrencisidir.

İletişim Bilgileri

ORCID ID : 0009-0009-4621-0656

Yayınlar:

Işık, K. , Altınışık, N. (2023, Mayıs). Solution of Nonlinear Difference Equations with Inverse q -Difference Operator. /7th International Education and Innovative Sciences Congress / May 12th to 13th, 2023 May.
ISBN:978-625-367-122-8