

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ecem ÖZKAN

**LİNEER REGRESYON MODELİNDE TEMEL BİLEŞENLER
VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLERİ**

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2020

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER REGRESYON MODELİNDE TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLERİ

Ecem ÖZKAN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Yıl : 2020, Sayfa: 151
Jüri : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Dr.Öğr. Üyesi Nimet ÖZBAY
: Dr.Öğr. Üyesi Murat SAĞIR

Çoklu iç ilişki problemini gidermek için en küçük kareler (OLS) tahmin edicisine alternatif olarak birçok yanlı tahmin edici önerilmiştir. Bunlardan bir tanesi Hotelling (1933) tarafından önerilen temel bileşenler tahmin edicidir. Bu çalışmada temel bileşenler tahmin edici ve temel bileşenler tahmin edici ile ilişkili olan birçok tahmin edici incelenmiştir. Buna ek olarak, iki parametrelili temel bileşenler tahmin edici; temel bileşenler tahmin edici, $r - k$ sınıfı tahmin edici, $r - d$ sınıfı tahmin edici ve iki parametrelili tahmin ediciler ile matris hata kareler ortalaması kriterine göre karşılaştırılmıştır. Belirtilen tahmin edicilerin performanslarını değerlendirmek için gerçek bir veri seti analiz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çoklu İç İlişki, Temel Bileşenler Tahmin Edici, Lineer Yanlı Tahmin Ediciler, Uyarlanmış İki Parametrelili Tahmin Edici.

ABSTRACT

MSc. THESIS

PRINCIPAL COMPONENT AND RELATED ESTIMATION METHODS IN LINEAR REGRESSION MODELS

Ecem ÖZKAN

**ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS**

Supervisor : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Year : 2020, Pages: 151
Jury : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Asst.Prof. Dr. Nimet ÖZBAY
: Asst.Prof. Dr. Murat SAĞIR

To cope with the multicollinearity problem several biased estimators are proposed as an alternative to the ordinary least squares (OLS) estimator. One of the biased estimators is principal component estimator of Hotelling (1933). In this study, principal component estimator and many kinds of estimator related with principal component estimator are examined. In addition this, two parameter principal component estimator is compared with principal component estimator, $r-k$ class estimator, $r-d$ class estimator and two parameters estimator under the matrix mean square error. A real data set is analyzed to evaluate the performance of mentioned estimators.

Key Words: Multicollinearity, Principal Component Estimator, Linear Biased Estimators, Modified Two Parameter Estimator.

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Temel bileşenler tahmin edici istatistiğin neredeyse tüm alanlarında ve ekonometrinin birçok alanında kullanılan bir tahmin edicidir. Temel bileşenler tahmin edici, çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak veya şiddetini azaltmak için öne sürülen bir tahmin edicidir. Bu tekniğin en eski tanımlarının ilk olarak Hotelling (1933) tarafından verildiği kabul edilmektedir. Temel bileşenler yönteminin asıl amacı boyut indirgemesi ve tahmin yapılmasıdır. Bazı yanlış tahmin edicilerin elde edilmesi sonucunda varyansın önemli ölçüde azaldığı görülür.

Bölüm 1’de lineer regresyon modeli için çalışmanın diğer kısımlarında kullanılacak bazı ön bilgilere ve tahmin edicilerin iyiliğini belirlemek için kullanılan bazı kriterlere yer verilmiştir.

Bölüm 2’de çoklu iç ilişki problemi, çoklu iç ilişkinin nedenleri, çoklu iç ilişkinin belirlenmesi, çoklu iç ilişkinin sonuçları ve problemin çözüm yöntemlerine yer verilmiştir.

Bölüm 3’de lineer regresyon modelinde kısıtlı en küçük kareler tahmin edici, temel bileşenler tahmin edici, ridge tahmin edici, genelleştirilmiş ridge tahmin edici, kısıtlı ridge tahmin edici, uyarlanmış ridge tahmin edici ve Liu tahmin edici gibi bazı yanlış tahmin ediciler verilmiştir.

Bölüm 4’de temel bileşenler ve ilişkili tahmin yöntemleri incelenmiştir. Tahmin edicilerin yöntemlerinin birleştirilmesiyle yeni tahmin ediciler tanımlanmış ve bilinen tahmin ediciler ile performansları karşılaştırılarak incelenmiştir.

İlk olarak, temel bileşenler regresyon ile ridge regresyon yöntemlerinin birleştirilmesi ile yeni bir tahmin edici tanımlanmış ve bilinen tahmin edicilerle örnek üzerinde karşılaştırılmaları incelenmiştir. Temel bileşenler regresyon ile ridge regresyon tekniklerini birleştiren bu tahmin edici $r - k$ sınıfı tahmin edici olarak adlandırılmıştır. Verilen regresyon yöntemlerini göstermek için bir para

talebi örneği verilmiştir. Tahmin edicilerin üstünlük durumları matris değerli hata kareler ortalaması (MMSE) kriterine göre incelenmiştir.

Temel bileşenler regresyon ile yansız ridge regresyon yöntemlerinin birleştirilmesi ile uyarlanmış $r-k$ sınıfı ridge regresyon (MCRR) tahmin edici tanımlanmıştır. MCRR tahmin edicisinin OLS, PCR, URR ve $r-k$ sınıfı tahmin edicilerine göre üstünlüğü MMSE kriterine göre incelenmiştir.

Liu ve temel bileşenler tahmin edicilerinin birleştirilmesi ile $r-d$ sınıfı tahmin edici tanımlanmıştır. MMSE kriterine göre $r-d$ sınıfı tahmin edici, OLS, PCR, Liu ve $r-k$ sınıfı tahmin edicileriyle karşılaştırılmış ve $r-d$ sınıfı tahmin edicinin OLS, PCR ve Liu tahmin edicilerinin karşılaştırılmasında elde edilen koşullar test edilmiştir.

Çoklu iç ilişki problemini gidermek için iki parametrelili ve temel bileşenler tahmin edicilerin birleşimi sonucu, yeni bir tahmin edici sınıfı, yani iki parametrelili temel bileşenler tahmin edicisi tanımlanmıştır. İki Parametrelili temel bileşenler tahmin edicisinin diğer tahmin edicilere göre performansı MMSE kriterine göre karşılaştırılıp teorik sonuçlara yer verilmiştir.

Kısıtlı $r-k$ sınıfı tahmin edicisi, $r-k$ sınıfı tahmin edicisinin ve kısıtlı ridge regresyon tahmin edicisinin genelleştirilmesi olarak kabul edilirken, kısıtlı $r-d$ sınıfı tahmin edicisi de kısıtlı Liu tahmin edicisi ve $r-d$ sınıfı tahmin edicisinin genel bir durumudur. MSE kriterine göre, kısıtlı $r-k$ sınıfı tahmin edici ve kısıtlı $r-d$ sınıfı tahmin edici sırasıyla, kısıtlı ridge regresyon tahmin edici ve kısıtlı Liu tahmin edici ile karşılaştırılmıştır. Kısıtların sağlandığı ve sağlanmadığı durumlarda tahmin edicilerin üstünlüğü MMSE kriterine göre incelenip teorik sonuçlara yer verilmiştir.

Lineer regresyon modelinde $r-k$ sınıfı tahmin edici OLS tahmin edici, PCR tahmin edicisi ve ORR tahmin edicisi ile ortalama kayıp kriterine göre Mahalanobis kayıp fonksiyonu altında karşılaştırılmış ve ortalama kayıp kriteri teorik olarak tanımlanmıştır.

Lineer regresyon modelinde hatalardaki otokorelasyon ve değişkenler arasındaki çoklu iç ilişki problemleri incelenmiş ve $r - k$ sınıfı tahmin edicisi, genelleştirilmiş OLS (GLS), PCR ve Ridge regresyon tahmin edicileriyle skaler değerli hata kareler ortalaması (SMSE) ve MMSE kriterlerine göre karşılaştırılmış, gerek ve yeter koşullar teorik sonuçlar ile verilmiştir. Bunun yanında karşılaştırmalar için hipotez testleri yapılmıştır.

Çoklu iç ilişki probleminin giderilmesi için uyarlanmış iki parametrelili tahmin edici verilmiştir. Temel bileşenler regresyon ile ridge, Liu ve iki parametrelili tahmin edici gibi bazı yanlı regresyon tahmin edicilerin kombinasyonlarının performansı ve gerçek-yaşam uygulaması ve simülasyon ile önerilen tahmin edicilerin parametrelere bağlı olarak performansları SMSE ve öngörü hatasının çapraz geçerliliği (CVEP) kriterlerine göre karşılaştırılıp incelenmiştir.



TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince sabrı, anlayışı ve öğretileriyle bana yol gösteren, birikimlerini ve tecrübelerini esirgemedi benimle paylaşan çok saygıdeğer hocam Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR 'a, ayrıca yardımlarını esirgemeyen hocam Dr. Öğr. Üyesi Nimet ÖZBAY 'a ve hayatım boyunca her zaman ve her konuda bana destek olan, varlıklarıyla kendimi her daim şanslı hissettiğim aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT.....	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR.....	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	XIV
TABLolar DİZİNİ	XVI
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	XVIII
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Bileşenler Analizinin Tarihsel Gelişimi	1
1.2. Lineer Regresyon Modeli	3
1.3. Lineer Tahmin Ediciler	6
1.4. Tahmin Edicilerin İyiliğini Belirlemek İçin Kullanılan Kriterler (Kayıp Fonksiyonları ve Risk)	6
1.4.1. Matris Değerli Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Hata Kareler Ortalaması (MSE).....	7
1.4.2. Skaler Değerli Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Hata Kareler Ortalaması.....	8
1.4.3. Ağırlıklandırılmış Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Risk	9
1.4.4. Kestirimci Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Risk	9
1.4.5. Dengeli Kayıp Fonksiyonu	10
1.4.6. Mahalanobis Kayıp Fonksiyonu	11
2. ÇOKLU İÇ İLİŞKİ	13
2.1. Çoklu İç İlişkinin Nedenleri	14
2.2. Çoklu İç İlişkinin Belirlenmesi.....	14
2.3. Çoklu İç İlişkinin Sonuçları	17

2.4. Çoklu İç İlişki Probleminin Çözüm Yöntemleri	18
3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER	21
3.1. Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmin Edici.....	21
3.2. Temel Bileşenler Tahmin Edici	23
3.2.1. Temel Bileşenler ve En Küçük Kareler Tahmin Edicinin Risk Karşılaştırması	29
3.2.2. Temel Bileşenler Tahmin Edicinin Daralma Özelliği.....	30
3.2.3. Temel Bileşenlerin Sayısı	32
3.2.4. Temel Bileşenler Tahmin Edicinin Dezavantajları	32
3.2.5. Marquardt Tahmin Edici	33
3.3. Ridge Tahmin Edici	34
3.3.1. Yanlılık Parametresi k 'nın Seçimi	38
3.4. Genelleştirilmiş Ridge Tahmin Edici.....	39
3.5. Kısıtlı Ridge Tahmin Edici	40
3.6. Uyarlanmış Ridge Tahmin Edici	41
3.7. Liu Tahmin Edici	43
4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLERİ.....	47
4.1. Ridge ve Temel Bileşenler Regresyonun Birleşimi ($r-k$ sınıfı tahmin edici).....	47
4.2. Yansız Ridge ve Temel Bileşenler Regresyon Tahmin Edicilerinin Birleşimi	54
4.2.1. Önerilen Tahmin Edici (MCRR).....	57
4.2.2. MMSE Kriteri Altında MCRR Tahmin Edicinin Performansı	58
4.3. Liu Tahmin Edici ve Temel Bileşenler Tahmin Edicinin Birleşimi	60
4.4. MMSE Kriterine Göre $r-d$ Sınıfı Tahmin Edicinin Bazı Tahmin Ediciler Üzerindeki Üstünlüğü	64
4.4.1. MSE Karşılaştırmaları.....	65

4.4.1.1. $r-d$ Sınıfı Tahmin Edicinin PCR Tahmin Ediciyle Karşılaştırılması	68
4.4.1.2. $r-d$ Sınıfı Tahmin Edicinin Liu Tahmin Ediciyle Karşılaştırılması	69
4.4.1.3. $r-d$ Sınıfı Tahmin Edicinin hem PCR hem de Liu Tahmin Edicilerine Olan Üstünlük Kriteri.....	69
4.4.2. Koşullar için Hipotez Testleri	70
4.4.3. $r-d$ ve $r-k$ Sınıfı Tahmin Edicilerinin MMSE Karşılaştırmaları.....	74
4.5. İki Parametrelili (TP) ve PCR Tahmin Edicilerinin Birleşimi.....	74
4.5.1. Önerilen Tahmin Edici.....	75
4.5.2. Yeni Tahmin Edicinin Özellikleri.....	77
4.5.2.1. PCTP Tahmin Edicinin PCR Tahmin Ediciyle Karşılaştırılması	78
4.5.2.2. PCTP Tahmin Edicinin $r-k$ Sınıfı Tahmin Ediciyle Karşılaştırılması	80
4.5.2.3. PCTP Tahmin edici ile $r-d$ Sınıfı Tahmin Edicinin Karşılaştırılması	82
4.5.2.4. PCTP Tahmin Edici ile TP Tahmin Edicinin Karşılaştırılması	83
4.6. Lineer Regresyonda Kısıtlı $r-k$ Sınıfı Tahmin Edici ve Kısıtlı $r-d$ Sınıfı Tahmin Edici	85
4.6.1. Önerilen Tahmin Edicilerin Üstünlüğü.....	89
4.6.1.1. Kısıtlar Sağlandığında Tahmin Edicilerin Üstünlüğü	91
4.6.1.2. Kısıtlar Sağlanmadığında Tahmin Edicilerin Üstünlüğü.....	92
4.7. Kısıtlı Olmayan Tahmin Edicilerin Tek Bir Tahmin Edicide Birleştirilmesi	92
4.7.1. Yeni Bir Sınıf Tahmin Edici	93

4.7.2. Yanlılık Parametreleri k ve d Seçimi.....	97
4.7.3. $r - (k, d)$ Sınıfı Tahmin Edicinin SMSE Kriterine göre Bazı Tahmin Ediciler Üzerindeki Üstünlüğü.....	100
4.8. Lineer Modelde $r - k$ Sınıfı Tahmin Edicinin Bazı Tahmin Edicilerden Üstünlüğü.....	104
4.8.1. Ortalama Kayıp Karşılaştırmaları.....	106
4.8.1.1. $r - k$ Sınıfı Tahmin Edici ile OLS Tahmin Edicisinin Karşılaştırılması.....	107
4.8.1.2. ORR Tahmin Edicisi ile OLS Tahmin Edicisinin Karşılaştırılması.....	107
4.8.1.3. PCR Tahmin Edicisi ile OLS Tahmin Edicisinin Karşılaştırılması.....	108
4.8.1.4. $r - k$ Sınıfı Tahmin Edicinin PCR Tahmin Edicisiyle Karşılaştırılması.....	109
4.8.1.5. $r - k$ Sınıfı Tahmin Edicinin ORR Tahmin Edicisiyle Karşılaştırılması.....	109
4.8.1.6. PCR Tahmin Edicisinin ORR Tahmin Edicisi ile Karşılaştırılması.....	109
4.8.2. Koşullar için Hipotez Testleri.....	110
4.9. Uyarlanmış ve Kısıtlı $r - k$ Sınıfı Tahmin Edici.....	112
4.9.1. Yeni Tahmin Ediciler.....	112
4.10. Lineer Regresyon Modelinde Hataların İlişkili Olması Durumunda $r - k$ Sınıfı Tahmin Edici.....	118
4.10.1. MSE Karşılaştırmaları.....	119
4.10.1.1. $r - k$ Sınıfı Tahmin Edicinin GLS Tahmin Edici ile Karşılaştırılması.....	119

4.10.1.2. ORR Tahmin Edicinin GLS Tahmin Edici ile Karşılaştırılması	120
4.10.1.3. $r-k$ Sınıfı Tahmin Edicinin PCR Tahmin Edici ile Karşılaştırılması	121
4.10.1.4. $r-k$ Sınıfı Tahmin Edicinin ORR Tahmin Edici ile Karşılaştırılması	122
4.10.2. Karşılaştırmalar için Hipotez Testleri	122
4.11. Çoklu İç İlişki Probleminin Giderilmesi için Uyarlanmış İki Parametrelili Tahmin Edici	125
4.11.1. Model ve Bilinen Tahmin Ediciler	127
4.11.2. Önerilen Bazı Tahmin Ediciler Hakkında Notlar	128
4.11.3. Kriterler, Yanlılık Parametrelerinin Seçimi ve Karşılaştırmalar ..	132
4.11.4. Uygulama	135
5. SONUÇLAR	141
KAYNAKLAR	143
ÖZGEÇMİŞ	151



ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 3.1. Gerçek parametre (çarpı) ve 30 OLS tahmini (kutular).....	28
Şekil 3.2. Gerçek parametre (çarpı), bazı OLS tahminleri (kutular) ve 30 Temel bileşen tahminleri (çemberler).....	29
Şekil 3.3. $\hat{\beta}(k)$ ve $\hat{\beta}$ 'nın SMSE'sinin k 'ya bağlı grafiği (Hoerl ve Kennard, 1970)	37





TABLÖLAR DİZİNİ**SAYFA**

Tablo 4.1. Zeytinyağı verileri için SMSE sonuçları	139
Tablo 4.2. Zeytinyağı verileri için CVEP sonuçları.....	140





SİMGELER VE KISALTMALAR

p.d.	: Pozitif tanımlı (Positive definite)
n.n.d.	: Negatif olmayan tanımlı (Non-negative definite)
BLUE	: En iyi lineer yansız tahmin edici (Best Linear Unbiased Estimator)
MVUE	: Minimum varyanslı yansız tahmin edici (Minimum Variance Unbiased Estimator)
VIF	: Varyans Şişirme Faktörü (Variance Inflation Factor)
OLS	: En küçük kareler (Ordinary Least Squares)
GLS	: Genelleştirilmiş en küçük kareler (Generalized Least Squares)
ROLS	: Kısıtlı en küçük kareler (Restricted Ordinary Least Squares)
PLSR	: Kısmi en küçük kareler regresyon (Partial Least Squares Regression)
ORR	: Ridge regresyon (Ordinary Ridge Regression)
PCR	: Temel bileşenler regresyon (Principal Component Regression)
GRR	: Genelleştirilmiş ridge regresyon (Generalized Ridge Regression)
ME	: Marquardt tahmin edici (Marquardt Estimator)
URR	: Yansız ridge regresyon (Unbiased Ridge Regression)
MRR	: Uyarlanmış ridge regresyon (Modified Ridge Regression)
LE	: Liu tahmin edici (Liu Estimator)
RL	: Kısıtlı Liu (Restricted Liu)
RRR	: Kısıtlı ridge regresyon (Restricted Ridge Regression)
TP	: İki parametrelili (Two Parameter)
PCTP	: İki parametrelili temel bileşenler (Two Parameter Principal Component)
RPCR	: Kısıtlı temel bileşenler regresyon (Restricted Principal Component Regression)
LTE	: Liu-tipi tahmin edici (Liu-Type Estimator)

MCRR	: Uyarlanmış $r - k$ sınıfı ridge regresyon (Modified $r - k$ Class Ridge Regression)
RPCRE	: Ridge temel bileşenler regresyon tahmin edici (Ridge Principal Component Regression Estimator)
LPCRE	: Liu temel bileşenler regresyon tahmin edici (Liu Principal Component Regression Estimator)
$pmse$	: Skaler değerli kestirimci hata kareler ortalaması (Scalar Prediction Mean Square Error)
$pmmse$	: Matris değerli kestirimci hata kareler ortalaması (Matrix Prediction Mean Square Error)
MMSE	: Matris değerli hata kareler ortalaması (Matrix Mean Square Error)
SMSE	: Skaler değerli hata kareler ortalaması (Scalar Mean Square Error)
CVEP	: Öngörü hatasının çapraz geçerliliği (Cross Validation Error of Prediction)
GMSE	: Genelleştirilmiş hata kareler ortalaması (Generalized Mean Square Error)
$L(\tilde{\beta})$	: $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin matris değerli karesel kayıp fonksiyonu
$Var(\tilde{\beta})$	: $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin varyans-kovaryans matrisi
$Bias(\tilde{\beta})$	: $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin yanlılığı
$\hat{\beta}$	: En küçük kareler tahmin edici
$\hat{\beta}_r$	: Kısıtlı en küçük kareler tahmin edici
$\hat{\beta}_{PCR}$	: Temel bileşenler tahmin edicisi
$\hat{\beta}_{PCR_c}$	: Marquardt tahmin edici

$\hat{\beta}(k)$	: Ridge tahmin edici
$\hat{\beta}(K)$	: Genelleştirilmiş Ridge tahmin edici
$\hat{\beta}_r(k)$	: Kısıtlı Ridge Tahmin Edici
$\hat{\beta}(k, b)$	: Uyarlanmış Ridge tahmin edici
$\hat{\beta}_d$	: Liu tahmin edici
$\hat{\beta}_{rd}$	: Kısıtlı Liu tahmin edici
$\hat{\beta}(r, k)$	: $r - k$ sınıfı tahmin edici
$\hat{\beta}_r(r, k)$	: Kısıtlı $r - k$ sınıfı tahmin edici
$\hat{\beta}_r(k, J)$	: Uyarlanmış $r - k$ sınıfı ridge regresyon tahmin edicisi
$\hat{\beta}(k, J)$	: Yansız ridge tahmin edici
$\hat{\beta}(r, d)$	: $r - d$ sınıfı tahmin edici
$\hat{\beta}_r(r, d)$	: Kısıtlı $r - d$ sınıfı tahmin edici
$\hat{\beta}(k, d)$	: İki parametrelili tahmin edici
$\hat{\beta}_r(k, d)$	: İki parametrelili temel bileşenler tahmin edici



1. GİRİŞ

1.1. Temel Bileşenler Analizinin Tarihsel Gelişimi

İstatistiksel yöntemlerin kökenini araştırmak zordur. Presendorfer ve Mobley (1988), Beltrami (1873) ve Jordan'ın (1874) birbirlerinden bağımsız olarak türettikleri temel bileşenler analizinin kökenini oluşturan tekil değer ayrışımı analizinin (SDV) üzerinde durmuşlardır. Fisher ve Mackenzie (1923) tekil değer ayrışımı analizini, tarımsal bir denemenin iki yönlü bir analizi bağlamında kullanmışlardır. Buna ek olarak, şu anda bu tekniğin en eski tanımlarının Pearson (1901) ve Hotelling (1933) tarafından verildiği kabul edilmektedir. Hotelling'in araştırması iki bölümden meydana gelmektedir. En önemli bölüm, Bryant ve Atchley (1975) 'in düzenlediği çalışmaların içerisinde yer almaktadır.

Diğer çalışmalar, Hotelling (1933) tarafından yapılan çalışmadan farklı yaklaşımlar kullanarak uyarlanmıştır. Diğer taraftan, Pearson (1901) , p-boyutlu uzayda bir dizi noktaya en uygun doğruları ve düzlemleri keşfetmekle ilgilenmektedir.

Rao (1964) ve Frisch (1929) , Pearson'a benzer bir yaklaşım sergiler. Fakat, bunlarla alakalı çok az sayıda yayın mevcuttur. Ayrıca, Thurstone (1931) Hotelling'e yakın çalışma alanı benimsemiştir. Fakat, Bryant ve Atchey (1975), çalışmalarında temel bileşenler analizi yerine faktör analizi yer almıştır. Hotelling'in yaklaşımları faktör analizinden yola çıksa da, tanımladığı temel bileşenler analizi ile faktör analizi birbirinden çok bağımsızdır.

Hotelling, ilk olarak orijinal p-değişkenlerini tanımlayan, bağımsız ve daha küçük temel değişkenler kümesi olabileceğini öngörür. Hotelling, bu tür değişkenlerin psikolojide "faktör" olarak belirtildiği, matematikteki "faktör" kelimesinin farklı kullanımıyla karıştırılmaması için "bileşenler" kelimesini ortaya çıkarır. Hotelling, toplam varyansa en büyük katkıyı sağlayacak şekilde bileşenlerini seçer ve bu şekilde ortaya çıkan analiz "temel bileşenler analizi" olarak adlandırılır.

Hotelling'in Lagrange çarpanlarından yararlanan ve özdeğer/özvektör problemi ile biten temel bileşenlerin türetilmesi 3 açıdan farklılık gösterir. İlk olarak kovaryanstan ziyade bir korelasyon matrisi ile fayda sağlar. İkincisi, orijinal değişkenlerle ifade edilen bileşenlerden ziyade, bileşenlerin doğrusal işlevleri olarak ifade edilen orijinal değişkenlere bakar. Üçüncü olarak, matris notasyonları kullanılmaz.

Sonrasında Hotelling, güç yöntemini kullanmıştır. Bu sayede, bileşenlerin bulunması yönünde çalışmalar yürütmüştür. Ayrıca, çok değişkenli normal dağılımlar için sabit olasılıklı elipsoidler açısından değişik bir geometrik yorum öne sürer. Bununla birlikte, çalışmasının ikinci kısmında önemli ölçüde faktör analizine yer vermiştir.

Hotelling (1936) 'in ilerleyen zamanlarda yaptığı araştırma, temel bileşenlerin bulunması için güç yönteminin hızlandırılmış halini vermiştir. Girshick (1936) bazı farklı temel bileşen oluşturma yöntemlerini geliştirmiştir. Ayrıca, temel bileşenlerin varyans ve katsayılarının asimptotik örneklem dağılımlarını incelemiştir. Fakat, 25 yıl süresince temel bileşenler analizinin ilerleyişinde fazla bir katkının sağlandığı görülmemektedir. Buna istinaden yine de uygulama ve teorik kısımları ile ilgili gelişmeler olmuştur. Pearson'un bazı girişimlerine rağmen, p'nin 4 ya da daha az olması gerekir. Aksi takdirde, temel bileşenler analizini elle yapmak imkansızdır.

Temel bileşenler analizi ile alakalı dört çalışmadan bahsedilecektir. Anderson (1963) bu çalışmalardan ilki, içlerinde en teorik olan çalışmadır. Girshick (1939)'in daha önceki çalışmalarına dayanan örnek temel bileşenlerin katsayıları ve varyanslarının asimptotik örneklem dağılımlarını sorgulamış ve ileri bir zamandaki teorik gelişmelere sıklıkla değinilmiştir.

Rao (1964)'nun çalışması, temel bileşenler analizinin tanıtılması ve yorumlanması ile ilgili çokça yeni düşüncelere yer vermektedir.

Gower (1966), temel bileşenler analizi ve diğer çeşitli istatistiksel yöntemlerin birbirleriyle olan bağlantılarını araştırmıştır.

Jeffers (1967), temel bileşenler analizinin basit bir boyut küçültme tekniğinin ötesine geçtiği çalışmalarının uygulanabilir yönüne ivme kazandırmıştır.

Bu değerli çalışmaların üstüne, Preisendorfer ve Mobley (1988) tarafından yazılan kitaplar da eklenebilir. Bu kitap, meteoroloji ve okyanus bilimleri haricinde nispeten bilinmemekle birlikte okunması kolay değildir. Kitabın çoğunluğu birkaç sene boyunca Preisendorfer tarafından yazılmıştır. Ancak, onun ölümünden sonra el yazısı Mobley tarafından düzenlenmiştir.

Yöntemin belirgin sadeliğine rağmen, temel bileşenler analizinde hala çokça araştırma yapılmaktadır. Tarım, biyoloji, kimya, klimatoloji, demografi, ekoloji, ekonomi, gıda araştırmaları, genetik, jeoloji, meteoroloji, okyanus bilimi, psikoloji ve kalite kontrol uygulamalarını içeren kitaplar veya makalelerden bahsedilmektedir. Bu liste daha fazla genişletilebilir (Jolliffe, 2002).

1.2. Lineer Regresyon Modeli

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim (0, \sigma^2 I) \quad (1.1.)$$

şeklinde çoklu lineer regresyon modeli verilmiştir. Burada, y ($n \times 1$) boyutlu yanıt değişkenlerin vektörü, X ($n \times p$) boyutlu stokastik olmayan, tam sütun ranklı açıklayıcı değişkenlerin bir matrisi, β ($p \times 1$) boyutlu bilinmeyen parametrelerin vektörü ve ε ($n \times 1$) boyutlu rastgele hataların bir vektörüdür.

Çoklu lineer regresyonda amaç, iki veya daha fazla açıklayıcı değişken ile yanıt değişken arasında doğrusal bağlantının varlığını araştırmaktır.

X matrisi tam sütun ranklı bir matris değilse ve $Rank(X'X) = p$ ise $X'X$ matrisi tekil değildir. $Rank(X) < p$ durumunda, $(X'X)$ matrisi tekil olur. $(X'X)$ matrisinin tersi alınabilir olsa da çoklu iç ilişkiden söz edilebilir. Bu durumda, tahmin edilen parametreler tutarsız çıkacak ve tahminlerin varyansı oldukça büyük olacaktır.

$E(\varepsilon) = 0$ eşitliği sağlanamadığında, tahmin edilen parametreler kendi değerlerinden oldukça farklı çıkacaktır.

Hatalar sabit varyanslıdır. $Var(\varepsilon) = (\sigma^2 I)$ ve hatalar birbirleri ile ilişkili değildir:

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.2.)$$

En küçük kareler (OLS) yöntemi lineer regresyon modelinde bilinmeyen parametrelerin tahmin edilmesi için kullanılan bir yöntemdir. Eğer X matrisi tam sütun ranklı bir matris ise model (1.1.)'de β parametre vektörünün OLS tahmin edicisi,

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y \quad (1.3.)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece, $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})$ ifadesini minimum yapan $\hat{\beta}$ (1.3.) ile verilen, OLS tahmin edicisi olur. $\hat{\beta}$ 'nın gerçek parametre vektörü olan β 'ya uzaklığının karesi,

$$L_1^2 = (\hat{\beta} - \beta)'(\hat{\beta} - \beta) \quad (1.4.)$$

ve bu uzunluğun karesinin beklenen değeri olan $E(L_1^2)$,

$$E(L_1^2) = \sigma^2 \text{tr}(X'X)^{-1} \quad (1.5.)$$

'dir. Bu matrisin izi aynı zamanda özdeğerlerinin toplamına eşit olduğundan,

$$E(L_1^2) = \sigma^2 \sum_{j=1}^p \frac{1}{\lambda_j}, \quad \lambda_j > 0$$

eşitliği verilir ve $\lambda_j, j = 1, \dots, p$, $X'X$ 'in özdeğerleridir.

Çoklu iç ilişki problemi varsa, λ_j 'nin en az biri küçük ve $\hat{\beta}$ vektörü çoğunlukla β vektöründen daha uzun olacaktır.

OLS tahmin edicisi yansız bir tahmin edicidir, yani;

$$E(\hat{\beta}) = \beta \quad (1.6.)$$

ve varyans-kovaryans matrisi şu şekildedir:

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1} \quad (1.7.)$$

Gauss-Markov teoremi, $\hat{\beta}$ tahmin edicisinin en iyi lineer yansız tahmin edici olduğunu belirtmiştir. Yani $\hat{\beta}$, tüm yansız tahmin ediciler sınıfları arasında en küçük varyansa sahiptir (BLUE). Eğer, ε_i hatalarının normal dağılıma sahip olduğu kabul edilirse $\hat{\beta}$, β 'nın maximum likelihood tahmin edicisi olur ve böylece maximum likelihood tahmin edicisi β 'nın minimum varyanslı tahmin edicisi (MVUE)'dir.

Çoklu iç ilişkiyi tamamen gidermek veya şiddetini azaltmak için OLS yöntemi yetersiz olur. Dolayısıyla farklı tahmin yöntemleri, yani yanlış tahmin ediciler buna alternatif olarak ele alınmıştır.

1.3. Lineer Tahmin Ediciler

Tanım 1.1. β , $(p \times 1)$ boyutlu bir parametre vektörü olsun. Bu vektör için lineer tahmin ediciler şu şekildedir:

$$\tilde{\beta} = Ay + a \quad (1.8.)$$

Bu eşitlikte, A $(p \times n)$ boyutlu stokastik olmayan bir matristir. a , $(p \times 1)$ boyutlu ve stokastik olmayan bir vektörü gösterir.

Eğer, $a \neq 0$ olursa $\tilde{\beta}$ homojen olmayan, $a = 0$ olursa $\tilde{\beta}$ homojen lineer tahmin edici adını alır. Böylece, β parametresinin OLS tahmin edicisi $A = (X'X)^{-1}X'$ ve $a = 0$ olmak üzere homojen lineer bir tahmin edicidir.

1.4. Tahmin Edicilerin İyiliğini Belirlemek İçin Kullanılan Kriterler (Kayıp Fonksiyonları ve Risk)

Tanım 1.2. Ω parametre uzayında bulunan θ parametresi ve bu parametrenin tahmin edicisini $\hat{\theta}$ olarak tanımlayalım. $L(\hat{\theta}, \theta)$ fonksiyonu aşağıda verilen maddeleri sağlaması durumunda kayıp fonksiyonu adını alır.

i) $\forall \theta \in \Omega$ ve $\forall \hat{\theta}$ için $L(\hat{\theta}, \theta) > 0$

ii) $\theta = \hat{\theta}$ için $L(\hat{\theta}, \theta) = 0$

$\tilde{\beta}$, β 'nın bir tahmin edicisi ve $\tilde{\beta}$ 'nın kayıp fonksiyonu $L(\tilde{\beta})$ olsun.

Tanım 1.3. $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin $L(\tilde{\beta})$ kayıp fonksiyonu altındaki beklenen kaybı,

$$R(\tilde{\beta}) = E(L(\tilde{\beta})) \quad (1.9.)$$

$\tilde{\beta}$ 'nın $L(\tilde{\beta})$ kayıp fonksiyonu altındaki riskidir.

Tanım 1.4. A , $(m \times m)$ boyutlu simetrik matris ve x , $(m \times 1)$ boyutlu bir vektörse, $\forall x \neq 0$ p.d. (positive definite) durumunda $x'Ax > 0$ ise A matrisi pozitif tanımlıdır.

Tanım 1.5. A $(m \times m)$ boyutlu simetrik matris ve x , $(m \times 1)$ boyutlu bir vektörse, $\forall x \neq 0$ durumunda $x'Ax \geq 0$ ise A matrisi n.n.d.'dir (non-negative definite).

Tanım 1.6. $\tilde{\beta}_1$ ve $\tilde{\beta}_2$, β 'nın tahmin edicileridir. $R(\tilde{\beta}_2) - R(\tilde{\beta}_1) \geq 0$ durumunda $L(\tilde{\beta})$ kayıp fonksiyonu için $\tilde{\beta}_1$ tahmincisi, $\tilde{\beta}_2$ tahmincisinden üstündür.

Tanım 1.7. $G : (n \times n)$ ve $H : (n \times n)$ boyutlu iki matris olsun. $|G - \lambda H| = 0$ ifadesini sağlayan $\lambda_i = \lambda_i^H(G)$ ($i=1, \dots, n$) denkleminin kökleri G 'nin H metriğindeki özdeğerleri olarak ifade edilir.

1.4.1. Matris Değerli Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Hata Kareler Ortalaması (MSE)

$\tilde{\beta}$ tahmin edicisi için matris değerli karesel kayıp fonksiyonu,

$$L(\tilde{\beta}) = (\tilde{\beta} - \beta)(\tilde{\beta} - \beta)' \quad (1.10.)$$

olarak ifade edilir. Bu fonksiyon için MMSE,

$$MMSE(\tilde{\beta}) = E \left[(\tilde{\beta} - \beta)(\tilde{\beta} - \beta)' \right] \quad (1.11.)$$

şeklinde ifade edilir. $Bias(\tilde{\beta})$, $\tilde{\beta}$ 'nin yanlışlık parametresi olarak kabul edilirse,

$$MMSE(\tilde{\beta}) = Var(\tilde{\beta}) + Bias(\tilde{\beta}) Bias(\tilde{\beta})' \quad (1.12.)$$

şeklinde yazılır.

1.4.2. Skaler Değerli Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Hata Kareler Ortalaması

$\tilde{\beta}$ tahmin edicisi için skaler değerli karesel kayıp fonksiyonu,

$$L(\tilde{\beta}) = (\tilde{\beta} - \beta)'(\tilde{\beta} - \beta) \quad (1.13.)$$

olarak ifade edilir. Bu eşitliğe göre risk

$$SMSE(\tilde{\beta}) = E \left[(\tilde{\beta} - \beta)'(\tilde{\beta} - \beta) \right] \quad (1.14.)$$

skaler değerli hata kareler ortalaması olarak adlandırılır. SMSE, matris değerli hata kareler ortalamasının izi olarak şu şekilde ifade edilmektedir,

$$SMSE(\tilde{\beta}) = trE \left[(\tilde{\beta} - \beta)(\tilde{\beta} - \beta)' \right] = trMMSE(\tilde{\beta}) \quad (1.15.)$$

Böylece matris değerli MMSE, skaler değerli SMSE'ye göre çok daha iyi bir ölçüte sahiptir.

1.4.3. Ağırlıklandırılmış Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Risk

$(p \times p)$ boyutlu, simetrik ve pozitif tanımlı bir W matrisi verilsin. $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin ağırlıklandırılmış karesel kayıp fonksiyonu şu şekildedir

$$L_w(\tilde{\beta}) = (\tilde{\beta} - \beta)' W (\tilde{\beta} - \beta). \quad (1.16.)$$

Eğer, skaler değerli bir kayıp fonksiyonu elde edilmişse $W = I_p$ olarak alınmıştır. $W \neq I_p$ olarak alınması daha yararlı olabilir.

$$WMSE(\tilde{\beta}) = trE \left[(\tilde{\beta} - \beta) W (\tilde{\beta} - \beta)' \right] = trWMMSE(\tilde{\beta}) \quad (1.17.)$$

ifadesi, MSE cinsinden $L_w(\tilde{\beta})$ 'ya göre riski ifade eder.

1.4.4. Kestirimci Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Risk

$\tilde{\beta}$, β 'nın bir tahmin edicisi ve $\tilde{\beta}$ için kestirimci karesel kayıp fonksiyonu

$$L_p(\tilde{\beta}) = (y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta}) \quad (1.18.)$$

şeklinde ifade edilir. y 'nin tahmini çoğunlukla, gelecekteki X 'ler için $X\tilde{\beta}$ kestiricisi ile yapılmaktadır. Bu kayıp fonksiyonuna istinaden risk

$$pmse(\tilde{\beta}) = E \left[(y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta}) \right] \quad (1.19.)$$

skaler değerli kestirimci hata kareler ortalaması (scalar prediction mean square error, pmse) olarak ifade edilir. Matris değerli kestirimci hata kareler ortalaması (Matrix Prediction Mean Square Error, pmmse) ise şu şekilde ifade edilir

$$pmmse(\tilde{\beta}) = E \left[(y - X\tilde{\beta})(y - X\tilde{\beta})' \right] \quad (1.20.)$$

1.4.5. Dengeli Kayıp Fonksiyonu

$\tilde{\beta}$, β 'nın bir tahmin edicisi olmak üzere Zellner (1994) bir tahmin edicinin uyum iyiliğini ve tahmin hassaslığını bütünleştirecek dengeli kayıp fonksiyonunu şu şekilde tanımlamıştır

$$L_w(\tilde{\beta}) = w(y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta}) + (1-w)(\beta - \tilde{\beta})'(\beta - \tilde{\beta}) \quad (1.21.)$$

Burada, bir ölçüt olarak $(y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta})$ uyum iyiliğini ve $(\beta - \tilde{\beta})'(\beta - \tilde{\beta})$ tahminin hassaslığını verir. Ayrıca w , modelin iyiliğinin

ölçütüne verilen ağırlık ve $(1 - w)$, tahminin yakınlığına verilen ağırlık olarak belirtilmektedir.

1.4.6. Mahalanobis Kayıp Fonksiyonu

$\tilde{\beta}$, β 'nın bir tahmin edicisi ve $Var(\tilde{\beta})$, $\tilde{\beta}$ 'nın varyans kovaryans matrisidir. Böylelikle Mahalanobis kayıp fonksiyonu,

$$L_M(\tilde{\beta}) = (\tilde{\beta} - \beta)' Var(\tilde{\beta})^{-1} (\tilde{\beta} - \beta) \quad (1.22.)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Tanımlanan bu fonksiyon, normal kitlelerin sınıflandırılmasında minimum mesafe kuralı olarak da bilinmektedir. Bu kayıp fonksiyonu, tahmin edicilerden birinin yanlı olması durumunda bu tahmin edicilerin karşılaştırılması için uygun bir fonksiyondur. Eğer tahmin edicilerin ikisi de yansız ise, bu tahmin edicileri birbirinden ayırt edemez (Özkale, 2007; Üstündağ, 2011; Toker, 2011, 2015; Özbay, 2017).



2. ÇOKLU İÇ İLİŞKİ

Çoklu doğrusallık terimi, açıklayıcı değişkenlerin (X_j) iki veya daha fazlası arasında tam doğrusal bir ilişkinin olduğu duruma karşılık gelir.

Bu durum, parametre tahminlerinin oldukça kararsız olmasına sebep olur. Çoklu iç ilişki probleminin varlığı durumunda regresyon katsayılarının OLS tahmin edicileri yansız olmaya devam eder. Bununla birlikte, bu tahmin edicilerin varyans ve kovaryansları büyük değer çıkma yatkinlığına sahiptir. Bunun sonucunda, güven aralıkları olması gerekenden daha geniş olabilecektir ve hipotez testlerinde güven eksikliği ortaya çıkacaktır. Ayrıca, parametre tahminlerinin olağan işaretlere sahip olmama durumu ve bunun sonucunda parametre tahminlerinde büyük sapmalar meydana gelmesi söz konusu olacaktır.

OLS tahmin edicileri, çoklu iç ilişki durumundan olumsuz etkileneceğinden dolayı, eğer modelde çoklu iç ilişki problemi mevcut ise yanlış fakat, kararlı tahmin edicilere başvurulur. Model (1.1.)’deki çoklu lineer regresyon modelini düşünelim ve,

$$\sum_{j=1}^p a_j x_j = 0 \quad (2.1.)$$

şeklinde tamamı sıfır olmayan $a_1, a_2, \dots, a_p$ sabit kümesi var ise $x_1, x_2, \dots, x_p$ vektörleri lineer bağımlıdır ve doğrusal bağlantılı olduğu görülmektedir. Herhangi bir X sütunlarının kümesi için, bu ifade sağlanıyorsa, tam çoklu iç ilişki olduğu söylenir (Silvey, 1969).

Böylece $Rank(X) < p$ olur ve $X'X$ matrisi tekildir. Eğer, X ’in sütunlarının bir takım alt kümeleri için yaklaşık olarak doğrusal bir ilişki varsa, yaklaşık çoklu iç ilişki vardır.

$X'X$ matrisi tekile yakın fakat, tekil olmayan bir matristir ($|X'X| \neq 0$).

Bu durumda, $X'X$ matrisinin tersi alınabilmektedir. Fakat, OLS yönteminde parametrelerin standart hataları kendisinden çok daha büyük elde edilecektir.

2.1. Çoklu İç İlişkinin Nedenleri

- 1. Örnekleme Yöntemleri:** Açıklayıcı değişkenlerin aldığı değerlerin kısıtlı bir uzayından örneklem alınması çoklu iç ilişkiye sebep olur.
- 2. Model veya Kitledeki Kısıtlamalar:** Model veya kitledeki kısıtlamalar genellikle çoklu iç ilişkiye sebep olur. Örnek olarak, Bir evdeki doğalgaz kullanımına bakarsak, ev halkının gelirinin ve ev genişliğinin doğalgaz kullanımındaki etkisi incelendiğinde, ev halkı geliri ve ev genişliği açıklayıcı değişkenleri arasında çoklu iç ilişki söz konusu olduğu görülmektedir. Burada çoklu iç ilişki olmasının sebebi, geliri yüksek olan ailelerin daha geniş evlerde oturuyor olmasıdır.
- 3. Modelin Kurulması:** X açıklayıcı değişkenlerin aralığı küçük iken, herhangi bir regresyon modeline polinomal ifadelerin dahil edilmesi çoklu iç ilişkiye sebep olabilir.
- 4. Modelin Aşırı Tanımlanması Durumu (Overdefined):** Açıklayıcı değişken sayısının gözlemlerden fazla olduğu modeller aşırı tanımlanmış model olarak tanımlanır. Daha çok tıbbi bilimlerde karşılaşılan aşırı tanımlanmış modeller, açıklayıcı değişkenler ile alakalı verilerin elde edilemediği zamanlarda ortaya çıkmaktadır. Bu gibi durumlarda, bazı açıklayıcı değişkenleri modelden çıkararak, modeli daha az sayıda açıklayıcı değişkenler ile yeniden oluşturmak gerekmektedir.

2.2. Çoklu İç İlişkinin Belirlenmesi

Çoklu iç ilişkinin belirlenmesi için bir çok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin bazıları şunlardır:

1. Açıklayıcı Değişkenler Arasındaki Korelasyonların Analiz Edilmesi:

Açıklayıcı değişkenler arasındaki korelasyon katsayılarının yüksek derecede olması çoklu iç ilişkinin varlığını ifade eder. Korelasyon matrisi olan $X'X$ in köşegenleri dışındaki elemanları, açıklayıcı değişkenler arasındaki korelasyon katsayılarını gösterir. X_i ve X_j açıklayıcı değişkenlerinde doğrusal bağımlılık varsa $|r_{ij}| \cong 1$ olur.

2. Varyans Şişirme Faktörü (VIF): Parametre tahminlerinin ve varyanslarının çoklu iç ilişki sebebi ile asıl değerlerinden ne kadar uzaklaştığını ifade eder. $X'X$ matrisinin asal köşegen elemanları, yani j -inci köşegen elemanları, j -inci varyans şişirme faktörü değerlerini (VIF_j) gösterir.

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2}, \quad 0 \leq R_j^2 \leq 1 \quad (2.2.)$$

Her bir tahmin edicinin çoklu belirleyicilik katsayısı olan R_j^2 , X_j 'nin geriye kalan $(p-1)$ açıklayıcı değişkenle aralarında lineer bir ilişki söz konusuysa 1'e yaklaşır ve VIF_j büyür. $VIF_j > 10$ ise, çoklu iç ilişkiden söz edilebilir.

Çoklu iç ilişki olması halinde, j -inci regresyon katsayısı için meydana getirilen güven aralığının büyümesi bir ölçüt olarak ele alınabilir.

j -inci regresyon katsayısı için güven aralığının uzunluğu $L_j = 2(VIF_j \hat{\sigma}^2)^{1/2} t_{\frac{\alpha}{2}, n-p-1}$ olarak ifade edilir. Açıklayıcı değişkenler arasında

korelasyon eğer sıfır olursa, güven aralığı: $L_j^* = 2\hat{\sigma}^2 t_{\frac{\alpha}{2}, n-p-1}$ şeklinde olur.

Böylece, $\frac{L_j}{L_j^*}$ çoklu iç ilişki sebebiyle j-inci regresyon katsayısı için oluşturulan

güven aralığının ne kadar büyük olduğunu ortaya çıkarır.

3. $X'X$ Matrisinin Özdeğerlerinin Analizi: Çoklu iç ilişki durumunda $X'X$ korelasyon matrisinin özdeğerlerinden en az biri küçük olacaktır. X 'in sütunlarındaki yaklaşık lineer bağımlılık, özdeğerlerin küçük olmasından kaynaklı olduğunu gösterir. $\lambda_{\max}$ ve $\lambda_{\min}$, $X'X$ matrisinin maksimum ve minimum özdeğerlerini ifade eder ve,

$$K = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (2.3.)$$

şeklinde tanımlanır.

K değerinin 100'den büyük olması kuvvetli çoklu iç ilişki olduğunu gösterir. Bunun haricinde çoklu iç ilişkinin belirlenmesinde bir diğer ölçüt koşul indeksidir.

$$\sqrt{K} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \quad (2.4.)$$

şeklinde hesaplanır.

Koşul indeksi, 10 ile 30 arasında bir değer elde edilmesi durumunda, orta dereceden biraz daha yüksek derecede, 30'dan büyük bir değer elde edilmesi durumunda ise kuvvetli derecede çoklu iç ilişkinin olduğu kabul edilir.

4. Çoklu İç İlişkiyi Açığa Çıkaran Diğer Yöntemler ($X'X$ Matrisinin Determinantı): Korelasyon matrisinin determinantının değer aralığı $0 \leq |X'X| \leq 1$ 'dir. $|X'X| = 1$ ise açıklayıcı değişkenler ortogonaldır ve çoklu iç ilişkiden söz edilemez. Diğer türlü, $|X'X| = 0$ durumunda açıklayıcı değişkenler arasında tam çoklu iç ilişki söz konusudur. Eğer, $|X'X|$ değeri sıfıra yaklaşırsa tama yakın çoklu iç ilişkiden söz edilebilir (Farrar ve Glayber, 1967).

Çoklu iç ilişkinin belirlenmesinde yararlanılan bu farklı yöntemler, problemin kesin olarak açığa çıkarılması için , tamamının bir bütün olarak değerlendirilmesi gerekmektedir. Yani bu sorunun açığa çıkarılması için tek tip yaklaşım yeterli olmayacaktır.

2.3. Çoklu İç İlişkinin Sonuçları

Çoklu iç ilişki probleminde, açıklayıcı değişkenler arasındaki ilişki sebebiyle bazı problemler ortaya çıkar. Bu problemin OLS tahmin edicilerinde bazı etkileri mevcuttur. Bunlar şu şekilde açıklanabilir:

1. Çoklu iç ilişki OLS tahmin edicilerin olduğundan daha yüksek değere sahip olmasına sebep olur. Bu da, $X'X$ matrisinin özdeğerlerinin küçük olma eğilimi gösterdiğini açıklar. OLS tahmincisinin parametre vektörü ile tahmin vektörü arasındaki uzaklığın ($\hat{\beta}$ ile β) karesi L^2 ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, $X'X$ matrisinin özdeğerleri olsun. Eşitlik (1.4.), (1.5.) ve $E(L^2) = \sigma^2 \sum_{j=1}^p \frac{1}{\lambda_j} H_0$ sonucuna istinaden, özdeğerlerin küçük olması, $\hat{\beta}$ ile β arasındaki uzaklığın büyük olmasını açıklamaktadır.

2. Çoklu iç ilişkinin varlığında, $\hat{\beta}$ 'nın β 'dan büyük olduğu görülür.

$$\begin{aligned} E(L^2) &= E(\hat{\beta} - \beta)'(\hat{\beta} - \beta) \quad \text{ve} \quad E(L^2) = \sigma^2 \text{tr}(X'X)^{-1} \\ &= E(\hat{\beta}'\hat{\beta} - 2\hat{\beta}'\beta + \beta'\beta) \\ E(\hat{\beta}'\beta) &= \beta'\beta + \sigma^2 \text{tr}(X'X)^{-1} \\ &= \beta'\beta + E(L^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemden yola çıkarak OLS yöntemi, çoklu iç ilişki arttıkça katsayıların mutlak değerce büyük tahmin edicilerini elde etmiş olur.

3. Parametre tahmin edicilerinin standart hataları büyük olduğunda, t değerinin sıfırdan önemli ölçüde farklı olmadığı görülür. Yani t değeri küçük bulunur. Bunun sonucunda t -testi anlamsız bulunur ve H_0 hipotezi kabul edilir. Bu gibi durumlar, tam çoklu iç ilişki varlığında ortaya çıkar. Ayrıca, tam çoklu iç ilişki durumunda parametreler tahmin edilemez, R^2 değeri yüksek çıkar ve F - testi anlamlı olur.

2.4. Çoklu İç İlişki Probleminin Çözüm Yöntemleri

1. Ek Bilginin Toplanması:

Çoklu iç ilişki probleminde ek verilerin toplanması ve bunların analize dahil edilmesi bu problemi büyük oranda ortadan kaldırır. Ek bilgilerin olması daha anlaşılır bilgiler elde edilmesini sağlar. Ne yazık ki, bazı kısıtlamalar sebebiyle veri toplamak her zaman mümkün olmayabilir. Böylelikle, ne kadar ek veri toplanırsa çoklu iç ilişki problemi o kadar yüksek oranda ortadan kaldırılmış olur.

2. Modelin Yeniden Belirlenmesi (Değişken Seçimi):

Çoklu iç ilişki probleminin kaynağı, model ve buna bağlı olarak açıklayıcı değişken seçimidir. Açıklayıcı değişkenlerin tekrardan tanımlanması veya modelden çıkarılması çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmada iyi bir metot olacaktır. Fakat, modelden açıklayıcı değişken çıkarılması sonucunda katsayı tahminleri gerçek değerinin dışında tahmin edilebilir. Bu da modelin etkinliğini indirgeyebilir. Ayrıca, çoklu iç ilişki varlığında OLS tahmin edicilerinin yansız fakat, varyanslarının büyük olması, yanıt değişken üzerindeki etkisi en az olan açıklayıcı değişken veya değişkenlerin modelden çıkarılması ve bunun sonucunda varyansın azaltılması ile çoklu iç ilişki probleminin ortadan kaldırılması veya şiddetinin azaltılması mümkün olacaktır.

3. Değişken Dönüştürme Yöntemi:

Çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldıran ya da şiddetini azaltan bu yöntem daha çok zaman serilerinde kullanılır.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t \quad (2.5.)$$

şeklinde bir zaman serisi modeli olsun. Açıklayıcı değişkenler arasındaki bağımlılığı 1 gecikme durumunda şu şekilde bir model oluşturulur,

$$y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 x_{1t-1} + \beta_2 x_{2t-1} + \varepsilon_{t-1} \quad (2.6.)$$

Birinci ve ikinci eşitliklerin farkları alınır, hata terimi $(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$ olur. Buradaki hata teriminin önceki dönemle ilişkili olması otokorelasyona sebep olacaktır.

4. Birbirleriyle bağlantılı olan iki açıklayıcı değişkenin toplanarak tek bir açıklayıcı değişken olarak alınmasıyla çoklu iç ilişki problemi çözülebilir.

5. Son olarak ridge regresyon yöntemi veya birbirleriyle ilgisi olmayan bileşenleri üreten yöntem olan temel bileşenler yöntemi, çoklu iç ilişki probleminin çözümünü sağlayacaktır. (Büyüküysal, 2010).



3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

3.1. Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmin Edici

Çoklu iç ilişki probleminin olduğu (1.1.)’de verilen regresyon modeli için bilinmeyen parametre vektörü olan β ‘nın tahmin problemini göz önüne aldığımızda, $rank(X) = p$ kabul edelim. β üzerinde m lineer kısıtlaması durumunda,

$$H\beta = h \quad (3.1.)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $H (m \times p)$ boyutlu rankı m olan bir matris ve $h (m \times 1)$ boyutlu bir vektördür. Böylece, (3.1.) kısıtı altında, hata kareler toplamı olan $S(\beta)$ ‘nın minimum yapılması gerekir. Böylece, Lagrange fonksiyonu olan,

$$S(\beta, \lambda) = (y - X\beta)'(y - X\beta) - 2\lambda'(H\beta - h) \quad (3.2.)$$

eşitliğinin minimum olmasını isteriz. Burada $\lambda (m \times 1)$ boyutlu bir Lagrange çarpanıdır. $S(\beta, \lambda)$ ifadesinin λ ve β ‘ya göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$X'X\beta - X'y - H'\lambda = 0 \quad (3.3.)$$

$$H\beta - h = 0$$

normal denklemleri elde edilmiş olur. Bu normal denklemlerin çözümü sonucunda $\hat{\beta}_r$ ‘nin kısıtlı OLS (ROLS) tahmin edicisi,

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

$$\hat{\beta}_r = \hat{\beta} - (X'X)^{-1}H'[H(X'X)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\beta} - h) \quad (3.4.)$$

şeklinde yazılır. Böylece, kısıtlı OLS tahmin edicisi (3.1.) kısıtıyla OLS tahmin edicisini sağlayacak bir düzeltme teriminin toplanmasıyla,

$$H\hat{\beta}_r = H\hat{\beta} - H(X'X)^{-1}H'[H(X'X)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\beta} - h) = h \quad (3.5.)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen eşitliğin bu şekilde yazılması sebebiyle (3.1.) kısıtının doğrulandığı görülmektedir. Böylece, $\hat{\beta}_r$ tahmin edicisi yansız olur. Eğer, (3.1.) kısıtı doğru değilse $\hat{\beta}_r$ tahmin edicisi yanlı olur:

$$E(\hat{\beta}_r) = \beta - (X'X)^{-1}H'[H(X'X)^{-1}H']^{-1}(H\beta - h). \quad (3.6.)$$

$\hat{\beta}_r$ tahmin edicisinin varyans-kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}_r) &= \sigma^2(X'X)^{-1} - \sigma^2(X'X)^{-1}H'[H(X'X)^{-1}H']^{-1} \\ &\quad \times H(X'X)^{-1} \end{aligned} \quad (3.7.)$$

dir. Burada $\hat{\beta}_r$ tahmin edicisinin varyans-kovaryans matrisinin H 'ye bağlı olduğu aşıkardır. Bunun sonucunda, $\hat{\beta}$ 'nın varyansı $\hat{\beta}_r$ 'dan her zaman daha büyük olacaktır:

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}) - Var(\hat{\beta}_r) &= \sigma^2(X'X)^{-1}H'[H(X'X)^{-1}H']^{-1} \\ &\quad \times H(X'X)^{-1} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.8.)$$

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

Bu eşitliğin sağ tarafında bulunan ifade n.n.d. bir matristir. Bu sebeple, (3.1.) kısıtının uygulanması varyansın azalmasına sebep olmuştur.

3.2. Temel Bileşenler Tahmin Edici

Temel bileşenler tahmin edicisi, çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak veya şiddetini azaltmak için öne sürülen tahmin edicilerden birisidir. Bu tekniğin en eski tanımlarının ilk olarak Hotelling (1933) tarafından verildiği kabul edilmektedir. Temel bileşenler yönteminin asıl amacı veri indirgemesi ve tahmin yapılmasıdır. Bazı yanlı tahmin edicilerin elde edilmesi sonucunda varyansın önemli ölçüde azaldığı görülür.

$$y = Z\alpha + \varepsilon \quad (3.9.)$$

modelini ele alırsak burada $Z = XT$, $\alpha = T'\beta$ ve $T'X'XT = Z'Z = \Lambda$ şeklinde olur. $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ 'nın, XX' 'in özdeğerlerinin $(p \times p)$ boyutlu köşegen matrisi; T 'nin sütunlarına karşılık gelen özvektörler olan $(p \times p)$ boyutlu bir dik matristir. Burada Z , yeni dik açıklayıcı değişkenleri tanımlar ve temel bileşenler olarak ifade edilir. Z 'nin sütunları $Z = [Z_1, Z_2, \dots, Z_p]$ şeklindedir.

Bu modele göre X_j , X 'in j-inci kolonu ve t_{ji} , T 'nin i-inci kolonunun elemanlarıdır. Böylece $Z=XT$ olduğu için Z 'nin i-inci kolonu şu şekildedir:

$$Z_i = \sum_{j=1}^p t_{ji} X_j \quad (3.10.)$$

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

$Z_i'Z_i = t_i'(X'X)t_i = \lambda_i$ olduğu için, λ_i özdeğeri Z_i 'deki değişimi ölçmektedir. $\lambda_i \approx 0$ olduğunda Z_i temel bileşeni modele çok az bir etki sağlar. Tamamının bire eşit olmasının sonucunda ise açıklayıcı değişkenler ortogonal olacaktır. X matrisinin kötü koşullu olduğu durumda bazı özdeğerler çok küçük olur. Genelliği kaybetmeden, $\lambda_{r+1} \approx 0, \dots, \lambda_p \approx 0$ ise, $Z_{r+1}, Z_{r+2}, \dots, Z_p$ ler yaklaşık olarak sabit ve modelden atılabilir. (3.9.) modeline göre aşağıdaki parçalanışlar yapılır:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0' & \Lambda_{p-r} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_r : r \times r, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \alpha_{p-r} \end{pmatrix}, \quad \alpha_r : r \times 1 \quad (3.11.)$$

$$Z = (Z_r, Z_{p-r}), \quad Z_r : n \times r, \quad T = (T_r, T_{p-r}), \quad T_r : p \times r. \quad (3.12.)$$

Bu durumda, $T_r = [t_1, t_2, \dots, t_r]$ ve $T_{p-r} = [t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_p]$ olduğundan

$$T_r'X'XT_r = \Lambda_r = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \quad \text{ve}$$

$$T_{p-r}'X'XT_{p-r} = \Lambda_{p-r} = \text{diag}(\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_p) \quad \text{olarak belirtilir. (3.9.) modeli}$$

aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$y = Z_r\alpha_r + Z_{p-r}\alpha_{p-r} + \varepsilon \quad (3.13.)$$

Çoklu iç ilişki probleminin varlığı söz konusunda, $Z_{p-r}\alpha_{p-r}$ modelden çıkarılmalıdır. İlk r katsayısı OLS ile, $\hat{\alpha}_r = \Lambda_r^{-1}Z_r'y$ şeklinde tahmin edilir.

$\beta = T\alpha$ ifadesinden dolayı β 'nın temel bileşenler tahmin edicisi

$$\hat{\beta}_{PCR} = (T_r, T_{p-r}) \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_r \\ 0 \end{pmatrix} = T_r\hat{\alpha}_r = T_r\Lambda_r^{-1}Z_r'y \quad \text{şeklinde ifade edilir. } Z = TX$$

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

eşitliğinden dolayı $Z'_r = T'_r X'$ olur. $X'X = T\Lambda T' = T_r\Lambda_r T'_r + T_{p-r}\Lambda_{p-r} T'_{p-r}$ eşitliği ve β 'nın temel bileşenler tahmin edicisi şu şekilde elde edilir:

$$\hat{\beta}_{PCR} = T_r\Lambda_r^{-1}T'_r X' y = T_r T'_r \hat{\beta} \quad (3.14)$$

Bu eşitlikte $\hat{\beta}$, $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X' y$ eşitliği ile ifade edilen OLS tahmin edicisidir.

$T = (T_1, T_2)$ matrisi ortogonal olduğu için, $T'_1 T_1 = I_r$, $T'_2 T_2 = I_{p-r}$ ve $T'_1 T_2 = 0$, bununla birlikte $T'_1 T'_1 + T'_2 T'_2 = I_p$ 'dir. $(X'X)^{-1} = T_1\Lambda_1^{-1}T'_1 + T_2\Lambda_2^{-1}T'_2$ ve $\left[T'_2 (X'X)^{-1} T_2 \right]^{-1} = \Lambda_2$ olmak üzere:

$$(X'X)^{-1} T_2 \left[T'_2 (X'X)^{-1} T_2 \right]^{-1} T'_2 (X'X)^{-1} = T_2 \Lambda_2^{-1} T'_2 \quad (3.15.)$$

ve

$$(X'X)^{-1} - (X'X)^{-1} T_2 \left[T'_2 (X'X)^{-1} T_2 \right]^{-1} T'_2 (X'X)^{-1} = T_1 \Lambda_1^{-1} T'_1 \quad (3.16.)$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece, $\Lambda_1 = T'_1 X'X T_1$ ifadesi yerine yazıldığında, β 'nın temel bileşenler tahmin edicisi,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{PCR} &= \left[(X'X)^{-1} - (X'X)^{-1} T_2 \left[T'_2 (X'X)^{-1} T_2 \right]^{-1} T'_2 (X'X)^{-1} \right] X' y \\ &= T_1 \left(T'_1 X'X T_1 \right)^{-1} T'_1 X' y \end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

Temel bileşenler yönteminin uygulanması, regresyon katsayıların varyansının küçülmesine sebep olacaktır. Böylece Temel bileşenler tahmin edicisinin varyans-kovaryans matrisi,

$$Var(\hat{\beta}_{PCR}) = \sigma^2 T_r \Lambda_r^{-1} T_r' \quad (3.17.)$$

şeklinde tanımlanır ve OLS'nin varyans-kovaryans matrisi,

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1} = \sigma^2 T_r \Lambda_r^{-1} T_r' + \sigma^2 T_{p-r} \Lambda_{p-r}^{-1} T_{p-r}'$$

olarak ifade edilmektedir. Bu eşitlikler neticesinde Temel bileşenler ve OLS'nin varyans-kovaryans matrisleri arasındaki fark $T_{p-r} \Lambda_{p-r}^{-1} T_{p-r}'$ şeklinde olur. Bu matrisin köşegen elemanları, çıkarılan Temel bileşenlere karşılık gelen özdeğerlerin terslerinin ağırlıkları toplamını ifade etmektedir. Böylece, varyansta azalma meydana gelmesinin sebebi, küçük özdeğerlere karşılık gelen temel bileşenlerin çıkarılmasıdır.

Örnek 3.1.

Lineer regresyon modeli (1.1.) ile aşağıda verilen matris değerlerini ele alalım:

$$y = \begin{pmatrix} 6.0521 \\ 7.0280 \\ 7.1230 \\ 4.4441 \\ 5.0813 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 11.9 \\ 12.1 \\ 1 \ 2 \\ 1 \ 2 \\ 11.8 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Burada β OLS tahmin edicisi

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y = \begin{pmatrix} -4.2489 \\ 5.2013 \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır. β için Temel bileşenler tahmincisi ise ilk olarak,

$$X'X = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.4537 & -0.8912 \\ -0.8912 & -0.4537 \end{pmatrix}}_T \underbrace{\begin{pmatrix} 24.2493 & 0 \\ 0 & 0.0107 \end{pmatrix}}_\Lambda \begin{pmatrix} -0.4537 & -0.8912 \\ -0.8912 & 0.4537 \end{pmatrix}$$

ayrışımı düşünülürse, burada ortogonal T matrisi simetriktir. T matrisinin ilk sütunu olan $t_1 = (-0.4537, -0.8912)'$ matrisi, $\lambda_1 = 24.2493$ özdeğerine karşılık gelir. T matrisinin ikinci sütunu ise $\lambda_2 = 0.0107$ özdeğerine karşılık gelir. $y = (6.0521, 7.0280, 7.1230, 4.4441, 5.0813)'$ için $\hat{\beta}_{PCR}^1$ Temel bileşenler tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{PCR}^1 = t_1 \left(t_1' X'X t_1 \right)^{-1} t_1' X'y = \begin{pmatrix} 1.2284 \\ 2.4128 \end{pmatrix}$$

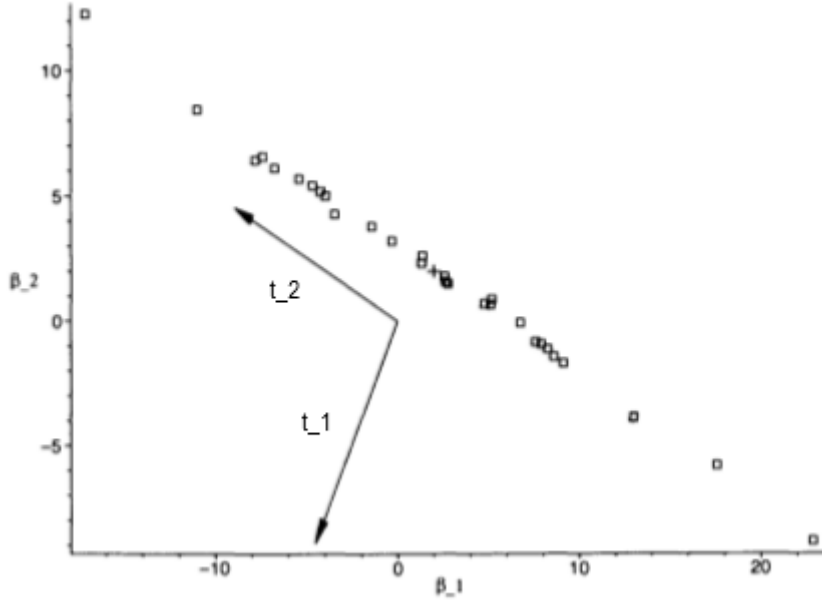
şeklinde elde edilir. Bu tahmin, gerçek $\beta = (2, 2)'$ parametresine, OLS tahmincisi $\hat{\beta} = (-4.2489, 5.2013)'$ 'den çok daha yakındır.

Şekil 3.1. OLS tahmin edicisinden elde edilen 30 değeri gösterir. Burada 2 ok, 2 vektörü temsil eder; daha iyi bir görselleştirme için oklar orijinal vektörlerden 10 kat daha uzun gösterilmiştir. Her iki eksen de farklı şekilde ölçeklendirildiğinden dolayı iki vektörün birbirine dik olduğu ilk bakışta görülmeyebilir. Tahminlerin çoğu gerçek parametrelerden oldukça uzaktır,

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

varyansın esas yönü t_2 vektörüne paraleldir ve küçük özdeğer olan $\lambda_2 = 0.0107$ 'ye karşılık gelen özvektördür.



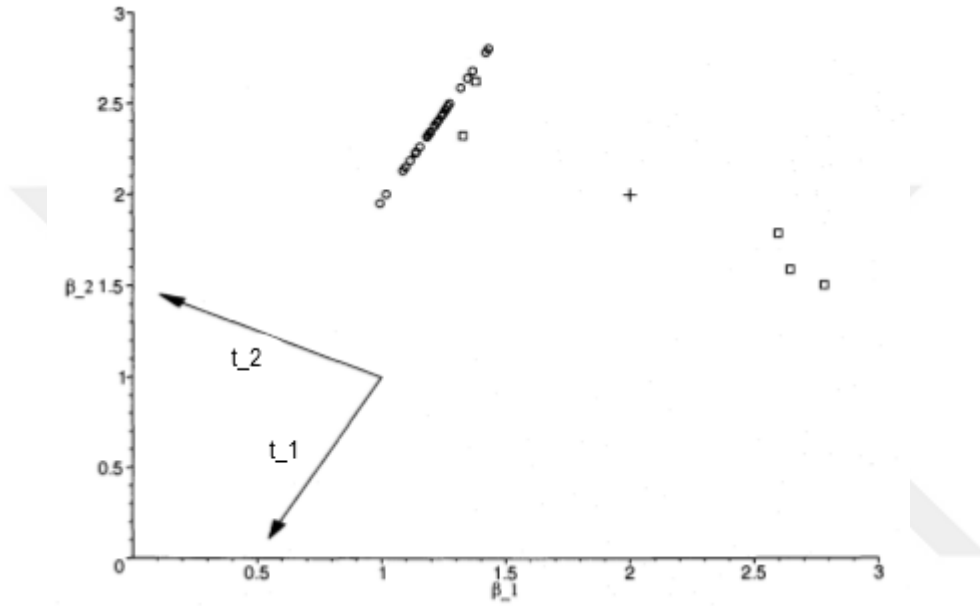
Şekil 3.1. Gerçek parametre (çarpı) ve 30 OLS tahmini (kutular)

Daha küçük alanlar için $0 \leq \beta_1 \leq 3$ ve $0 \leq \beta_2 \leq 3$ olmak üzere, Şekil 3.2. , 30 temel bileşenler tahminini (çemberler) ve bu alanda gerçekleşen OLS tahminlerini (kutular) gösterir. Burada yine, iki ok, iki vektörü temsil etmektedir. Fakat bu vektörler orjinden yani $(0,0)'$ 'dan $(1,1)'$ 'e kaymıştır. Görülebileceği gibi, tüm Temel bileşenler tahminleri $t_2' \hat{\beta}^1 = 0$ koşulu ile belirlenen düz bir çizgi doğrultusundadır.

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

Burada Temel bileşenler tahmininin etkisini açıkça görebiliyoruz. Tahminler OLS tahmin edicilerinin aksine, t_2 yönünde değil sadece t_1 yönünde hareket eder.



Şekil 3.2. Gerçek parametre (çarpı), bazı OLS tahminleri (kutular) ve 30 Temel bileşen tahminleri (çemberler)

$\tilde{\beta} = \hat{\beta}^1$ için ortalama kayıp 0.8136 iken, $\tilde{\beta} = \hat{\beta}$ için ortalama gözlenen kayıp 91.9358 olarak hesaplanmış olur.

3.2.1. Temel Bileşenler ve En Küçük Kareler Tahmin Edicinin Risk Karşılaştırması

Temel bileşenler tahmin edicisi, kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisinin özel bir durumudur. Böylece, kısıtlı en küçük karelerin sonuçları, $\hat{\beta}_{PCR}$ 'nin

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

$MSE(\beta, \tilde{\beta})$ 'ye göre OLS tahmin edicisi olan $\hat{\beta}$ 'dan daha iyi veya daha kötü olup olmadığı sonucunu elde etmek için kullanılır.

Lineer regresyonun standart varsayımları altında, $\Delta = MSE(\hat{\beta}) - MSE(\hat{\beta}_{PCR})$ farkının n.n.d. olması için gerek ve yeter koşul

$$\beta' T_2 \Lambda_2 T_2' \beta \leq \sigma^2 \quad (3.18.)$$

olmasıdır. Bu eşitsizlik kesin ise $\Delta \neq 0$ 'dır. Buradan görülebileceği gibi, Λ_2 'nin temel köşegen elemanları oldukça küçük olduğunda, $\beta' T_2 \Lambda_2 T_2' \beta$ değeri de küçük olacaktır.

Teorem 3.1. (1.1.)'de verilen lineer regresyon modeli altında,

$$\lambda = \frac{\delta' (RS^{-1}R')^{-1} \delta}{2\sigma^2} \quad (3.19.)$$

olarak verilsin. Daha sonra $\Delta = MSE(\hat{\beta}) - MSE(\hat{\beta}_{PCR})$ farkı için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

1. Δ , ancak ve ancak $\lambda \leq \frac{1}{2}$ olduğunda n.n.d. matristir.
2. Δ matrisi, ancak ve ancak $m = 1$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ olduğunda sıfır matrisine eşittir.
3. $\lambda < \frac{1}{2}$ ise, Δ n.n.d. ve $\Delta \neq 0$ 'dır.

3.2.2. Temel Bileşenler Tahmin Edicinin Daralma Özelliği

OLS tahmin edicisinin uzunluğunun karesinin beklenen değeri,

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

$$E\left(\left\|\hat{\beta}\right\|^2\right)=\sigma^2 tr\left[\left(X'X\right)^{-1}\right]+\left\|\beta\right\|^2 \quad (3.20.)$$

şeklinde verilmiştir. $\hat{\beta}$ 'nın uzunluğunun karesinin beklenen değerinin, β 'nın uzunluğunun karesinin beklenen değerinden daha büyük olduğu görülmektedir. Çoklu iç ilişki varken $X'X$ 'in bazı özdeğerleri nispeten küçüktür ve bu nedenle $(X'X)^{-1}$ 'in bazı özdeğerleri nispeten büyüktür. Böylece, $tr\left[(X'X)^{-1}\right]$ aynı zamanda nispeten büyüktür ve gerçek bir tahmin edici olan $\hat{\beta}$ 'nın, β gerçek parametre vektöründen çok daha uzun olması muhtemeldir. $\hat{\beta}_{PCR}$ Temel bileşenler tahmin edicisine bakıldığında ve uzunluğunun karesinin beklenen değeri göz önüne alındığında, Temel bileşenler tahmin edicisinin boyunun karesinin beklenen değeri daha büyük olamayacağı, ancak yalnızca azalan r değeri ile daha küçük olabileceği sonucuna varılır.

(3.14.)'de verilen tahmin edicinin, $\left\|\hat{\beta}_{PCR}\right\|^2=\left(\hat{\beta}_{PCR}\right)'\hat{\beta}_{PCR}$ ile ifade edilen karesinin uzunluğu için,

$$\left(\hat{\beta}_{PCR}\right)'\hat{\beta}_{PCR}=\hat{\beta}'X'X T_r \Lambda_r^{-2} T_r' X'X \hat{\beta}=\hat{\beta}' T_r' T_r \hat{\beta} \quad (3.21.)$$

eşitliği geçerlidir. Eğer t_i , $T=(T_1, T_2)$ matrisinin i-inci kolonu ise,

$$\left(\hat{\beta}_{PCR}\right)'\hat{\beta}_{PCR}=\left(t_1'\hat{\beta}\right)^2+\dots+\left(t_r'\hat{\beta}\right)^2 \quad (3.22.)$$

şeklinde eşitlik sağlanır.

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

3.2.3. Temel Bileşenlerin Sayısı

$\hat{\beta}_{PCR}$ Temel bileşenler tahmin edicisini uygularken, uygun bir r değeri seçimi ile ilgili bir problemle karşılaşılır. Eğer belirli bir r sayısı sabit ise, ek model varsayımı altında karşılık gelen $T_2' \beta = 0$ kısıtlaması, ön tahmin prosedürüne benzer şekilde test edilebilir. Burada test istatistiği,

$$F = \frac{(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{PCR})' X' X (\hat{\beta} - \hat{\beta}_{PCR})}{y' M y} \times \frac{n-p}{p-r}, \quad (3.23.)$$

$$M = I_n - X(X'X)^{-1}X'$$

olarak verilmiştir. Belirli bir α düzeyi için,

$$F \geq F_{p-r, n-p; 1-\alpha} \quad (3.24.)$$

eşitsizliği doğru ise, $H_0 : T_2' \beta = 0$ hipotezi red edilir ve seçilen r değeri çok küçük olabilir.

Aslında, tahminin mümkün olduğu kadar az kısıtlanması ve bu nedenle mümkün olduğu kadar büyük bir değer seçilmesi uygun görülmektedir. Ancak, tahmin edicinin istenen etkisinin elde edilmesi için gerektiği kadar küçük seçilmesi makul görülür.

3.2.4. Temel Bileşenler Tahmin Edicinin Dezavantajları

Temel bileşenler tahmin edicisi, $T_2' \beta = 0$ kısıtları bakımından, kısıtlı OLS tahmin edicisinin özel bir durumudur. Bu kısıtlar, tahminlerin belirli kritik yönlere geçmesini önlemek amacıyla seçilmiştir. Bu prosedür, hiçbir şekilde

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

bilinmeyen β parametre vektörünün uygulanan kısıtlamaları yerine getirmesi gerektiğini varsaymaz.

Böylece, Temel bileşenler tahmin edicisi, istenilmeyen kısıtlardan kaynaklı varyans problemi altında, varyansı azaltma amaçlı yanlı bir tahmin edici olarak kabul edilir. Kısıtlar ne kadar çok ihlal edilirse, tahmin edicisi o kadar az kesinliğe sahip olacaktır.

Temel bileşenler tahminini uygularken, gerçek parametre vektörüne getirilen kısıtların doğru veya gerçek olup olmadığını bilemeyiz. Örneğin, bilinmeyen β parametresi T_2 kolon uzayına ait ise; β , $(p-r) \times 1$ boyutlu bir b vektörü için $\beta = T_2 b$ olarak yazılabilir. Bu durumda kısıtlar $b = 0$ olur. Açıkça, eğer b vektörü sıfır vektöründen oldukça uzaktaysa, kısıtların tam olarak yerine getirildiğinden söz edilemez.

3.2.5. Marquardt Tahmin Edici

β 'nın Temel bileşenler tahmin edicisi (3.14.)'de verilmişti. $\hat{\beta}_{PCR}$, OLS tahmin edicisi olan,

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y = \left(T_r \Lambda_r^{-1} T_r' + T_{p-r} \Lambda_{p-r}^{-1} T_{p-r}' \right) X'y \quad (3.25.)$$

ifadesinin bir değişimi olarak da kabul edilebilir. OLS tahmin edicisi, $T_{p-r} \Lambda_{p-r}^{-1} T_{p-r}'$ matrisi silinerek elde edilir. Fakat, $T_{p-r} \Lambda_{p-r}^{-1} T_{p-r}'$ matrisinin silinmesi yerine, bu etkinin sadece zayıflatılması düşünülebilir. Marquardt (1975), çoklu iç ilişki probleminin çözümü için Marquardt tahmin edicisini (ME) geliştirerek, c 'nin $0 \leq c \leq 1$ aralığında bazı değerleri için,

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

$$\hat{\beta}_{PCRC} = \left(T_r \Lambda_r^{-1} T_r' + c T_{p-r} \Lambda_{p-r}^{-1} T_{p-r}' \right) X'y \quad (3.26.)$$

şeklinde bir yöntem önermiştir. $c = 1$ özel durumunda r seçimine bakılmaksızın, $\hat{\beta}_{PCRC}$ Marquardt tahmin edicisi $\hat{\beta}$ ile örtüşür. Fakat, $c = 0$ alındığında $\hat{\beta}_{PCR}$ Temel bileşenler tahmin edicisi elde edilir. Ayrıca, $\hat{\beta}_{PCRC}$ tahmin edicisi Marquardt tahmin edicisi olarak da adlandırılır. Temel bileşenler regresyonunda $(X'X)^{-1} = T_r \Lambda_r^{-1} T_r' + T_{p-r} \Lambda_{p-r}^{-1} T_{p-r}'$ denklemini kullanarak, ikinci terim tamamen ihmal edilir. Fakat burada amaç, daha az ağırlık verilerek ilk terimi vurgulamaktır. Yani, ikinci terimi yok saymak yerine bu terime daha az önem verilir. Ayrıca, Bayesyen yaklaşım kullanılarak da bu terimler arasındaki ilişki gösterilebilir (Al-Gereari, 2012).

3.3. Ridge Tahmin Edici

Dik olmayan verilere OLS yöntemi uygulandığında regresyon katsayılarının tahminlerinin varyansı büyük olacaktır. Böylece, OLS vektör uzunluğu gerçek değerinden uzaklaşacaktır. Bu durum, OLS tahmin edicilerinin mutlak değerce büyük olduğunu, büyüklüklerinin ve işaretlerinin yüksek oranda farklılık göstereceğini izah etmektedir.

Ridge regresyonun amacı, $X'X$ matrisinin köşegen elemanlarına pozitif k değerleri ekleyerek koşul sayısını küçültmektir. Hoerl ve Kennard'ın (1970) önerdiği Ridge tahmin edici (ORR)

$$\hat{\beta}(k) = (X'X + kI)^{-1} X'y, \quad k \geq 0 \quad (3.27.)$$

olarak tanımlanır ve Ridge tahmin edici k yanlılık parametresine bağlıdır.

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

Varyans büyümesine engel olmak için Hoerl ve Kennard (1970) Ridge tahmin ediciyi

$$\begin{aligned} S(\tilde{\beta}) &= (y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta}) \\ &= (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \tilde{\beta})'X'X(\hat{\beta} - \tilde{\beta}) \\ &= S(\hat{\beta}) + \Phi(\tilde{\beta}) \end{aligned} \quad (3.28.)$$

şeklinde ifade etmişlerdir. Bu ifadede, $(\hat{\beta} - \tilde{\beta})'X'X(\hat{\beta} - \tilde{\beta})$, $\hat{\beta}$ 'nın yerine $\tilde{\beta}$ kullanımından kaynaklı yanlılığın karesini belirtmektedir. $X'X$ kötü koşullu olduğunda $\hat{\beta}$ ile β arasındaki uzaklık artar. Bundan dolayı, $\tilde{\beta}'\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin uzaklığının karesinin minimum olması amaçlanmaktadır. Aynı hata kareler ortalamasını içeren birden çok tahmin edici olabilir. Böylece içlerinden, uzaklığı en küçük olan seçilir. $\Phi_0 > 0$ ifadesini hata kareler toplamı için verilen bir sabit olarak alalım

$$S(\tilde{\beta}) = S(\hat{\beta}) + \Phi_0$$

ifadesini sağlayan tahmin edicilerin bir $\{\tilde{\beta}\}$ kümesi mevcuttur. Burada asıl istenen, küme içerisindeki en küçük uzunluğa sahip $\tilde{\beta}$ tahmincisini ortaya çıkarmaktır. Böylece, $1/k$ Lagrange çarpanı olmak üzere

$$\text{Min}_{\tilde{\beta}} \left\{ \tilde{\beta}'\tilde{\beta} + \frac{1}{k} \left[(\hat{\beta} - \tilde{\beta})'X'X(\hat{\beta} - \tilde{\beta}) - \Phi_0 \right] \right\} \quad (3.29.)$$

ifadesi araştırılır. (3.29.)'un $\tilde{\beta}$ ve $1/k$ 'ya göre türevleri alındığında

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

$$\tilde{\beta} + \frac{1}{k}(X'X)(\tilde{\beta} - \hat{\beta}) = 0 \quad (3.30)$$

ve

$$\Phi_0 = (\hat{\beta} - \tilde{\beta})' X' X (\hat{\beta} - \tilde{\beta}) \quad (3.31.)$$

elde edilir. Böylece (3.29.)'un çözümü bize, Hoerl ve Kennard (1970) tarafından tanımlanan Ridge tahmin edicisini verecektir.

(3.27.) deki k yanlılık parametresinin seçimi Ridge tahmin edicinin verimini etkilemektedir. Ridge tahmin edici $k = 0$ için OLS tahmin edicisini verir. OLS tahmin edicinin lineer dönüşümü olan Ridge tahmin edici

$$\hat{\beta}(k) = (X'X + kI)^{-1} X'X \hat{\beta} \quad (3.32.)$$

şeklinde gösterilir. $S_k = X'X + kI$ ifadesi verilsin. Bu durumda

$$E(\hat{\beta}(k)) = S_k^{-1} X'X \beta \quad (3.33.)$$

$$Bias(\hat{\beta}(k), \beta) = -k S_k^{-1} \beta \quad (3.34)$$

$$Var(\hat{\beta}(k)) = \sigma^2 S_k^{-1} X'X S_k^{-1} \quad (3.35)$$

olur. Bu durumda, Ridge tahmin edicinin MMSE'si,

$$MMSE(\hat{\beta}(k)) = S_k^{-1} (\sigma^2 X'X + k^2 \beta \beta') S_k^{-1} \quad (3.36.)$$

şeklinde olur. $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ $X'X$ 'in özdeğerleri ve skaler hata kareler ortalaması,

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

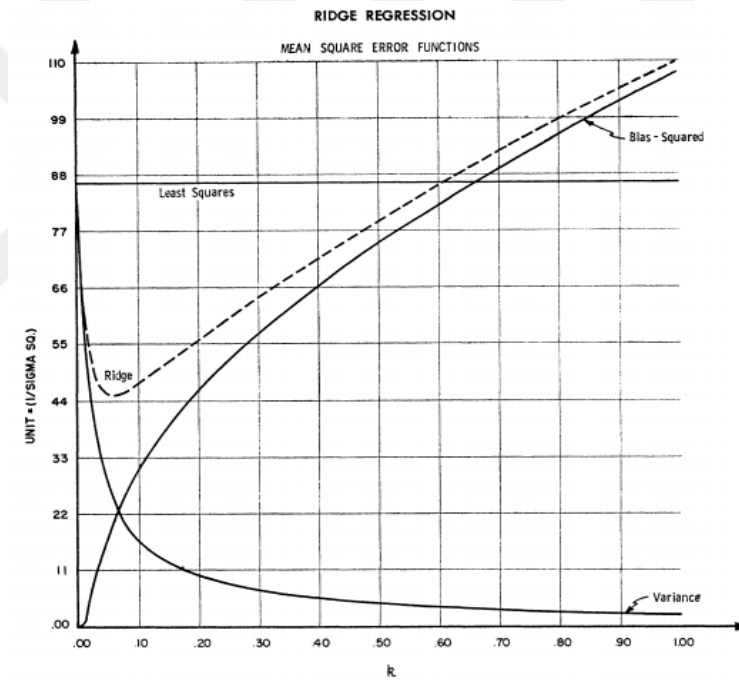
Ecem ÖZKAN

$$\begin{aligned} SMSE(\hat{\beta}(k)) &= tr(MMSE(\hat{\beta}(k))) \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{\sigma^2 \lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} + k^2 \beta' (X'X + kI)^{-2} \beta \end{aligned}$$

ya da

$$SMSE(\hat{\beta}(k)) = tr(MMSE(\hat{\beta}(k))) = \sum_{i=1}^p \frac{\sigma^2 \lambda_i + k^2 \beta_i^2}{(\lambda_i + k)^2} \quad (3.37.)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 3.3. $\hat{\beta}(k)$ ve $\hat{\beta}$ 'nın SMSE'sinin k 'ya bağlı grafiği (Hoerl ve Kennard, 1970)

Yukarıdaki şekildeki OLS varyansı hata kareler ortalamasına eşittir ve k 'dan etkilenmediği için yatay doğru ile gösterilmiştir. Burada k 'nın artmasıyla

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

birlikte, Ridge tahmincisinin yanlılığının kare değeri artmakta, toplam varyans değeri ise azalmaktadır. Şekil üzerinde kesikli çizgi ile gösterilen Ridge tahmin yönteminin hata kareler ortalaması , optimal bir k ' da minimum değeri almakta ve sonra en küçük hata kareler ortalamasını geçmektedir. Böylece, az bir yanlılığa karşılık , toplam varyansta önemli bir düşüş oluyorsa, Ridge tahmin edicisi tercih edilebilir.

3.3.1. Yanlılık Parametresi k 'nın Seçimi

Ridge regresyon konusundaki tartışmaların çoğu k yanlılık parametresinin seçimi ile ilgilidir. k 'nın Ridge iziyle belirlenen değeri öznel içermektedir. Böylece, bazı yazarlar k 'nın seçimi için farklı analitik yöntemler geliştirmişlerdir. Bunlardan bazıları şu şekildedir:

1. Hoerl ve Kennard (1970) Ridge tahmin edicinin OLS'den daha küçük MSE'li

yanlılık parametresinin tahminini $\hat{k}_{HK} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{maks}^2}$ olarak vermiştir. Bu ifadede $\hat{\sigma}_{maks}$

kanonik formdaki regresyon katsayısının tahminlerinin karelerinin en büyüğüdür.

2. Hoerl, Kennard ve Baldwin (1975) Ridge tahmin edicinin MSE'sini minimum

yapan $\hat{k}_{HKB} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\beta}'\hat{\beta}}$ değerini önermişlerdir.

3. Lawless ve Wang (1976) yanlılık parametresi k 'nın bulunması için, Ridge regresyon tahmincisinin kanonik şeklinin kullanılmasını önermiş ve Bayesyen

yaklaşım ile $\hat{k}_{LW} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}$ tahminini vermişlerdir.

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

4. McDonald ve Galarneau (1975) Ridge tahmincisinde k yanlılık parametresinin seçimi için $\hat{\beta}'(k)\hat{\beta}(k) = \hat{\beta}'\hat{\beta} - \hat{\sigma}^2 \text{tr}(X'X)^{-1}$ ifadesini önermişlerdir. k 'nın seçimi için, $Q > 0$ durumunda $\hat{\beta}'_k \hat{\beta}_k = Q$ ifadesini sağlayacak olan bir k değeri seçimini önermişlerdir. Eğer $Q \leq 0$ durumu mevcut ise k yanlılık parametresinin değeri sıfır olarak alınmıştır.

3.4. Genelleştirilmiş Ridge Tahmin Edici

$K = \text{diag}(k_i)$ ve $k_i \geq 0$ olmak üzere, Hoerl ve Kennard (1970) genelleştirilmiş Ridge tahmin ediciyi şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\hat{\beta}(K) = (X'X + K)^{-1} X' y \quad (3.38.)$$

Tüm k_i 'ler birbirlerine eşitken $\hat{\beta}(k) = (X'X + kI)^{-1} X' y$ ile ifade edilen Ridge regresyon tahmin edicisi elde edilir. $k_i \geq 0$ olduğu için optimum k_i değerleri

$$k_i = \frac{\sigma^2}{\alpha_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.39.)$$

olur. Bulunan optimum k_i 'lere göre bulunacak olan genelleştirilmiş Ridge tahmin ediciler minimum hata kareler ortalamalarına sahip olacak, k_i değerlerinin bilinmediği σ^2 ve α_i 'nin fonksiyonu olduğu için faydalı olmazlar. Bu sebeple Hoerl ve Kennard (1970), k_i değerlerinin iteratif yöntemlerle bulunabileceğini ifade etmişlerdir. k_i değerinin ilk genelleştirilmiş Ridge tahmini için OLS ile

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

$$k_i^0 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.40.)$$

şeklinde bulunur. $K = \text{diag}(k_1^0, \dots, k_p^0)$ olmak üzere, k_i^0 kullanılarak başlangıç genelleştirilmiş Ridge tahmin edici ($\hat{\alpha}_i^0$) bulunur, bu sayede sonraki k_i değeri bulunur ve durağan parametre tahminleri elde edilinceye kadar iterasyon

$$\begin{aligned} k_i^1 &= \frac{\hat{\sigma}^2}{(\hat{\alpha}_i^0)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, p \\ k_i^2 &= \frac{\hat{\sigma}^2}{(\hat{\alpha}_i^1)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (3.41)$$

şeklinde devam eder. $(i-1)$ adımından i adımına geçişte parametre tahminlerinin boylarının karesinde bir farklılık meydana gelmiyorsa iterasyona son verilir. Eğer bir farklılık meydana gelmeye devam ediyorsa iterasyona devam edilir.

Genelleştirilmiş Ridge tahmin edicide bulunan k_i değerleri birbirinden farklılık gösterdiğinden dolayı, k_i değerlerinin seçilmesinde ridge trace kullanılmaz.

3.5. Kısıtlı Ridge Tahmin Edici

Sarkar (1992) kısıtlı OLS tahmin edicileri ile Ridge tahmin edicileri birleştirerek Kısıtlı Ridge (RRR) tahmin ediciyi

$$\begin{aligned} \beta^*(k) &= W \hat{\beta}_r, \quad W = (I_p + k(X'X)^{-1})^{-1}, \quad k \geq 0 \\ \beta^*(k) &= (I_p + k(X'X)^{-1})^{-1} \hat{\beta}_r \end{aligned} \quad (3.42.)$$

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

şeklinde ifade etmiştir. Burada verilen $\hat{\beta}_r$, $\hat{\beta}_r = \hat{\beta} - (X'X)^{-1}H'[H(X'X)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\beta} - h)$ ifadesi ile gösterilen kısıtlı OLS tahmin edicisidir. Yukarıdaki ifadede yer alan $\hat{\beta}_r, \beta^*(k)$ 'yı sıfıra doğru daraltır. Böylece $\beta^*(k)$ 'nın özellikleri, $\beta^*(0) = \hat{\beta}_r$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta^*(k) = 0$ şeklinde verilebilir.

Gross (2003a), $\beta^*(k)$ 'nın tüm y değerleri için $H\beta^*(k) = h$ kısıtını sağlamadığını ve bu sebeple $H\beta = h$ kısıtına istinaden bir kısıtlı ridge tahmin edici olmadığını ifade etmiştir. Dolayısıyla $\beta^*(k), H\beta = h$ eşitliği ile üretilen alt uzaydan farklı değerler alabilir. Bu sebeplerden ötürü Gross (2003a), β için yeni bir ridge tipi tahmin edici öne sürmüştür. $\beta_0 = H'(HH')^{-1}h$, $S_k = X'X + kI_p$ ve $\hat{\beta}(k, \beta_0) = S_k^{-1}(X'y + kH'(HH')^{-1}h)$ olmak üzere bu tahmin ediciyi,

$$\hat{\beta}_r(k) = \hat{\beta}(k, \beta_0) - S_k^{-1}H'[HS_k^{-1}H']^{-1}(H\hat{\beta}(k, \beta_0) - h), \quad k \geq 0 \quad (3.43.)$$

şeklinde tanımlamıştır. $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\beta}_r(k) = \beta_0$ ve $\lim_{k \rightarrow 0} \hat{\beta}_r(k) = \hat{\beta}_r$ olduğundan dolayı k değeri arttıkça $\hat{\beta}_r(k), \hat{\beta}_r$ 'den β_0 'a bir eğri çizer. Gross (2003a), Kısıtlı Ridge tahmin edicinin Kısıtlı OLS tahmin ediciden MMSE'ye göre üstünlük sağlaması için gerek ve yeter koşulları vermiştir.

3.6. Uyarlanmış Ridge Tahmin Edici

Swindel (1976), Ridge tahmin edici ile ön bilgiyi birleştirerek Uyarlanmış Ridge tahmin edici (MRR)'yi,

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

$$\hat{\beta}(k, b) = (X'X + kI)^{-1}(X'y + kb), \quad k \geq 0 \quad (3.44.)$$

şeklinde önermiştir. Burada b , $(p \times 1)$ boyutlu stokastik olmayan bir vektördür ve bu vektörün β hakkındaki ön bilgiyi içerecek şekilde seçimi yapılmalıdır. Burada amaç, MRR tahmin edicisindeki $X'X$ matrisinin köşegen elemanlarına k sabiti eklenerek çoklu iç ilişkinin şiddetinin azaltılmasıdır. MRR tahmin edicisi,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(k, b) &= (X'X + kI)^{-1} X'X (X'X)^{-1} (X'y + kb) \\ &= \left(I + k(X'X)^{-1} \right)^{-1} \left(\hat{\beta} - b + b + k(X'X)^{-1} b \right) \\ &= \left(I + k(X'X)^{-1} \right)^{-1} (\hat{\beta} - b) + b \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. $\hat{\beta}(k, b)$ 'nin birtakım özellikleri aşağıda verilmiştir:

1. $\hat{\beta}(k, b)$, aynı hata karaler toplamına sahip β 'nın eşdeğer tahmin ediciler sınıfı içerisinde b 'ye en yakın olandır. Böylelikle, $(\tilde{\beta} - b)'(\tilde{\beta} - b)$ 'yı $(y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta}) = c$ eşitliği olacak şekilde minimum yapılması istenir. Lagrange çarpanı $1/k$ olmak üzere amaçlanan fonksiyon,

$$\psi = (\tilde{\beta} - b)'(\tilde{\beta} - b) + \frac{1}{k} \left[(y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta}) - c \right]$$

şeklinde olur.

2. $\hat{\beta}(k, b)$, b 'ye eşdeğer uzaklıktaki β 'nın eşdeğer tahmin ediciler sınıfı içerisinde en küçük hata kareler toplamına sahiptir. Böylelikle $\hat{\beta}(k, b)$,

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

$(\tilde{\beta} - b)'(\tilde{\beta} - b) = c$ olacak şekilde $(y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta})$ 'yı minimum yapan $\tilde{\beta}$ tahmin edicisidir ve amaç fonksiyonu,

$$\psi = (y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta}) + k[(\tilde{\beta} - b)'(\tilde{\beta} - b) - c]$$

şeklinde olur.

3. $\hat{\beta}(0, b) = \hat{\beta}$ olur. $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\beta}(k, b) = b$ olduğu için k değeri arttıkça $\hat{\beta}(k, b)$, $\hat{\beta}$ 'dan b 'ye bir eğri çizer.

Swindel (1976), OLS tahmin edici ile MRR tahmin ediciyi MMSE'ye göre karşılaştırmıştır ve bunun sonucunda MRR tahmin edicinin OLS tahmin ediciden üstün olduğunu göstermiştir. Pliskin (1987) ise aynı k değerini kullanarak Ridge tahmin edici ile MRR tahmin ediciyi MMSE'ye göre karşılaştırmıştır ve böylelikle, MRR tahmin edicinin Ridge tahmin ediciden daha üstün olabilmesi için gerek ve yeter koşulu vermiştir.

3.7. Liu Tahmin Edici

Çoklu iç ilişki problemini tamamen ortadan kaldırmak veya minimuma indirmek amacıyla birçok tahmin edici önerilmiştir. Bunlardan ikisi Ridge ve Stein (1956) $(\hat{\beta}_s = c\hat{\beta}, 0 < c < 1)$ tarafından önerilen tahmin edicilerdir. Bu tahmin edicilerin avantajları olduğu kadar dezavantajları da mevcuttur.

$\hat{\beta}(k)$, k 'nın karmaşık bir fonksiyonudur. k yanlılık parametresi için pek çok yöntem vardır. Bu sebeple, k 'nın seçiminin öznel olmasından dolayı yeni yöntemler araştırılmıştır. Önerilen Stein tahmin edici, c 'nin lineer bir fonksiyonudur. Stein tahmin edici $\hat{\beta}$ 'yı daraltarak çok daha iyi tahminler elde edilmesini sağlamıştır. Fakat, $\hat{\beta}_s$ 'nin her bir elemanının aynı daralması iyi bir

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

sonuç ortaya koymamaktadır. Böylece Liu (1993), çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak amacıyla, iki tahmin edici kombinasyonunun, bu iki tahmin edicinin avantajlarını birleştireceği yönündeki düşüncesi ile Ridge tahmin edici ile Stein tahmin ediciyi birleştirmiştir ve

$$\hat{\beta}_d = (X'X + I)^{-1} (X'y + d\hat{\beta}), \quad 0 < d < 1 \quad (3.45.)$$

tahmin edicisini elde etmiştir. Bu tahmin edici Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) ve Gruber (1998) tarafından Liu tahmin edici olarak tanımlanmıştır. $\hat{\beta}_d$ 'nin $\hat{\beta}(k)$ 'dan daha avantajlı olmasının sebebi, d 'nin bir lineer fonksiyonu olmasındandır. Böylelikle, d 'nin seçimi k yanlılık parametresinin seçiminden daha kolay olacaktır. $d = 1$ iken $\hat{\beta}_d = \hat{\beta}$ 'dır. Bununla birlikte $\hat{\beta}_d$, OLS tahmin edicinin bir lineer dönüşümü olarak $\hat{\beta}_d = (X'X + I)^{-1} (X'X + dI)\hat{\beta}$ şeklinde ifade edilmektedir. $E(\hat{\beta}_d) = (X'X + I)^{-1} (X'X + dI)\beta$ olduğu için, $\hat{\beta}_d$ yanlı bir tahmin edicidir. $A_d = (X'X + I)^{-1} (X'X + dI)$ olmak üzere, Liu tahmin edicinin yanlılığı ve varyans-kovaryans matrisi şu şekildedir

$$Bias(\hat{\beta}_d) = (A_d - I)\beta$$

ve

$$Var(\hat{\beta}_d) = \sigma^2 A_d (X'X)^{-1} A_d'$$

olur. $\hat{\beta}_d$ 'nin MMSE'si $\hat{\beta}$ 'dan daha iyi olacak şekilde $0 < d < 1$ aralığı mevcuttur. (3.9.) modeli için,

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN

$$SMSE(\hat{\beta}_d) = \sigma^2 \sum_{i=1}^p \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i(\lambda_i + 1)} + (d-1)^2 \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i + 1)^2} \quad (3.46.)$$

olur. Liu (1993) tarafından verilen, $SMSE(\hat{\beta}_d)$ 'yi minimum yapan d yanlılık parametresinin tahmini

$$\hat{d}_{opt} = 1 - \hat{\sigma}^2 \left(\sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i(\lambda_i + 1)} \bigg/ \sum_{i=1}^p \frac{\hat{\alpha}_i^2}{(\lambda_i + 1)^2} \right) \quad (3.47.)$$

olarak gösterilir.

3. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Ecem ÖZKAN



4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLERİ

4.1. Ridge ve Temel Bileşenler Regresyonun Birleşimi ($r-k$ sınıfı tahmin edici)

Bu çalışmada OLS ,ORR ve PCR'yi içeren bir tahmin edici sınıfı incelenmektedir. Burada, PCR ve ORR tekniklerinin birleştirilmesiyle yeni bir tahmin edici tanımlanmış ve bilinen tahmin edicilerle örnek üzerinde karşılaştırılmaları incelenmiştir. ORR ve PCR tekniklerini birleştiren bu tahmin edici $r-k$ sınıf tahmin edici olarak adlandırılmıştır. Bu tahmin edici, çoklu iç ilişki problemini gidermek için alternatif bir yöntem sunmaktadır.

Cooley ve LeRoy (1981), faiz oranlarının tutarsızlığı problemini iyi bir şekilde özetlemektedir: “Para talebinin tüm deneysel çalışmalar ile ortaya çıkan problemlerden biri de faiz oranları arasındaki eşdoğrusallığın varlığıdır. Bazı çalışmalarda, faiz oranları arasındaki eşdoğrusallığın , regresyona yalnızca bir faiz oranı girildiğinde az miktarda açıklayıcı gücün kaybolması konusunda yeterince büyük olduğu sonucuna varılmıştır.” Bu faiz oranlarını düşürme yöntemi teorik araştırmacılar için bir ikilem oluşturmaktadır. Örneğin, James Tobin’in (1958) para talebine olan portföy yaklaşımı tüm diğer varlıklardan elde edilen getirilerin para talebine dahil edilmesini gerektirir. Benzer şekilde, Milton Friedman’ın paramiktar teorisini yeniden ifade etmesi, para talebinin para ve bonoların getirisine bağlı olduğunu ileri sürer.

Bu çalışmada, teorik olarak ilgili faiz oranlarını silerek yanlış tanımlanan modeli kullanmak yerine, alternatif bir yöntem sunulmaktadır. Bu çalışmada önerilen yaklaşım, temel bileşenler tahmin edicilerinin MSE’sini azaltmak için Ridge yönteminin kullanılmasıdır.

Lin ve Kmenta (1982) ile aynı fikirde olarak: “Ekonomik araştırmacılar (Ekonomistler), ridge regresyona eskisinden daha çok önem veriyorlar.” Bu makale ORR, PCR ve OLS arasındaki ilişkiyi göstererek buna katkıda bulunmaktadır.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

(1.1.) ile verilen modeli tekrar ele alalım:

$$T'X'XT = \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0' & \Lambda_{p-r} \end{pmatrix}; \quad T'T = TT' = I_p$$

ve

$$T = (T_r, T_{p-r}), \quad T_r : p \times r.$$

Burada $T_r = [t_1, t_2, \dots, t_r]$, T 'nin $(p-r)$ kolonunun silinmesiyle elde edilen bir matristir. Böylece, $T_r'X'XT_r = \Lambda_r$, burada Λ_r yukarıda gösterilen Λ 'ya benzer olarak tanımlanır. Ayrıca, $\alpha = T'\beta$ olarak ifade edilir.

Tanım 4.1. β için r-k sınıf tahmin edici, $r \leq p$ ve $k \geq 0$ olduğunda,

$$\hat{\beta}(r, k) = T_r(T_r'X'XT_r + kI_r)^{-1}T_r'X'y \quad (4.1.)$$

şeklinde tanımlanır.

Yani $r-k$ sınıfı tahmin edicisi, Ridge ve Temel bileşenler yöntemlerini tek bir tahmin edici içinde birleştirir. Bilindiği üzere, çoklu iç ilişki probleminin şiddetini azaltmaya çalışan araştırmacılar, birçok çözüm arayarak bunu yaptılar: Yani, PCR veya ORR'yi kullandılar. Şimdi r-k sınıfı tahmin edicilerin bazı özelliklerini inceleyelim.

Teorem 4.1. $\hat{\beta}(r, k)$ tahmin edicisi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $E[\hat{\beta}(r, k) - \beta] = [T_r(\Lambda_r + kI_r)^{-1}\Lambda_r T_r' - I_p]\beta$.
2. $Var[\hat{\beta}(r, k)] = \sigma^2 T_r(\Lambda_r + kI_r)^{-1}\Lambda_r(\Lambda_r + kI_r)^{-1}T_r'$.
3. $\hat{\beta}_r(0) = \hat{\beta}_{PCR}$, PCR tahmin edicidir.
4. $\hat{\beta}_p(k) = \hat{\beta}(k)$, ORR tahmin edicidir.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

5. $\hat{\beta}_p(0) = \hat{\beta}$, OLS tahmin edicidir.

$$6. MSE[\hat{\beta}(r, k)] = \sum_{i=1}^r [(\delta_i - 1)^2 \alpha_i^2 + \sigma^2 \delta_i^2 / \lambda_i] + \sum_{i=r+1}^p \alpha_i^2, \quad \delta_i = \lambda_i / (\lambda_i + k)$$

$$7. P \lim \hat{\beta}(r, k) = P \lim \hat{\beta}_{PCR}.$$

Dolayısıyla, r ve k nın değerlerine bağlı olarak, $\hat{\beta}(r, k)$, ORR, PCR ve OLS tahmin edicilerini verir.

Teorem 4.2. $\sigma^2 > 0$ olsun. $\exists k > 0$ için $MSE[\hat{\beta}(r, k)] < MSE(\hat{\beta}_{PCR}) \forall$, $0 < r \leq p$ olacak şekilde bir r vardır.

Teorem 4.2., $r < p$ olduğunda orjinal Ridge sonuçlarını genelleştirmektedir. Diğer bir şekilde ifade edildiğinde, sıfırdan büyük bir k vardır, öyle ki, bir Temel bileşenler tahmin edicisi, hata kareler ortalaması minimum olan bir tahmin edici elde etmek için “daralmış” olabilir. Bununla birlikte, ORR’ye benzer şekilde optimal k ‘nın bilinmeyen α ve σ^2 parametrelerine bağlı olduğu görülmektedir.

Örnek 4.1.

Yukarıda verilen regresyon tekniklerini göstermek için , aşağıdaki para talebi modelini ele alalım:

$$M = a_0 + a_1 GNP + a_2 \pi + a_3 A + a_4 B + a_5 CP + a_6 PR + a_7 TB + \varepsilon.$$

M para talebi, π enflasyon oranı ve geriye kalan değişkenler, A ve B bonoların, CP dört aylık ticari kağıtların, PR vadeli kazanç oranını ve TB 90 günlük Hazine Bonosu’nun getirilerini temsil etmektedir. Tüm değişkenler log formundadır ve 1947-1981 yıllarındaki **Başkanlık Ekonomik Raporu**’ndan alınmıştır. Bu model aslında Cooley ve LeRoy’a aittir.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

r-k sınıfı parametre tahminleri, 1 ile 7 arasındaki r ve k değerleri için 0 ile 0.25 arasında 0.005'lik artışlarla elde edilmiştir. Parametre tahminlerinin incelenmesi ile aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar:

1. $k = 0$ için, r (dahil olan Temel bileşenler sayısı)'deki değişiklikler, parametre tahmininde farklı değişikliklere neden olmuştur.
2. 1 den 3'e kadar Temel bileşen çıkarıldıktan sonra bile, PCR parametre tahminleri verideki bozulmalara karşı hala hassaslık gösterir. Burada küçük k değerleri için, $\hat{\beta}(r, k)$ 'nın kararsız olduğu görülmektedir.
3. Genel olarak, çıkarılan Temel bileşenlerin sayısı 3'ten büyük olduğunda, r-k sınıfı tahmin edici, k 'nın kararlı bir fonksiyonudur. Bu durumda Ridge yöntemi ile PCR tahmin edicinin birleştirilmesinin daha iyi sonuç verdiğini göstermektedir. Baye ve Parker (1984) sadece r-k sınıfı tahmin edicisini ve PCR tahmin edicisini örnek üzerinde karşılaştırmış, r-k sınıfı tahmin edicisini ORR ve OLS tahmincisi ile karşılaştırmamıştır. Nomura ve Ohkuba (1985), MSE kriteri açısından bu karşılaştırmaları aşağıdaki gibi vermiştir.

$N_r = \{1, \dots, r\}$ ve $\bar{N}_r = \{r+1, \dots, p\}$ olsun. MSE, $W = I$ veya $W = X'X$ olduğunda $MSE(\hat{\beta}(r, k)) = E(\hat{\beta}(r, k) - \beta)'W(\hat{\beta}(r, k) - \beta)$ 'dır. $W = I$ iken $MSE(\hat{\beta}(r, k))$, regresyon katsayılarının tahmin edicisinin hata kareler ortalamasıdır. $W = X'X$ iken $MSE(\hat{\beta}(r, k))$, $E[y | X]$ 'in tahmincisinin hata kareler ortalamasını ifade eder. W 'nin tanımından, $W = I$ için $(\mu_1, \dots, \mu_r) = (1, \dots, 1)$ ve $W = X'X$ için $(\mu_1, \dots, \mu_r) = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ 'de

$$T_r'WT_r = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r) ; \mu_i > 0 \text{ (Tüm } i \in N_r \text{ için)}$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

şeklinde olur. Böylece, $\delta_i = \lambda_i / (\lambda_i + k)$ 'da $MSE(\hat{\beta}(r, k))$ şu şekilde verilir:

$$MSE(\hat{\beta}(r, k)) = \sum_{i \in N_r} \mu_i \left[(\delta_i - 1)^2 \alpha_i^2 + \sigma^2 \delta_i^2 / \lambda_i \right] + \sum_{i \in N_r} \mu_i \alpha_i^2 .$$

Teorem 4.3. $r \in N_1$ olsun. Böylece,

1. $\alpha_r^2 \lambda_r < \sigma^2$ olması için gerek ve yeter koşul

$$MSE(\hat{\beta}(r, k)) > MSE(\hat{\beta}(r-1, k)) , \quad 0 \leq k < (\sigma^2 - \alpha_r^2 \lambda_r) / 2\alpha_r^2$$

ve

$$MSE(\hat{\beta}(r, k)) < MSE(\hat{\beta}(r-1, k)) , \quad (\sigma^2 - \alpha_r^2 \lambda_r) / 2\alpha_r^2 \leq k \text{ için.}$$

2. $\alpha_r^2 \lambda_r \geq \sigma^2$ olması için gerek ve yeter koşul

$$MSE(\hat{\beta}(r, k)) \leq MSE(\hat{\beta}(r-1, k)) , \quad 0 \leq k < \infty$$

olmasıdır.

Sonuç 4.1: $r \in N_{p-1}$ için,

1. Her $i \in \bar{N}_r$ için $\alpha_i^2 \lambda_i < \sigma^2$ ise,

$$MSE(\hat{\beta}(r, k)) > MSE(\hat{\beta}(p-1, k)) > \dots > MSE(\hat{\beta}(r, k)) , \quad 0 < k < K_1$$

olacak şekilde p.d. bir K_1 vardır.

2. Bazı $i \in \bar{N}_r$ için, $\alpha_i^2 \lambda_i \leq \sigma^2$ ise,

$$MSE(\hat{\beta}(r, k)) < MSE(\hat{\beta}(p-1, k)) < \dots < MSE(\hat{\beta}(r, k)) , \quad K_2 < k$$

olacak şekilde n.n.d bir K_2 vardır.

Teorem 4.4. $r \in N_p$ olsun.

1. Her $i \in N_r$ için, $\sum_{i \in N_r} \mu_i (\alpha_i^2 - \sigma^2 / \lambda_i) \leq 0$ ve $\sigma^2 / \lambda_i - \alpha_i^2 \geq 0$ ise,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$MSE(\hat{\beta}(r, k)) < MSE(\hat{\beta}), \quad 0 < k < \infty$$

dir.

2. Bazı $i \in N_r$ için, $\sum_{i \in N_r} \mu_i (\alpha_i^2 - \sigma^2 / \lambda_i) \leq 0$ ve $\sigma^2 / \lambda_i - \alpha_i^2 < 0$ ise,

$$MSE(\hat{\beta}(r, k)) < MSE(\hat{\beta}), \quad 0 < k < 2\sigma^2 / \max_{i \in N_r} (\alpha_i^2 - \sigma^2 / \lambda_i)$$

dir.

Baye ve Parker (1984), Nomura ve Ohkuba (1985), Sarkar (1989), MSE kriterine göre r-k sınıfı tahmin edicinin performansını ORR, PCR ve OLS tahmin edicisiyle karşılaştırmıştır. MSE genellikle bir tahmincinin performansını ölçmek için kullanılırken, MMSE de yaygın olarak kabul edilmekte ve daha güçlü bir kriter olarak görülmektedir. Sarkar (1996), r-k sınıfı tahmin edicisinin, MMSE kriterine göre ORR, PCR ve OLS tahmin edicilerinden üstün olduğu koşulları elde etmiştir. Öncelikle r-k sınıfı tahmin edici ile OLS nin karşılaştırılmasını ele alalım:

$$MMSE(\hat{\beta}) - MMSE(\hat{\beta}(r, k)) = T(S^*(k))^{-1} [\sigma^2 \Lambda^*(k)^{-1} - T' \beta \beta' T] (S^*(k))^{-1} T'$$

$$S^*(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{k}(\Lambda_r + kI_r) & 0 \\ 0 & I_{p-r} \end{pmatrix} \text{ ve } \Lambda^*(k)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{k}I_r + \Lambda_r^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_{p-r}^{-1} \end{pmatrix}$$

verilsin. Eğer $\sigma^2 \Lambda^*(k)^{-1} - T' \beta \beta' T$ ise $MMSE(\hat{\beta}) - MMSE(\hat{\beta}(r, k))$ n.n.d. bir matristir. Böylece, eğer $\beta' T \Lambda^*(k) T' \beta \leq \sigma^2$ olursa, $\sigma^2 \Lambda^*(k)^{-1} - T' \beta \beta' T$ n.n.d. olur. $\Lambda^*(k)$ ifadesi kullanılarak, aşağıdaki teorem verilir:

Teorem 4.5. MMSE kriterine göre, r-k sınıfı tahmin edicinin OLS tahmin edicisinden daha üstün olması için gerek ve yeter koşul

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$\left[\beta' T_r \left(\frac{2}{k} I_r + \Lambda_r^{-1} \right)^{-1} T_r' \beta + \beta' T_{p-r} \Lambda_{p-r} T_{p-r}' \beta \right] \leq \sigma^2$$

olmasıdır.

İkinci olarak, r-k sınıfı tahmin edici ile PCR tahmin edicisini karşılaştırmak için tahmin edicilerin MMSE'si arasındaki fark aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{aligned} MMSE(\hat{\beta}_{PCR}) - MMSE(\hat{\beta}(r, k)) &= \sigma^2 T_r \left(\Lambda_r^{-1} - S_r(k)^{-1} \Lambda_r S_r(k)^{-1} \right) T_r' \\ &\quad + \left(T_r T_r' - I_p \right) \beta \beta' \left(T_r T_r' - I_p \right) \\ &\quad - \left(T_r S_r(k)^{-1} \Lambda_r T_r' - I_p \right) \beta \beta' \left(T_r \Lambda_r S_r(k)^{-1} \Lambda_r T_r' - I_p \right) \end{aligned}$$

burada $S_r(k) = \Lambda_r + k I_r$ 'dir. Bu karşılaştırmanın yapılabilmesi için,

$$T_r \left(\left(\Lambda_r^{-1} - S_r(k)^{-1} \right) \Lambda_r S_r(k)^{-1} \right) T_r' = k^2 T_r S_r(k)^{-1} \left(\frac{2}{k} I_r + \Lambda_r^{-1} \right) S_r(k)^{-1} T_r'$$

ifadesinin her $k > 0$ için n.n.d. olduğunu göstermeliyiz. Baksalary ve Trenkler (1991)' in takip edilmesiyle bu koşul

$$\beta' T_r \left(\frac{2}{k} I_r + \Lambda_r^{-1} \right)^{-1} T_r' \beta = 0$$

olması için gerek ve yeter koşul $T_r' \beta = 0$ olmasıdır şeklinde yazılabilir.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

Teorem 4.6. $r - k$ sınıfı tahmin edicinin PCR tahmin ediciden daha iyi olması için gerek ve yeter koşul $T_r' \beta = 0$ olmasıdır.

Şimdi $r-k$ sınıf tahmin edici ve ORR tahmin edicisini karşılaştıralım:

$$\begin{aligned} MMSE(\hat{\beta}_k) - MMSE(\hat{\beta}(r, k)) &= \sigma^2 T_{p-r} S_{p-r}(k)^{-1} \Lambda_{p-r} S_{p-r}(k)^{-1} T_{p-r}' \\ &\quad + (TS(k)^{-1} \Lambda T' - I_p) \beta \beta' (T \Lambda S(k)^{-1} T' - I_p) \\ &\quad - (T_r S_r(k)^{-1} \Lambda_r T_r' - I_p) \beta \beta' (T_r \Lambda_r S_r(k)^{-1} T_r' - I_p) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada $S_{p-r}(k)^{-1}$, $S_{p-r}(k) = \Lambda_{p-r} + kI_{p-r}$ matrisinin tersidir.

Önceki durumda olduğu gibi, Baksalary ve Trenkler (1991) den yararlanırsak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.7. β 'nın $r-k$ sınıfı tahmin edicisinin MMSE kriterine göre ORR tahmin edicisinden daha iyi olması için için gerek ve yeter koşul $T_{p-r}' \beta = 0$ olmasıdır.

4.2. Yansız Ridge ve Temel Bileşenler Regresyon Tahmin Edicilerinin Birleşimi

Çoklu iç ilişki probleminin varlığında, OLS kestirimi yetersizdir. Bu problemi aşmak için genellikle önerilen iki iyi bilinen tahmin prosedürü, Crouse ve arkadaşları (1995)' nin verdiği yansız ridge regresyon (URR) tahmin edicisidir ve $r-k$ sınıfı tahmin edici ise Baye ve Parker (1984) tarafından verilmiştir. Burada, OLS, URR, $r-k$ sınıfı ve PCR tahmin edicileri içeren Uyarlanmış $r-k$ sınıfı ridge regresyonu (MCRR) olarak adlandırılan ve Batah ve arkadaşları (2009) tarafından verilen yeni bir tahmin edici sınıfı incelenecektir ve bu regresyon yöntemi URR ve PCR tahmincilerinin altında yatan fikirleri birleştiren bir kritere dayanmaktadır. MCRR tahmin edicisinin, diğer iki tahmin ediciden daha iyi olduğu durumlar araştırılmıştır.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

Gauss Markov teoremine göre, genel doğrusal regresyon modeli (1.1.)’ de verilmiştir. β ‘nın OLS tahmin edicisi (1.3.)’de verilmiş ve burada β normal dağılıma sahiptir $N(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1})$. Klasik regresyon modeli, X ‘teki sütun vektörlerinin lineer bağımlı olmadığını varsaymaktadır. Bununla birlikte, birçok pratik uygulamada, özellikle mühendislik alanında, bu sütun vektörlerinin yaklaşık lineer bağımlı oldukları tespit edilmektedir. Daha sonra çoklu iç ilişki probleminin varlığı ortaya çıkmaktadır. Bu problem, $(X'X)^{-1}$ ‘in köşegen elemanlarının silinmesi ve böylelikle $\hat{\beta}$ ‘nın varyans tahmininin büyük olmasına neden olur. X design matrisindeki birtakım küçük değişiklikler, tahmin edilen katsayıların işaret değişikliğine neden olursa, çoklu iç ilişki problemi olabilir. OLS tahmin edicisi, çoklu iç ilişkinin varlığında kararlı değildir. Dolayısıyla, alternatif tahmin yöntemleri, yanlış tahmin edicilere sebep olan tahminlerdeki kararsızlığı ortadan kaldırmak ve regresyon katsayılarının varyansını azaltmak için tasarlanmıştır. Sonuç olarak, β ‘nın birçok yanlış tahmin edicilerine önemli ölçüde ilgi olmuştur. Bunların en bilinenleri Hoerl ve Kennard’ın (1970) ORR tahmin edicisidir. Hoerl ve Kennard tarafından önerilen ORR tahmin edicisinin, $X'X$ matrisinin köşegen elemanlarına genellikle $0 < k < 1$ aralığında yer alan pozitif bir k değeri ekleyerek, çoklu iç ilişki probleminin ortadan kaldırılması amaçlanmaktadır. β ‘nın ORR tahmin edicisi, (3.27.) ‘de verilmiştir. Burada $k = 0$ iken OLS tahmin edicisini kapsar. k ‘nın artırılması için ORR tahmin edicisi, β ‘nın kararlı fakat, yanlış tahmin edicisi olarak 0’a yaklaşır. Swindel (1976), ön bilgileri Ridge regresyon ile birleştirerek bir yöntem geliştirmiştir, yani, MRR tahmin edicisi ile Hoerl ve Kennard’ın (1970) bu modeli (3.44.)’de gösterildiği gibi genişletilmiştir. Burada b , β ‘nın ön tahmininin sabit bir vektörüdür. k ‘yı arttırmak için MRR tahmin edicisi b ‘ye yaklaşır. Swindel (1976), OLS tahmin edicisinin MMSSE’sine, n.n.d. bir matris tarafından önerilen tahmin edicinin (MRR)

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

MMSE'sini aşması için gerek ve yeter koşulları sağlamıştır. Ancak, Swindel (1976), tahmin edicisinin MSE özelliklerini, ORR tahmin edicisi ile karşılaştırmamıştır. Ayrıca, Pliskin (1987), aynı k değerlerini kullanarak, MRR ve ORR tahmin edicilerinin OLS tahmin edicisinden daha küçük MSE'ye sahip olmaları için gerek ve yeter koşulları vermiştir.. Crouse ve arkadaşları (1995), ORR'deki ön bilgileri birleştirmek üzere tanımlamıştır, yani, URR tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}(k, J) = (X'X + kI_p)^{-1} (X'y + kJ), \quad k \geq 0 \quad (4.2.)$$

şeklinde bulunmuştur. J , $k > 0$ için $J \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{k} I\right)$ ile rastgele bir vektördür.

k Ridge parametresi için,

$$\hat{k}^* = \left\{ \begin{array}{l} \frac{p\hat{\sigma}^2}{(\hat{\beta} - J)'(\hat{\beta} - J) - \hat{\sigma}^2 \text{tr}(XX)^{-1}}, \quad (\hat{\beta} - J)'(\hat{\beta} - J) - \hat{\sigma}^2 \text{tr}(XX)^{-1} > 0 \\ \frac{p\hat{\sigma}^2}{(\hat{\beta} - J)'(\hat{\beta} - J)}, \quad d.d. \end{array} \right\}$$

şeklinde bir tahmin önermişlerdir. $\hat{\sigma}^2 = \frac{(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})}{(n - p)}$, σ^2 'nin yansız

bir tahmin edicisidir. Ayrıca, bu $\hat{k}^*$ 'nın Hoerl ve arkadaşlarının tahmin edicisi

olan $\hat{k}_{HKB} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\beta}'\hat{\beta}}$ 'nın bir genellemesi olduğu belirtilmiştir. Tahmindeki

belirsizliğin artmasından kaynaklı bilgilerin çıkarılması için bir başka olasılık, Temel bileşenler regresyon tahmincisi tarafından önerilmektedir.

OLS, ORR ve PCR tahmin edicilerin aynı tahmin edici sınıfının üyeleri olarak görülebileceğini ve r-k sınıfı tahmin edicisinin SMSE açısından PCR'den daha iyi olduğunu göstermişlerdir. Sarkar (1996), r-k sınıfı tahmin edicisinin,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

MMSE kriterine göre OLS, PCR ve ORR tahmin edicilerinden daha üstün olduğu durumları vermiştir. Özkale (2007), URR tahmin edicisini, MMSE ve rezidüler açısından OLS, ORR ve r-k sınıfı tahmin edicilerle karşılaştırmıştır.

Burada önerilen yaklaşım, PCR tahmin edicisinin MSE'sini azaltmak için Yansız Ridge yöntemini kullanmaktır. Genel olarak, çoklu iç ilişkinin şiddetini azaltmaya çalışan araştırmacılar, PCR veya URR tahmin edicilerini kullanmışlardır. Böylece URR, PCR ve OLS tahmin edicileri arasındaki ilişki gösterilerek buna katkıda bulunmuşlardır.

4.2.1. Önerilen Tahmin Edici (MCRR)

Burada yeni bir β sınıf tahmin edicisi önerilmiştir. Yeni tahmin edici,

$$\hat{\beta}_r(k, J) = T_r' \left(T_r' X' X T_r + k I_r \right)^{-1} T_r' (X'y + kJ), \quad k \geq 0 \quad (4.3.)$$

şeklinde ifade edilen Uyarlanmış r-k Sınıfı Ridge regresyon (MCRR) tahmin edicisi olarak belirlenmiştir. Burada J , $k > 0$ için rastgele bir vektördür

$\left(J \sim N \left(\beta, \frac{\sigma^2}{k} I \right) \right)$. Önerilen tahmin edicinin, r-k sınıfı tahmin edicisi olarak

elde edildiği, ancak daha önce yapılmamış olan ORR tahmin edicisinin yerine URR tahmin edicisi ile elde edildiği belirtilebilir. Bir başka deyişle, MCRR tahmin edicisi, URR ve PCR yöntemlerini tek bir tahmin edicide birleştirir. MCRR tahmin edicisi $\hat{\beta}_r(k, J)$, aşağıdaki şu özelliklere sahiptir:

1. $\hat{\beta}_p(0, J) = \hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$, OLS tahmin edicisidir.
2. $\hat{\beta}_p(k, J) = \hat{\beta}(k, J) = (X'X + kI_p)^{-1} (X'y + kJ)$ URR tahmin edicisidir.
3. $\hat{\beta}_r(0, J) = \hat{\beta}_{PCR} = T_r' \left(T_r' X' X T_r \right)^{-1} T_r' X'y$ PCR tahmin edicisidir.
4. $\lim_{k \rightarrow 0} \hat{\beta}_r(k, J) = \hat{\beta}_{PCR}$.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$5. \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\beta}_r(k, J) = J.$$

$$6. \hat{\beta}_r(k, 0) = \hat{\beta}_r(r, k) = T_r \left(T_r' X' X T_r + k I_r \right)^{-1} T_r' X' y \text{ r-k sınıfı tahmin edicisidir.}$$

Böylece birleştirilen temel bileşenler, r , ridge parametresi, k ve önceki bilgiler, J 'nin uygun seçimleri için, MCRR tahmin edicisi, URR, PCR, r-k sınıfı ve OLS tahmin edicilerini özel durumlar olarak içeren genel bir tahmin edicidir. Belirli bir r için, MCRR tahmin edicisinin aynı bileşenlere dayanan bir PCR tahmin edicisi olarak örnek büyük özelliklere sahip olduğu unutulmamalıdır.

4.2.2. MMSE Kriteri Altında MCRR Tahmin Edicinin Performansı

Bu bölümde, MCRR tahmin edicisinin yanlı olduğunu ve bu nedenle bu tahmin edicinin performansını ölçmek için uygun kriterin MMSE kriteri olduğu görülmüştür. Daha sonra, MCRR tahmin edicisinin URR, PCR, r-k sınıfı ve OLS tahmin edicilerine göre performansı bu kriterle karşılaştırılmıştır.

$\Lambda_r(k) = \Lambda_r + k I_r$ ve $T_r' X' X T_r = \Lambda_r$ olduğunda MCRR tahmin edicisi,

$$Bias(\hat{\beta}_r(k, J)) = [T_r T_r' - I_p] \beta = -T_{p-r} T_{p-r}' \beta \quad (4.4.)$$

Ve

$$Var(\hat{\beta}_r(k, J)) = \sigma^2 T_r \left[T_r' X' X T_r + k I_r \right]^{-1} T_r' = \sigma^2 T_r \Lambda_r^{-1}(k) T_r' \quad (4.5.)$$

'dir. Daha sonra model (1.1.)'de β 'nın herhangi bir $\tilde{\beta}$ tahmincisi için, (1.12.) ve

$$SMSE(\tilde{\beta}) = tr[MMSE(\tilde{\beta})]$$

tarafından verilen, MMSE ve SMSE kullanılırsa, Teorem 4.8. ve 4.9. kullanılarak MCRR tahmin edicisinin MMSE'sine $\gamma = T' \beta$ olduğunda,

$$MMSE(\hat{\beta}_r(k, J)) = \sigma^2 T_r \left[T_r' X' X T_r + k I_r \right]^{-1} T_r' + T_{p-r} T_{p-r}' \beta \beta' T_{p-r} T_{p-r}'$$

ve

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$SMSE\left(\hat{\beta}_r(k, J)\right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^r \frac{1}{\lambda_i + k} + \sum_{i=r+1}^p \gamma_i^2$$

şeklinde sahip oluruz.

Teorem 4.8. $k > 0$ için, $\Delta = MMSE\left(\hat{\beta}\right) - MMSE\left(\hat{\beta}_r(k, J)\right)$ farkı ancak ve ancak,

$$\beta' T_{p-r} \Lambda_{p-r} T_{p-r}' \beta \leq \sigma^2$$

eşitsizliği sağlandığında n.n.d.'dir.

Teorem 4.9. $k > 0$ için, MCRR tahmin edicisinin MMSE'si, PCR tahmin edicisinden daha küçüktür.

Teorem 4.10. $k > 0$ için, $\Delta = MMSE\left(\hat{\beta}(k, J)\right) - MMSE\left(\hat{\beta}_r(k, J)\right)$ farkı ancak ve ancak,

$$\beta' T_{p-r} \left(\Lambda_{p-r} + k I_{p-r} \right) T_{p-r}' \beta \leq \sigma^2$$

eşitsizliği sağlandığında n.n.d.'dir.

Teorem 4.11. $k > 0$ için, $\Delta = MMSE\left(\hat{\beta}_r(k, J)\right) - MMSE\left(\hat{\beta}(r, k)\right)$ farkı ancak ve ancak,

$$\beta' T_r T_r' \beta \leq \frac{\sigma^2}{k}$$

eşitsizliği sağlandığında n.n.d.'dir.

Böylelikle, Uyarlanmış $r - k$ sınıfı ridge regresyon (MCRR) tahmincisi olarak adlandırılan yeni bir tahmin edici sınıfı önerilmiş ve bu tahmin edici, OLS, URR, $r - k$ sınıfı ve PCR tahmincilerinin basit bir genellemesi olarak nitelendirilmiştir. SMSE kriterinden daha güçlü bir kriter olan MMSE kriterini kullanarak MCRR tahmin edicisinin OLS, PCR, URR ve $r - k$ sınıfı tahmin edicilerine göre üstünlüğü için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. MCRR tahmin edicisinin OLS, PCR, URR ve $r - k$ sınıfı tahmin edicilerle karşılaştırılmasında

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

elde edilen koşullar bilinmeyen parametrelere bağlıdır. Ayrıca, karşılaştırmalar bilinmeyen parametrelere bağlıysa, yansız tahminler veya bu parametrelerle ilgili ön bir bilginin kullanılması, uygulanabilir sonuçlara yol açar.

4.3. Liu Tahmin Edici ve Temel Bileşenler Tahmin Edicinin Birleşimi

Burada, OLS, PCR ve Liu tahmin edicilerini içeren bir tahmin edici sınıfı tanımlanmıştır. Özellikle, yeni tahmin edicinin SMSE'sinin Liu tahmin edicisi , OLS tahmin edicisi ve PCR tahmin edicisinden üstün olduğu gösterilmiştir.

Çoklu iç ilişki problemiyle mücadele etmek için farklı iyileştirici yöntemler önerilmiştir. Yaklaşık çoklu iç ilişki problemiyle başa çıkmak için kullanılan popüler bir sayısal yöntem, Ridge regresyon yöntemidir.

Farklı tahmin edicileri birleştirmek, her iki tahmin edicinin avantajlarını birleştirir düşüncesiyle Liu (1993)'de yeni bir yanlı tahmin ediciyi tanımlamıştır. Liu, yaklaşık çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak için Stein tahmin edici ile ORR tahmin edicisini birleştirmiştir. Önerilen tahmin edici Liu tahmin edicisi olarak adlandırılmıştır. Liu, OLS tahmin edicisi ve Liu tahmin edicisinin SMSE değerini karşılaştırmıştır. Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) hemen hemen yansız genelleştirilmiş Liu tahmin edicisini tanımlamışlardır. Kaçıranlar ve arkadaşları, (1999)'da kısıtlı Liu tahmin edicisini vermiştir ve özelliklerini ayrıntılı olarak ele almışlardır. Sakallıoğlu ve arkadaşları (2001)'de Liu tahmin edicisini ORR tahmin edicisiyle ve Trenkler (1978) tarafından verilen iterasyon tahmin edici ile SMSE kriterine göre karşılaştırmışlardır.

Baye ve Parker, (1984)'da özel durumlarda OLS, ORR ve PCR tahmin edicileri veren $r - k$ sınıfı tahmin ediciyi önermiştir. Nomura ve Ohkubo (1985)'te $r - k$ sınıfı tahmin edici ile ORR tahmin edicisi MSE değerine göre karşılaştırılmıştır. (1.1.)'de verilen regresyon modelini göz önüne alırsak, β 'nın $r - k$ sınıfı tahmin edicisinden yararlanarak, OLS, PCR ve Liu tahmin edicilerinin özel durum olduğu bir tahmin edici sınıfı tanımlanmıştır.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

Tanım 4.2. (1.1.) modelindeki β 'nın $r-d$ sınıfı tahmin edicisi,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}(r, d) &= T_r \left(T_r' X' X T_r + I_r \right)^{-1} \left(T_r' X' y + d T_r' \hat{\beta}_{PCR} \right) \\ &= T_r \left(T_r' X' X T_r + I_r \right)^{-1} \left(I_r + d \left(T_r' X' X T_r \right)^{-1} \right) T_r' X' y\end{aligned}\quad (4.6.)$$

şeklinde verilir. Burada, $r \leq p$, $0 < d < 1$ bir parametredir ve $\hat{\beta}_{PCR}$, (3.14.)'de verilen PCR tahmin edicisidir.

SMSE, β 'nın herhangi bir $\tilde{\beta}$ tahmin edicisi için,

$$\begin{aligned}SMSE(\tilde{\beta}) &= E \left[(\tilde{\beta} - \beta)' (\tilde{\beta} - \beta) \right] \\ &= V(\tilde{\beta}) + B(\tilde{\beta})\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada $V(\tilde{\beta})$ ve $B(\tilde{\beta})$ sırasıyla toplam varyansı ve yanlılığın

karesini verir. $\hat{\beta}(r, d)$, $\hat{\beta}_{PCR}$ ve $\hat{\beta}$ için SMSE'leri sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$SMSE(\hat{\beta}(r, d)) = \sum_{i=1}^r \left[(\delta_i - 1)^2 \alpha_i^2 + \frac{\sigma^2 \delta_i^2}{\lambda_i} \right] + \sum_{i=r+1}^p \alpha_i^2 \quad (4.7.)$$

$$SMSE(\hat{\beta}_{PCR}) = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma^2}{\lambda_i} + \sum_{i=r+1}^p \alpha_i^2 \quad (4.8.)$$

$$SMSE(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i} \quad (4.9.)$$

Burada $\delta_i = (\lambda_i + d) / (\lambda_i + 1)$ 'dir.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

Teorem 4.12. $SMSE(\hat{\beta}(r, d)) < SMSE(\hat{\beta}_{PCR})$ olacak şekilde $0 < d < 1$ vardır.

Lemma 4.1. $\sigma^2 < \lambda_r \alpha_r^2 + 2\alpha_r^2$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$SMSE(\hat{\beta}(r, d)) > SMSE(\hat{\beta}(r-1, d)), \quad 0 < d_0 < d < 1$$

ve

$$SMSE(\hat{\beta}(r, d)) < SMSE(\hat{\beta}(r-1, d)), \quad 0 < d < d_0 < 1$$

olmasıdır. Burada,

$$d_0 = \left(\lambda_r (2\alpha_r^2 + \lambda_r \alpha_r^2 - \sigma^2) \right) / \left(\lambda_r \alpha_r^2 + \sigma^2 \right) = 1 - \left((\sigma^2 - \lambda_r \alpha_r^2) (1 + \lambda_r) \right) / \left(\lambda_r \alpha_r^2 + \sigma^2 \right) \text{ 'dir.}$$

Böylece, aşağıdaki teorem Lemma 4.1 kullanılarak verilebilir.

Teorem 4.13. a. Bazı $i \in N_p$ için, $\sigma^2 \leq \lambda_i \alpha_i^2 + 2\alpha_i^2$ ise, $0 < d_1 < d < 1$ için $SMSE(\hat{\beta}_d) > SMSE(\hat{\beta}(p-1, d)) > \dots > SMSE(\hat{\beta}(r, d))$ olacak şekilde negatif olmayan bir d_1 vardır. Burada $N_p = \{r+1, r+2, \dots, p\}$ 'dir.

b. Her $i \in N_p$ için, $\sigma^2 < \lambda_i \alpha_i^2 + 2\alpha_i^2$ ise, $0 < d < d_2 < 1$ için $SMSE(\hat{\beta}_d) < SMSE(\hat{\beta}(p-1, d)) < \dots < SMSE(\hat{\beta}(r, d))$ olacak şekilde pozitif bir d_2 vardır. Örneğin,

$$d_1 = \min_{i \in N_p} \left\{ 1, \max_{i \in N_p} \frac{\lambda_i (2\alpha_i^2 + \lambda_i \alpha_i^2 - \sigma^2)}{\lambda_i \alpha_i^2 + \sigma^2} \right\}$$

ve

$$d_2 = \min_{i \in N_p} \left\{ \frac{\lambda_i (2\alpha_i^2 + \lambda_i \alpha_i^2 - \sigma^2)}{\lambda_i \alpha_i^2 + \sigma^2} \right\}.$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$\hat{\beta}(r, d)$ ve OLS tahmin edicisinin SMSE'lerinin karşılaştırılması aşağıdaki teoremlerle de verilebilir:

Teorem 4.14. a. Her $i \in N_r = \{1, 2, \dots, r\}$ için, $\sum_{i=r+1}^p \left(\alpha_i^2 - \frac{\sigma^2}{\lambda_i} \right) \leq 0$ ve

$\frac{\sigma^2}{\lambda_i} - \alpha_i^2 \geq 0$ ise, $0 < d < 1$ için $SMSE(\hat{\beta}(r, d)) < SMSE(\hat{\beta})$ 'dır.

b. Bazı $i \in N_r$ için, $\sum_{i=r+1}^p \left(\alpha_i^2 - \frac{\sigma^2}{\lambda_i} \right) \leq 0$ ve $\frac{\sigma^2}{\lambda_i} - \alpha_i^2 < 0$ ise,

$0 < \max_{i \in N_r} \left((\lambda_i \alpha_i^2 - \sigma^2) / (\lambda_i \alpha_i^2 + \sigma^2) \right) < d < 1$ için

$SMSE(\hat{\beta}(r, d)) < SMSE(\hat{\beta})$ 'dır.

Teoremler bilinmeyen parametrelere bağlıdır. Pratikte teoremleri uygulayabilmek için bilinmeyen parametreler uygun tahminlerini kullanmak gerekmektedir.

Teorem 4.14.'teki bulguları Portland çimentosu üzerinde inceleyelim:

Bu veriler için aşağıdaki sonuçlar bulunur:

i. XX' 'in özdeğerleri: 2.2357, 1.57607, 0.18661, 0.00162.

ii. α 'nın OLS tahmini: $(\hat{\alpha})' = (0.65696, -0.00831, 0.3028, 0.388)$.

iii. σ^2 'nin OLS tahmini: $\hat{\sigma}^2 = 0.00196$.

$r = 2$ seçilir, çünkü standartlaştırılmış verilerle uğraşırken en iyi r değerinin birden büyük özdeğerlerin sayısı olduğuna inanılmaktadır.

Böylece, α ve σ^2 yerine $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\sigma}^2$ OLS tahminleri kullanılarak Teorem 4.14.'te yer alan (a) ve (b)'deki hangi durumun sağlandığı kontrol edilir. $(\hat{\sigma}^2 / \lambda_2) - \hat{\alpha}_2^2 = 0.00118$ pozitif olduğundan, Teorem 4.14.'ün (a) kısmı

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

kullanılamaz. Fakat, Teorem 4.14.'ün (b) kısmı, $\sum_{i=3}^4 (\hat{\alpha}_i^2 - (\hat{\sigma}^2 / \lambda_i)) = -0.95715$

ve $(\hat{\sigma}^2 / \lambda_1) - \hat{\alpha}_1^2 = -0.43072$ olduğundan dolayı kullanılabilir.

$$(\lambda_1 \hat{\alpha}_1^2 - \hat{\sigma}^2) / (\lambda_1 \hat{\alpha}_1^2 + \hat{\sigma}^2) = 0.97526 \quad \text{ve}$$

$$(\lambda_2 \hat{\alpha}_2^2 - \hat{\sigma}^2) / (\lambda_2 \hat{\alpha}_2^2 + \hat{\sigma}^2) = -0.912195 \text{ 'dir.} \quad \text{Bu} \quad \text{nedenle}$$

$$0 < \max_{i \in N_r} (\lambda_i \hat{\alpha}_i^2 - \hat{\sigma}^2) / (\lambda_i \hat{\alpha}_i^2 + \hat{\sigma}^2) < d < 1 \quad \text{'e} \quad \text{göre} \quad \hat{\beta}(r, d) \quad \text{tahmin}$$

edicisinde d , $\hat{d} = 0.98$ olarak alınır. Sonra $\hat{d} = 0.98$ için $\widehat{SMSE}$

$$(\hat{\beta}(r, d)) = 0.24431 \quad \text{elde edilir.} \quad \widehat{SMSE}(\hat{\beta}(r, d)) = 0.24431 \quad \text{ve} \quad \widehat{SMSE}$$

$$(\hat{\beta}) = 1.22249 \quad \text{karşılaştırıldığında,} \quad \hat{\beta}(r, d) \quad \text{'nin} \quad \hat{\beta} \quad \text{'dan daha küçük} \quad \widehat{SMSE} \quad \text{'ye}$$

sahip olduğu görülür. Böylece, bulunan değerler Teorem 4.14.'teki teorik bulguları desteklemektedir.

4.4. MMSE Kriterine Göre $r-d$ Sınıfı Tahmin Edicinin Bazı Tahmin Ediciler Üzerindeki Üstünlüğü

Kaçıranlar ve Sakallıoğlu OLS, PCR ve Liu tahmin edicisinin genel bir tahmin edicisi olan $r-d$ sınıfı tahmin edicisini önermiştir. Burada amaç, MMSE kriterine göre $r-d$ sınıfı tahmin edicisinin, bu tahmin edicilere ve $r-k$ sınıfı tahmin edicisine olan üstünlüğünün verilmesidir. Ayrıca, bu koşulların tam anlamıyla sağlanıp sağlanmadığını doğrulamak için bazı testler önerilmiştir (Özkale ve Kaçıranlar, 2007b).

Çoklu iç ilişki problemi ve lineer regresyon modeli için, bunların istatistiksel sonuçları iyi bilinmektedir. Bu problemi ortadan kaldırmak için, farklı iyileştirici çalışmalar önerilmiştir. Bu tahmin edicilerin bazıları ORR tahmin edicisi, PCR tahmin edicisi ve Liu (1993) tarafından önerilen ve Akdeniz ile Kaçıranlar (1995) tarafından Liu tahmin edicisi olarak tanımlanan Liu tahmin

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

edicisidir. Baye ve Parker (1984), Ridge ve Temel bileşenler yöntemlerini tek bir tahminde birleştiren ve çoklu iç ilişkiyi ortadan kaldırmak için alternatif bir yöntem sunan $r-k$ sınıfı tahmin ediciyi önermiştir. $r-k$ sınıfı tahmin edicileri, ORR tahmin edicisi ile ve Nomura ve Ohkubo (1985)'daki SMSE 'ye göre OLS tahmin edicisi karşılaştırıldı. MMSE, SMSE'den daha güçlü bir kriter olduğundan dolayı, $r-k$ sınıfı tahmin edicisinin MMSE özellikleri Sarkar (1996) tarafından verildi. Alternatif olarak, Kaçıranlar ve Sakallıoğlu (2001), Liu ve PCR tahmin edicilerinin birleşimi olan $r-d$ sınıfı tahmin ediciyi önermiştir. OLS, PCR ve Liu tahmin edicilerinin $r-d$ sınıfı tahmin edicilerin özel durumları olduğunu gösterdiler. Ayrıca, bu yeni tahmin ediciyi, SMSE kriterine göre OLS, PCR ve Liu tahmin edicileri ile karşılaştırmışlardır. Bununla birlikte, bu tahmin ediciyi MMSE kriterine göre diğerleriyle karşılaştırmamıştır.

Bir tahmin edicinin SMSE kriterine göre üstünlüğü kolaylıkla incelenebilir. Bununla birlikte MMSE, SMSE'den daha güçlü bir kriter olduğundan ve MMSE, bir tahmin edicinin özelliği ile ilgili tüm bilgileri içerdiğinden, farklı tahmin ediciler arasındaki karşılaştırmalar MMSE değerine göre yapılabilir. Burada amaç, MMSE'ye göre $r-d$ sınıfı tahmin ediciyi OLS, PCR, Liu ve $r-k$ sınıfı tahmin edicileriyle karşılaştırmak ve $r-d$ sınıfı tahmin edicinin OLS, PCR ve Liu tahmin edicilerinin karşılaştırılmasında elde edilen koşulları test etmektir.

Liu ve PCR tahmin edicileri, çoklu iç ilişki problemi ile başa çıkma yöntemleridir. $r-d$ sınıfı tahmin edicilerini öneren Kaçıranlar ve Sakallıoğlu (2001), Liu ve PCR'yi birlikte kullanarak MSE'de kazanımlar sağlandığını göstermiştir. Başka bir deyişle, $r-d$ sınıfı tahmin edicisi, PCR tahmin edicisinin MSE'sini azaltmak için Liu tahmin edicisini kullanır.

4.4.1. MSE Karşılaştırmaları

İstatistikçiler, OLS ve yanlış bir tahmin edici arasında bir seçim yapma problemiyle karşı karşıya kalır. Ayrıca iki yanlış tahmin edici arasında da seçim

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

yapma problemi ile karşı karşıya kalabilirler. $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin yanlışlığı ile varyansı $\tilde{\beta}$ 'nın MMSE değeri ile ölçülür. $\tilde{\beta}$ 'nın MMSE'si, (1.11.)'de ve (1.12.)'de verilmiştir.

$\tilde{\beta}_1$ ve $\tilde{\beta}_2$, β 'nın iki tahmin edicisi olarak verilsin. $MMSE(\tilde{\beta}_1) - MMSE(\tilde{\beta}_2)$ farkı n.n.d. matris ise, $\tilde{\beta}_2$ tahmin edicisinin MMSE'sinin $\tilde{\beta}_1$ tahmin edicisinden daha iyi olduğu söylenir.

Bir tahmin edicinin iyiliğinin bir başka ölçütü de genelleştirilmiş MSE (GMSE)'dir. $\tilde{\beta}$ 'nın GMSE'si,

$$GMSE(\tilde{\beta}) = E \left[(\tilde{\beta} - \beta)' B (\tilde{\beta} - \beta) \right] \quad (4.10.)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada B , n.n.d. bir matristir.

$SMSE(\tilde{\beta})$, $GMSE(\tilde{\beta})$ 'nın özel bir halidir. Burada $B = I$ 'dir. Trace'i uygulayarak

$$SMSE(\tilde{\beta}) = tr \left[MMSE(\tilde{\beta}) \right] = tr \left(V(\tilde{\beta}) \right) + \left[Bias(\tilde{\beta}) \right]' \left[Bias(\tilde{\beta}) \right]$$

eşitliği elde edilir.

Eğer, $MMSE(\tilde{\beta}_1) - MMSE(\tilde{\beta}_2)$ bir n.n.d. matris ise, $SMSE(\tilde{\beta}_1) \geq SMSE(\tilde{\beta}_2)$ 'dir. Sonucun tersinin doğruluğu her zaman mümkün değildir. Ayrıca Theobald (1974), $MMSE(\tilde{\beta}_1) - MMSE(\tilde{\beta}_2)$ bir n.n.d. matris olduğunda, tüm n.n.d. matrisler B için, $GMSE(\tilde{\beta}_1) > GMSE(\tilde{\beta}_2)$ olduğunu kanıtlar. Bu nedenle MMSE kriteri, SMSE ve GMSE kriterinden daha güçlüdür.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

SMSE'nin ana kriter olarak seçilmesi, MMSE için köşegen dışı elemanların görmezden gelindiği anlamına gelir. Dolayısıyla, iki tahmin ediciyi MMSE kriterine göre karşılaştırmak daha uygun olabilir. (1.1.) ve (4.6.)'dan,

$$V(\hat{\beta}(r, d)) = \sigma^2 T_r S(r, 1)^{-1} \Lambda_r^{-1} S(r, d) \Lambda_r S(r, d) \Lambda_r^{-1} S(r, 1)^{-1} T_r'$$

şeklinde bulunur. $E(\hat{\beta}(r, d)) = T_r S(r, 1)^{-1} \Lambda_r^{-1} S(r, d) \Lambda_r T_r' \beta$ ve

$$T_r S(r, 1)^{-1} \Lambda_r T_r' - I_p = T_r T_r' - T_r S(r, 1)^{-1} T_r' - I_p = -(T_{p-r} T_{p-r}' + T_r S(r, 1)^{-1} T_r')$$

'yi kullanarak,

$$Bias(\hat{\beta}(r, d)) = \left[(d-1) T_r S(r, 1)^{-1} T_r' - T_{p-r} T_{p-r}' \right] \beta$$

elde edilir ve burada $S(r, d) = (\Lambda_r + dI_r)$ 'dir. Böylece, $\hat{\beta}(r, d)$ 'nin MMSE'si,

$$\begin{aligned} MMSE(\hat{\beta}(r, d)) &= \sigma^2 T_r S(r, 1)^{-1} \Lambda_r^{-1} S(r, d) \Lambda_r S(r, d) \Lambda_r^{-1} S(r, 1)^{-1} T_r' \\ &\quad + \left[(d-1) T_r S(r, 1)^{-1} T_r' - T_{p-r} T_{p-r}' \right] \beta \\ &\quad \times \beta' \left[(d-1) T_r S(r, 1)^{-1} T_r' - T_{p-r} T_{p-r}' \right] \end{aligned} \quad (4.11.)$$

şeklinde verilir.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

4.4.1.1. $r-d$ Sınıfı Tahmin Edicisinin PCR Tahmin Edicisiyle Karşılaştırılması

Burada $MMSE(\tilde{\beta}_{PCR}) - MMSE(\tilde{\beta}(r, d))$ farkını araştırmak için Trenkler ve Toutenburg (1990), Rao ve Toutenburg (1995) v.b. bir çok farklı yöntem kullanılabilir. Sarkar (1996), Baksalary ve Trenkler (1991) tarafından verilen teoremin, bu çalışmaların bir genellemesi olduğunu önermiştir. Bu nedenle, Baksalary ve Trenkler (1991) tarafından önerilen teorem kullanılmıştır.

Lemma 4.2. (Baksalary ve Trenkler (1991)) $\zeta_{n \times p}$, $n \times p$ boyutlu kompleks matrislerin kümesi ve H_n Hermityen matrislerden oluşan $\zeta_{n \times n}$ 'in alt kümesi olsun. Ayrıca, verilen $L \in \zeta_{n \times p}$, L^* sembolleri, $\Re(L)$ ve $\varsigma(L)$ konjuge (eşlenik) tranpoz anlamına gelir ve genelleştirilmiş tüm inverslerin kümesini ve sırasını gösterir. $A \in H_n$ verilsin, a_1 ve $a_2 \in \zeta_{n \times 1}$ lineer bağımsız, $a_1 \notin \Re(A)$ koşulu ile, $A^- \in \varsigma(A)$ için, $f_{ij} = a_i^* A^- a_j$, $i, j = 1, 2$ ve $s = \left[a_1^* (I_n - AA^-)^* (I_n - AA^-) a_2 \right] / \left[a_1^* (I_n - AA^-)^* (I_n - AA^-) a_1 \right]$ 'dir. Böylece, $A + a_1 a_1^* - a_2 a_2^*$ yalnızca aşağıdaki koşul kümelerinden herhangi birinin sağlanması durumunda n.n.d. olur:

$$(a) \ A \text{ n.n.d.}, a_1 \in \Re(A), a_2 \in \Re(A) \text{ ve}$$

$$(f_{11} + 1)(f_{22} - 1) \leq |f_{12}|^2,$$

$$(b) \ A \text{ n.n.d.}, a_1 \notin \Re(A), a_2 \in \Re(A : a_1) \text{ ve}$$

$$(a_2 - sa_1)^* A^- (a_2 - sa_1) \leq 1 - |s|^2,$$

$$(c) \ A = U \Delta U^* - \delta \nu \nu^*, a_1 \in \Re(A), a_2 \in \Re(A), \nu^* a_1 \neq 0 \text{ ve}$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$(f_{11} + 1) \leq 0, (f_{22} - 1) \leq 0, (f_{11} + 1)(f_{22} - 1) \geq |f_{12}|^2.$$

Burada $(U : v)$ bir alt matris, Δ pozitif tanımlı köşegen matris ve δ pozitif bir skalerdir. Ayrıca, (a)-(c) koşullarının tümü $A^- \in \zeta(A)$ 'nın seçiminden bağımsızdır.

Teorem 4.15. $MMSE(\tilde{\beta}_{PCR}) - MMSE(\tilde{\beta}(r, d))$ nin n.n.d. olması için gerek ve yeter koşul $\beta \in N(W_1)$ olmasıdır. Burada $N(W_1)$, $W_1 = [(1-d)/\sigma] [2(1-d)I_r + (1-d^2)\Lambda_r^{-1}]^{-1/2} T_r'$ 'in sıfır uzayıdır.

4.4.1.2. $r-d$ Sınıfı Tahmin Edicisinin Liu Tahmin Edicisiyle Karşılaştırılması

Teorem 4.16. $r-d$ sınıfı tahmin edicisinin Liu tahmin edicisinden daha iyi olması için gerek ve yeter koşul $\beta \in N(W_2)$ olmasıdır. Burada $N(W_2)$, $W_2 = \sigma^{-1} \Lambda_{p-r}^{1/2} T_{p-r}'$ 'nin sıfır uzayıdır.

4.4.1.3. $r-d$ Sınıfı Tahmin Edicinin hem PCR hem de Liu Tahmin Edicilerine Olan Üstünlük Kriteri

Teorem 4.17. $r-d$ sınıfı tahmin edicisinin hem PCR hem de Liu tahmin edicisinden daha iyi olması için gerek ve yeter koşul $\beta \in N(W_3)$ olmasıdır. Burada, $N(W_3)$ $W_3 = (1/\sigma) \Lambda^*(d)^{1/2} T'$ 'ün sıfır uzayıdır.

Böylece, $r-d$ sınıfı tahmin edicinin OLS, PCR ve Liu tahmin edicilerinden üstün olması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Ne yazık ki bu koşullar, bilinmeyen β , σ^2 parametrelerine ve ayrıca Liu tahmin edicisindeki

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

d seçimine bağlıdır. β , σ^2 ve d 'nin bilinmediği dikkate alınırsa, teoremlerde elde edilen koşulların sağlanacağı göz ardı edilemez. Bu bilinmeyen parametreler nedeniyle, sonuçların çokça ölçülü olabileceği kastedilmiştir. $r-d$ sınıfı tahmin edici β , σ^2 ve d 'nin belirli değerleri için diğer tahmin edicilerden daha iyi performans gösterirler. Ancak bu durum, diğerleri için daha kötü olabilir. Bu nedenle, β ve σ^2 'yi yansız tahmin edicileri ve uygun bir d tahmini ile değiştirmek veya bu parametreler hakkında ön bilgi kullanılması pratik sonuçlara yol açar.

4.4.2. Koşullar için Hipotez Testleri

Bu teoremlerde elde edilen gerek ve yeter koşullar, bilinmeyen β ve σ^2 parametrelerine bağlıdır. Bir araştırmacının bu koşullara güvenmesi için bir takım sebepleri olması gerekir. Hipotez testleri bu anlamda çok önemlidir. Belirli bir durumda koşulların sağlanıp sağlanmadığını değerlendirmek için bir test prosedürünün iyi bir yöntem olabileceği kastedilir.

ε 'nin normal dağılım $N(0, \sigma^2 I_n)$ varsayımı altında, (1.1)'de verilen genel lineer model için test türetilir:

$$H_0 : W_i \beta = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.12.)$$

Genelleştirilmiş olabilirlik oranı,

$$\nu(y) = \frac{\max_{(\beta, \sigma^2) \in \omega} [L(\beta, \sigma^2 : y)]}{\max_{(\beta, \sigma^2) \in \Omega} [L(\beta, \sigma^2 : y)]}$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

şeklinde verilir. Burada $L(\beta, \sigma^2 : y)$ olabilirlik fonksiyonu,

$$\Omega = \{(\beta, \sigma^2) : \beta \in E_p, \sigma^2 > 0\} \quad \text{ve}$$

$$\omega = \{(\beta, \sigma^2) : \beta \in E_p, W_i \beta = 0, \sigma^2 > 0, i = 1, 2, 3\} \text{ 'dir. Burada, } W_i, i = 1, 2, 3$$

'nin sıfır uzayının ω olduğu görülür.

Rankı q ve boyutu $q \times p$ olan W_i verilsin. Sonrasında (4.12.)'de verilen test için genelleştirilmiş olabilirlik oranı test istatistiği,

$$W = \left(\frac{n-p}{q} \right) \frac{(W_i \hat{\beta})' [W_i (X'X)^{-1} W_i]^{-1} (W_i \hat{\beta})}{y' [I_n - XX^{-}] y} \quad (4.13.)$$

şeklinde verilir. W , q ve $n-p$ serbestlik derecelerine sahip, merkezi olmayan bir F olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. Merkezi olmayan parametre,

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} (W_i \beta)' [W_i (X'X)^{-1} W_i]^{-1} (W_i \beta)$$

ifadesi ile verilir. H_0 altında W , $F(q, n-p)$ dağılımına sahiptir.

(4.12.)'de verilen hipotez, $W_i \beta = 0, i = 1, 2, 3$ bağıntılarının sağlanıp sağlanmadığını test etmek için kullanılır. Başka bir deyişle, (4.12.)'de verilen hipotez testleri r-d sınıfı tahmin edicisinin, PCR ve Liu tahmin edicilerinden ve her ikisinden MMSE'ye göre daha iyi olduğu için ifade edilebilir. Teorem 4.15.'de verilen gerek ve yeter koşul $\beta \in N(W_1)$ olarak elde edilir ve bu,

$$\left(\frac{1-d}{\sigma} \right) [2(1-d)I_r + (1-d^2)\Lambda_r^{-1}]^{-1/2} T_r' \beta = 0 \quad (4.14.)$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

anlamına gelir. $\left[(1-d)/\sigma \right] \left[2(1-d)I_r + (1-d^2)\Lambda_r^{-1} \right]^{-1/2}$, $0 < d < 1$ matrisi p.d. olduğundan dolayı, (4.14.) ile verilen koşul $T_r' \beta = 0$ 'a eşit olur. $T_r' \beta = 0$, $\hat{\beta}(r, d)$ veya $\hat{\beta}_{PCR}$ 'nin kullanılıp kullanılmayacağına karar vermek için bir temel sağlar. Yani, $r-d$ sınıfı tahmin edicisinin mi yoksa PCR tahmin edicisinin mi kullanılacağına karar verilmesi için bir temel sağlar. Benzer şekilde, Teorem 4.16.'daki gerek ve yeter koşul $\beta \in N(W_2)$ 'dir ve bu,

$$\sigma^{-1} \Lambda_{p-r}^{1/2} - T_{p-r}' \beta = 0 \quad (4.15.)$$

anlamına gelir. $\sigma^{-1} \Lambda_{p-r}^{1/2}$ matrisi p.d. olduğundan dolayı, koşul (4.15.), $T_{p-r}' \beta = 0$ 'a eşit olur. $T_{p-r}' \beta = 0$, $\hat{\beta}(r, d)$ veya $\hat{\beta}_d$ 'nin kullanılıp kullanılmayacağına karar vermek için bir temel sağlar. Yani, $r-d$ sınıfı tahmin edicisinin mi yoksa Liu tahmin edicisinin mi kullanılacağına karar verilmesi için bir temel sağlar. Böylece, Teorem 4.15. ve 4.16.'dan elde edilen gerek ve yeter koşullar sırasıyla $T_r' \beta = 0$ ve $T_{p-r}' \beta = 0$ olarak verilebilir. Öyleyse hipotez testleri,

$$H_0 : T_r' \beta = 0 \quad (4.16.)$$

ve

$$H_0 : T_{p-r}' \beta = 0 \quad (4.17.)$$

(4.12.)'nin özel durumlarıdır. Normallik varsayımı altında, $T_r' \hat{\beta}(r, d)$, $\sigma^2 S(r, 1)^{-1} \Lambda_r^{-1} S(r, d) \Lambda_r S(r, d) \Lambda_r^{-1} S(r, 1)^{-1}$ kovaryans matrisi ve

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$S(r,1)^{-1} \Lambda_r^{-1} S(r,d) \Lambda_r T_r' \beta$ beklenen değeri ile normal dağılıma sahiptir. Ayrıca, $T_{p-r}' \hat{\beta}(p-r,d)$, $S(p-r,1)^{-1} \Lambda_{p-r}^{-1} S(p-r,d) \Lambda_{p-r} T_{p-r}' \beta$ beklenen değeri ve $\sigma^2 S(p-r,1)^{-1} \Lambda_{p-r}^{-1} S(p-r,d) \Lambda_{p-r} S(p-r,d) \Lambda_{p-r}^{-1} S(p-r,1)^{-1}$ kovaryans matrisi ile normal dağılıma sahiptir. Bu nedenle, (4.16.) ve (4.17.) için (4.13.)'ün özel durumları olan test istatistikleri sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$F_1 = \left(\frac{n-p}{r} \right) \frac{\hat{\beta}'(r,d) T_r \Lambda_r T_r' \hat{\beta}(r,d)}{e'e} \square F \left(r, n-p, \frac{\beta' T_r \Lambda_r T_r' \beta}{2\sigma^2} \right)$$

ve

$$F_2 = \left(\frac{n-p}{p-r} \right) \frac{\hat{\beta}'(p-r,d) T_{p-r} \Lambda_{p-r} T_{p-r}' \hat{\beta}(p-r,d)}{e'e} \square F \left(p-r, n-p, \frac{\beta' T_{p-r} \Lambda_{p-r} T_{p-r}' \beta}{2\sigma^2} \right).$$

Burada $e'e = y' [I_n - XX'] y$ 'dir.

$r-d$ sınıfı tahmin edici $\hat{\beta}(r,d)$ 'nin, OLS tahmin edicisi $\hat{\beta}$ 'dan daha iyi olması için gerek ve yeter koşul $\sigma^2 \beta' T \Lambda^*(d) T' \beta \leq 1$ şeklinde yazılabilir. Bu nedenle, MMSE'ye göre $\hat{\beta}(r,d)$ 'nin $\hat{\beta}$ 'dan daha iyi olup olmadığı test edilmek isteniyorsa, $H_0 : \sigma^2 \beta' T \Lambda^*(d) T' \beta \leq 1$ hipotezi test edilebilir. $\sigma^{-1} \Lambda^*(d)^{1/2} T' \hat{\beta} \square N(\sigma^{-1} \Lambda^*(d)^{1/2} T' \beta, \Lambda^*(d) \Lambda^{-1})$ normallik varsayımı altında, test istatistiği,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$F_3 = \left(\frac{n-p}{p} \right) \frac{\hat{\beta}' T \Lambda T' \hat{\beta}}{e' e} \sim F \left(p, n-p, \frac{\beta' T \Lambda T' \beta}{2\sigma^2} \right)$$

şeklinde verilir.

Böylece, eğer H_0 kabul edilirse, teoremlerdeki koşulların geçerli olacağı söylenebilir. Yani, $r-d$ sınıfı tahmin edicisinin MMSE'si diğer tahmincilerden daha iyi olacaktır.

4.4.3. $r-d$ ve $r-k$ Sınıfı Tahmin Edicilerinin MMSE Karşılaştırmaları

Burada amaç, iki tahmin edicinin üstünlüğünü MMSE'ye göre incelemektir. Baye ve Parker tarafından önerilen $r-k$ sınıfı tahmin edicisini ve (4.11.) 'de verilen MMSE ile $r-d$ sınıfı tahmin edicisi düşünölsün.

Bir kez daha, Baksalary ve Trenkler (1991) tarafından verilen teorem göz önüne alındığında, n.n.d. $MMSE(\hat{\beta}(r, k)) - MMSE(\hat{\beta}(r, d))$ farkı için gerekli ve yeterli koşullar bulunacaktır.

Teorem 4.18. $MMSE(\hat{\beta}(r, k)) - MMSE(\hat{\beta}(r, d))$ farkının n.n.d. olması için gerek ve yeter koşul $(1-k-d)\lambda_i - kd \leq 0$ ve $(1+k+d)^2 - 8kd \leq 0$ eşitizliklerinin birlikte sağlanmasıdır.

4.5. İki Parametrelili (TP) ve PCR Tahmin Edicilerinin Birleşimi

Çoklu iç ilişki problemini gidermek için yeni bir tahmin edici sınıfı, yani iki parametrelili temel bileşenler (PCTP) tahmin edicisi önerilmiştir. Yeni tahmin edicinin PCR tahmin edicisi, $r-k$ sınıfı tahmin edicisi, $r-d$ sınıfı tahmin edicisi ve Chang ve Yang (2012) tarafından önerilen iki parametrelili tahmin edicisi üzerindeki üstünlüğü MMSE kriterine göre ele alınmıştır.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

(1.1.) ile verilen doğrusal regresyon modelini düşünelim. Gauss-Markov teoremine göre (1.1.)'in OLS tahmini (1.3.)'te verilmişti. Bununla birlikte, birçok sonuç çoklu iç ilişki varlığında OLS tahmin edicisinin artık iyi bir tahmin edici olmadığını kanıtlamıştır. Bu problemi ortadan kaldırmak veya şiddetini azaltmak için Stein tahmin edicisi (Stein, 1956), PCR tahmin edicisi (Massy, 1965), Ridge regresyon tahmin edicisi (Hoerl ve Kennard 1970), daralma tahmin edicisi (Mayer ve Willke, 1973) ve MRR tahmin edicisi (Swindel, 1976) gibi birçok yeni yanlış tahmin ediciler önerilmiştir.

Yang ve Chang (2010), Ridge regresyon tahmin edicisini ve Liu tahmin edicisini birleştirerek , OLS, Ridge regresyon ve Liu tahmin edicilerini içeren iki parametrelili tahmin ediciyi önermiştir .

Burada amaç, TP tahmin edicisini PCR tahmin edicisi doğrultusunda modifiye ederek regresyon parametresini tahmin etmek için yeni bir tahmin edici önermek ve lineer regresyonda çoklu iç ilişki probleminin üstesinden gelmek için alternatif bir yöntem sunmaktır.

4.5.1. Önerilen Tahmin Edici

Yang ve Chang (2010) tarafından önerilen TP tahmin edici,

$$\hat{\beta}(k, d) = F_d \hat{\beta}(k) = (X'X + I)^{-1} (X'X + dI) (X'X + kI)^{-1} X'y \quad (4.18.)$$

olarak verilmiştir. Burada, $k > 0$ ve $0 < d < 1$ 'dir. TP tahmin edicisinin, OLS, Ridge regresyon ve Liu tahmin edicilerinin k ve d parametresinin uygun seçimleri için özel durumu olan genel bir tahmin edici olduğu görülebilir.

Özkale (2009)'un önerdiği benzer yöntem izlenerek, (1.1.) modelinin (3.9.) ile verilen dönüşümü göz önüne alındığında, bu dönüşüme ait tanımlamalar (3.13.)'te verilmiştir.

TP tahmin edicisinin tanımını uygulayarak, α_r nin TP tahmin edicisi,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$\hat{\alpha}_r(k, d) = \left(Z_r' Z_r + I_r \right)^{-1} \left(Z_r' Z_r + d I_r \right) \left(Z_r' Z_r + k I_r \right)^{-1} Z_r' y \quad (4.19.)$$

şeklinde tanımlanır.

Daha sonra β 'nın karşılık gelen tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_r(k, d) = T_r \left(T_r' X X T_r + I_r \right)^{-1} \left(T_r' X X T_r + d I_r \right) \left(T_r' X X T_r + k I_r \right)^{-1} T_r' X y \quad (4.20.)$$

olur. Elde edilen yeni tahmin edici, aşağıdaki prosedürle de elde edilebilir. Xu ve Yang (2009), $r - k$ sınıfı tahmin edicisinin ve $r - d$ sınıfı tahmin edicisinin (4.1.) ve (4.6.)'da verildiği gibi yeniden yazılabileceğini ortaya koymuştur.

Böylece, buradaki prosedür ve TP tahmin edicisinin tanımından yola çıkarak, yeni tahmin edici,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_r(k, d) &= T_r T_r' \hat{\beta}(k, d) = T_r T_r' (X X + I)^{-1} (X X + d I) (X X + k I)^{-1} X y \\ &= T_r \left(T_r' X X T_r + I_r \right)^{-1} \left(T_r' X X T_r + d I_r \right) \left(T_r' X X T_r + k I_r \right)^{-1} T_r' X y \quad (4.21.) \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

Aşağıda $\hat{\beta}_r(k, d)$ 'nin özel durumu olarak PCR, $r - k$ sınıfı, $r - d$ sınıfı ve TP tahmin edicilerini içeren genel bir tahmin edici olduğu verilmiştir:

$$\hat{\beta}_r(0, 1) = \hat{\beta}_{PCR} = T_r \left(T_r' X X T_r \right)^{-1} T_r' X y, \text{ PCR tahmin edici,}$$

$$\hat{\beta}_r(k, 1) = \hat{\beta}(r, k) = T_r \left(T_r' X X T_r + k I_r \right)^{-1} T_r' X y, \quad r - k \text{ sınıfı tahmin}$$

edici,

$$\hat{\beta}_r(0, d) = \hat{\beta}(r, d) = T_r \left(T_r' X X T_r + I_r \right)^{-1} \left(T_r' X X T_r + d I_r \right) T_r' X y, \quad r - d \text{ sınıfı tahmin edici,}$$

$r - d$ sınıfı tahmin edici,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$\hat{\beta}_p(k, d) = \hat{\beta}(k, d) = (X'X + I)^{-1} (X'X + dI)(X'X + kI)^{-1} X'y$, TP tahmin edicidir.

4.5.2. Yeni Tahmin Edicinin Özellikleri

PCTP tahmin edicisinin yanlılık vektörü ve varyans-kovaryans matrisi,

$$Bias(\hat{\beta}_r(k, d)) = (T_r S(r, 1)^{-1} S(r, d) S(r, k)^{-1} \Lambda_r T_r' - I_p) \beta \quad (4.22.)$$

ve

$$Cov(\hat{\beta}_r(k, d)) = \sigma^2 T_r S(r, 1)^{-1} S(r, d) S(r, k)^{-1} \Lambda_r S(r, k)^{-1} \quad (4.23.)$$

$$\times S(r, d) S(r, 1)^{-1} T_r'$$

şeklinde verilir. Burada $S(r, d) = (\Lambda_r + dI_r)$ ve $S(r, k)^{-1} = (\Lambda_r + kI_r)^{-1}$ 'dir.

(4.22.) ve (4.23.) 'ün birleşiminden, $\hat{\beta}_r(k, d)$ tahmin edicisinin MMSE değeri aşağıdaki gibi verilir:

$$MMSE(\hat{\beta}_r(k, d)) = \sigma^2 T_r S(r, 1)^{-1} S(r, d) S(r, k)^{-1} \Lambda_r S(r, k)^{-1} S(r, d) S(r, 1)^{-1} T_r'$$

$$+ (T_r S(r, 1)^{-1} S(r, d) S(r, k)^{-1} \Lambda_r T_r' - I_p) \beta$$

$$\times \beta' (T_r S(r, 1)^{-1} S(r, d) S(r, k)^{-1} \Lambda_r T_r' - I_p)' . \quad (4.24.)$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

4.5.2.1. PCTP Tahmin Edicisinin PCR Tahmin Edicisiyle Karşılaştırılması

$\hat{\beta}_{PCR}$, $k = 0$ ve $d = 1$ olduğunda $\hat{\beta}_r(k, d)$ 'nin özel bir hali olduğundan, $\hat{\beta}_{PCR}$ 'nin MMSE'si

$$MMSE(\hat{\beta}_{PCR}) = \sigma^2 T_r \Lambda_r^{-1} T_r' + (T_r T_r' - I) \beta \beta' (T_r T_r' - I)' \quad (4.25.)$$

şeklinde verilir. Bu nedenle,

$$MMSE(\hat{\beta}_{PCR}) - MMSE(\hat{\beta}_r(k, d)) = A_1 + a_1 a_1' - a_2 a_2'$$

'dir. Burada,

$$A_1 = \sigma^2 T_r (\Lambda_r^{-1} - S(r, 1)^{-1} S(r, d) S(r, k)^{-1} \Lambda_r S(r, k)^{-1} S(r, d) S(r, 1)^{-1}) T_r' ,$$

$$a_1 = (T_r T_r' - I_p) \beta \text{ ve } a_2 = (T_r S(r, 1)^{-1} S(r, d) S(r, k)^{-1} \Lambda_r T_r' - I_p) \beta \text{ 'dir.}$$

$T_r' T_r = I_r$, $T_{p-r}' T_{p-r} = I_{p-r}$ ve $T_{p-r}' T_r = 0$ olduğu göz önüne alınırsa, bazı cebirsel sadeleştirmelerden sonra,

$$A_1 = \sigma^2 T_r S(r, 1)^{-1} S(r, k)^{-1} B S(r, k)^{-1} S(r, 1)^{-1} T_r'$$

şeklinde ifade edilir. Burada her $k > 0$ ve $0 < d < 1$ için $B = 2(k + 1 - d) \Lambda_r^2 + (k^2 + 4k + 1 - d^2) \Lambda_r + 2k(k + 1) + k^2 \Lambda_r^{-1} \geq 0$ 'dır.

A_1 'in Moore-Penrose tersi olan A_1^+ ,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$A_1^+ = \sigma^{-2} T_r' S(r, 1) S(r, k) B^{-1} S(r, k) S(r, 1) T_r'$$

şeklinde verilir.

$A_1 A_1^+ = T_r T_r'$ ve $A_1 A_1^+ a_1 \neq a_1$ 'i elde etmek kolaydır, böylece $a_1 \notin \mathcal{R}(A_1)$ 'dir. Bu nedenle Lemma 4.2. 'nin (a) bölümünü uygulayamayız. $a_2 - a_1 = -T_r' S(r, 1)^{-1} S(r, k)^{-1} [(k+1-d)\Lambda_r + k] T_r' \beta$ için, burada $\eta_1 = -\sigma^{-2} T_r' S(r, 1) S(r, k) B^{-1} [(k+1-d)\Lambda_r + k] T_r' \beta$ 'dır. $a_2 \in \mathcal{R}(A_1 : a_1)$ olduğundan Lemma 4.2.'nin (b) bölümü uygulanabilir. s 'nin tanımından $s = 1$ elde edilir. Lemma 4.2.'den PCTP tahmin edicisinin PCR tahmin edicisinden daha üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$(a_2 - a_1)' A_1^- (a_2 - a_1) = \eta_1' A_1' A_1^- A_1 \eta_1 = \eta_1' A_1 \eta_1 \leq 0$$

'dir. Buradan yola çıkarak,

$$\begin{aligned} \eta_1' A_1 \eta_1 &= \sigma^{-2} \beta' T_r [(k+1-d)\Lambda_r + k] B^{-1} [(k+1-d)\Lambda_r + k] T_r' \beta \\ &= \beta' W_1' W_1 \beta \geq 0 \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada $W_1 = \sigma^{-1} B^{-1/2} [(k+1-d)\Lambda_r + k] T_r'$ ve $W_1 \beta = 0$ koşulu olmak üzere, $\beta \in N(W_1)$ anlamına gelir ve W_1 'in sıfır uzayı $N(W_1)$ 'dir.

Yukarıda yapılan analizlere istinaden, aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.19. MMSE kriterine göre, PCTP tahmin edicisinin PCR tahmin edicisinden daha üstün olması için gerek ve yeter koşul $\beta \in N(W_1)$ 'dir. Burada

$N(W_1)$, $W_1 = \sigma^{-1} B^{-1/2} [(k+1-d)\Lambda_r + k] T_r'$ 'nin sıfır uzayıdır.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

4.5.2.2. PCTP Tahmin Edicinin $r-k$ Sınıfı Tahmin Ediciyle Karşılaştırılması

Burada, PCTP tahmin edicisiyle $r-k$ sınıfı tahmin edicisi arasındaki karşılaştırma ele alınacaktır. (4.24.)’deki denklemde $d = 1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} MMSE\left(\hat{\beta}(r, k)\right) &= \sigma^2 T_r S(r, k)^{-1} \Lambda_r S(r, k)^{-1} T_r' + \left(T_r S(r, k)^{-1} \Lambda_r T_r' - I\right) \beta \\ &\quad \times \beta' \left(T_r S(r, k)^{-1} \Lambda_r T_r' - I\right)' \end{aligned} \quad (4.26.)$$

şeklinde olur. Böylece, (4.24.) ve (4.26.)’dan aşağıdaki ifade bulunur:

$$MMSE\left(\hat{\beta}(r, k)\right) - MMSE\left(\hat{\beta}_r(k, d)\right) = A_2 + a_1 a_1' - a_2 a_2'.$$

Burada

$$A_2 = \sigma^2 (1-d) T_r S(r, 1)^{-1} S(r, k)^{-1} \left[2\Lambda_r^2 + (1+d)\Lambda_r \right] S(r, k)^{-1} S(r, 1)^{-1} T_r',$$

$$a_1 = \left(T_r S(r, k)^{-1} \Lambda_r T_r' - I_p \right) \beta \quad \text{ve}$$

$$a_2 = \left(T_r S(r, 1)^{-1} S(r, d) S(r, k)^{-1} \Lambda_r T_r' - I_p \right) \beta \text{ ‘dir.}$$

A_2 ‘nin Moore-Penrose tersi,

$$A_2^+ = \frac{1}{1-d} \sigma^{-2} T_r S(r, 1) S(r, k) \left[2\Lambda_r^2 + (1+d)\Lambda_r \right]^{-1} S(r, k) S(r, 1) T_r'$$

şeklinde verilir. $A_2 A_2^+ = T_r T_r'$ ve $A_2 A_2^+ a_1 \neq a_1$ ‘dir. Böylece, $a_1 \notin \mathcal{R}(A_2)$ ‘dir. Bu nedenle Lemma 4.2. ‘nin (a) bölümünü uygulayamayız.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$a_2 - a_1 = -(1-d)T_r S(r,1)^{-1} S(r,k)^{-1} \Lambda_r T_r' \beta = A_2 \eta_2$ için burada,
 $\eta_2 = -\sigma^{-2} T_r S(r,1) S(r,k) [2\Lambda_r^2 + (1+d)\Lambda_r]^{-1} \Lambda_r T_r' \beta$ 'dır. $a_2 \in \Re(A_2 : a_1)$
 olduğundan Lemma 4.2.'nin (b) bölümü uygulanabilir. s 'nin tanımından $s=1$
 elde edilir. Lemma 4.2.'den PCTP tahmin edicisinin $r-k$ sınıfı tahmin
 edicisinden daha üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$(a_2 - a_1)' A_2' (a_2 - a_1) = \eta_2' A_2' A_2 \eta_2 = \eta_2' A_2 \eta_2 \leq 0$$

olmasıdır. Bununla birlikte aşağıda verilen ifadenin elde edilmesi kolaydır.

$$\begin{aligned} \eta_2' A_2 \eta_2 &= \frac{(1-d)^2}{\sigma^2} \beta' T_r [2(1-d)I_r + (1-d^2)\Lambda_r^{-1}]^{-1} T_r' \beta \\ &= \beta' W_2' W_2 \beta \geq 0, \quad 0 < d < 1. \end{aligned}$$

Burada $W_2 = \left(\frac{1-d}{\sigma} \right) [2(1-d)I_r + (1-d^2)\Lambda_r^{-1}]^{-1/2} T_r'$ 'dir.

Bu nedenle, PCTP tahmin edicisinin PCR tahmin edicisinden daha iyi olması için gerek ve yeter koşul $W_2 \beta = 0$ 'dır ve $\beta \in N(W_2)$ anlamına gelir.

Burada $N(W_2)$, $W_2 = \left(\frac{1-d}{\sigma} \right) [2(1-d)I_r + (1-d^2)\Lambda_r^{-1}]^{-1/2} T_r'$ 'nin sıfır uzayıdır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.20. MMSE kriterine göre PCTP tahmin edicisinin, $r-k$ sınıfı tahmin edicisinden daha üstün olması için gerek ve yeter koşul $\beta \in N(W_2)$ 'dir. Burada

$N(W_2)$, $W_2 = \left(\frac{1-d}{\sigma} \right) [2(1-d)I_r + (1-d^2)\Lambda_r^{-1}]^{-1/2} T_r'$ 'nin sıfır uzayıdır.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

4.5.2.3. PCTP Tahmin edici ile $r-d$ Sınıfı Tahmin Edicinin Karşılaştırılması

(4.24.)’de $k = 0$ verilsin. $r-d$ sınıfı tahmin edicisi $\hat{\beta}(r, d)$ ‘nin MMSE’si,

$$\begin{aligned} MMSE\left(\hat{\beta}(r, d)\right) &= \sigma^2 T_r S(r, 1)^{-1} \Lambda_r^{-1} S(r, d) \Lambda_r S(r, d) \Lambda_r^{-1} S(r, 1)^{-1} T_r' \\ &\quad + \left(T_r S(r, 1)^{-1} \Lambda_r^{-1} S(r, d) \Lambda_r T_r' - I\right) \beta \\ &\quad \times \beta' \left(T_r S(r, 1)^{-1} \Lambda_r^{-1} S(r, d) \Lambda_r T_r' - I\right)' \end{aligned} \quad (4.27.)$$

şeklinde verilir. Sonra (4.24.) ve (4.27.)’den aşağıdaki ifade elde edilir:

$$MMSE\left(\hat{\beta}(r, d)\right) - MMSE\left(\hat{\beta}_r(k, d)\right) = A_3 + a_1 a_1' - a_2 a_2'.$$

Burada

$$A_3 = k^2 \sigma^2 T_r S(r, 1)^{-1} S(r, d) S(r, k)^{-1} \left(\frac{2}{k} I_r + \Lambda_r^{-1} \right) S(r, k)^{-1} S(r, d) S(r, 1)^{-1} T_r'$$

$$, \quad a_1 = \left(T_r S(r, 1)^{-1} \Lambda_r^{-1} S(r, d) \Lambda_r T_r' - I_p \right) \beta \quad \text{ve}$$

$$a_2 = \left(T_r S(r, 1)^{-1} S(r, d) S(r, k)^{-1} \Lambda_r T_r' - I_p \right) \beta \quad \text{‘dir.}$$

$$A_3^+ = \frac{1}{k^2 \sigma^2} T_r S(r, 1) S(r, d)^{-1} S(r, k) \left(\frac{2}{k} I_r + \Lambda_r^{-1} \right) S(r, k) S(r, d)^{-1} S(r, 1) T_r'$$

ve

$$a_2 - a_1 = -k T_r S(r, 1)^{-1} S(r, d) S(r, k)^{-1} T_r' \beta = A_3 \eta_3$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

dir. Burada $\eta_3 = -\frac{1}{k\sigma^2} T_r S(r, 1) S(r, d)^{-1} S(r, k) \left(\frac{2}{k} I_r + \Lambda_r^{-1} \right)^{-1} T_r' \beta$ 'dır.

Lemma 4.2.'nin (b) bölümü uygulanarak, PCTP tahmin edicinin $r-d$ sınıfı tahmin ediciden daha iyi olması için gerek ve yeter koşul,

$$(a_2 - a_1)' A_3^- (a_2 - a_1) = \eta_3' A_3' A_3^- A_3 \eta_3 = \eta_3' A_3 \eta_3 \leq 0$$

şeklinde verilir. Buradan,

$$\eta_3' A_3 \eta_3 = \sigma^{-2} \beta' T_r \left(\frac{2}{k} I_r + \Lambda_r^{-1} \right)^{-1} T_r' \beta = \beta' W_3' W_3 \beta \geq 0$$

olarak yazılır. Burada $W_3 = \sigma^{-1} \left(\frac{2}{k} I_r + \Lambda_r^{-1} \right)^{-1/2} T_r'$ 'dür.

Bu nedenle, $MMSE(\hat{\beta}(r, d)) - MMSE(\hat{\beta}_r(k, d)) \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $W_3 \beta = 0$ 'dır ve $\beta \in N(W_3)$ anlamına gelir. Burada $N(W_3)$, W_3 'ün sıfır uzayıdır. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.21. MMSE kriterine göre PCTP tahmin edicisinin, $r-d$ tahmin edicisinden daha üstün olması için gerek ve yeter koşul $\beta \in N(W_3)$ 'dür. Burada

$$N(W_3), W_3 = \sigma^{-1} \left(\frac{2}{k} I_r + \Lambda_r^{-1} \right)^{-1/2} T_r' \text{ 'nin sıfır uzayıdır.}$$

4.5.2.4. PCTP Tahmin Edici ile TP Tahmin Edicinin Karşılaştırılması

(4.24.)'de $r = p$ alınarak, TP tahmin edicisi olan $\hat{\beta}(k, d)$ 'nin MMSE'si,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$\begin{aligned}
 MMSE\left(\hat{\beta}(k, d)\right) &= \sigma^2 TS(1)^{-1} S(d) S(k)^{-1} \Lambda S(k)^{-1} S(d) S(1)^{-1} T' \\
 &+ \left(TS(1)^{-1} S(d) S(k)^{-1} \Lambda T' - I_p\right) \beta \\
 &\times \beta' \left(TS(1)^{-1} S(d) S(k)^{-1} \Lambda T' - I_p\right)' \quad (4.28.)
 \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada $S(d) = (\Lambda + dI_p)$ ve $S(k)^{-1} = (\Lambda + kI_p)^{-1}$ 'dir.

(4.24.) ve (4.28.) denklemlerinden,

$$MMSE\left(\hat{\beta}(k, d)\right) - MMSE\left(\hat{\beta}_r(k, d)\right) = A_4 + a_1 a_1' - a_2 a_2'$$

elde edilir. Burada,

$$A_4 = \sigma^2 T_{p-r} S(p-r, 1)^{-1} S(p-r, d) S(p-r, k)^{-1} \Lambda_{p-r} S(p-r, k)^{-1} S(p-r, d) S(p-r, 1)^{-1} T_{p-r}'$$

$$, a_1 = \left(TS(1)^{-1} S(d) S(k)^{-1} \Lambda T - I_p\right) \beta \text{ ve}$$

$$a_2 = \left(T_r S(r, 1)^{-1} S(r, d) S(r, k)^{-1} \Lambda_r T_r' - I_p\right) \beta \text{ 'dir.}$$

$$A_4^+ = \sigma^{-2} T_{p-r} S(p-r, 1) S(p-r, d)^{-1} S(p-r, k) \Lambda_{p-r}^{-1} S(p-r, k) S(p-r, d)^{-1} S(p-r, 1) T_{p-r}'$$

şeklinde yazılır. $A_4 A_4^+ = T_{p-r} T_{p-r}'$ ve $A_4 A_4^+ a_1 \neq a_1$ bulunur. Bundan dolayı,

$a_1 \notin \Re(A_4)$ 'tür. Bazı cebirsel sadeleştirmeler sonucunda,

$$a_2 - a_1 = -T_{p-r} S(p-r, 1)^{-1} S(p-r, d) S(p-r, k)^{-1} \Lambda_{p-r} T_{p-r}' \beta = A_4 \eta_4 \leq 0$$

ifadesi elde edilir. Böylece,

$$\eta_4' A_4 \eta_4 = \sigma^{-2} \beta' T_{p-r} \Lambda_{p-r} T_{p-r}' \beta = \beta' W_4' W_4 \beta \geq 0$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

ifadesi elde edilir. Burada $W_4 = \sigma^{-1} \Lambda_{p-r}^{1/2} T_{p-r}'$ dir. Böylece koşul, $\eta_4' A_4 \eta_4 = \beta' W_4' W_4 \beta = 0$ 'a dönüşür . Bu nedenle, PCTP tahmin edicinin TP tahmin edicisinden daha üstün olması için gerek ve yeter koşul $W_4 \beta = 0$ 'dır ve $\beta \in N(W_4)$ anlamına gelir. Burada $N(W_4)$, $W_4 = \sigma^{-1} \Lambda_{p-r}^{1/2} T_{p-r}'$ 'nin sıfır uzayıdır. Benzer şekilde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.22. MMSE kriterine göre, PCTP tahmin edicisinin TP tahmin edicisinden daha üstün olması için gerek ve yeter koşul $\beta \in N(W_4)$ 'tür. Burada $N(W_4)$, $W_4 = \sigma^{-1} \Lambda_{p-r}^{1/2} T_{p-r}'$ 'nin sıfır uzayıdır.

4.6. Lineer Regresyonda Kısıtlı $r-k$ Sınıfı Tahmin Edici ve Kısıtlı $r-d$ Sınıfı Tahmin Edici

Çoklu iç ilişki problemi istatistik biliminde çok iyi bilinmektedir. Şimdiye kadar, bu problemin çözümü için birçok iyileştirici çalışmalar önerilmiştir. Popüler olan bir yöntem, Massy (1965)'in PCR tahmin edicisi, Hoerl ve Kennard (1970)'ın ORR tahmin edicisi ve Liu (1993) 'nın Liu tahmin edicisi gibi uygun yanlı tahmin edicileri değerlendirmiştir. İki farklı tahmin edicinin birleşiminin, her iki tahmin edicilerin avantajlarını sağlayabileceğini göz önüne alarak, Baye ve Parker (1984) ile Kaçıranlar ve Sakallıoğlu (2001), sırasıyla ORR tahmin edicisi ve Liu tahmin edicisini PCR tahmin edicisi ile birleştirerek, $r-k$ sınıfı tahmin edicisini ve $r-d$ sınıfı tahmin edicisini önermiştir. Özkale ve Kaçıranlar (2008), $r-k$ sınıfı tahmin ediciyi, Pitman'ın kriterine göre OLS tahmin edicisiyle karşılaştırmıştır. Özkale ve Kaçıranlar ayrıca, MSE matris kriterine göre $r-d$ sınıfı tahmin ediciyi; PCR tahmin edici, $r-k$ sınıfı tahmin edici ve Liu tahmin edici ile karşılaştırmışlardır. Liu (2003,2004), ORR tahmin edicisini ve Liu tahmin ediciyi

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

birleştirerek Liu-tipi tahmin ediciyi (LTE) tanımlamıştır. Yang ve Xu (2008) , LTE için parametre seçimini incelemişlerdir.

Çoklu iç ilişki problemini çözebilmek için alternatif bir yöntem, bilinmeyen parametreler üzerindeki bazı kısıtlar ile parametre tahminlerinin dikkate alınmasıdır. Sarkar (1992), Kaçıranlar ve arkadaşları (1999), ORR tahmin edicisini ve Liu tahmin edicisini kısıtlı OLS regresyon tahmin edicisi ile birleştirerek sırasıyla, kısıtlı ridge regresyon tahmin edicisini ve kısıtlı Liu (RL) tahmin edicisini tanımlamışlardır.

Kısıtlı $r-k$ sınıfı tahmin edicisi, $r-k$ sınıfı tahmin edicisinin ve kısıtlı ridge regresyon tahmin edicisinin genelleştirilmesi olarak kabul edilirken, kısıtlı $r-d$ sınıfı tahmin edicisi de kısıtlı Liu tahmin edicisi ve $r-d$ sınıfı tahmin edicisinin genel bir durumudur. MSE kriterine göre, kısıtlı $r-k$ sınıfı tahmin edici ve kısıtlı $r-d$ sınıfı tahmin edici sırasıyla, kısıtlı ridge regresyon tahmin edici ve kısıtlı Liu tahmin edici ile karşılaştırılmıştır.

(1.1.)’de verilen çoklu lineer regresyon modelini ele alalım ve β ‘nın (3.1.)’de verilen kısıtı sağladığını varsayalım. Eğer, $F_d = (S + I)^{-1} (S + dI)$, $W_k = (S + kI)^{-1} S$ ve $T_r \Lambda_r^{-1} T_r' = T_r T_r' T \Lambda^{-1} T'$ eşitliklerini göz önüne alırsak, PCR, ORR ve Liu tahmin edicileri aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\hat{\beta}_{PCR} = T_r T_r' T \Lambda^{-1} T' X' y = T_r T_r' \hat{\beta}, \quad (4.29.)$$

$$\hat{\beta}(k) = (S + kI)^{-1} X' y = W_k \hat{\beta},$$

$$\hat{\beta}_d = (S + I)^{-1} (I + dS^{-1}) X' y = F_d \hat{\beta}.$$

(1.1.) ve (3.1.) ile belirtilen kısıtlı lineer model için Sarkar, Kaçıranlar ve arkadaşları tarafından önerilen RRR tahmin edici ve RL tahmin edici sırasıyla aşağıda verilmiştir:

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_r(k) &= W_k \hat{\beta}_r, \\ \hat{\beta}_{rd} &= F_d \hat{\beta}_r.\end{aligned}\tag{4.30.}$$

$r-k$ sınıfı tahmin edici ve $r-d$ sınıfı tahmin edici Baye ve Parker ile Kaçıranlar ve Sakallıoğlu tarafından (4.1.) ve (4.6.)’da verilmiştir.

(4.29.), (4.1.) ve (4.6.)’da verilen eşitliklerden, $k=0$ ve $d=1$ olduğunda, hem $r-k$ sınıfı tahmin edici hem de $r-d$ sınıfı tahmin edicinin PCR tahmin ediciye dönüşmesi aşıkardır.

$T_r' T = (I_r : 0) T' T$ eşitliği verildiğinde, kısıtlı $r-k$ sınıfı tahmin edicisini ve kısıtlı $r-d$ sınıfı tahmin edicisi verilirse,

$$\begin{aligned}T_r (\Lambda_r + kI_r)^{-1} T_r' &= T_r (\Lambda_r + kI_r)^{-1} (I_r : 0) T' \\ &= T_r \left((\Lambda_r + kI_r)^{-1} : 0 \right) T' \\ &= T_r (I_r : 0) (\Lambda + kI)^{-1} T' \\ &= T_r T_r' T (\Lambda + kI)^{-1} T', \\ T_r (\Lambda_r + I_r)^{-1} (I_r + d\Lambda_r^{-1}) T_r' &= T_r (\Lambda_r + I_r)^{-1} (I_r + d\Lambda_r^{-1}) (I_r : 0) T' \\ &= T_r \left((\Lambda_r + I_r)^{-1} (I_r + d\Lambda_r^{-1}) : 0 \right) T' \\ &= T_r T_r' T (\Lambda + I)^{-1} (I + d\Lambda^{-1}) T'\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

Bu nedenle, $r-k$ sınıfı tahmin edicisi ve $r-d$ sınıfı tahmin edicisi şu şekilde yeniden yazılabilir:

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}(r, k) &= T_r T_r' T (\Lambda + kI)^{-1} T' X' y \\
 &= T_r T_r' \hat{\beta}(k) \\
 &= T_r T_r' W_k \hat{\beta} , \\
 \hat{\beta}(r, d) &= T_r T_r' T (\Lambda + I)^{-1} (I + d\Lambda) T' X' y \\
 &= T_r T_r' \hat{\beta}_d \\
 &= T_r T_r' F_d \hat{\beta} .
 \end{aligned}$$

Sarkar, Kaçıranlar ve arkadaşlarının ardından, aşağıdaki kısıtlı $r - k$ sınıfı tahmin edicisi ve kısıtlı $r - d$ sınıfı tahmin edicisi önerilmiştir:

$$\hat{\beta}_r(r, k) = T_r T_r' W_k \hat{\beta}_r \quad (4.31.)$$

$$\hat{\beta}_r(r, d) = T_r T_r' F_d \hat{\beta}_r . \quad (4.32.)$$

Kısıtlı $r - k$ sınıfı tahmin edicisinin tanımından aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$r = p$ ise, $\hat{\beta}_r(r, k) = W_k \hat{\beta}_r = \hat{\beta}_r(k)$, RRR tahmin edici,

$k = 0$ ve $r = p$ ise, $\hat{\beta}_r(r, k) = \hat{\beta}_r$, ROLS tahmin edici,

$R = 0$ ise, $\hat{\beta}_r(r, k) = T_r T_r' W_k \hat{\beta} = \hat{\beta}(r, k)$, $r - k$ tahmin edicisidir.

Kısıtlı $r - d$ tahmin edicisi de benzer şekilde elde edilir:

$r = p$ ise, $\hat{\beta}_r(r, d) = F_d \hat{\beta}_r = \hat{\beta}_{rd}$, RL tahmin edici,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$d = 1$ ve $r = p$ ise, $\hat{\beta}_r(r, d) = \hat{\beta}_r$, ROLS tahmin edici,

$R = 0$ ise, $\hat{\beta}_r(r, d) = T_r T_r' F_d \hat{\beta} = \hat{\beta}(r, d)$, $r - d$ tahmin edicisidir.

4.6.1. Önerilen Tahmin Edicilerin Üstünlüğü

Burada amaç, MMSE kriterine göre, kısıtlı $r - k$ sınıfı tahmin edici ve kısıtlı $r - d$ sınıfı tahmin edicisinin üstünlük durumunu incelemektir.

M matrisi için, M' , M^+ , $rank(M)$, $R(M)$ ve $N(M)$ sırasıyla, transpoz, Moore-Penrose ters, rank, kolon uzayı ve sıfır uzayının kısaltmalarıdır. $M \geq 0$ ifadesi, M 'in n.n.d. ve simetrik olduğu anlamına gelir. $\lambda_1(M) \geq \dots \geq \lambda_n(M)$, M 'in sıralı özdeğerlerini ifade eder. Böylece, önerilen tahmin edicilerin MMSE'leri türetilmelidir. $\delta = h - H\beta$ ve $E(\hat{\beta}_r) = \beta + S^{-1}H'(HS^{-1}H')^{-1}\delta$, $Cov(\hat{\beta}_r) = \sigma^2 A$ verilsin. Kısıtlı $r - k$ sınıfı tahmin edicisinin yanlılık vektörü ve kovaryans matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} Bias(\hat{\beta}_r(r, k)) &= E(\hat{\beta}_r(r, k)) - \beta \\ &= (T_r T_r' W_k - I)\beta + T_r T_r' W_k S^{-1} H' (HS^{-1} H')^{-1} \delta, \\ Cov(\hat{\beta}_r(r, k)) &= T_r T_r' W_k \cdot Cov(\hat{\beta}_r) \cdot W_k' T_r T_r' \\ &= \sigma^2 T_r T_r' W_k A W_k' T_r T_r'. \end{aligned}$$

Bu nedenle,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$MMSE(\hat{\beta}_r(r, k)) = \sigma^2 T_r' T_r' W_k A W_k' T_r T_r' + \left[(T_r' T_r' W_k - I) \beta + T_r' T_r' W_k S^{-1} H' (HS^{-1} H')^{-1} \delta \right] \\ \times \left[(T_r' T_r' W_k - I) \beta + T_r' T_r' W_k S^{-1} H' (HS^{-1} H')^{-1} \delta \right]' \quad (4.33.)$$

dir.

Benzer şekilde, kısıtlı $r-d$ sınıfı tahmin edicisinin MMSE'si aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$MMSE(\hat{\beta}_r(r, d)) = \sigma^2 T_r' T_r' F_d A F_d' T_r T_r' + \left[(T_r' T_r' F_d - I) \beta + T_r' T_r' F_d S^{-1} H' (HS^{-1} H')^{-1} \delta \right] \\ \times \left[(T_r' T_r' F_d - I) \beta + T_r' T_r' F_d S^{-1} H' (HS^{-1} H')^{-1} \delta \right]' . \quad (4.34.)$$

(4.33.) ve (4.34.) ile verilen denklemlerde $r = p$ alınırsa, RRR tahmin edicisinin MMSE'si Sarkar ve RL tahmin edicisinin MMSE'si Kaçiranlar ve arkadaşları tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$MMSE(\hat{\beta}_r(k)) = \sigma^2 W_k A W_k' + \left[(W_k - I) \beta + W_k S^{-1} H' (HS^{-1} H')^{-1} \delta \right] \\ \times \left[(W_k - I) \beta + W_k S^{-1} H' (HS^{-1} H')^{-1} \delta \right]' . \quad (4.35.)$$

$$MMSE(\hat{\beta}_{rd}) = \sigma^2 F_d A F_d' + \left[(F_d - I) \beta + F_d S^{-1} H' (HS^{-1} H')^{-1} \delta \right] \\ \times \left[(F_d - I) \beta + F_d S^{-1} H' (HS^{-1} H')^{-1} \delta \right]' . \quad (4.36.)$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

4.6.1.1. Kısıtlar Sağlandığında Tahmin Edicilerin Üstünlüğü

Burada kısıtlar sağlandığında tahmin edicilerin üstünlüğü, yani, $\delta = h - H\beta = 0$ ifadesi araştırılmaktadır. Bu durumda, (4.33.)-(4.36.) denklemlerinden kısıtlı $r-k$ sınıfı tahmin edicisi, kısıtlı $r-d$ sınıfı tahmin edicisi, RRR tahmin edicisi ve RL tahmin edicisinin MMSE'lerini,

$$\begin{aligned} MMSE\left(\hat{\beta}_r(r, k)\right) &= \sigma^2 T_r T_r' W_k A W_k' T_r T_r' + \left(T_r T_r' W_k - I\right) \\ &\quad \times \beta \beta' \left(T_r T_r' W_k - I\right)', \end{aligned} \quad (4.37.)$$

$$\begin{aligned} MMSE\left(\hat{\beta}_r(r, d)\right) &= \sigma^2 T_r T_r' F_d A F_d' T_r T_r' + \left(T_r T_r' F_d - I\right) \\ &\quad \times \beta \beta' \left(T_r T_r' F_d - I\right)', \end{aligned} \quad (4.38.)$$

$$MMSE\left(\hat{\beta}_r(k)\right) = \sigma^2 W_k A W_k' + (W_k - I) \beta \beta' (W_k - I)', \quad (4.39.)$$

$$MMSE\left(\hat{\beta}_{rd}\right) = \sigma^2 F_d A F_d' + (F_d - I) \beta \beta' (F_d - I)'. \quad (4.40.)$$

şeklinde verebiliriz.

Teorem 4.23. Eğer $T_r' A T_{p-r} = 0$ ve $T_{p-r}' A T_{p-r}$ tersinir ise, kısıtlı $r-k$ sınıfı tahmin edicinin RRR tahmin ediciden daha iyi olması için gerek ve yeter koşul $\beta \in N(W)$ olmasıdır.

Teorem 4.24. Eğer $T_r' A T_{p-r} = 0$ ve $T_{p-r}' A T_{p-r}$ tersinir ise, kısıtlı $r-d$ sınıfı tahmin edicinin RL tahmin ediciden daha iyi olması için gerek ve yeter koşul $\beta \in N(W)$ olmasıdır.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

4.6.1.2. Kısıtlar Sağlanmadığında Tahmin Edicilerin Üstünlüğü

Burada kısıtlar sağlanmadığında tahmin edicilerin üstünlüğü, yani, $\delta = h - H\beta \neq 0$ ifadesi araştırılmaktadır. Bu durumda, kısıtlar sağlanmadığında, Kaçıranlar ve arkadaşları MSE kriterini kullanarak, RL tahmin edici ile Liu tahmin edici arasında bazı karşılaştırmalar yapmıştır.

(4.33.)-(4.36.) ile verilen denklemlerden, MMSE farklarını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} MMSE(\hat{\beta}_r(k)) - MMSE(\hat{\beta}_r(r, k)) &= \sigma^2 T_{p-r} (\Lambda_{p-r} + kI)^{-1} \Lambda_{p-r} T'_{p-r} A T_{p-r} \\ &\quad \times (\Lambda_{p-r} + kI)^{-1} \Lambda_{p-r} T'_{p-r} + b_1 b'_1 - b_2 b'_2 \\ MMSE(\hat{\beta}_{rd}) - MMSE(\hat{\beta}_r(r, d)) &= \sigma^2 T_{p-r} (\Lambda_{p-r} + I_{p-r})^{-1} (\Lambda_{p-r} + dI_{p-r}) T'_{p-r} A T_{p-r} \\ &\quad \times (\Lambda_{p-r} + I_{p-r})^{-1} (\Lambda_{p-r} + dI_{p-r}) T'_{p-r} . \end{aligned}$$

Teorem 4.25. (3.1.) ile verilen kısıtların geçerli olmadığını varsayalım. Eğer $T'_r A T_{p-r} = 0$ ve $T'_{p-r} A T_{p-r}$ tersinir ise, kısıtlı $r-k$ sınıfı tahmin edicinin RRR tahmin ediciden daha iyi olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{W}(T'_{p-r} \delta^* + \Lambda_{p-r} T'_{p-r} \beta) = 0$ olmasıdır.

4.7. Kısıtlı Olmayan Tahmin Edicilerin Tek Bir Tahmin Edicide Birleştirilmesi

Burada amaç, bir kaç regresyon tahmin edicisini (OLS, Ridge, Daralma, PCR, Liu, $r-k$ ve $r-d$ sınıfı tahmin edicileri) tek bir tahmin edicide birleştirmek ve çoklu lineer regresyonda kullanılan tahmin ediciler arasındaki ilişkileri araştırmaktır. Bu yeni tahmin edicinin PCR, $r-k$ sınıfı, $r-d$ sınıfı,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$\hat{\beta}(k, d)$, OLS, Ridge, Liu ve Daralma tahmin edicilerine göre daha üstün olması için koşullar SMSE kriterine göre sağlanır ve bu yeni tahmin edici için yanlı parametrelerinin tahmin edicileri elde edilir.

4.7.1. Yeni Bir Sınıf Tahmin Edici

PCR tahmin edici, tahmin probleminin boyutunu azaltan bir yöntemdir. Bunun nedeni, regresyon modelinin boyutunun azaltılmasının çoklu iç ilişki probleminin ortadan kaldırılmasını sağlamasıdır. $T = (T_r, T_{p-r})$ 'nin parçalanmasından sonra (3.9.) ile verilen denklem,

$$\begin{aligned} y &= XT_r T_r' \beta + XT_{p-r} T_{p-r}' \beta + \varepsilon \\ &= Z_r \alpha_r + Z_{p-r} \alpha_{p-r} + \varepsilon . \end{aligned} \quad (4.41.)$$

şeklinde verilir. Çoklu iç ilişki probleminin PCR yöntemiyle kullanılması, (4.41.) ile verilen modelden,

$$y = Z_r \alpha_r + \varepsilon , \quad \varepsilon \sim (0, \sigma^2 I) \quad (4.42.)$$

şeklinde verilen indirgenmiş modele geçilmesine karşılık gelir. PCR'ye dayanan düşünce, α_r 'ye göre

$$Z_r' Z_r \alpha_r = Z_r' y \quad (4.43.)$$

şeklinde verilen normal denklemdeki sonucun

$$\Psi_1 = (y - Z_r \alpha_r)' (y - Z_r \alpha_r)$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

şeklinde verilen ifadeyi minimize etmesidir ve böylece normal denklemin çözümü

$$\hat{\alpha}_r = \left(Z_r' Z_r \right)^{-1} Z_r' y \quad (4.44.)$$

şeklinde dir. Burada $Z_r = XT_r$ ve $\alpha_r = T_r' \beta$ 'dır. Böylece, (3.14.) ile verilen PCR tahmin edicisi, $\hat{\alpha}_r$ 'yi gerçek parametre uzayına dönüştürerek elde edilir.

Eğer çoklu iç ilişki, indirgenmiş modelde hala bir sorun olmaya devam ediyorsa, çoklu iç ilişki problemi için yenilikçi yöntemlerin kullanılması gerekir. $r-k$ ve $r-d$ sınıfı tahmin ediciler bu yöntemlerin bir sonucudur.

Çoklu iç ilişki problemi indirgenmiş modelde ortaya çıktığında kI 'yı $Z_r' Z_r$ 'ye, (4.43.) ile verilen denklemde ekleyerek denklemi çözmek ve gerçek parametre uzayına geri dönüştürmek $\hat{\beta}(r, k)$ 'yı verdiğini görmüştük. Benzer şekilde, Liu'nun (1993) de ifade ettiği benzer düşüncüyü kullanarak $\hat{\beta}(r, d)$ elde edilmişti. $d\hat{\alpha}_r = \alpha_r + \varepsilon^*$ denklemini kullanarak, (4.42.) ile verilen modelle birleştirerek OLS yöntemini uygularsak $\hat{\beta}(r, d)$ 'yi elde ederiz.

Çoklu iç ilişki varlığında $\|\beta\| < \|\hat{\beta}\|$ olduğunu biliyoruz . Ridge, Uyarlanmış Ridge veya $\hat{\beta}(k, d)$ 'nin elde edilme düşüncelerinin kullanılmasıyla, (4.42.) ile verilen indirgenmiş model kullanılarak, yeni bir tahmin edici bulunabilir. İndirgenmiş modelde çoklu iç ilişki problemi varlığında, $\hat{\alpha}_r$ vektörünün α_r vektöründen daha büyük olması beklenir, yani $\|\alpha_r\| < \|\hat{\alpha}_r\|$ olur. α_r 'nin daraltıcı tahmin edicisinin kolayca görülebildiği ve $d\hat{\alpha}_r$ 'nin $\hat{\alpha}_r$ 'den daha küçük bir uzunluğa sahip olduğu görülmektedir, yani $\|d\hat{\alpha}_r\| < \|\hat{\alpha}_r\|$ olur. Burada $0 < d < 1$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

'dir. Bu, doğrusallık nedeniyle $\|\hat{\alpha}_r\|$ çok büyük olduğunda bir çare olarak incelenebilir. Bu nedenle, Swindel (1976) ve Özkale ve Kaçıranlar (2007a) düşüncelerinin birleştirilmesiyle yeni bir tahmin edici bulabiliriz.

Bir c sabiti ve k Lagrange çarpanı verilsin. Yeni tahmin ediciyi,

$$\Psi_2 = (y - Z_r \alpha_r^*)' (y - Z_r \alpha_r^*) + k \left[(\alpha_r^* - d \hat{\alpha}_r)' (\alpha_r^* - d \hat{\alpha}_r) - c \right]$$

şeklinde verilen fonkiyonu minimize ederek elde ederiz. Ψ_2 'nin α_r^* ve k ya göre türevlerini alır ve çözümü $\hat{\alpha}(k, d)$ ile göstererek,

$$\hat{\alpha}(k, d) = (Z_r' Z_r + kI)^{-1} (Z_r' y + kd \hat{\alpha}_r)$$

ifadesini elde ederiz. Burada $\hat{\alpha}_r$, (4.44.) ile verilmiştir. Orijinal parametre uzayına geri dönersek, $k > 0$ ve $0 < d < 1$ için,

$$\hat{\beta}_r(k, d) = T_r \left(T_r' X X T_r + kI_r \right)^{-1} \left(T_r' X y + kd T_r' \hat{\beta}_{PCR} \right) \quad (4.45.)$$

ifadesi elde edilir. (4.45.) ile verilen denklemde, $\hat{\beta}_{PCR}$, (3.14.) denklemi ile verilen PCR tahmin edicisini temsil eder.

c bir sabit ve k Lagrange çarpanı olmak üzere, $\hat{\beta}_r(k, d)$,

$$\Psi_3 = (\alpha_r^* - d \hat{\alpha}_r)' (\alpha_r^* - d \hat{\alpha}_r) + \frac{1}{k} \left[(y - Z_r \alpha_r^*)' (y - Z_r \alpha_r^*) - c \right]$$

şeklinde verilen ifadeyi minimize ederek de elde edilebilir.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$\hat{\beta}_r(k, d)$ ile ilgili birçok özel durum vardır:

1. $k, 0$ 'a yaklaştığında veya $d, 1$ 'e yaklaştığında, $\hat{\beta}_r(k, d)$ PCR tahmin edicisine yaklaşır;

$$\lim_{k \rightarrow 0} \hat{\beta}_r(k, d) = \hat{\beta}_{PCR} \quad \text{veya} \quad \lim_{d \rightarrow 1} \hat{\beta}_r(k, d) = \hat{\beta}_{PCR}.$$

2. $d, 0$ 'a yaklaştığında, $\hat{\beta}_r(k, d)$ Baye ve Parker'ın (1984) önerdiği $r - k$ sınıfı tahmin edicisine dönüşür;

$$\lim_{d \rightarrow 0} \hat{\beta}_r(k, d) = \hat{\beta}(r, k).$$

3. $k, 1$ 'e yaklaştığında, $\hat{\beta}_r(k, d)$ Kaçıranlar ve Sakallıoğlu'nun (2001) önerdiği $r - d$ sınıfı tahmin edicisi formunu alır;

$$\lim_{k \rightarrow 1} \hat{\beta}_r(k, d) = \hat{\beta}(r, d).$$

4. $r = p$ olduğunda, $\hat{\beta}_r(k, d) = \hat{\beta}(k, d)$ ifadesi Özkale ve Kaçıranlar (2007) tarafından önerilmiştir.

$d \rightarrow 0$ iken, $\hat{\beta}_r(k, d), \hat{\beta}(r, k)$ 'ya yaklaşır ve $d \rightarrow 1$ iken, $\hat{\beta}_r(k, d) \hat{\beta}_{PCR}$ 'ye yaklaşır. Daha sonra, $\hat{\beta}_r(k, d)$, sabit bir k için $\hat{\beta}(r, k)$ 'dan $\hat{\beta}_{PCR}$ 'ye bir yol izler. $k \rightarrow 0$ iken, $\hat{\beta}(r, k)$ ve $\hat{\beta}_r(k, d)$ 'nin her ikisi de $\hat{\beta}_{PCR}$ 'ye yaklaşır ve $k \rightarrow \infty$ iken, $\hat{\beta}(r, k)$ 0'a ve $\hat{\beta}_r(k, d)$ $d \hat{\beta}_{PCR}$ 'ye yaklaşır. Böylece, $\hat{\beta}(r, k)$, $\hat{\beta}_{PCR}$ 'den 0 yönüne doğru bir hareket olarak kabul edildiğinde, bir d sabiti için $\hat{\beta}_r(k, d)$, $\hat{\beta}_{PCR}$ 'den $d \hat{\beta}_{PCR}$ 'ye doğru bir yol izler. $\hat{\beta}_r(k, d)$, $r - k$ ve $r - d$ sınıfı tahmin edicilerin özel bir durumu olduğundan; ayrıca, $\hat{\beta}_r(k, d)$, $\hat{\beta}(r, k)$ ve $\hat{\beta}(r, d)$ arasındaki yapısal benzerlik nedeniyle, bu yeni tahmin ediciyi $r - (k, d)$ sınıfı tahmin edicisi olarak adlandırıyoruz. Bu nedenle, k ve d için uygun yer

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

değişikliği yapıldığında veya $r = p$ iken, $\hat{\beta}_r(k, d)$ farklı tahmin edicilerin formunu alacaktır.

4.7.2. Yanlılık Parametreleri k ve d Seçimi

Bilindiği gibi, bir tahmin edicinin MMSE'si tahmin edicinin varyansı ile yanlılığın karesinin toplamıdır.

(1.1.) ve (4.45.) ile verilen denklemlerden,

$$Var(\hat{\beta}_r(k, d)) = \sigma^2 T_r S(r, k)^{-1} S(r, kd) \Lambda_r^{-1} S(r, kd) S(r, k)^{-1} T_r'$$

ve

$$Bias(\hat{\beta}_r(k, d)) = \left[k(d-1) T_r S(r, k)^{-1} T_r' - T_{p-r} T_{p-r}' \right] \beta$$

şeklinde bulunur. Burada, $S(r, kd) = \Lambda_r + kdI$ ve $S(r, k) = \Lambda_r + kI$ 'dır.

Böylece, $\hat{\beta}_r(k, d)$ 'nin MMSE'si,

$$\begin{aligned} MMSE(\hat{\beta}_r(k, d)) &= \sigma^2 T_r S(r, k)^{-1} S(r, kd) \Lambda_r^{-1} S(r, kd) S(r, k)^{-1} T_r' \\ &+ \left[k(d-1) T_r S(r, k)^{-1} T_r' - T_{p-r} T_{p-r}' \right] \beta \\ &\times \beta' \left[k(d-1) T_r S(r, k)^{-1} T_r' - T_{p-r} T_{p-r}' \right] \quad (4.46.) \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

k ve d 'nin doğru seçimi farklı tahmin edicilere yol açar. Bu nedenle, bu tahmin edicilerin MMSE'sini (4.46.) 'dan k ve d 'nin uygun değerlerini değiştirerek veya $r = p$ 'yi koyarak elde edebiliriz. Örneğin $\hat{\beta}_{PCR}$, $\hat{\beta}(r, k)$,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$\hat{\beta}(r, d)$ ve $\hat{\beta}(k, d)$ 'nin MMSE'si sırasıyla, Sarkar (1996), Özkale ve Kaçıranlar (2007a) ve Özkale ve Kaçıranlar (2007b) tarafından verilen teoremlerde $k = 0$ veya $d = 1$; $d = 0$, $k = 1$ ve $r = p$, (4.46.)'da yerine koyularak kolayca elde edilebilir.

Bir tahmin edicinin SMSE'si, trace'in bu tahmin edicinin MMSE'sine uygulanmasıyla elde edilir. Böylece, (4.46.)'dan $\hat{\beta}_r(k, d)$ 'nin SMSE'si,

$$SMSE\left(\hat{\beta}_r(k, d)\right) = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma^2(\lambda_i + kd)^2 + k^2(d-1)^2 \alpha_i^2 \lambda_i}{\lambda_i(\lambda_i + k)^2} + \sum_{i=r+1}^p \alpha_i^2 \quad (4.47.)$$

şeklinde verilir. $d = 0$, $k = 1$ ve $r = p$ iken, $SMSE\left(\hat{\beta}_r(k, d)\right)$ sırasıyla Baye ve Parker (1984), Kaçıranlar ve Sakallıoğlu (2001) ve Özkale ve Kaçıranlar (2007) tarafından verildi.

Parametrelerin optimal değerlerinin bulunması önemli bir problemdir. Ridge ve Liu tahmin yöntemlerinde k ve d 'yi tahmin etmek için pek çok farklı yöntem önerilmiştir. Genel olarak, optimal değerli yanlılık parametreleri tahmin edicilerin SMSE'ini en aza indirgeyerek elde edilir. Burada, $r - (k, d)$ sınıfı tahmin edicideki minimum SMSE'yi veren yanlılık parametrelerinin tahmin edicileri incelenecektir. $\hat{\beta}_r(k, d)$, iki yanlılık parametresi olan k ve d 'ye bağlı olduğundan , optimal (k, d) çiftini bulmak için ikinci türev testi uygulanabilir.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

İki boyutlu $SMSE(\hat{\beta}_r(k, d))$ 'nin (k_0, d_0) noktasında yerel ekstremum varsa ve bu noktada sürekli bir kısmi türev varsa, $\partial SMSE(\hat{\beta}_r(k_0, d_0)) / \partial k = 0$ ve $\partial SMSE(\hat{\beta}_r(k_0, d_0)) / \partial d = 0$ olur. Öyleyse bu noktayı bulalım.

k sabit iken, verilen r değeri için $SMSE(\hat{\beta}_r(k, d))$ 'nin d ye göre türevinin alınmasıyla,

$$\frac{\partial SMSE(\hat{\beta}_r(k, d))}{\partial d} = \sum_{i=1}^r \frac{2k\lambda_i(\sigma^2 - k\alpha_i^2) + 2dk^2(\sigma^2 + \alpha_i^2\lambda_i)}{\lambda_i(\lambda_i + k)^2} \quad (4.48.)$$

elde edilir ve sıfıra eşitlenmesiyle d değeri,

$$d_0 = \frac{\sum_{i=1}^r (k\alpha_i^2 - \sigma^2) / (\lambda_i + k)^2}{\sum_{i=1}^r k(\sigma^2 + \alpha_i^2\lambda_i) / \lambda_i(\lambda_i + k)^2} \quad (4.49.)$$

şeklinde verilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \frac{\partial SMSE(\hat{\beta}_r(k, d))}{\partial k} &= \sum_{i=1}^r \frac{2\sigma^2(\lambda_i + kd)(d-1)}{(\lambda_i + k)^3} \\ &+ \frac{2k(d-1)^2\alpha_i^2\lambda_i}{(\lambda_i + k)^3} \end{aligned} \quad (4.50.)$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

şeklinde verilir. d_0 in (4.50.) de yerleştirilmesi ve sıfıra eşitlenmesiyle $k_0 = \frac{\sigma^2}{\alpha_i^2}$,

$i = 1, 2, \dots, r$ şeklinde bulunur.

Şimdi tahmin edicilerin karşılaştırılmalarını ele alalım:

4.7.3. $r - (k, d)$ Sınıfı Tahmin Edicinin SMSE Kriterine göre Bazı Tahmin Ediciler Üzerindeki Üstünlüğü

$r - (k, d)$ sınıfı tahmin edici, $k = 0$ olduğunda veya $d = 1$ olduğunda PCR tahmin edicisi olur. Böylece, (4.47.)'den $\hat{\beta}_{PCR}$ 'nin SMSE'si, $SMSE(\hat{\beta}_r(k, d))$ 'deki $k = 0$ veya $d = 1$ 'nin,

$$SMSE(\hat{\beta}_{PCR}) = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma^2}{\lambda_i} + \sum_{i=r+1}^p \alpha_i^2 \quad (4.51.)$$

şeklinde değiştirilmesiyle elde edilir. $\hat{\beta}_r(k, d)$ 'nin $\hat{\beta}_{PCR}$ 'ye olan üstünlüğü için

$SMSE(\hat{\beta}_{PCR}) - SMSE(\hat{\beta}_r(k, d))$ farkı göz önüne alınabilir.

Teorem 4.26a. $N_r = \{1, \dots, r\}$ verilsin. $SMSE(\hat{\beta}_{PCR}) - SMSE(\hat{\beta}_r(k, d))$ farkı, aşağıda verilen ifadeler için pozitifdir.

(i) Her $i \in N_r$ için, $\alpha_i^2 \lambda_i - \sigma^2 > 0$ ise,

$k < \min_{i \in N_r} \left\{ 2\sigma^2 \lambda_i / \left((\alpha_i^2 \lambda_i - \sigma^2) - d(\alpha_i^2 \lambda_i + \sigma^2) \right) \right\}$ ve

$0 < d < \min_{i \in N_r} \left\{ (\alpha_i^2 \lambda_i - \sigma^2) / \alpha_i^2 \lambda_i + \sigma^2 \right\}$ 'dir.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

(ii) Bazı $i \in N_r$ için, $\alpha_i^2 \lambda_i - \sigma^2 > 0$ ise, $k > 0$ ve $\max \left\{ 0, \max_{i \in N_r} \left\{ \left(\alpha_i^2 \lambda_i - \sigma^2 \right) / \left(\alpha_i^2 \lambda_i + \sigma^2 \right) \right\} \right\} < d < 1$ 'dir.

(iii) Her $i \in N_r$ için, $\alpha_i^2 \lambda_i - \sigma^2 < 0$ ise, $k > 0$ ve $0 < d < 1$ 'dir.

Teorem 4.26b. $d < \min_{i \in N_r} \left\{ \alpha_i^2 / \left(\left(\sigma^2 / \lambda_i \right) + \alpha_i^2 \right) \right\}$ iken, $SMSE \left(\hat{\beta}_r(k, d) \right)$ 'nin $SMSE \left(\hat{\beta}_{PCR} \right)$ 'den daha üstün olması için gerek ve yeter koşul $0 < k < \min_{i \in N_r} \left\{ \sigma^2 / \left(\alpha_i^2 - d \left(\left(\sigma^2 / \lambda_i \right) + \alpha_i^2 \right) \right) \right\}$ olmasıdır.

Teorem 4.27. Her $i = 1, \dots, r$ için $k \alpha_i^2 - \sigma^2 > 0$ verilsin. Böylece, $0 < d < \sum_{i=1}^r \left(k \alpha_i^2 - \sigma^2 \right) / \left(\lambda_i + k \right)^2 / \sum_{i=1}^r k \left(\sigma^2 + \alpha_i^2 \lambda_i \right) / \lambda_i \left(\lambda_i + k \right)^2 < 1$ için, $SMSE$ 'ye göre $\hat{\beta}_r(k, d)$ 'nin $\hat{\beta}(r, k)$ 'dan daha üstün olması için gerek ve yeter koşul d 'nin pozitif olmasıdır.

Teorem 4.28. Her $i = 1, \dots, r$ için, $\alpha_i^2 \lambda_i - \sigma^2 > 0$ ve $k_1 > \max \left\{ \left(\sigma^2 + 2\sigma^2 \lambda_i - \alpha_i^2 \lambda_i \right) / \left(\alpha_i^2 \lambda_i + 2\alpha_i^2 - \sigma^2 \right), 0 \right\}$ ise, $SMSE$ 'ye göre $\hat{\beta}_r(k, d)$ 'nin $\hat{\beta}(r, d)$ 'den daha üstün olması için gerek ve yeter koşul, $k < 1$ ve

$$d < \frac{\sum_{i=1}^r \left\{ \alpha_i^2 \lambda_i \left[(1 + k_1) \lambda_i + 2k_1 \right] - 2\sigma^2 \lambda_i^2 - \sigma^2 (1 + k_1) \lambda_i \right\} / \left(\lambda_i + 1 \right)^2 \left(\lambda_i + k_1 \right)^2}{\sum_{i=1}^r \left[\left((1 + k_1) \lambda_i + 2k_1 \right) \right] \left(\sigma^2 + \alpha_i^2 \lambda_i \right) / \left(\lambda_i + 1 \right)^2 \left(\lambda_i + k_1 \right)^2}$$

olmasıdır.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

Teorem 4.29. (i) $0 < k < (\lambda_r \alpha_r^2 - \sigma^2) / (d(\alpha_r^2 + (\sigma^2 / \lambda_r)) - 2\alpha_r^2)$ için,
 $SMSE(\hat{\beta}_r(k, d)) > SMSE(\hat{\beta}_{r-1}(k, d))$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve
 yeter koşul $\sigma^2 > \lambda_r \alpha_r^2$ ve $0 < d < 2\alpha_r^2 / (\alpha_r^2 + (\sigma^2 / \lambda_r))$ olmasıdır.

(ii) $0 \leq (\lambda_r \alpha_r^2 - \sigma^2) / (d(\alpha_r^2 + (\sigma^2 / \lambda_r)) - 2\alpha_r^2) < k$ için,
 $SMSE(\hat{\beta}_r(k, d)) < SMSE(\hat{\beta}_{r-1}(k, d))$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve
 yeter koşul $\sigma^2 \geq \lambda_r \alpha_r^2$ ve $0 < d < 2\alpha_r^2 / (\alpha_r^2 + (\sigma^2 / \lambda_r))$ olmasıdır.

(iii) $0 < k$ için, $SMSE(\hat{\beta}_r(k, d)) > SMSE(\hat{\beta}_{r-1}(k, d))$ eşitsizliğinin sağlanması
 için gerek ve yeter koşul $\sigma^2 > \lambda_r \alpha_r^2$ ve $2\alpha_r^2 / (\alpha_r^2 + (\sigma^2 / \lambda_r)) < d < 1$ olmasıdır.

Sonuç 4.2. $N_{p-r} = \{r+1, \dots, p\}$ verilsin.

(i) Her $i \in N_{p-r}$ için $\sigma^2 > \lambda_i \alpha_i^2$ ve her $i \in N_{p-r}$ için
 $0 < d < 2\alpha_i^2 / (\alpha_i^2 + (\sigma^2 / \lambda_i))$ ise, böylece $0 < k < k_1$ için
 $SMSE(\hat{\beta}(k, d)) > SMSE(\hat{\beta}_{p-1}(k, d)) > \dots > SMSE(\hat{\beta}_{r+1}(k, d)) > SMSE(\hat{\beta}_r(k, d))$
 olacak şekilde pozitif bir k değeri vardır. Burada,
 $k_1 = \min_{i \in N_{p-r}} \left\{ (\lambda_i \alpha_i^2 - \sigma^2) / (d(\alpha_i^2 + (\sigma^2 / \lambda_i)) - 2\alpha_i^2) \right\}$ 'dir.

(ii) Bazı $i \in N_{p-r}$ için $\sigma^2 \geq \lambda_i \alpha_i^2$ ve her $i \in N_{p-r}$ için
 $0 < d < 2\alpha_i^2 / (\alpha_i^2 + (\sigma^2 / \lambda_i))$ ise, böylece, $0 \leq k_2 < k$ için
 $SMSE(\hat{\beta}(k, d)) < SMSE(\hat{\beta}_{p-1}(k, d)) < \dots < SMSE(\hat{\beta}_{r+1}(k, d)) < SMSE(\hat{\beta}_r(k, d))$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

olacak şekilde negatif olmayan bir k_2 değeri vardır. Burada,

$$k_2 = \max \left\{ 0, \max_{i \in N_{p-r}} \left\{ \frac{\lambda_i \alpha_i^2 - \sigma^2}{d \left(\alpha_i^2 + \frac{\sigma^2}{\lambda_i} \right) - 2\alpha_i^2} \right\} \right\} \text{ 'dir.}$$

(iii) Her $i \in N_{p-r}$ için $\sigma^2 > \lambda_i \alpha_i^2$ ve her $i \in N_{p-r}$ için

$2\alpha_i^2 / \left(\alpha_i^2 + \left(\sigma^2 / \lambda_i \right) \right) < d < 1$ ise, böylece, her $k > 0$ için

$SMSE(\hat{\beta}(k, d)) > SMSE(\hat{\beta}_{p-1}(k, d)) > \dots > SMSE(\hat{\beta}_{r+1}(k, d)) > SMSE(\hat{\beta}_r(k, d))$ 'dir.

Teorem 4.30. (i) Her $i = 1, \dots, r, r+1, \dots, p$ için $\alpha_i^2 \lambda_i - \sigma^2 < 0$ ise, böylece $k > 0$

ve $0 < d < 1$ için $SMSE(\hat{\beta}_r(k, d)) < SMSE(\hat{\beta})$ 'dir.

(ii) Bazı $i = 1, \dots, r, r+1, \dots, p$ için $\alpha_i^2 \lambda_i - \sigma^2 < 0$ ise, böylece $k > 0$ için

$SMSE(\hat{\beta}_r(k, d)) < SMSE(\hat{\beta})$ ve $\sum_{i=r+1}^p (\alpha_i^2 \lambda_i - \sigma^2) / \lambda_i < 0$ iken,

$\sum_{i=1}^r \left(k^2 (\alpha_i^2 \lambda_i - \sigma^2) - 2k \sigma^2 \lambda_i \right) / \left(\lambda_i (\lambda_i + k)^2 \right) / \sum_{i=1}^r k^2 (\alpha_i^2 \lambda_i + \sigma^2) / \lambda_i (\lambda_i + k)^2 < d < 1$ 'dir.

Teorem 4.31. (i) Her $i \in N_{p-r}$ için $\sigma^2 - \lambda_i \alpha_i^2 > 0$ ve her $i \in N_r$ için

$k_1 > \sigma^2 / \alpha_i^2$ ise, böylece $0 < k < \min_{i \in N_{p-r}} \left\{ \left(\left(\sigma^2 / \alpha_i^2 \right) - \lambda_i \right) / 2 \right\}$ ve

$0 < d < \min \left\{ 1, \min_{i \in N_r} \left\{ 2\lambda_i (k_1 \alpha_i^2 - \sigma^2) / k_1 (\sigma^2 + \alpha_i^2 \lambda_i) \right\} \right\}$ için SMSE kriterine

göre $\hat{\beta}_r(k, d)$ tahmin edici, $\hat{\beta}(k)$ tahmin ediciden daha üstündür.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

(ii) Bazı $i \in N_{p-r}$ için $\sigma^2 - \lambda_i \alpha_i^2 > 0$ ve her $i \in N_r$ için $k_1 > \sigma^2 / \alpha_i^2$ ise, böylece

$\sum_{i=r+1}^p \lambda_i \left[\sigma^2 - (\lambda_i + 2k) \alpha_i^2 \right] / (\lambda_i + k)^2$ pozitif olacak şekilde ve

$0 < d < \min \left\{ 1, \min_{i \in N_r} \left\{ 2\lambda_i (k_1 \alpha_i^2 - \sigma^2) / k_1 (\sigma^2 + \alpha_i^2 \lambda_i) \right\} \right\}$ için SMSE kriterine

göre $\hat{\beta}_r(k, d)$ tahmin edici, $\hat{\beta}(k)$ tahmin ediciden daha üstündür.

4.8. Lineer Modelde $r-k$ Sınıfı Tahmin Edicinin Bazı Tahmin Edicilerden Üstünlüğü

$r-k$ sınıfı tahmin edici, ORR, PCR ve OLS tahmin edicilerini içeren genel bir tahmin edici olarak, Baye ve Parker (1984) tarafından OLS'ye alternatif olarak önerilmişti. Burada, Üstündağ Şiray ve Sakallıoğlu (2012) tarafından verilen, Mahalanobis kayıp fonksiyonu altında bu tahmin edicilerin karşılaştırılmaları ele alınacaktır. Yanlı tahminciler üzerinde yapılan çalışmalarda genellikle MSE kriteri veya eşdeğer olarak kuadratik kayıp fonksiyonu tahmin edicilerin performanslarının karşılaştırılmasında kullanılmıştır. Burada, $r-k$ sınıfı tahmin edici, OLS tahmin edici, PCR tahmin edici ve ORR tahmin edicinin birbiriyle karşılaştırılması için Mahalanobis kayıp fonksiyonu altında incelenecektir. Bu fonksiyon, Mahalanobis (1936) tarafından normal örneklemelerin sınıflandırılması durumunda minimum uzaklık kuralı olarak adlandırılan bir uzaklık kuralı olarak tanımlanır. Mahalanobis kayıp fonksiyonu, daha önce Peddada ve arkadaşları (1989) tarafından geliştirilmiş ridge regresyonu (GRR) tahmin edicisi ile OLS tahmin edicisini karşılaştırmak için kullanılmıştır.

Burada amaç, $r-k$ sınıfı tahmin edicisini OLS tahmin edicisi, PCR tahmin edicisi ve ORR tahmin edicisi ile ortalama kayıp kriterine göre karşılaştırmaktır. Ortalama kayıp kriteri aşağıdaki gibi tanımlanabilir. $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

β parametresi için iki tahmin edici olarak verilsin. $\hat{\beta}_2$ tahmin edicisinin $\hat{\beta}_1$ 'den daha üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$E\left(L\left(\hat{\beta}_1\right)\right) < E\left(L\left(\hat{\beta}_2\right)\right) \quad (4.52.)$$

'dir. Burada L , kayıp fonksiyonudur. Yani, kayıp fonksiyonu olarak kareler ortalaması kullanıldığında, bu MSE kriterine indirgenir. β 'nın $\hat{\beta}_1$ tahmin edicisi için, Mahalanobis kayıp fonksiyonu,

$$L_M\left(\hat{\beta}_1\right)=\left(\hat{\beta}_1-\beta\right)^{\prime}\left(Cov\left(\hat{\beta}_1\right)\right)^{-1}\left(\hat{\beta}_1-\beta\right) \quad (4.53.)$$

şeklinde verilir. Burada $Cov\left(\hat{\beta}_1\right)$, $\hat{\beta}_1$ 'in kovaryans matrisidir.

Peddada ve arkadaşları (1989), GRR tahmin edicisinin Mahalanobis kayıp fonksiyonu altında uygun görülmemesi durumu için gerekli ve uygun koşulları ortalama kayıp kriteri ile ele almıştır. (1.1.) modeli dikkate alındığında, GRR tahmin edicisi Hoerl ve Kennard (1970) tarafından (3.38.)'de verilmiştir. Burada K , p.d. bir matristir. $K = kI_p$ alındığında, ORR tahmin edicisine indirgenir ve burada $k \geq 0$ 'dır. ORR tahmin edicisinin OLS tahmin edicisi ile ortalama kayıp kriterine göre karşılaştırılması, GRR tahmin edicisinin OLS tahmin edicisi ile karşılaştırılmasında $K = kI_p$ yerine Peddada ve arkadaşları (1989) tarafından verilen ortalama kayıp kriteri alınabilir.

Burada, $r-k$ sınıfı tahmin edicisini OLS tahmin edicisi, PCR tahmin edicisi ve ORR tahmin edicisi ile karşılaştırdık. Özel durumda, ORR tahmin edicisinin OLS tahmin edicisi ile ortalama kayıp kriterine göre karşılaştırılması

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

elde edilir, böylece sonuçları $K = kI_p$ olduğunda Peddada ve arkadaşları (1989) tarafından verilen sonuçlarla karşılaştırabiliriz. Ayrıca, ortalama tahmin kriteriyle Mahalanobis kayıp fonksiyonu altında, PCR tahmin edicisinin OLS tahmin edicisi ile ve PCR tahmin edicisinin ORR tahmin edicisi ile karşılaştırılmasını da inceleyebiliriz. Sonrasında, bu koşulların Bölüm 4.8.2.'de yerine getirilip getirilmediği test edilir.

4.8.1. Ortalama Kayıp Karşılaştırmaları

$r - k$ sınıfı tahmin edicinin kovaryans matrisi, $Cov(\hat{\beta}(r, k))$ şeklinde gösterilsin. $r - k$ sınıfı tahmin edicinin kovaryans matrisi,

$$Cov(\hat{\beta}(r, k)) = \sigma^2 T_r (\Lambda_r + kI_r)^{-1} \Lambda_r (\Lambda_r + kI_r)^{-1} T_r' \quad (4.54.)$$

'dir. Burada $S(r, k) = \Lambda_r + kI_r$ ile $X'X = T_r \Lambda_r T_r' + T_{p-r} \Lambda_{p-r} T_{p-r}'$ verilsin. Verilen bu ifade kullanılarak $r - k$ sınıfı tahmin edicinin kovaryans matrisi aşağıdaki gibi yazılır:

$$Cov(\hat{\beta}(r, k)) = \sigma^2 T_r S(r, k)^{-1} \Lambda_r S(r, k)^{-1} T_r' .$$

Ayrıca, $r - k$ sınıfı tahmin edicinin Mahalanobis kayıp fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L_M(\hat{\beta}(r, k)) &= (\hat{\beta}(r, k) - \beta') (Cov(\hat{\beta}(r, k)))^{-1} (\hat{\beta}(r, k) - \beta) \\ &= \sigma^{-2} y' X T_r \Lambda_r^{-1} T_r' X' y - \sigma^{-2} y' X T_r \Lambda_r^{-1} S(r, k) T_r' \beta \\ &\quad - \sigma^{-2} \beta' T_r S(r, k) \Lambda_r^{-1} T_r' X' y + \sigma^{-2} \beta' T_r S(r, k) \Lambda_r^{-1} S(r, k) T_r' \beta \end{aligned} \quad (4.55.)$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

şeklinde verilir.

4.8.1.1. $r-k$ Sınıfı Tahmin Edici ile OLS Tahmin Edicinin Karşılaştırılması

$r-k$ sınıfı tahmin edicide, $k=0$ ve $r=p$ yazılarak OLS tahmin edicisinin elde edildiği bilinmektedir. Böylece, OLS tahmin edicisinin Mahalanobis kayıp fonksiyonu, $r-k$ sınıfı tahmin edicinin Mahalanobis kayıp fonksiyonunda $k=0$ ve $r=p$ yazılarak elde edilebilir. Böylece, OLS tahmin edicisinin Mahalanobis kayıp fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$L_M(\hat{\beta}) = \sigma^{-2} y' X T \Lambda^{-1} T' X' y - \sigma^{-2} \beta' X' y - \sigma^{-2} y' X \beta + \sigma^{-2} \beta' T \Lambda T' \beta. \quad (4.56.)$$

Böylece, $r-k$ sınıfı tahmin edicisinin Mahalanobis kayıp fonksiyonu altında OLS tahmin edicisiyle karşılaştırılması aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 4.32. OLS tahmin edicisinin Mahalanobis kayıp fonksiyonu altındaki $r-k$ sınıfı tahmin edicisinden üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$p-r \leq k^2 \sigma^{-2} \beta' T C T' \beta \text{ 'dir. Burada } C = \begin{pmatrix} \Lambda_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 'dir.}$$

Teorem 4.33. $\beta' T C T' \beta > 0$ olsun. OLS tahmin edicisinin Mahalanobis kayıp fonksiyonu altındaki $r-k$ sınıfı tahmin edicisinden üstün olması için gerek ve

yeter koşul, $k \geq \sqrt{\frac{\sigma^2 (p-r)}{\beta' T C T' \beta}}$ olmasıdır.

4.8.1.2. ORR Tahmin Edicisi ile OLS Tahmin Edicisinin Karşılaştırılması

$r-k$ sınıfı tahmin edicide $r=p$ yazılarak ORR tahmin edicinin elde edildiğini biliyoruz. Bu nedenle, ORR tahmin edicisinin OLS tahmin edicisi ile

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

karşılaştırılması, $r - k$ sınıfı tahmin edicinin OLS tahmincisi ile karşılaştırılmasında $r = p$ yazılmasıyla elde edilebilir. $r = p$ için, $r - k$ sınıfı tahmin edicinin Mahalanobis kayıp fonksiyonu, ORR tahmin edicisi'nin Mahalanobis kayıp fonksiyonu olup,

$$\begin{aligned} L_M(\hat{\beta}(k)) &= \sigma^{-2} y' X T \Lambda^{-1} T' X' y - \sigma^{-2} y' X T \Lambda^{-1} S(k) T' \beta \\ &\quad - \sigma^{-2} \beta' T S(k) \Lambda^{-1} T' X' y + \sigma^{-2} \beta' T S(k) \Lambda^{-1} S(k) T' \beta \quad (4.57.) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada $S(k) = \Lambda + kI$ 'dır.

Teorem 4.34. ORR tahmin edicisi, ortalama kayıp kriterine göre, Mahalanobis kayıp fonksiyonu altındaki OLS tahmin edicisinden hiçbir zaman üstün değildir.

Peddada ve arkadaşları (1989), ortalama kayıp kriteri ile Mahalanobis kayıp fonksiyonu altında GRR tahmin edicisinin kabul edilmemesi için gerek ve yeter koşulu vermiştir. Özellikle, GRR tahmin edicisinin Peddada ve arkadaşları (1989) tarafından verilen OLS tahmin edicisiyle karşılaştırılmasında $K = kI_p$ kullandığımızda, ORR tahmin edicisi ile OLS tahmin edicisinin karşılaştırmasını elde ederiz. Bu şekilde, $K = kI_p$ aldığımızda, ORR tahmin edicisinin OLS tahmin edicisiyle karşılaştırılması için sonucun Peddada ve arkadaşları (1989) tarafından verilen sonuç ile aynı olduğu görülmektedir.

4.8.1.3. PCR Tahmin Edicisi ile OLS Tahmin Edicisinin Karşılaştırılması

PCR tahmin edicisinin OLS tahmin edicisi ile karşılaştırılması, $r - k$ sınıfı tahmin edicinin OLS tahmin edici ile karşılaştırılmasında $k = 0$ yazılarak elde edilebilir. Çünkü, $r - k$ sınıfı tahmin edicide $k = 0$ yazılarak PCR tahmin edicisi elde edilir. $k = 0$ için, $r - k$ sınıfı tahmin edicisinin Mahalanobis kayıp fonksiyonu, PCR tahmin edicisi'nin Mahalanobis kayıp fonksiyonuna dönüşür:

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$L_M(\hat{\beta}_{PCR}) = \sigma^{-2} y' X T_r \Lambda_r^{-1} T_r' X' y - \sigma^{-2} y' X T_r T_r' \beta - \sigma^{-2} \beta' T_r T_r' X' y. \quad (4.58.)$$

Teorem 4.35. PCR tahmin edicisi, ortalama kayıp kriterine göre, Mahalanobis kayıp fonksiyonu altındaki OLS tahmin edicisinden daima üstündür.

4.8.1.4. $r-k$ Sınıfı Tahmin Edicinin PCR Tahmin Edicisiyle Karşılaştırılması

Burada, $r-k$ sınıfı tahmin edicisinin Mahalanobis kayıp fonksiyonu altındaki PCR tahmin edicisiyle karşılaştırıldığı teorem verilmiştir.

Teorem 4.36. $r-k$ sınıfı tahmin edicisi, ortalama kayıp kriterine göre, Mahalanobis kayıp fonksiyonu altında PCR tahmin edicisinden hiçbir zaman üstün değildir.

4.8.1.5. $r-k$ Sınıfı Tahmin Edicinin ORR Tahmin Edicisiyle Karşılaştırılması

Burada, $r-k$ sınıfı tahmin edicisi Mahalanobis kayıp fonksiyonu altında ORR tahmin edicisiyle karşılaştırılmıştır.

Teorem 4.37. ORR tahmin edicisi, ortalama kayıp kriterine göre, Mahalanobis kayıp fonksiyonu altındaki $r-k$ sınıfı tahmin ediciden üstün olamaz.

4.8.1.6. PCR Tahmin Edicisinin ORR Tahmin Edicisi ile Karşılaştırılması

Burada, Mahalanobis kayıp fonksiyonu altında PCR tahmin edicisi ORR tahmin edicisiyle karşılaştırılmıştır.

Teorem 4.38. ORR tahmin edicisi, ortalama kayıp kriterine göre, Mahalanobis kayıp fonksiyonu altında PCR tahmin edicisinden üstün olamaz.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

4.8.2. Koşullar için Hipotez Testleri

Teorem 4.32. ve 4.33.'de elde edilen gerek ve yeter koşullar, bilinmeyen β ve σ^2 parametrelerine bağlıdır. Bir araştırmacının bu koşullara inanması için bazı sebepleri olması gerekir. Burada amaç, belirli bir durumda ilgili koşulların yerine getirilip getirilmediğine karar vermek için bir test önermektir.

$q \leq p$ ranklı $q \times p$ boyutlu bir H verilsin. y 'nin $N(X\beta, \sigma^2 I)$ varsayımı altında, (1.1.) ile verilen genel lineer model için,

$$H_0 : H\beta = t \quad (4.59.)$$

şeklinde bir test türetilmiştir. (4.59.) ile verilen test için F test istatistiği,

$$F = \frac{(H\hat{\beta} - t)' \left[H(X'X)^{-1} H' \right]^{-1} (H\hat{\beta} - t) / q}{y' \left[I - X(X'X)^{-1} X' \right] y / n - p} \quad (4.60.)$$

şeklinde verilmiştir. $H_0 : H\beta = t$ yanlış ise böylece F , $F(q, n - p, \lambda)$ dağılımı gösterir. Burada, merkezi olmama parametresi

$$\lambda = (H\beta - t)' \left[H(X'X)^{-1} H' \right]^{-1} (H\beta - t) / 2\sigma^2 \text{ 'dir. } H_0 : H\beta = t \text{ doğru ise}$$

böylece, $\lambda = 0$ ve F , $F(q, n - p)$ dağılımı gösterir, (Rencher, 2000, p. 190).

Teorem 4.32 üzerinde bir hipotez testi kurulabilir. OLS tahmin edicisinin $r - k$ sınıfı tahmin ediciden üstün olması için gerek ve yeter koşul $\frac{k^2 \sigma^{-2} \beta' T C T' \beta}{p - r} \geq 1$ olmasıdır. Bu nedenle, Mahalanobis kayıp fonksiyonuna

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

göre $\hat{\beta}$ 'nın $\hat{\beta}(r, k)$ 'dan üstün olup olmadığı test edilmek istenirse

$$H_1: \frac{k^2 \sigma^{-2} \beta' T C T' \beta}{p-r} < 1 \text{ hipotezine karşı,}$$

$$H_0: \frac{k^2 \sigma^{-2} \beta' T C T' \beta}{p-r} \geq 1 \quad (4.61.)$$

şeklinde verilen hipotez testi yapılır.

$$\frac{k \sigma^{-1} C^{1/2} T' \hat{\beta}}{\sqrt{p-r}} \square N \left(\frac{k \sigma^{-1} C^{1/2} T' \beta}{\sqrt{p-r}}, \frac{k^2}{p-r} C \Lambda^{-1} \right) \text{ normallik varsayımı altında ,}$$

$$\sigma^{-2} \hat{\beta}' T \Lambda T' \hat{\beta} \square \chi^2 \left(p, \frac{\beta' T \Lambda T' \beta}{2 \sigma^2} \right) \text{ şeklindedir ve burada } \lambda = \frac{\beta' T \Lambda T' \beta}{2 \sigma^2} \text{ 'dir.}$$

Rezidü kareler toplamı $y' [I - X (X' X)^{-1} X'] y = e' e$ şeklinde ifade edilebilir.

Burada e , OLS rezidünün $n \times 1$ boyutlu bir vektörüdür. Böylece test istatistiği aşağıdaki gibi gösterilir:

$$F_1 = \left(\frac{n-p}{p} \right) \frac{\hat{\beta}' T \Lambda T' \hat{\beta}}{e' e} \square F \left(p, n-p, \frac{\beta' T \Lambda T' \beta}{2 \sigma^2} \right).$$

Açıkçası, merkezi olmama parametresi, H_0 'ın altındaki değerden daha küçük değil ve H_1 altındaki değerden daha küçüktür.

Bu hipotez testine ek olarak, $\beta' T C T' \beta > 0$ koşulu için Teorem 4.33. üzerinde bir hipotez testi de yapılabilir. Çünkü C bir n.n.d. matristir, $\beta' T C T' \beta \geq 0$. Bu nedenle $\beta' T C T' \beta = 0$ olup olmadığı test edilmelidir. Eğer,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$\beta'TCT'\beta = \beta'T_r\Lambda_r^{-1}T_r'\beta$ eşitliği kullanılırsa, $\beta'TCT'\beta > 0$ ile verilen ifade $T_r\beta \neq 0$ 'a eşit olur. Böylece, $H_1 : T_r'\beta \neq 0$ a karşı,

$$H_0 : T_r'\beta = 0 \quad (4.62.)$$

şeklinde verilen hipotez testi yapılır. Normallik varsayımı altında $T_r'\hat{\beta}(r, k)$, $S(r, k)^{-1}T_r'XX\beta$ beklenen değer ve $\sigma^2S(r, k)^{-1}\Lambda_rS(r, k)^{-1}$ kovaryans matrisi ile normal dağılıma sahiptir. Böylece, (4.62.) için test istatistikleri,

$$F_2 = \left(\frac{n-p}{r} \right) \frac{\hat{\beta}(r, k)'T_rS(r, k)\Lambda_r^{-1}S(r, k)T_r'\hat{\beta}(r, k)}{\varepsilon'\varepsilon}$$

eşitliği tarafından verilir. H_0 altında $F_2 \sim F(r, n-p)$ olduğu açıktır.

4.9. Uyarlanmış ve Kısıtlı $r-k$ Sınıfı Tahmin Edici

Bu bölümde, Üstündağ (2011) tarafından verilen yeni tahmin ediciler ve bunların MMSE kriterine göre $r-k$ sınıfı tahmin edici ile karşılaştırılmaları incelenecektir. Kısıtlı $r-k$ sınıfı tahmin edicinin özel durumu olarak kısıtlı PCR (RPCR) tahmin edicisi elde edilir.

4.9.1. Yeni Tahmin Ediciler

Bu kısımda ön bilgiye dayanarak uyarlanmış $r-k$ sınıfı tahmin edici ve kısıtlı $r-k$ sınıfı tahmin edici ele alınacaktır. β ile ilgili ön bilgilerin, Swindell'deki (1976) gibi stokastik olmayan b vektörü formunda verildiğini varsayalım. Aşağıda verilen indirgenmiş modeli göz önüne alalım:

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$y = XT_r T_r' \beta + \varepsilon = Z_r \alpha_r + \varepsilon . \quad (4.63.)$$

Model (3.13.)’de Temel bileşenlere karşılık gelen Z_{p-r} ihmal edilir. Böylece, minimizasyon problemi,

$$S(\alpha, k) = (y - Z_r \alpha_r)' (y - Z_r \alpha_r) + k \left[(\alpha_r - T_r' b)' (\alpha_r - T_r' b) - c \right] \quad (4.64.)$$

şeklinde verilir. Burada, k Lagrange çarpanı ve c bir sabittir. (4.64.)’ün α_r ‘ye göre türevinin alınması ve çözülmesiyle

$$\hat{\alpha}_r(k, b) = (Z_r' Z_r + k I_r)^{-1} (Z_r' y + T_r' k b) \quad k \geq 0 \quad (4.65.)$$

elde edilir.

Gerçek parametre uzayına geri dönüşüm yaptıktan sonra, uyarlanmış $r - k$ sınıflı tahmincisi,

$$\hat{\beta}_r(k, b) = T_r (T_r' X X T_r + k I_r)^{-1} T_r' (X' y + k b) , \quad k \geq 0 \quad (4.66.)$$

şeklinde verilir.

(3.1.) ile verilen kısıtı $HTT' \beta = h$ olarak kabul edelim. PCR düşüncesi altında $T_{p-r}' \beta = 0$ olduğundan, indirgenmiş model için (3.1.),

$$HT_r T_r' \beta = h \quad (4.67.)$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

şeklinde olur. Lineer kısıtların doğru olduğu varsayılırsa, (4.67.) 'de verilen ön bilgileri kullanabiliriz. Kısıtları yerine getiren β_0 , $\beta_0 = T_r T_r' H' \left(H T_r T_r' H' \right)^{-1} h$ şeklinde verilir. Böylece yeni tahmin edici aşağıdaki gibi verilir:

$$\hat{\beta}_r(k, \beta_0) = T_r S(r, k)^{-1} T_r' \left(X'y + k T_r T_r' H' \left(H T_r T_r' H' \right)^{-1} h \right) , \quad k \geq 0 . \quad (4.68.)$$

Burada, $S(r, k) = T_r' X X T_r + k I_r$ 'dir . Bu tahmin edicinin $H T_r T_r' \beta = h$ 'a göre kısıtlı bir tahmin edici olmadığı unutulmamalıdır. Eğer (4.64.) ile verilen lineer kısıta $\lambda (H T_r \alpha_r - h)$ eklenirse, aşağıdaki minimizasyon problemi elde edilir:

$$S(\alpha, k, \lambda) = (y - Z_r \alpha_r)' (y - Z_r \alpha_r) + k \left[(\alpha_r - T_r' \beta_0)' (\alpha_r - T_r' \beta_0) - c \right] + \lambda' (H T_r \alpha_r - h) . \quad (4.69.)$$

Burada k Lagrange çarpanı, λ Lagrange çarpanı'nın vektörü ve c bir sabittir. (4.69.)'un α_r , k ve λ 'ya göre türevleri alındığında, sırasıyla aşağıdaki normal denklemler elde edilir:

$$-Z_r' (y - Z_r \alpha_r) + k (\alpha_r - T_r' \beta_0) + T_r' H' \lambda = 0 , \quad (4.70.)$$

$$(\alpha_r - T_r' \beta_0)' (\alpha_r - T_r' \beta_0) - c = 0 , \quad (4.71.)$$

$$H T_r \alpha_r - h = 0 . \quad (4.72.)$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

(4.70.)’den,

$$\alpha_r = \left(Z_r' Z_r + k I_r \right)^{-1} \left(Z_r' y + k T_r' \beta_0 \right) - \left(Z_r' Z_r + k I_r \right)^{-1} T_r' H' \lambda \quad (4.73.)$$

elde edilir.

(4.72.) kullanılarak ve HT_r ile (4.73.)’ü soldan çarparak,

$$\left[HT_r \left(Z_r' Z_r + k I_r \right)^{-1} T_r' H' \right] \lambda = -h + HT_r \left(Z_r' Z_r + k I_r \right)^{-1} \left(Z_r' y + k T_r' \beta_0 \right) \quad (4.74.)$$

elde edilir. Burada $HT_r \left(Z_r' Z_r + k I_r \right)^{-1} T_r' H'$ $m \times m$ boyutlu bir matristir. Şimdi,

$HT_r \left(Z_r' Z_r + k I_r \right)^{-1} T_r' H'$ ‘nün rankı araştırılmalıdır.

$rank \left(HT_r \left(Z_r' Z_r + k I_r \right)^{-1} T_r' H' \right) = \min(r, m)$ olduğu aşıkardır. Eğer $r < m$ ise

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} = & \left(HT_r \left(Z_r' Z_r + k I_r \right)^{-1} T_r' H' \right)^{-} \left(-h + HT_r \left(Z_r' Z_r + k I_r \right)^{-1} Z_r' y \right) \\ & + \left(HT_r \left(Z_r' Z_r + k I_r \right)^{-1} T_r' H' \right)^{-} HT_r \left(Z_r' Z_r + k I_r \right)^{-1} k T_r' \beta_0 \quad (4.75.) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada $\left(HT_r \left(Z_r' Z_r + k I_r \right)^{-1} T_r' H' \right)^{-}$,

$HT_r \left(Z_r' Z_r + k I_r \right)^{-1} T_r' H'$ için herhangi bir genelleştirilmiş inversidir. Eğer

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$m \leq r$ ise $HT_r \left(Z_r' Z_r + kI_r \right)^{-1} T_r' H'$, tekil olmayan bir matristir. Bundan sonra, H matrisinin rankının $m \leq r$ koşulu eklenir. Böylece,

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} = & \left(HT_r \left(Z_r' Z_r + kI_r \right)^{-1} T_r' H' \right)^{-1} \left(-h + HT_r \left(Z_r' Z_r + kI_r \right)^{-1} Z_r' y \right) \\ & + \left(HT_r \left(Z_r' Z_r + kI_r \right)^{-1} T_r' H' \right)^{-1} HT_r \left(Z_r' Z_r + kI_r \right)^{-1} kT_r' \beta_0 \quad (4.76.) \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

(4.73.)'deki $\hat{\lambda}$ yerine konularak, çözüm

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_r(k, \beta_0)_{rest} = & \left(Z_r' Z_r + kI_r \right)^{-1} \left(Z_r' y + kT_r' \beta_0 \right) \\ & - \left(Z_r' Z_r + kI_r \right)^{-1} T_r' H' \left(HT_r \left(Z_r' Z_r + kI_r \right)^{-1} T_r' H' \right)^{-1} \\ & \times \left(HT_r \left(Z_r' Z_r + kI_r \right)^{-1} \left(Z_r' y + kT_r' \beta_0 \right) - h \right) \quad (4.77.) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Gerçek parametre uzayına geri dönüşüm yapıldıktan sonra,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_r(k, \beta_0)_{rest} = & \hat{\beta}_r(k, \beta_0) - T_r S(r, k)^{-1} T_r' H' \left(HT_r S(r, k)^{-1} T_r' H' \right)^{-1} \\ & \left(H \hat{\beta}_r(k, \beta_0) - h \right) \quad k \geq 0. \quad (4.78.) \end{aligned}$$

şeklinde alınır. Burada $\hat{\beta}_r(k, \beta_0)$, (4.68.)'de verilmiştir. Bu tahmin edicinin

$HT_r T_r' \beta = h$ ye göre kısıtlı olduğu kolayca görülebilir. Bu tahmin edici $r - k$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

sınıfı tahmin edici olarak adlandırılmıştır. $k=0$ ve $r=p$ için ROLS tahmin edicisi alınır. Ayrıca, $r=p$ için Gross (2003b) tarafından verilen RRR tahmin edicisi elde edilir.

$$M_{r,k} = T_r S(r,k)^{-1} T_r' - T_r S(r,k)^{-1} H' \left(H T_r S(r,k)^{-1} T_r' H' \right)^{-1} \times H T_r S(r,k)^{-1} T_r' \quad (4.79.)$$

yazılsın. Böylece kısıtlı $r-k$ sınıfı tahmin edici,

$$\hat{\beta}_r(k, \beta_0)_{rest} = M_{r,k} X'y + k M_{r,k} \beta_0 + T_r S(r,k)^{-1} T_r' H' \times \left(H T_r S(r,k)^{-1} T_r' H' \right)^{-1} h \quad (4.80.)$$

şeklinde verilir.

Şimdi tahmin edicilerin karşılaştırılmalarını ele alalım.

Teorem 4.39. Uyarlanmış $r-k$ sınıfı tahmin edicinin $r-k$ sınıfı tahmin ediciden üstün olması için gerek ve yeter koşul $\beta\beta' + b\beta' - bb' \geq 0$ olmasıdır.

Teorem 4.40. Kısıt doğru olduğunda, kısıtlı $r-k$ sınıfı tahmin edicisinin MMSE kriterine göre $r-k$ sınıfı tahmin ediciden üstün olması için gerek ve yeter koşul

$B - M_{r,k} T_r S(r,k) T_r' B T_r S(r,k) T_r' M_{r,k}$ 'nın n.n.d. olmasıdır. Burada

$B = \sigma^2 T_r S(r,k)^{-1} \Lambda_r S(r,k)^{-1} T_r' + k^2 T_r S(r,k)^{-1} T_r' \beta\beta' T_r S(r,k)^{-1} T_r'$ 'dir.

Teorem 4.41. Kısıt doğru olduğunda, RPCR tahmin edicisi, MMSE kriterine göre PCR tahmin edicisinden üstündür.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

4.10. Lineer Regresyon Modelinde Hataların İlişkili Olması Durumunda $r - k$ Sınıfı Tahmin Edici

Aşağıdaki bilgiler Üstündağ Şiray ve ark. (2014) makalesinden derlenerek verilmiştir.

Hatalardaki otokorelasyon ve değişkenler arasındaki çoklu iç ilişki regresyon analizinde ciddi bir problemdir. Burada amaç, çoklu iç ilişki ve otokorelasyon problemlerini eş zamanlı olarak incelemek ve $r - k$ sınıfı tahmin edicisini, genelleştirilmiş OLS (GLS), PCR ve Ridge regresyon tahmin edicileriyle, lineer regresyon modelindeki SMSE ve MMSE kriterlerine göre karşılaştırmaktır.

$E(\varepsilon) = 0$ ve $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 V$ olan, (1.1.) ile verilen genel lineer regresyon modelini ele alalım. Burada V $n \times n$ boyutlu bir p.d. matristir. Böylece $P'P = V^{-1}$ olacak şekilde $n \times n$ boyutlu tekil olmayan bir P matrisi vardır. (1.1.) ile verilen genel lineer model, soldan P ile çarpılırsa,

$$Py = PX\beta + P\varepsilon \quad (4.81.)$$

şeklinde yazılır. $y_* = Py$, $X_* = PX$ ve $\varepsilon_* = P\varepsilon$ yazılsın. Böylece (4.81.),

$$y_* = X_*\beta + \varepsilon_* \quad (4.82.)$$

şeklinde verilebilir ve buna dönüştürülmüş model denir (Trenkler (1984)).

$\varepsilon_* \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ olur. $X_*'X_* = X'V^{-1}X$ matrisi hala çoklu iç ilişki problemine sahip olabileceğinden bu durumda alternatif tahmin yöntemleri düşünülebilir. Model (4.82.)'de GLS tahmin edici,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$\tilde{\beta} = \left(X_*' X_* \right)^{-1} X_*' y_* = \left(X' V^{-1} X \right)^{-1} X' V^{-1} y \quad (4.83.)$$

şeklinde verilir. Çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak için, (4.82.)’deki dönüştürülmüş modelde yanlı bir tahmin edici tanımlanır. Dönüştürülmüş modelde $r - k$ sınıfı tahmin edici aşağıdakişekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(r, k) &= T_r (T_r' X_*' X_* T_r + k I_r)^{-1} T_r' X_*' y_*, \quad k \geq 0 \\ &= T_r (T_r' X' V^{-1} X T_r + k I_r)^{-1} T_r' X' V^{-1} y, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (4.84.)$$

4.10.1. MSE Karşılaştırmaları

4.10.1.1. $r - k$ Sınıfı Tahmin Edicinin GLS Tahmin Edici ile Karşılaştırılması

Burada, $r - k$ sınıfı tahmin edici ile GLS tahmin edici model (4.82.) altında karşılaştırılmıştır. Sırasıyla Teorem 4.42 ve Teorem 4.44, MMSE ve SMSE kriterine göre, $r - k$ sınıfı tahmin edicinin GLS tahmin ediciden daha üstün olması için gerek ve yeter koşulu verir. Yanlılık parametresinin seçimi ise Teorem 4.43’de verilmiştir.

Teorem 4.42. Model (4.82.) altında MMSE kriterine göre, $r - k$ sınıfı tahmin edicinin GLS tahmin edicisinden daha üstün olması için gerek ve yeter koşul,

$$\beta' \left[T_r \left(\frac{2}{k} I_r + \Delta_r^{-1} \right)^{-1} T_r' + T_{p-r} \Delta_{p-r} T_{p-r}' \right] \beta < \sigma^2$$

olmasıdır.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

Teorem 4.43. Eğer $k < \frac{2\sigma^2}{\gamma_1}$ ise, model (4.82.) altında MMSE kriterine göre

$r - k$ sınıfı tahmin edici, GLS tahmin edicisinden üstündür. Burada γ_1 , $\beta\beta'$ 'nün sıfır olmayan bir özdeğeridir.

Teorem 4.44. a. Eğer $i = 1, 2, \dots, r$ için $\sum_{i=r+1}^p \left(\frac{\sigma^2}{\lambda_i} - \alpha_i^2 \right) \geq 0$ ve $\frac{\sigma^2}{\lambda_i} - \alpha_i^2 < 0$ ise,

böylece $0 < k < \infty$ için model (4.82.) altında SMSE kriterine göre, $r - k$ sınıfı tahmin edici GLS tahmin edicisinden üstündür. Burada α_i , $T'\beta$ 'nin $(i, 1)$ 'inci elemanlarıdır.

b. Bazı $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ için eğer, $\sum_{i=r+1}^p \left(\frac{\sigma^2}{\lambda_i} - \alpha_i^2 \right) \geq 0$ ve $\frac{\sigma^2}{\lambda_i} - \alpha_i^2 < 0$ ise, böylece

$0 < k < \frac{2\sigma^2}{\max \left(\alpha_i^2 - \frac{\sigma^2}{\lambda_i} \right)}$ için model (4.82.) altında SMSE kriterine göre, $r - k$

sınıfı tahmin edici GLS tahmin edicisinden üstündür. Burada α_i , $T'\beta$ ve $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ 'nin $(i, 1)$ 'inci elemanlarıdır.

4.10.1.2. ORR Tahmin Edicinin GLS Tahmin Edici ile Karşılaştırılması

$r = p$ 'yi $r - k$ sınıfı tahmin edicisinde yerine koyarak, ORR tahmin edicisinin elde edildiği bilinmektedir. Bu nedenle, $r = p$ 'yi Teorem 4.42.'de yerine koyarak, daha önce Trenkler (1984) tarafından yapılan, ORR tahmin edicisi ile GLS tahmin edicisi karşılaştırılması elde edilir. ORR tahmin edicisinin GLS tahmin edicisinden üstün olması için gerek ve yeter koşul,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$\beta' \left(\frac{2}{k} I_p + (X'V^{-1}X)^{-1} \right)^{-1} \beta < \sigma^2 \quad (4.85.)$$

şeklinde verilir. ORR tahmin edicisini kullanmaya karar veren bir araştırmacı için uygun k değerinin seçimi oldukça önemlidir. Uygun k değerini bulmak için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.45. Eğer $k < \frac{2\sigma^2}{\gamma_1}$ ise, model (4.82.) altında MMSE kriterine göre ORR

tahmin edicisi, GLS tahmin edicisinden üstündür. Burada γ_1 , $\beta\beta'$ 'nün sıfır olmayan bir özdeğeridir.

4.10.1.3. $r-k$ Sınıfı Tahmin Edicinin PCR Tahmin Edici ile Karşılaştırılması

Burada model (4.82.) altında MMSE ve SMSE kriterlerine göre $r-k$ sınıfı tahmin edicinin PCR tahmin edicisine olan üstünlüğü için sırasıyla Teorem 4.46 ve 4.47 aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.46. Model (4.82.) altında MMSE kriterine göre $r-k$ sınıfı tahmin edicinin PCR tahmin edicisinden daha üstün olması için gerek ve yeter koşul $T_r' \beta = 0$ olmasıdır.

Teorem 4.47. a. Eğer $i = 1, 2, \dots, r$ için $\frac{\sigma^2}{\lambda_i} - \alpha_i^2 \geq 0$ ise, böylece $0 < k < \infty$ için

model (4.82.) altında SMSE kriterine göre, $r-k$ sınıfı tahmin edici PCR tahmin edicisinden üstündür. Burada α_i , $T' \beta$ 'nın $(i,1)$ 'inci elemanlarıdır.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

b. Bazı $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ için eğer, $\frac{\sigma^2}{\lambda_i} - \alpha_i^2 < 0$ ise, böylece

$$0 < k < \frac{2\sigma^2}{\max\left(\alpha_i^2 - \frac{\sigma^2}{\lambda_i}\right)} \text{ için model (4.82.) altında SMSE kriterine göre, } r-k$$

sınıfı tahmin edici PCR tahmin edicisinden üstündür. Burada α_i , $T'\beta$ ve $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ 'nin $(i, 1)$ 'inci elemanlarıdır.

4.10.1.4. $r-k$ Sınıfı Tahmin Edicinin ORR Tahmin Edici ile Karşılaştırılması

Teorem 4.48. Model (4.82.) altında MMSE kriterine göre $r-k$ sınıfı tahmin edicinin ORR tahmin edicisinden daha üstün olması için gerek ve yeter koşul $T_{p-r}'\beta = 0$ olmasıdır.

Teorem 4.49. Her $i = r+1, r+2, \dots, p$ için eğer, $\alpha_i^2 \lambda_i < \sigma^2$ ise $0 < k < \min\left\{\frac{\sigma^2 - \alpha_i^2 \lambda_i}{2\alpha_i^2}\right\}$ için model (4.82.) altında SMSE kriterine göre, $r-k$

sınıfı tahmin edici ORR tahmin edicisinden daha üstündür. Burada α_i , $T'\beta$ ve $i \in \{r+1, r+2, \dots, p\}$ 'nin $(i, 1)$ 'inci elemanlarıdır.

4.10.2. Karşılaştırmalar için Hipotez Testleri

Teorem 4.42, 4.46 ve 4.48'den elde edilen gerek ve yeter koşullar, β ve σ^2 bilinmeyen parametrelere bağlıdır. Burada, uygun koşulların belirli bir durumda yerine getirilip getirilmediğine karar vermek için bir test önerilmektedir.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

Dönüştürülmüş modelde, yani (4.82.)’de $\varepsilon_* \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, ε_* ‘ın $N(0, \sigma^2 I_n)$ dağılım varsayımı altında, aşağıda verilen genel lineer model için test türetilebilir:

$$H_0 : H_i \beta = 0, \quad i = 1, 2, 3 . \quad (4.86.)$$

$q \times p$ boyutlu ve rankı q olan bir H_i verilsin. Daha sonra, (4.86.)’da verilen test için genelleştirilmiş olasılık oranı test istatistiği,

$$W = \frac{\frac{1}{q} (H \hat{\beta})' [Cov(H \hat{\beta})]^{-1} (H \hat{\beta})}{\hat{\sigma}^2 / \sigma^2} \quad (4.87.)$$

şeklinde verilir. q ve $n - p$ serbestlik derecelerine sahip, merkezi olmayan bir F olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip oluruz. Merkezi olmama parametresi

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} (H \beta)' [Cov(H \hat{\beta})]^{-1} (H \hat{\beta})$$
 tarafından verilir. H_0 altında $W \sim F(q, n - p)$

dağılımına sahiptir (Graybill 1976, p. 190).

Teorem 4.46 üzerine hipotez testi kurulabilir ve

$$H_0 : T_r' \beta = 0 \quad (4.88.)$$

şeklinde verilen hipotez testi, (4.86.)’nın özel bir halidir. Normallik varsayımı

altında $T_r' \hat{\beta}(r, k)$, $(\Delta_r + kI_r)^{-1} T_r' X' V^{-1} X \beta$ beklenen değeri ve

$\sigma^2 (\Delta_r + kI_r)^{-1} \Delta_r (\Delta_r + kI_r)^{-1}$ kovaryans matrisi ile normal dağılıma sahiptir.

Böylece (4.88.) için test istatistikleri,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$F_1 = \left(\frac{n-p}{r} \right) \frac{\hat{\beta}(r, k)' T_r (\Delta_r + kI_r) \Delta_r^{-1} (\Delta_r + kI_r) T_r' \hat{\beta}(r, k)}{e'e}$$

şeklinde verilmektedir. Burada $e'e = y'(I_n - XX')y = (n-p)\hat{\sigma}^2$ olur. H_0 altında $F_1 \sim F(r, n-p)$ olduğu açıktır.

Teorem 4.48 üzerine hipotez testi kurulabilir ve

$$H_0 : T_{p-r}' \beta = 0 \quad (4.89.)$$

şeklinde verilen hipotez testi, (4.86.)'nin özel bir halidir. Bu durumda β yani, $\hat{\beta}(p-r, k) = T_{p-r} (\Delta_{p-r} + kI_{p-r})^{-1} T_{p-r}' X' V^{-1} y$, $k \geq 0$ 'ın $\{p-r\} - k$ sınıfı tahmin edicisi dikkate alınır. $T_{p-r}' \hat{\beta}(p-r, k)$, $(\Delta_{p-r} + kI_{p-r})^{-1} T_{p-r}' X' V^{-1} X \beta$ beklenen değeri ve $\sigma^2 (\Delta_{p-r} + kI_{p-r})^{-1} \Delta_{p-r} (\Delta_{p-r} + kI_{p-r})^{-1}$ kovaryans matrisi ile normal dağılıma sahiptir. Böylece (4.89.) için test istatistikleri,

$$F_2 = \left(\frac{n-p}{p-r} \right) \frac{\hat{\beta}(p-r, k)' T_{p-r} (\Delta_{p-r} + kI_{p-r}) \Delta_{p-r}^{-1} (\Delta_{p-r} + kI_{p-r}) T_{p-r}' \hat{\beta}(p-r, k)}{e'e}$$

şeklinde verilir. Burada $e'e = y'(I_n - XX')y = (n-p)\hat{\sigma}^2$ olur. H_0 altında $F_2 \sim F(p-r, n-p)$ olduğu açıktır.

Ayrıca Teorem 4.42. üzerinde de bir hipotez testi yapılabilir. Teorem 4.42'nin koşulu, $\beta' T \Delta^*(k) T' \beta / \sigma^2 < 1$ şeklinde yazılabilir. Burada

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$\Delta^*(k) = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{k} I_r + \Delta_r^1 \right)^{-1} & 0 \\ 0 & \Delta_{p-r} \end{pmatrix} \quad \text{'dir. Eğer } \beta' T \Delta T' \beta / \sigma^2 < 1 \text{ ise koşullar}$$

sağlanır. Bu nedenle eğer, $\hat{\beta}(r, k)$ 'nın $\hat{\beta}$ 'dan üstün olup olmadığı test edilirse,

$H_1 : \beta' T \Delta T' \beta / \sigma^2 > 1$ alternatif hipotezine karşı,

$$H_0 : \beta' T \Delta T' \beta / \sigma^2 < 1 \quad (4.90.)$$

şeklinde verilen hipotez testi yapılabilir. Normallik varsayımı altında, $\Delta^{1/2} T' \hat{\beta} \sim N(\Delta^{1/2} T' \beta, \sigma^2 I_p)$. Böylece test istatistiği,

$$F_3 = \left(\frac{n-p}{p} \right) \frac{\hat{\beta}' T \Delta T' \hat{\beta}}{e' e}$$

şeklinde verilir. Burada $e' e = y' (I_n - X X') y = (n-p) \hat{\sigma}^2$ olur. H_0 altında $F_3 \sim F(p, n-p)$ olduğu açıktır. Fakat merkezi olmama parametresi, H_0 altında birden büyük değildir ve H_1 altında birden büyüktür.

4.11. Çoklu İç İlişki Probleminin Giderilmesi için Uyarlanmış İki Parametrelili Tahmin Edici

Bu bölümün ilk amacı, değişken sayısının gözlem sayısından fazla olması durumunda, bazı yazarlar tarafından tanımlanan yeni tahmin yöntemlerini incelemektir. İkinci amaç, Temel Bileşenler Regresyon ile Ridge, Liu ve İki Parametrelili tahmin edici gibi bazı yanlı regresyon tahmin edicilerin kombinasyonlarının performansını incelemektir. Gerçek-yaşam uygulaması ve

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

simülasyon ile önerilen tahmin edicilerin parametrelere bağlı olarak performanslarını incelemektir.

(1.1.)’de verilen standart çoklu lineer regresyon modeli göz önüne alınsın. Daha önceki bölümlerde OLS tahmin edici (1.3.), Ridge Regresyon tahmin edici (3.27.), Liu tahmin edici (3.45.) ve TP tahmin edici , $\hat{\beta}(k, d)$, (4.18.)’de verilmiştir.

$\hat{\beta}(k, d)$ OLS, Ridge, Liu ve Daraltma tahmin edicisini kapsayan genel bir tahmin edicidir. Bu tahmin edici bazı koşullar altında OLS’den daha iyidir (Özkale ve Kaçıranlar (2007)).

Kimya ve Ekonometri gibi uygulamalı alanlarda karşılaşılan önemli bir sorun, değişken sayısının gözlem sayısından daha büyük olmasıdır ($n < p$). Bu problemin çözülmesi için Kısmi En Küçük Kareler Regresyon (PLSR) ve Temel Bileşenler Regresyon yöntemleri kullanılır. PCR yönteminin temel amacı, açıklayıcı değişkenlerin sayısını azaltmaktır. PLSR ve PCR ayrıca çoklu iç ilişki problemini gidermek için de kullanılır.

PCR ve PLSR kesikli daraltma yöntemleridir. Ridge, Liu ve TP tahmin edicileri sürekli daraltma yöntemleridir. Çünkü, k ve d parametreleri sürekli değerler alır.

Değişken sayısının gözlem sayısından fazla olması ve çoklu iç ilişki problemi ile karşılaşılmaması sonucunda, bu problemlerin etkilerini azaltmak için, Vigneau ve arkadaşları (1997), PCR ve Ridge Regresyon Daraltma yöntemlerini birleştiren yeni bir alternatif yöntem önerdiler.

Lukman ve arkadaşları (2019), Ridge Regresyon tahmin edicisini değiştirerek Uyarlanmış Ridge-Tipi tahmin ediciyi önerdiler. Ayrıca bu tahmin edicinin diğer tahmin edicilerle performansını araştırmak için bir Monte Carlo simülasyon çalışması ve gerçek-yaşam uygulaması da verdiler.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

4.11.1. Model ve Bilinen Tahmin Ediciler

Model (1.1.)'in kanonik formu (3.13.)'de verilmiştir. Ayrıca bu model için kullandığımız değişkenlerin tanımları Temel Bileşenler'in anlatıldığı bölümde verilmiştir.

β 'nın PCR tahmin edicisi, $z_i = Xt_i, i = 1, 2, \dots, p$ değişkeninin bir veya daha fazlasının atılması ile ortaya çıkan modele OLS yönteminin uygulanması ve orjinal parametre uzayına dönüşüm yapılmasıyla elde edilir. $Z_{p-r} = (z_{r+1}, \dots, z_p)$ 'nin sıfıra yakın özdeğerlere karşılık gelen PCs içerdiğini varsayalım, bunun sonucunda tersleri çok büyük olabilir, bu da istenmeyen bazı sonuçlara yol açar. Z_{p-r} indirgendikten sonra, aşağıdaki indirgenmiş modele sahip oluruz:

$$y = Z_r \alpha_r + \varepsilon. \quad (4.91.)$$

OLS yöntemini model (4.91.)'e uygulayarak, α 'nın PCR tahmin edicisini şu şekilde elde ederiz:

$$\hat{\alpha}(r) = (Z_r' Z_r)^{-1} Z_r' y = (T_r' X' X T_r)^{-1} T_r' X' y = \Lambda_r^{-1} Z_r' y \quad (4.92.)$$

Baye ve Parker (1984), Ridge Regresyon tahmin edicisini ve PCR tahmin edicisini tek bir tahmin edicide birleştirerek $r - k$ sınıfı tahmin ediciyi önerdi ve yeni tahmin edicinin MSE kriterine göre, PCR tahmin edicisinden daha iyi olduğunu gösterdiler. $r - k$ sınıfı tahmin edici,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k(r) &= (Z_r' Z_r + kI_r)^{-1} Z_r' y = (T_r' X' X T_r + kI_r)^{-1} T_r' X' y \\ &= (\Lambda_r + kI_r)^{-1} T_r' X' y \end{aligned} \quad (4.93.)$$

şeklinde verilir. Benzer şekilde, Kaçiranlar ve Sakallıoğlu (2001) LE ve PCR tahmin edicilerini tek bir tahmin edicide birleştirerek $r - d$ sınıfı tahmin ediciyi önerdiler. $r - d$ sınıfı tahmin edici,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_d(r) &= (Z_r' Z_r + I_r)^{-1} (Z_r' y + d \hat{\alpha}(r)) = (T_r' X' X T_r + I_r)^{-1} (T_r' X' y + d T_r' \hat{\beta}_{PCR}) \\ &= (\Lambda_r + I_r)^{-1} (\Lambda_r + d I_r) \hat{\alpha}(r)\end{aligned}\quad (4.94.)$$

şeklinde verilir. Özkale (2012), $\hat{\beta}(k, d)$ ve PCR tahmin edicilerinin elde edilmesinde izlenen yaklaşımları birleştirerek yeni bir tahmin edici önerdi. Bu tahmin edici aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{k,d}(r) &= (Z_r' Z_r + k I_r)^{-1} (Z_r' y + k d \hat{\alpha}(r)) \\ &= (\Lambda_r + k I_r)^{-1} (\Lambda_r + k d I_r) \hat{\alpha}(r).\end{aligned}\quad (4.95.)$$

4.11.2. Önerilen Bazı Tahmin Ediciler Hakkında Notlar

Lukman ve arkadaşları Ridge Regresyon tahmin edicisini değiştirerek Uyarlanmış Ridge-Tipi tahmin edicisini $\hat{\alpha}_{MRT}(k, d)$ önerdiler. Ridge Regresyon, $0 = k^{1/2} \beta + \varepsilon$ ile Model (1.1.)'in genişletilmesi ve ardından OLS kullanılmasıyla elde edilmiştir. Benzer şekilde, Lukman ve arkadaşları $0 = k^{1/2} (1 + d)^{1/2} \beta + \varepsilon$ denklemi ile Model (1.1.)'i genişleterek ve OLS'yi kullanarak yeni bir tahmin edici olarak uyarlanmış Ridge tahmin edicisini bulduklarını iddia etmişlerdir. Bu noktada aşağıdakiler not edilebilir: Öncelikle, $k > 0$ ve $0 < d < 1$ olduğundan, $k^* = k(1 + d)$ 'dir. Bu durumda $k^* > 0$ olur. Diğer bir deyişle, yazarların Uyarlanmış Ridge tahmin edicisi olarak adlandırdıkları tahmin edici $\hat{\alpha}_{MRT}(k, d) = (Z'Z + k(1 + d)I)^{-1} Z'y$, Ridge tahmin edici ile aynı olur. İkinci olarak, matematiksel ve istatistiksel olarak d 'nin, tahmin edicinin elde edilmesi, geliştirilmesi ve uygulanmasına hiçbir katkısı olmadığı düşünülmektedir.

Daha önce verilen Model (3.13.) ele alınsın,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$\begin{aligned} y &= XTT'\beta + \varepsilon = Z\alpha + \varepsilon = XT_rT_r'\beta + XT_{p-r}T_{p-r}'\beta + \varepsilon \\ &= Z_r\alpha_r + Z_{p-r}\alpha_{p-r} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Vigneau ve arkadaşlarının varsaydığı gibi, eğer $n < p$ ve $q = \text{rank}(X) = \min(n-1, p)$ ise, $X'X$ 'in λ_j özdeğerleri $j = n$ 'den p 'ye sıfıra eşit olur. Böylece, q tane özdeğer sıfırdan farklı olacaktır ve $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q > 0$ 'ın $X'X$ 'in kalan özdeğerleri olduğunu varsayalım. Bu özel durumda, Model (3.13.) aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$\begin{aligned} y &= XTT'\beta + \varepsilon = Z\alpha + \varepsilon = XT_rT_r'\beta + XT_{q-r}T_{q-r}'\beta + 0'\beta + \varepsilon \\ &= Z_r\alpha_r + Z_{q-r}\alpha_{q-r} + \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.96.)$$

Burada $T = (t_1, t_2, \dots, t_r, t_{r+1}, \dots, t_q, 0, \dots, 0) = (T_r, T_{q-r}, 0)$, $T_r = (t_1, t_2, \dots, t_r)$, $T_{q-r} = (t_{r+1}, \dots, t_q)$ ve $0 = (0, \dots, 0)$ 'dır. $Z = XT = (z_1, z_2, \dots, z_r, z_{r+1}, \dots, z_q, 0, \dots, 0) = (Z_r, Z_{q-r}, 0)$ $n \times p$ boyutlu bir matris, $Z_r = (z_1, z_2, \dots, z_r)$ $n \times r$ boyutlu bir matris, $Z_{q-r} = (z_{r+1}, \dots, z_q)$ $n \times (q-r)$ boyutlu bir matris, $0 = (0, \dots, 0)$ $q-r$ boyutlu sıfır vektörü ve $z_i = Xt_i, i = 1, 2, \dots, p$ 'dir. Böylece, $T_r'X'XT_r = \Lambda_r = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ ve $T_{q-r}'X'XT_{q-r} = \Lambda_{q-r} = \text{diag}(\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_q)$ 'dir.

PCR'de boyut indirgenerek tahmin yapılır. Vigneau ve arkadaşları, boyut indirgemenin tahmin etme problemine odaklandı ve aşağıdaki gibi bazı tahmin edicileri tanımladılar:

Model (4.96.)'daki α parametresinin OLS tahmin edicisi aşağıdaki şekilde verilmiştir:

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$\hat{\alpha}(q,0) = \Lambda_{q,0}^{-1} Z' y = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_q}, 0, 0, \dots, 0\right) Z' y. \quad (4.97.)$$

Burada, $\Lambda_{q,0}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_q}, 0, 0, \dots, 0\right)$ 'dır.

Son özdeğerler sıfıra çok yakın olabilir. Sonuç olarak tersleri çok büyük olabilir ve bu da bazı istenmeyen sonuçlara yol açar. PCR'de α 'nın tahmini yalnızca ilk r temel bileşen korunarak verilmiştir:

$$\hat{\alpha}(r,0) = \Lambda_{r,0}^{-1} Z' y. \quad (4.98.)$$

Burada $\Lambda_{r,0}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_r}, 0, 0, \dots, 0\right)$ 'dır.

Bu noktada (4.92.) 'de bilinen PCR'nin ilk r bileşeni ile , yeni olduğu iddia edilen (4.98.) tarafından verilen tahmin yöntemiyle elde edilenler ile aynı olacaktır. Diğer bileşenler açıkça sıfır olacaktır.

Vigneau ve arkadaşları, PCR ve Ridge Regresyonunun dezavantajlarından bahsederek ve PCR ve Ridge Regresyon tahmin yöntemlerini birleştirerek aşağıdaki yeni tahmin yöntemini önermişlerdir.

Ridge Regresyon'da tüm özdeğerlere bir k sabiti eklenir ve aşağıdaki tahmin elde edilir:

$$\hat{\alpha}_k(q,0) = \Lambda_{q,0}^{-1}(k) Z' y = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1 + k}, \dots, \frac{1}{\lambda_q + k}, 0, 0, \dots, 0\right) Z' y. \quad (4.99.)$$

Burada $\Lambda_{q,0}^{-1}(k) = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1 + k}, \dots, \frac{1}{\lambda_q + k}, 0, 0, \dots, 0\right)$ 'dır.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

Hem PCR hem de Ridge Regresyon prensibini birleştirerek, α parametresinin Ridge-Temel Bileşenler Regresyon tahmin edicisi (RPCRE) Vigneau ve arkadaşları tarafından,

$$\hat{\alpha}_k(r, 0) = \Lambda_{r,0}^{-1}(k) Z' y = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1 + k}, \dots, \frac{1}{\lambda_r + k}, 0, 0, \dots, 0\right) Z' y \quad (4.100.)$$

şeklinde verilmiştir. Burada $\Lambda_{r,0}^{-1}(k) = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1 + k}, \dots, \frac{1}{\lambda_r + k}, 0, 0, \dots, 0\right)$ 'dır.

Bu, Model (3.13.) altında Baye ve Parker tarafından tanımlanan $r - k$ sınıfı tahmin edicisinin bir uyarlamasıdır. Bu noktada (4.93.)'deki bilinen $r - k$ sınıfı tahmin edicisinin ilk r bileşeni, yeni olduğu iddia edilen (4.100.) ile verilen tahmin yöntemiyle aynı olacaktır. Açıkça diğer bileşenler sıfır olacaktır.

Bu noktada, alternatif olarak Kaçıranlar ve Sakallıoğlu tarafından tanımlanan $r - d$ sınıfı tahmin edicisini ve Özkale' nin tanımladığı $r - kd$ sınıfı tahmin edicisini önerebiliriz. Vigneau ve arkadaşlarından yararlanarak $r - d$ sınıfı tahmin edicisi

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_d(r, 0) &= \Lambda_{r,0}^{-1}(d) Z' y \\ &= \text{diag}\left(\frac{\lambda_1 + d}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)}, \dots, \frac{\lambda_r + d}{\lambda_r(\lambda_r + 1)}, 0, 0, \dots, 0\right) Z' y. \end{aligned} \quad (4.101.)$$

şeklinde de verilebilir. Burada,

$$\Lambda_{r,0}^{-1}(d) = \text{diag}\left(\frac{\lambda_1 + d}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)}, \dots, \frac{\lambda_r + d}{\lambda_r(\lambda_r + 1)}, 0, 0, \dots, 0\right) \text{ 'dır. } \hat{\alpha}_d(r, 0), \text{ Liu-Temel}$$

Bileşenler Regresyon tahmin edicisi (LPCRE) olarak adlandırılacaktır.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

Benzer şekilde, $r - kd$ sınıfı tahmin edicisi

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{k,d}(r,0) &= \Lambda_{r,0}^{-1}(k,d) Z' y \\ &= \text{diag}\left(\frac{\lambda_1 + kd}{\lambda_1(\lambda_1 + k)}, \dots, \frac{\lambda_r + kd}{\lambda_r(\lambda_r + k)}, 0, 0, \dots, 0\right) Z' y.\end{aligned}\quad (4.102.)$$

şeklinde de verilebilir. Burada,

$$\Lambda_{r,0}^{-1}(k,d) = \text{diag}\left(\frac{\lambda_1 + kd}{\lambda_1(\lambda_1 + k)}, \dots, \frac{\lambda_r + kd}{\lambda_r(\lambda_r + k)}, 0, 0, \dots, 0\right) \text{ 'dır. } \hat{\alpha}_{k,d}(r,0), \quad \text{İki}$$

Parametrelili-Temel Bileşenler Regresyon tahmin edicisi (TPPCRE) olarak adlandırılacaktır.

4.11.3. Kriterler, Yanlılık Parametrelerinin Seçimi ve Karşılaştırmalar

Karşılaştırma yapmak amacıyla, SMSE ve CVEP istatistiksel ölçütler olarak tercih edilmiştir. OLS tahmin edicisi, PCR tahmin edicisi, RPCRE, LPCRE ve PCTP için SMSE formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$$SMSE(\hat{\alpha}(q,0)) = \sum_{i=1}^q \frac{\sigma^2}{\lambda_i}, \quad (4.103.)$$

$$SMSE(\hat{\alpha}(r,0)) = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma^2}{\lambda_i} + \sum_{i=r+1}^q \alpha_i^2, \quad (4.104.)$$

$$SMSE(\hat{\alpha}_k(r,0)) = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma^2 \lambda_i^2 + k^2 \alpha_i^2 \lambda_i}{\lambda_i (\lambda_i + k)^2} + \sum_{i=r+1}^q \alpha_i^2, \quad (4.105.)$$

$$SMSE(\hat{\alpha}_d(r,0)) = \sum_{i=1}^r \left[(\delta_i - 1)^2 \alpha_i^2 + \frac{\sigma^2 \delta_i^2}{\lambda_i} \right] + \sum_{i=r+1}^q \alpha_i^2, \quad (4.106.)$$

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$$SMSE(\hat{\alpha}_{k,d}(r,0)) = \sum_{i=1}^r \left[\frac{\sigma^2 (\lambda_i + kd)^2 + k^2 (d-1)^2 \alpha_i^2 \lambda_i}{\lambda_i (\lambda_i + k)^2} \right] + \sum_{i=r+1}^q \alpha_i^2. \quad (4.107.)$$

Burada, $k > 0$, $0 < d < 1$ ve $\delta_i = \frac{\lambda_i + d}{\lambda_i + 1}$ for $i = 1, 2, \dots, r$ 'dir.

OLS ve PCR tahmin edicisinin ve RPCRE, LPCRE ve PCTP' nin CVEP formüllerini sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$CVEP(\hat{\alpha}(q,0)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{1 - h_{q,0}^{ii}} \right), \quad (4.108.)$$

$$CVEP(\hat{\alpha}(r,0)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{1 - h_{r,0}^{ii}} \right), \quad (4.109.)$$

$$CVEP(\hat{\alpha}_k(r,0)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{1 - h_{r,0}^{ii}(k)} \right), \quad (4.110.)$$

$$CVEP(\hat{\alpha}_d(r,0)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{1 - h_{r,0}^{ii}(d)} \right), \quad (4.111.)$$

$$CVEP(\hat{\alpha}_{k,d}(r,0)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{1 - h_{r,0}^{ii}(k,d)} \right). \quad (4.112.)$$

Burada $e_i = y_i - \hat{y}_i$ i-inci gözlemin bir rezidüsü, $h_{q,0}^{ii}$ $Z\Lambda_{q,0}^{-1}Z'$ matrisinin i-inci köşegen elemanı, $h_{r,0}^{ii}$ $Z\Lambda_{r,0}^{-1}Z'$ matrisinin i-inci köşegen elemanı, $h_{r,0}^{ii}(d)$ $Z\Lambda_{r,0}^{-1}(d)Z'$ matrisinin i-inci köşegen elemanı ve $h_{r,0}^{ii}(k,d)$ $Z\Lambda_{r,0}^{-1}(k,d)Z'$ matrisinin i-inci köşegen elemanıdır.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

RPCRE, LPCRE ve PCTP tahmin edicileri bilinmeyen yanlılık parametrelerini içerir. Bu nedenle söz konusu tahmin edicilerin parametrelerinin seçilmesi gerekir. Bu çalışmada, yanlılık parametrelerinin seçilmesi için esas olarak iki yönetime odaklanılmıştır. İlk olarak, PCTP için aşağıdaki gibi tanımlanan PRESS' ten yararlanılır:

$$PRESS = \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{1 - h_{r,0}^{ii}(k, d)} \right). \quad (4.113.)$$

(4.113.)'te verilen PRESS istatistiğini en aza indirgeyerek k ve d parametrelerinin optimal değerleri bulunur ve daha sonra bu optimal parametreleri $\hat{k}_{press}$ ve $\hat{d}_{press}$ olarak adlandırılacaktır. İkinci olarak, Özkale'nin çalışmasında verilen parametre seçim yöntemi kullanılır.

Her $i = 1, \dots, r$ için

$\hat{k}_{press} \alpha_i^2 - \sigma^2 > 0$ ise,

$$0 < d < \frac{\sum_{i=1}^r \left(\hat{k}_{press} \alpha_i^2 - \sigma^2 \right) / \left(\lambda_i + \hat{k}_{press} \right)^2}{\sum_{i=1}^r \hat{k}_{press} \left(\sigma^2 + \alpha_i^2 \lambda_i \right) / \lambda_i \left(\lambda_i + \hat{k}_{press} \right)^2} < 1$$

eşitsizliğinden yararlanarak bir d seçilir ve bu d değeri $\hat{d}_{SMSE}$ olarak adlandırılır.

Sayısal analizde, tahmin edicilerin SMSE kriterine göre karşılaştırılması için, $(\hat{k}_{press}, \hat{d}_{SMSE})$ optimal parametreleri kullanılır. Tahmin ediciler CVEP kriterine göre karşılaştırıldığında, $(\hat{k}_{press}, \hat{d}_{press})$ optimal parametreleri kullanılacaktır.

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

4.11.4. Uygulama

Bu bölümde, yeni tahmin ediciler LPCRE ve PCTP'nin hem tahmin hem de öngörü performansını araştırmak için gerçek bir kimyasal veri seti ele alınmıştır. Martinez ve arkadaşları (2018)'nin çalışmasındaki zeytinyağı verileri kullanılacaktır. Zeytinyağı verileri, zeytinyağı üretiminin kalite problemini belirlemek amacıyla toplanmıştır. Zeytinyağı üreticileri zeytinyağını genellikle ham veya sızma olarak sınıflandırır ve bu sınıflandırma, ürün kalitesini kontrol etmeyi sağlar. Zeytinyağı üretimi önemli bir ekonomik etkiye sahip olduğundan, çeşitli firmaların yöneticileri bu sınıflandırmaya çok dikkat etmektedir. Zeytinyağının kalitesini belirlerken bazı fiziksel ve kimyasal özellikler göz önünde bulundurulur. Zeytinyağının fiziksel özelliği çoğunlukla zeytinyağının rengine bağlı görünümü ile ilgilidir. Zeytinyağının renginin belirlenmesi için asitlik seviyesi, peroksit seviyesi ve ultraviyole (UV) absorbansı gibi bazı fizyokimyasal değişkenler kullanılabilir.

Zeytinyağı verileri, duyuşal altı özellik ve fizikokimyasal beş kalite özelliği ölçümünden elde edilen puanların bulunduğu 16 adet zeytin örneğinden oluşur. Bu veri setinde ilk beş yağ Yunan, sonraki beşi İtalyan ve son altısı İspanyol'dur. Fiziksel özelliklerin bir göstergesi olarak, bu sayısal örnekte yalnızca üç renklendirme türü için puanlar analiz edilmiştir. Bunlar Y_1 : Sarı, Y_2 : Yeşil ve Y_3 : Kahverengi şeklindedir. Bu bağımlı değişkenler, beş değişkenin yardımıyla açıklanır: X_1 : Asitlik, X_2 : Peroksit, X_3 : 232 nm'de ölçülen UV absorbansı (K232), X_4 : 270 nm'de ölçülen UV absorbansı (K270) ve X_5 : 266 ile 274 nm aralığında ölçülen absorbans taraması (DK).

Değişkenlerin korelasyon matrisi,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

1.0000	0.0467	0.1070	0.4796	0.5289
0.0467	1.0000	0.8740	0.5535	0.4865
0.1070	0.8740	1.0000	0.7104	0.5356
0.4796	0.5535	0.7104	1.0000	0.3112
0.5289	0.4865	0.5356	0.3112	1.0000

şeklinde bulunur.

Bazı değişkenler arasında gözlemlenen yüksek korelasyon çoklu bağlantının varlığını gösterir. Herbirinin Varyans Şişirme Faktörleri (VIF) $VIF_{X_1} = 3.7981$, $VIF_{X_2} = 4.4079$, $VIF_{X_3} = 10.1331$, $VIF_{X_4} = 5.3451$ ve $VIF_{X_5} = 3.5623$ 'tür. Bu değerler sonucunda X_3 değişkeni ile modeldeki diğer değişkenlerden en az biri arasında yüksek korelasyon olduğu gözlemlenir. Temel bileşenlerin sayısını belirlerken, özdeğerlerin 1'den az olup olmadığını kontrol ederiz. Bunun bir sonucu olarak, Martinez ve arkadaşları'nın çalışmasında olduğu gibi $r = 2$ temel bileşenleri elde edilir. k ve d yanlılık parametrelerinin seçimi, önceki bölümdeki prosedürlerle uyumlu olarak yürütülür.

Farklı tahmin yöntemleri kullanılarak hesaplanan katsayılar tahminini incelemek için, zeytinyağı verilerinin Y_1 =Sarı yanıt değişkeni göz önünde bulundurulur. Tablo 1'deki $\hat{k}_{press}$ ve $\hat{d}_{SMSE}$ yanlılık parametrelerinin değerleri, katsayılar tahmini için kullanılır. PCR tahmin edicisi, $r - k$ sınıfı tahmin edici, $r - d$ sınıfı tahmin edici ve $r - kd$ sınıfı tahmin edicinin katsayılar tahmini sırasıyla, $\hat{\alpha}(r) = (0.3734, -0.1485)'$, $\hat{\alpha}_k(r) = (5.9554E - 05, -9.5358E - 06)'$, $\hat{\alpha}_d(r) = (0.3503, -0.1319)'$ ve $\hat{\alpha}_{k,d}(r) = (0.2827, -0.1124)'$ 'tür. Buna ek olarak Vigneau ve arkadaşları tarafından önerilen PCR tahmin edicisinin katsayılar tahmini $\hat{\alpha}(q, 0) = (0.3734, -0.1485, 0, 0, 0)'$ şeklinde bulunmuştur. Burada,

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

$\hat{\alpha}(r)$ ve $\hat{\alpha}(q,0)$ 'ın katsayılar tahminlerinin arasındaki tek fark boyutlarıdır. Daha önce de belirtildiği gibi, tahmin edicilerin ilk r bileşenleri aynıdır, diğer bileşenler ise sıfırdır. RPCRE'nin katsayılar tahmini

$$\hat{\alpha}_k(r,0) = (5.9554E-05, -9.5358E-06, 0, 0, 0)'$$

olarak bulunur ve bu vektörün sıfır olmayan değerleri, $r-k$ sınıfı tahmin edicisinin ilk r bileşenleriyle aynıdır. Benzer düşüncüyü koruyarak, LPCRE ve PCTP'nin katsayılar tahmini sırasıyla, $\hat{\alpha}_d(r,0) = (0.3503, -0.1319, 0, 0, 0)'$ ve $\hat{\alpha}_{k,d}(r,0) = (0.2827, -0.1124, 0, 0, 0)'$ 'dır. Üç yanıt değişken için parametrelerin optimal değerlerinin SMSE ve CVEP sonuçları Tablo 4.1. ve Tablo 4.2.'de verilmiştir. Tablo 4.1.'de verilen sonuçlar SMSE kriteri için, Tablo 4.2.'de verilen sonuçlar ise CVEP kriteri için verilmiştir.

Tablo 4.1.'de verilen sonuçlar, PCTP'nin SMSE kriterine göre, OLS tahmin edicisi, PCR tahmin edicisi, RPCRE ve LPCRE'den üstün olduğunu gösterir. Bu sonuç, zeytinyağı verilerinin üç yanıt değişkeni için geçerlidir. Yani PCTP, tahmin performansı açısından diğer tahmin edicilerden daha iyidir. Verilen diğer tahmin edici LPCRE ise, SMSE kriterine göre diğer tahmin edicilerden daha iyi performans gösteren ikinci tahmin edicidir.

CVEP kriterine bakıldığında, PCTP'nin performansının diğer tahmin ediciler arasında en küçük CVEP sonuçları verdiği görülür. Bu çalışmada tercih edilen yanlılık parametrelerinin seçim yöntemleri, iyi bir sonuca ulaşılmasını sağlamıştır.

Tablo 4.1. ve Tablo 4.2.'den çıkarılacak bir başka sonuç ise, söz konusu tahmin edicilerin CVEP sonuçlarının, bu tahmin edicilerin SMSE sonuçlarından daha küçük değerler almasıdır. Buna ek olarak tahmin edicilerin CVEP değerleri elde edilirken, ikinci yanlılık parametresinin seçimi için farklı bir yöntem kullanılmıştır. Bu, tahmin edicilerin CVEP değerlerinin SMSE değerlerine kıyasla

4. TEMEL BİLEŞENLER VE İLİŞKİLİ TAHMİN YÖNTEMLER Ecem ÖZKAN

daha küçük değerler almasının nedeni olabilir. Her durumda, zeytinyağı verileri için PCTP'nin SMSE ve CVEP değerleri ile farkedilir sonuçlara ulaşıldığı görülür.



Tablo 4.1. Zeytinyağı verileri için SMSE sonuçları

Yanıt Değişkenler	Açıklayıcı Değişkenler		OLS Tahmin edici	PCR Tahmin edici	RPCRE	LPCRE	PCTP
$Y_1 = \text{Sarı}$	$X_1 = \text{Asitlik}$ $X_2 = \text{Peroksit}$ $X_3 = K232$ $X_4 = K270$ $X_5 = DK$	$(\hat{k}_{press}, \hat{d}_{SMSE})$	(-, -)	(-, -)	(1.8337E+04, -)	(-, 0.7572)	(1.8337E+04, 0.7572)
		SMSE	1.1211	0.5464	0.6588	0.5382	0.5350
$Y_2 = \text{Yeşil}$	$X_1 = \text{Asitlik}$ $X_2 = \text{Peroksit}$ $X_3 = K232$ $X_4 = K270$ $X_5 = DK$	$(\hat{k}_{press}, \hat{d}_{SMSE})$	(-, -)	(-, -)	(1.6887E+04, -)	(-, 0.7413)	(1.6887E+04, 0.7413)
		SMSE	1.2717	0.3099	0.4223	0.3003	0.2961
$Y_3 = \text{Kahverengi}$	$X_1 = \text{Asitlik}$ $X_2 = \text{Peroksit}$ $X_3 = K232$ $X_4 = K270$ $X_5 = DK$	$(\hat{k}_{press}, \hat{d}_{SMSE})$	(-, -)	(-, -)	(6.4981E+03, -)	(-, 0.9394)	(6.4981E+03, 0.9394)
		SMSE	0.5329	0.1794	0.5933	0.1786	0.1783

Tablo 4.1. Zeytinyağı verileri için CVEP sonuçları

Yanıt Değişkenler	Açıklayıcı Değişkenler		OLS Tahmin edici	PCR Tahmin edici	RPCRE	LPCRE	PCTP
$Y_1 = \text{Sarı}$	$X_1 = \text{Asitlik}$ $X_2 = \text{Peroksit}$ $X_3 = K232$ $X_4 = K270$ $X_5 = DK$	$(\hat{k}_{press}, \hat{d}_{press})$	(—,—)	(—,—)	(1.8337E+04,—)	(—,3.7971E-06)	(1.8337E+04,3.7971E-06)
		CVEP	0.0658	0.0365	0.0283	0.0326	0.0283
$Y_2 = \text{Yeşil}$	$X_1 = \text{Asitlik}$ $X_2 = \text{Peroksit}$ $X_3 = K232$ $X_4 = K270$ $X_5 = DK$	$(\hat{k}_{press}, \hat{d}_{press})$	(—,—)	(—,—)	(1.6887E+04,—)	(—,4.0752E-06)	(1.6887E+04,4.0752E-06)
		CVEP	0.0766	0.0418	0.0321	0.0371	0.0321
$Y_3 = \text{Kahverengi}$	$X_1 = \text{Asitlik}$ $X_2 = \text{Peroksit}$ $X_3 = K232$ $X_4 = K270$ $X_5 = DK$	$(\hat{k}_{press}, \hat{d}_{press})$	(—,—)	(—,—)	(6.4981E+03,—)	(—,4.9564E-06)	(6.4981E+03,4.9564E-06)
		CVEP	0.0395	0.0208	0.0134	0.0170	0.0134

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, temel bileşenler tahmin edici ve temel bileşenler tahmin edici ile ilişkili olan birçok tahmin edici incelenmiştir. Tahmin edicilerin yöntemlerinin birleştirilmesiyle yeni tahmin ediciler tanımlanmış ve bilinen tahmin ediciler ile performansları karşılaştırılmıştır.

Temel bileşenler tahmin edici, istatistiğin neredeyse tüm alanlarında ve ekonometrinin birçok alanında kullanılan bir tahmin edicidir. Temel bileşenler tahmin edici, çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak veya şiddetini azaltmak için öne sürülen bir tahmin edicidir. Temel bileşenler yönteminin asıl amacı boyut indirgemesi ve tahmin yapılmasıdır.

Değişken sayısının gözlem sayısından fazla olması durumunda, bazı yazarlar tarafından tanımlanan yeni tahmin yöntemleri incelenmiş ve temel bileşenler regresyon ile ridge, Liu ve iki parametrelili tahmin edici gibi bazı yanlış regresyon tahmin edicilerin kombinasyonlarının performansı karşılaştırılmıştır. Gerçek-yaşam uygulaması ve simülasyon ile önerilen tahmin edicilerin parametrelere bağlı olarak performansları incelenmiştir.

Verilen uygulamanın asıl amacı, tipik bir kimyasal veri için LPCRE ve PCTP'nin önerilmesidir. LPCRE, PCR tahmin edicisi ve LE 'nin avantajlarını birleştirir. PCTP, PCR tahmin edicisi ve TP 'nin bir bileşimidir. Bu tahmin ediciler, istenirse modelin boyutunu indirgmeden çoklu bağlantı probleminin çözülebilmesi için bize bir fırsat sunmaktadır. PCTP 'nin performansı iki yanlılık parametresine bağlıdır ve bu yüzden bu yanlılık parametrelerinin optimal seçimi için iki yöntem önerildi. Teorik öneriler zeytinyağı verileri olarak adlandırılan tipik kimyasal verilere uygulandı. Bu uygulamada, tahmin edicilerin CVEP ve SMSE kriterlerine göre performansı araştırıldı. Her iki durumda da, önerilen yöntemlerin daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.



KAYNAKLAR

- Akdeniz, F., Kaçiranlar, S., 1995. On The Almost Unbiased Generalized Liu Estimator And Unbiased Estimation Of The Bias And Mse. Communications In Statistics-Theory And Methods, 24(7):1789-1797.
- Al-Gereari, F. S. M., 2012. Modified Marquardt Estimator. IJRRAS, 13(1): 29-40.
- Anderson, T. W., 1963. Asymptotic Theory For Principal Component Analysis. Ann. Math. Statist., 34(1):122-148.
- Baksalary, J. K., and Trenkler, G., 1991. Nonnegative And Positive Definiteness Of Matrices Modified By Two Matrices Of Rank One. Linear Algebra Appl., 151: 169-184.
- Batah, F. S. M., Özkale, M. R., Gore, S. D., 2009. Combining Unbiased Ridge And Principal Component Regression Estimators. Communications In The Statistics - Theory And Methods, 38(13):2201-2209.
- Baye, M. R., Parker, D. F., 1984. Combining Ridge And Principal Component Regression: A Money Demand Illustration. Communications In The Statistics - Theory And Methods, 13(2):197-205.
- Beltrami, E., 1873. Sulle Funzioni Bilineari. Giornale Di Matematiche Di Battaglini, 11:98-106.
- Bryant, E. H. And Atchley, W. R., 1975. Multivariate Statistical Methods: Within Group Covariation. Stroudsburg: Halsted Press.
- Büyükuysal, M. Ç., 2010. Ridge Regresyon Analizi ve Bir Uygulama. U.Ü. Yüksek Lisans Tezi, Bursa, 47s.
- Chang, X., Yang, H., 2012. Combining Two-Parameter And Principal Component Regression Estimators. Statistical Papers, 53(3):549-562.
- Cooley, T., And LeRoy, S., 1981. Identification And Estimation Of Money Demand. American Economic Review, 71:825-844.

- Crouse, R., Jin, C., Hanumara, R., 1995. Unbiased Ridge Estimation With Prior Information And Ridge Trace. *Commun. Statist. Theor. Meth.*, 24:2341-2354.
- Farrar, D. E. And Glauber, R. R., 1967. Multicollinearity In Regression Analysis: The Problem Revisited. *The Review Of Economics And Statistics*, 49(1):92-107.
- Fisher, R. A. And Mackenzie, W. A., 1923. Studies In Crop Variation II. The Manurial Response Of Different Potato Varieties. *J. Agri. Sci.*, 13:311-320.
- Frisch, R., 1929. Correlation And Scatter In Statistical Variables. *Nordic Statist. J.*, 8:36-102.
- Girshick, M. A., 1936. Principal Components. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 31(195):519-528.
- _____, 1939. On The Sampling Theory Of Roots Of Determinantal Equations. *Ann. Math. Statist.*, 10(3):203-224.
- Gower, J. C., 1966. Some Distance Properties Of Latent Root And Vector Methods Used In Multivariate Analysis. *Biometrika*, 53(3-4):325-338.
- Graybill, F. A., 1976. *Theory And Application Of The Linear Model*. Duxbury Press, Pacific Grove.
- Gross, J., 2003a. *Linear Regression*. Springer-Verlag, Berlin, 387p.
- _____, 2003b. Restricted Ridge Estimation. *Statistics And Probability Letters*, 65:57-64.
- Gruber, M. H. J., 1998. *Improving Efficiency By Shrinkage: The James-Stein And Ridge Regression Estimators*. Marcell Dekker, New York, 648p.
- Hoerl, A. E., Kennard, R. W., 1970. Ridge Regression: Biased Estimation For Nonorthogonal Problems. *Technometrics*, 12(1): 55-67.
- Hoerl, A. E., Kennard, R.W., And Baldwin, K. F., 1975. Ridge Regression: Some Simulation. *Communication In Statistics*, 4:105-123.

- Hotelling, H., 1933. Analysis Of A Complex Of Statistical Variables Into Principal Components, *Journal Of Educational Psychology*, 24:417-441, 498-520.
- _____, 1936. Simplified Calculation Of Principal Components. *Psychometrika*, 1(1):27-35.
- Jeffers, J.N.R., 1967. Two Case Studies In The Application Of Principal Component Analysis. *Appl. Statist.*, 16(3):225-236.
- Jolliffe, I. T., 2002. *Principal Component Analysis*. 2nd Ed. Springer-Verlag, New York, 487p.
- Jordan, M.C., 1874. Mémoire Sur Les Formes Bilinéaires. *J. Math. Pures Appl.*, 19:35-54.
- Kaçıranlar, S., Sakallıoğlu, S., 2001. Combining The Liu Estimator And The Principal Component Regression Estimator. *Communications In The Statistics - Theory And Methods*, 30(12):2699-2705.
- Kaçıranlar, S., Sakallıoğlu, S., Akdeniz, F., Styan, G. P. H., Werner, H. J., 1999. A New Biased Estimator In Linear Regression And A Detailed Analysis Of The Widely-Analyzed Dataset On Portland Cement. *Sânkhya: The Indian Journal Of Statistics*, 61, Series B, Pt. 3:443-459.
- Lawless, J. F. And Wang, P., 1976. A Simulation Study Of Ridge And Other Regression Estimators. *Communication In Statistics*, 7:139-164.
- Lin, K. And Kmenta, J., 1982. Ridge Regression Under Alternative Loss Criteria. *The Review Of Economics And Statistics*, 64:488-494.
- Liu, K., 1993. A New Class Of Biased Estimate In Linear Regression. *Communications In Statistics-Theory And Methods*, 22(2):393-402.
- Lukman, A. F., Ayinde, K., Binuomote, S., Clement, O. A., 2019. Modified Ridge-Type Estimator To Combat Multicollinearity: Application To Chemical Data, *Journal Of Chemometrics*, e3125. <https://doi.org/10.1002/cem.3125>.
- Mahalanobis, P. C., 1936. On The Generalized Distance In The Statistics. *Proc. Nat. Instit. Sci. India*, 12:49-55.

- Marquardt, D. W., Snee, R. D., 1975. Ridge Regression In Practice. The American Statistician, 29:3-20.
- Martinez, J. S., Leiva, V., Saulo, H., Ruggeri, F., Arteaga, G. C., 2018. A New Estimator For The Covariance Of The PLS Coefficients Estimator With Applications To Chemical Data, Journal Of Chemometrics, 32: e3069. <https://doi.org/10.1002/cem.3069>.
- Massy, W. F., 1965. Principal Components Regression In Exploratory Statistical Research. JASA, 60:234-266.
- Mayer, L.S., Wilke, T.A., 1973. On Biased Estimation In Linear Models. Technometrics. 15(3):497-508.
- McDonald, G. C., And Galarneau, D. I., 1975. A Monte Carlo Evaluation Of Some Ridge-Type Estimators. Journal Of The American Statistical Association, 70(350):407-416.
- Nomura, M., Ohkubo, T., 1985. A Note On Combining Ridge And Principal Component Regression. Communication in Statistics - Theory and Methods, 14(10): 2489-2493.
- Özbay, N., 2017. Lineer Regresyonda Bazı Yanlı Tahmin Edicilere Bayesyen Yaklaşım. Ç.Ü. Doktora Tezi, Adana, 112s.
- Özkale, M. R., Kaçıranlar, S., 2007a. The Restricted And Unrestricted Two Parameter Estimators, Comm. Statist. Theory Methods, 36(15):2707-2725.
- _____, 2007b. Superiority Of The R-d Class Estimator Over Some Estimators By The Mean Square Error Matrix Criterion. Statistics And Probability Letters, 77(4):438-446.
- Özkale, M. R., 2007. Çoklu İç İlişki İle İlgili Problemler. Ç.Ü. Doktora Tezi, Adana, 96s.
- _____, 2009. Principal Components Regression Estimator And A Test For The Restrictions. Statistics, 43:541-551.

- _____, 2012. Combining The Unrestricted Estimators Into A Single Estimator And A Simulation Study On The Unrestricted Estimators. *Journal Statistical Computation And Simulation*, 82(5):653-688.
- Pearson, K., 1901. On Lines And Planes Of Closest Fit To Systems Of Points In Space. *Phil. Mag. Series 6*, 2(11):559–572.
- Peddada, S. D., Nigam, A. K., Saxena, A. K., 1989. On The Inadmissibility Of Ridge Estimator In A Linear Model. *Commun. Statist. Theor. Meth.*, 18(10):3571-3585.
- Pliskin, J. L., 1987. A Ridge-Type Estimator and Good Prior Means. *Comm. Statist. Theory Methods*, 16(12):3429-3437.
- Preisendorfer, R.W. And Mobley, C. D., 1988. *Principal Component Analysis In Meteorology And Oceanography*. Amsterdam: Elsevier.
- Rao, C. R., 1964. The Use And Interpretation Of Principal Component Analysis In Applied Research. *Sankhya A*, 26(4):329–358.
- Rao, C. R., Toutenburg, H., 1995. *Linear Models-Least Squares And Alternatives*. Springer, New York.
- Rencher, A. C., 2000. *Linear Models In Statistics*. New York: Wiley.
- Sakallıoğlu, S., Kaçiranlar, S And Akdeniz, F., 2001. Mean Squared Error Comparisons Of Some Biased Regression Estimators. *Communications In Statistics – Theory And Methods*, 30(2), to appear.
- Sarkar, N., 1989. Comparisons Among some Estimators in Misspecified Linear Models with Multicollinearity, *Ann. Inst. Statist. Math.* 41: 717-724.
- _____, 1992. A New Estimator Combining the Ridge Regression and the Restricted Least Squares Methods for Estimation. *Comm. Statist. Theory Methods*, 21(7):1987-2000.
- _____, 1996. Mean Square Error Matrix Comparison of Some Estimators in Linear Regressions with Multicollinearity. *Statistics and Probability Letters*, 30: 133-138.

- Silvey, S. D., 1969. Multicollinearity and Imprecise Estimation. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 31(3):539-552.
- Stein, C., 1956. Inadmissibility of Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution. *Proceeding of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Univeristy of California Press, Berkeley, 197-206.
- Swindel, F. F., 1976. Good Ridge Estimators Based on Prior Information. *Comm. Statist. Theory Methods*, A5 (11), 1065-1075.
- Theobald, C. M., 1974. Generalizations Of Mean Square Error Applied To Ridge Regression. *J. Roy. Statist. Soc. B* 36:103-106.
- Thurstone, L. L., 1931. Multiple Factor Analysis. *Psychol. Rev.*, 38(5):406– 427.
- Tobin, J., 1958. Liquidity Preference As Behavior Towards Risk. *Review Of Economic Studies*, 25:65-86.
- Toker, S., 2011. Ridge Regression Estimator and Related Estimators. Ç.U. MSc Thesis, Adana, 117p.
- _____, 2015. Improved Estimators in the Simultaneous Equations Model. Ç.U. PhD Thesis, Adana, 101p.
- Trenkler, G., 1978. An Iteration Estimator For The Linear Model. *Compstat, Physica – Verlag*, : 125–131.
- _____, 1984. On The Performance Of Biased Estimators In The Linear Regression Model With Correlated Or Heteroscedastic Errors. *J. Econom.*, 25:179-190.
- Trenkler, G., Toutenburg, H., 1990. Mean Squared Error Comparisons Between Biased Estimators-An Overview Of Recent Results. *Statist. Papers*, 31:165-179.
- Üstündağ Şiray, G., 2011. Lineer Tahmin Edicilerin Kabul Edilebilirliği. Ç.Ü. Doktora Tezi, Adana, 67s.
- _____, 2014. Modified And Restricted R-k Class Estimators. *Communications In The Statistics - Theory And Methods*, 43(24):5130-5155.

- Üstündağ Şiray, G., Kaçiranlar, S., Sakallıoğlu, S., 2014. R-k Class Estimator In The Linear Regression Model With Correlated Errors. *Statistical Papers*, 55(2):393-407.
- Üstündağ Şiray, G., Sakallıoğlu, S., 2012. Superiority Of The R-k Class Estimator Over Some Estimators In A Linear Model. *Communications In The Statistics - Theory And Methods*, 41(15): 2819-2832.
- Vigneau, E., Devaux, M. F., Qannari, E. M., Robert, P., 1997. Principal Component Regression, Ridge Regression And Ridge Principal Component Regression In Spectroscopy Calibration, *Journal of Chemometrics*, 11:239-249.
- Xu, J., Yang, H., 2009. On The Restricted R-k Class Estimator And The Restricted R-d Class Estimator In Linear Regression. *J. Stat. Comput. Simul. Med.*, <https://doi.org/10.1080/00949650903471023>.
- Yang, H., Chang, X., 2010. A New Two-Parameter Estimator In Linear Regression. *Commun. Stat. Theory Methods*, 39:923:934.
- Zellner, A., 1994. Bayesian and Non-Bayesian Estimation Using Balanced Loss Functions. In: Gupta, S. S., Berger, J. O., eds. *Statistical Decision Theory and Related Topics*. Vol. V. New York: Springer, pp. 377–390.



ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Adana’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana’da tamamladıktan sonra 2011 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü’nde lisans öğrenimine başladı. 2015 yılında bu bölümden mezun olduktan sonra 2017 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü’nde yüksek lisans öğrenimine başladı. Yüksek lisans eğitimine halen devam etmektedir.

