

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**LİNEER PSEUDO-BENZERLİK DÖNÜŞÜMLERİ ALTINDA DÜZLEMSEL BÉZIER
EĞRİLERİNİN BELİRLENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif YILDIRIM

**EKİM 2020
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER PSEUDO-BENZERLİK DÖNÜŞÜMLERİ ALTINDA DÜZLEMSEL BÉZIER
EĞRİLERİNİN BELİRLENMESİ

Elif YILDIRIM

ORCID : 0000 - 0002 - 6535 - 3435

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 10 / 09 / 2020

Tezin Savunma Tarihi : 22 / 10 / 2020

Tez Danışmanı : Doç. Dr. İdris ÖREN
ORCID : 0000 - 0003 - 2716 - 3945

Trabzon 2020

ÖNSÖZ

“Lineer Pseudo-Benzerlik Dönüşümleri Altında Düzlemsel Bézier Eğrilerinin Belirlenmesi” adlı bu tez çalışması K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında “Yüksek Lisans Tezi” olarak hazırlanmıştır.

Konunun belirlenmesinden çalışmalarımın yönlendirilmesine kadar her aşamada değerli yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli deneyimlerini paylaşan ve danışmanlık yapan hocam Sayın Doç. Dr. İdris ÖREN’ e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

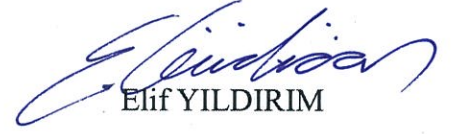
Ayrıca çalışmalar sırasında desteğini hissettiğim Sayın Prof. Dr. Ömer PEKŞEN’ e çok teşekkür ederim.

Bu tezi hazırlama aşamasında göstermiş oldukları sabır ve desteklerinden dolayı kıymetli aileme, eşime ve sevgili çocuklarıma teşekkür ederim. Arkadaşlarımdan verdikleri moral ve güzel dilekleri için de teşekkür ederim.

Elif YILDIRIM
Trabzon 2020

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Lineer Pseudo-Benzerlik Dönüşümleri Altında Düzlemsel Bézier Eğrilerinin Belirlenmesi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. İdris ÖREN’nin sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 22/10/2020


Elif YILDIRIM

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ	VIII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Hiperbolik Sayılar ve Temel Özellikleri	3
1.3. 2-Boyutlu Minkowski Uzay-Zamanı	5
1.4. 2-Boyutlu Minkowski Uzay-Zamanındaki Gruplar	8
1.5. 2-Boyutlu Minkowski Uzayı ile Hiperbolik Sayılar Cebiri Arasındaki Bağlantılar.....	9
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	12
2.1. Lineer Pseudo-Benzerlik Grupları	12
2.2. Lineer Pseudo-Benzerlik Grupları İçin Benzerlik Problemleri.....	14
2.3. Bézier Eğrilerinin Lineer Pseudo-Benzerlik Grupları İçin Benzerlik Problemleri.....	25
3. BULGULAR.....	33
4. İRDELEME	40
5. SONUÇLAR	41
6. ÖNERİLER.....	43
7. KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

LİNEER PSEUDO-BENZERLİK DÖNÜŞÜMLERİ ALTINDA DÜZLEMSEL BÉZİER
EĞRİLERİNİN BELİRLENMESİ

Elif YILDIRIM

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. İdris ÖREN
2020, 45 Sayfa

2- Boyutlu ve indeksi 1 olan pseudo-Öklid uzayı E_1^2 olmak üzere, E_1^2 uzayında tüm lineer pseudo-benzerlik dönüşümler grubu ve tüm yönlendirmeyi koruyan lineer pseudo-benzerlik dönüşümler grubu anlatıldı ve bu gruplar sırasıyla $LPSim(E_1^2)$ ve $LPSim^+(E_1^2)$ ile gösterildi. $G = LPSim(E_1^2)$ veya $G = LPSim^+(E_1^2)$ olmak üzere, E_1^2 uzayında m-tane noktanın G -invariantları ve m-tane noktadan oluşan iki sistemin G -benzerlik şartları verildi. L-pseudo-regüler Bézier eğrisi tanımlandı. $m \geq 1$ olmak üzere, m-tane noktanın G -invariantları yardımıyla, m. dereceden iki tane Bézier eğrisinin ve iki tane L-pseudo-regüler Bézier eğrisinin G -benzerlik şartları verildi. E_1^2 uzayında ortak G -invariantlara sahip iki Bézier eğrisi için, birini diğerine dönüştüren tüm lineer pseudo-benzerlik dönüşümlerinin görüntüleri elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Pseudo-benzerlik, invariant, hiperbolik sayı

Thesis Master

SUMMARY

DETERMINATION OF PLANAR BÉZIER CURVES UNDER LINEAR PSEUDO-SIMILARITY TRANSFORMATIONS

Elif YILDIRIM

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Doç. Dr. İdris ÖREN
2020, 45 Pages

Let E_1^2 be the 2-dimensional pseudo-Euclidean space of index 1. The group of all linear pseudo-similarities of E_1^2 and the group of all orientation-preserving linear pseudo-similarities of E_1^2 are introduced and its denoted by $LPSim(E_1^2)$ and $LPSim^+(E_1^2)$, respectively. Let $G = LPSim(E_1^2)$ or $G = LPSim^+(E_1^2)$. G -invariants of m -tuple points in E_1^2 and the conditions of G -similarity of two systems of m -tuple points are given. L-pseudo regular Bézier curve is defined. The solutions of problems of G -similarity for two Bézier curves of degree $m \geq 1$ and two L-pseudo-regular Bézier curves of degree $m \geq 1$ are found in terms of G -invariants of m -tuple points in E_1^2 . For two Bézier curves in E_1^2 with the common G -invariants, evident forms of all linear pseudo-similarity transformations, carrying one to other, are obtained.

Key Words: Pseudo-similarity, invariant, hyperbolic number

KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ

E_1^2	: 2-Boyutlu Minkowski Uzay-Zamanı
$\mathbb{H}$	: Hiperbolik Sayılar Kümesi
$\mathbb{H}^*$	: $= \{x = x_1 + jx_2 \in \mathbb{H} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \langle x, x \rangle \neq 0\}$
$\mathbb{H}_+^*$	: $= \{x = x_1 + jx_2 \in \mathbb{H} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \langle x, x \rangle > 0\}$
$S(\mathbb{H}_+^*)$	: $= \{x \in \mathbb{H}, \langle x, x \rangle = 1\}$
$LPSim(E_1^2)$	: E_1^2 'nin Lineer Pseudo-Benzerlik Dönüşümleri Grubu
$LPSim^+(E_1^2)$	: E_1^2 'nin Yönlendirmeyi koruyan Lineer Pseudo-Benzerlik Dönüşümleri Grubu
$O(1,1)$	: Pseudo - Ortogonal Grup
$O^+(1,1)$	: Özel Pseudo - Ortogonal Grup
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^2$	: 2-Boyutlu Reel Vektör Uzayı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Matematikte “benzerlik” fikri, Öklid’in “Elements” adı verilen 13 kitaptan oluşan eserinde anlatılmıştır. Bu fikir temel düzlemsel şekillerden üçgenlerde kullanılmış ve “benzer üçgen” tanımı verilmiştir [1, 2].

Bu fikir zamanla geliştirilerek, matematiksel bir kavram olarak “benzerlik dönüşümü” olarak tanımlanmıştır. Günümüzde bu kavram genel olarak, “Öklid uzayında benzerlik dönüşümü” veya “Benzerlik geometrisi” olarak adlandırılmakta ve genellikle matematiğin uygulama alanlarında kısaca “benzerlik” kelimesi olarak J. G. Alcázar, C. Hermoso ve G. Muntingh’in 2014 yılındaki ortak çalışmasında ve J. Kunes’in çalışmasında kullanılmaktadır [3, 4].

İnvariantlar teorisi 1850 yıllardan itibaren geliştirilmeye başlanmıştır. Bu teorelin etkisiyle, 1872’de Felix Klein adlı matematikçi “Erlangen programı” nda “Her geometri, o geometriyi oluşturan simetri grubunun invariantları teorisidir” diye ifade etmiş ve böylece “geometri” kavramını yeniden tanımlayarak, geometriyi “dönüşümler grubu” kavramıyla birleştirmiştir.

Geometrilere getirilen bu yaklaşım, sonlu tane noktalarla belirlenen geometrik yapılar için çok önemli sonuçları ortaya çıkarmıştır. Bu şekilde tanımlanan her grup yardımıyla, çok sayıda geometrinin ortaya çıkması sağlanmıştır.

Bu bağlamda, örneğin; ortogonal dönüşümler ve öteleme dönüşümü yardımıyla ifade edilen dönüşümlerin oluşturduğu grup Öklid grubu olmak üzere, Öklid grubunun elemanları (dönüşümleri) yardımıyla değişmeyen (invariant kalan) geometrik özellikler, Öklid geometrisi olarak adlandırılır.

Bu şekilde ortaya çıkan geometrilerde, invariant teori yaklaşımıyla, noktalar, eğriler ve yüzeyler gibi yapılar incelenmiştir.

2018 yılında D. Khadjiev, İ. Ören ve Ö. Pekşen’ in birlikte yaptıkları çalışmada Öklid uzayında tanımlanan benzerlik dönüşümü ise lineer benzerlik dönüşümü ve öteleme dönüşümünden oluşur [5]. 2009’da R.G. Encheva ve G.H. Georgiev çalışmasında bu tüm

[25] benzerlik dönüşümlerinin oluşturduğu grubu altında değişmez kalan özellikler “benzerlik geometrisi” olarak adlandırılır [6].

2,3 ve n-boyutlu Benzerlik geometrisinde, noktalar, eğriler, yüzeyler ve manifoldlar teorisi geliştirilmiştir [1, 6-8, 18, 21, 22].

Benzerlik kavramı, matematiğin farklı alanlarında, fizikte, mekanikte ve bilgisayar bilimlerinde önemli bir yere sahiptir [4, 5, 8].

İnvariantlık ise nesne tanıma ve bilgisayar destekli grafik çalışmalarında önemlidir. Bilgisayar destekli uygulamalardan ICP (Iterative Closest Point) algoritması, eğri karşılaştırma ve nesne tanıma için etkili ve kesin bir algoritmadır. Nesne tanımanın amacı, iki nokta kümesi veya iki eğri arasındaki ilişkiyi bulmak ve birini diğerine dönüştüren dönüşümü hesaplamaktır. Genellikle, Öklid geometrisindeki invariant özellikler, nesne tanıma problemleri veya Bézier eğrilerinin gösterimlerinde kullanılmaktadır. [25].

Benzerlik geometrisinde sadece lineer benzerlik dönüşümlerinin grubu altında, noktalar ve eğriler incelenmiştir [1, 5, 9].

Öklid uzayındaki benzerlik dönüşümlerinin benzerleri Lorentz uzayında düşünülmüş ve pseudo-Öklid uzayında (Lorentz uzayı) “Lorentzian benzerlik geometrisi” olarak adlandırılmıştır. Lorentzian benzerlik geometrisinin temel grubu, lineer pseudo benzerlik dönüşümleri ve öteleme dönüşümünün birleşiminden oluşan pseudo-benzerlikler grubudur [13]. 2,3 ve n-boyutlu Lorentz uzayındaki benzerlik geometrisinde eğriler ve manifoldlar incelenmiştir [7, 10-13, 24].

[5] nolu çalışmada, lineer benzerlik grupları altında eğriler teorisi incelenirken, karmaşık sayılar ve onların cebirsel özellikleri kullanılmıştır.

Karmaşık sayılarla, 2-boyutlu Öklid geometrisi arasındaki bağlantı [5, 8, 20, 26] nolu çalışmalarda verilmiştir. Bunun benzeri, hiperbolik sayılarla iki-boyutlu Minkowski uzayzaman geometrisi (Lorentzian düzlem geometri) arasında verilmiştir [13, 14].

Hiperbolik sayılar ve onların cebirsel özelliklerine ait birçok çalışma mevcuttur [11, 14, 15, 23]

H. Şimşek ve M. Özdemir 2017 yılında yaptıkları çalışmada ve İ.Ören ile D. Khadjiev’in birlikte yaptıkları çalışmada [11, 13], 2-boyutlu Lorentzian benzerlik geometrisinde ve 2-boyutlu lineer pseudo-benzerlik geometrisinde eğriler teorisi incelenirken, hiperbolik sayılar ve onların cebirsel özellikleri kullanılmıştır [26].

[14] nolu çalışmada, 2-boyutlu Minkowski uzayzamanında, m tane noktanın (hiperbolik sayının) invaryantları ve denklik problemleri, hiperbolik sayılar kullanılarak çözülmüştür.

[13] nolu çalışmada, hiperbolik sayıların kullanımıyla, iki-boyutlu pseudo-Öklid uzayında lineer pseudo-benzerlik grupları için eğriler teorisinin benzerlik problemleri çözülmüştür.

Bu tezde ise, iki-boyutlu pseudo-Öklid uzayında lineer pseudo-benzerlik grupları için m tane hiperbolik sayıdan (noktadan) oluşan sistemin invaryantları ve bu invaryantlar yardımıyla sistemlerin benzerlik problemi çözülmüştür. Dahası, benzer olan iki sistem için, invaryantlar yardımıyla, birini diğerine dönüştüren dönüşümün görüntüsü verilmiştir. Bu problemin çözümü yardımıyla, Bézier ve polinom eğrilerinin benzerlik problemleri, diferansiyel invaryantlar kullanılmadan, kontrol noktaları yardımıyla ifade edilmiştir. Son olarak, L-pseudo regüler Bézier eğrisi tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Bu tip eğrilerin de benzerlik problemleri çözülmüştür.

1.2. Hiperbolik Sayılar ve Temel Özellikleri

Bu kısımda Hiperbolik sayılar ile ilgili temel kavramlar verilecektir. Bu temel kavramlar, [15] nolu çalışmadan derlenmiştir.

Tanım 1.2.1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere (a, b) ikilisine sıralı ikili denir. Bu sıralı ikili $x = (a, b)$ ile gösterilir.

Bu şekildeki tüm sıralı ikililerin kümesi $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ alalım. Bu küme $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ile gösterilir.

Bu takdirde, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, x = (a, b), y = (c, d)$ ve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ için $a = c$ ve $b = d \Leftrightarrow x = y$ dir.

$\mathbb{R}^2$ 'de $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 1.2.2. $x = (a, b), y = (c, d) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $\oplus: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \oplus y = (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ şeklinde tanımlanan işleme $\mathbb{R}^2$ 'de toplama işlemi denir.

Tanım 1.2.3. $x = (a, b), y = (c, d) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $\odot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ işlemi $x \odot y = (a, b) \odot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$ şeklinde tanımlanan işleme $\mathbb{R}^2$ 'de çarpma işlemi denir.

Tanım 1.2.4. $x = (a, b), y = (c, d) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $\mathbb{R}^2$ de $\oplus: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve $\odot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ işlemleri verilsin. Bu takdirde $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ kümesine Hiperbolik sayılar kümesi denir ve $\mathbb{H}$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.1. $A = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{H}$ kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar cisminde izomorftur.

Not 1.2.1. Teorem 1.2.1 kullanımıyla, keyfi $(a, 0)$ hiperbolik sayısı, kısaca $a \in \mathbb{R}$ şeklinde alınacaktır. Bu durumda $a = (a, 0)$ dır.

Buraya kadar yapılan çalışmalar doğrultusunda, $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerinin gösterimlerinde kolaylık için, $x, y \in \mathbb{H}$ için $x \oplus y = x + y$ ve $x \odot y = xy$ gösterimleri kullanılacaktır.

Tanım 1.2.5. $(0, 1) \in \mathbb{H}$ sayısına hiperbolik birim denir ve kısaca “j” ile gösterilir. Bu durumda, $j = (0, 1)$ dir.

Önerme 1.2.1. $j^2 = 1$ dir.

Not 1.2.3. Keyfi $x = (a, b) \in \mathbb{H}$ sayısı $x = a + jb$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Hiperbolik bir sayının reel bir skaler ile çarpımı $\lambda \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{H}$ için $\mathbb{R} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ve $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ biçiminde ifade edilecektir.

Teorem 1.2.2. $\mathbb{H}$ kümesi birimli ve değişmeli halkadır.

Teorem 1.2.3. $\mathbb{H}$ kümesi bir cisim değildir.

Teorem 1.2.4. $\mathbb{H}$ kümesi, hiperbolik birim elemanlı, değişmeli ve birleşmeli bir cebirdir.

Tanım 1.2.6. Hiperbolik birim elemanı olan değişmeli, birleşmeli olan bu $\mathbb{H}$ cebirine Hiperbolik Sayılar Cebir’i denir.

Tanım 1.2.7. $\mathbb{H} = \{a = a_1 + ja_2 \in \mathbb{H} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}, j^2 = 1, j \notin \mathbb{R}\}$ kümesine Hiperbolik Sayılar Kümesi denir.

$x = a + jb \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısının reel kısmı $Re(x) = a$ ve hiperbolik kısmı ise $Hp(x) = b$ ile gösterilir. Tanım 1.2.2. ve Tanım 1.2.3. ve yukarıda elde edilen sonuçların kullanımıyla, $a = a_1 + ja_2, b = b_1 + jb_2 \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(i) a + b = (a_1 + ja_2) + (b_1 + jb_2) = (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2)$$

$$(ii) ab = (a_1 + ja_2)(b_1 + jb_2) = (a_1b_1 + a_2b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1)$$

$$(iii) \lambda a = \lambda(a_1 + ja_2) = \lambda a_1 + j\lambda a_2$$

eşitlikleri yazılır.

Örnek 1.2.1. $a = 2 + 3j, b = 4 + 7j \in \mathbb{H}$ olmak üzere, $a + b = 6 + 10j$ ve $ab = 29 + 26j$ dir.

Tanım 1.2.8. $\forall a = a_1 + ja_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere, $a_1 - ja_2 \in \mathbb{H}$ sayısına $a \in \mathbb{H}$ nin hiperbolik eşleniği (kısaca, eşleniği) denir ve $\bar{a} = a_1 - ja_2$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.2. $a = 2 + 3j \in \mathbb{H}$ ise $\bar{a} = 2 - 3j \in \mathbb{H}$ dir.

Şimdi bir hiperbolik sayının matris gösterimini açıklayalım.

$x = a + jb \in \mathbb{H}$ olmak üzere, $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ şeklindeki bir matrisi M_x ile gösterelim. Bu şekildeki tüm matrislerin kümesini $M = \{M_x | x = a + jb \in \mathbb{H}\}$ ile gösterelim. M kümesi üzerinde, bilinen matris işlemleri olan matrislerde toplama, iki matrisi çarpma ve bir skalerle bir matrisi çarpma işlemlerini alalım.

Önerme 1.2.2. M birim elemanlı, birleşmeli ve değişmeli cebirdir ve M ile $\mathbb{H}$ cebirleri izomorftur.

İspat: Önermenin ispatı, [15, Teorem 5] ve [14, Önerme 2.1] den elde edilir..

Not 1.2.4. Bu önermeye göre, M deki her $M_x = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ matrisinin görüntüsü, $\mathbb{H}$ deki bir tek $x = a + jb \in \mathbb{H}$ sayısına karşılık gelmektedir. Bu ilişki aşağıdaki diyagramla

$$x = a + jb \in \mathbb{H} \leftrightarrow M_x = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (1)$$

gösterilebilir.

1.3. 2-Boyutlu Minkowski Uzay-Zamanı

Bu kısımdaki bilgiler, [17] nolu çalışmadan derlenmiştir.

Tanım 1.3.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V , $\mathbb{R}$ üzerinde $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı olmak üzere, $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlasın:

(i) $a, b \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V$ için $g(ax_1 + bx_2, y) = ag(x_1, y) + bg(x_2, y)$ ve $g(x, ay_1 + by_2) = ag(x, y_1) + bg(x, y_2)$

(ii) $\forall x, y \in V$ için $g(x, y) = g(y, x)$

(iii) $\forall y \in V$ için $g(x, y) = 0$ olduğunda $x = 0$.

Bu durumda, $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne genelleştirilmiş iç (skaler) çarpım denir. Bu iç çarpım $\forall x, y \in V$ için $g(x, y)$ veya $\langle x, y \rangle$ ile gösterilir.

Dahası, $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne (i) durumunda bilineer dönüşüm; (ii) durumunda simetrik dönüşüm ve (iii) durumunda ise bozulmamış (nondegenerate) dönüşüm denir.

Örnek 1.3.1. $V = \mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$ için $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $f(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$ bilineer dönüşümdür.

Örnek 1.3.2. $V = \mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$ için $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $f(x, y) = 4x_1y_1$ simetrik dönüşümdür.

Örnek 1.3.3. $V = \mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2): x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$ için $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ve
 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ dönüşümü bozulmamıştır.

Örnek 1.3.4. $V = \mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$ için $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $f(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ dönüşümü tanımlansın. f dönüşümü bir genelleştirilmiş iç çarpımdır.

Örnek 1.3.5. $V = \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $g(x, y) = xy^2$ dönüşümü genelleştirilmiş bir iç çarpım değildir.

Tanım 1.3.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, $V, \mathbb{R}$ üzerinde $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olmak üzere,

- (i) $0 \neq x \in V$ için $g(x, x) < 0$ ise g' 'ye negatif tanımlı(belirli) denir.
- (ii) $0 \neq x \in V$ için $g(x, x) > 0$ ise g' 'ye pozitif tanımlı(belirli) denir.
- (iii) g dönüşümü, ne negatif tanımlı ne de pozitif tanımlı ise g' 'ye belirsiz denir.

Örnek 1.3.6. $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = -xy$ dönüşümü negatif belirlidir.

Örnek 1.3.7. $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = xy$ dönüşümü pozitif belirlidir.

Örnek 1.3.8. $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ dönüşümü pozitif belirlidir. Bu dönüşüm n -boyutlu reel vektör uzayında Öklid iç çarpımı olarak tanımlanır.

Örnek 1.3.9. $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ dönüşümü ise belirsizdir.

Tanım 1.3.3. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, $V, \mathbb{R}$ üzerinde $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun. Bu takdirde, $x, y \in V$ için $g(x, y) = 0$ ise x ve y vektörlerine ortogonal vektörler denir.

Tanım 1.3.4. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, $V, \mathbb{R}$ üzerinde $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun. $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\varphi(x) = g(x, x) = \langle x, x \rangle$ ile tanımlanan dönüşüme g -genelleştirilmiş iç çarpımı ile verilen kuadratik form denir.

Tanım 1.3.5. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, $V, \mathbb{R}$ üzerinde $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun. Eğer $g(x, x) = \langle x, x \rangle = \pm 1$ ise $x \in V$ 'ye birim vektör denir.

Tanım 1.3.6. $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset V$ k tane vektörlerden oluşan bir sistem olmak üzere, $x_i, i = 1, 2, \dots, k$ vektörleri için $g(x_i, x_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k$ ise bu sisteme ortogonal sistem denir.

Tanım 1.3.7. $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset V$, k tane vektörlerden oluşan bir ortogonal sistem olmak üzere $\forall i = 1, 2, \dots, k$ için $g(x_i, x_j) = \pm 1$ ise bu sisteme ortonormal sistem denir.

Teorem 1.3.1. $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun. V 'nin keyfi iki ortogonal tabanındaki iç çarpımı -1 olan vektörlerinin sayısı eşittir.

Tanım 1.3.8. $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun.

$g(e_i, e_i) = -1$ olan g , genelleştirilmiş iç çarpımın her ortonormal tabanındaki e_i vektörlerinin sayısına g 'nin indeksi denir." $indg$ " ile gösterilir.

Örnek 1.3.10. $V = \mathbb{R}^2, g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ dönüşümünü alalım. Burada $indg = 0$ dir. $indg = 0$ durumunda bu dönüşüme Öklid iç çarpımı denir.

Örnek 1.3.11. $V = \mathbb{R}^2, g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ dönüşümünü alalım. Burada $indg = 1$ dir.

Örnek 1.3.12. $V = \mathbb{R}^3, g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$ dönüşümünü alalım. Bu takdirde $indg = 2$ dir.

Tanım 1.3.9. $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun. $g(e_i, e_i) = 1, i = 1, 2, \dots, n-1, g(e_n, e_n) = -1$ olan $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal taban olmak üzere, bu tabanla gösterimi $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n, y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$ olan vektörler ise $g(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n$ ile tanımlanan genelleştirilmiş iç çarpıma Lorentz iç çarpımı denir.

Teorem 1.3.2. V 2-boyutlu reel vektör uzayı, $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun. Bu takdirde V 'de iç çarpımı $g(e_i, e_i) = \langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$ ve $g(e_i, e_j) = \langle e_i, e_j \rangle = 0, i \neq j$ olan $\{e_i, i = 1, 2\}$ şeklinde bir taban vardır.

Önerme 1.3.1. V 2-boyutlu reel vektör uzayı, $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun. Bu takdirde V 'de iç çarpımı $g(e_i, e_i) = \langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$ ve $g(e_i, e_j) = \langle e_i, e_j \rangle = 0, i \neq j$ olan $\{e_i, i = 1, 2\}$ keyfi ortonormal taban lineer bağımsızdır.

Tanım 1.3.10. 2-boyutlu $\mathbb{R}^2$ reel vektör uzayında tanımlı indeksi 1, bilineer, simetrik ve bozulmamış özelliklerine sahip olan $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Lorentz iç çarpımı $g(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ ile tanımlı uzaya 2-boyutlu Minkowski Uzay-zamanı denir. Bu uzay, E_1^2 ile gösterilecektir. Bu uzay, iki boyutlu indeksi 1 olan pseudo-Öklid uzayı olarak da adlandırılır.

Tanım 1.3.11.

- (i) $0 \neq x \in E_1^2$ için $\langle x, x \rangle = 0$ ise x 'e ışıksal (null veya lightlike) vektör denir.
- (ii) $x \in E_1^2$ için $\langle x, x \rangle < 0$ ise x 'e zamansal (timelike) vektör denir.
- (iii) $x \in E_1^2$ için $\langle x, x \rangle > 0$ ise x 'e uzaysal (spacelike) vektör denir.

Örnek 1.3.13.

- (i) $x = (4, 4) \in E_1^2$ olmak üzere, $\langle x, x \rangle = 16 - 16 = 0$ olduğundan x ışıksal vektördür.
- (ii) $x = (3, 5) \in E_1^2$ olmak üzere, $\langle x, x \rangle = 9 - 25 = -16 < 0$ olduğundan x zamansal vektördür.
- (iii) $x = (5, 1) \in E_1^2$ olmak üzere, $\langle x, x \rangle = 25 - 1 = 24 > 0$ olduğundan x uzaysal vektördür.

1.4. 2-Boyutlu Minkowski Uzay-Zamanındaki Gruplar

Bu kısımdaki temel bilgiler [16] nolu çalışmadan alınmıştır.

Tanım 1.4.1. E_1^2 , 2-boyutlu Minkowski Uzay-zamanı olmak üzere, $F: E_1^2 \rightarrow E_1^2$ dönüşümü $\forall x, y \in E_1^2$ için $\langle Fx, Fy \rangle = \langle x, y \rangle$ ise bu F dönüşümüne E_1^2 de pseudo-ortogonal dönüşüm denir.

$O(1,1)$ ile E_1^2 'de tüm pseudo-ortogonal dönüşümlerin kümesini gösterelim. Bu küme, $O(1,1) = \{F: E_1^2 \rightarrow E_1^2 \mid \langle Fx, Fy \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in E_1^2\}$ dir.

Önerme 1.4.1. $O(1,1)$ kümesi fonksiyonlardaki bileşke işlemine göre bir gruptur.

Tanım 1.4.2. $O(1,1)$ grubuna E_1^2 de pseudo-ortogonal grup denir.

Önerme 1.4.2. $F: E_1^2 \rightarrow E_1^2$ ortogonal dönüşüm ise F lineerdir.

Lemma 1.4.1. $F: E_1^2 \rightarrow E_1^2$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir.

- (i) F , pseudo-ortogonal dönüşümdür.
- (ii) F , kuadratik formu korur.

(iii) F , E_1^2 'nin her pseudo-ortonormal tabanını E_1^2 'nin başka bir pseudo-ortonormal tabanına taşır.

Önerme 1.4.3. $O(1,1) = \{F: E_1^2 \rightarrow E_1^2 \mid \langle Fx, Fy \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in E_1^2\}$
 $= \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, A^T \eta A = \eta, \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

kümesi matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur.

Sonuç 1.4.1. Her $A \in O(1,1)$ için $\det A = \pm 1$ dir.

Önerme 1.4.4.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(1,1) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = 1$ veya $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = -1$ dir.

Sonuç 1.4.2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in O(1,1)$ ise $a \neq 0$ dır.

Şimdi $O^+(1,1)$ ile E_1^2 'de determinantı 1 olan tüm pseudo-ortogonal dönüşümlerin kümesini gösterelim. Bu küme $SO(1,1)$ olarak da gösterilmektedir. Bu küme, $O^+(1,1) = \{A \in O(1,1) \mid \det A = 1\}$ dir.

Önerme 1.4.5. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(1,1) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = a^2 - b^2 = 1$ dir.

Önerme 1.4.6. $O^+(1,1)$ kümesi matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur.

Tanım 1.4.3. $O^+(1,1)$ gubuna E_1^2 'de özel pseudo-ortogonal grup denir.

Önerme 1.4.6. $A \in SO(1,1)$ ise $|a| \geq 1$ dir.

1.5. 2-Boyutlu Minkowski Uzayı ile Hiperbolik Sayılar Cebiri Arasındaki Bağlantılar

Bu kısımdaki bilgiler [14] nolu çalışmadan alınmıştır. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $W: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ fonksiyonu düşünelim.

(i) $\forall x \in \mathbb{H}$ için $W(W(x)) = x$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{H}$ için $W(xy) = W(x)W(y)$

Bu fonksiyonu $W(x) = \bar{x}$ olarak tanımlayalım.

$x = x_1 + jx_2, y = y_1 + jy_2 \in \mathbb{H}$ için $xW(y) = x\bar{y} = x_1y_1 - x_2y_2$ dir. Açıkça, Tanım 1.3.11'den $\langle x, y \rangle = xW(y) = x\bar{y}$ dir. Bu takdirde, $\langle x, y \rangle$ Lorentz iç çarpımı $\mathbb{H}$ cebiri üzerinde bilineer formdur. Önerme 1.2.2' den $\langle x, x \rangle = \det M_x$ tir.

W dönüşümünü matris formunda $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ olarak ifade edebiliriz.

Bir $x = x_1 + jx_2 \in \mathbb{H}$ elemanını $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ şeklinde matris formunda düşündüğümüzde, $Wx = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \bar{x}$ dir.

$$(i) \forall x \in \mathbb{H} \text{ için } \langle x, x \rangle = \langle W(x), W(x) \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = xW(x) = W(x)x$$

$$(ii) \forall x, y \in \mathbb{H} \text{ için } \langle x, y \rangle = \langle W(x), W(y) \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$$

Önerme 1.5.1. $x \in \mathbb{H}$ olmak üzere, $x^{-1} \in \mathbb{H}$ mevcuttur $\Leftrightarrow \langle x, x \rangle \neq 0$ dir. Bu takdirde, $\langle x, x \rangle \neq 0$ olması durumunda, $x^{-1} = \frac{W(x)}{\langle x, x \rangle} = \frac{\bar{x}}{\langle x, x \rangle}$ ve $\langle x^{-1}, x^{-1} \rangle = \frac{1}{\langle x, x \rangle}$ dir.

$x = x_1 + jx_2, y = y_1 + jy_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere, $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ matrisinin determinantını $[x \ y] = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ ile gösterelim.

Önerme 1.5.2. $x, y \in \mathbb{H}$ ve $\langle x, x \rangle \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $yx^{-1} \in \mathbb{H}$ mevcut ve

$$yx^{-1} = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} + j \frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda, yx^{-1} elemanının matris formundaki görüntüsü

$$M_{yx^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} & \frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} \\ \frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} & \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \end{pmatrix} \quad (3)$$

şeklinde dir. Ayrıca, $\det M_{yx^{-1}} \neq 0 \Leftrightarrow \langle y, y \rangle \neq 0$ dir.

Önerme 1.5.3. $\forall x, y \in E_1^2$ olmak üzere, $[x \ y]^2 = \langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ dir.

İspat: [13, Lemma 1]

Şimdi $\mathbb{H}^* = \{x \in \mathbb{H} \mid \langle x, x \rangle \neq 0\}$ ve $S(\mathbb{H}^*) = \{x \in \mathbb{H} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ kümelerini alalım.

Önerme 1.5.4. $\mathbb{H}^*, \mathbb{H}$ cebirinde çarpma işlemine karşılık gelen bir gruptur. $S(\mathbb{H}^*)$ ise bu $\mathbb{H}^*$ grubunun bir alt grubudur.

[14, Teorem 3.7) de aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 1.5.1.

$$(i) \mathbb{H}^* = \{x = a + jb \in \mathbb{H} \mid \langle x, x \rangle = a^2 - b^2 \neq 0\} = \{M_x = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid \det M_x \neq 0\}$$

$$(ii) S(\mathbb{H}^*) = \{x = a + jb \in \mathbb{H} \mid \langle x, x \rangle = 1\} = \{M_x = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid \det M_x = 1\}$$

$x = x_1 + jx_2, y = y_1 + jy_2 \in \mathbb{H}, \langle x, y \rangle = x_1y_1 - x_2y_2$ olmak üzere hiperbolik sayılar üzerinde Lorentz iç çarpımı düşünülürse $(\mathbb{H}, \langle x, y \rangle) = E_1^2$ dir. Burada $e_1 = 1, e_2 = j \in \mathbb{H}$ ve $\langle e_1, e_1 \rangle = 1, \langle e_1, e_2 \rangle = 0, \langle e_2, e_2 \rangle = -1$ dir. $\{e_1, e_2\}$ lineer bağımsız olup $\mathbb{H}$ 'de bir tabandır.

$O^+(1,1)W = \{AW | A \in O^+(1,1), W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$ kümesini tanımlayalım.

Önerme 1.5.4.

(i) $O(1,1) = O^+(1,1) \cup O^+(1,1)W$ ve $O^+(1,1) \cap O^+(1,1)W = \emptyset$ kümedir.

(ii) $O^+(1,1) = S(\mathbb{H}^*)$

(iii) $O(1,1) = S(\mathbb{H}^*) \cup S(\mathbb{H}^*)W$

Bu bağlamda, $z = a + jb \in \mathbb{H}^*$ ve $x = x_1 + jx_2 \in \mathbb{H}$ olmak üzere,

Teorem 1.5.1 ve Tanım 1.2.3 ün kullanımıyla,

$$zx = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + ax_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M_z x \quad (4)$$

elde edilir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Lineer Pseudo-Benzerlik Grupları

Bu kısımda, hiperbolik sayıların kullanımıyla, lineer pseudo-benzerlik gruplarını tanımlayacağız. Bu gruplar [13]'de verilmiştir.

Genel bilgiler kısmından bazı kavramları hatırlayalım.

Hiperbolik sayılar kümesi $\mathbb{H} = \{z = a + jb \mid a, b \in \mathbb{R}, j^2 = -1, j \notin \mathbb{R}\}$ ve $\mathbb{H}^* = \{x \in \mathbb{H} \mid \langle x, x \rangle \neq 0\}$ olarak alalım. Önerme 1.5.2 den $\mathbb{H}^*$, $\mathbb{H}$ deki çarpma işlemine göre bir gruptur.

$\mathbb{H}_+^* = \{x \in \mathbb{H} \mid \langle x, x \rangle > 0\}$ ve $S(\mathbb{H}_+^*) = \{x \in \mathbb{H} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ kümelerini tanımlayalım.

Not 2.1.1. [14]' de tanımlanan $S(\mathbb{H}^*)$ grubu bu çalışmada $S(\mathbb{H}_+^*)$ olarak gösterilecektir.

Önerme 2.1.1. $\mathbb{H}_+^*$ ve $S(\mathbb{H}_+^*)$, $\mathbb{H}^*$ 'in alt gruplarıdır.

İspat: $\mathbb{H}_+^*$ in $\mathbb{H}^*$ nin alt grubu olduğunu gösterelim. $x, y \in \mathbb{H}_+^*$ keyfi olsun. Bu takdirde tanım gereği $\langle x, x \rangle > 0$ ve $\langle y, y \rangle > 0$ dır.

(i) $\langle x, x \rangle > 0$ olduğundan dolayı $\langle x, x \rangle \neq 0$ olur. Böylece $x \in \mathbb{H}^*$ dir.

(ii) $e = 1 + j.0 \in \mathbb{H}_+^*$ olduğu açıktır. Gerçekten $\langle e, e \rangle = 1 > 0$ ve $\langle e, e \rangle \neq 0$ elde edilir. Buradan $e \in \mathbb{H}^*$ birim elemanıdır.

(iii) $xa = e, e \in \mathbb{H}^*$ ve $\langle x, x \rangle \neq 0$ olduğu için $x \in \mathbb{H}^*$ elemanının tersi vardır ki $a = x^{-1}$ ile gösterilebilir.

(i), (ii) ve (iii) den $\mathbb{H}_+^* \subset \mathbb{H}^*$ alt grup olduğu gösterilmiş olur.

Benzer şekilde $S(\mathbb{H}_+^*)$ in $\mathbb{H}^*$ nin alt grubu olduğunu gösterelim. $x, y \in S(\mathbb{H}_+^*)$ keyfi olsun. Bu takdirde $\langle x, x \rangle = 1 \neq 0$ ve $\langle y, y \rangle = 1 \neq 0$ dır.

(a) $\langle x, x \rangle = 1 \neq 0$ olduğundan dolayı $\langle x, x \rangle \neq 0$ olur. Böylece $x \in \mathbb{H}^*$ dir.

(b) $e = 1 \in S(\mathbb{H}_+^*)$ olduğu açıktır. Gerçekten $\langle e, e \rangle = 1$ ve $\langle e, e \rangle \neq 0$ elde edilir. Buradan $e \in \mathbb{H}^*$ birim elemanıdır.

(c) $xy = e, e \in \mathbb{H}^*$ ve $\langle x, x \rangle = 1 \neq 0$ olduğu için $x \in \mathbb{H}^*$ elemanının tersi vardır ki $y = x^{-1}$, $x^{-1} \in \mathbb{H}^*$ ile gösterilebilir.

(a), (b) ve (c) den $S(\mathbb{H}_+^*) \subset \mathbb{H}^*$ alt gruptur.

Not 2.1.2. $\mathbb{H}_+^* = \{\lambda x | \lambda \in \mathbb{R}, x \in S(\mathbb{H}_+^*)\}$ şeklinde de ifade edilebilir.

$z = a + jb \in \mathbb{H}_+^*$ olmak üzere $M_z^+ = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{\langle z, z \rangle}} & \frac{b}{\sqrt{\langle z, z \rangle}} \\ \frac{b}{\sqrt{\langle z, z \rangle}} & \frac{a}{\sqrt{\langle z, z \rangle}} \end{pmatrix}$ olarak tanımlayalım.

Önerme 2.1.2. $\forall z \in \mathbb{H}_+^*$ için $M_z = \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+$ ve $M_z^+ \in O^+(1,1)$ dir.

İspat: [13, Proposition 2]

$\{M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} | z = a + jb \in \mathbb{H}_+^*\}$ kümesini düşünelim. Bu kümeyi $LPSim^+(E_1^2)$

ile gösterelim.

$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ olmak üzere, (2) denkleminde $x = a + jb \in \mathbb{H}^*$ olmak üzere, x ile

W matrislerinin çarpma işlemi xW olsun. Bu durumda,

$\{M_z W | M_z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, z = a + jb \in \mathbb{H}_+^*\}$ kümesini alalım ve bu kümeyi $LPSim^-(E_1^2)$ ile gösterelim.

$LPSim^+(E_1^2) \cup LPSim^-(E_1^2)$ kümesini $LPSim(E_1^2)$ ile gösterelim.

Önerme 2.1.3.

(i) $LPSim(E_1^2)$ kümesi, matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur.

(ii) $LPSim^+(E_1^2)$ kümesi, matrislerde çarpma işlemine göre $LPSim(E_1^2)$ nin bir altgrubudur.

(iii) $LPSim^+(E_1^2) \cap LPSim^-(E_1^2) = \emptyset$ kümedir.

İspat: Önerme 2.1.1' den kolayca görülür.

Tanım 2.1.1.

$LPSim^+(E_1^2)$ grubuna E_1^2 , nin yönlendirmeyi koruyan tüm lineer pseudo-benzerlikler grubu denir.

Tanım 2.1.2.

$LPSim(E_1^2)$ grubuna E_1^2 nin tüm lineer pseudo-benzerlikler grubu denir.

Bu takdirde, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.1.1.

(i) $LPSim^+(E_1^2) = \{M_z: E_1^2 \rightarrow E_1^2 | z \in \mathbb{H}_+^*\} = \mathbb{H}_+^*$

(ii) $LPSim^-(E_1^2) = \{M_z W: E_1^2 \rightarrow E_1^2 | z \in \mathbb{H}_+^*\} = \mathbb{H}_+^* W$

(iii) $LPSim(E_1^2) = LPSim^+(E_1^2) \cup LPSim^-(E_1^2) = \mathbb{H}_+^* \cup \mathbb{H}_+^* W$

2.2. Lineer Pseudo-Benzerlik Grupları İçin Benzerlik Problemleri

$x_i, y_i \in E_1^2, i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ kümeleri m tane hiperbolik sayıdan (noktadan) oluşan iki sistem olsun.

$G = LPSim^+(E_1^2)$ veya $G = LPSim(E_1^2)$ olsun.

Tanım 2.2.1. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ E_1^2 de iki sistem olmak üzere, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $y_i = gx_i$ eşitliğini sağlayan $g \in G$ mevcut ise X ve Y sistemlerine G - benzer denir ve $X \stackrel{G}{\sim} Y$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. G bir grup ve $x_1, x_2, \dots, x_m \in E_1^2$ olmak üzere, $\forall g \in G$ için $F(gx_1, gx_2, \dots, gx_m) = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ise F' 'ye G -invariant fonksiyon denir.

Teorem 2.2.1. $x, y \in E_1^2, F: E_1^2 \times E_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

(i) $F(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}$ fonksiyonu $LPSim(E_1^2)$ – invarianttır.

(ii) $F(x, y) = \frac{[x y]}{\langle x, x \rangle}$ fonksiyonu $LPSim^+(E_1^2)$ – invarianttır.

(iii) $F(x, y) = \left(\frac{[x y]}{\langle x, x \rangle} \right)^2$ ve $F(x, y) = sgn\langle x, y \rangle$ fonksiyonları $LPSim(E_1^2)$ – invarianttır.

İspat:

(i) $g \in LPSim^+(E_1^2)$ olsun. Bu takdirde, Tanım 2.1.2 ve Teorem 2.1.1' den,

$\forall z \in \mathbb{H}_+^*$ ve $M_z^+ \in O^+(1,1)$ için $g = M_z = \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+$ şeklindedir. Bu takdirde,

$x \in \mathbb{H}$ için $gx = M_z x = \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ x$ dir. Bu eşitlik ve $M_z^+ \in O^+(1,1)$ kullanılarak,

$$\begin{aligned} F(gx, gy) &= \frac{\langle gx, gy \rangle}{\langle gx, gx \rangle} = \frac{\langle M_z x, M_z y \rangle}{\langle M_z x, M_z x \rangle} = \frac{\langle \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ x, \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ y \rangle}{\langle \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ x, \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ x \rangle} = \\ &= \frac{\langle z, z \rangle \langle M_z^+ x, M_z^+ y \rangle}{\langle z, z \rangle \langle M_z^+ x, M_z^+ x \rangle} = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} = F(x, y) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buradan $F(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}$ fonksiyonu $LPSim^+(E_1^2)$ invarianttır.

Şimdi $F(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}$ fonksiyonunun $LPSim^-(E_1^2)$ invariant olduğunu gösterelim.

Önceki bölümde, W dönüşümünün özelliğinden, $\forall x \in \mathbb{H}$ için $Wx = \bar{x}$ ve

$\langle Wx, Wy \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle x, y \rangle$ olduğunu hatırlayalım.

$g \in LPSim^-(E_1^2)$ olsun. Bu takdirde, Tanım 2.1.2 ve Teorem 2.1.1' den,

$\forall z \in \mathbb{H}_+^*$ ve $M_z^+ \in O^+(1,1)$ için $g = M_z W = \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ W$ şeklindedir. Bu takdirde, $x \in \mathbb{H}$ için

$gx = M_z Wx = \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ Wx$ dir. Bu eşitlik ve $M_z^+ W \in O^-(1,1)$ kullanılarak,

$$\begin{aligned} F(gx, gy) &= \frac{\langle gx, gy \rangle}{\langle gx, gx \rangle} = \frac{\langle M_z Wx, M_z Wy \rangle}{\langle M_z Wx, M_z Wx \rangle} = \frac{\langle \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ \bar{x}, \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ \bar{y} \rangle}{\langle \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ \bar{x}, \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ \bar{x} \rangle} = \\ &= \frac{\langle z, z \rangle \langle M_z^+ \bar{x}, M_z^+ \bar{y} \rangle}{\langle z, z \rangle \langle M_z^+ \bar{x}, M_z^+ \bar{x} \rangle} = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} = F(x, y) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buradan $F(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}$ fonksiyonu $LPSim^-(E_1^2)$ invaryanttır.

Böylece $F(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}$ fonksiyonu $LPSim^+(E_1^2)$ invaryant ve $LPSim^-(E_1^2)$

invaryant olduğundan $LPSim(E_1^2)$ invaryanttır.

(ii) $g \in LPSim^+(E_1^2)$ olsun. Bu takdirde, Tanım 2.1.2 ve Teorem 2.1.1' den,

$\forall z \in \mathbb{H}_+^*$ ve $M_z^+ \in O^+(1,1)$ için $g = M_z = \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+$ şeklindedir. Bu takdirde,

$x \in \mathbb{H}$ için $gx = M_z x = \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ x$ dir. Bu eşitlik ve $M_z^+ \in O^+(1,1)$ kullanılarak,

$$\begin{aligned} F(gx, gy) &= \frac{[gx \ gy]}{\langle gx, gx \rangle} = \frac{[M_z x \ M_z y]}{\langle M_z x, M_z x \rangle} = \frac{[\sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ x \ \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ y]}{\langle \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ x, \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ x \rangle} \\ &= \frac{\langle z, z \rangle \det M_z^+ [x \ y]}{\langle z, z \rangle \langle M_z^+ x, M_z^+ x \rangle} = \frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} = F(x, y) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buradan $F(x, y) = \frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle}$ fonksiyonu $LPSim^+(E_1^2)$ invaryanttır.

(iii) (ii)'den $\frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle}$ fonksiyonu $LPSim^+(E_1^2)$ invaryant olduğundan $\left(\frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle}\right)^2$ de

$LPSim^+(E_1^2)$ invaryanttır.

$g \in LPSim^-(E_1^2)$ olsun. (i) ve (ii) deki benzer durum kullanılarak,

$$\begin{aligned} F(gx, gy) &= \left(\frac{[gx \ gy]}{\langle gx, gx \rangle} \right)^2 = \left(\frac{\langle z, z \rangle \det M_z^+ W [x \ y]}{\langle z, z \rangle \langle M_z^+ x, M_z^+ x \rangle} \right)^2 \\ &= (\det M_z^+ W)^2 \left(\frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} \right)^2 = F(x, y) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buradan $F(x, y) = \left(\frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} \right)^2$ fonksiyonu $LPSim^-(E_1^2)$ - invaryanttır.

Böylece $F(x, y) = \left(\frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} \right)^2$ fonksiyonu $LPSim^+(E_1^2)$ - invaryant ve $LPSim^-(E_1^2)$

invaryant olduğundan $LPSim(E_1^2)$ -invaryanttır.

Benzer şekilde $F(x, y) = \operatorname{sgn}(\langle x, y \rangle)$ fonksiyonunun $LPSim^+(E_1^2)$ -invaryant olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F(gx, gy) &= \operatorname{sgn}(\langle gx, gy \rangle) = \operatorname{sgn}(\langle M_z x, M_z y \rangle) = \operatorname{sgn}(\langle \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ x, \sqrt{\langle z, z \rangle} M_z^+ y \rangle) \\ &= \operatorname{sgn}(\langle z, z \rangle \langle M_z^+ x, M_z^+ y \rangle) = \operatorname{sgn}(\langle z, z \rangle \langle x, y \rangle) = \operatorname{sgn}(\langle x, y \rangle) = F(x, y) \text{ dir.} \end{aligned}$$

olduğundan $F(x, y) = \text{sgn}(\langle x, y \rangle)$ fonksiyonu $LPSim^+(E_1^2)$ -invarianttır.

Benzer şekilde, $F(x, y) = \text{sgn}(\langle x, y \rangle)$ fonksiyonu $LPSim^-(E_1^2)$ -invariant olduğundan $F(x, y) = \text{sgn}(\langle x, y \rangle)$ fonksiyonu $LPSim(E_1^2)$ -invarianttır.

Not 2.2.1. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ iki sistem ve $x_1 \neq 0, y_1 = 0$ olsun. Bu durumda X ve Y sistemleri G -benzer değildir. $x_1 = 0, y_1 = 0$ durumunda, bu sistemlerin G -benzerlik problemleri $(m-1)$ tane noktadan oluşan $\{x_2, x_3, \dots, x_m\}, \{y_2, y_3, \dots, y_m\}$ sistemlerinin G -benzerlik problemlerine indirgenir. Bundan dolayı X ve Y sistemlerinin G -benzerlik problemlerini $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ durumunda incelemek gerekir.

Teorem 2.2.2. $x, y \in E_1^2$ ve $\langle x, x \rangle \neq 0, \langle y, y \rangle \neq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$x \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} y \Rightarrow \text{sgn}(\langle x, x \rangle) = \text{sgn}(\langle y, y \rangle) \quad (5)$$

dir.

Tersine, $\text{sgn}(\langle x, x \rangle) = \text{sgn}(\langle y, y \rangle)$ durumunda, $y = zx$ olacak şekilde bir tek $z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur ve $z \in LPSim^+(E_1^2)$ elemanının görüntüsü

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} & \frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} \\ \frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} & \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \end{pmatrix} \quad (6)$$

şeklindedir.

İspat:

$x \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} y$ olsun. Bu takdirde $y = zx$ olacak şekilde $z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur. Teorem 2.2.1' den $\text{sgn}(\langle x, x \rangle)$ fonksiyonu $LPSim^+(E_1^2)$ -invariant olduğundan $\text{sgn}(\langle x, x \rangle) = \text{sgn}(\langle y, y \rangle)$ eşitliği elde edilir.

Tersine, varsayalım ki $\text{sgn}(\langle x, x \rangle) = \text{sgn}(\langle y, y \rangle)$ olsun. $\langle x, x \rangle \neq 0$ olduğundan, Önerme 1.5.1. göre, $x^{-1} \in \mathbb{H}$ mevcut olup $yx^{-1} \in \mathbb{H}$ dir.

Şimdi $z = yx^{-1} \in \mathbb{H}$ elemanını alalım.

$y = y(x^{-1}x) = (yx^{-1})x$ olduğundan $y = zx$ tir. (2) eşitliğinden, $y = zx = M_z x$ tir.

Önerme 1.5.1 ve Teorem 2.1.1 den, $\det M_z = \frac{\langle x,y \rangle^2 - \langle x,y \rangle^2 + \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle}{\langle x,x \rangle^2}$ elde edilir.

Önerme 1.5.4' ten, $\det M_z = \frac{\langle y,y \rangle}{\langle x,x \rangle}$ elde edilir. $\operatorname{sgn}(\langle x,x \rangle) = \operatorname{sgn}(\langle y,y \rangle)$ eşitliğinden

$\det M_z > 0$ ve Teorem 2.1.1 ile $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ dir. Böylece, $x \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} y$ dir.

Şimdi, $y = zx = M_z x$ eşitliğini sağlayan $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ in tekliğini ispatlayalım. Varsayalım $y = M_z x$ eşitliğini sağlayan $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcut olsun. Bu takdirde, (2) eşitliği ve Teorem 2.1.1' den $M_z = M_w$ olan bir tek $w \in \mathbb{H}_+^*$ mevcuttur. Buradan, $y = M_w x$ elde edilir. (2) eşitliğinden $y = wx$ elde edilir. $\langle x,x \rangle \neq 0$ olduğundan, $y = wx$ eşitliğinden $w = yx^{-1} = z \in \mathbb{H}_+^*$ dir. Böylece teklik ispatlandı.

Şimdi $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ ' nin görüntüsünü elde edelim. Önerme 1.5.2' den

$$z = yx^{-1} = \frac{\langle x,y \rangle}{\langle x,x \rangle} + j \frac{[x y]}{\langle x,x \rangle} \text{ ve (6) denklemindeki gibi } z = M_z \text{ şeklindedir.}$$

Örnek 2.2.1. $x = (2,3)$, $y = (11,14) \in E_1^2$ ve $M_z = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in LPSim^+(E_1^2)$ olsun.

Açıkça, $\langle x,x \rangle = -5 \neq 0$ ve $\langle y,y \rangle = -75 \neq 0$ dir. Buradan $\begin{pmatrix} 11 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ olduğundan $x \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} y$ dir.

Örnek 2.2.2. $x, y \in E_1^2$ ve $\langle x,x \rangle \neq 0, \langle y,y \rangle \neq 0$ olan

$x = (1, -2), y = (-2, -5) \in E_1^2$ elemanlarını alalım. $x \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} y$ olduğunu gösterelim.

$\operatorname{sgn}(\langle x,x \rangle) = \operatorname{sgn}(-3) = -1$ ve $\operatorname{sgn}(\langle y,y \rangle) = \operatorname{sgn}(-21) = -1$ olduğundan $\operatorname{sgn}(\langle x,x \rangle) = \operatorname{sgn}(\langle y,y \rangle)$ dir. Bu durumda, Teorem 2.2.2 deki (5) eşitliği sağlandığından $x \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} y$ dir. Dahası $y = M_z x$ olan $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ nin görüntüsü

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle x,y \rangle}{\langle x,x \rangle} & \frac{[x y]}{\langle x,x \rangle} \\ \frac{[x y]}{\langle x,x \rangle} & \frac{\langle x,y \rangle}{\langle x,x \rangle} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ olarak elde edilir.}$$

Not 2.2.2. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ sistemi m tane noktadan (hiperbolik sayıdan) oluşan bozulmamış bir sistem olsun. X sistemi bozulmamış olduğundan $\langle x_i, x_i \rangle = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1$ ve $\langle x_k, x_k \rangle \neq 0, k = 1, 2, \dots, m$ olan $k \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $p(X) = k$ olarak gösterilecektir. Örneğin, $\langle x_1, x_1 \rangle \neq 0$ durumunda, $p(X) = 1$ dir. Dahası, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ iki sistem olmak üzere, $X \stackrel{G}{\sim} Y$ ise $p(X) = p(Y)$ dir. Açıkça $p(X)$ fonksiyonu X in bir G -invariantıdır.

Teorem 2.2.3. $m > 1$ için $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ kümeleri E_1^2 'de iki sistem ve $\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle \neq 0, \langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle \neq 0$ olsun.

Bu takdirde, $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için

$$X \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} Y \Rightarrow \begin{cases} p(X) = p(Y) \\ sgn(\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle) = sgn(\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle) \\ \frac{\langle x_{P(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} = \frac{\langle y_{P(Y)}, y_i \rangle}{\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle} \\ \frac{[x_{P(X)} x_i]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} = \frac{[y_{P(Y)} y_i]}{\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle} \end{cases} \quad (7)$$

dir.

Tersine, varsayalım (7) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, $y_i = M_z x_i, i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ elemanının görüntüsü

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle x_{P(X)}, y_{P(X)} \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} & \frac{[x_{P(X)} y_{P(X)}]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} \\ \frac{[x_{P(X)} y_{P(X)}]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} & \frac{\langle x_{P(X)}, y_{P(X)} \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} \end{pmatrix} \quad (8)$$

şeklindedir.

İspat: $X \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} Y$ olsun. Bu takdirde $y_i = z x_i, i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur. Teorem 2.2.1' den, $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için $sgn(\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle), \frac{\langle x_{P(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle}, \frac{[x_{P(X)} x_i]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle}$ ve $p(X)$ fonksiyonları $LPSim^+(E_1^2)$ -invariant olduğundan (7) deki eşitlikler sağlanır.

Tersine, varsayalım ki (7) deki eşitlikler sağlansın. $\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle \neq 0$ olduğundan, Önerme 1.5.1 göre, $x_{P(X)}^{-1} \in \mathbb{H}$ mevcut olup $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için $x_i x_{P(X)}^{-1} = \frac{\langle x_{P(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} + j \frac{[x_{P(X)} x_i]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle}$ dir.

Bu eşitlik ve (7) deki eşitliklerden $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için

$$x_i x_{P(X)}^{-1} = y_i y_{P(Y)}^{-1} \quad (9)$$

elde edilir.

Şimdi $z = y_{P(Y)}x_{P(X)}^{-1} \in \mathbb{H}$ elemanını alalım.

$y_{P(Y)} = y_{P(Y)}(x_{P(X)}^{-1}x_{P(X)}) = (y_{P(Y)}x_{P(X)}^{-1})x_{P(X)}$ ve $p(X) = p(Y)$ olduğundan $y_{P(X)} = zx_{P(X)}$ tir.

(9) eşitliği ve $p(X) = p(Y)$ eşitliğinden $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için $y_{P(X)}(x_i x_{P(X)}^{-1}) = y_{P(X)}(y_i y_{P(Y)}^{-1})$ elde edilir.

Bu eşitlikten $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için

$y_i = (y_{P(X)}y_{P(X)}^{-1})y_i = y_{P(X)}(y_{P(X)}^{-1}y_i) = y_{P(X)}(x_{P(X)}^{-1}x_i) = (y_{P(X)}x_{P(X)}^{-1})x_i = zx_i$ elde edilir.

Böylece, $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ ve $z = y_{P(X)}x_{P(X)}^{-1} \in \mathbb{H}$ için $y_i = zx_i$ elde edilir. (2) eşitliğinden, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $y_i = M_z x_i$ tir.

Önerme 1.5.1, Teorem 2.1.1, Önerme 1.5.4 ve $p(X) = p(Y)$ eşitliğinden, $\det M_z = \frac{\langle y_{P(X)}, y_{P(X)} \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle}$ elde edilir. $\operatorname{sgn}(\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle) = \operatorname{sgn}(\langle y_{P(X)}, y_{P(X)} \rangle)$ eşitliğinden $\det M_z > 0$ ve Teorem 2.1.1 ile $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ dir. Böylece, $X \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} Y$ dir.

Şimdi, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $y_i = M_z x_i$ eşitliğini sağlayan $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ 'in tekliğini ispatlayalım. Varsayalım $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $y_i = zx_i$ eşitliğini sağlayan $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcut olsun. Bu takdirde, (2) eşitliği ve Teorem 2.1.1' den $M_z = M_w$ olan bir tek $w \in \mathbb{H}_+^*$ mevcuttur. Buradan, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $y_i = M_w x_i$ elde edilir. (2) eşitliğinden $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $y_i = wx_i$ elde edilir. $\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle \neq 0$ olduğundan, $y_{P(X)} = wx_{P(X)}$ eşitliğinden $w = yx_{P(X)}^{-1} = z \in \mathbb{H}_+^*$ dir. Böylece teklik ispatlandı.

Şimdi $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ nin görüntüsünü elde edelim. Önerme 1.5.2' den

$$z = y_{P(X)}x_{P(X)}^{-1} = \frac{\langle x_{P(X)}, y_{P(X)} \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} + j \frac{[x_{P(X)} y_{P(X)}]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} \text{ olduğunda } M_z \text{ matrisi (8)'deki gibidir.}$$

Örnek 2.2.3. $X = \{x_1 = (1,1), x_2 = (1,2), x_3 = (1,-1)\}$ ve

$Y = \{y_1 = (1,1), y_2 = (-2,5), y_3 = (7,-7)\}$ sistemlerini ve

$M_z = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \in LPSim^+(E_1^2)$ alalım. Gerçekten $M_z = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \in LPSim^+(E_1^2)$ ve

$\forall i = 1, 2, 3$ için $y_i = M_z x_i$ olduğundan $X \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} Y$ dir.

Örnek 2.2.4. $X = \{x_1 = (1,1), x_2 = (1,2), x_3 = (1,-1)\}$ ve

$Y = \{y_1 = (1,1), y_2 = (-2,5), y_3 = (7,-7)\}$ sistemlerini alalım ve $X \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} Y$ olduğunu gösterelim.

Gerçekten, bu sistemlerde $p(X) = p(Y)=2$ olduğundan, $\langle x_2, x_2 \rangle \neq 0$ ve $\langle y_2, y_2 \rangle \neq 0$ dir. (7) eşitlikleri aşağıdaki gibi sağlanmaktadır.

$$\begin{aligned}
 p(X) &= p(Y) = 2 \\
 sgn(\langle x_2, x_2 \rangle) &= sgn(\langle y_2, y_2 \rangle) = -1 \\
 \frac{\langle x_2, x_1 \rangle}{\langle x_2, x_2 \rangle} &= \frac{\langle y_2, y_1 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} = \frac{1}{3} \\
 \frac{\langle x_2, x_3 \rangle}{\langle x_2, x_2 \rangle} &= \frac{\langle y_2, y_3 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} = -1 \\
 \frac{[x_2 \ x_1]}{\langle x_2, x_2 \rangle} &= \frac{[y_2 \ y_1]}{\langle y_2, y_2 \rangle} = \frac{1}{3} \\
 \frac{[x_2 \ x_3]}{\langle x_2, x_2 \rangle} &= \frac{[y_2 \ y_3]}{\langle y_2, y_2 \rangle} = 1
 \end{aligned}$$

Bu durumda $X \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} Y$ dir. Dahası (7) eşitliklerinin sağlandığı durumda, $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ elemanının görüntüsü (8) eşitliğinde ki gibidir. Yani,

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle x_2, y_2 \rangle}{\langle x_2, x_2 \rangle} & \frac{[x_2 \ y_2]}{\langle x_2, x_2 \rangle} \\ \frac{[x_2 \ y_2]}{\langle x_2, x_2 \rangle} & \frac{\langle x_2, y_2 \rangle}{\langle x_2, x_2 \rangle} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ tür.}$$

Teorem 2.2.4. $x, y \in E_1^2$ ve $\langle x, x \rangle \neq 0, \langle y, y \rangle \neq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$x \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} y \Rightarrow sgn(\langle x, x \rangle) = sgn(\langle y, y \rangle) \quad (10)$$

dir.

Tersine, $sgn(\langle x, x \rangle) = sgn(\langle y, y \rangle)$ durumunda, $y = M_z x$ olacak şekilde $M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim(E_1^2)$ elemanının görüntüsü (6) de ki gibidir.

İspat:

$x \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} y$ olsun. Bu takdirde $y = M_z x$ olacak şekilde $M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur. Teorem 2.2.1' den $sgn(\langle x, x \rangle)$ fonksiyonu $LPSim(E_1^2)$ -invariant olduğundan $sgn(\langle x, x \rangle) = sgn(\langle y, y \rangle)$ eşitliği elde edilir.

Tersine, varsayalım ki $sgn(\langle x, x \rangle) = sgn(\langle y, y \rangle)$ olsun. Bu takdirde Teorem 2.2.2' den $y = M_z x$ olacak şekilde $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur. Ancak,

$M_z \in LPSim^+(E_1^2) \subset LPSim(E_1^2)$ olduğundan $x \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} y$ elde edilir. $\langle x, x \rangle \neq 0$ olduğundan, Önerme 1.5.1'e göre, $x^{-1} \in \mathbb{H}$ mevcut olup $yx^{-1} \in \mathbb{H}$ dir. Şimdi $z = yx^{-1} \in \mathbb{H}$ elemanını alalım. (2) eşitliğinden, $zx = M_z x$ tir. Teorem 2.2.2' den, M_z nin görüntüsü (6) ifadesinde verilmiştir.

Not 2.2.3.

E_1^2 ' de $1 = (1, 0)$ elemanını düşünelim. Bu eleman matris biçiminde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ yazılabilir. Bu takdirde, $I \in LPSim^+(E_1^2)$ ve $W \in LPSim(E_1^2)$ olmak üzere,

$1 = I1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $1 = W1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dır. Bundan dolayı $y = M_z x$ eşitliğini sağlayan $z \in LPSim(E_1^2)$ ' nin teklik özelliği $LPSim(E_1^2)$ grubu için doğru değildir.

E_1^2 ' de $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ m tane noktadan oluşan bir sistem olsun. Bu sistemin rankı $r(X)$ ile gösterilecektir. Açıkça $r(X)$, X in bir $LPSim(E_1^2)$ -invariantıdır.

Teorem 2.2.5.

$m > 1$ için $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ kümeleri E_1^2 'de iki sistem ve $\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle \neq 0, \langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle \neq 0, r(X) = r(Y) = 1$ olsun. Bu takdirde, $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için

$$X \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} Y \Rightarrow \begin{cases} p(X) = p(Y) \\ sgn(\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle) = sgn(\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle) \\ \frac{\langle x_{p(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle y_{p(Y)}, y_i \rangle}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \end{cases} \quad (11)$$

dir.

Tersine, varsayalım (11) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, $y_i = M_z x_i, i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim(E_1^2)$ elemanının görüntüsü (8) ifadesinde verilmiştir.

İspat: $X \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} Y$ olsun. Bu takdirde $y_i = M_z x_i, i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur. Teorem 2.2.1' den, $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için $sgn(\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle), \frac{\langle x_{p(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle}$ ve $p(X)$ fonksiyonları $LPSim(E_1^2)$ -invariant olduğundan (11) deki eşitlikler sağlanır.

Tersine, varsayalım ki (11) deki eşitlikler sağlansın. $r(X) = r(Y) = 1$ olduğundan $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için $\frac{[x_{p(X)}, x_i]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{[y_{p(X)}, y_i]}{\langle y_{p(X)}, y_{p(X)} \rangle} = 0$ dır. Bu durumda Teorem 2.2.3' de ki (7) eşitlikleri sağlanır. Bu takdirde Teorem 2.2.3'ten, $y_i = M_z x_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur. Ancak, $M_z \in LPSim^+(E_1^2) \subset LPSim(E_1^2)$ olduğundan $X \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} Y$ elde edilir. $\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle \neq 0$ olduğundan, Önerme 1.5.1 göre, $x_{p(X)}^{-1} \in \mathbb{H}$ mevcut olup $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için $x_i x_{p(X)}^{-1} \in \mathbb{H}$ dir. Şimdi $z = y_{p(X)} x_{p(X)}^{-1} \in \mathbb{H}$ elemanını alalım. (2) eşitliğinden, $y = zx = M_z x$ tir. Teorem 2.2.3' den, M_z nin görüntüsü (8) deki gibidir.

$m > 1$ durumunda E_1^2 de m tane noktadan oluşan bir sistem $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ olsun. Varsayalım $r(X) = 2$ olsun. Bu durumda $x_{p(X)}$ ile üretilen E_1^2 nin lineer alt uzayını $\{\lambda x_{p(X)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ile gösterelim. $1 \leq s \leq m$ olmak üzere $x_s \notin \{\lambda x_{p(X)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ olan s sayısının en küçük değerini $q(X)$ ile gösterelim. Açıkça $q(X)$ sayısı, X in bir $LPSim(E_1^2)$ -invariantıdır.

Teorem 2.2.6.

$m > 1$ için $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ kümeleri E_1^2 , de iki sistem ve $\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle \neq 0, \langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle \neq 0, r(X) = r(Y) = 2$ olsun.

Bu takdirde, $\forall i, k = 1, 2, \dots, m; k \neq p(X), k \neq q(X)$ için

$$X \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} Y \Rightarrow \begin{cases} p(X) = p(Y) \\ q(X) = q(Y) \\ sgn(\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle) = sgn(\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle) \\ \left(\frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \right)^2 \\ \frac{\langle x_{p(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle y_{p(Y)}, y_i \rangle}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \\ \frac{[x_{p(X)} x_k]}{[x_{p(X)} x_{q(X)}]} = \frac{[y_{p(Y)} y_k]}{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]} \end{cases} \quad (12)$$

dir.

Tersine, varsayalım (12) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, $y_i = M_z x_i, i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim(E_1^2)$ elemanının görüntüsü için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

$$(i) \frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \text{ durumunda, } M_z \in LPSim^+(E_1^2) \text{ ve } M_z \text{ elemanının}$$

görüntüsü (6) ifadesinde verilmiştir.

$$(ii) \frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = -\frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \text{ durumunda, } M_z \in LPSim^-(E_1^2) \text{ ve } M_z \text{ elemanının}$$

görüntüsü

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle \overline{x_{p(X)}}, y_{p(X)} \rangle}{\langle \overline{x_{p(X)}}, \overline{x_{p(X)}} \rangle} & -\frac{[\overline{x_{p(X)}} y_{p(X)}]}{\langle \overline{x_{p(X)}}, \overline{x_{p(X)}} \rangle} \\ \frac{[\overline{x_{p(X)}} y_{p(X)}]}{\langle \overline{x_{p(X)}}, \overline{x_{p(X)}} \rangle} & -\frac{\langle \overline{x_{p(X)}}, y_{p(X)} \rangle}{\langle \overline{x_{p(X)}}, \overline{x_{p(X)}} \rangle} \end{pmatrix} \quad (13)$$

şeklindedir.

İspat: $X \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} Y$ olsun. Bu takdirde $y_i = M_z x_i, i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur. Teorem 2.2.1' den, $\forall i, k = 1, 2, \dots, m; k \neq p(X)$,

$k \neq q(X)$ için $p(X), q(X), sgn(\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle), \left(\frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} \right)^2, \frac{\langle x_{p(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle}$ ve $\frac{[x_{p(X)} x_k]}{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}$ fonksiyonları $LPSim(E_1^2)$ -invariant olduğundan (12)' deki eşitlikler sağlanır.

Tersine, varsayalım ki (12)' deki eşitlikler sağlansın. $r(X) = r(Y) = 2$ ve $p(X), q(X)$ sayılarının tanımı kullanılarak, $[x_{p(X)} x_{q(X)}] \neq 0$ ve $[y_{p(Y)} y_{q(Y)}] \neq 0$ dır.

Dahası $\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle \neq 0, \langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle \neq 0$ olduğundan $\frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} \neq 0$ ve $\frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \neq$

0 dır. Buradan $\left(\frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \right)^2$ eşitliğinden $\frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle}$ veya

$\frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = -\frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle}$ elde edilir.

$$(i) \frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \text{ durumunu alalım. Bu takdirde } p(X) = p(Y) \text{ ve}$$

$q(X) = q(Y)$ eşitliklerinden $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $\frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle}$,

$\frac{\langle x_{p(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle y_{p(Y)}, y_i \rangle}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle}$ ve $\forall k = 1, 2, \dots, m; k \neq p(X), k \neq q(X)$ için

$\frac{[x_{P(X)} x_k]}{[x_{P(X)} x_{q(X)}]} = \frac{[y_{P(Y)} y_k]}{[y_{P(Y)} y_{q(Y)}]}$ eşitlikleri sağlanır. $\forall k = 1, 2, \dots, m; k \neq p(X), k \neq q(X)$ için

$\frac{[x_{P(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} = \frac{[y_{P(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle}$ ve $\frac{[x_{P(X)} x_k]}{[x_{P(X)} x_{q(X)}]} = \frac{[y_{P(Y)} y_k]}{[y_{P(Y)} y_{q(Y)}]}$ eşitliklerinden

$\frac{[x_{P(X)} x_k]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} = \frac{[y_{P(X)} y_k]}{\langle y_{P(X)}, y_{P(X)} \rangle}, \forall k = 1, 2, \dots, m, k \neq p(X)$ elde edilir. Böylece teorem 2.2.3'teki

(7) eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla Teorem 2.2.3'e göre $y_i = M_z x_i, i = 1, 2, \dots, m$ olan bir tek $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur ve M_z nin görüntüsü (8) şeklindedir.

(ii) $\frac{[x_{P(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} = -\frac{[y_{P(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle}$ durumunu alalım. Bu eşitlikten

$\frac{[y_{P(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle} = -\frac{[x_{P(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle}$ şeklinde yazılabilir. $p(X) = p(Y)$ ve $q(X) = q(Y)$

eşitliklerinden $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $\frac{[x_{P(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} = -\frac{[y_{P(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle}$ ve $\forall k = 1, 2, \dots, m;$

$k \neq p(X), k \neq q(X)$ için $\frac{[x_{P(X)} x_k]}{[x_{P(X)} x_{q(X)}]} = \frac{[y_{P(Y)} y_k]}{[y_{P(Y)} y_{q(Y)}]}$ eşitliklerinden $\frac{[x_{P(X)} x_k]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} =$

$-\frac{[y_{P(Y)} y_k]}{\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle}$ elde edilir. Bu son eşitlik $\frac{[y_{P(Y)} y_k]}{\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle} = -\frac{[x_{P(X)} x_k]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} = \frac{[Wx_{P(X)} Wx_k]}{\langle Wx_{P(X)}, Wx_{P(X)} \rangle}$

şeklinde yazılabilir. Ancak $Wx_{P(X)} = \overline{x_{P(X)}}$ olduğundan $\frac{[x_{P(X)} x_k]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} = \frac{[Wx_{P(X)} Wx_k]}{\langle Wx_{P(X)}, Wx_{P(X)} \rangle}$

yazılabilir. Bu durumda teoremin ispatı (i) durumunun koşulları sağlayan $WX = \{Wx_1, Wx_2, \dots, Wx_m\}$ ile $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ sistemlerinin benzerlik problemine dönüşür.

(i) durumunda, $y_i = U_z(Wx_i) = (U_z W)x_i, i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $U_z \in LPSim^+(E_1^2)$ matrisi vardır ve $M_z = U_z W$ matrisinin görüntüsü (11) şeklindeki gibi elde edilir.

Örnek 2.2.5. $X = \{x_1 = (2,1), x_2 = (1,2), x_3 = (1,-1)\}$ ve

$Y = \{y_1 = (3,0), y_2 = (0,-3), y_3 = (3,3)\}$ sistemlerini ve $M_z = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in LPSim(E_1^2)$

alalım. Gerçekten $M_z = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in LPSim^-(E_1^2)$ için $\forall i = 1, 2, 3$ için $y_i = M_z x_i$

olduğundan $X \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} Y$ dir.

Örnek 2.2.6. $X = \{x_1 = (2,1), x_2 = (1,2), x_3 = (1,-1)\}$ ve

$Y = \{y_1 = (3,0), y_2 = (0,-3), y_3 = (3,3)\}$ sistemlerini alalım ve $X \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} Y$ olduğunu

gösterelim.

Gerçekten, bu sistemlerde $p(X) = p(Y) = 1$ olduğundan, $\langle x_1, x_1 \rangle \neq 0$ ve $\langle y_1, y_1 \rangle \neq 0$ dir. Dahası $r(X) = r(Y) = 2$ dir. (12) eşitlikleri aşağıdaki gibi sağlanır.

$$\begin{aligned}
p(X) &= p(Y) = 1 \\
q(X) &= q(Y) = 2 \\
sgn(\langle x_1, x_1 \rangle) &= sgn(\langle y_1, y_1 \rangle) = 1 \\
\left(\frac{[x_{P(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} \right)^2 &= \left(\frac{[y_{P(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle} \right)^2 = 1 \\
\frac{\langle x_{P(X)}, x_2 \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} &= \frac{\langle y_{P(Y)}, y_2 \rangle}{\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle} = 0 \\
\frac{[x_{P(X)} x_3]}{[x_{P(X)} x_{q(X)}]} &= \frac{[y_{P(Y)} y_3]}{[y_{P(Y)} y_{q(Y)}]} = -1 \\
\frac{\langle x_{P(X)}, x_3 \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} &= \frac{\langle y_{P(Y)}, y_3 \rangle}{\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle} = 1
\end{aligned}$$

Buradan $X \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} Y$ dir ve (10) eşitliklerinin sağlandığı durumda ve

$$\frac{[x_{P(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} = -\frac{[y_{P(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle} \text{ eşitliğinden } M_Z \in LPSim(E_1^2) \text{ elemanının görüntüsü (13)}$$

eşitliğindeki gibidir. Yani,

$$M_Z = \begin{pmatrix} \frac{\langle \overline{x_{P(X)}}, y_{P(X)} \rangle}{\langle \overline{x_{P(X)}}, \overline{x_{P(X)}} \rangle} & -\frac{[\overline{x_{P(X)}} y_{P(X)}]}{\langle \overline{x_{P(X)}}, \overline{x_{P(X)}} \rangle} \\ \frac{[\overline{x_{P(X)}} y_{P(X)}]}{\langle \overline{x_{P(X)}}, \overline{x_{P(X)}} \rangle} & -\frac{\langle \overline{x_{P(X)}}, y_{P(X)} \rangle}{\langle \overline{x_{P(X)}}, \overline{x_{P(X)}} \rangle} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dir.

2.3. Bézier Eğrilerinin Lineer Pseudo-Benzerlik Grupları İçin Benzerlik Problemleri

$I = (a, b)$ aralığı $\mathbb{R}$ nin bir açık alt aralığı ve $x: I \rightarrow E_1^2$ dönüşümü $C^{(1)}$ -sınıfından olsun.

Tanım 2.3.1.

$C^{(1)}$ -sınıfından $x: I \rightarrow E_1^2$ dönüşümüne E_1^2 'de bir parametrik eğri denir.

$G = LPSim^+(E_1^2)$ veya $G = LPSim(E_1^2)$ olsun.

Not 2.3.1. $x(t)$, E_1^2 ' de bir parametrik eğri ise $\forall F \in G$ için $Fx(t)$ de E_1^2 ' de bir parametrik eğridir.

Tanım 2.3.2. E_1^2 'de $x(t)$ ve $y(t)$ aynı I aralığında tanımlı iki parametrik eğri olmak üzere, $\forall t \in I$ için $y(t) = Fx(t)$ olacak şekilde $F \in G$ mevcutsa $x(t)$ ve $y(t)$ eğrilerine G -benzer denir ve $x \sim^G y$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.3. E_1^2 'de $x(t)$ bir parametrik eğri olmak üzere, $\forall t \in I$ için $\langle x(t), x(t) \rangle \neq 0$ ise bu eğriye L-pseudo regüler parametrik eğri denir.

Örnek 2.3.1. E_1^2 'de $I = (0,1)$ için $x(t) = (t, t^2)$ parametrik eğrisini alalım. Açıkça, $\forall t \in (0,1)$ için $\langle x(t), x(t) \rangle = t^2 - t^4 \neq 0$ olduğundan bu eğri L-pseudo regüler parametrik eğridir.

Örnek 2.3.2. E_1^2 'de $I = (0,2)$ için $x(t) = (t, t^2)$ parametrik eğrisini alalım. Açıkça, $I = (0,2)$ aralığındaki $t = 1$ için $\langle x(1), x(1) \rangle = 0$ olduğundan bu eğri L-pseudo regüler parametrik eğri değildir.

Tanım 2.3.4. E_1^2 'de $I = [0,1]$ olmak üzere, $C^{(1)}$ -sınıfından $x: I \rightarrow E_1^2$, $x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{i,m}(t)$ şeklinde tanımlı parametrik eğriye m . dereceden Bézier eğrisi denir.

Burada $b_0, b_1, \dots, b_m \in E_1^2$ noktalarına Bézier eğrisinin kontrol noktaları ve $B_{i,m}(t)$ fonksiyonlarına da Bernstein taban polinomları denir.

Tanım 2.3.5. E_1^2 'de $I = [0,1]$ olmak üzere, $C^{(1)}$ -sınıfından $x: I \rightarrow E_1^2$, $x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{i,m}(t)$ şeklinde m . dereceden Bézier eğrisi olmak üzere, $\forall t \in I$ için $\langle x(t), x(t) \rangle \neq 0$ ise bu eğriye L-pseudo regüler Bézier eğrisi denir.

Örnek 2.3.3. Kontrol noktaları $b_0 = (1,2), b_1 = (1,1), b_2 = (2,1) \in E_1^2$ olan 2. dereceden $x(t) = \sum_{i=0}^2 b_i B_{i,2}(t)$ Bézier eğrisini alalım. Bu eğri $x(t) = b_0(1-t)^2 + b_1 2t(1-t) + b_2 t^2 = (t^2 + 1, t^2 - 2t + 2)$ şeklindedir.

$\langle x(t), x(t) \rangle = (2t-1)(2t^2 - 2t + 3)$ tür. Ancak $\forall t \in I = [0,1]$ için $\langle x(t), x(t) \rangle \neq 0$ değildir. Açıkça $t = \frac{1}{2}$ için $\langle x(\frac{1}{2}), x(\frac{1}{2}) \rangle = 0$ olduğundan bu eğri L-pseudo regüler Bézier eğrisi değildir.

Örnek 2.3.4. Kontrol noktaları $b_0 = (1,0), b_1 = (\frac{3}{2}, 0), b_2 = (2,1) \in E_1^2$ olan 2. dereceden $x(t) = \sum_{i=0}^2 b_i B_{i,2}(t)$ Bézier eğrisini alalım. Bu eğri $x(t) = b_0(1-t)^2 + b_1 2t(1-t) + b_2 t^2 = (t+1, t^2)$ şeklindedir.

$\langle x(t), x(t) \rangle = (2t+1)$ ve $\forall t \in I = [0,1]$ için $\langle x(t), x(t) \rangle \neq 0$ dır. Açıkça bu eğri L-pseudo regüler Bézier eğrisidir.

Teorem 2.3.1. E_1^2 de m . dereceden Bézier eğrisi $x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{i,m}(t)$ olsun. Bu taktirde,

(i) $x(0) = b_0$ ve $x(1) = b_m$ dir.

(ii) $x'(0) = m(b_1 - b_0)$ ve $x'(1) = m(b_m - b_0)$ dir.

(iii) $F \in G$ için $Fx(t) = F(\sum_{i=0}^m b_i B_{i,m}(t)) = \sum_{i=0}^m F(b_i) B_{i,m}(t)$ dir.

İspat: [18].

Önerme 2.3.1. E_1^2 , de m . dereceden Bézier eğrisi $x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{i,m}(t)$ L-pseudo regüler Bézier eğrisi ise $\langle b_0, b_0 \rangle \neq 0$ ve $\langle b_m, b_m \rangle \neq 0$ dir.

İspat:

$x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{i,m}(t)$ L-pseudo regüler Bézier eğrisi olsun. Bu taktirde, Tanım 2.3.4'ten $\forall t \in I$ için $\langle x(t), x(t) \rangle \neq 0$ dir. Teorem 2.3.1'den $x(0) = b_0$ ve $x(1) = b_m$ dir.

Bu durumda, $\langle x(0), x(0) \rangle = \langle b_0, b_0 \rangle \neq 0$ ve $\langle x(1), x(1) \rangle = \langle b_m, b_m \rangle \neq 0$ dir.

Tanım 2.3.6. E_1^2 'de $I = [0,1]$ olmak üzere, $C^{(1)}$ -sınıfından $x: I \rightarrow E_1^2$, $x(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i$ şeklinde tanımlı parametrik eğriye m . dereceden polinom eğrisi denir. Burada $a_0, a_1, \dots, a_m \in E_1^2$ noktalarına polinom eğrisinin kontrol noktaları denir.

Tanım 2.3.7. E_1^2 , de $I = [0,1]$ olmak üzere, $C^{(1)}$ -sınıfından $x: I \rightarrow E_1^2$, $x(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i$ şeklinde m . dereceden polinom eğrisi olmak üzere, $\forall t \in I$ için $\langle x(t), x(t) \rangle \neq 0$ ise bu eğriye L-pseudo regüler polinom eğrisi denir.

Örnek 2.3.4. Kontrol noktaları $a_0 = (2,2), a_1 = (1,4), a_2 = (2,1) \in E_1^2$ olan 2. dereceden $x(t) = \sum_{i=0}^2 a_i t^i$ polinom eğrisini alalım. Bu eğri $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = (2t^2 + t + 2, t^2 + 4t + 2)$ şeklindedir. $\langle x(t), x(t) \rangle = (t^2 - 3t)(3t^2 + 5t + 4)$ tür. Ancak $\forall t \in I = [0,1]$ için $\langle x(t), x(t) \rangle \neq 0$ değildir. Açıkça $t = 0$ için $\langle x(0), x(0) \rangle = 0$ olduğundan bu eğri L-pseudo regüler polinom eğrisi değildir.

Önerme 2.3.2. E_1^2 , de m . dereceden polinom eğrisi $x(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i$ L-pseudo regüler polinom eğrisi ise $\langle a_0, a_0 \rangle \neq 0$ dir.

İspat:

$x(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i$ L-pseudo regüler polinom eğrisi olsun. Bu taktirde, Tanım 2.3.6'dan $\forall t \in I$ için $\langle x(t), x(t) \rangle \neq 0$ dir. $t = 0$ için $x(0) = a_0$ dir. Bu durumda Tanım 2.3.6 kullanılarak, $\langle x(0), x(0) \rangle = \langle a_0, a_0 \rangle \neq 0$ dir.

Bézier ve polinom eğrilerin kontrol noktaları arasındaki ilişki aşağıdaki lemma [19]'da verilmiştir.

Lemma 2.3.1. $\forall i = 1, 2, \dots, m$ ve $i \geq j$ için

$$a_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \frac{m!}{i! (m-i)!} \frac{i!}{j! (i-j)!} b_j$$

dir.

Not 2.3.2. Bu lemmaya göre, tüm polinom eğriler Bézier eğri formunda ifade edilebilir.

Önerme 2.3.3. $x(t)$, m .dereceden bir Bézier eğrisi ve $y(t)$, k .dereceden bir Bézier eğrisi olmak üzere $x(t) \stackrel{G}{\sim} y(t)$ ise $m = k$ dır.

İspat: $x(t) \stackrel{G}{\sim} y(t)$ olsun. Bu takdirde $y(t) = Fx(t)$ olacak şekilde $F \in G$ vardır. Varsayalım $m \neq k$ olsun. Bunun için iki durum söz konusudur. $m < k$ veya $m > k$ durumları söz konusu olur.

(i) $m < k$ olsun. $x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{i,m}(t)$ ve $y(t) = \sum_{i=0}^k c_i B_{i,k}(t)$ ve $Fx(t) = y(t)$ olduğu için $Fx(t) = F\left(\sum_{i=0}^m b_i B_{i,m}(t)\right) = \sum_{i=0}^m F b_i B_{i,m}(t) = \sum_{i=0}^k c_i B_{i,k}(t)$ eşitliğinden ve $m < k$ olduğu için $F(b_i) = c_i, i = 1, \dots, m, F(0) = c_j, j = m+1, \dots, k$ dir. $y(t)$, k . dereceden ve $m < k$ olduğu için $c_j \neq 0$ olan bir $k \geq j > m$ sayısı vardır. Ancak $F(0) = c_j, j = m+1, \dots, k$ için $c_j = 0$ durumu ile çelişir.

(ii) $m > k$ olsun. $x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{i,m}(t)$ ve $y(t) = \sum_{i=0}^k c_i B_{i,k}(t)$ ve $Fx(t) = y(t)$ olduğu için $Fx(t) = \sum_{i=0}^k c_i B_{i,k}(t)$ eşitliğinden $F(b_i) = c_i, i = 1, \dots, k, F(b_j) = 0, j = k+1, \dots, m$ dir. $x(t)$, m . derecen ve $m > k$ olduğu için $b_j \neq 0$ olan bir $k < j \leq m$ sayısı vardır. Ancak bu durum $F(b_j) = 0$ olduğundan $\forall j = k+1, \dots, m$ için $b_j = 0$ olması haliyle çelişmektedir. (i) ve (ii) den varsayım yanlış olup $m = k$ dır.

Teorem 2.3.2. E_1^2 'de dereceleri $m \geq 1$ olan iki Bézier eğrisi $x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{j,m}(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i$ ve $y(t) = \sum_{i=0}^m d_i B_{i,m}(t) = \sum_{i=0}^m c_i t^i$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) $x(t) \stackrel{G}{\sim} y(t)$

(ii) $\{b_0, b_1, \dots, b_m\} \stackrel{G}{\sim} \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$

(iii) $\{a_0, a_1, \dots, a_m\} \stackrel{G}{\sim} \{c_0, c_1, \dots, c_m\}$

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): $x(t) \stackrel{G}{\sim} y(t)$ olsun. Bu takdirde $y(t) = Fx(t), \forall t \in [0,1]$ olan $F \in G$ mevcuttur. Teorem 2.3.1' den

$$Fx(t) = F(\sum_{i=0}^m b_i B_{i,m}(t)) = \sum_{i=0}^m F(b_i) B_{i,m}(t) = \sum_{i=0}^m d_i B_{i,m}(t) = y(t)$$

dir. Bu eşitlikten, $F(b_i) = d_i, i = 0, 1, \dots, m$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\{b_0, b_1, \dots, b_m\} \stackrel{G}{\sim} \{d_0, d_1, \dots, d_m\} \text{ dir.}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\{b_0, b_1, \dots, b_m\} \stackrel{G}{\sim} \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$ olsun. Bu takdirde, $d_i = Fb_i, i = 0, 1, \dots, m$ olan $F \in G$ mevcuttur. Bu durumda $b_i = F(d_i)$ dir. Lemma 2.3.1' den, $a_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \frac{m!}{i!(m-i)!} \frac{i!}{j!(i-j)!} b_j$ ve $c_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \frac{m!}{i!(m-i)!} \frac{i!}{j!(i-j)!} d_j$ dir. Bu takdirde, $F^{-1}(c_i) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \frac{m!}{i!(m-i)!} \frac{i!}{j!(i-j)!} F^{-1}(d_j) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \frac{m!}{i!(m-i)!} \frac{i!}{j!(i-j)!} b_j = a_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ ve $i \geq j$ dir.

Dahası, Teorem 2.3.1' den $b_0 = a_0$ ve $d_0 = c_0$ olup $d_0 = F(b_0) = F(a_0) = c_0$ dir. Buradan $F(a_i) = c_i$ olup $\{a_0, a_1, \dots, a_m\} \stackrel{G}{\sim} \{c_0, c_1, \dots, c_m\}$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $\{a_0, a_1, \dots, a_m\} \stackrel{G}{\sim} \{c_0, c_1, \dots, c_m\}$ olsun. Bu takdirde, $c_i = Fa_i, i = 0, 1, \dots, m$ olan $F \in G$ mevcuttur. Teorem 2.3.1 den, $Fx(t) = F(\sum_{i=0}^m a_i t^i) = \sum_{i=0}^m F(a_i) t^i = \sum_{i=0}^m c_i t^i = y(t)$ olduğundan $x(t) \stackrel{G}{\sim} y(t)$ elde edilir.

Not 2.3.3. E_1^2 de dereceleri $m \geq 1$ olan iki Bézier eğrisi $x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{j,m}(t)$ ve $y(t) = \sum_{i=0}^m d_i B_{i,m}(t)$ nin kontrol noktaları kümelerini sırasıyla $X = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ ve $Y = \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$ ile gösterelim.

Teorem 2.3.3. E_1^2 de dereceleri $m \geq 1$ olan iki Bézier eğrisi ve $x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{j,m}(t)$ $y(t) = \sum_{i=0}^m d_i B_{i,m}(t)$ nin kontrol noktaları kümelerini sırasıyla $X = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ ve $Y = \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$ olsun. Bu takdirde, $\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle \neq 0$, $\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle \neq 0$ olmak üzere, $\forall i = 0, 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için

$$x(t) \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} y(t) \Rightarrow \begin{cases} p(X) = p(Y) \\ \text{sgn}(\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle) = \text{sgn}(\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle) \\ \frac{\langle b_{p(X)}, b_i \rangle}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle d_{p(Y)}, d_i \rangle}{\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle} \\ \frac{[b_{p(X)} \ b_i]}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} = \frac{[d_{p(Y)} \ d_i]}{\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle} \end{cases} \quad (14)$$

dir.

Tersine, varsayalım (14) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, $d_i = M_z b_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ elemanının görüntüsü

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle b_{P(X)}, d_{P(X)} \rangle}{\langle b_{P(X)}, b_{P(X)} \rangle} & \frac{[b_{P(X)} d_{P(X)}]}{\langle b_{P(X)}, b_{P(X)} \rangle} \\ \frac{[b_{P(X)} d_{P(X)}]}{\langle b_{P(X)}, b_{P(X)} \rangle} & \frac{\langle b_{P(X)}, d_{P(X)} \rangle}{\langle b_{P(X)}, b_{P(X)} \rangle} \end{pmatrix} \quad (15)$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 2.2.3' ün ispatına benzer şekildedir.

Teorem 2.3.4. E_1^2 , d dereceleri $m \geq 1$ olan iki Bézier eğrisi

$x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{j,m}(t)$ ve $y(t) = \sum_{i=0}^m d_i B_{i,m}(t)$ nin kontrol noktaları kümelerini sırasıyla $X = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ ve $Y = \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$ olsun. Bu takdirde, $\langle b_{P(X)}, b_{P(X)} \rangle \neq 0, \langle d_{P(Y)}, d_{P(Y)} \rangle \neq 0$ olmak üzere, $\forall i, k = 0, 1, 2, \dots, m; k \neq p(X), k \neq q(X)$ için

$$x(t) \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} y(t) \Rightarrow \begin{cases} p(X) = p(Y) \\ q(X) = q(Y) \\ sgn(\langle b_{P(X)}, b_{P(X)} \rangle) = sgn(\langle d_{P(Y)}, d_{P(Y)} \rangle) \\ \left(\frac{[b_{P(X)} b_{q(X)}]}{\langle b_{P(X)}, b_{P(X)} \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[d_{P(Y)} d_{q(Y)}]}{\langle d_{P(Y)}, d_{P(Y)} \rangle} \right)^2 \\ \frac{\langle b_{P(X)}, b_i \rangle}{\langle b_{P(X)}, b_{P(X)} \rangle} = \frac{\langle d_{P(Y)}, d_i \rangle}{\langle d_{P(Y)}, d_{P(Y)} \rangle} \\ \frac{[b_{P(X)} b_k]}{[b_{P(X)} b_{q(X)}]} = \frac{[d_{P(Y)} d_k]}{[d_{P(Y)} d_{q(Y)}]} \end{cases} \quad (16)$$

dir.

Tersine, varsayalım (16) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, $d_i = M_z b_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim(E_1^2)$ elemanının görüntüsü için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

$$(i) \frac{[b_{P(X)} b_{q(X)}]}{\langle b_{P(X)}, b_{P(X)} \rangle} = \frac{[d_{P(Y)} d_{q(Y)}]}{\langle d_{P(Y)}, d_{P(Y)} \rangle} \text{ durumunda, } M_z \in LPSim^+(E_1^2) \text{ ve } M_z \text{ elemanının}$$

görüntüsü (6) ifadesinde verilmiştir.

$$(ii) \frac{[b_{P(X)} b_{q(X)}]}{\langle b_{P(X)}, b_{P(X)} \rangle} = - \frac{[d_{P(Y)} d_{q(Y)}]}{\langle d_{P(Y)}, d_{P(Y)} \rangle} \text{ durumunda, } M_z \in LPSim^-(E_1^2) \text{ ve } M_z \text{ elemanının}$$

görüntüsü,

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle \overline{b_{P(X)}}, d_{P(X)} \rangle}{\langle \overline{b_{P(X)}}, \overline{b_{P(X)}} \rangle} & - \frac{[\overline{b_{P(X)}} d_{P(X)}]}{\langle \overline{b_{P(X)}}, \overline{b_{P(X)}} \rangle} \\ \frac{[\overline{b_{P(X)}} d_{P(X)}]}{\langle \overline{b_{P(X)}}, \overline{b_{P(X)}} \rangle} & - \frac{\langle \overline{b_{P(X)}}, d_{P(X)} \rangle}{\langle \overline{b_{P(X)}}, \overline{b_{P(X)}} \rangle} \end{pmatrix} \quad (17)$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 2.2.6' nın ispatına benzer şekildedir.

Not 2.3.3. E_1^2 ' de dereceleri $m \geq 1$ olan L – pseudo regüler Bézier eğrisi

$x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{j,m}(t)$ ve kontrol noktaları kümesi $X = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ olmak üzere, Önerme 2.3.1 ile $P(X) = 0$ alınacaktır. Dahası, bir Bézier eğrisinin kontrol noktaları kümesi $X = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ in rankı $r(X) = 1$ ise tüm kontrol noktaları aynı doğru üzerinde olacağından bu durum gözönüne alınmamıştır. Bundan dolayı $r(X) = 2$ kabul edilecektir.

Teorem 2.3.5. E_1^2 de dereceleri $m \geq 1$ olan iki L – pseudo regüler Bézier eğrisi

$x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{j,m}(t)$ ve $y(t) = \sum_{i=0}^m d_i B_{i,m}(t)$ nin kontrol noktaları kümelerini sırasıyla $X = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ ve $Y = \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$ olsun. Bu takdirde,

$$x(t) \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} y(t) \Rightarrow \begin{cases} sgn(\langle b_0, b_0 \rangle) = sgn(\langle d_0, d_0 \rangle) \\ \frac{\langle b_0, b_i \rangle}{\langle b_0, b_0 \rangle} = \frac{\langle d_0, d_i \rangle}{\langle d_0, d_0 \rangle} \\ \frac{[b_0 \ b_i]}{\langle b_0, b_0 \rangle} = \frac{[d_0 \ d_i]}{\langle d_0, d_0 \rangle} \\ \forall i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (18)$$

dir.

Tersine, varsayalım (18) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda,

$d_i = M_z b_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ elemanının görüntüsü,

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle b_0, d_0 \rangle}{\langle b_0, b_0 \rangle} & \frac{[b_0 \ d_0]}{\langle b_0, b_0 \rangle} \\ \frac{[b_0 \ d_0]}{\langle b_0, b_0 \rangle} & \frac{\langle b_0, d_0 \rangle}{\langle b_0, b_0 \rangle} \end{pmatrix} \quad (19)$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 2.2.3 ve Önerme 2.3.1 in ispatından elde edilir.

Teorem 2.3.6.

E_1^2 de dereceleri $m \geq 1$ olan iki L – pseudo regüler Bézier eğrisi

$x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{j,m}(t)$ ve $y(t) = \sum_{i=0}^k d_i B_{i,m}(t)$ nin kontrol noktaları kümelerini sırasıyla $X = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ ve $Y = \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$ olsun. Bu takdirde, $\forall i = 0, 1, 2, \dots, m; \forall k = 1, 2, \dots, m, k \neq q(X)$ için

$$x(t) \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} y(t) \Rightarrow \begin{cases} q(X) = q(Y) \\ sgn(\langle b_0, b_0 \rangle) = sgn(\langle d_0, d_0 \rangle) \\ \left(\frac{[b_0 b_{q(X)}]}{\langle b_0, b_0 \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[d_0 d_{q(Y)}]}{\langle d_0, d_0 \rangle} \right)^2 \\ \frac{\langle b_0, b_i \rangle}{\langle b_0, b_0 \rangle} = \frac{\langle d_0, d_i \rangle}{\langle d_0, d_0 \rangle} \\ \frac{[b_0 b_k]}{[b_0 b_{q(X)}]} = \frac{[d_0 d_k]}{[d_0 d_{q(Y)}]} \end{cases} \quad (20)$$

dir.

Tersine, varsayalım (20) eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, $d_i = M_z b_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim(E_1^2)$ elemanının görüntüsü için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

(i) $\frac{[b_0 b_{q(X)}]}{\langle b_0, b_0 \rangle} = \frac{[d_0 d_{q(Y)}]}{\langle d_0, d_0 \rangle}$ durumunda, $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ ve M_z elemanının görüntüsü (6) ifadesinde verilmiştir.

(ii) $\frac{[b_0 b_{q(X)}]}{\langle b_0, b_0 \rangle} = -\frac{[d_0 d_{q(Y)}]}{\langle d_0, d_0 \rangle}$ durumunda, $M_z \in LPSim^-(E_1^2)$ ve M_z elemanının görüntüsü,

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle \bar{b}_0, d_{P(X)} \rangle}{\langle \bar{b}_0, \bar{b}_0 \rangle} & -\frac{[\bar{b}_0 d_{P(X)}]}{\langle \bar{b}_0, \bar{b}_0 \rangle} \\ \frac{[\bar{b}_0 d_{P(X)}]}{\langle \bar{b}_0, \bar{b}_0 \rangle} & -\frac{\langle \bar{b}_0, d_{P(X)} \rangle}{\langle \bar{b}_0, \bar{b}_0 \rangle} \end{pmatrix} \quad (21)$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 2.2.6 ve Önerme 2.3.1 in ispatından elde edilir.

3. BULGULAR

1. $x, y \in E_1^2, F: E_1^2 \times E_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

(i) $F(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}$ fonksiyonu $LPSim(E_1^2)$ – invarianttır.

(ii) $F(x, y) = \frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle}$ fonksiyonu $LPSim^+(E_1^2)$ – invarianttır.

(iii) $F(x, y) = \left(\frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle}\right)^2$ ve $F(x, y) = sgn\langle x, y \rangle$ fonksiyonları $LPSim(E_1^2)$ –

invarianttır. Teorem 2.1.1’ de gösterilmiştir

2. $x, y \in E_1^2$ ve $\langle x, x \rangle \neq 0, \langle y, y \rangle \neq 0$ olsun. Bu takdirde,

$x \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} y \Rightarrow sgn(\langle x, x \rangle) = sgn(\langle y, y \rangle)$ dır.

Tersine, $sgn(\langle x, x \rangle) = sgn(\langle y, y \rangle)$ durumunda, $y = zx$ olacak şekilde bir tek $z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur ve $z \in LPSim^+(E_1^2)$ elemanının görüntüsü

$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} & \frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} \\ \frac{[x \ y]}{\langle x, x \rangle} & \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \end{pmatrix}$ şeklindedir. Teorem 2.2.2’ de gösterilmiştir

3. $m > 1$ için $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ kümeleri E_1^2 ’ de iki sistem ve $\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle \neq 0, \langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle \neq 0$ olsun.

Bu takdirde, $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için

$$X \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} Y \Rightarrow \begin{cases} p(X) = p(Y) \\ sgn(\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle) = sgn(\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle) \\ \frac{\langle x_{p(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle y_{p(Y)}, y_i \rangle}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \\ \frac{[x_{p(X)} \ x_i]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{[y_{p(Y)} \ y_i]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \end{cases} \text{ dir.}$$

Tersine, $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için

$$\begin{cases} p(X) = p(Y) \\ sgn(\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle) = sgn(\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle) \\ \frac{\langle x_{p(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle y_{p(Y)}, y_i \rangle}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \\ \frac{[x_{p(X)} \ x_i]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{[y_{p(Y)} \ y_i]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \end{cases} \text{ eşitlikleri sağlansın. Bu durumda,}$$

$y_i = M_z x_i, i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur ve

$M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ elemanının görüntüsü $M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle x_{P(X)}, y_{P(X)} \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} & \frac{[x_{P(X)} y_{P(X)}]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} \\ \frac{[x_{P(X)} y_{P(X)}]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} & \frac{\langle x_{P(X)}, y_{P(X)} \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} \end{pmatrix}$ şeklindedir.

Teorem 2.2.3' de gösterilmiştir

4. $x, y \in E_1^2$ ve $\langle x, x \rangle \neq 0, \langle y, y \rangle \neq 0$ olsun. Bu takdirde,

$x \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} y \Rightarrow sgn(\langle x, x \rangle) = sgn(\langle y, y \rangle)$ dir.

Tersine, $sgn(\langle x, x \rangle) = sgn(\langle y, y \rangle)$ durumunda, $y = M_z x$ olacak şekilde

$M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim(E_1^2)$ elemanının görüntüsü

$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} & \frac{[x y]}{\langle x, x \rangle} \\ \frac{[x y]}{\langle x, x \rangle} & \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \end{pmatrix}$ dir. Teorem 2.2.4' de gösterilmiştir

5. $m > 1$ için $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ kümeleri E_1^2 'de iki sistem ve $\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle \neq 0, \langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle \neq 0, r(X) = r(Y) = 1$ olsun.

Bu takdirde, $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için

$X \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} Y \Rightarrow \begin{cases} p(X) = p(Y) \\ sgn(\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle) = sgn(\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle) \\ \frac{\langle x_{P(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} = \frac{\langle y_{P(Y)}, y_i \rangle}{\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle} \end{cases}$ dir.

Tersine, $\forall i = 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için

$\begin{cases} p(X) = p(Y) \\ sgn(\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle) = sgn(\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle) \\ \frac{\langle x_{P(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} = \frac{\langle y_{P(Y)}, y_i \rangle}{\langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle} \end{cases}$ eşitlikleri sağlansın. Bu durumda,

$y_i = M_z x_i, i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde $M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve

$M_z \in LPSim(E_1^2)$ elemanının görüntüsü $M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle x_{P(X)}, y_{P(X)} \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} & \frac{[x_{P(X)} y_{P(X)}]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} \\ \frac{[x_{P(X)} y_{P(X)}]}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} & \frac{\langle x_{P(X)}, y_{P(X)} \rangle}{\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle} \end{pmatrix}$ dir. Teorem

2.2.5' de gösterilmiştir.

6. $m > 1$ için $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ kümeleri E_1^2 ' de iki sistem ve $\langle x_{P(X)}, x_{P(X)} \rangle \neq 0, \langle y_{P(Y)}, y_{P(Y)} \rangle \neq 0, r(X) = r(Y) = 2$ olsun.

Bu takdirde, $\forall i, k = 1, 2, \dots, m; k \neq p(X), k \neq q(X)$ için

$$X \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} Y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p(X) = p(Y) \\ q(X) = q(Y) \\ sgn(\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle) = sgn(\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle) \\ \left(\frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \right)^2 \\ \frac{\langle x_{p(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle y_{p(Y)}, y_i \rangle}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \\ \frac{[x_{p(X)} x_k]}{[x_{p(X)} x_{q(X)}]} = \frac{[y_{p(Y)} y_k]}{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]} \end{array} \right. \text{ dir.}$$

Tersine, $\forall i, k = 1, 2, \dots, m; k \neq p(X), k \neq q(X)$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} p(X) = p(Y) \\ q(X) = q(Y) \\ sgn(\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle) = sgn(\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle) \\ \left(\frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \right)^2 \\ \frac{\langle x_{p(X)}, x_i \rangle}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle y_{p(Y)}, y_i \rangle}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \\ \frac{[x_{p(X)} x_k]}{[x_{p(X)} x_{q(X)}]} = \frac{[y_{p(Y)} y_k]}{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]} \end{array} \right.$$

eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, $y_i = M_z x_i, i = 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim(E_1^2)$ elemanının görüntüsü için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

$$(i) \frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = \frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \text{ durumunda, } M_z \in LPSim^+(E_1^2) \text{ ve } M_z \text{ elemanının}$$

$$\text{görüntüsü } M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} & \frac{[x y]}{\langle x, x \rangle} \\ \frac{[x y]}{\langle x, x \rangle} & \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

$$(ii) \frac{[x_{p(X)} x_{q(X)}]}{\langle x_{p(X)}, x_{p(X)} \rangle} = - \frac{[y_{p(Y)} y_{q(Y)}]}{\langle y_{p(Y)}, y_{p(Y)} \rangle} \text{ durumunda, } M_z \in LPSim^-(E_1^2) \text{ ve } M_z \text{ elemanının}$$

$$\text{görüntüsü } M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle \bar{x}_{p(X)}, y_{p(X)} \rangle}{\langle \bar{x}_{p(X)}, \bar{x}_{p(X)} \rangle} & - \frac{[\bar{x}_{p(X)} y_{p(X)}]}{\langle \bar{x}_{p(X)}, \bar{x}_{p(X)} \rangle} \\ \frac{[\bar{x}_{p(X)} y_{p(X)}]}{\langle \bar{x}_{p(X)}, \bar{x}_{p(X)} \rangle} & - \frac{\langle \bar{x}_{p(X)}, y_{p(X)} \rangle}{\langle \bar{x}_{p(X)}, \bar{x}_{p(X)} \rangle} \end{pmatrix} \text{ şeklindedir. Teorem 2.2.6' de gösterilmiştir}$$

7. L-pseudo regüler Bézier eğrisi, Tanım 2.3.4'te verilmiştir.

8. L-pseudo regüler Bézier eğrisinin bazı özellikleri Önerme 2.3.1'de verilmiştir.

9. L-pseudo regüler polinom eğrisi, Tanım 2.3.7'de verilmiştir.

10. L-pseudo regüler polinom eğrisinin bazı özellikleri Önerme 2.3.2'de verilmiştir.

11. E_1^2 de dereceleri $m \geq 1$ olan iki Bézier eğrisi

$x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{j,m}(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i$ ve $y(t) = \sum_{i=0}^m d_i B_{i,m}(t) = \sum_{i=0}^m c_i t^i$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) $x(t) \stackrel{G}{\sim} y(t)$

(ii) $\{b_0, b_1, \dots, b_m\} \stackrel{G}{\sim} \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$

(iii) $\{a_0, a_1, \dots, a_m\} \stackrel{G}{\sim} \{c_0, c_1, \dots, c_m\}$

Teorem 2.3.2' de gösterilmiştir.

12. E_1^2 ' de dereceleri $m \geq 1$ olan iki Bézier eğrisi ve $x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{j,m}(t)$, $y(t) = \sum_{i=0}^m d_i B_{i,m}(t)$ nin kontrol noktaları kümelerini sırasıyla $X = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ ve $Y = \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$ olsun. Bu takdirde, $\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle \neq 0$, $\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle \neq 0$ olmak üzere, $\forall i = 0, 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$ için

$$x(t) \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} y(t) \Rightarrow \begin{cases} p(X) = p(Y) \\ sgn(\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle) = sgn(\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle) \\ \frac{\langle b_{p(X)}, b_i \rangle}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle d_{p(Y)}, d_i \rangle}{\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle} \\ \frac{[b_{p(X)} \ b_i]}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} = \frac{[d_{p(Y)} \ d_i]}{\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle} \end{cases} \text{ dir.}$$

Tersine,

$$\begin{cases} p(X) = p(Y) \\ sgn(\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle) = sgn(\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle) \\ \frac{\langle b_{p(X)}, b_i \rangle}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle d_{p(Y)}, d_i \rangle}{\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle} \\ \frac{[b_{p(X)} \ b_i]}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} = \frac{[d_{p(Y)} \ d_i]}{\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle} \end{cases} \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, p(X) - 1, p(X) + 1, \dots, m$$

eşitlikleri sağlansın. Bu durumda, $d_i = M_z b_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek

$M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ elemanının görüntüsü

$$M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle b_{p(X)}, d_{p(X)} \rangle}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} & \frac{[b_{p(X)} \ d_{p(X)}]}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} \\ \frac{[b_{p(X)} \ d_{p(X)}]}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} & \frac{\langle b_{p(X)}, d_{p(X)} \rangle}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} \end{pmatrix} \text{ şeklindedir. Teorem 2.3.3' de gösterilmiştir}$$

13. E_1^2 ' de dereceleri $m \geq 1$ olan iki Bézier eğrisi $x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{j,m}(t)$ ve

$y(t) = \sum_{i=0}^m d_i B_{i,m}(t)$ 'nin kontrol noktaları kümelerini sırasıyla

$X = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ ve $Y = \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$ olsun. Bu takdirde, $\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle \neq 0$,

$\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle \neq 0$ olmak üzere, $\forall i, k = 0, 1, 2, \dots, m; k \neq p(X), k \neq p(Y)$ için

$$x(t) \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} y(t) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p(X) = p(Y) \\ q(X) = q(Y) \\ sgn(\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle) = sgn(\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle) \\ \left(\frac{[b_{p(X)} b_{q(X)}]}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[d_{p(Y)} d_{q(Y)}]}{\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle} \right)^2 \\ \frac{\langle b_{p(X)}, b_i \rangle}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle d_{p(Y)}, d_i \rangle}{\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle} \\ \frac{[b_{p(X)} b_k]}{[b_{p(X)} b_{q(X)}]} = \frac{[d_{p(Y)} d_k]}{[d_{p(Y)} d_{q(Y)}]} \end{array} \right. \quad \text{dir.}$$

Tersine, $\forall i, k = 0, 1, 2, \dots, m; k \neq p(X), k \neq q(X)$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} p(X) = p(Y) \\ q(X) = q(Y) \\ sgn(\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle) = sgn(\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle) \\ \left(\frac{[b_{p(X)} b_{q(X)}]}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[d_{p(Y)} d_{q(Y)}]}{\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle} \right)^2 \\ \frac{\langle b_{p(X)}, b_i \rangle}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} = \frac{\langle d_{p(Y)}, d_i \rangle}{\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle} \\ \frac{[b_{p(X)} b_k]}{[b_{p(X)} b_{q(X)}]} = \frac{[d_{p(Y)} d_k]}{[d_{p(Y)} d_{q(Y)}]} \end{array} \right. \quad \text{sağlansın. Bu durumda,}$$

$d_i = M_z b_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim(E_1^2)$ elemanının görüntüsü için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

(i) $\frac{[b_{p(X)} b_{q(X)}]}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} = \frac{[d_{p(Y)} d_{q(Y)}]}{\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle}$ durumunda, $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ ve M_z elemanının

görüntüsü (6) ifadesinde verilmiştir.

(ii) $\frac{[b_{p(X)} b_{q(X)}]}{\langle b_{p(X)}, b_{p(X)} \rangle} = -\frac{[d_{p(Y)} d_{q(Y)}]}{\langle d_{p(Y)}, d_{p(Y)} \rangle}$ durumunda, $M_z \in LPSim^-(E_1^2)$ ve M_z elemanının

görüntüsü, $M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle \overline{b_{p(X)}}, d_{p(X)} \rangle}{\langle \overline{b_{p(X)}}, b_{p(X)} \rangle} & -\frac{[\overline{b_{p(X)}} d_{p(X)}]}{\langle \overline{b_{p(X)}}, b_{p(X)} \rangle} \\ \frac{[\overline{b_{p(X)}} d_{p(X)}]}{\langle \overline{b_{p(X)}}, b_{p(X)} \rangle} & -\frac{\langle \overline{b_{p(X)}}, d_{p(X)} \rangle}{\langle \overline{b_{p(X)}}, b_{p(X)} \rangle} \end{pmatrix}$ şeklindedir. Teorem 2.3.4' de

gösterilmiştir

14. E_1^2 ' dedereceleri $m \geq 1$ olan iki L – pseudo regüler Bézier eğrisi

$x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{j,m}(t)$ ve $y(t) = \sum_{i=0}^m d_i B_{i,m}(t)$ nin kontrol noktaları kümelerini

sırasıyla $X = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ ve $Y = \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$ olsun. Bu takdirde, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için

$$x(t) \stackrel{LPSim^+(E_1^2)}{\sim} y(t) \Rightarrow \begin{cases} sgn(\langle b_0, b_0 \rangle) = sgn(\langle d_0, d_0 \rangle) \\ \frac{\langle b_0, b_i \rangle}{\langle b_0, b_0 \rangle} = \frac{\langle d_0, d_i \rangle}{\langle d_0, d_0 \rangle} \\ \frac{[b_0 \ b_i]}{\langle b_0, b_0 \rangle} = \frac{[d_0 \ d_i]}{\langle d_0, d_0 \rangle} \end{cases} \text{ dir.}$$

$$\text{Tersine, } \forall i = 1, 2, \dots, m \text{ için } \begin{cases} sgn(\langle b_0, b_0 \rangle) = sgn(\langle d_0, d_0 \rangle) \\ \frac{\langle b_0, b_i \rangle}{\langle b_0, b_0 \rangle} = \frac{\langle d_0, d_i \rangle}{\langle d_0, d_0 \rangle} \\ \frac{[b_0 \ b_i]}{\langle b_0, b_0 \rangle} = \frac{[d_0 \ d_i]}{\langle d_0, d_0 \rangle} \end{cases} \text{ eşitlikleri sağlansın.}$$

Bu durumda, $d_i = M_z b_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$

mevcuttur ve $M_z \in LPSim^+(E_1^2)$ elemanının görüntüsü, $M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle b_0, d_0 \rangle}{\langle b_0, b_0 \rangle} & \frac{[b_0 \ d_0]}{\langle b_0, b_0 \rangle} \\ \frac{[b_0 \ d_0]}{\langle b_0, b_0 \rangle} & \frac{\langle b_0, d_0 \rangle}{\langle b_0, b_0 \rangle} \end{pmatrix}$

şeklinde dir. Teorem 2.3.5' de gösterilmiştir.

15. E_1^2 ' de dereceleri $m \geq 1$ olan iki L – pseudo regüler Bézier eğrisi

$x(t) = \sum_{i=0}^m b_i B_{j,m}(t)$ ve $y(t) = \sum_{i=0}^k d_i B_{i,m}(t)$ nin kontrol noktaları kümelerini sırasıyla

$X = \{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ ve $Y = \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$ olsun. Bu takdirde,

$\forall i = 0, 1, 2, \dots, m; \forall k = 1, 2, \dots, m, k \neq q(X)$ için

$$x(t) \stackrel{LPSim(E_1^2)}{\sim} y(t) \Rightarrow \begin{cases} q(X) = q(Y) \\ sgn(\langle b_0, b_0 \rangle) = sgn(\langle d_0, d_0 \rangle) \\ \left(\frac{[b_0 \ b_{q(X)}]}{\langle b_0, b_0 \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[d_0 \ d_{q(Y)}]}{\langle d_0, d_0 \rangle} \right)^2 \\ \frac{\langle b_0, b_i \rangle}{\langle b_0, b_0 \rangle} = \frac{\langle d_0, d_i \rangle}{\langle d_0, d_0 \rangle} \\ \frac{[b_0 \ b_k]}{[b_0 \ b_{q(X)}]} = \frac{[d_0 \ d_k]}{[d_0 \ d_{q(Y)}]} \end{cases} \text{ dir.}$$

Tersine, $\forall i = 0, 1, 2, \dots, m; \forall k = 1, 2, \dots, m, k \neq q(X)$ için

$$\begin{cases} q(X) = q(Y) \\ sgn(\langle b_0, b_0 \rangle) = sgn(\langle d_0, d_0 \rangle) \\ \left(\frac{[b_0 \ b_{q(X)}]}{\langle b_0, b_0 \rangle} \right)^2 = \left(\frac{[d_0 \ d_{q(Y)}]}{\langle d_0, d_0 \rangle} \right)^2 \\ \frac{\langle b_0, b_i \rangle}{\langle b_0, b_0 \rangle} = \frac{\langle d_0, d_i \rangle}{\langle d_0, d_0 \rangle} \\ \frac{[b_0 \ b_k]}{[b_0 \ b_{q(X)}]} = \frac{[d_0 \ d_k]}{[d_0 \ d_{q(Y)}]} \end{cases} \text{ eşitlikleri sağlansın. Bu durumda,}$$

$d_i = M_z b_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$ olacak şekilde bir tek $M_z \in LPSim(E_1^2)$ mevcuttur ve $M_z \in LPSim(E_1^2)$ elemanının görüntüsü için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

$$(i) \frac{[b_0 \ b_{q(X)}]}{\langle b_0, b_0 \rangle} = \frac{[d_0 \ d_{q(Y)}]}{\langle d_0, d_0 \rangle} \text{ durumunda, } M_z \in LPSim^+(E_1^2) \text{ ve } M_z \text{ elemanının}$$

görüntüsü (6) ifadesinde verilmiştir.

$$(ii) \frac{[b_0 \ b_{q(X)}]}{\langle b_0, b_0 \rangle} = -\frac{[d_0 \ d_{q(Y)}]}{\langle d_0, d_0 \rangle} \text{ durumunda, } M_z \in LPSim^-(E_1^2) \text{ ve } M_z \text{ elemanının}$$

görüntüsü, $M_z = \begin{pmatrix} \frac{\langle \bar{b}_0, d_{P(X)} \rangle}{\langle \bar{b}_0, \bar{b}_0 \rangle} & -\frac{[\bar{b}_0 \ d_{P(X)}]}{\langle \bar{b}_0, \bar{b}_0 \rangle} \\ \frac{[\bar{b}_0 \ d_{P(X)}]}{\langle \bar{b}_0, \bar{b}_0 \rangle} & -\frac{\langle \bar{b}_0, d_{P(X)} \rangle}{\langle \bar{b}_0, \bar{b}_0 \rangle} \end{pmatrix}$ şeklindedir. Teorem 2.3.6' da gösterilmiştir.

4. İRDELEME

Tezin amacı, aşağıdaki iki temel problemi incelemektir:

1. $LPSim(E_1^2)$ ve $LPSim^+(E_1^2)$ gruplarına göre, m tane noktadan oluşan bir sistemin invariantlarını bulunması ve bu invariantlar yardımıyla m tane noktadan oluşan iki tane nokta sisteminin benzerlik probleminin çözülmesi
2. 1. Problemdeki çözümler yardımıyla verilen iki tane Bézier eğrisinin benzerlik probleminin çözülmesi

Öklid uzayındaki benzerlik geometrisindeki bu tipteki problemler, başka çalışmalarda karmaşık sayılar kullanılarak çözülmüştü. Benzer problemler hiperbolik sayılar kullanarak çözüldü.

Bézier eğrilerine uygulaması yapıldı. Ancak, Öklid uzayındaki tüm Bézier eğrileri regülerdir. Bu uzayda ise regüler olmayabilir. Buna ait örnekler, tezde verilmiştir. Bu bağlamda, Bézier eğrilerine herhangi bir özellik eklemeyen benzerlik probleminin çözümü elde edildi. Ardından Bézier eğrilerinin regülerlik şartları incelendi. Bézier eğrilerine regülerlik şartı eklendiğinde, bazı benzerlik şartlarının değişime uğradığı bulundu. Bu şartlar altında benzerlik problemi çözüldü. Gelecekteki çalışmalar için yeni problemlerin mevcut olduğu görüldü. Örneğin; Bézier eğrilerin regülerlik şartlarının daha açık bir şekilde incelenmesinin önemli olduğu ortaya çıktı. Dahası, bu uzayda non-degenerate (bozulmamış) eğriler de mevcuttur. Öklid uzayında, her bozulmamış eğri regülerdir. Ancak bu uzayda bu şart geçerli değildir. Bu bağlamda, bozulmamış Bézier eğrilerinin de benzerlik şartlarının incelenebilse güzel olurdu. Son olarak, Öklid uzayında elde edilen bu sonuçların bilgisayar destekli çalışmalarda geniş uygulama alanları mevcuttur. Bu tezde elde edilen sonuçların uygulama alanlarında (özellikle özel görelilik teorisinde) kullanımının araştırılması önemlidir.

5. SONUÇLAR

1. $LPSim(E_1^2)$ ve $LPSim^+(E_1^2)$ grupları için invaryant fonksiyonlar Teorem 2.2.1’de verilmiştir.
2. Bir tane nokta için $LPSim^+(E_1^2)$ benzerlik şartı ve bir noktayı diğer noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.2.2’de verilmiştir.
3. m tane nokta için $LPSim^+(E_1^2)$ benzerlik şartları ve m tane noktayı diğer m-tane noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.2.3’de verilmiştir.
4. Bir tane nokta için $LPSim(E_1^2)$ -benzerlik şartı ve bir noktayı diğer noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.2.4’de verilmiştir.
5. $m>1$ tane noktadan oluşan sistemin rankının 1 olması durumunda, m tane nokta için $LPSim(E_1^2)$ benzerlik şartları ve m tane noktayı diğer m-tane noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.2.5’de verilmiştir.
6. $m>1$ tane noktadan oluşan sistemin rankının 2 olması durumunda, m tane nokta için $LPSim(E_1^2)$ benzerlik şartları ve m tane noktayı diğer m-tane noktaya dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.2.6’de verilmiştir.
7. L-pseudo regüler Bézier eğrisi, Tanım 2.3.5’te verilmiştir.
8. L-pseudo regüler Bézier eğrisinin bazı özellikleri Önerme 2.3.1’de verilmiştir.
9. L-pseudo regüler polinom eğrisi, Tanım 2.3.7’de verilmiştir.
10. L-pseudo regüler polinom eğrisinin bazı özellikleri Önerme 2.3.2’de verilmiştir.
11. İki Bézier eğrisinin G-benzerliği, kontrol noktalarının G-benzerliğine indirgeme teoremi, Teorem 2.3.2’de verilmiştir.
12. $LPSim^+(E_1^2)$ grubuna göre, iki Bézier eğrisinin G-benzerlik şartları ve bir Bézier eğrisini diğer Bézier eğrisine dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.3.3’te verilmiştir.
13. $LPSim(E_1^2)$ grubuna göre, iki Bézier eğrisinin G-benzerlik şartları ve bir Bézier eğrisini diğer Bézier eğrisine dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.3.4’te verilmiştir.
14. $LPSim^+(E_1^2)$ grubuna göre, iki L-pseudo regüler Bézier eğrisinin G-benzerlik şartları ve bir L-pseudo regüler Bézier eğrisini diğer L-pseudo regüler Bézier eğrisine dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.3.5’te verilmiştir.

15. $LPSim(E_1^2)$ grubuna göre, iki L-pseudo regüler Bézier eğrisinin G-benzerlik şartları ve bir L-pseudo regüler Bézier eğrisini diğer L-pseudo regüler Bézier eğrisine dönüştüren dönüşümün görüntüsü Teorem 2.3.6’da verilmiştir.



6. ÖNERİLER

Bu çalışmada, 2-boyutlu Lorentz uzayındaki lineer pseudo-benzerlik gruplarından $LPSim(E_1^2)$ ve $LPSim^+(E_1^2)$ grupları için m tane noktanın invaryantları; bu invaryantlar yardımıyla noktalar dan oluşan iki sistemin benzerlik şartları ve bu şartların Bézier eğrilerine uygulamaları verilmiştir. Bu problemlerin çözümünde hiperbolik sayılar cebiri kullanılmıştır.

1. [13]'te bu benzerlik gruplarından farklı benzerlik grupları da anlatılmıştır. Bu çalışma bu gruplar için de yapılabilir. Dahası bu problemler, [10, 11]'deki çalışmalarda bahsedilen gruplar için de yapılabilir.
2. Burada kullanılan yöntemler geliştirilerek, n boyutlu Lorentz uzayında bu problemler incelenebilir.
3. n boyutlu Lorentz uzayında eğriler, regüler, nondegenerate ve nondegenerate-regüler olarak sınıflandırılmaktadır. Bu çalışmada, L-pseudo-regüler Bézier eğrileri tanımlanmış ve kısmi sonuçlar verilmiştir. Bu sınıflardaki Bézier eğrilerinin özellikleri ve benzerlik problemleri daha genel olarak incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. İncesu, M., Benzerlik Geometrisinde Noktaların İnvaryantlarının Tam **Sistemi**, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2008.
2. Euclid, Elements, (tr.T.L.Health) Volume 2 of Britannia Great Books, Encyclopedia Britannica, Chicago,1982.
3. Alcázar, J.,G., Hermoso, C. and Muntingh, G., Detecting Similarity of Rational Plane Curves, Journal of Computational and Applied Mathematics, 269 (2014) 1-13.
4. Kunes, J., Similarity and Modeling in Science and Engineering, Cambridge International Science Publishing, 2012.
5. Khadjiev, D., Ören, İ. and Pekşen, Ö., Global Invariants of Paths and Curves for The Group of All Linear Similarities in the Two-dimensional Euclidean Space, International Journal of Geometry Methods in Modern Physics, 15, 6 (2018) 1-28.
6. Encheva, R.G. and Georgiev, G.H., Similar Frenet Curves, Result.Math 55 (2009) 359-372.
7. Kamishima, Y., Lorentzian Similarity Manifolds, Central European Journal of Mathematics, 10, 5 (2012) 1771-1788.
8. Ören, İ., Khadjiev, D. and Pekşen, Ö., Identifications of Paths and Curves Under The Plane Similarity Transformations and Their Applications to Mechanics, Journal of Geometry and Physics, 151 (2020) 1-35.
9. Ören, İ. and İncesu, M., Detecting Similarities of Bézier Curves for the Groups $LSim(E_2)$, $LSim^+(E_2)$, Conference Proceeding Science and Technology, 2, 2 (2019) 129-133.
10. Şimşek, H. ve Özdemir, M., Similar and Self-similar Curves in Minkowski n-space, arXiv.org math. DG Cornell University , 52, 6 (2015) 2071-2093.
11. Şimşek, H. ve Özdemir, M., Shape Curvatures of The Lorentzian Plane Curves, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 66, 2 (2017) 276-288.
12. Şimşek, H. ve Özdemir, M., The Similarity Invariants of Non-lightlike Frenet Curves in the Minkowski 3-space, arXiv.org math.DG Cornell University (2015).
13. Ören, İ. and Khadjiev, D., Recognition of plane paths and plane curves under linear pseudo-similarity transformations, Journal of Geometry, 111, (2020).
14. Khadjiev, D. and Göksal, Y., Applications of Hyperbolic Numbers to The Invariant Theory in Two-Dimensional Pseudo-Euclidean Space, Adv. Appl. Clifford Algebras, 26, 2 (2016) 645-668.

15. Göksal, Y., Hiperbolik Sayılar ve Hiperbolik Sayıların 2-Boyutlu Hiperbolik Geometriye Uygulamaları, Y. Lisans Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.
16. Ören, İ., Minkowski Uzayzaman Geometrisinde Noktaların İnvaryantları, Y. Lisans Tezi, K.T.Ü. , Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2004.
17. İncesu, M., Bézier Eğrileri, Bézier Yüzeyleri ve Bunların Matlab Programı ile Sayısal Algoritmaları, Y. Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2003.
18. Khadjiev, D. ve Ören, İ., Global Invariants of Paths and Curves for The Group of Orthogonal Transformations in The Two-dimensional Euclidean Space, An.Şt.Univ. Ovidius Constanta, Seria Matematica, 27, 2 (2019) 1-28.
19. Marsh, D., Applied Geometry for Computer Graphics and CAD, Second Edition, Springer, 140-151, 2004.
20. Ören, İ., On Invariants of m- Vector in Lorentzian Gometry, International Electronic Journal of Geometry, 9, 1 (2016) 38-44.
21. Ören, İ., Equivalence Conditions of Two Bézier Curves in The Euclidean Geometry, Iranian Journal of Science and Technology Transactions A-Science, 42 (2018) 1563-1577.
22. Ören, İ., On the Control Invariants of Planar Bézier Curves for the Groups $M(2)$ and $SM(2)$, Turk. J. Math. Comput. Sci., 10 (2018) 74-81.
23. Sobezyk, G., The Hyperbolic Number Plane. The College Matematics Journal, 4 (1995) 268-280.
24. Şimşek, H. ve Özdemir, M., Some Results On P-Shape Curvatures of Non-Lightlike Space Curves, International Electronic Journal of Geometry, 11, 2 (2018) 61-70.
25. Ören, İ. and İncesu, M., Recognition of Complex Polynomial Bézier Curves under Similarity Transformations, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1. (Accepted), 2020.
26. Ören, İ. and Khadjiev, D., Recognition of Paths and Curves in the Two-dimensional Euclidean Geometry, International Electronic Journal of Geometry, (Accepted), 2020.

ÖZGEÇMİŞ

Elif YILDIRIM, 16.06.1978 tarihinde Trabzon’da doğdu.. İlk, orta ve lise eğitimini Trabzon’da tamamladı. 1996 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandı. Bu bölümden 2000 yılında mezun oldu. 2000 yılında MEB’ da Matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Halen Trabzon Mahmut Celaleddin ÖKTEN Anadolu İmam Hatip Lisesi Fen ve Sosyal Bilimler Proje okulunda görev yapmaktadır. Evli ve üç çocuk annesidir. Yabancı dili İngilizcedir.

