

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Nimet ÖZBAY

**LİNEER REGRESYONDA BAZI YANLI TAHMİN
EDİCİLERE BAYESYEN YAKLAŞIM**

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA-2017

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER REGRESYONDA BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLERE
BAYESYEN YAKLAŞIM**

Nimet ÖZBAY

DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu tez / /2017 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
DANIŞMAN

.....
Doç. Dr. Gülesen ÜSTÜNDAĞ ŞIRAY
ÜYE

.....
Yrd. Doç. Dr. Hüseyin GÜLER
ÜYE

.....
Prof. Dr. Müjgan TEZ
ÜYE

.....
Prof. Dr. Gülay BAŞARIR
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

**Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü**

**Bu Çalışma Ç. Ü. Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No: FDK-2015-3609-TÜBİTAK-2211-E-1649B031302838**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve
fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri
Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

LİNEER REGRESYONDA BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLERE
BAYESYEN YAKLAŞIM

Nimet ÖZBAY

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Yıl : 2017, Sayfa: 115
Jüri : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Doç. Dr. Gülesen ÜSTÜNDAĞ ŞİRAY
: Yrd. Doç. Dr. Hüseyin GÜLER
: Prof. Dr. Müjgan TEZ
: Prof. Dr. Gülay BAŞARIR

Bayes tahmin edici ve yanlı tahmin ediciler farklı araştırmacılar tarafından birbirinden bağımsız olarak tanımlanmışlardır. Önceki çalışmalar dikkatli bir şekilde incelendiğinde Bayes tahmin edici ve yanlı tahmin ediciler arasında birçok benzerlik olduğu görülmektedir. Ayrıca Bayes tahmin edici ve yanlı tahmin ediciler genellikle en küçük kareler tahmin ediciden daha küçük hata kareler ortalamasına sahiptir. Bu sonuç çoklu iç ilişkili veri setinin analizi için çok faydalı bulunmuştur. Rao (1971) ridge tahmin ediciyi Bayes tahmin edicinin özel bir hali olarak elde etmiştir. Stein-rule tahmin ediciye bayesyen yaklaşım ayrıntılı olarak Vinod ve Ullah (1981) tarafından verilmiştir. Bu çalışmada öncelikli olarak lineer regresyonda kullanılan bazı yanlı tahmin ediciler ile Bayes tahmin edici arasındaki ilişki incelenmektedir. Modified ridge tahmin edici, kısıtlı ridge tahmin edici, Liu tahmin edici, uyarlanmış optimal tahmin edici ve iki parametrelili tahmin edici bayesyen yaklaşımla ele alınmıştır. Bayes tahmin ediciyle ilişkili çeşitli tahmin ediciler bazı kriterler kullanılarak teorik olarak karşılaştırılmıştır. Sonuçlar sayısal örnek ve Monte Carlo simülasyonu ile desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bayesyen Yaklaşım, Karşılaştırmalar, Kısıtlı Bayes Tahmin Edici, Lineer Bayes Tahmin Edici, Yanlı Tahmin Ediciler

ABSTRACT

PhD THESIS

BAYESIAN INTERPRETATION OF SOME BIASED ESTIMATORS IN LINEER REGRESSION

Nimet ÖZBAY

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATİSTİCS

Supervisor : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Year : 2017, Pages: 115
Jury : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
: Assoc. Prof. Dr. Gülesen ÜSTÜNDAĞ ŞİRAY
: Asst. Prof. Dr. Hüseyin GÜLER
: Prof. Dr. Müjgan TEZ
: Prof. Dr. Gülay BAŞARIR

The Bayes estimator and biased estimators are discovered by different researchers quite independently. A careful study of the literature shows that these estimators have many similarities. Moreover, these estimators frequently have smaller mean square error than the least square estimator. This result is found to be very useful in the analysis of multicollinear data. Rao (1971) derives the ridge estimator as a special case of the Bayes estimator. A comprehensive presentation of the Bayesian interpretation of the Stein-rule estimator is given by Vinod and Ullah (1981). This study primarily deals with analyzing the relationship between some biased regression estimators and the Bayes estimator. Modified ridge estimator, restricted ridge estimator, Liu estimator, adaptive optimal estimator and two parameter estimator are discussed from a Bayesian point of view. Various biased estimators related to the Bayes estimator are compared theoretically according to some criteria. The results are supported by numerical example and Monte Carlo simulation.

Key Words: Bayesian Interpretation, Biased Estimators, Comparisons, Linear Bayes Estimator, Restricted Bayes Estimator

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Bayes tahmin ediciler istatistiğin hemen hemen tüm alanlarında ve pek çok ekonometrik çalışmada yoğun bir biçimde kullanılmaktadır. Bilinmeyen regresyon parametreleri hakkında yardımcı bilgiler mevcut olduğunda parametre tahmini yapmanın en etkili yollarından biri regresyona bayesyen yaklaşımı kullanmaktır. Bayesyen yaklaşımda parametre olasılık dağılımı olan bir rasgele değişken gibi düşünülmektedir. Bu doğrultuda parametre için bir olasılık dağılımı belirlenir. Bilinmeyen parametre vektörünün olasılık dağılımı değiştirilerek farklı Bayes tahmin ediciler elde edilebilir. Bu nedenle Bayes tahmin ediciler regresyondaki pek çok tahmin ediciyle doğrudan ilişkilidir. Bayes tahmin edicinin bu özelliği, bu tahmin edicilerin bayesyen yaklaşımla elde edilmesine olanak sağlamıştır.

Bölüm 1’de lineer regresyon modeli için çalışmanın ilerleyen kısımlarında kullanılacak bazı ön bilgilere ve tahmin edicilerin iyiliğini belirlemek için kullanılan kriterlere yer verilmiştir.

Bölüm 2’de istatistikte ve ekonometride yaygın olarak kullanılan bazı yanlış tahmin ediciler tanımlanmıştır ve bu tahmin edicilerin istatistiksel özellikleri incelenmiştir.

Bölüm 3’de çeşitli kaynaklarda ele alınan ridge tahmin ediciye bayesyen yaklaşım ve Stein-rule tahmin ediciye bayesyen yaklaşım konuları incelenmiştir. Bunun yanında modified ridge, kısıtlı ridge, Liu, uyarlanmış optimal ve iki parametrelili tahmin edicilere bayesyen yaklaşım ilk kez bu çalışmada ortaya konulmuştur.

Bölüm 4’de lineer regresyon modelinde ve gecikmesi dağıtılmış modelde kullanılan tahmin ediciler farklı kayıp fonksiyonları altında karşılaştırılmıştır. Ayrıca bu modeller için yeni tahmin ediciler tanımlanarak performansları incelenmiştir.

İlk olarak uyarlanmış optimal tahmin edici ve en küçük kareler tahmin edici genişletilmiş dengeli kayıp fonksiyonu altında risk kriterine göre teorik olarak karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmada uyarlanmış optimal tahmin edicinin en küçük kareler tahmin ediciden genişletilmiş dengeli kayıp fonksiyonu altında risk kriterine göre her zaman daha iyi olduğu gösterilmiştir. Bunun yanında karşılaştırmada elde edilen teorik bulgu bazı özel durumlar için incelenmiştir. Buradan elde edilen teorik sonuçlar geniş kapsamlı bir Monte Carlo simülasyon çalışmasıyla desteklenmiştir.

Genel lineer regresyon modeli için lineer kısıtlar altında uygulanabilir genelleştirilmiş kısıtlı ridge tahmin edici tanımlanmıştır. Yeni tanımlanan bu tahmin ediciye bayesyen yaklaşım konusu ele alınarak uygulanabilir genelleştirilmiş kısıtlı ridge tahmin edicinin bir uygulanabilir genelleştirilmiş kısıtlı Bayes tahmin edici olduğu gösterilmiştir. Sonraki aşamada uygulanabilir genelleştirilmiş kısıtlı ridge tahmin edicinin teorik performansı matris değerli hata kareler ortalaması kriterine göre kısıtlar doğru iken ve kısıtlar doğru değil iken incelenmiştir. Teorik sonuçlar Monte Carlo simülasyonu ile desteklenmiştir.

Bayesyen tahmin ediciler ve yanlı tahmin ediciler ekonometrik modellerde yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. Bu nedenle çalışmanın ilerleyen bölümlerinde gecikmesi dağıtılmış modellerde Almon iki parametrelili tahmin edici tanımlanıp teorik sonuçlara yer verilmiştir. Teorik sonuçlar sayısal örnek ve Monte Carlo simülasyon çalışması ile desteklenmiştir.

Gecikmesi dağıtılmış modellerde Liu tipi Shiller tahmin edici tanımlanarak bu tahmin edicinin hedef fonksiyonu altında matris değerli kestirimci hata kareler ortalaması kriterine göre kestirim performansı teorik olarak incelenmiştir. Daha sonra teorik bulgular ekonometrik olarak anlamlı sonuçlar elde etmek için üç tip gerçek parametre vektörü kullanılarak Monte Carlo simülasyon çalışması yardımıyla incelenmiştir.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince bilimsel kabiliyeti ve duruşu ile kendime örnek edindiğim, bilgisini ve deneyimlerini her zaman çok cömertçe paylaşan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR'a sonsuz saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca doğru konu ve problem seçimleriyle çalışmalarına yön vermiş ve moral ve motivasyon konusunda en büyük destekçim olmuştur. Kendisinin öğrencisi olmaktan her zaman gurur duydum.

Lisans, yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca kendilerinden ders aldığım Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü ve Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim. Tez çalışmam süresince faydalı bilgi ve görüşlerini esirgemeyen doktora tez izleme komitesi üyeleri Doç. Dr. Gülesen ÜSTÜNDAĞ ŞİRAY ve Yrd. Doç. Dr. Hüseyin GÜLER'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü'nde görev yapan tüm çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Beni bugünlere getiren, hiçbir zaman sevgisini ve desteğini esirgemeyen, hayatın zorluklarına karşı cesaretli ve kararlı bir duruş sergilemeyi öğreten, her başarıyı benden daha çok hak eden sevgili annem Sevgi TÜRKER'e, sevgili babam Cemal Ata TÜRKER'e ve sevgili abim Mesut TÜRKER'e teşekkür ederim.

Birlikte yürüdüğümüz yolda bana her zaman destek olan ve hayatımın sonuna kadar da destek olacağını bildiğim çok sevdiğim eşim Alper ÖZBAY'a ve hayatımıza anlam katan biricik kızımız Defne ÖZBAY'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ.....	I
ABSTRACT	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR.....	V
İÇİNDEKİLER.....	VI
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	X
ŞEKİLLER DİZİNİ	XII
SİMGELER VE KISALTMALAR	XIV
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Lineer Regresyon Modeli	1
1.2. Lineer Tahmin Ediciler.....	4
1.3. Tahmin Edicilerin İyiliğini Belirlemek için Kullanılan Kriterler.....	5
1.3.1. Matris Değerli Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Hata Kareler Ortalaması	6
1.3.2. Skaler Değerli Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Hata Kareler Ortalaması	7
1.3.3. Ağırlıklandırılmış Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Riski	8
1.3.4. Kestirimci Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Riski	8
1.3.5. Zellner'in Dengeli Kayıp Fonksiyonu ve Riski.....	9
1.3.6. Hedef Fonksiyonu ve Hedef Fonksiyonu Altında PMSE Kriteri	9
1.3.7. Genişletilmiş Dengeli Kayıp Fonksiyonu ve Riski	10
2. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER	13
2.1. Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmin Edici	13
2.2. Ridge Tahmin Edici.....	15
2.2.1. Yanlılık parametresi k 'nın seçimi	19
2.3. Modified Ridge Tahmin Edici.....	21
2.4. Kısıtlı Ridge Tahmin Edici.....	24

2.5. Stein-Rule Tahmin Edici	25
2.6. Liu Tahmin Edici.....	29
2.7. Uyarlanmış Optimal Tahmin Edici.....	31
2.8. İki Parametrelili Tahmin Edici	34
3. TAHMİN EDİCİLERE BAYESYEN YAKLAŞIM	37
3.1. Lineer Regresyon Modelinde Bayes Tahmin Ediciler.....	37
3.1.1. Bayes ve Kısıtlı Bayes Tahmin Edici	37
3.2. Tahmin Edicilere Bayesyen Yaklaşım	45
3.2.1. Ridge Tahmin Ediciye Bayesyen Yaklaşım	45
3.2.2. Modified Ridge Tahmin Ediciye Bayesyen Yaklaşım	46
3.2.3. Kısıtlı Ridge Tahmin Ediciye Bayesyen Yaklaşım	47
3.2.4. Stein-Rule Tahmin Ediciye Bayesyen Yaklaşım.....	47
3.2.5. Liu Tahmin Ediciye Bayesyen Yaklaşım	49
3.2.6. Uyarlanmış Optimal Tahmin Ediciye Bayesyen Yaklaşım	50
3.2.7. İki Parametrelili Tahmin Ediciye Bayesyen Yaklaşım.....	51
4. KARŞILAŞTIRMALAR.....	53
4.1. Lineer Regresyon Modelinde Karşılaştırmalar.....	53
4.1.1. AO Tahmin Edici ve EKK Tahmin Edicinin EBLF Kriterine Göre Karşılaştırılması	53
4.1.1.1. Teorik Karşılaştırma	53
4.1.1.2. Monte Carlo Simülasyonu	57
4.1.2. Genel Lineer Regresyon Modeli için Uygulanabilir Genelleştirilmiş Kısıtlı Ridge Regresyon Tahmin Edici ve Performansı	64
4.1.2.1. Tanım.....	64
4.1.2.2. Teorik Karşılaştırma	69
4.1.2.3. Monte Carlo Simülasyonu	73
4.2. Gecikmesi Dağıtılmış Modellerde Karşılaştırmalar	80
4.2.1. Gecikmesi Dağıtılmış Modellerde Almon İki Parametrelili Tahmin Edici ve Performansı.....	80

4.2.1.1. Tanım.....	80
4.2.1.2. Teorik Karşılaştırma	84
4.2.1.3. Sayısal Örnek.....	87
4.2.1.4. Monte Carlo Simülasyonu	88
4.2.2. Gecikmesi Dağıtılmış Modellerde Liu tipi Shiller Tahmin Edici ve Performansı	93
4.2.2.1. Tanım.....	93
4.2.2.2. Teorik Karşılaştırma	96
4.2.2.3. Monte Carlo Simülasyonu	98
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	105
KAYNAKLAR.....	107
ÖZGEÇMİŞ.....	115

ÇİZELGELER DİZİNİ

SAYFA

Çizelge 4.1.	$n = 40$ ile tahmin edilmiş risk değerleri.....	59
Çizelge 4.2.	$n = 100$ ile tahmin edilmiş risk değerleri.....	60
Çizelge 4.3.	$n = 500$ ile tahmin edilmiş risk değerleri.....	61
Çizelge 4.4.	Bazı özel durumlar için tahmin edilmiş risk değerleri	63
Çizelge 4.5.	1. tip kısıtlar altında AR(1) süreci hataları ile elde edilen mse değerleri.....	76
Çizelge 4.6.	1. tip kısıtlar altında MA(1) süreci hataları ile elde edilen mse değerleri.....	77
Çizelge 4.7.	2. tip kısıtlar altında AR(1) süreci hataları ile elde edilen mse değerleri.....	78
Çizelge 4.8.	2. tip kısıtlar altında MA(1) süreci hataları ile elde edilen mse değerleri.....	79
Çizelge 4.9.	Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri	88
Çizelge 4.10.	$\varphi = 0.5$ iken Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri.....	89
Çizelge 4.11.	$\varphi = 0.8$ iken Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri.....	90
Çizelge 4.12.	$\varphi = 0.9$ iken Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri.....	90
Çizelge 4.13.	$\varphi = 0.95$ iken Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri.....	91
Çizelge 4.14.	$\varphi = 0.99$ iken Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri.....	91
Çizelge 4.15.	$\varphi = 0.999$ iken Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri.....	92
Çizelge 4.16.	Monte Carlo deneyinde kullanılan gerçek parametre değerleri (Chanda ve Maddala, 1984)	99

ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 4.1. $\varphi = 0.8$ iken Deney I için elde edilen pmse değerleri	100
Şekil 4.2. $\varphi = 0.8$ iken Deney II için elde edilen pmse değerleri.....	100
Şekil 4.3. $\varphi = 0.8$ iken Deney III için elde edilen pmse değerleri	100
Şekil 4.4. $\varphi = 0.9$ iken Deney I için elde edilen pmse değerleri	101
Şekil 4.5. $\varphi = 0.9$ iken Deney II için elde edilen pmse değerleri.....	101
Şekil 4.6. $\varphi = 0.9$ iken Deney III için elde edilen pmse değerleri	101
Şekil 4.7. $\varphi = 0.99$ iken Deney I için elde edilen pmse değerleri	102
Şekil 4.8. $\varphi = 0.99$ iken Deney II için elde edilen pmse değerleri.....	102
Şekil 4.9. $\varphi = 0.99$ iken Deney III için elde edilen pmse değerleri	102

SİMGELER VE KISALTMALAR

pd	: Pozitif tanımlı (Positive definite)
nnd	: Negatif olmayan tanımlı (Non-negative definite)
EKK	: En küçük kareler (Least squares)
RLS	: Kısıtlı en küçük kareler (Restricted least squares)
RR	: Kısıtlı ridge (Restricted ridge)
SR	: Stein-rule
AO	: Uyarlanmış Optimal (Adaptive optimal)
FGREKK	: Uygulanabilir genelleştirilmiş kısıtlı en küçük kareler (Feasible generalized restricted least squares)
FGR	: Uygulanabilir genelleştirilmiş ridge (Feasible generalized ridge)
FGRR	: Uygulanabilir genelleştirilmiş kısıtlı ridge (Feasible generalized restricted ridge)
MSE	: Matris değerli hata kareler ortalaması (Matrix mean square error)
mse	: Skaler değerli hata kareler ortalaması (Scalar mean square error)
PMSE	: Matris değerli kestirimci hata kareler ortalaması (Matrix prediction mean square error)
pmse	: Skaler değerli kestirimci hata kareler ortalaması (Scalar prediction mean square error)
EBLF	: Genişletilmiş dengeli kayıp fonksiyonu (Extended balanced loss function)
MR	: Modified ridge
$L(\tilde{\beta})$	: $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin matris değerli karesel kayıp fonksiyonu
$E(\tilde{\beta})$	: $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin beklenen değeri
$Var(\tilde{\beta})$	: $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin varyans-kovaryans matrisi
$Bias(\tilde{\beta})$	: $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin yanlılığı
$\hat{\beta}$	: En küçük kareler tahmin edici

$\hat{\beta}_R$	: Kısıtlı en küçük kareler tahmin edici
$\hat{\beta}_k$	: Ridge tahmin edici
$\hat{\beta}_m(k)$	: Modified ridge tahmin edici
$\hat{\beta}_R(k)$	: Kısıtlı ridge tahmin edici
$\hat{\beta}^*(k)$	: Kısıtlı ridge tahmin edici
$\hat{\beta}_{SR}$	: Stein-rule tahmin edici
$\hat{\beta}_d$	: Liu tahmin edici
$\hat{\beta}_F$	: Uyarlanmış optimal tahmin edici
$\hat{\beta}(k, d)$	: İki parametrelili tahmin edici
$\hat{\beta}_B$	: Lineer Bayes tahmin edici
$\hat{\beta}_{RB}$	: Kısıtlı Bayes tahmin edici
$\hat{\beta}_{GEKK}$	: Genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edici
$\hat{\beta}_{GR}(k)$	: Genelleştirilmiş ridge tahmin edici
$\hat{\beta}_{GB}$	: Genelleştirilmiş lineer Bayes tahmin edici
$\hat{\beta}_{GRB}$	: Genelleştirilmiş kısıtlı Bayes tahmin edici
$\check{\beta}_R$	: Genelleştirilmiş kısıtlı en küçük kareler tahmin edici
$\check{\beta}$	: Uygulanabilir genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edici
$\check{\beta}_{GR}(k)$	: Uygulanabilir genelleştirilmiş ridge tahmin edici
$\check{\beta}_{FGB}$	: Uygulanabilir genelleştirilmiş lineer Bayes tahmin edici
$\check{\beta}_{FGRB}$	: Uygulanabilir genelleştirilmiş kısıtlı Bayes tahmin edici
$\bar{\beta}_S$	: Kısıtlı Stein-rule tahmin edici
$\check{\beta}_{GRR}(k)$	: Uygulanabilir genelleştirilmiş kısıtlı ridge tahmin edici
$\hat{\beta}_{SH}$	: Shiller tahmin edici
$\hat{\beta}_{LT}$	: Liu tipi tahmin edici
$\hat{\beta}_{LT}(SH)$	: Liu tipi Shiller tahmin edici
$\hat{\alpha}_A$	: Almon tahmin edici
$\hat{\alpha}_k$	: Almon ridge tahmin edici

$\hat{\alpha}_d$: Almon Liu tahmin edici
 $\hat{\alpha}(k, d)$: Almon iki parametreli tahmin edici

1. GİRİŞ

Bu bölümde lineer regresyon modeli için çalışmanın ilerleyen kısımlarında kullanılacak bazı ön bilgilere ve tahmin edicilerin iyiliğini belirlemek için kullanılan kriterlere yer verilmiştir.

1.1. Linear Regresyon Modeli

$$y = X\beta + u \quad (1.1.)$$

çoklu lineer regresyon modeli verilsin. Burada, n ; gözlem sayısı, p ; bağımsız değişken sayısı olmak üzere $y:n \times 1$ bağımlı değişkene ait gözlem vektörü, $X:n \times p$ tam sütun ranklı p tane bağımsız değişkenin gözlem matrisi, $\beta:p \times 1$ bilinmeyen regresyon katsayılarının vektörü ve $u:n \times 1$ hataların vektörüdür. Çoklu lineer regresyonda temel amaç n gözlemi kullanarak β 'nın elemanlarını tahmin etmektir. Ayrıca regresyon modelleri verinin tanımlanması, parametre tahmini, ön tahmin ve kontrol amaçlı da kullanılabilir. (1.1) modelinin varsayımları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- X matrisi stokastik olmayan bir matristir. $X'X$ matrisi ise tekil olmayan bir matristir ve $rank(X'X) = p$ olmalıdır.
- X matrisinin sütun vektörleri lineer bağımsızdır ($rank(X) = p$). Yani bağımsız değişkenler arasında doğrusal veya doğrusala yakın bir ilişki yoktur. Bu varsayımın sağlanmaması durumunda $X'X$ matrisinin tersi alınamayacağından parametre tahminleri yapılamaz. Tersinin alınabildiği durumlarda ise parametre tahminleri tutarsız ve tahminlerin varyansları büyük olabilir.
- $n \geq p$ 'dir. X matrisinin tam sütun ranklı olabilmesi için gözlem sayısı modeldeki bağımsız değişken sayısından fazla olmalıdır.
- $E(u) = 0$ 'dır. Yani hata teriminin ortalaması sıfıra eşittir. Bu varsayımın sağlanmadığı durumlarda parametre tahminleri gerçek değerlerinden daha

büyük veya küçük değerler alırlar. Bu durumda yanlış parametre tahminleri elde edilir (Graybill, 1961).

- $Var(u) = \sigma_u^2 I$ olmalıdır. Bu varsayıma göre hata teriminin varyansı bağımsız değişkendeki değişmelere bağlı olarak değişmeyip aynı kalır, yani hatalar sabit varyanslıdır (Myers, 1990). Ayrıca $Cov(u_i, u_j) = 0$ $i, j = 1, 2, \dots, n'$ dir. Yani hatalar birbirleriyle ilişkisizdir. Bu varsayımın sağlanmadığı durumda hata terimleri arasında otokorelasyon vardır. Bunun sonucunda ise parametre tahminleri yanlış olacaktır fakat etkin olmayacak ve hata teriminin varyansı olduğundan daha küçük tahmin edilecektir.
- n' 'nin büyük değerleri için $n^{-1}X'X$ matrisinin limiti var ve p ranklı singüler olmayan bir matris olmalıdır. Bu varsayım asimptotik özellikler kullanılarak modelin incelenmesine olanak sağlayacaktır.

(1.1) modelinde bilinmeyen regresyon parametrelerini tahmin edebilmek için sıklıkla en küçük kareler (EKK) yöntemi kullanılır. Bunun için

$$\begin{aligned}
 S(\beta) &= \sum_{i=1}^n u_i^2 \\
 &= u'u \\
 &= (y - X\beta)'(y - X\beta) \\
 &= y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta
 \end{aligned} \tag{1.2.}$$

hata kareler toplamını minimum yapacak şekilde parametre tahminleri bulunur.

(1.2) fonksiyonunun β 'ya göre kısmi türevleri sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = X'X\beta - X'y = 0$$

bulunur ve böylece EKK normal denklemleri

$$X'X\beta = X'y \tag{1.3.}$$

elde edilir. X tam sütun ranklı olduğunda (1.3)'ün çözümünden β 'nın EKK tahmin edicisi

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \quad (1.4.)$$

olarak elde edilir. Ancak X tam ranklı değilse

$$\hat{\beta} = GX'y \quad (1.5.)$$

olacak şekilde bir G matrisi bulunabilir. Burada G matrisi $X'X$ matrisinin genelleştirilmiş tersi olup tek değildir. Bu durumda (1.3)'deki EKK normal denklemlerinin birden çok çözümü vardır. Bu nedenle $\hat{\beta}$ artık bir tahmin edici olarak düşünülemez. Böyle bir durumda β parametresinin tahmin edilebilir fonksiyonlarını kullanmak faydalı olacaktır.

$p: p \times 1$ ve $l: n \times 1$ bilinen sabitlerin vektörü olmak üzere $E(l'y) = p'\beta$ olacak şekilde y gözlemlerinin bir $l'y$ lineer kombinasyonu var ise $p'\beta$ tahmin edilebilir. $p'\beta$ tahmin edilebilir fonksiyonunun bir tahmin edicisi $p'\hat{\beta}$ 'dir. Eğer $X'XGp = p$ ya da $p'GX'X = p'$ ise başka bir deyişle $p: p \times 1$ vektörü, X matrisinin satır uzayında ise $p'\hat{\beta}$ tahmini tektir.

β parametresi $\hat{\beta}$ ile tahmin edildiğinde hata vektörü u için

$$\hat{u} = y - X\hat{\beta} \quad (1.6.)$$

tahmin edicisi elde edilir. Tahmin edilen hata kareler toplamı $n - p$ ile bölüldüğünde

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-p} \quad (1.7.)$$

σ_u^2 'nin yansız ve tutarlı bir tahmini elde edilir. $\hat{\beta}$ 'nın örneklem özellikleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= E[(X'X)^{-1}X'y] = (X'X)^{-1}X'E(y) = \beta \\ \text{Var}(\hat{\beta}) &= E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] \\ &= (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1} \\ &= \sigma_u^2(X'X)^{-1}. \end{aligned}$$

$\hat{\beta}$ EKK tahmin edici β parametresi için en iyi lineer yansız tahmin edici olma özelliğine sahiptir. Ancak model varsayımlarının sağlanmaması durumunda EKK yöntemiyle tahmin edilen parametreler güvenilir olmayabilir. X matrisinin kolonları arasında lineer bağımlılık olması durumunda çoklu iç ilişki problemi ortaya çıkabilir. Çoklu iç ilişki olan bir veride, parametrelerin EKK tahminlerinin mutlak değerce büyük olduğu bilinmektedir (Montgomery ve Peck, 1992). Ayrıca çoklu iç ilişkinin olduğu bir veride EKK tahmin yöntemi kullanıldığında örneklem varyansları büyümektedir. Bunun sonucunda parametreler için elde edilen güven aralıkları geniş olur, anlamlı regresyon katsayıları modelden çıkarılabilir ve nokta tahminler iyi sonuç vermezler. Regresyon parametrelerinin tahmini için EKK yöntemi kullanıldığında karşılaşılan bu gibi problemlerden dolayı farklı tahmin yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır.

1.2. Lineer Tahmin Ediciler

Tanım 1.1. $\beta: p \times 1$ parametre vektörü için lineer tahmin ediciler

$$\tilde{\beta} = Ay + a \quad (1.8.)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $A: p \times n$ stokastik olmayan bir matris ve $a: p \times 1$ stokastik olmayan vektördür. $a = 0$ ise $\tilde{\beta}$ lineer tahmin edici homojen lineer

tahmin edici olarak adlandırılır, $a \neq 0$ ise $\tilde{\beta}$ lineer tahmin edici heterojen lineer tahmin edici olarak adlandırılır. Bu tanımdan, β parametresi için EKK tahmin edicinin $A = (X'X)^{-1}X'$ ve $a = 0$ ile bir homojen lineer tahmin edici olduğu görülmektedir.

1.3. Tahmin Edicilerin İyiliğini Belirlemek için Kullanılan Kriterler

Tanım 1.2. Ω parametre uzayındaki θ parametresinin bir tahmin edicisi $\hat{\theta}$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $L(\hat{\theta}, \theta)$ fonksiyonuna kayıp fonksiyonu denir.

i) $\forall \theta \in \Omega$ ve $\forall \hat{\theta}$ için $L(\hat{\theta}, \theta) > 0$

ii) $\theta = \hat{\theta}$ için $L(\hat{\theta}, \theta) = 0$.

$\tilde{\beta}$, β 'nın bir tahmin edicisi olmak üzere $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin kayıp fonksiyonu $L(\tilde{\beta})$ ile gösterilsin.

Tanım 1.3. β 'nın bir $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin $L(\tilde{\beta})$ kayıp fonksiyonu altındaki beklenen kaybı

$$R(\tilde{\beta}) = E[L(\tilde{\beta})] \quad (1.9.)$$

bu tahmin edicinin ilgili kayıp fonksiyonu altındaki beklenen riski olarak tanımlanır.

Tahmin edicilerin iyiliğini belirlemek için yapılan çalışmalarda aşağıdaki tanım ve teoremler sıklıkla kullanılmaktadır.

Tanım 1.4. $A: m \times m$ simetrik bir matris ve $x: m \times 1$ bir vektör olmak üzere $\forall x \neq 0$ için $x'Ax > 0$ ise A matrisine pozitif tanımlı (positive definite, pd) matris denir.

Tanım 1.5. $A: m \times m$ simetrik bir matris ve $x: m \times 1$ bir vektör olmak üzere $\forall x \neq 0$ için $x'Ax \geq 0$ ise A matrisine negatif olmayan tanımlı (non-negative definite, nnd) matris denir.

Tanım 1.6. $A: n \times n$ ve $B: n \times n$ herhangi iki matris olsun. $|A - \lambda B| = 0$ denklemini sağlayan $\lambda_i = \lambda_i^B(A)$ ($i = 1, \dots, n$) kökleri A 'nın B metriğindeki özdeğerleri olarak adlandırılır.

Tanım 1.7. β 'nın iki tahmin edicisi $\tilde{\beta}_1$ ve $\tilde{\beta}_2$ olmak üzere $R(\tilde{\beta}_2) - R(\tilde{\beta}_1) \geq 0$ ise $\tilde{\beta}_1$ tahmin edicisi $L(\tilde{\beta})$ kayıp fonksiyonu altında $\tilde{\beta}_2$ tahmin edicisinden üstündür.

Teorem 1.1. $A: m \times m$ bir matris, $G: n \times m$ tam sütun ranklı bir matris olsun. Bu durumda A 'nın simetrik nnd olması için gerek ve yeter koşul GAG' matrisinin simetrik nnd olmasıdır (Rao ve Toutenburg, 1995).

Teorem 1.2. $A: m \times m$ simetrik pd bir matris, $a: m \times 1$ bir vektör ve $\alpha > 0$ keyfi bir skaler olsun. $\alpha A - aa' \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $a'A^{-1}a \leq \alpha$ olmasıdır (Farebrother, 1976).

Teorem 1.3. $A: n \times n$ herhangi bir simetrik matris, $a: n \times 1$ bir vektör ve $\alpha > 0$ bir sabit olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i) $\alpha A - aa' \geq 0$
- (ii) $A \geq 0$, $A \in R(A)$ ve A^- , A 'nın herhangi bir genelleştirilmiş tersi olmak üzere $a'A^-a \leq \alpha$ 'dır (Rao ve Toutenburg, 1995).

Teorem 1.4. $A > 0$ ($A \geq 0$) ve $B > 0$ olsun. $A - B \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_i^B(A) \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$) olmasıdır (Rao ve Toutenburg, 1995).

1.3.1. Matris Değerli Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Hata Kareler Ortalaması

β 'nın bir $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin matris değerli karesel kayıp fonksiyonu

$$L(\tilde{\beta}) = (\tilde{\beta} - \beta)(\tilde{\beta} - \beta)' \quad (1.10.)$$

olarak tanımlanır. Bu kayıp fonksiyonuna göre risk yani matris değerli hata kareler ortalaması (Mean Square Error, MSE) ise

$$MSE(\tilde{\beta}) = E[(\tilde{\beta} - \beta)(\tilde{\beta} - \beta)'] \quad (1.11.)$$

şeklinde tanımlanır. $\tilde{\beta}$ 'nın yanlılığı yani β ile $E(\tilde{\beta})$ arasındaki farkı $Bias(\tilde{\beta})$ ile gösterilirse (1.11) eşitliği

$$MSE(\tilde{\beta}) = Var(\tilde{\beta}) + Bias(\tilde{\beta})Bias(\tilde{\beta})' \quad (1.12.)$$

olarak ifade edilebilir.

1.3.2. Skaler Değerli Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Hata Kareler Ortalaması

β 'nın bir $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin skaler değerli karesel kayıp fonksiyonu

$$L(\tilde{\beta}) = (\tilde{\beta} - \beta)'(\tilde{\beta} - \beta) \quad (1.13.)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu kayıp fonksiyonuna göre risk

$$mse(\tilde{\beta}) = E[(\tilde{\beta} - \beta)'(\tilde{\beta} - \beta)] \quad (1.14.)$$

skaler değerli MSE olarak adlandırılır. Skaler değerli MSE, matris değerli MSE'nin izi olarak ifade edilebilir. Yani;

$$mse(\tilde{\beta}) = trE[(\tilde{\beta} - \beta)(\tilde{\beta} - \beta)'] = trMSE(\tilde{\beta})$$

formunda yazılabilir.

Skaler değerli MSE'nin kullanılması, matris değerli MSE'nin köşegen dışı elemanlarının göz ardı edilmesi ve $(\tilde{\beta}_i - \beta)$ farklarının tamamının eşit ağırlıklandırılması anlamına gelir. Bu nedenle matris değerli MSE, skaler değerli MSE'den daha iyi bir kriterdir. Fakat hesaplanması daha zor olduğundan uygulamada genellikle skaler değerli MSE tercih edilir.

1.3.3. Ağırlıklandırılmış Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Riski

$W: p \times p$ simetrik pd bir matris olmak üzere β 'nın bir $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin ağırlıklandırılmış karesel kayıp fonksiyonu

$$L_w(\tilde{\beta}) = (\tilde{\beta} - \beta)'W(\tilde{\beta} - \beta) \quad (1.15.)$$

şeklinde tanımlanır. $W = I_p$ alınırsa skaler değerli karesel kayıp fonksiyonu elde edilir. Tahmin problemlerinde bazen $W \neq I_p$ ağırlık matrisinin kullanılması faydalı olabilir. Örneğin, W köşegen elemanları birbirinden farklı köşegen ağırlık matrisi olarak kullanılırsa $(\tilde{\beta}_i - \beta)^2$ uzaklık kareleri toplam kayba daha az veya daha fazla etki edebilecektir. (1.15) kayıp fonksiyonuna göre risk, matris değerli ağırlıklandırılmış MSE cinsinden

$$wmse(\tilde{\beta}) = trE[(\tilde{\beta} - \beta)W(\tilde{\beta} - \beta)'] = trWMSE(\tilde{\beta}) \quad (1.16.)$$

formunda ifade edilebilir.

1.3.4. Kestirimci Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Riski

β 'nın bir $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin kestirimci karesel kayıp fonksiyonu

$$L_p(\tilde{\beta}) = (y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta}) \quad (1.17.)$$

şeklinde tanımlanır. Genellikle gelecekteki X değerleri için y 'nin tahmini $X\tilde{\beta}$ kestiricisi kullanılarak yapılmaktadır. (1.17) kayıp fonksiyonuna göre risk

$$pmse(\tilde{\beta}) = E[(y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta})] \quad (1.18.)$$

skaler değerli kestirimci hata kareler ortalaması (scalar prediction mean square error, pmse) olarak adlandırılır. Matris değerli kestirimci hata kareler ortalaması (Matrix Prediction Mean Square Error, PMSE) ise

$$PMSE(\tilde{\beta}) = E[(y - X\tilde{\beta})(y - X\tilde{\beta})'] \quad (1.19.)$$

şeklinde tanımlanır.

1.3.5. Zellner'in Dengeli Kayıp Fonksiyonu ve Riski

t , 0 ile 1 arasında tanımlı bir skaler olsun. $\tilde{\beta}$, β 'nın bir tahmin edicisi olmak üzere Zellner (1994) dengeli kayıp fonksiyonunu

$$L_Z(\tilde{\beta}) = t(y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta}) + (1 - t)(\tilde{\beta} - \beta)'X'X(\tilde{\beta} - \beta) \quad (1.20.)$$

formunda tanımlanmıştır. (1.20)'deki birinci terim $(y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta})$ uyumun iyiliğinin ve ikinci terim $(\tilde{\beta} - \beta)'X'X(\tilde{\beta} - \beta)$ tahminin iyiliğinin bir ölçüsüdür. (1.20) kayıp fonksiyonuna göre risk

$$ZBLF(\tilde{\beta}) = tE[(y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta})] + (1 - t)E[(\tilde{\beta} - \beta)'X'X(\tilde{\beta} - \beta)] \quad (1.21.)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

1.3.6. Hedef Fonksiyonu ve Hedef Fonksiyonu Altında PMSE Kriteri

Genellikle bir lineer regresyon modelinde kestirimler gözlemlerin belirli bir zamandaki gerçek değerleri ya da ortalama değerleri için yapılır. Fakat bazı durumlarda gerçek ve ortalama değerlerin kestirimlerinin eş zamanlı olarak düşünülmesi gerekebilir.

$\tilde{\beta}$, β 'nın bir tahmin edicisi olmak üzere genellikle gözlemlerin gerçek değerlerini ya da $E(y) = X\beta$ ortalama değerlerinin kestirimini yapmak için $\hat{T} = X\tilde{\beta}$ kullanılır. Eğer ele alınan problem gerçek ve ortalama değerlerin eş zamanlı olarak kestirimini yapmayı gerektirirse

$$T(y) = ty + (1 - t)E(y) \quad (1.22.)$$

hedef fonksiyonu tanımlanır ve hedef fonksiyonunun tahmini için $\hat{T} = X\tilde{\beta}$ kullanılır. Burada t , hedef fonksiyonunda gerçek ve ortalama değerlerin ağırlığını belirleyen keyfi bir skaler olup $0 \leq t \leq 1$ aralığında tanımlıdır (Shalabh, 1995). T 'nin $\hat{T}$ kestiricisi için hedef fonksiyonu altında kayıp fonksiyonu

$$L_T(\hat{T}) = (\hat{T} - T)(\hat{T} - T)' \quad (1.23.)$$

ve (1.23) altında PMSE matrisi

$$PMSE(\hat{T}) = E[(\hat{T} - T)(\hat{T} - T)'] \quad (1.24.)$$

şeklinde tanımlıdır. Skaler PMSE değeri ise

$$pmse(\hat{T}) = E[(\hat{T} - T)'(\hat{T} - T)] \quad (1.25.)$$

formunda ifade edilebilir.

1.3.7. Genişletilmiş Dengeli Kayıp Fonksiyonu ve Riski

y 'nin gerçek ve ortalama değerlerinin eş zamanlı ön tahminini yapmak için $X\tilde{\beta}$ kestirimcisi kullanılarak (1.25)'deki hedef fonksiyonu altında pmse değeri

$$\begin{aligned}
pmse(\hat{T}) &= (\hat{T} - T)'(\hat{T} - T) = (X\tilde{\beta} - T)'(X\tilde{\beta} - T) \\
&= t^2(X\tilde{\beta} - y)'(X\tilde{\beta} - y) + (1 - t)^2(\tilde{\beta} - \beta)'X'X(\tilde{\beta} - \beta) \\
&\quad + 2t(1 - t)(X\tilde{\beta} - y)'X(\tilde{\beta} - \beta)
\end{aligned} \tag{1.26.}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$\tilde{\beta}$, β 'nın bir tahmin edicisi olmak üzere Shalabh ve ark. (2009), $ZBLF(\tilde{\beta})$ ve $pmse(\hat{T})$ ifadelerinin fonksiyonel formlarını göz önüne alarak genişletilmiş dengeli kayıp fonksiyonunu (Extended Balanced Loss Function, EBLF) aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

$$\begin{aligned}
L_E(\tilde{\beta}) &= t_1(X\tilde{\beta} - y)'(X\tilde{\beta} - y) + t_2(\tilde{\beta} - \beta)'X'X(\tilde{\beta} - \beta) \\
&\quad + (1 - t_1 - t_2)(X\tilde{\beta} - y)'X(\tilde{\beta} - \beta).
\end{aligned} \tag{1.27.}$$

Burada t_1 ve t_2 0 ile 1 arasında tanımlı ve kayıp fonksiyonlarını niteleyen skaler değerlerdir. (1.27) ifadesinde üçüncü terim uyumun iyiliği ve tahminin iyiliği arasındaki ilişkinin ölçüsüdür. Daha açık olarak ifade etmek gerekirse, (1.27) denklemi uyumun iyiliğini, tahminin iyiliğini ve bunlar arasındaki ilişkiyi ölçmek için kayıp fonksiyonlarını içermektedir. (1.27) kayıp fonksiyonu altında risk

$$\begin{aligned}
EBLF(\tilde{\beta}) &= t_1 E[(X\tilde{\beta} - y)'(X\tilde{\beta} - y)] + t_2 E[(\tilde{\beta} - \beta)'X'X(\tilde{\beta} - \beta)] \\
&\quad + (1 - t_1 - t_2) E[(X\tilde{\beta} - y)'X(\tilde{\beta} - \beta)]
\end{aligned} \tag{1.28.}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$EBLF(\tilde{\beta})$, $ZBLF(\tilde{\beta})$ 'ye göre daha iyi bir kriterdir. $ZBLF(\tilde{\beta})$ uyumun iyiliği ya da tahminin iyiliği kriterlerini dikkate almaktadır. Fakat bazen uyumun iyiliği ve tahminin iyiliği kriterleri arasında etkileşim olabilir ve bu etkileşim ihmal edildiğinde yanlış istatistiksel sonuçlar ortaya çıkabilir. Öte yandan $EBLF(\tilde{\beta})$

tanımlanırken, bu iki kriter arasındaki var olabilecek etkileşim de dikkate alınmıştır. Aynı zamanda $EBLF(\tilde{\beta})$, $pmse(\hat{T})$ 'den daha iyi bir kriterdir. $pmse(\hat{T})$ fonksiyonunda uyumun iyiliğinin, tahminin iyiliğinin ve bunlar arasındaki ilişkinin ağırlığı tek bir t katsayısına bağlıdır. Fakat $EBLF(\tilde{\beta})$ fonksiyonu uyumun iyiliğinin, tahminin iyiliğinin ve bunlar arasındaki ilişkinin ağırlığı için farklı katsayılar seçme imkanı sağlamaktadır. Bu nedenle $EBLF(\tilde{\beta})$, $pmse(\hat{T})$ 'ye göre daha esnektir ve iyileştirilmiş istatistiksel sonuç çıkarım yapmayı sağlamaktadır (Chaturvedi ve Shalabh, 2014).

2. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Bu bölümde istatistikte ve ekonometride yaygın olarak kullanılan bazı yanlı tahmin edicilere yer verilecektir. Ayrıca bu tahmin edicilerin istatistiksel özellikleri incelenecektir.

2.1. Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmin Edici

Bazı durumlarda (1.1) ile verilen klasik lineer regresyon modelindeki bilinmeyen parametre vektörü β kısıtlamalar mevcuttur. Bu yardımcı bilgiler

$$R\beta = r \quad (2.1.)$$

lineer denklem formunda olsun. Burada $R: m \times p$, $rank(R) = m$ olan bir matris ve $r: m \times 1$ bir vektördür. (2.1)'de tanımlanan m lineer kısıt birbirinden bağımsızdır.

Örnekleme bilgisi ve yardımcı bilgilerin eşanlı olarak kullanılabilmesi için (1.2)'deki hata kareler toplamı $S(\beta)$, $R\beta = r$ kısıtı altında minimum yapılmalıdır. Bunun için Lagrange fonksiyonu,

$$S(\beta, \lambda) = (y - X\beta)'(y - X\beta) - 2\lambda'(R\beta - r)$$

formundadır. Burada $\lambda: m \times 1$ Lagrange çarpanları vektörüdür. $S(\beta, \lambda)$ fonksiyonunun β ve λ 'ya göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial S(\beta, \lambda)}{\partial \beta} &= -X'y + X'X\beta - R'\lambda = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S(\beta, \lambda)}{\partial \lambda} &= -R\beta + r = 0 \end{aligned} \quad (2.2.)$$

2. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Nimet ÖZBAY

normal denklemleri elde edilir. (2.2) ile verilen normal denklemlerin çözümünden β 'nin kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisi (Restricted Least Squares, RLS),

$$\hat{\beta}_R = (X'X)^{-1}X'y + (X'X)^{-1}R'\lambda \quad (2.3.)$$

olarak elde edilir. Öte yandan (2.1) kısıtından

$$R\hat{\beta}_R = r = R\hat{\beta} + R(X'X)^{-1}R'\lambda \quad (2.4.)$$

yazılabilir. $R(X'X)^{-1}R' > 0$ olduğundan λ 'nın en uygun tahmini

$$\hat{\lambda} = (R(X'X)^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta}) \quad (2.5.)$$

bulunur. $\hat{\lambda}$ (2.3)'de yerine konulduğunda $S = X'X$ olmak üzere

$$\hat{\beta}_R = \hat{\beta} + S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta}) \quad (2.6.)$$

elde edilir. Dikkat edilecek olursa

$$R\hat{\beta}_R = R\hat{\beta} + (RS^{-1}R')(RS^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta}) = r \quad (2.7.)$$

yazılabilmesi nedeniyle $\hat{\beta}_R$ 'nin (2.1) kısıtını sağladığı görülmektedir. Ayrıca

$$E(\hat{\beta}_R) = \beta + S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}(r - R\beta)$$

olup $R\beta = r$ kısıtı doğru iken $\hat{\beta}_R$ yansızdır, aksi halde yanlıdır. $\hat{\beta}_R$ 'nin varyans-kovaryans matrisi ise

$$Var(\hat{\beta}_R) = \sigma_u^2 S^{-1} - \sigma_u^2 S^{-1} R' (RS^{-1} R')^{-1} RS^{-1}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi $\hat{\beta}_R$ 'nin varyans-kovaryans matrisi R 'ye bağlıdır. Bu da $\hat{\beta}_R$ 'nin varyansının $\hat{\beta}$ 'nin varyansı ile karşılaştırıldığında her zaman daha küçük olacağını göstermektedir. Yani

$$Var(\hat{\beta}) - Var(\hat{\beta}_R) = \sigma_u^2 S^{-1} R' (RS^{-1} R')^{-1} RS^{-1} \geq 0 \quad (2.8.)$$

olmaktadır. (2.8) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade bir nnd matristir. Dolayısıyla $R\beta = r$ kısıtı doğru iken (1.1) modeli üzerine lineer kısıtlamaları uygulamak etkili olmuştur.

2.2. Ridge Tahmin Edici

X matrisinin kolonları arasında lineer ilişki olduğunda veriye EKK tahmin yöntemi uygulanırsa regresyon katsayılarının EKK tahminlerinin varyansı büyük olacak ve boyu gerçek değerinden uzaklaşacaktır. Daha önce belirtildiği gibi EKK tahmin edici β 'nın yansız bir tahmin edicisidir. Ayrıca Gauss-Markov teoremi gereğince tüm lineer yansız tahmin ediciler sınıfı içinde minimum varyansa sahiptir. Ancak bu varyans her zaman küçük olmayabilir. Varyans büyümesinin üstesinden gelebilmek için Hoerl ve Kennard (1970) β 'nin yansızlık özelliğinden vazgeçerek ridge regresyon tahmin yöntemini önermiştir. Bu yöntemle göre, $\tilde{\beta}$ bilinmeyen β parametresinin herhangi bir tahmin edicisi olmak üzere hata kareler toplamı

$$\begin{aligned} S(\tilde{\beta}) &= (y - X\tilde{\beta})'(y - X\tilde{\beta}) \\ &= (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \tilde{\beta})'X'X(\hat{\beta} - \tilde{\beta}) \\ &= S_{min} + \Phi(\tilde{\beta}) \end{aligned}$$

2. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Nimet ÖZBAY

şeklinde yazılabilir. Burada $(\hat{\beta} - \tilde{\beta})'X'X(\hat{\beta} - \tilde{\beta})$, $\hat{\beta}$ yerine $\tilde{\beta}$ kullanılmasından kaynaklanan yanlılığın karesidir. $X'X$ kötü koşullu iken $\hat{\beta}$ ile β arasındaki uzaklık artmaktadır. Bu nedenle ridge regresyon tahmin yönteminde $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin uzaklığının karesini minimum yapmak amaçlanmaktadır. Aynı hata kareler toplamına sahip birden fazla tahmin edici olabilir, bunlar arasından en küçük uzaklığı olan seçilmelidir. $\Phi_0 > 0$ hata kareler toplamı için verilen bir sabit olsun. Bu durumda

$$S(\tilde{\beta}) = S_{min} + \Phi_0$$

koşulunu sağlayan tahmin edicilerin bir $\{\tilde{\beta}\}$ kümesi vardır. Buradaki amaç bu küme içerisindeki en küçük uzunluklu $\tilde{\beta}$ tahminini bulmaktır. Bunun için, $1/k$ Lagrange çarpanı olmak üzere

$$\min_{\tilde{\beta}} \left\{ \tilde{\beta}'\tilde{\beta} + (1/k) \left[(\hat{\beta} - \tilde{\beta})'X'X(\hat{\beta} - \tilde{\beta}) - \Phi_0 \right] \right\} \quad (2.9.)$$

ifadesi araştırılır. (2.9)'un $\tilde{\beta}$ ve $1/k$ 'ya göre kısmi türevleri sıfıra eşitlendiğinde

$$\tilde{\beta} + \frac{1}{k}(X'X)(\hat{\beta} - \tilde{\beta}) = 0 \quad (2.10.)$$

$$\Phi_0 = (\hat{\beta} - \tilde{\beta})'X'X(\hat{\beta} - \tilde{\beta}) \quad (2.11.)$$

denklemleri elde edilir. Normal denklemlerin kullanılmasıyla (2.9) ifadesinin çözümü Hoerl ve Kennard (1970) tarafından

$$\hat{\beta}_k = (X'X + kI)^{-1}X'y, \quad k \geq 0 \quad (2.12.)$$

2. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Nimet ÖZBAY

β 'nın ridge tahmin edicisi olarak tanımlanmıştır. Burada k sabitine daraltma (shrinkage) ya da yanlılık parametresi denir ve k 'nın seçimi ridge tahmin edicinin performansını etkilemektedir. $k = 0$ iken ridge tahmin edici EKK tahmin ediciye eşittir. $S_k = X'X + kI$ olmak üzere

$$\hat{\beta}_k = S_k^{-1}X'y \quad (2.13.)$$

formunda yazılabilir. Bu form kullanılarak $\hat{\beta}_k$ 'nin beklenen değeri

$$E(\hat{\beta}_k) = S_k^{-1}X'X\beta = \beta - kS_k^{-1}\beta \quad (2.14.)$$

şeklindedir. Bu eşitlikteki $-kS_k^{-1}\beta$ parçası yanlılığı ifade etmektedir. Yani

$$Bias(\hat{\beta}_k) = -kS_k^{-1}\beta \quad (2.15.)$$

olur. Varyans-kovaryans matrisi ise

$$Var(\hat{\beta}_k) = \sigma_u^2 S_k^{-1}X'XS_k^{-1} \quad (2.16.)$$

şeklindedir. (2.15) ve (2.16)'nın kullanılmasıyla ridge tahmin edicinin MSE matrisi

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\beta}_k) &= Var(\hat{\beta}_k) + Bias(\hat{\beta}_k)Bias(\hat{\beta}_k)' \\ &= S_k^{-1}(\sigma_u^2 X'X + k^2 \beta\beta')S_k^{-1} \end{aligned} \quad (2.17.)$$

elde edilir. Ayrıca $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, $(X'X)$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere ridge tahmin edicinin mse değeri

$$\begin{aligned}
 mse(\hat{\beta}_k) &= tr\{Var(\hat{\beta}_k) + Bias(\hat{\beta}_k)Bias(\hat{\beta}_k)'\} \\
 &= \sigma_u^2 tr(S_k^{-1}X'XS_k^{-1}) + k^2\beta'S_k^{-2}\beta \\
 &= \sigma_u^2 \sum_{j=1}^p \frac{\lambda_j}{(\lambda_j+k)^2} + k^2 \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{(\lambda_j+k)^2}
 \end{aligned} \tag{2.18.}$$

ya da

$$mse(\hat{\beta}_k) = tr[MSE(\hat{\beta}_k)] = \sum_{j=1}^p \frac{\sigma_u^2 \lambda_j + k^2 \beta_j^2}{(\lambda_j+k)^2} \tag{2.19.}$$

şeklinde elde edilir. $k > 0$ olduğundan k arttıkça $\hat{\beta}_k$ 'nin yanlılığı artarken varyansı azalacaktır. Ridge tahmin edici kullanılırken varyanstaki azalış yanlılığın karesindeki artıştan daha büyük olacak şekilde bir k değeri seçilmelidir. Bu durumda $\hat{\beta}_k$ 'nin MSE değeri $\hat{\beta}$ 'nin varyansından daha küçük olacaktır. Hoerl ve Kennard (1970), k 'nın uygun bir seçimi için ridge izini (ridge trace) önermişlerdir. Ridge izi k 'nın genellikle $[0,1]$ kapalı aralığındaki değerleri için k 'ya karşılık gelen $\hat{\beta}_k$ 'nin elemanlarının grafiğidir. Belli bir k değerinden sonra tahminler durağan olurlar. $\hat{\beta}_k$ 'nin durağan olduğu en küçük k değeri uygun bir değer olarak alınır. Hoerl ve Kennard (1970), $0 \leq k \leq 1$ aralığını önermişlerdir. Ancak her veri için bu aralık geçerli olmayabilir (Vinod ve Ullah, 1981). Ayrıca Hoerl ve Kennard (1970), farklı birimlerdeki regresyon katsayılarını karşılaştırabilmek amacıyla veriyi standartlaştırdıktan sonra ridge izi grafiklendirmeyi önermişlerdir. Marquard ve Snee (1975), k 'nın $[0,1]$ aralığındaki yaklaşık 25 değerini kullanmayı önermişlerdir. Çoklu iç ilişki şiddetli ise regresyon katsayılarındaki durağanlık ridge izinden görülecektir. k arttıkça bazı ridge tahminleri birbirinden oldukça farklı olacaktır. Bazı k değerlerinde ise $\hat{\beta}_k$ değerleri durağan olacaktır. Genel olarak $\hat{\beta}_k$ tahminlerinin durağan olduğu en küçük k değeri belirlenmelidir. Bu k değerinin EKK'dan daha küçük MSE'ye sahip tahminleri vermesi beklenir. Bunların yanı sıra literatürde var olan k 'nın farklı seçim yöntemleri izleyen alt bölümde verilmektedir.

2.2.1. Yanlılık parametresi k 'nın seçimi

Ridge regresyon ile ilgili pek çok tartışmanın nedeni yanlılık parametresi k 'nın seçimi ile ilgilidir. k 'nın ridge izi yardımıyla belirlenen değeri analizciden analizciye farklılık gösterebilir. Bu nedenle bazı araştırmacılar k 'nın seçimi için daha analitik yöntemler önermişlerdir. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- Hoerl ve Kennard (1970), ridge tahmin edicinin EKK'dan daha küçük MSE'ye sahip olduğu yanlılık parametresinin tahminini

$$\hat{k}_{HK} = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\alpha}_{max}^2}$$

olarak vermiştir. Burada $\hat{\alpha}_{max}^2$, kanonik formdaki regresyon katsayı tahminlerinin en büyüğünün karesidir.

- Hoerl ve ark. (1975), ridge tahmin edicinin hata kareler ortalamasını minimum yapan

$$\hat{k}_{HKB} = \frac{p\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\beta}'\hat{\beta}}$$

değerini önermişlerdir. Burada $\hat{\sigma}_u^2$ ve $\hat{\beta}$, σ_u^2 ve β 'nin EKK tahmin edicileridir. Simülasyon çalışması ile $\hat{k}_{HKB}$ için ridge tahmin edicinin EKK'dan daha iyi MSE'ye sahip olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca, Hoerl ve Kennard (1976), k 'nın bu tahminine bağlı olarak iteratif tahmin yöntemi önermişlerdir. β ve k 'nın ardışık tahminleri,

$$\hat{\beta} : \hat{k}_0 = \frac{p\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\beta}'\hat{\beta}}$$

$$\hat{\beta}_{k_0} : \hat{k}_1 = \frac{p\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\beta}_{k_0}'\hat{\beta}_{k_0}}$$

$$\hat{\beta}_{k_1} : \hat{k}_2 = \frac{p\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\beta}_{k_1}'\hat{\beta}_{k_1}}$$

şeklindedir. $T = \frac{1}{p} \text{tr}(X'X)^{-1}$ olmak üzere $\frac{\hat{k}_{j+1}-\hat{k}_j}{\hat{k}_j} > 20T^{-1.3}$ ise algoritmaya devam edilir. Aksi halde sonlandırılır ve $\hat{\beta}_{k_j}$ kullanılır. Sonlandırma kriterinin bu şekilde seçilmesinin nedeni ise $(X'X)$ 'in özdeğerlerinin değişkenliği arttıkça T 'nin artması ve kötü koşulluluğun artması ile daha fazla büzülmeye neden olmasıdır.

- Lawless ve Wang (1976), $X'X = I_p$ varsayımının sağlanmadığı durumlarda $Z'Z = I_p$ varsayımını sağlayacak şekilde $y = Zv + \varepsilon$, $Z = X(X'X)^{-1/2}$ ve $v = (X'X)^{1/2}\beta$ olarak modeli yeniden parametrelendirmiştir. Bu modelde bayesyen yaklaşımla

$$\hat{k}_{LW} = \frac{p\hat{\sigma}_u^2}{\hat{v}'\hat{v}} = \frac{p\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}$$

tahminini vermişlerdir. Monte Carlo simülasyon çalışması yaparak $\hat{k}_{LW}$ kullanıldığında ridge tahmin edicinin EKK'dan daha iyi performans sağladığını göstermişlerdir.

- Lindley ve Smith (1972), bayesyen yaklaşımla

$$\hat{k}_{LS} = \frac{(n-p)(p+2)}{n+2} \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\beta}'\hat{\beta}}$$

yanlılık parametresinin kullanılmasını önermişlerdir.

- McDonald ve Galarneau (1975), $Q = \hat{\beta}'\hat{\beta} - \hat{\sigma}_u^2 \sum_{j=1}^p \lambda_j^{-1}$ olmak üzere $Q > 0$ ise $\hat{\beta}_k'\hat{\beta}_k = Q$ olacak şekilde bir k değeri seçilebileceğini göstermişlerdir.
- Theobald (1974) her W için $E[(\hat{\beta}_k - \beta)'W(\hat{\beta}_k - \beta)]$ değeri $E[(\hat{\beta} - \beta)'W(\hat{\beta} - \beta)]$ değerinden daha küçük olacak şekilde k 'nın tahminini $\hat{k}_T = \frac{2\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\beta}'\hat{\beta}}$ olarak vermiştir.

2.3. Modified Ridge Tahmin Edici

Swindel (1976), ridge tahmin edici ile ön bilgiyi bir araya getirerek modified ridge (MR) tahmin ediciyi

$$\hat{\beta}_m(k) = (X'X + kI)^{-1}(X'y + kb_0), \quad k \geq 0 \quad (2.20.)$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $b_0: p \times 1$, β hakkındaki ön bilgiyi içeren stokastik olmayan bir vektördür. Dolayısıyla b_0 , β 'ya dayalı hipotezleri ve ön bilgiyi iyi yansıtacak şekilde seçilmelidir. Ridge tahmin ediciye benzer şekilde MR tahmin edicideki $X'X$ matrisinin köşegen elemanlarına k sabiti eklenerek çoklu iç ilişkinin etkisinin azaltılması amaçlanmıştır. (2.20) ifadesine çeşitli matris işlemleri uygulandıktan sonra MR tahmin edici ile ilgili bazı sonuçlar elde edilebilir. MR tahmin edicinin

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_m(k) &= (X'X + kI)^{-1}(X'y + kb_0) \\ &= (X'X + kI)^{-1}X'X(X'X)^{-1}(X'y + kb_0) \\ &= (I + k(X'X)^{-1})^{-1}(\hat{\beta} - b_0 + b_0 + k(X'X)^{-1}b_0) \\ &= (I + k(X'X)^{-1})^{-1}(\hat{\beta} - b_0) + b_0 \end{aligned} \quad (2.21.)$$

şeklinde ifade edilebilmesi nedeniyle aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

- $b_0 = \hat{\beta}$ alınırsa $\hat{\beta}_m(k) = \hat{\beta}$ olur. Yani, ön bilgi olarak EKK tahmin edici kullanıldığında MR tahmin edici EKK tahmin ediciye eşit olur.
- $k = 0$ alınırsa $\hat{\beta}_m(k = 0) = \hat{\beta}$ elde edilir. Yani, bu durumda ridge tahmin ediciye benzer şekilde MR tahmin edici de EKK tahmin ediciye dönüşür.
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\beta}_m(k) = b_0$ olduğundan yeterince büyük k değerleri için MR tahmin edici ön bilgi vektörüne yakınsar.
- $b_0 = 0$ alınırsa $\hat{\beta}_m(k) = \hat{\beta}_k$ olur. Yani, herhangi bir ön bilgi olmaması durumunda MR tahmin edici ridge tahmin ediciye dönüşür.

$S = X'X$ ve $S_k = X'X + kI$ olmak üzere MR tahmin edicinin beklenen değeri

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_m(k)) &= E(S_k^{-1}(X'y + kb_0)) \\ &= S_k^{-1}(X'X\beta + kb_0) \\ &= S_k^{-1}S\beta + kS_k^{-1}b_0 \end{aligned} \quad (2.22.)$$

olduğundan $k \neq 0$ için $E(\hat{\beta}_m(k)) \neq \beta$ 'dir. Buradan MR tahmin edicinin yanlı olduğu görülmektedir. Yanlılığı

$$\begin{aligned} Bias(\hat{\beta}_m(k)) &= E(\hat{\beta}_m(k)) - \beta \\ &= S_k^{-1}S\beta + kS_k^{-1}b_0 - \beta \\ &= (S_k^{-1}S - I_p)\beta + kS_k^{-1}b_0 \\ &= (S_k^{-1}(S + kI_p - kI_p) - I_p)\beta + kS_k^{-1}b_0 \\ &= (S_k^{-1}S_k - kS_k^{-1} - I_p)\beta + kS_k^{-1}b_0 \\ &= -kS_k^{-1}\beta + kS_k^{-1}b_0 \\ &= -kS_k^{-1}(\beta - b_0) \end{aligned} \quad (2.23.)$$

elde edilir.

Ön bilgi vektörü bilinmeyen gerçek parametre vektörüne yakınsadıkça MR tahmin edicinin yanlılığı küçülecektir. Özel olarak $b_0 = \beta$ alındığında yani ön bilgi doğru ise k 'nın değeri ne olursa olsun MR tahmin edicinin yansız olacağı açıktır. MR tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi ise

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}_m(k)) &= Var(S_k^{-1}(X'y + kb_0)) \\ &= S_k^{-1}Var(X'y + kb_0)S_k^{-1} \\ &= \sigma_u^2 S_k^{-1} S S_k^{-1} \end{aligned} \quad (2.24.)$$

şeklinde bulunur. Dikkat edilecek olursa MR tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi ridge tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi ile aynıdır. Ön bilgi vektörü b_0 stokastik olmadığından MR tahmin edicinin varyansını etkilememektedir. (2.23) ve (2.24)'de verilen sonuçlar kullanılarak MR tahmin edicinin MSE matrisi

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\beta}_m(k)) &= Var(\hat{\beta}_m(k)) + Bias(\hat{\beta}_m(k))Bias(\hat{\beta}_m(k))' \\ &= \sigma_u^2 S_k^{-1} S S_k^{-1} + k^2 S_k^{-1}(\beta - b_0)(\beta - b_0)'S_k^{-1} \end{aligned} \quad (2.25.)$$

şeklinde elde edilir.

Swindel (1976), EKK tahmin edici ile MR tahmin ediciyi MSE matrislerine göre karşılaştırmış ve MR tahmin edicinin EKK'ya üstün geldiğini göstermiştir. Pliskin (1987) ise aynı k değerini kullanarak MR tahmin edici ile ridge tahmin ediciyi karşılaştırmış ve MR tahmin edicinin ridge tahmin ediciden MSE matrisine göre daha iyi olabilmesi için gerek ve yeter koşulu vermiştir.

2.4. Kısıtlı Ridge Tahmin Edici

Sarkar (1992) ridge regresyon düşüncesini, RLS tahmin ediciye taşıyarak kısıtlı ridge tahmin ediciyi

$$\hat{\beta}^*(k) = (I_p + k(X'X)^{-1})^{-1} \hat{\beta}_R, \quad k \geq 0 \quad (2.26.)$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $\hat{\beta}_R$, (2.6)'da verilen RLS tahmin edicidir. (2.26)'daki $\hat{\beta}_R$, $\hat{\beta}^*(k)$ 'yı sifıra doğru büzmektedir. Yani, $\hat{\beta}^*(0) = \hat{\beta}_R$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\beta}^*(k) = 0$ 'dır. (2.26)'daki S_k matrisi ile varyansta önemli bir azalma olması beklenmektedir. Bu yöntem, Hoerl ve Kennard (1970)'ın ridge tahmin ediciyi elde ederken EKK tahmin ediciye uyguladığı yönteme benzemektedir. Bu benzerlikten dolayı $\hat{\beta}^*(k)$ kısıtlı ridge (RR) tahmin edici olarak adlandırılır. Ancak burada $\hat{\beta}^*(k)$ tüm y değerleri için $R\hat{\beta}^*(k) = r$ kısıtını sağlamamaktadır. Dolayısıyla $\hat{\beta}^*(k)$, $R\beta = r$ kısıtına göre bir RR tahmin edici değildir (Gross, 2003). Çünkü $\hat{\beta}^*(k)$, $R\beta = r$ eşitliği ile üretilen alt uzayın dışında değerler alabilir. Bu nedenlerden dolayı Gross (2003), β için yeni bir ridge tipi tahmin edici tanımlamıştır. Herhangi bir ön bilgi olmaması durumunda yani $b_0 = 0$ iken MR tahmin edicinin ridge tahmin ediciye eşit olduğu önceki bölümde belirtilmişti. Eğer $R\beta = r$ kısıtı sağlanıyorsa ön bilgi için sıfır vektörü yerine buna en yakın olarak kısıtları sağlayan β_0 vektörünü almak daha uygun bir seçim olacaktır. Gross (2003), böyle bir β_0 vektörünü $\beta_0 = R'(RR')^{-1}r$ olarak tanımlamıştır. Bu ön bilgi vektörü (2.20)'de verilen MR tahmin ediciye uygulandığında

$$\hat{\beta}(k, \beta_0) = (X'X + kI)^{-1}(X'y + kR'(RR')^{-1}r), \quad k \geq 0 \quad (2.27.)$$

2. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Nimet ÖZBAY

elde edilir. Ancak (2.27)'deki tahmin edici de $R\beta = r$ kısıtı altındaki bir kısıtlı tahmin edici değildir. Bu nedenle Gross (2003), $S_k = X'X + kI_p$ olmak üzere $R\beta = r$ kısıtı altında

$$\hat{\beta}_R(k) = \hat{\beta}(k, \beta_0) - S_k^{-1}R'(RS_k^{-1}R')^{-1}(R\hat{\beta}(k, \beta_0) - r), \quad k \geq 0 \quad (2.28.)$$

RR tahmin ediciyi tanımlamıştır. $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\beta}_R(k) = \beta_0$ ve $\lim_{k \rightarrow 0} \hat{\beta}_R(k) = \hat{\beta}_R$ olduğundan k arttıkça $\hat{\beta}_R(k)$, $\hat{\beta}_R$ 'den β_0 'a bir eğri çizmektedir.

Kaçıranlar ve ark. (2011), β_0 ve $\hat{\beta}(k, \beta_0)$ eşitliklerini (2.28)'de yerine yazıp gerekli işlemleri yaparak

$$\hat{\beta}_R(k) = \hat{\beta}_k - S_k^{-1}R'(RS_k^{-1}R')^{-1}(R\hat{\beta}_k - r) \quad (2.29.)$$

eşitliğini elde etmişlerdir. (2.29)'dan görüldüğü gibi RR tahmin edici RLS tahmin edicinin ridge tahmin ediciye genelleştirilmiş halidir. Gross (2003), RR tahmin edicinin RLS tahmin ediciden MSE matrisine göre üstün olması için gerek ve yeter koşulları vermiştir. Ayrıca Gross (2003) çalışmasında k 'nın uygun seçimi için bir teorem verilmiştir.

2.5. Stein-Rule Tahmin Edici

Stein (1956), (1.1) modeli için Stein-rule (SR) tahmin ediciyi

$$\hat{\beta}_S = \left[1 - \frac{c\sigma_u^2}{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}\right] \hat{\beta} \quad (2.30.)$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $c > 0$, keyfi bir skalerdir. (2.30)'daki bilinmeyen σ_u^2 parametresi yerine (1.7) denklemindeki $\hat{\sigma}_u^2$ yazılıp yeniden düzenleme yapılırsa

2. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Nimet ÖZBAY

$$\hat{\beta}_{SR} = \left[1 - \frac{k_1 \hat{u}' \hat{u}}{\hat{\beta}' X' X \hat{\beta}} \right] \hat{\beta} \quad (2.31.)$$

SR tahmin edici elde edilir. (2.31) denkleminde $k_1 > 0$, keyfi bir skalerdir. SR tahmin edicinin örneklem özelliklerini incelemek için Kadane'nin (1970, 1971) küçük- σ asimptotik açılımı kullanılabilir. Bunun için $\sigma u \sim N(0, \sigma^2 I)$ ya da $u \sim N(0, I)$ olmak üzere

$$y = X\beta + \sigma u \quad (2.32.)$$

lineer regresyon modeli verilsin. (2.32) modeli ile çalışılmasının nedeni u 'daki değişimin etkisini belirgin bir biçimde dikkate almaktır. σ küçük ise model daha iyi olacaktır. Ancak büyük σ değerleri için model X tarafından yeterince iyi açıklanamamaktadır. Kadane'nin cebirsel sonuçları Nagar'daki (1959) açılımdan yararlanılarak elde edilmiştir. Tahmin edicilerin momentleri hakkında çalışırken Kadane'nin küçük- σ açılımı

- σ 'nın sıfıra yakınsaması
- Tahmin edicinin örnekleme hatasını σ 'nın büyük derecelerine genişletme
- Tahmin edicinin örnekleme hatası açılımında ve bu açılımın bir fonksiyonunda bulunan her bir terimin teker teker beklenen değerini alma

temellerine dayanmaktadır.

(2.31) denkleminde $\hat{u}$ ve $\hat{\beta}$ tahminleri yerlerine yazılırsa SR tahmin edicinin örnekleme hatası

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{SR} - \beta &= \hat{\beta} - \beta - \frac{k_1 \hat{u}' \hat{u}}{\hat{\beta}' X' X \hat{\beta}} \hat{\beta} \\
&= \sigma(X'X)^{-1} X' u - k_1 \sigma^2 \frac{u' M u}{g} (\beta + \sigma(X'X)^{-1} X' u) \quad (2.33.)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
M &= I - X(X'X)^{-1} X', \\
M^* &= X(X'X)^{-1} X' \text{ ve} \\
g &= \beta' X' X \beta + 2\sigma \beta' X' u + \sigma^2 u' M^* u
\end{aligned}$$

şeklindedir. Yeterince küçük σ için g^{-1} ve g^{-2} ifadeleri

$$(1 + z)^{-1} = 1 - z + z^2 + \dots$$

ve

$$(1 + z)^{-2} = 1 - 2z + 3z^2 + \dots$$

binom açılımlarından yararlanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g} &= \frac{1}{\beta' X' X \beta} \left[1 + \frac{2\sigma \beta' X' u + \sigma^2 u' M^* u}{\beta' X' X \beta} \right]^{-1} \\
&= \frac{1}{\beta' X' X \beta} \left[1 - \left(\frac{2\sigma \beta' X' u + \sigma^2 u' M^* u}{\beta' X' X \beta} \right) + \dots \right] \quad (2.34.)
\end{aligned}$$

ve

$$\frac{1}{g^2} = \frac{1}{(\beta' X' X \beta)^2} \left[1 - 2 \left(\frac{2\sigma \beta' X' u + \sigma^2 u' M^* u}{\beta' X' X \beta} \right) + \dots \right] \quad (2.35.)$$

şeklinde yazılabilir. (2.34) denklemi (2.33) denkleminde yerine yazılıp σ^2 derecesine kadar olan terimler dikkate alınırsa

2. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER
Nimet ÖZBAY

$$\hat{\beta}_{SR} - \beta = \sigma(X'X)^{-1}X'u - k_1\sigma^2 \frac{u'Mu}{\beta'X'X\beta}\beta$$

elde edilir. $E(u'Mu) = n$ olduğu dikkate alındığında $\hat{\beta}_{SR}$ tahmin edicisinin yanlılığı

$$E(\hat{\beta}_{SR}) - \beta = -\frac{nk_1\sigma^2}{\beta'X'X\beta}\beta \quad (2.36.)$$

şeklindedir. Benzer şekilde, (2.34) ve (2.35) sonuçları kullanılarak ve σ^4 derecesine kadar olan terimler dikkate alınarak

$$\begin{aligned} (\hat{\beta}_{SR} - \beta)(\hat{\beta}_{SR} - \beta)' &= \sigma^2 Auu'A' + k_1^2\sigma^4(u'Mu)^2 \frac{\beta\beta'}{(\beta'X'X\beta)^2} \\ &- 2k_1\sigma^4(u'Mu) \frac{Auu'A'}{\beta'X'X\beta} + 2\sigma^4 \frac{k_1(u'Mu)}{(\beta'X'X\beta)^2} (Auu'X\beta\beta' + \beta\beta'uu'A') \end{aligned} \quad (2.37.)$$

elde edilir. Burada $A = (X'X)^{-1}X'$ ve $MA' = 0$ 'dır. Bu nedenle, $u'Mu$ ve Au değişkenleri birbirinden bağımsızdır. (2.37) eşitliğinin her iki tarafının beklenen değeri alınırsa

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\beta}_{SR}) &= E[(\hat{\beta}_{SR} - \beta)(\hat{\beta}_{SR} - \beta)'] \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1} + k_1^2\sigma^4n(n+2) \frac{\beta\beta'}{(\beta'X'X\beta)^2} \\ &\quad - 2k_1\sigma^4n \frac{(X'X)^{-1}}{\beta'X'X\beta} + 2\sigma^4 \frac{k_1n}{(\beta'X'X\beta)^2} (2\beta\beta') \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1} \\ &\quad + \frac{nk_1\sigma^4}{(\beta'X'X\beta)^2} [\beta\beta'\{4I + k_1(n+2)\} - 2(\beta'X'X\beta)(X'X)^{-1}] \end{aligned} \quad (2.38.)$$

2. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Nimet ÖZBAY

elde edilir. Burada, $E(uu') = I$ ve $u'Mu$, n serbestlik dereceli merkezi ki-kare dağılımına sahip olduğundan $E(u'Mu) = n$, $E[(u'Mu)^2] = n(n+2)$ bilgileri kullanılmıştır. Ayrıca

$$\begin{aligned} mse(\hat{\beta}_{SR}) &= E[(\hat{\beta}_{SR} - \beta)'(\hat{\beta}_{SR} - \beta)] \\ &= tr[MSE(\hat{\beta}_{SR})] \\ &= \sigma^2 tr(X'X)^{-1} \\ &\quad + \frac{nk_1\sigma^4}{(\beta'X'X\beta)^2} [\beta'\beta\{4 + k_1(n+2)\} - 2(\beta'X'X\beta)tr(X'X)^{-1}] \quad (2.39.) \end{aligned}$$

şeklindedir.

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$, $X'X$ matrisinin özdeğerleri olsun. $\lambda_{min} = \lambda_p$ ve $\lambda_{max} = \lambda_1$ olmak üzere $\lambda_{min} \leq \beta'X'X\beta/\beta'\beta \leq \lambda_{max}$ yazılabilir (Rao, 1965). Bu durumda, (2.39) eşitliğinden $0 < k_1 \leq \frac{2}{n+2}(d-2)$, $d = \lambda_p \sum_{i=1}^p \lambda_i^{-1} > 2$ ve $\sum_{i=1}^p \lambda_i^{-1} = tr(X'X)^{-1}$ olmak üzere $p \geq 3$ için $mse(\hat{\beta}) - mse(\hat{\beta}_{SR}) > 0$ 'dır. Yani, SR tahmin edici EKK tahmin ediciden üstündür.

2.6. Liu Tahmin Edici

Çoklu iç ilişkinin etkilerini gidermek için birçok yöntem geliştirilmiştir. Bunların en önemlilerinden biri $k > 0$ olmak üzere ridge tahmin edici ve bir diğeri de $k_1 > 0$ olmak üzere SR tahmin edicidir. Her iki tahmin edicinin de avantajları ve dezavantajları vardır. $\hat{\beta}_k$ uygulamada etkin olmasına karşın k 'nın karmaşık bir fonksiyonudur. k yanlılık parametresi için farklı seçim yöntemleri vardır ve seçimi analizciye bağlıdır. k 'nın nasıl seçileceği ile ilgili bir uzlaşmanın olmamasından dolayı çoklu iç ilişki olması durumunda yeni tahmin yöntemleri araştırılmıştır. SR tahmin edici ise $\hat{\beta}$ 'yi büzerek daha iyi tahminler elde edilmesini sağlamasına karşın

2. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Nimet ÖZBAY

$\hat{\beta}$ 'nin her elemanını aynı katsayıyla büzmesi SR tahmin edicinin bir dezavantajıdır. Dolayısıyla uygulamada iyi sonuç vermez.

Liu (1993), ridge ve SR tahmin edicilerinin avantajlarını birleştirerek

$$\hat{\beta}_d = (X'X + I)^{-1}(X'y + d\hat{\beta}), \quad 0 < d < 1 \quad (2.40.)$$

formunda yeni bir tahmin edici tanımlamıştır. Bu tahmin edici Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) ve Gruber (1998) tarafından Liu tahmin edici olarak adlandırılmıştır. $\hat{\beta}_d$ 'nin $\hat{\beta}_k$ üzerindeki avantajı d 'nin bir lineer fonksiyonu olmasıdır. Bu nedenle d 'nin seçimi k 'nın seçiminden daha kolaydır. $d = 1$ iken $\hat{\beta}_d = \hat{\beta}$ olur. Ayrıca $\hat{\beta}_d = (X'X + I)^{-1}(X'X + dI)\hat{\beta}$ şeklinde EKK tahmin edicinin bir lineer dönüşümü olarak da yazılabilir. Buradan $E(\hat{\beta}_d) = (X'X + I)^{-1}(X'X + dI)\beta$ olduğundan, $\hat{\beta}_d$ yanlı bir tahmin edicidir. Ayrıca, $A_d = (X'X + I)^{-1}(X'X + dI)$ olmak üzere Liu tahmin edicinin yanlılığı ve varyans-kovaryans matrisi sırasıyla

$$Bias(\hat{\beta}_d) = (A_d - I)\beta \quad (2.41.)$$

$$Var(\hat{\beta}_d) = \sigma_u^2 A_d (X'X)^{-1} A_d' \quad (2.42.)$$

olmaktadır. (2.41) ve (2.42) eşitliklerinin kullanılmasıyla Liu tahmin edicinin MSE matrisi

$$MSE(\hat{\beta}_d) = \sigma_u^2 A_d (X'X)^{-1} A_d' + (A_d - I)\beta\beta'(A_d - I) \quad (2.43.)$$

elde edilir. $\hat{\beta}_d$ 'nin MSE matrisi $\hat{\beta}$ 'dan daha iyi olacak şekilde $0 < d < 1$ aralığında bir d vardır. Ayrıca Liu tahmin edicinin mse değeri

2. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Nimet ÖZBAY

$$mse(\hat{\beta}_d) = \sigma_u^2 \sum_{i=1}^p \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i(\lambda_i + 1)} + (d - 1)^2 \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i + 1)^2} \quad (2.44.)$$

bulunur. Burada α_i , $X'X$ matrisinin ortonormal özvektörlerinden oluşan T ortogonal matrisi verildiğinde (1.1) modelini kanonik formda yazmak için kullanılan $\alpha = T'\beta$ vektörüdür. $mse(\hat{\beta}_d)$ 'yi minimum yapan d yanlılık parametresi Liu (1993) tarafından

$$\begin{aligned} d_{opt} &= \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i^2 - \sigma_u^2}{(\lambda_i + 1)^2} / \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_u^2 + \lambda_i \alpha_i^2}{\lambda_i(\lambda_i + 1)^2} \\ &= 1 - \sigma_u^2 \left(\sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i(\lambda_i + 1)} \right) / \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_u^2 + \lambda_i \alpha_i^2}{\lambda_i(\lambda_i + 1)^2} \end{aligned} \quad (2.45.)$$

olarak verilmiştir. Ancak d_{opt} bilinmeyen α_i^2 ve σ_u^2 parametrelerine bağlı olduğundan uygulamada pek kullanışlı değildir. Bunların yerine yansız tahmin edicileri $\hat{\alpha}_i^2 - \hat{\sigma}_u^2 / \lambda_i$ ve $\hat{\sigma}_u^2$ kullanılırsa

$$\hat{d}_{opt} = 1 - \hat{\sigma}_u^2 \left(\sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i(\lambda_i + 1)} \right) / \sum_{i=1}^p \frac{\hat{\alpha}_i^2}{(\lambda_i + 1)^2} \quad (2.46.)$$

elde edilir. Bu yöntemlerin yanı sıra d 'nin farklı seçim yöntemleri Liu (1993) tarafından ele alınmıştır.

2.7. Uyarlanmış Optimal Tahmin Edici

(1.1) modeli için $C: p \times n$ keyfi bir matris olmak üzere

$$\hat{\beta} = Cy$$

homojen lineer tahmin ediciler sınıfı ele alınsın. $\hat{\beta}$ için MSE matrisi

$$\begin{aligned}
 MSE(\hat{\beta}) &= E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] \\
 &= E[(CX\beta + Cu - \beta)(CX\beta + Cu - \beta)'] \\
 &= (CX - I)\beta\beta'(CX - I)' + \sigma_u^2 CC'
 \end{aligned} \tag{2.47.}$$

şeklinde elde edilir. (2.47)'yi minimum yapan C matrisi

$$\frac{\partial MSE(\hat{\beta})}{\partial C} = 2C(X\beta\beta'X' + \sigma_u^2 I) - 2\beta\beta'X' = 0 \tag{2.48.}$$

denkleminin çözülmesiyle

$$C = \beta\beta'X'(X\beta\beta'X' + \sigma_u^2 I)^{-1} \tag{2.49.}$$

bulunur. Theil (1971), (2.49)'daki C matrisini $\hat{\beta} = Cy$ tahmin edicisinde yerine yazarak

$$\hat{\beta}_{TH} = \beta\beta'X'(X\beta\beta'X' + \sigma_u^2 I)^{-1}y \tag{2.50.}$$

minimum MSE tahmin ediciyi tanımlamıştır. Rao (1971) kaynağındaki

$$(X\beta\beta'X' + \sigma_u^2 I)^{-1} = [I - X\beta(\sigma_u^2 I + \beta'X'X\beta)^{-1}\beta'X']/\sigma_u^2$$

matris tersi açılımı kullanılarak (2.50)'nin alternatif formu

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_{TH} &= \frac{\beta\beta'X'}{\sigma_u^2} [I - X\beta(\sigma_u^2 I + \beta'X'X\beta)^{-1}\beta'X']y \\
 &= \frac{1}{\sigma_u^2} \left[\beta'X'y - \frac{\beta'X'X\beta\beta'X'y}{\sigma_u^2 + \beta'X'X\beta} \right] \beta \\
 &= \frac{\beta'X'y}{\sigma_u^2 + \beta'X'X\beta} \beta
 \end{aligned} \tag{2.51.}$$

2. LİNEER REGRESYON MODELİNDE BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER

Nimet ÖZBAY

elde edilir. Ancak (2.51)'deki $\hat{\beta}_{TH}$ tahmin edici bilinmeyen σ_u^2 ve β parametrelerine bağlı olduğundan uygulamada bu şekliyle kullanılamaz.

Farebrother (1976) bilinmeyen σ_u^2 ve β parametreleri yerine bunların EKK tahmin edicileri olan $\hat{\sigma}_u^2$ ve $\hat{\beta}$ 'yi kullanarak uyarlanmış optimal (Adaptive Optimal, AO) tahmin ediciyi

$$\hat{\beta}_F = \frac{\hat{\beta}'X'y}{\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}} \hat{\beta} \quad (2.52.)$$

şeklinde tanımlamıştır.

AO tahmin edici, (2.51)'deki minimum MSE tahmin edicide bilinmeyen σ_u^2 ve β parametreleri yerine bunların EKK tahminleri olan $\hat{\sigma}_u^2$ ve $\hat{\beta}$ kullanılarak tanımlandığından MSE'yi minimum yapan bir tahmin edici olarak düşünülmemektedir. Bu nedenle AO tahmin edicinin performansını incelemek için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Dwivedi ve Srivastava (1978) büyük örneklem asimptotik yaklaşımını kullanarak AO tahmin edici için yanlılık vektörünü ve MSE matrisini

$$Bias(\hat{\beta}_F) = E(\hat{\beta}_F - \beta) = -\frac{\sigma_u^2}{\beta'X'X\beta} \beta \quad (2.53.)$$

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\beta}_F) &= E[(\hat{\beta}_F - \beta)(\hat{\beta}_F - \beta)'] \\ &= \sigma_u^2(X'X)^{-1} + \frac{\sigma_u^4}{\beta'X'X\beta} \left[\frac{5}{\beta'X'X\beta} \beta\beta' - 2(X'X)^{-1} \right] \end{aligned} \quad (2.54.)$$

elde etmiştir. Daha sonra AO tahmin edici ile EKK tahmin edicinin performanslarını asimptotik özellikler kullanarak karşılaştırmışlardır.

2.8. İki Parametrelili Tahmin Edici

Çoklu iç ilişki probleminin üstesinden gelebilmek için Mayer ve Willke (1973)

$$\hat{\beta}(d) = d\hat{\beta}, \quad 0 < d < 1 \quad (2.55.)$$

daraltan tahmin ediciyi tanımlamışlardır. Bu tahmin edici EKK tahmin edicinin elemanlarını d sabiti ile büzmektedir. $\hat{\beta}(d)$, $\hat{\beta}$ 'yi büzerek daha iyi tahminler elde edilmesini sağlamasına karşın $\hat{\beta}$ 'nin her elemanını aynı katsayıyla büzmesi $\hat{\beta}(d)$ 'nin bir dezavantajıdır.

Özkale ve Kaçıranlar (2007), (1.1) modeli için iki parametrelili tahmin ediciyi

$$\hat{\beta}(k, d) = (X'X + kI)^{-1}(X'y + kd\hat{\beta}), \quad k > 0, \quad 0 < d < 1 \quad (2.56.)$$

şeklinde tanımlamışlardır. İki parametrelili tahmin edici bir minimumlaştırma probleminin çözümü olarak elde edilebileceği gibi Liu tahmin edicinin elde edilmesine benzer şekilde (1.1) modeline $kd\hat{\beta} = k\beta + \varepsilon$ lineer stokastik kısıtları eklenerek de elde edilebilir. Burada $\varepsilon: p \times 1$, 0 ortalamalı ve $\sigma^2 I$ varyans-kovaryans matrisli rasgele bir vektör olup u ve ε hataları ilişkisizdir ($E(u\varepsilon') = 0$).

İki parametrelili tahmin edici EKK, ridge ve Liu tahmin edicilerinin genel halidir. Bu özellik $\hat{\beta}(k, d)$ 'de k ve d için farklı değerler seçilmesi ile aşağıdaki eşitliklerden görülebilir:

- $\hat{\beta}(k, 1) = (X'X)^{-1}X'y$ EKK tahmin edici,
- $\hat{\beta}(0, d) = (X'X)^{-1}X'y$ EKK tahmin edici,
- $\hat{\beta}(k, 0) = (X'X + kI)^{-1}X'y$ ridge tahmin edici,

$$\begin{aligned}
\cdot \quad \hat{\beta}(1, d) &= (X'X + I)^{-1}(X'y + d\hat{\beta}) \text{ Liu tahmin edici,} \\
\cdot \quad \hat{\beta}(k, d) &= (X'X + kI)^{-1}(X'y + kd\hat{\beta}) \\
&= [I + k(X'X)^{-1}]^{-1}(X'X)^{-1}(X'y + kd\hat{\beta}) \\
&= [I + k(X'X)^{-1}]^{-1}(\hat{\beta} + kd(X'X)^{-1}\hat{\beta}) \\
&= [I + k(X'X)^{-1}]^{-1}(\hat{\beta} - d\hat{\beta}) + d\hat{\beta}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabildiğinden $\hat{\beta}(\infty, d) = d\hat{\beta}$ daraltan tahmin edici.

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}(k, d) &= (X'X + kI)^{-1}(X'y + kd\hat{\beta}) \\
&= (X'X + kI)^{-1}(X'y + kdI)\hat{\beta}
\end{aligned}$$

formundan $\hat{\beta}(k, d)$ 'nin $\hat{\beta}$ 'nin her bir elemanını farklı katsayıyla büzdüğü görülmektedir. Dolayısıyla, daraltan tahmin edicinin dezavantajının üstesinden gelinmiştir.

$S(kd) = S + kdI$ olmak üzere $\hat{\beta}(k, d) = S(k)^{-1}S(kd)\hat{\beta}$ olarak yazılabilir. Bu durumda iki parametrelili tahmin edicinin yanlılığı ve varyans-kovaryans matrisi sırasıyla

$$Bias(\hat{\beta}(k, d)) = (S(k)^{-1}S(kd) - I)\beta = k(d - 1)S(k)^{-1}\beta \quad (2.57.)$$

$$Var(\hat{\beta}(k, d)) = \sigma_u^2 S(k)^{-1}S(kd)S^{-1}S(kd)S(k)^{-1} \quad (2.58.)$$

olarak bulunur. (2.57) ve (2.58) eşitliklerinin kullanılmasıyla iki parametrelili tahmin edici için MSE matrisi

$$\begin{aligned} MSE \left(\hat{\beta}(k, d) \right) &= \sigma_u^2 S(k)^{-1} S(kd) S^{-1} S(kd) S(k)^{-1} \\ &\quad + k^2 (d - 1)^2 S(k)^{-1} \beta \beta' S(k)^{-1} \end{aligned} \quad (2.59.)$$

elde edilir.

Özkale ve Kaçıranlar (2007), iki parametrelili tahmin edicinin EKK tahmin ediciden MSE kriterine göre daha iyi olması için gerek ve yeter koşulları elde etmişlerdir. Ayrıca k ve d yanlılık parametreleri için seçim yöntemi önermişlerdir.

3. TAHMİN EDİCİLERE BAYESYEN YAKLAŞIM

Bu bölümde istatistikte ve ekonometride yaygın olarak kullanılan yanlış tahmin edicilere bayesyen yaklaşım konusu ele alınacaktır. Ridge tahmin ediciye bayesyen yaklaşım ve SR tahmin ediciye bayesyen yaklaşım literatürde farklı kaynaklarda yer almaktadır. MR tahmin ediciye bayesyen yaklaşım, RR tahmin ediciye bayesyen yaklaşım, Liu tahmin ediciye bayesyen yaklaşım, AO tahmin ediciye bayesyen yaklaşım ve iki parametrelili tahmin ediciye bayesyen yaklaşım ilk kez bu çalışmada ortaya konulacaktır.

3.1. Lineer Regresyon Modelinde Bayes Tahmin Ediciler**3.1.1. Bayes ve Kısıtlı Bayes Tahmin Edici**

(1.1) ile verilen klasik lineer regresyon modelindeki bilinmeyen parametre vektörü β hakkında

$$\begin{aligned} E(\beta) &= \theta \\ Var(\beta) &= H \end{aligned} \quad (3.1.)$$

yardımcı bilgileri mevcut olsun. Burada $\theta: p \times 1$ bir vektör ve $H: n \times n$ nnd bir matristir.

$$\begin{aligned} E(u/\beta) &= 0 \\ Var(u/\beta) &= \sigma_u^2 I \end{aligned} \quad (3.2.)$$

varsayımı altında lineer Bayes tahmin ediciyi bulmak için

$$E(p'\beta - a - l'y) = 0 \quad (3.3.)$$

koşulunu sağlayan ve

$$Var(p'\beta - a - l'y) \quad (3.4.)$$

varyansını minimum yapan $a + l'Y$ lineer fonksiyonu hesaplanmalıdır (Rao, 1971).

(3.3) denkleminin çözülmesiyle

$$\begin{aligned} E(p'\beta - a - l'y) &= 0 \\ p'E(\beta) - a - l'EX(\beta) &= 0 \\ p'\theta - a - l'X\theta &= 0 \\ a &= (p' - l'X)\theta \end{aligned} \quad (3.5.)$$

hesaplanır. (3.4)'deki

$$Var(p'\beta - a - l'y) = Var(p'\beta) + Var(l'y) - 2cov(p'\beta, l'y) \quad (3.6.)$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} Var(l'y) &= l'Var(y)l \\ &= l'Var(X\beta + u)l \\ &= l'[XHX' + \sigma_u^2 I]l \end{aligned} \quad (3.7.)$$

ve

$$\begin{aligned}
cov(p'\beta, l'y) &= p'cov(\beta, y)l \\
&= p'\{E[(\beta - E(\beta))(y - E(y))']\}l \\
&= p'\{E[(\beta - \theta)(y - X\theta)']\}l \\
&= p'\{E[(\beta - \theta)(X\beta + u - X\theta)']\}l \\
&= p'\{E[\beta\beta'X' + \beta u' - \beta\theta'X' - \theta\beta'X' - \theta u' + \theta\theta'X']\}l \\
&= p'\{E[\beta\beta'X' - \beta\theta'X' - \theta\beta'X' + \theta\theta'X']\}l \\
&= p'\{E[(\beta - \theta)(\beta - \theta)']X'\}l \\
&= p'Var(\beta)X'l \\
&= p'HX'l
\end{aligned} \tag{3.8.}$$

olduğundan (3.6) ifadesi

$$Var(p'\beta - a - l'y) = p'Hp + l'(XHX' + \sigma_u^2 I)l - 2p'HX'l \tag{3.9.}$$

ifadesine eşittir. (3.9) denklemindeki varyansın l' 'ye göre türevi alınıp bu türev sıfıra eşitlenirse

$$l' = p'HX'(XHX' + \sigma_u^2 I)^{-1} \tag{3.10.}$$

bulunur. Daha sonra (3.5) ve (3.10) denklemlerinin kullanılmasıyla lineer Bayes tahmin edici

$$p'\hat{\beta}_B = p'\theta + p'HX'(XHX' + \sigma_u^2 I)^{-1}(y - X\theta) \tag{3.11.}$$

elde edilir. (1.1) modelindeki $X: n \times p$ tam sütun ranklı olduğunda β parametresi için lineer Bayes tahmin edici

$$\hat{\beta}_B = \theta + HX'(XHX' + \sigma_u^2 I)^{-1}(y - X\theta) \tag{3.12.}$$

şeklinde tanımlanabilir. $\hat{\beta}_B$ lineer Bayes tahmin edicinin alternatif formları

$$\hat{\beta}_B = \theta + (X'X + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} X'(y - X\theta) \quad (3.13.)$$

$$= (X'X + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} (X'y + \sigma_u^2 H^{-1} \theta) \quad (3.14.)$$

$$= \theta + H(\sigma_u^2 (X'X)^{-1} + H)^{-1} (\hat{\beta} - \theta) \quad (3.15.)$$

$$= (X'X)^{-1} (H + \sigma_u^2 (X'X)^{-1})^{-1} \theta \sigma_u^2 + H(H + \sigma_u^2 (X'X)^{-1})^{-1} \hat{\beta} \quad (3.16.)$$

$$= \hat{\beta} - (X'X)^{-1} (H + \sigma_u^2 (X'X)^{-1})^{-1} (\hat{\beta} - \theta) \sigma_u^2 \quad (3.17.)$$

ifadeleri ile verilmiştir (Gruber, 1998, 2010). (3.14)'den

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_B &= (X'X + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} (X'y + \sigma_u^2 H^{-1} \theta) \\ &= (X'X + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} X'X \hat{\beta} + \sigma_u^2 (X'X + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} H^{-1} \theta \\ &= \left(\frac{X'X}{n} + \frac{\sigma_u^2 H^{-1}}{n} \right)^{-1} \frac{X'X}{n} \hat{\beta} + \sigma_u^2 \left(\frac{X'X}{n} + \frac{\sigma_u^2 H^{-1}}{n} \right)^{-1} \frac{H^{-1} \theta}{n} \end{aligned} \quad (3.18)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} plim(\hat{\beta}_B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X'X}{n} + \frac{\sigma_u^2 H^{-1}}{n} \right)^{-1} \frac{X'X}{n} plim(\hat{\beta}) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_u^2 \left(\frac{X'X}{n} + \frac{\sigma_u^2 H^{-1}}{n} \right)^{-1} \frac{1}{n} H^{-1} \theta \end{aligned}$$

$$\text{olup } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X'X}{n} + \frac{\sigma_u^2 H^{-1}}{n} \right)^{-1} \frac{X'X}{n} = I_n \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X'X}{n} + \frac{\sigma_u^2 H^{-1}}{n} \right)^{-1} \frac{1}{n} = 0$$

olduğundan

$$plim(\hat{\beta}_B) = plim(\hat{\beta}) = \beta \quad (3.19.)$$

bulunur. Bu nedenle $\hat{\beta}_B$ tutarlı ve asimptotik olarak yansızdır. Ayrıca (3.18) denklemindeki yazılıştan büyük örneklem için $\hat{\beta}_B$ 'nin $\hat{\beta}$ 'ya eşit olduğu kolaylıkla görülebilir.

$H^* = (X'X + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1}$ ve $\beta^* = \beta - \theta$ olmak üzere lineer Bayes tahmin edicinin beklenen değeri

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_B) &= \theta + H^* X' X \beta - H^* X' X \theta \\ &= \theta + H^* X' X \beta - (I - \sigma_u^2 H^* H^{-1}) \theta \\ &= H^* X' X \beta + \sigma_u^2 H^* H^{-1} \theta \end{aligned} \quad (3.20.)$$

ve yanlılığı

$$Bias(\hat{\beta}_B) = E(\hat{\beta}_B) - \beta = -\sigma_u^2 H^* H^{-1} \beta^* \quad (3.21.)$$

elde edilir. $\hat{\beta}_B$ 'nin varyans-kovaryans matrisi ise (3.14) yazılışından

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}_B) &= Var(H^* X' y + \sigma_u^2 H^* H^{-1} \theta) \\ &= Var(H^* X' y) \\ &= \sigma_u^2 H^* X' X H^* \end{aligned} \quad (3.22.)$$

hesaplanır. (3.21) ve (3.22) nin kullanılmasıyla lineer Bayes tahmin edicinin MSE matrisi

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\beta}_B) &= Var(\hat{\beta}_B) + Bias(\hat{\beta}_B) Bias(\hat{\beta}_B)' \\ &= \sigma_u^2 (H^* X' X H^* + \sigma_u^2 H^* H^{-1} \beta^* \beta^{*'} H^{-1} H^*) \end{aligned} \quad (3.23.)$$

elde edilir. Lineer Bayes tahmin edicinin EKK tahmin ediciden MSE kriterine göre daha iyi olması için $\Delta = MSE(\hat{\beta}) - MSE(\hat{\beta}_B)$ ifadesi nnd olmalıdır.

$$\begin{aligned}
\Delta &= MSE(\hat{\beta}) - MSE(\hat{\beta}_B) \\
&= \sigma_u^2((X'X)^{-1} - H^*X'XH^* - \sigma_u^2H^*H^{-1}\beta^*\beta^{*'}H^{-1}H^*) \\
&= \sigma_u^2H^*(H^{*-1}(X'X)^{-1}H^{*-1} - X'X - \sigma_u^2H^{-1}\beta^*\beta^{*'}H^{-1})H^* \\
&= \sigma_u^4H^*H^{-1}(2H + \sigma_u^2(X'X)^{-1} - \beta^*\beta^{*'})H^{-1}H^* \quad (3.24.)
\end{aligned}$$

hesaplanır. H^*H^{-1} matrisi tam kolon ranklı olduğundan Teorem 1.1'den Δ 'nın nnd olması için gerek ve yeter koşul $2H + \sigma_u^2(X'X)^{-1} - \beta^*\beta^{*'}$ ifadesinin nnd olmasıdır. Teorem 1.2'den

$$\beta^{*'} \left[(X'X)^{-1} + \frac{2}{\sigma_u^2} H \right] \beta^* \leq \sigma_u^2 \quad (3.25.)$$

eşitsizliği sağlandığında lineer Bayes tahmin edici MSE kriterine göre EKK tahmin ediciden daha üstündür.

(1.1) ile verilen klasik lineer regresyon modelindeki bilinmeyen parametre vektörü β hakkında (2.1) denklemi ile verilen $R\beta = r$ yardımcı bilgileri mevcut olsun. (3.1) ve (3.2) varsayımları altında Giles (2010) lineer Bayes tahmin ediciyi RLS yöntemine göre göz önüne alarak kısıtlı Bayes tahmin ediciyi

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{RB} &= \hat{\beta}_B + (X'X + \sigma_u^2H^{-1})^{-1}R'[R(X'X + \sigma_u^2H^{-1})^{-1}R']^{-1} \\
&\quad (r - R\hat{\beta}_B) \quad (3.26.)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlamıştır.

(2.1) denklemi ile verilen $R\beta = r$ yardımcı bilgilerinin doğru olduğu kabul edilsin.

$$\hat{\beta}_{RB} = \hat{\beta}_B + \left(\frac{X'X}{n} + \frac{\sigma_u^2 H^{-1}}{n} \right)^{-1} R' \left[R \left(\frac{X'X}{n} + \frac{\sigma_u^2 H^{-1}}{n} \right)^{-1} R' \right]^{-1} (r - R\hat{\beta}_B) \quad (3.27.)$$

şeklinde yazılabildiğinden

$$\begin{aligned} plim(\hat{\beta}_{RB}) &= plim(\hat{\beta}_B) \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X'X}{n} + \frac{\sigma_u^2 H^{-1}}{n} \right)^{-1} R' \left[R \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X'X}{n} + \frac{\sigma_u^2 H^{-1}}{n} \right)^{-1} R' \right]^{-1} \\ &\quad (r - Rplim(\hat{\beta}_B)) \end{aligned}$$

olup (3.19) sonucunun kullanılmasıyla

$$plim(\hat{\beta}_{RB}) = plim(\hat{\beta}_B) = \beta \quad (3.28.)$$

elde edilir. O halde kısıtlı Bayes tahmin edici de tutarlı ve asimptotik olarak yansızdır. Ayrıca (3.18) ve (3.27) denklemlerindeki ifadeler kullanılarak büyük örneklem için kısıtlı Bayes tahmin edicinin RLS tahmin ediciye eşit olduğu kolaylıkla görülmektedir.

$J = [I - H^* R' (R H^* R')^{-1} R]$ olmak üzere kısıtlı Bayes tahmin edicinin yanlılığı

$$\begin{aligned}
Bias(\hat{\beta}_{RB}) &= E(\hat{\beta}_{RB} - \beta) \\
&= E[\hat{\beta}_B - \beta + H^*R'(RH^*R')^{-1}(r - R\hat{\beta}_B)] \\
&= Bias(\hat{\beta}_B) + E[H^*R'(RH^*R')^{-1}(r - R\beta + R\beta - R\hat{\beta}_B)] \\
&= Bias(\hat{\beta}_B) + H^*R'(RH^*R')^{-1}(r - R\beta) \\
&\quad + H^*R'(RH^*R')^{-1}R(\beta - E(\hat{\beta}_B)) \\
&= JBias(\hat{\beta}_B) \\
&= -\sigma_u^2 JH^*H^{-1}\beta^*
\end{aligned} \tag{3.29.}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{RB} &= \hat{\beta}_B + H^*R'(RH^*R')^{-1}(r - R\hat{\beta}_B) \\
&= \hat{\beta}_B + H^*R'(RH^*R')^{-1}r - H^*R'(RH^*R')^{-1}R\hat{\beta}_B \\
&= J\hat{\beta}_B + H^*R'(RH^*R')^{-1}r
\end{aligned} \tag{3.30.}$$

formunda yazılabildiği için kısıtlı Bayes tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi (3.30) ifadesinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\beta}_{RB}) &= Var(J\hat{\beta}_B + H^*R'(RH^*R')^{-1}r) \\
&= JVar(\hat{\beta}_B)J' \\
&= \sigma_u^2 JH^*X'XH^*J'
\end{aligned} \tag{3.31.}$$

şeklinde elde edilir. (3.30) ve (3.31)'in kullanılmasıyla kısıtlı Bayes tahmin edicinin MSE matrisi

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\beta}_{RB}) &= Var(\hat{\beta}_{RB}) + Bias(\hat{\beta}_{RB})Bias(\hat{\beta}_{RB})' \\
&= \sigma_u^2 (JH^*X'XH^*J' + \sigma_u^2 JH^*H^{-1}\beta^*\beta^{*'}H^{-1}H^*J')
\end{aligned} \tag{3.32.}$$

elde edilir. Kısıtlı Bayes tahmin edicinin lineer Bayes tahmin ediciden MSE kriterine göre daha iyi olması için $\Delta^* = MSE(\hat{\beta}_B) - MSE(\hat{\beta}_{RB})$ ifadesi nnd olmalıdır.

$$\begin{aligned}
 \Delta^* &= MSE(\hat{\beta}_B) - MSE(\hat{\beta}_{RB}) \\
 &= \sigma_u^2(H^*X'XH^* - JH^*X'XH^*J') \\
 &\quad + \sigma_u^4(H^*H^{-1}\beta^*\beta^{*'}H^{-1}H^* - JH^*H^{-1}\beta^*\beta^{*'}H^{-1}H^*J') \\
 &= \sigma_u^2H^*R'(RH^*R')^{-1}RH^*(X'X + \sigma_u^2H^{-1}\beta^*\beta^{*'}H^{-1}) \\
 &\quad H^*R'(RH^*R')^{-1}RH^* \tag{3.33.}
 \end{aligned}$$

hesaplanır. $H^*R'(RH^*R')^{-1}RH^*$ matrisi tam ranklı olduğundan (3.33) ifadesi nnd bir matristir. Bu nedenle kısıtlı Bayes tahmin edici lineer Bayes tahmin ediciden MSE kriterine göre daha üstündür.

3.2. Tahmin Edicilere Bayesyen Yaklaşım

3.2.1. Ridge Tahmin Ediciye Bayesyen Yaklaşım

(1.1) ile verilen klasik lineer regresyon modeli için (3.2) varsayımı sağlansın. $k \geq 0$ olmak üzere bilinmeyen parametre vektörü β hakkında

$$\begin{aligned}
 E(\beta) &= 0 \\
 Var(\beta) &= \frac{\sigma_u^2}{k}I \tag{3.34.}
 \end{aligned}$$

ön bilgileri mevcut olsun. Bu yardımcı bilgiler altında (3.14) formu kullanılarak lineer Bayes tahmin edici

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_B &= (X'X + kI)^{-1}X'y \\
 &= \hat{\beta}_k \tag{3.35.}
 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde ridge tahmin edici lineer Bayes tahmin edicinin özel bir halidir. (3.25) ifadesi dikkate alınırsa

$$\beta' \left[(X'X)^{-1} + \frac{2}{k} I \right] \beta \leq \sigma_u^2 \quad (3.36.)$$

eşitsizliği sağlandığında ridge tahmin edici EKK tahmin ediciden MSE kriterine göre daha üstündür.

3.2.2. Modified Ridge Tahmin Ediciye Bayesyen Yaklaşım

(1.1) ile verilen klasik lineer regresyon modeli için (3.2) varsayımı sağlansın. b_0 : $p \times 1$ stokastik olmayan bir vektör ve $k \geq 0$ olmak üzere bilinmeyen parametre vektörü β hakkında

$$\begin{aligned} E(\beta) &= b_0 \\ Var(\beta) &= \frac{\sigma_u^2}{k} I \end{aligned} \quad (3.37.)$$

ön bilgileri mevcut olsun. Bu durumda (3.14) formu kullanılarak lineer Bayes tahmin edici

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_B &= (X'X + kI)^{-1}(X'y + kb_0) \\ &= \hat{\beta}_m(k) \end{aligned} \quad (3.38.)$$

MR tahmin edici elde edilir. $\beta_1^* = (\beta - \sigma_u^2 b_0)$ olmak üzere (3.25)'den yararlanılarak MR tahmin edicinin EKK tahmin ediciden MSE kriterine göre daha iyi olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\beta_1^{*'} \left[(X'X)^{-1} + \frac{2}{k} I \right] \beta_1^* \leq \sigma_u^2 \quad (3.39.)$$

elde edilir.

3.2.3. Kısıtlı Ridge Tahmin Ediciye Bayesyen Yaklaşım

(1.1) ile verilen klasik lineer regresyon modeli için (3.2) varsayımı sağlansın. $k \geq 0$ olmak üzere bilinmeyen parametre vektörü β hakkında (2.1) denklemi ile verilen $R\beta = r$ yardımcı bilgileri mevcut olsun. β parametresi hakkında (3.34) denklemi ile verilen

$$E(\beta) = 0$$

$$Var(\beta) = \frac{\sigma_u^2}{k} I$$

varsayımları sağlandığında (3.26)'daki kısıtlı Bayes tahmin edici (3.35) ifadesinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{RB} &= \hat{\beta}_k - (X'X + kI)^{-1}R'(R(X'X + kI)^{-1}R')^{-1}(R\hat{\beta}_k - r) \\ &= \hat{\beta}_R(k)\end{aligned}\tag{3.40.}$$

RR tahmin edici elde edilir. Bu nedenle RR tahmin edici kısıtlı Bayes tahmin edicinin özel bir halidir.

3.2.4. Stein-Rule Tahmin Ediciye Bayesyen Yaklaşım

(1.1) ile verilen klasik lineer regresyon modeli için (3.2) varsayımı sağlansın. $k_1 > 0$ keyfi bir skaler olmak üzere bilinmeyen parametre vektörü β hakkında

$$E(\beta) = 0$$

$$Var(\beta) = \sigma_\beta^2 (X'X)^{-1}\tag{3.41.}$$

ön bilgileri mevcut olsun. Bu durumda (3.14) denkleminde yararlanılarak lineer Bayes tahmin edici

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_B &= \left(X'X + \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\beta^2} X'X \right)^{-1} X'y \\
 &= \left(\left(\frac{\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2}{\sigma_\beta^2} \right) X'X \right)^{-1} X'X\hat{\beta} \\
 &= \left(\frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2} \right) (X'X)^{-1} X'X\hat{\beta} \\
 &= \left(1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2} \right) \hat{\beta}
 \end{aligned} \tag{3.42.}$$

hesaplanır.

(3.42) denklemi ile verilen tahmin edici EKK tahmin ediciyi $0 \leq \left[1 - \sigma_u^2(\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2)^{-1} \right] \leq 1$ katsayısı ile büzmektedir. Öte yandan (3.42) ile verilen tahmin edici bilinmeyen σ_u^2 ve σ_β^2 parametrelerine bağlı olduğu için pratikte kullanışlı olmaz. $E(\beta'X'X\beta) = p\sigma_\beta^2$ ve $E(u'X(X'X)^{-1}X'u) = \sigma_u^2 p$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{p}\right) &= p^{-1}E[\beta'X'X\beta + u'X(X'X)^{-1}X'u + 2\beta'X'u] \\
 &= p^{-1}E(\beta'X'X\beta) + E(u'X(X'X)^{-1}X'u) + 2E(\beta'X'u) \\
 &= p^{-1}(p\sigma_\beta^2 + \sigma_u^2 p) \\
 &= \sigma_\beta^2 + \sigma_u^2
 \end{aligned} \tag{3.43.}$$

elde edilir. O halde $\left(\frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{p}\right)$ ifadesi $\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2$ için yansız bir tahmin edicidir. (1.7) ve (3.43)'den yararlanılarak (3.42) denkleminde σ_u^2 ve $\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2$ ifadeleri yerine bunların yansız tahmin edicileri yazılır ve $k_1 = p/(n - p)$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_B &= \left[1 - \frac{k_1 \hat{u}' \hat{u}}{\hat{\beta}' X' X \hat{\beta}} \right] \hat{\beta} \\ &= \hat{\beta}_S\end{aligned}\quad (3.44.)$$

Stein-Rule tahmin edici elde edilir.

3.2.5. Liu Tahmin Ediciye Bayesyen Yaklaşım

(1.1) ile verilen klasik lineer regresyon modeli için (3.2) varsayımı sağlansın. $0 < d < 1$ olmak üzere bilinmeyen parametre vektörü β hakkında

$$\begin{aligned}E(\beta) &= d\beta \\ Var(\beta) &= \sigma_u^2 I\end{aligned}\quad (3.45.)$$

yardımcı bilgileri verilsin. Bu durumda (3.14) formundan lineer Bayes tahmin edici

$$\hat{\beta}_B = (X'X + I)^{-1}(X'y + d\beta)\quad (3.46.)$$

elde edilir. (3.46) denkleminde elde edilen tahmin edici bilinmeyen β parametresine bağlı olduğundan istatistiksel uygulamalarda kullanılamaz. Bunun için (3.46)'daki lineer Bayes tahmin edicide bilinmeyen β parametresi yerine yansız tahmin edicisi olan $\hat{\beta}$ EKK tahmin edici kullanılırsa

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_B &= (X'X + I)^{-1}(X'y + d\hat{\beta}) \\ &= \hat{\beta}_d\end{aligned}\quad (3.47.)$$

Liu tahmin edici elde edilir. Bu sonuç, Liu tahmin edicinin lineer Bayes tahmin edicinin özel bir hali olarak elde edilebileceğini göstermektedir.

3.2.6. Uyarlanmış Optimal Tahmin Ediciye Bayesyen Yaklaşım

(1.1) ile verilen klasik lineer regresyon modeli için (3.2) varsayımı sağlansın. Bilinmeyen parametre vektörü β hakkında

$$\begin{aligned} E(\beta) &= 0 \\ Var(\beta) &= p(\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2)(X'X)^{-1} \end{aligned} \quad (3.48.)$$

ön bilgileri mevcut olsun. Bu durumda (3.14) denkleminde yararlanılarak lineer Bayes tahmin edici

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_B &= \left(X'X + \frac{\sigma_u^2}{p(\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2)} X'X \right)^{-1} X'y \\ &= \left(\left(\frac{\sigma_u^2 + p(\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2)}{p(\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2)} \right) X'X \right)^{-1} X'X\hat{\beta} \\ &= \left(\frac{\sigma_u^2 + p(\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2)}{p(\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2)} \right)^{-1} (X'X)^{-1} X'X\hat{\beta} \\ &= \frac{p(\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2)}{\sigma_u^2 + p(\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2)} \hat{\beta} \end{aligned} \quad (3.49.)$$

hesaplanır. Öte yandan (3.49) denkleminde elde edilen tahmin edici bilinmeyen σ_u^2 ve σ_β^2 parametrelerine bağlı olduğu için pratikte kullanışlı olmaz. (3.43) denkleminde $\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2$ ifadesi için yansız bir $\left(\frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{p} \right)$ tahmin edicisi elde edilmişti. (3.43) ve (3.49)'dan yararlanılarak σ_u^2 ve $\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2$ ifadeleri yerine bunların yansız tahmin edicileri yazılırsa

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_B &= \frac{p(\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2)}{\sigma_u^2 + p(\sigma_u^2 + \sigma_\beta^2)} \hat{\beta} \\
&= \frac{p\left(\frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{p}\right)}{\hat{\sigma}_u^2 + p\left(\frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{p}\right)} \hat{\beta} \\
&= \frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}} \hat{\beta} \\
&= \frac{\hat{\beta}'X'y}{\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}} \hat{\beta} \\
&= \hat{\beta}_F
\end{aligned} \tag{3.50.}$$

uyarlanmış optimal tahmin edici elde edilir.

3.2.7. İki Parametrelili Tahmin Ediciye Bayesyen Yaklaşım

(1.1) ile verilen klasik lineer regresyon modeli için (3.2) varsayımı sağlansın. $k \geq 0$ ve $0 < d < 1$ olmak üzere bilinmeyen parametre vektörü β hakkında

$$\begin{aligned}
E(\beta) &= d\beta \\
Var(\beta) &= \frac{\sigma_u^2}{k} I
\end{aligned} \tag{3.51.}$$

ön bilgileri verilsin. Bu durumda (3.14) ifadesinden yararlanılarak lineer Bayes tahmin edici

$$\hat{\beta}_B = (X'X + kI)^{-1}(X'y + kd\beta) \tag{3.52.}$$

elde edilir. (3.52) denkleminde elde edilen tahmin edici bilinmeyen β parametresine bağlı olduğundan istatistiksel uygulamalarda kullanışlı olmaz. Bunun için (3.52)'deki lineer Bayes tahmin edicide bilinmeyen β parametresi yerine yansız tahmini olan $\hat{\beta}$ EKK tahmin edici kullanılırsa

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_B &= (X'X + kI)^{-1}(X'y + kd\hat{\beta}) \\ &= \hat{\beta}(k, d)\end{aligned}\tag{3.52.}$$

iki parametrelili tahmin edici elde edilir.

4. KARŞILAŞTIRMALAR

Bu bölümde lineer Bayes tahmin ediciyle ilişkili olan yanlı tahmin ediciler farklı iyilik kriterleri kullanılarak teorik olarak karşılaştırılacaktır. Ayrıca elde edilen teorik bulgular sayısal örnek ve Monte Carlo simülasyonu ile desteklenecektir.

4.1. Lineer Regresyon Modelinde Karşılaştırmalar**4.1.1. AO Tahmin Edici ve EKK Tahmin Edicinin EBLF Kriterine Göre Karşılaştırılması****4.1.1.1. Teorik Karşılaştırma**

AO tahmin edici (2.52) denklemi ile

$$\hat{\beta}_F = \frac{\hat{\beta}' X' y}{\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\beta}' X' X \hat{\beta}} \hat{\beta}$$

şeklinde verilmişti. Bölüm 3.2.6'da ise AO tahmin edicinin bir bayesyen tahmin edici olduğu gösterilmişti. AO tahmin edici ile EKK tahmin ediciyi genişletilmiş dengeli kayıp fonksiyonuna göre karşılaştırmak için öncelikle Bölüm 1.1'de verilen n 'nin büyük değerleri için $n^{-1}X'X$ matrisinin limitinin var ve p ranklı tekil olmayan bir matris olduğu varsayımı kabul edilsin. (1.4) denklemindeki EKK tahmin edici

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'y \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'u \end{aligned} \quad (4.1.)$$

elde edilir. $\hat{c} = \frac{\hat{\beta}' X' y}{\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\beta}' X' X \hat{\beta}}$ ve $\varepsilon \sim Op(n^{-1/2})$ olmak üzere

$$\hat{\beta}_F = \hat{c}\hat{\beta} \quad (4.2.)$$

ve

$$\hat{\sigma}_u^2 = \sigma_u^2 + \varepsilon \quad (4.3.)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \hat{c} &= \frac{\hat{\beta}'X'y}{\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}} \\ &= 1 - \frac{(\sigma_u^2 + \varepsilon)}{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta} + \sigma_u^2 + \varepsilon} \\ &= 1 - \frac{(\sigma_u^2 + \varepsilon)}{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}} \left[1 + \frac{2u'X\hat{\beta}}{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}} + \frac{u'X(X'X)^{-1}X'u}{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}} + \frac{\sigma_u^2 + \varepsilon}{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.4.)$$

elde edilir (ayrıca bkz. Tracy ve Srivastava, 1994) . $X'X \sim Op(n)$ ve $X'u \sim Op(n^{1/2})$ olduğundan (4.4) denkleminde

$$\hat{c} = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}} + Op(n^{-3/2}) \quad (4.5.)$$

yazılabilir. Daha sonra (4.1), (4.2) ve (4.5) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$\hat{\beta}_F - \beta = (X'X)^{-1}X'u - \frac{\sigma_u^2}{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}[\beta + (X'X)^{-1}X'u] + Op(n^{-3/2}) \quad (4.6.)$$

elde edilir. (1.27) denkleminde yararlanılarak AO tahmin edici için EBLF

$$\begin{aligned}
L_E(\hat{\beta}_F) &= t_1(X\hat{\beta}_F - y)'(X\hat{\beta}_F - y) + t_2(\hat{\beta}_F - \beta)'X'X(\hat{\beta}_F - \beta) \\
&\quad + (1 - t_1 - t_2)(X\hat{\beta}_F - y)'X(\hat{\beta}_F - \beta) \\
&= t_1u'u - (1 + t_1 - t_2)u'X(\hat{\beta}_F - \beta) \\
&\quad + (\hat{\beta}_F - \beta)'X'X(\hat{\beta}_F - \beta)
\end{aligned} \tag{4.7.}$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.6) ifadesi (4.7) denkleminde yerleştirilerek

$$\begin{aligned}
L_E(\hat{\beta}_F) &= t_1u'u + (t_2 - t_1)u'X(X'X)^{-1}X'u \\
&\quad + \frac{\sigma_u^2(t_1 - t_2 - 1)}{\beta'X'X\beta}[u'X(X'X)^{-1}X'u + u'X\beta]
\end{aligned} \tag{4.8.}$$

elde edilir. (4.8)'den AO tahmin edicinin EBLF altındaki riski $Op(n^{-1})$ yakınsamasına göre

$$\begin{aligned}
EBLF(\hat{\beta}_F) &= E[L_E(\hat{\beta}_F)] \\
&= t_1\sigma_u^2n + (t_2 - t_1)\sigma_u^2p + (t_1 - t_2 - 1)\frac{\sigma_u^4p}{\beta'X'X\beta}
\end{aligned} \tag{4.9.}$$

şeklinde yazılabilir (bkz. Özbay ve Kaçıranlar, 2016a). (4.1) denkleminin kullanılmasıyla

$$\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'u \tag{4.10.}$$

elde edilir. (1.27)'den EKK tahmin edici için EBLF

$$\begin{aligned}
L_E(\hat{\beta}) &= t_1(X\hat{\beta} - y)'(X\hat{\beta} - y) + t_2(\hat{\beta} - \beta)'X'X(\hat{\beta} - \beta) \\
&\quad + (1 - t_1 - t_2)(X\hat{\beta} - y)'X(\hat{\beta} - \beta) \\
&= t_1u'u - (1 + t_1 - t_2)u'X(\hat{\beta} - \beta) + (\hat{\beta} - \beta)'X'X(\hat{\beta} - \beta)
\end{aligned} \tag{4.11.}$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.10) ve (4.11) denklemlerinin kullanılmasıyla EKK tahmin edicinin EBLF altındaki riski

$$\begin{aligned} EBLF(\hat{\beta}) &= E[L_E(\hat{\beta})] \\ &= t_1 \sigma_u^2 n + (t_2 - t_1) \sigma_u^2 p \end{aligned} \quad (4.12.)$$

hesaplanır.

(4.9) ve (4.12) denklemleri dikkate alındığında AO ve EKK tahmin edicilerinin risk performanslarının uyumun iyiliği ve tahminin iyiliği kriterlerinin her ikisinden de etkilendiği görülmektedir. Ayrıca AO ve EKK tahmin edicilerinin risk değerleri örneklem miktarı n ile doğru orantılıdır. Bu nedenle n arttıkça AO ve EKK tahmin edicilerinin risk değerleri artacaktır.

Teorem 4.1. t_1 ve t_2 0 ile 1 arasında tanımlı skaler değerler olsun. AO tahmin edici EBLF kriterine göre EKK tahmin ediciden her zaman daha iyidir.

İspat: (4.9) ve (4.12) denklemlerinin kullanılmasıyla AO tahmin edici ile EKK tahmin edicinin EBLF altındaki risk değerleri farkı

$$\begin{aligned} \Delta &= EBLF(\hat{\beta}) - EBLF(\hat{\beta}_F) \\ &= (1 + t_2 - t_1) \frac{\sigma_u^4 p}{\beta' X' X \beta} \end{aligned} \quad (4.13.)$$

elde edilir. t_1 ve t_2 değerleri 0 ile 1 arasında tanımlı olduğundan her zaman $\Delta \geq 0$ olacaktır. Bu sonuca göre AO tahmin edici EBLF kriterine göre EKK tahmin ediciden her zaman daha iyidir.

Sonuç 4.1. $t_1 = 1$ ve $t_2 = 0$ iken (1.28) denklemindeki EBLF uyumun iyiliği kriterine indirgenir. Bu durumda (4.13) denklemindeki fark dikkate alınarak AO ve EKK tahmin edicilerin hangisinin daha iyi olduğuna karar verilemez.

Sonuç 4.2. $t_1 = 0$ ve $t_2 = 1$ iken (1.28) denklemindeki EBLF tahminin iyiliği kriterine indirgenir. (4.13) denklemindeki sonuç dikkate alınırsa tahminin iyiliği kriteri bakımından AO tahmin edici EKK tahmin ediciden daha üstündür.

Sonuç 4.3. (1.28) denkleminde $t_1 = 0$ ve $t_2 = 0$ alındığında EBLF uyumun iyiliği ve tahminin iyiliği kriterleri arasındaki etkileşimi belirlemektedir. Bu etkileşim dikkate alındığında (4.13) denklemindeki sonuçtan yararlanılarak AO tahmin edicinin EKK tahmin ediciden daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Sonuç 4.4. (1.28) denkleminde $t_1 = t$ ve $t_2 = 1 - t$ alınırsa (1.21) denklemindeki ZBLF elde edilir. Bu durumda (4.13) denklemindeki fark dikkate alınarak AO tahmin edicinin ZBLF altında risk kriterine göre EKK tahmin ediciye üstünlük sağladığı görülmektedir.

4.1.1.2. Monte Carlo Simülasyonu

Önceki bölümde AO tahmin edici ile EKK tahmin edicinin EBLF kriterine göre risk performansları teorik olarak karşılaştırılmıştı. Bu bölümde ise bu tahmin edicilerin EBLF kriterine göre performansları Monte Carlo simülasyonu yardımıyla incelenecektir.

Simülasyon çalışması için $t_1 = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$ ve $t_2 = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$ değerleri kullanılmıştır. Açıklayıcı değişkenler matrisi X 'in kolonları arasındaki ilişki ρ değişkeni ile belirlenmiştir. Daha sonra ρ korelasyonu kullanılarak elde edilen Σ korelasyon matrisi ile açıklayıcı değişkenler $X \sim N_6(0, \Sigma)$ dağılımından yararlanılarak üretilmiştir. 7 serbestlik derecesine sahip t dağılımı t_7 gösterimi ile belirtilmiş olsun. Simülasyon çalışmasında hata terimi $u \sim N(0, \sigma_u^2 I_n)$ ve $u \sim t_7$ dağılımları kullanılarak üretilmiştir. t dağılımı kullanılarak üretilen hata terimleri varyansları σ_u^2 olacak şekilde uygun bir sabitle çarpılmıştır. β parametre vektörünün gerçek değeri $\beta = (10, 1, -1.5, 2.5, -2, 8, 6)'$ olarak seçilmiştir. Örneklem sayısı için 40, 100 ve 500 değerleri kullanılmıştır. Korelasyon katsayısı ρ için 0, 0.5, 0.9 değerleri ve σ_u için 1, 5, 10 değerleri kullanılmıştır. Bu veriler

kullanılarak AO ve EKK tahmin edicilerin risk değerleri 5000 deneme sonucunda hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 4.1-4.4 ile verilmiştir. Çizelgelerde her satırdaki en iyi risk değeri koyu renk ile belirtilmiştir.

Çizelge 4.1. $n = 40$ ile tahmin edilmiş risk değerleri

		$u \sim N(0, s^2 I_n)$								$u \sim t_r$					
		s = 1		s = 5		s = 10		s = 1		s = 5		s = 10			
	t_1	t_2	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	
r = 0	0.1	0.1	9.41	9.40	235.49	233.65	941.96	923.50	9.98	9.96	229.75	230.24	998.07	978.60	
		0.5	9.43	9.42	235.75	234.43	943.01	928.50	9.97	9.96	229.96	229.99	997.67	982.47	
		0.9	9.44	9.43	236.01	235.21	944.05	933.49	9.97	9.96	230.16	229.74	997.27	986.33	
	0.5	0.1	18.84	18.82	471.10	468.74	1884.41	1862.00	21.98	21.96	459.79	460.74	2198.19	2174.46	
		0.5	18.85	18.84	471.36	469.52	1885.46	1867.00	21.97	21.96	460.00	460.49	2197.79	2178.32	
		0.9	18.86	18.85	471.62	470.30	1886.50	1871.99	21.97	21.96	460.21	460.24	2197.39	2182.19	
	0.9	0.1	28.26	28.24	706.71	703.84	2826.86	2800.50	33.98	33.96	689.83	691.24	3398.31	3370.31	
		0.5	28.27	28.26	706.97	704.62	2827.91	2805.50	33.97	33.96	690.04	690.99	3397.91	3374.18	
		0.9	28.28	28.27	707.23	705.40	2828.95	2810.49	33.97	33.96	690.25	690.74	3397.51	3378.04	
r = 0.5	0.1	0.1	9.41	9.40	235.49	233.79	941.96	925.52	9.98	9.97	229.75	229.80	998.07	981.75	
		0.5	9.43	9.42	235.75	234.57	943.01	930.61	9.97	9.96	229.96	229.79	997.67	985.22	
		0.9	9.44	9.43	236.01	235.36	944.05	935.69	9.97	9.96	230.16	229.78	997.27	988.68	
	0.5	0.1	18.84	18.82	471.10	468.88	1884.41	1863.94	21.98	21.96	459.79	460.06	2198.19	2178.01	
		0.5	18.85	18.84	471.36	469.66	1885.46	1869.02	21.97	21.96	460.00	460.05	2197.79	2181.47	
		0.9	18.86	18.85	471.62	470.45	1886.50	1874.10	21.97	21.96	460.21	460.04	2197.39	2184.94	
	0.9	0.1	28.26	28.24	706.71	703.97	2826.86	2802.35	33.98	33.96	689.83	690.32	3398.31	3374.27	
		0.5	28.27	28.26	706.97	704.75	2827.91	2807.43	33.97	33.96	690.04	690.31	3397.91	3377.73	
		0.9	28.28	28.27	707.23	705.54	2828.95	2812.51	33.97	33.96	690.25	690.30	3397.51	3381.19	
r = 0.9	0.1	0.1	9.41	9.40	235.49	233.67	941.96	924.75	9.98	9.97	229.75	229.50	998.07	984.24	
		0.5	9.43	9.42	235.75	234.51	943.01	930.26	9.97	9.96	229.96	229.62	997.67	986.79	
		0.9	9.44	9.43	236.01	235.35	944.05	935.77	9.97	9.96	230.16	229.74	997.27	989.35	
	0.5	0.1	18.84	18.82	471.10	468.71	1884.41	1862.73	21.98	21.97	459.79	459.63	2198.19	2181.40	
		0.5	18.85	18.84	471.36	469.55	1885.46	1868.24	21.97	21.96	460.00	459.75	2197.79	2183.96	
		0.9	18.86	18.85	471.62	470.38	1886.50	1873.76	21.97	21.96	460.21	459.87	2197.39	2186.52	
	0.9	0.1	28.26	28.24	706.71	703.74	2826.86	2800.71	33.98	33.96	689.83	689.76	3398.31	3378.57	
		0.5	28.27	28.26	706.97	704.58	2827.91	2806.22	33.97	33.96	690.04	689.88	3397.91	3381.12	
		0.9	28.28	28.27	707.23	705.42	2828.95	2811.74	33.97	33.96	690.25	690.00	3397.51	3383.68	

Çizelge 4.2. $n = 100$ ile tahmin edilmiş risk değerleri

		$u \sim N(0, s^2 I_n)$								$u \sim t_\gamma$															
		s = 1				s = 5				s = 10				s = 1				s = 5				s = 10			
		t_1	t_2	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$		
60	r = 0	0.1	0.1	17.04	17.03	426.09	424.66	1704.38	1690.96	16.60	16.61	419.68	420.09	1661.11	1658.33										
			0.5	17.07	17.06	426.81	425.85	1707.26	1697.47	16.60	16.61	419.77	419.91	1661.04	1657.63										
			0.9	17.10	17.09	427.53	427.03	1710.13	1703.98	16.60	16.60	419.86	419.72	1660.96	1656.92										
		0.5	0.1	57.56	57.54	1439.02	1437.12	5756.08	5739.02	55.24	55.25	1395.13	1395.82	5525.14	5522.99										
			0.5	57.58	57.57	1439.73	1438.30	5758.95	5745.53	55.24	55.25	1395.22	1395.64	5525.06	5522.28										
			0.9	57.61	57.60	1440.45	1439.49	5761.82	5752.04	55.24	55.25	1395.31	1395.45	5524.99	5521.58										
		0.9	0.1	98.07	98.06	2451.94	2449.58	9807.78	9787.08	93.88	93.89	2370.59	2371.55	9389.17	9387.65										
			0.5	98.10	98.09	2452.66	2450.76	9810.65	9793.59	93.88	93.89	2370.68	2371.37	9389.09	9386.94										
			0.9	98.13	98.12	2453.38	2451.95	9813.52	9800.10	93.88	93.89	2370.77	2371.18	9389.01	9386.23										
	r = 0.5	0.1	0.1	17.04	17.03	426.09	425.09	1704.38	1694.81	16.60	16.61	419.68	420.55	1661.11	1658.97										
			0.5	17.07	17.06	426.81	426.12	1707.26	1700.11	16.60	16.61	419.77	420.21	1661.04	1658.39										
			0.9	17.10	17.09	427.53	427.15	1710.13	1705.41	16.60	16.60	419.86	419.86	1660.96	1657.82										
		0.5	0.1	57.56	57.55	1439.02	1437.71	5756.08	5744.08	55.24	55.25	1395.13	1396.44	5525.14	5523.49										
			0.5	57.58	57.57	1439.73	1438.74	5758.95	5749.38	55.24	55.25	1395.22	1396.10	5525.06	5522.92										
			0.9	57.61	57.60	1440.45	1439.76	5761.82	5754.68	55.24	55.25	1395.31	1395.75	5524.99	5522.34										
		0.9	0.1	98.07	98.06	2451.94	2450.32	9807.78	9793.34	93.88	93.89	2370.59	2372.34	9389.17	9388.02										
			0.5	98.10	98.09	2452.66	2451.35	9810.65	9798.64	93.88	93.89	2370.68	2371.99	9389.09	9387.44										
			0.9	98.13	98.12	2453.38	2452.38	9813.52	9803.94	93.88	93.89	2370.77	2371.65	9389.01	9386.87										
	r = 0.9	0.1	0.1	17.04	17.03	426.09	425.29	1704.38	1696.71	16.60	16.61	419.68	420.79	1661.11	1663.00										
			0.5	17.07	17.06	426.81	426.26	1707.26	1701.53	16.60	16.61	419.77	420.36	1661.04	1661.08										
			0.9	17.10	17.09	427.53	427.23	1710.13	1706.35	16.60	16.61	419.86	419.93	1660.96	1659.16										
		0.5	0.1	57.56	57.55	1439.02	1437.97	5756.08	5746.46	55.24	55.25	1395.13	1396.78	5525.14	5528.87										
			0.5	57.58	57.57	1439.73	1438.94	5758.95	5751.28	55.24	55.25	1395.22	1396.34	5525.06	5526.95										
			0.9	57.61	57.60	1440.45	1439.90	5761.82	5756.10	55.24	55.25	1395.31	1395.91	5524.99	5525.03										
		0.9	0.1	98.07	98.06	2451.94	2450.65	9807.78	9796.21	93.88	93.89	2370.59	2372.76	9389.17	9394.74										
			0.5	98.10	98.09	2452.66	2451.61	9810.65	9801.03	93.88	93.89	2370.68	2372.32	9389.09	9392.82										
			0.9	98.13	98.12	2453.38	2452.58	9813.52	9805.85	93.88	93.89	2370.77	2371.89	9389.01	9390.90										

Çizelge 4.3. $n = 500$ ile tahmin edilmiş risk değerleri

		$u \sim N(0, s^2 I_n)$								$u \sim t_r$					
		s = 1		s = 5		s = 10		s = 1		s = 5		s = 10			
		t_1	t_2	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$		
G1	r = 0	0.1	0.1	60.89	60.88	1522.30	1522.14	6089.21	6087.48	56.98	56.97	1424.59	1424.31	5698.38	5695.66
			0.5	60.86	60.85	1521.56	1521.44	6086.26	6084.83	56.96	56.95	1424.13	1423.93	5696.53	5694.49
			0.9	60.83	60.82	1520.82	1520.74	6083.31	6082.18	56.94	56.93	1423.67	1423.56	5694.69	5693.33
		0.5	0.1	276.03	276.02	6900.83	6900.63	27603.32	27601.29	256.78	256.77	6419.69	6419.33	25678.79	25675.39
			0.5	276.01	276.00	6900.09	6899.93	27600.37	27598.64	256.76	256.75	6419.23	6418.95	25676.94	25674.23
			0.9	275.97	275.96	6899.35	6899.23	27597.42	27595.98	256.75	256.74	6418.77	6418.58	25675.10	25673.06
		0.9	0.1	491.17	491.16	12279.35	12279.12	49117.42	49115.09	456.59	456.58	11414.80	11414.35	45659.20	45655.13
			0.5	491.14	491.13	12278.61	12278.42	49114.47	49112.44	456.57	456.56	11414.34	11413.97	45657.36	45653.96
			0.9	491.11	491.10	12277.88	12277.72	49111.52	49109.79	456.55	456.54	11413.87	11413.59	45655.51	45652.80
	r = 0.5	0.1	0.1	60.89	60.88	1522.30	1521.79	6089.21	6084.81	56.98	56.97	1424.59	1424.43	5698.38	5696.71
			0.5	60.86	60.85	1521.56	1521.23	6086.26	6083.29	56.96	56.95	1424.13	1424.01	5696.53	5695.22
			0.9	60.83	60.82	1520.82	1520.68	6083.31	6081.77	56.94	56.93	1423.67	1423.59	5694.69	5693.74
		0.5	0.1	276.03	276.02	6900.83	6900.14	27603.32	27597.48	256.78	256.77	6419.69	6419.48	25678.79	25676.76
			0.5	276.00	275.99	6900.09	6899.58	27600.37	27595.96	256.76	256.75	6419.23	6419.07	25676.94	25675.27
			0.9	275.97	275.96	6899.35	6899.02	27597.42	27594.44	256.75	256.74	6418.77	6418.65	25675.10	25673.79
		0.9	0.1	491.17	491.16	12279.35	12278.48	49117.42	49110.15	456.59	456.58	11414.80	11414.54	45659.20	45656.81
			0.5	491.14	491.13	12278.61	12277.93	49114.47	49108.63	456.57	456.56	11414.34	11414.13	45657.36	45655.32
			0.9	491.11	491.10	12277.88	12277.37	49111.52	49107.11	456.55	456.54	11413.87	11413.71	45655.51	45653.84
	r = 0.9	0.1	0.1	60.89	60.88	1522.30	1521.96	6089.21	6086.21	56.98	56.97	1424.59	1424.38	5698.38	5696.39
			0.5	60.86	60.85	1521.56	1521.34	6086.26	6084.18	56.96	56.95	1424.13	1423.98	5696.53	5695.05
			0.9	60.83	60.82	1520.82	1520.72	6083.31	6082.15	56.94	56.93	1423.67	1423.59	5694.69	5693.72
		0.5	0.1	276.03	276.02	6900.83	6900.37	27603.32	27599.40	256.78	256.77	6419.69	6419.42	25678.79	25676.30
			0.5	276.01	276.00	6900.09	6899.75	27600.37	27597.37	256.76	256.75	6419.23	6419.02	25676.94	25674.96
			0.9	275.97	275.96	6899.35	6899.13	27597.42	27595.33	256.75	256.74	6418.77	6418.63	25675.10	25673.62
		0.9	0.1	491.17	491.16	12279.35	12278.78	49117.42	49112.58	456.59	456.58	11414.80	11414.46	45659.20	45656.21
			0.5	491.14	491.13	12278.61	12278.16	49114.47	49110.55	456.57	456.56	11414.34	11414.06	45657.36	45654.87
			0.9	491.11	491.10	12277.88	12277.54	49111.52	49108.52	456.55	456.54	11413.87	11413.67	45655.51	45653.53

Çizelge 4.1-4.3 dikkate alındığında $u \sim N(0, \sigma_u^2 I_n)$ ile verilen n, σ, ρ, t_1 ve t_2 değerleri için AO tahmin edicinin EKK tahmin ediciye göre oldukça iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Bunun yanı sıra hata terimleri daha kalın kuyruklu bir dağılım olan $u \sim t_7$ dağılımından yararlanılarak üretildiğinde AO tahmin edici genellikle EKK tahmin ediciden daha küçük risk değerlerine sahiptir. Çizelge 4.1-4.3 dikkate alındığında çıkarılabilecek genel bir sonuç t_1 arttıkça risk değerlerinin artmasıdır. Benzer şekilde t_2 arttıkça tahmin edicilerin risk değerleri çoğu durumda artmaktadır. Örneklem büyüklüğündeki bir artış ise risk değerlerinin artışına neden olmaktadır. Bu sonuç önceki bölümde elde edilen teorik bulgularla uyuşmaktadır. σ_u arttıkça tahmin edicilerin risk değerlerinin arttığı gözlemlenmiştir. Ayrıca, σ_u arttığında AO ve EKK tahmin edicilerin risk değerleri arasındaki fark da artmaktadır. Başka bir deyişle σ_u 'nin büyük değerleri için AO tahmin edicinin EKK tahmin ediciye üstünlüğü belirginleşmektedir. n, σ, t_1 ve t_2 'nin verilen değerleri için ρ arttıkça AO tahmin edicinin EBLF altındaki risk değerleri artmaktadır. Öte yandan, beklenildiği üzere korelasyonun derecesi arttıkça EKK tahmin edicinin EBLF altındaki risk değerleri değişmemektedir.

Çizelge 4.4. Bazı özel durumlar için tahmin edilmiş risk değerleri

		$u \sim N(0, s^2 I_n)$								$u \sim t_r$						
				s = 1		s = 5		s = 10		s = 1		s = 5		s = 10		
n		t_1	t_2	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	$\hat{b}$	$\hat{b}_F$	
63	r = 0	40	0	1	7.08	7.07	177.17	176.63	708.70	700.12	6.97	6.96	174.28	173.72	697.14	688.33
			1	0	30.62	30.60	765.55	762.42	3062.21	3033.88	36.98	36.96	924.61	921.25	3698.44	3668.31
			0	0	7.06	7.04	176.52	174.68	706.09	687.63	6.98	6.96	174.53	172.58	698.14	678.67
		100	0	1	6.97	6.96	174.48	174.21	697.92	693.59	6.94	6.93	173.73	173.46	694.93	690.58
			1	0	108.19	108.18	2704.99	2702.40	10819.98	10797.47	103.54	103.55	2588.80	2588.93	10355.20	10353.99
			0	0	6.90	6.89	172.68	171.25	690.74	677.32	6.94	6.95	173.78	173.71	695.13	692.35
	r = 0.5	500	0	1	7.04	7.03	176.01	175.94	704.05	703.07	6.99	6.98	174.78	174.71	699.12	698.10
			1	0	544.96	544.95	13624.17	13623.92	54496.68	54494.21	506.54	506.53	12663.69	12663.19	50654.77	50650.35
			0	0	7.11	7.10	177.85	177.70	711.43	709.70	7.03	7.02	175.93	175.65	703.73	701.02
		40	0	1	7.08	7.07	177.17	176.78	708.70	702.36	6.97	6.96	174.28	173.86	697.14	690.48
			1	0	30.62	30.60	765.55	762.54	3062.21	3035.68	36.98	36.96	924.61	921.68	3698.44	3672.47
			0	0	7.06	7.04	176.52	174.82	706.09	689.65	6.98	6.97	174.53	172.86	698.14	681.82
63	r = 0.9	100	0	1	6.97	6.96	174.48	174.25	697.92	694.42	6.94	6.93	173.73	173.52	694.93	691.54
			1	0	108.19	108.18	2704.99	2703.22	10819.98	10804.33	103.54	103.55	2588.80	2588.90	10355.20	10354.29
			0	0	6.90	6.89	172.68	171.68	690.74	681.17	6.94	6.95	173.78	173.73	695.13	692.98
		500	0	1	7.04	7.03	176.01	175.95	704.05	703.23	6.99	6.98	174.78	174.73	699.12	698.36
			1	0	544.96	544.95	13624.17	13623.21	54496.68	54488.69	506.54	506.53	12663.69	12663.41	50654.77	50652.19
			0	0	7.11	7.10	177.85	177.35	711.43	707.02	7.03	7.02	175.93	175.77	703.73	702.06
	r = 0.9	40	0	1	7.08	7.07	177.17	176.80	708.70	702.66	6.97	6.96	174.28	173.87	697.14	690.70
			1	0	30.62	30.59	765.55	762.29	3062.21	3033.82	36.98	36.96	924.61	922.28	3698.44	3677.22
			0	0	7.06	7.04	176.52	174.70	706.09	688.87	6.98	6.97	174.53	173.16	698.14	684.31
		100	0	1	6.97	6.96	174.48	174.30	697.92	695.12	6.94	6.93	173.73	173.56	694.93	692.21
			1	0	108.19	108.18	2704.99	2703.57	10819.98	10807.44	103.55	103.56	2588.80	2589.80	10355.20	10361.69
			0	0	6.90	6.89	172.68	171.88	690.74	683.07	6.94	6.95	173.78	174.20	695.13	697.01
63	r = 0.9	500	0	1	7.04	7.03	176.01	175.96	704.05	703.34	6.99	6.98	174.78	174.73	699.12	698.40
			1	0	544.96	544.95	13624.17	13623.54	54496.68	54491.39	506.54	506.53	12663.69	12663.32	50654.77	50651.52
			0	0	7.11	7.10	177.85	177.52	711.43	708.43	7.03	7.02	175.93	175.72	703.73	701.75
			0	0	7.11	7.10	177.85	177.52	711.43	708.43	7.03	7.02	175.93	175.72	703.73	701.75

Sonuç 4.1-4.3’de incelenen özel durumlar için elde edilen risk değerleri Çizelge 4.4’de verilmiştir. Buna göre, uyumun iyiliği kriteri göz önüne alındığında ($t_1 = 1, t_2 = 0$), $u \sim N(0, \sigma_u^2 I_n)$ iken AO tahmin edicinin EKK tahmin ediciden her zaman daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Bunun yanı sıra $u \sim t_7$ iken AO tahmin edici genellikle EKK tahmin ediciden üstündür. Tahminin iyiliği kriteri açısından AO ve EKK tahmin edicilerin risk performansları değerlendirildiğinde ($t_1 = 0, t_2 = 1$), $u \sim N(0, \sigma_u^2 I_n)$ ve $u \sim t_7$ durumlarının her ikisi için de AO tahmin edicinin EKK tahmin ediciden daha küçük risk değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Eğer uyumun iyiliği ve tahminin iyiliği arasındaki etkileşim göz önünde bulundurulursa, $u \sim N(0, \sigma_u^2 I_n)$ iken her durumda AO tahmin edici EKK tahmin ediciden daha üstündür. Genel olarak aynı sonuç $u \sim t_7$ iken de elde edilmiştir.

4.1.2. Genel Lineer Regresyon Modeli için Uygulanabilir Genelleştirilmiş Kısıtlı Ridge Regresyon Tahmin Edici ve Performansı

4.1.2.1. Tanım

(1.1) denklemi ile verilen lineer regresyon modeli için

$$\begin{aligned} E(u) &= 0 \\ Var(u) &= \sigma_u^2 V^{-1} \end{aligned} \quad (4.14.)$$

varsayımı sağlansın. Bu varsayım altında (1.1) modeli genel lineer regresyon modeli olarak adlandırılır. V bilinen pd bir matris olmak üzere Aitken (1935) genelleştirilmiş EKK tahmin ediciyi

$$\hat{\beta}_{GEKK} = (X'VX)^{-1}X'Vy \quad (4.15.)$$

formunda tanımlamıştır. Bölüm 2.2’de belirtildiği gibi X matrisinin kolonları arasında lineer ilişki varsa (4.15) denkleminde tanımlanan tahmin edici kullanıldığında regresyon katsayılarının kötü tahmini elde edilir. Trenkler (1984) genelleştirilmiş ridge (GR) tahmin ediciyi

$$\hat{\beta}_{GR}(k) = (X'VX + kI)^{-1}X'Vy \quad (4.16.)$$

tanımlamıştır.

(3.1) varsayımı altında genel lineer regresyon modeli için genelleştirilmiş lineer Bayes ve genelleştirilmiş kısıtlı Bayes tahmin edici 3.1.1 bölümünde kullanılan yöntemden yararlanılarak

$$\hat{\beta}_{GB} = (X'VX + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1}(X'Vy + \sigma_u^2 H^{-1}\theta) \quad (4.17.)$$

Ve

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{GRB} = \hat{\beta}_{GB} + (X'VX + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} \\ R'[R(X'VX + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1}R']^{-1}(r - R\hat{\beta}_{GB}) \end{aligned} \quad (4.18.)$$

şeklinde tanımlanabilir (ayrıca bkz. Rao, 1976).

Genel lineer regresyon modelinde bazı durumlarda V matrisi bilinmeyebilir. Böyle bir durumda, uygulamada bilinmeyen varyans-kovaryans matrisinin yerine tahmini kullanılabilir (Judge ve ark., 1985; Griffiths ve ark., 1993). (2.1) denklemi ile verilen lineer kısıtlar altında uygulanabilir genelleştirilmiş kısıtlı EKK (FGREKK) tahmin edici

$$\check{\beta}_R = \check{\beta} + (X'\hat{V}X)^{-1}R'[R(X'\hat{V}X)^{-1}R']^{-1}(r - R\check{\beta}) \quad (4.19.)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $\hat{\theta}$, θ parametresi için tutarlı bir tahmin edici olmak üzere $\hat{V} = V(\hat{\theta})$ ve

$$\check{\beta} = (X' \hat{V} X)^{-1} X' \hat{V} y \quad (4.20.)$$

genel lineer regresyon modelindeki bilinmeyen β parametresi için uygulanabilir genelleştirilmiş EKK tahmin edicidir. Veride çoklu iç ilişki olması durumunda (4.20) denkleminde tanımlanan tahmin edici β parametresi için kötü tahminler elde edilmesine neden olacaktır. Eledum ve Zahri (2013) uygulanabilir genelleştirilmiş ridge (FGR) tahmin ediciyi

$$\check{\beta}_{GR}(k) = (X' \hat{V} X + kI)^{-1} X' \hat{V} y \quad (4.21.)$$

tanımlamışlardır.

V matrisinin bilinmediği durumlar için (4.17) ve (4.18) denklemlerinde tanımlanan lineer Bayes ve kısıtlı Bayes tahmin ediciler uygulanabilir genelleştirilmiş lineer Bayes ve uygulanabilir genelleştirilmiş kısıtlı Bayes tahmin edici olarak

$$\check{\beta}_{FGB} = (X' \hat{V} X + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} (X' \hat{V} y + \sigma_u^2 H^{-1} \theta) \quad (4.22.)$$

ve

$$\begin{aligned} \check{\beta}_{FGRB} = \check{\beta}_{FGB} + (X' \hat{V} X + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} \\ R' [R(X' \hat{V} X + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} R']^{-1} (r - R \check{\beta}_{FGB}) \end{aligned} \quad (4.23.)$$

şeklinde tanımlanabilir.

(2.1) denkleminde verilen lineer kısıtlar altında Chaturvedi ve Shukla (1990) genel lineer regresyon modelindeki bilinmeyen β parametresi için

$$\check{\beta}_S = \left[1 - \frac{a}{n} \frac{(y-X\check{\beta})'\hat{V}(y-X\check{\beta})}{\check{\beta}'X'\hat{V}X\check{\beta}} \right] \check{\beta} \quad (4.24.)$$

Stein-rule tahmin ediciyi tanımlamışlardır. Burada $a \geq 0$ daraltma çarpanıdır.

$M^* = I - (X'\hat{V}X)^{-1}R' \left[R(X'\hat{V}X)^{-1}R' \right]^{-1} R$ olmak üzere Chaturvedi ve ark. (2001), (4.24) denkleminde $\check{\beta}$ yerine $\check{\beta}_R$ tahmin edicisini yerleştirerek

$$\check{\beta}_S = \left[1 - \frac{a}{n} \frac{(y-X\check{\beta}_R)'\hat{V}(y-X\check{\beta}_R)}{\check{\beta}_R'M^*X'\hat{V}XM^*\check{\beta}_R} \right] \check{\beta}_R \quad (4.25.)$$

kısıtlı Stein-rule tahmin ediciyi tanımlamışlardır. Daha sonra (4.19) denkleminde $\check{\beta}$ yerine (4.24) denkleminde tanımlanan $\check{\beta}_S$ tahmin edicisini yerleştirerek

$$\bar{\beta}_{RS} = \check{\beta}_S + (X'\hat{V}X)^{-1}R' \left[R(X'\hat{V}X)^{-1}R' \right]^{-1} (r - R\check{\beta}_S) \quad (4.26.)$$

kısıtlı Stein-rule tahmin ediciyi tanımlamışlardır. (4.26) denkleminde tanımlanan tahmin edici $\hat{S} = I - (X'\hat{V}X)^{-1}R' \left[R(X'\hat{V}X)^{-1}R' \right]^{-1} R$ olmak üzere

$$\bar{\beta}_{RS} = \check{\beta}_R - \frac{a}{n} \frac{(y-X\check{\beta})'\hat{V}(y-X\check{\beta})}{\check{\beta}'X'\hat{V}X\check{\beta}} \hat{S}\check{\beta} \quad (4.27.)$$

formunda ifade edilebilir. Chaturvedi ve ark. (2001) (4.27) yazılışında $\check{\beta}$ yerine $\check{\beta}_R$ tahmin edicisini yerleştirerek

$$\bar{\beta}_{RS} = \left[I - \frac{a}{n} \frac{(y-X\check{\beta}_R)'\hat{V}(y-X\check{\beta}_R)}{\check{\beta}_R'X'\hat{V}X\check{\beta}_R} \hat{S} \right] \check{\beta}_R \quad (4.28.)$$

tahmin edicisini tanımlamışlardır.

(4.19), (4.26) ve (4.28) denklemlerinde tanımlanan tahmin ediciler $X'\hat{V}X$ matrisine ve (4.20) denkleminde verilen $\check{\beta}$ uygulanabilir genelleştirilmiş EKK tahmin ediciye bağlı olduğundan çoklu iç ilişki probleminden etkilenebilirler. Bu durumda (2.29) denkleminde verilen RR tahmin edici düşüncesini genel lineer regresyon modeline taşımak mantıklı olacaktır. Özbay ve ark. (2016), (4.21) denkleminde verilen FGR tahmin ediciyi (4.19) denkleminde $\check{\beta}$ tahmin edicinin yerine kullanarak

$$\check{\beta}_{GRR}(k) = \check{\beta}_{GR}(k) + (X'\hat{V}X + kI)^{-1}R' \left(R(X'\hat{V}X + kI)^{-1}R' \right)^{-1} (r - R\check{\beta}_{GR}(k)) \quad (4.29.)$$

uygulanabilir genelleştirilmiş kısıtlı ridge (FGRR) tahmin ediciyi tanımlamışlardır.

Bilinmeyen β parametre vektörü hakkında

$$\begin{aligned} E(\beta) &= 0 \\ Var(\beta) &= \frac{\sigma_u^2}{k} I \end{aligned} \quad (4.30.)$$

varsayımları sağlansın. Bu durumda (4.22) ve (4.23) denklemlerinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} \check{\beta}_{GRB} &= (X'\hat{V}X + kI)^{-1}X'\hat{V}y + (X'\hat{V}X + kI)^{-1}R' \left(R(X'\hat{V}X + kI)^{-1}R' \right)^{-1} (r - R(X'\hat{V}X + kI)^{-1}X'\hat{V}y) \\ &= \check{\beta}_{GR}(k) + (X'\hat{V}X + kI)^{-1}R' \left(R(X'\hat{V}X + kI)^{-1}R' \right)^{-1} (r - R\check{\beta}_{GR}(k)) \\ &= \check{\beta}_{GRR}(k) \end{aligned} \quad (4.31.)$$

FGRR tahmin edici elde edilir. Böylece FGRR tahmin edici bir uygulanabilir genelleştirilmiş kısıtlı Bayes tahmin edici olarak elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} R\check{\beta}_{GRR}(k) &= R\check{\beta}_{GR}(k) + R(X'\hat{V}X + kI)^{-1}R' \left(R(X'\hat{V}X + kI)^{-1}R' \right)^{-1} \\ &\quad \left(r - R\check{\beta}_{GR}(k) \right) \\ &= r \end{aligned}$$

olduğundan (4.29) denkleminde tanımlanan FGRR tahmin edici (2.1)'deki lineer kısıtları sağlamaktadır. Ayrıca FGRR tahmin edici (4.19)'daki $\check{\beta}_R$, (2.6)'daki $\hat{\beta}_R$ ve (2.29)'daki $\hat{\beta}_R(k)$ tahmin edicilerinin genel halidir. Bu özellik aşağıdaki eşitliklerden görülebilir:

- $\check{\beta}_{GRR}(0) = \check{\beta}_R$ FGREKK tahmin edici,
 $V = I$ iken,
- $\check{\beta}_{GRR}(0) = \hat{\beta}_R$ RLS tahmin edici,
- $\check{\beta}_{GRR}(k) = \hat{\beta}_R(k)$ RR tahmin edici.

4.1.2.2. Teorik Karşılaştırma

Bu bölümde (4.29) denkleminde tanımlanan FGRR tahmin edici ve (4.21) denklemindeki FGR tahmin edici (2.1) denklemi ile verilen lineer kısıtlar doğru iken ve doğru değil iken MSE kriterine göre teorik olarak karşılaştırılacaktır. Bunun için öncelikle

$$\begin{aligned} p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X'\hat{V}X}{n} &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X'VX}{n} \\ p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X'\hat{V}u}{\sqrt{n}} &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X'Vu}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (4.32.)$$

varsayımlarının sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda $\bar{S} = (X'VX + kI_p)^{-1}$ olmak üzere $\check{\beta}_{GR}(k)$ FGR tahmin edici için bias vektörü

$$\begin{aligned}
 Bias(\check{\beta}_{GR}(k)) &= E(\check{\beta}_{GR}(k)) - \beta \\
 &= \bar{S}X'VX\beta - \beta \\
 &= (I_p - k\bar{S})\beta - \beta \\
 &= -k\bar{S}\beta
 \end{aligned} \tag{4.33.}$$

ve varyans-kovaryans matrisi

$$\begin{aligned}
 Var(\check{\beta}_{GR}(k)) &= Var(\bar{S}X'Vy) \\
 &= \bar{S}X'VVar(y)VX\bar{S} \\
 &= \sigma_u^2 \bar{S}X'VX\bar{S}
 \end{aligned} \tag{4.34.}$$

hesaplanır. $C = \bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}R\bar{S}$ ve $\delta = r - R\beta$ olmak üzere FGRR tahmin edicinin bias vektörü

$$\begin{aligned}
 Bias(\check{\beta}_{GRR}(k)) &= E(\check{\beta}_{GRR}(k)) - \beta \\
 &= E\left(\check{\beta}_{GR}(k) + \bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}(r - R\check{\beta}_{GR}(k))\right) - \beta \\
 &= E(\check{\beta}_{GR}(k) - \beta) \\
 &\quad + \bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}(r - R\beta + R\beta - R\check{\beta}_{GR}(k)) \\
 &= Bias(\check{\beta}_{GR}(k)) + \bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}\delta \\
 &\quad - \bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}RBias(\check{\beta}_{GR}(k)) \\
 &= -k(\bar{S} - C)\beta + \bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}\delta
 \end{aligned} \tag{4.35.}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\check{\beta}_{GRR}(k) &= \check{\beta}_{GR}(k) + \bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}(r - R\check{\beta}_{GR}(k)) \\
&= \bar{S}X'Vy + \bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}(r - R\bar{S}X'Vy) \\
&= (\bar{S} - C)X'Vy + \bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}r
\end{aligned} \tag{4.36.}$$

yazılışından yararlanılarak FGRR tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi

$$\begin{aligned}
Var(\check{\beta}_{GRR}(k)) &= Var((\bar{S} - C)X'Vy) \\
&= (\bar{S} - C)X'VVar(y)VX(\bar{S} - C) \\
&= \sigma_u^2(\bar{S} - C)X'VX(\bar{S} - C)
\end{aligned} \tag{4.37.}$$

hesaplanır (bkz. Özbay ve Kaçıranlar, 2016b).

Teorem 4.2. $r = R\beta$ iken FGRR tahmin edici FGR tahmin ediciden MSE kriterine göre daha üstündür.

İspat: (1.12), (4.33) ve (4.34) denklemlerinden yararlanılarak FGR tahmin edici için MSE matrisi

$$MSE(\check{\beta}_{GR}(k)) = \sigma_u^2 \bar{S}X'VX\bar{S} + k^2 \bar{S}\beta\beta'\bar{S} \tag{4.38.}$$

elde edilir. $r = R\beta$ iken FGRR tahmin edici için bias vektörü

$$Bias(\check{\beta}_{GRR}(k)) = -k(\bar{S} - C)\beta \tag{4.39.}$$

olduğundan (1.12), (4.37) ve (4.39) sonuçlarının kullanılmasıyla FGRR tahmin edici için MSE matrisi

$$\begin{aligned}
MSE(\check{\beta}_{GRR}(k)) &= \sigma_u^2(\bar{S} - C)X'VX(\bar{S} - C) \\
&\quad + k^2(\bar{S} - C)\beta\beta'(\bar{S} - C)
\end{aligned} \tag{4.40.}$$

elde edilir. (4.38) ve (4.40) denklemlerindeki ifadelerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\Delta &= MSE\left(\check{\beta}_{GR}(k)\right) - MSE\left(\check{\beta}_{GRR}(k)\right) \\
&= \sigma_u^2[\bar{S}X'VX\bar{S} - (\bar{S} - C)X'VX(\bar{S} - C)] \\
&\quad + k^2[\bar{S}\beta\beta'\bar{S} - (\bar{S} - C)\beta\beta'(\bar{S} - C)] \\
&= \sigma_u^2(\bar{S}X'VXC + CX'VX\bar{S} - CX'VXC) \\
&\quad + k^2(\bar{S}\beta\beta'C - C\beta\beta'C + C\beta\beta'\bar{S}) \\
&= \bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}[\sigma_u^2R\bar{S}X'VX\bar{S}R + k^2R\bar{S}\beta\beta'\bar{S}R'](R\bar{S}R')^{-1}R\bar{S} \quad (4.41.)
\end{aligned}$$

farkı hesaplanır. (4.41) denklemindeki

$$\sigma_u^2R\bar{S}X'VX\bar{S}R + k^2R\bar{S}\beta\beta'\bar{S}R' \quad (4.42.)$$

matrisi pd bir matris ve $(R\bar{S}R')^{-1}R\bar{S}$ matrisi tam satır ranklı olduğundan Teorem 1.1'den (4.41) ifadesi nnd bir matristir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

$V = I_n$ olduğunda Teorem 1.1 $MSE(\hat{\beta}_k) - MSE(\hat{\beta}_R(k))$ farkının nnd olması için sağlanmaktadır (ayrıca bkz. Kaçıranlar ve ark., 2011).

Teorem 4.3. $r \neq R\beta$ iken FGRR tahmin edici FGR tahmin ediciden MSE kriterine göre daha üstün olması için gerek ve yeter koşul

$$\delta'[\sigma_u^2R\bar{S}X'VX\bar{S}R + k^2R\bar{S}\beta\beta'\bar{S}R']\delta \leq 1 \quad (4.43.)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: $r \neq R\beta$ iken FGRR tahmin edici için bias vektörü (4.35) denkleminde verilmiştir. (1.12), (4.35) ve (4.37) denklemlerinden yararlanılarak FGRR tahmin edici için MSE matrisi

$$\begin{aligned}
MSE(\check{\beta}_{GRR}(k)) &= \sigma_u^2(\bar{S} - C)X'VX(\bar{S} - C) + k^2(\bar{S} - C)\beta\beta'(\bar{S} - C) \\
&\quad - k(\bar{S} - C)\beta\delta'(R\bar{S}R')^{-1}R\bar{S} - k\bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}\delta\beta'(\bar{S} - C) \\
&\quad + \bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}\delta\delta'(R\bar{S}R')^{-1}R\bar{S}
\end{aligned} \tag{4.44.}$$

hesaplanır. (4.38) ve (4.44) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\Delta^* &= MSE(\check{\beta}_{GR}(k)) - MSE(\check{\beta}_{GRR}(k)) \\
&= \sigma_u^2[\bar{S}X'VX\bar{S} - (\bar{S} - C)X'VX(\bar{S} - C)] + k^2[\bar{S}\beta\beta'\bar{S} - (\bar{S} - C)\beta\beta'(\bar{S} - C)] \\
&\quad - [k(\bar{S} - C)\beta\delta'(R\bar{S}R')^{-1}R\bar{S} + k\bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}\delta\beta'(\bar{S} - C) \\
&\quad - \bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}\delta\delta'(R\bar{S}R')^{-1}R\bar{S}] \\
&= \bar{S}R'(R\bar{S}R')^{-1}[\sigma_u^2R\bar{S}X'VX\bar{S}R + k^2R\bar{S}\beta\beta'\bar{S}R' - \delta\delta'](R\bar{S}R')^{-1}R\bar{S}
\end{aligned} \tag{4.45.}$$

elde edilir. Teorem 1.1'den (4.45) ifadesinin nnd olması için gerek ve yeter koşul

$$\sigma_u^2R\bar{S}X'VX\bar{S}R + k^2R\bar{S}\beta\beta'\bar{S}R' - \delta\delta' \tag{4.46.}$$

matrisinin nnd olmasıdır. (4.42) denkleminde verilen matris pd olduğundan Teorem 1.2'nin uygulanmasıyla ispat tamamlanmış olur.

$V = I_n$ ve $k = 0$ olduğunda Teorem 1.2 $MSE(\hat{\beta}) - MSE(\hat{\beta}_R)$ farkının nnd olması için sağlanmaktadır (bkz. Gross, 2003).

4.1.2.3. Monte Carlo Simülasyonu

Bu bölümde $\check{\beta}_R$, $\bar{\beta}_{RS}$, $\bar{\bar{\beta}}_{RS}$ ve $\check{\beta}_{GRR}(k)$ kısıtlı tahmin edicilerinin performansları Monte Carlo simülasyon çalışması ile karşılaştırılacaktır. McDonald ve Galarneau (1975) ve Kibria (2003) çalışmalarından yararlanılarak açıklayıcı değişkenler

$$x_{ij} = (1 - \gamma^2)^{1/2} z_{ij} + \gamma z_{ip+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (4.47.)$$

denklemleri ile üretilmiştir. Burada z_{ij} bağımsız standart normal rasgele değişkenler ve γ^2 herhangi iki açıklayıcı değişken arasındaki korelasyondur. Kibria (2003) çalışmasından yola çıkılarak γ için 0.7, 0.8 ve 0.9 değerleri kullanılmıştır. Veriler $p = 4$ ve $n = 20$ değerleri ile

$$y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \beta_4 x_{4i} + u_i; \quad i = 1, \dots, 20 \quad (4.48.)$$

ortonormal modeli kullanılarak üretilmiştir (Chaturvedi ve ark., 2001). Burada $\varepsilon_i \sim IN(0,1)$ varsayımı ve ρ için -0.8, -0.4, 0.0, 0.4, 0.8 değerleri ile u_i hataları bir AR(1) ($u_i = \rho u_{i-1} + \varepsilon_i$) ya da MA(1) ($u_i = \varepsilon_i - \rho \varepsilon_{i-1}$) süreci yardımıyla üretilmiştir. $a = p - 3$ ve $\alpha = 2$ kullanılmıştır.

Kaçıranlar ve ark. (2011) çalışmasından yararlanılarak iki farklı kısıt tipi kullanılmıştır. Parametre vektörü $\beta = (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p)'$ olmak üzere birinci tip kısıtta parametreler ile ilgili kısıtlar $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p = \frac{p(p+1)}{2} \times \tau$ şeklindedir. Bu kısıt için $R = (1 \ 1 \dots 1)$ ve $r = \frac{p(p+1)}{2} \times \tau$ olacaktır. Buradaki τ sayısı kısıtın doğru olup olmadığını kontrol etmektedir. Kısıt doğru değilse, kısıtın sağ ve sol tarafları arasındaki farkı kontrol etmek için τ değerleri 1, 1.05 ya da 1.10 olacak şekilde seçilmiştir ve tekrarlar süresince sabit kalmıştır. Kısıtın sol tarafı $\frac{p(p+1)}{2}$ değerine eşit olduğundan $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p = \frac{p(p+1)}{2} \times \tau$ kısıtının $\tau = 1$ iken doğru olduğu açıktır. Öte yandan $\tau = 1.05$ (ya da 1.10) seçildiğinde kısıtın sağ tarafı $\frac{p(p+1)}{2} \times 1.05$ (ya da $\frac{p(p+1)}{2} \times 1.10$) değerine eşit iken sol tarafı $\frac{p(p+1)}{2}$ değerine eşittir. Bu da kısıtın sağ tarafında %5 (ya da %10)'lık bir sapmayı göstermektedir. R , r , β ve τ simülasyonun başında tanımlandığından tekrarlar boyunca sabit kalmıştır ve bu nedenle kısıtlar stokastik değildir. İkinci tip kısıt için R ve r

$$R_{\frac{p-1}{2}, p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ M & M & M & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_{\frac{p-1}{2}, 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde seçilmiştir. Burada kısıtların sayısı $m = p/2$ 'dir. Hoerl ve ark. (1975)'den yararlanılarak $\hat{\sigma}_{GLS}^2 = \frac{(y-X\tilde{\beta})'V(y-X\tilde{\beta})}{n-p}$ hata varyansının uygulanabilir genelleştirilmiş EKK tahmini ve λ_i 'ler $X'\hat{V}X$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere k 'nın tahmini için $\hat{k}_{HK} = \frac{\hat{\sigma}_{GLS}^2}{\sum_{i=1}^p \tilde{\beta}_i^2}$, $\hat{k}_{HKB} = \frac{p\hat{\sigma}_{GLS}^2}{\sum_{i=1}^p \tilde{\beta}_i^2}$ ve $\hat{k}_{LW} = \frac{p\hat{\sigma}_{GLS}^2}{\sum_{i=1}^p \lambda_i \tilde{\beta}_i^2}$ değerleri kullanılmıştır. Tahmin edicilerin performanslarını karşılaştırmak için (1.14) denkleminde tanımlanan mse kriteri kullanılmıştır. $\tilde{\beta}_R$, $\tilde{\beta}_{RS}$, $\bar{\tilde{\beta}}_{RS}$ ve $\tilde{\beta}_{GRR}(k)$ kısıtlı tahmin edicilerinin mse değerleri 5000 deneme sonucunda elde edilmiştir.

Çizelge 4.5. 1. tip kısıtlar altında AR(1) süreci hataları ile elde edilen mse değerleri

t	r	g	b_R	b_{RS}	$\bar{b}_{RS}$	$b_{GRR}(k)$		
						$\hat{k}_{HK}$	$\hat{k}_{HKB}$	$\hat{k}_{LW}$
1	-0.8	0.7	1.82950	1.80730	1.80710	1.75860	1.58910	1.82670
		0.8	2.59190	2.56420	2.56420	2.45880	2.15380	2.58590
		0.9	4.91090	4.86770	4.86730	4.51060	3.67830	4.89040
	-0.4	0.7	0.56500	0.56220	0.56200	0.55660	0.53630	0.56450
		0.8	0.80040	0.79680	0.79670	0.78360	0.74390	0.79940
		0.9	1.51650	1.51090	1.51080	1.45950	1.33110	1.51260
	0.0	0.7	0.22340	0.22300	0.22300	0.22240	0.22020	0.22340
		0.8	0.31650	0.31600	0.31600	0.31450	0.31000	0.31640
		0.9	0.59970	0.59890	0.59890	0.59270	0.57700	0.59920
	0.4	0.7	0.12610	0.12590	0.12580	0.12530	0.12360	0.12610
		0.8	0.17860	0.17830	0.17830	0.17710	0.17350	0.17850
		0.9	0.33850	0.33800	0.33800	0.33290	0.32060	0.33810
	0.8	0.7	0.01710	0.01710	0.01710	0.01710	0.01700	0.01710
		0.8	0.02430	0.02420	0.02420	0.02420	0.02410	0.02420
		0.9	0.04590	0.04590	0.04590	0.04570	0.04530	0.04590
1.05	-0.8	0.7	1.90240	1.88270	1.88360	1.83390	1.67070	1.89960
		0.8	2.66550	2.63990	2.64140	2.53500	2.23660	2.65960
		0.9	4.98780	4.94650	4.94840	4.58950	3.76160	4.96740
	-0.4	0.7	0.63640	0.63490	0.63490	0.62970	0.61410	0.63600
		0.8	0.87300	0.87070	0.87070	0.85860	0.82480	0.87210
		0.9	1.59230	1.58780	1.58790	1.53890	1.41910	1.58860
	0.0	0.7	0.29130	0.29120	0.29120	0.29090	0.29040	0.29120
		0.8	0.38670	0.38660	0.38660	0.38570	0.38410	0.38660
		0.9	0.67710	0.67690	0.67690	0.67250	0.66330	0.67670
	0.4	0.7	0.19210	0.19210	0.19210	0.19150	0.19030	0.19210
		0.8	0.25180	0.25190	0.25190	0.25050	0.24760	0.25170
		0.9	0.44240	0.44300	0.44300	0.43690	0.42480	0.44200
	0.8	0.7	0.08550	0.08560	0.08560	0.08540	0.08520	0.08550
		0.8	0.10980	0.11000	0.11000	0.10950	0.10870	0.10980
		0.9	0.20520	0.20590	0.20620	0.20360	0.19940	0.20510
1.10	-0.8	0.7	2.12660	2.10950	2.11090	2.06010	1.90190	2.12390
		0.8	2.89280	2.86940	2.87130	2.76440	2.47070	2.88700
		0.9	5.22620	5.18680	5.18910	4.82880	4.00230	5.20590
	-0.4	0.7	0.85410	0.85400	0.85410	0.84880	0.83720	0.85380
		0.8	1.09540	1.09420	1.09430	1.08280	1.05400	1.09460
		0.9	1.82600	1.82270	1.82260	1.77540	1.66170	1.82250
	0.0	0.7	0.49620	0.49650	0.49660	0.49630	0.49740	0.49620
		0.8	0.59920	0.59950	0.59960	0.59910	0.59990	0.59910
		0.9	0.91320	0.91360	0.91370	0.91040	0.90640	0.91290
	0.4	0.7	0.39080	0.39090	0.39090	0.39040	0.38960	0.39080
		0.8	0.47230	0.47270	0.47290	0.47100	0.46830	0.47220
		0.9	0.75590	0.75750	0.75830	0.74940	0.73440	0.75540
	0.8	0.7	0.29090	0.29100	0.29120	0.29080	0.29030	0.29090
		0.8	0.36660	0.36710	0.36760	0.36590	0.36400	0.36660
		0.9	0.68370	0.68510	0.68760	0.67940	0.66770	0.68350

Çizelge 4.6. 1. tip kısıtlar altında MA(1) süreci hataları ile elde edilen mse değerleri

t	r	g	b_r	b_{rs}	$\bar{b}_{rs}$	$b_{GRR}(k)$		
						$\hat{k}_{HK}$	$\hat{k}_{HKB}$	$\hat{k}_{LW}$
1	-0.8	0.7	2.69930	2.67580	2.67500	2.64140	2.48710	2.69800
		0.8	3.82400	3.79600	3.79520	3.71610	3.43450	3.82120
		0.9	7.24560	7.20490	7.20320	6.92420	6.12660	7.23560
	-0.4	0.7	0.54320	0.54060	0.54040	0.53660	0.52090	0.54290
		0.8	0.76960	0.76630	0.76610	0.75630	0.72550	0.76870
		0.9	1.45820	1.45300	1.45280	1.41270	1.31110	1.45500
	0.0	0.7	0.22340	0.22300	0.22300	0.22240	0.22020	0.22340
		0.8	0.31650	0.31600	0.31600	0.31450	0.31000	0.31640
		0.9	0.59970	0.59890	0.59890	0.59270	0.57700	0.59920
	0.4	0.7	0.17040	0.17000	0.16990	0.16930	0.16700	0.17030
		0.8	0.24140	0.24090	0.24090	0.23930	0.23470	0.24130
		0.9	0.45740	0.45660	0.45660	0.45000	0.43420	0.45690
	0.8	0.7	0.21740	0.21660	0.21660	0.21610	0.21350	0.21730
		0.8	0.30790	0.30720	0.30720	0.30550	0.30030	0.30780
		0.9	0.58350	0.58250	0.58250	0.57500	0.55700	0.58300
	1.05	0.7	2.78740	2.76960	2.76940	2.73080	2.58010	2.78610
		0.8	3.92230	3.89950	3.89920	3.81410	3.53180	3.91950
		0.9	7.39210	7.35890	7.35790	7.06280	6.24560	7.38190
	-0.4	0.7	0.61970	0.61920	0.61920	0.61490	0.60420	0.61940
		0.8	0.85000	0.84880	0.84880	0.83920	0.81470	0.84930
		0.9	1.54960	1.54680	1.54670	1.50770	1.41440	1.54660
	0.0	0.7	0.29130	0.29120	0.29120	0.29090	0.29040	0.29120
		0.8	0.38670	0.38660	0.38660	0.38570	0.38410	0.38660
		0.9	0.67710	0.67690	0.67690	0.67250	0.66330	0.67670
	0.4	0.7	0.23680	0.23670	0.23670	0.23620	0.23520	0.23680
		0.8	0.31380	0.31390	0.31390	0.31260	0.31040	0.31370
		0.9	0.55630	0.55700	0.55710	0.55120	0.54170	0.55590
	0.8	0.7	0.28370	0.28350	0.28340	0.28300	0.28170	0.28370
		0.8	0.38450	0.38500	0.38500	0.38310	0.38060	0.38440
		0.9	0.72290	0.72620	0.72640	0.71690	0.70580	0.72260
	1.10	0.7	3.06020	3.04800	3.04800	3.00420	2.85500	3.05900
		0.8	4.22380	4.20610	4.20570	4.11440	3.82890	4.22090
		0.9	7.83070	7.80500	7.80330	7.49140	6.64940	7.82020
	-0.4	0.7	0.85250	0.85410	0.85420	0.84910	0.84250	0.85230
		0.8	1.09550	1.09630	1.09640	1.08640	1.06660	1.09490
		0.9	1.82980	1.82940	1.82940	1.79000	1.70110	1.82700
	0.0	0.7	0.49620	0.49650	0.49660	0.49630	0.49740	0.49620
		0.8	0.59920	0.59950	0.59960	0.59910	0.59990	0.59910
		0.9	0.91320	0.91360	0.91370	0.91040	0.90640	0.91290
	0.4	0.7	0.43660	0.43680	0.43680	0.43630	0.43650	0.43650
		0.8	0.53220	0.53290	0.53310	0.53160	0.53150	0.53210
		0.9	0.85620	0.85850	0.85930	0.85230	0.84600	0.85590
	0.8	0.7	0.48210	0.48240	0.48230	0.48180	0.48190	0.48210
		0.8	0.61340	0.61520	0.61550	0.61280	0.61290	0.61340
		0.9	1.14010	1.14750	1.14990	1.13500	1.12670	1.13980

Çizelge 4.7. 2. **t**ip kısıtlar altında **AR(1)** süreci hataları ile elde edilen mse değerleri

t	r	g	$\hat{b}_R$	$\bar{b}_{RS}$	$\bar{b}_{RS}$	$\hat{b}_{GRR}(k)$		
						$\hat{k}_{HK}$	$\hat{k}_{HKB}$	$\hat{k}_{LW}$
1	-0.8	0.7	0.91890	0.90910	0.90710	0.89700	0.84000	0.91800
		0.8	1.30180	1.28970	1.28760	1.26060	1.15650	1.30000
		0.9	2.46650	2.44780	2.44470	2.34110	2.04550	2.46030
	-0.4	0.7	0.33820	0.33660	0.33630	0.33460	0.32460	0.33800
		0.8	0.47910	0.47710	0.47690	0.47190	0.45220	0.47870
		0.9	0.90790	0.90470	0.90440	0.88300	0.81830	0.90620
	0.0	0.7	0.14010	0.13990	0.13980	0.13950	0.13760	0.14010
		0.8	0.19850	0.19820	0.19820	0.19720	0.19340	0.19840
		0.9	0.37620	0.37570	0.37560	0.37140	0.35840	0.37580
	0.4	0.7	0.09050	0.09040	0.09040	0.09000	0.08840	0.09050
		0.8	0.12830	0.12810	0.12810	0.12710	0.12400	0.12820
		0.9	0.24300	0.24270	0.24270	0.23900	0.22820	0.24280
	0.8	0.7	0.01150	0.01150	0.01150	0.01140	0.01140	0.01150
		0.8	0.01620	0.01620	0.01620	0.01620	0.01600	0.01620
		0.9	0.03080	0.03080	0.03080	0.03060	0.03010	0.03080
		0.7	0.99700	0.98860	0.98760	0.97590	0.92120	0.99610
		0.8	1.38120	1.37060	1.36960	1.34110	1.23980	1.37940
		0.9	2.54950	2.53230	2.53090	2.42560	2.13390	2.54340
1.05	-0.4	0.7	0.41490	0.41390	0.41390	0.41180	0.40340	0.41470
		0.8	0.55700	0.55570	0.55560	0.55060	0.53330	0.55660
		0.9	0.98850	0.98620	0.98610	0.96550	0.90560	0.98700
	0.0	0.7	0.21400	0.21390	0.21380	0.21350	0.21220	0.21400
		0.8	0.27360	0.27350	0.27350	0.27270	0.27020	0.27360
		0.9	0.45650	0.45640	0.45640	0.45300	0.44370	0.45620
	0.4	0.7	0.16520	0.16510	0.16510	0.16470	0.16330	0.16510
		0.8	0.20980	0.20990	0.20990	0.20890	0.20640	0.20970
		0.9	0.35400	0.35480	0.35480	0.35070	0.34180	0.35380
	0.8	0.7	0.09150	0.09160	0.09160	0.09140	0.09140	0.09150
		0.8	0.11350	0.11380	0.11390	0.11350	0.11330	0.11350
		0.9	0.19660	0.19740	0.19770	0.19620	0.19510	0.19660
	-0.8	0.7	1.23410	1.22720	1.22680	1.21370	1.16060	1.23330
		0.8	1.62310	1.61390	1.61350	1.58380	1.48450	1.62140
		0.9	2.80410	2.78840	2.78760	2.68090	2.39110	2.79800
	-0.4	0.7	0.64660	0.64630	0.64640	0.64400	0.63680	0.64650
		0.8	0.79290	0.79230	0.79230	0.78720	0.77180	0.79250
		0.9	1.23470	1.23320	1.23310	1.21300	1.15650	1.23320
	0.0	0.7	0.43620	0.43630	0.43630	0.43590	0.43520	0.43620
		0.8	0.50020	0.50030	0.50030	0.49960	0.49820	0.50020
		0.9	0.70060	0.70100	0.70110	0.69820	0.69170	0.70050
	0.4	0.7	0.38920	0.38930	0.38930	0.38880	0.38760	0.38920
		0.8	0.45480	0.45530	0.45540	0.45400	0.45180	0.45470
		0.9	0.68860	0.69040	0.69120	0.68480	0.67480	0.68830
	0.8	0.7	0.33150	0.33170	0.33200	0.33150	0.33130	0.33150
		0.8	0.40560	0.40610	0.40690	0.40540	0.40470	0.40560
		0.9	0.69480	0.69630	0.69900	0.69300	0.68790	0.69470

Çizelge 4.8. 2. tip kısıtlar altında MA(1) süreci hataları ile elde edilen mse değerleri

t	r	g	b'_R	$\bar{b}_{RS}$	$\bar{\bar{b}}_{RS}$	$b_{GRR}(k)$		
						$\hat{k}_{HK}$	$\hat{k}_{HKB}$	$\hat{k}_{LW}$
1	-0.8	0.7	1.83490	1.81930	1.81460	1.79670	1.69140	1.83400
		0.8	2.59940	2.58060	2.57550	2.52850	2.33710	2.59760
		0.9	4.92520	4.89770	4.89010	4.71540	4.17730	4.91880
	-0.4	0.7	0.31950	0.31800	0.31770	0.31620	0.30710	0.31930
		0.8	0.45260	0.45070	0.45050	0.44600	0.42820	0.45220
		0.9	0.85760	0.85460	0.85430	0.83480	0.77560	0.85610
	0.0	0.7	0.14010	0.13990	0.13980	0.13950	0.13760	0.14010
		0.8	0.19850	0.19820	0.19820	0.19720	0.19340	0.19840
		0.9	0.37620	0.37570	0.37560	0.37140	0.35840	0.37580
	0.4	0.7	0.11370	0.11340	0.11330	0.11290	0.11090	0.11360
		0.8	0.16100	0.16070	0.16070	0.15960	0.15540	0.16090
		0.9	0.30510	0.30460	0.30460	0.29990	0.28580	0.30480
	0.8	0.7	0.15300	0.15240	0.15240	0.15230	0.15040	0.15300
		0.8	0.21670	0.21620	0.21620	0.21540	0.21160	0.21670
		0.9	0.41070	0.41010	0.41010	0.40600	0.39280	0.41050
	1.05	0.7	1.93440	1.92480	1.92190	1.89810	1.79790	1.93360
		0.8	2.70820	2.69520	2.69160	2.63930	2.45310	2.70640
		0.9	5.07510	5.05540	5.04970	4.86640	4.33070	5.06870
	-0.4	0.7	0.40150	0.40140	0.40140	0.39900	0.39210	0.40140
		0.8	0.53870	0.53840	0.53840	0.53330	0.51870	0.53840
		0.9	0.95460	0.95370	0.95370	0.93420	0.88110	0.95320
	0.0	0.7	0.21400	0.21390	0.21380	0.21350	0.21220	0.21400
		0.8	0.27360	0.27350	0.27350	0.27270	0.27020	0.27360
		0.9	0.45650	0.45640	0.45640	0.45300	0.44370	0.45620
	0.4	0.7	0.18720	0.18710	0.18700	0.18660	0.18510	0.18720
		0.8	0.23960	0.23970	0.23970	0.23860	0.23590	0.23960
		0.9	0.40850	0.40940	0.40950	0.40500	0.39550	0.40830
	0.8	0.7	0.22590	0.22540	0.22540	0.22530	0.22350	0.22580
		0.8	0.29910	0.29950	0.29950	0.29810	0.29530	0.29910
		0.9	0.55450	0.55790	0.55820	0.55110	0.54140	0.55430
	1.10	0.7	2.24220	2.23860	2.23710	2.20700	2.10990	2.24140
		0.8	3.04390	3.03660	3.03420	2.97620	2.79320	3.04220
		0.9	5.53250	5.52070	5.51630	5.32380	4.78770	5.52610
	-0.4	0.7	0.64960	0.65100	0.65110	0.64770	0.64250	0.64950
		0.8	0.79960	0.80090	0.80110	0.79500	0.78270	0.79930
		0.9	1.25010	1.25130	1.25160	1.23100	1.18100	1.24880
	0.0	0.7	0.43620	0.43630	0.43630	0.43590	0.43520	0.43620
		0.8	0.50020	0.50030	0.50030	0.49960	0.49820	0.50020
		0.9	0.70060	0.70100	0.70110	0.69820	0.69170	0.70050
	0.4	0.7	0.40810	0.40810	0.40810	0.40770	0.40660	0.40810
		0.8	0.47640	0.47690	0.47710	0.47570	0.47420	0.47630
		0.9	0.72150	0.72380	0.72470	0.71870	0.71110	0.72130
	0.8	0.7	0.44440	0.44410	0.44390	0.44380	0.44220	0.44440
		0.8	0.54600	0.54730	0.54760	0.54520	0.54310	0.54600
		0.9	0.98550	0.99280	0.99530	0.98170	0.97090	0.98530

Simülasyon sonuçları Çizelge 4.5-4.8’de yer almaktadır. Birinci ve ikinci tip hatalar altında ve bu hataların doğru olup olmaması durumunda, AR(1) ya da MA(1) süreçleri kullanılarak tahmin edicilerin mse değerleri elde edilmiştir. Bu sonuçlara göre γ arttıkça tahmin edicilerin mse değerleri artmaktadır ve ρ arttıkça bu tahmin edicilerin mse değerleri azalmaktadır. Ayrıca τ arttığında tahmin edicilerin tahmin edilmiş skaler mse değerleri artmaktadır (örneğin, tahmin edicilerin $\tau = 1$ değerindeki mse değerleri $\tau = 1.05$ değerindeki mse değerlerinden daha küçüktür). Tahmin edicilerin birinci tip kısıtlar altındaki mse değerleri ikinci tip kısıtlar altındaki değerlerinden daha büyüktür.

Simülasyon çalışmasında kullanılan kısıtlar altında $\check{\beta}_{GRR}(k)$ tahmin edici $\check{\beta}_R$, $\bar{\beta}_{RS}$ ve $\bar{\bar{\beta}}_{RS}$ tahmin edicilerden özellikle $\hat{k}_{HKB}$ değeri için daha iyi sonuçlar vermiştir. Ayrıca kısıtların sayısı, tahmin edilmiş mse değerleri ile elde edilen sonuçları etkilememektedir.

4.2. Gecikmesi Dağıtılmış Modellerde Karşılaştırmalar

4.2.1. Gecikmesi Dağıtılmış Modellerde Almon İki Parametrelili Tahmin Edici ve Performansı

4.2.1.1. Tanım

Gecikmesi sonlu dağıtılmış model

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_p x_{t-p} + u_t \\ &= \sum_{i=0}^p \beta_i x_{t-i} + u_t, \quad t = p + 1, \dots, T \end{aligned} \quad (4.49.)$$

formunda tanımlanmıştır. Burada β_i bilinmeyen gecikme katsayıları (ağırlıkları), x_{t-i} açıklayıcı değişken için gecikmeli değerler, u_t hataları $E(u_t) = 0$ ortalamalı ve $Var(u_t) = \sigma_u^2$ varyanslı bağımsız normal rasgele değişkenler ve p gecikme sayısıdır. Bu modelde y_t yanıtlarının şimdiki değerleri x_t değerlerine ve x_t değerlerinin bazı (p sayısı kadar) gecikmeli değerlerine bağlıdır. (4.49) modeli

$$X = \begin{pmatrix} x_{p+1} & x_p & \mathbf{K} & x_1 \\ \hat{e} & x_{p+2} & \mathbf{K} & x_2 \\ \hat{e} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ \hat{e} & x_T & \mathbf{K} & x_{T-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{u} \\ \hat{u} \\ \hat{u} \end{pmatrix},$$

$$y' = (y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_T), \beta' = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p), u' = (u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_T)$$

olmak üzere

$$y = X\beta + u \quad (4.50.)$$

formunda yazılabilir. Burada X açıklayıcı değişkenler matrisinin $(p + 1) < (T - p)$ ranklı olduğu varsayılmıştır.

(4.50) modelindeki bilinmeyen β parametresi için EKK tahmin edici

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \quad (4.51.)$$

şeklindedir. (4.50) modelindeki X açıklayıcı değişkenler matrisinin aynı gecikmeli değerlerden oluşması çoklu iç ilişki problemini ortaya çıkarmaktadır. Bu nedenle ekonomik uygulamalarda EKK tahmin edicinin kullanılması bilinmeyen β parametresi için kötü tahminlerin elde edilmesine sebep olmaktadır. Bu sorunu ortadan kaldırmak için sıkça kullanılan yöntem gecikme ağırlıkları için ön bilgi kullanılmasıdır. Bu ön bilgi bir gecikme dağılım fonksiyonu olarak adlandırılır ve açıklayıcı değişken için gecikmeli değerlerin katsayılarını belirler (Fisher, 1937; Gujarati, 1999; Kennedy, 2003).

Çoklu iç ilişkinin etkilerini azaltmak için en çok kullanılan yöntem Almon (1965) tarafından önerilmiştir. Bu yönteme göre gecikme ağırlıkları

$$\beta_i = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 i^2 + \dots + \alpha_r i^r, \quad p \geq r \geq 0 \quad (4.52.)$$

r-inci dereceden bir polinom olacak şekilde tanımlanmıştır.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{K} & 1 \\ 0 & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} \\ 0 & p & p^2 & \mathbf{L} \end{pmatrix}, \quad A: (p+1) \times (r+1) \text{ bir matris ve } \alpha' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r),$$

$\alpha: (r+1) \times 1$ bir vektör olmak üzere (4.52) denklemi ile tanımlanan Almon gecikme polinomu

$$\beta = A\alpha \quad (4.53.)$$

denklemi ile ifade edilebilir. Burada A matrisinin $(r+1) < (p+1)$ ranklı olduğu varsayılmıştır. (4.53) denklemi (4.50) modelinde yerine konularak

$$\begin{aligned} y &= XA\alpha + u \\ &= Z\alpha + u \end{aligned} \quad (4.54.)$$

elde edilir. Buradan α parametresi için EKK tahmin edici

$$\hat{\alpha}_A = (Z'Z)^{-1}Z'y \quad (4.55.)$$

ve β parametresi için Almon tahmin edici

$$\hat{\beta}_A = A\hat{\alpha}_A \quad (4.56.)$$

şeklindedir.

Almon tahmin edici gecikmesi dağıtılmış modeller için en iyi lineer yansız tahmin edicidir. Öte yandan, çoklu iç ilişki problemi başta olmak üzere Almon tahmin edicinin kullanımından kaynaklanan problemleri önlemek amacıyla pek çok

alternatif tahmin yöntemi kullanılmıştır (Maddala, 1974; Vinod ve Ullah, 1981; Chanda ve Maddala, 1984; Güler ve ark., 2015; Gültay ve Kaçıranlar, 2015).

Bu tahmin yöntemlerinden biri Bölüm 2.2’de verilen ridge regresyon tahmin yöntemidir (Yeo ve Trivedi, 1989). (4.54) modelindeki α parametresi için Almon ridge tahmin edici

$$\hat{\alpha}_k = (Z'Z + kI)^{-1}Z'y \quad (4.57.)$$

ve β parametresi için Almon ridge tahmin edici $\hat{\beta}_k = A\hat{\alpha}_k$ şeklindedir. Liu (1993) tarafından önerilen tahmin yöntemi Bölüm 2.6’da verilmişti. Buradan yola çıkarak (4.54) modelindeki α parametresi için Almon Liu tahmin edici

$$\hat{\alpha}_d = (Z'Z + I)^{-1}(Z'y + d\hat{\alpha}_A), \quad 0 < d < 1 \quad (4.58.)$$

tanımlanabilir. Dolayısıyla β parametresi için Almon Liu tahmin edici $\hat{\beta}_d = A\hat{\alpha}_d$ olacaktır. Kaçıranlar (2010), $\hat{\alpha}_A$ ve $\hat{\alpha}_d$ tahmin edicilerini karşılaştırmış ve d için seçim yöntemi önermiştir.

Özkale ve Kaçıranlar (2007) tarafından tanımlanan iki parametrelili tahmin edici Bölüm 2.8’de ayrıntılı bir biçimde anlatılmıştı. Bu çalışmadan yola çıkarak Özbay ve Kaçıranlar (2016), (2.54) modelindeki α parametresi için Almon iki parametrelili tahmin ediciyi

$$\hat{\alpha}(k, d) = (Z'Z + I)^{-1}(Z'y + kd\hat{\alpha}_A), \quad k > 0, \quad 0 < d < 1 \quad (4.59.)$$

şeklinde tanımlamışlardır.

Almon iki parametrelili tahmin edici Almon, Almon ridge ve Almon Liu tahmin edicilerinin genel halidir. Bu özellik $\hat{\alpha}(k, d)$ ’de k ve d için farklı değerler seçilmesi ile aşağıdaki eşitliklerden görülebilir:

- $\hat{\alpha}(k, 1) = \hat{\alpha}_A$ Almon tahmin edici,
- $\hat{\alpha}(0, d) = \hat{\alpha}_A$ Almon tahmin edici,
- $\hat{\alpha}(k, 0) = \hat{\alpha}_k$ Almon ridge tahmin edici,
- $\hat{\alpha}(1, d) = \hat{\alpha}_d$ Almon Liu tahmin edici.

4.2.1.2. Teorik Karşılaştırma

$$G = Z'Z, \quad G(k) = (Z'Z + kI) \quad \text{ve} \quad G(kd) = (Z'Z + kdI) \quad \text{olsun.} \quad (4.55)$$

denkleminde verilen Almon tahmin edici için MSE matrisi

$$MSE(\hat{\alpha}_A) = \sigma_u^2 G^{-1} \quad (4.60.)$$

ve (4.59) denkleminde verilen Almon iki parametrelili tahmin edici için MSE matrisi

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\alpha}(k, d)) &= \sigma_u^2 G(k)^{-1} G(kd) G^{-1} G(kd) G(k)^{-1} \\ &\quad + k^2 (d - 1)^2 G(k)^{-1} \alpha \alpha' G(k)^{-1} \end{aligned} \quad (4.61.)$$

şeklindedir.

Teorem 4.4. $\hat{\alpha}(k, d)$ tahmin edicisinin $\hat{\alpha}_A$ tahmin edicisinden MSE kriterine göre daha iyi olması için gerek ve yeter koşul

$$\alpha' [k(1 + d)G^{-1} + 2I]^{-1} \alpha \leq \frac{\sigma_u^2}{k(1-d)} \quad (4.62.)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: Özkale ve Kaçırılar (2007).

$\hat{\alpha}(k, d)$ ve $\hat{\alpha}_A$ tahmin edicilerinin MSE kriterine göre karşılaştırılması k ve d için farklı değerler seçilmesi ile $\hat{\alpha}_k$ ve $\hat{\alpha}_A$, $\hat{\alpha}_d$ ve $\hat{\alpha}_A$ tahmin edicilerinin karşılaştırılmasına olanak sağlamaktadır.

$d = 0$ iken $\hat{\alpha}_k$ tahmin edicisinin $\hat{\alpha}_A$ tahmin edicisinden MSE kriterine göre daha iyi olması için gerek ve yeter koşul

$$\alpha'[kG^{-1} + 2I]^{-1}\alpha \leq \frac{\sigma_u^2}{k} \quad (4.63.)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (ayrıca bkz. Vinod ve Ullah, 1981; Rao ve Toutenburg, 1995).

$k = 1$ iken $\hat{\alpha}_d$ tahmin edicisinin $\hat{\alpha}_A$ tahmin edicisinden MSE kriterine göre daha iyi olması için gerek ve yeter koşul

$$\alpha'[(1 + d)G^{-1} + 2I]^{-1}\alpha \leq \frac{\sigma_u^2}{(1-d)} \quad (4.64.)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (ayrıca bkz. Sakallıoğlu ve ark., 1996).

(4.62)-(4.64) denklemlerinde verilen karşılaştırma sonuçları bilinmeyen α ve σ_u^2 parametreleri ile d ve k yanlılık parametrelerinin seçimlerine bağlıdır. Uygulamada α ve σ_u^2 parametreleri yerine yansız tahminleri kullanılabilir. d ve k yanlılık parametrelerinin seçimi için Özkale ve Kaçıranlar (2007) tarafından önerilen iteratif yöntem kullanılacaktır.

(4.54) modeli için kanonik form

$$y = W\gamma + u, \quad u \sim N(0, \sigma_u^2 I) \quad (4.65.)$$

formunda belirtilmiş olsun. Burada Q matrisinin kolonları $Z'Z$ matrisinin özvektörlerinden oluşmaktadır ve $W = ZQ$ ve $\gamma = Q'\alpha$ belirlenmiştir. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{r+1} > 0$ özdeğerleri $Z'Z$ matrisinin sıralı özdeğerleri olmak üzere $W'W = Q'Z'ZQ = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1})$ şeklindedir.

d parametresinin sabit bir değeri için önerilen ridge yanlılık parametresi tahminleri

$$\hat{k}_{HM} = \frac{(r+1)\hat{\sigma}_u^2}{\sum_{i=1}^{r+1} \left[\hat{\gamma}_i^2 - d \left(\frac{\hat{\sigma}_u^2}{\lambda_i} + \hat{\gamma}_i^2 \right) \right]} \quad (4.66.)$$

$$\hat{k}_{AM} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\left[\hat{\gamma}_i^2 - d \left(\frac{\hat{\sigma}_u^2}{\lambda_i} + \hat{\gamma}_i^2 \right) \right]} \quad (4.67.)$$

$$\hat{k}_{GM} = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\prod_{i=1}^{r+1} \left[\hat{\gamma}_i^2 - d \left(\frac{\hat{\sigma}_u^2}{\lambda_i} + \hat{\gamma}_i^2 \right) \right]^{1/(r+1)}} \quad (4.68.)$$

şeklindedir. Burada $\hat{\sigma}_u^2$ (1.7) denkleminde verilen σ_u^2 parametresinin EKK tahmini ve $\hat{\gamma}$ (4.65) denklemindeki γ için EKK tahmin edicidir. Ayrıca k yanlılık parametresinin sabit bir değeri için

$$\hat{d}_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^{r+1} \frac{(k\hat{\gamma}_i^2 - \hat{\sigma}_u^2)}{(\lambda_i + k)^2}}{\sum_{i=1}^{r+1} \frac{k(\hat{\sigma}_u^2 + \hat{\gamma}_i^2 \lambda_i)}{\lambda_i (\lambda_i + k)^2}} \quad (4.69.)$$

optimal d değerini elde edilmiştir. (4.66)-(4.69) tahminleri ile kullanılan iteratif

yöntem şöyledir: İlk olarak $\hat{d} < \min \left\{ \frac{\hat{\gamma}_i^2}{\frac{\hat{\sigma}_u^2}{\lambda_i} + \hat{\gamma}_i^2} \right\}$ olacak şekilde seçilen d 'nin tahmini

için (4.66)-(4.68) denklemleri yardımıyla $\hat{k}_{HM}$, $\hat{k}_{AM}$ ve $\hat{k}_{GM}$ tahminleri hesaplanır. Daha sonra elde edilen $\hat{k}_{HM}$, $\hat{k}_{AM}$ ve $\hat{k}_{GM}$ tahminleri kullanılarak (4.69) denkleminde verilen $\hat{d}_{opt}$ değerleri hesaplanır. Hesaplanan $\hat{d}_{opt}$ değerlerinden herhangi biri negatif ise $\hat{d}_{opt} = \hat{d}$ kullanılır.

4.2.1.3. Sayısal Örnek

Almon iki parametrelili tahmin edici ile Almon tahmin edicinin karşılaştırılması için Almon (1965) verisi analiz edilecektir. Bağımsız değişkenin kaynaklar ve bağımlı değişkenin sermaye harcamaları olduğu veri seti 1953-1967 yıllarına ait üçer aylık verilerden oluşmaktadır.

Gültay ve Kaçıranlar (2015) çalışmasından yararlanılarak gecikme uzunluğu $p = 8$ ve A matrisi oluşturulurken kullanılan polinom derecesi $r = 2$ olarak kullanılmıştır. (4.54) modelindeki Z matrisi $Z = XA$ eşitliği ile elde edilmiştir ve $Z'Z$ matrisi için koşul sayısı ($\lambda_{maks}/\lambda_{min}$) 4033 hesaplanmıştır. Bu koşul sayısı verideki güçlü çoklu iç ilişkinin varlığını işaret etmektedir. $Z'Z$ matrisinin özdeğerleri: (0.0007, 0.0634, 2.9359), Almon tahmin edici $\hat{\alpha}_A = (0.0962, 0.0320, -0.0052)$ ve $\hat{\sigma}_u^2 = 0.0164$ elde edilmiştir. 3×3 tipindeki Q matrisi normalleştirilmiş özvektörlerden oluşmaktadır ve Λ matrisi $Z'Z = Q\Lambda Q'$ olacak şekilde $Z'Z$ matrisinin özdeğerlerinden oluşan 3×3 tipindeki köşegen matristir. (4.65) denkleminde verilen kanonik formdaki model için $W = ZQ$ ve $\gamma = Q'\alpha$ eşitlikleri kullanılarak

$$Q = \begin{bmatrix} -0.2478 & -0.7818 & 0.5722 \\ 0.7934 & 0.1751 & 0.5829 \\ -0.5559 & 0.5985 & 0.5769 \end{bmatrix}$$

ve

$$W'W = \Lambda = \begin{bmatrix} 0.0007 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0634 & 0 \\ 0 & 0 & 2.9359 \end{bmatrix}$$

elde edilmiştir. γ katsayı vektörü için EKK tahmin edici ise

$$\hat{\gamma} = \Lambda^{-1}W'y = (1.2297, -1.0754, 0.5580)'$$

hesaplanmıştır. (4.66)-(4.69) denklemleri kullanılarak Almon iki parametrelili tahmin edici için k ve d yanlılık parametrelerinin tahminleri elde edilmiştir. Almon tahmin edici ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri Çizelge 4.9'da yer almaktadır. k ve d yanlılık parametrelerinin tahminleri çizelgedeki parantez içinde belirtilmiştir.

Çizelge 4.9. Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri

$\widehat{mse}(\hat{\alpha}(k, d))$			
$\widehat{mse}(\hat{\alpha}_A)$	$(\hat{k}_{HM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{AM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{GM}, \hat{d}_{opt})$
22.8594	1.2232	0.2402	0.1902
	(0.0361, 0.2035)	(1.0107, 0.0995)	(0.1370, 0.0760)

Çizelge 4.9 dikkate alındığında tahmin edilen k ve d değerleri için Almon iki parametrelili tahmin edicinin mse değerlerinin Almon tahmin edicinin mse değerinden oldukça küçük olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Bu sonuç teorik bulgularla uyuşmaktadır. Gecikmesi dağıtılmış modeller için Almon iki parametrelili tahmin edici oldukça iyi tahminler elde edilmesine olanak sağlamaktadır.

4.2.1.4. Monte Carlo Simülasyonu

Bu bölümde Almon tahmin edici ve Almon iki parametrelili tahmin edicinin performansı k yanlılık parametresinin (4.66)-(4.68) denklemlerindeki tahminleri ve d yanlılık parametresinin (4.69) denkleminde verilen tahmini kullanılarak Monte Carlo simülasyon çalışması yardımıyla karşılaştırılacaktır. Frost (1975) ve Güler ve ark. (2015) çalışmalarından yararlanılarak model oluşum süreci

$$y_t = \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_p x_{t-p} + u_t, \quad (4.70.)$$

$$x_1 = v_1, \quad (4.71.a.)$$

$$x_t = \varphi x_{t-1} + (1 - \varphi^2)^{1/2} v_t, \quad t \geq 2 \quad (4.71.b.)$$

denklemleri ile belirlenmiştir. Burada φ açıklayıcı değişkenler arasındaki korelasyon değeridir. β vektörü $X'X$ matrisinin en büyük özdeğerine karşılık gelen normalleştirilmiş özvektör olacak şekilde seçilmiştir. u_t ve v_t hata terimleri 0 ortalamalı ve sırasıyla σ_u^2 ve 1 varyanslı bağımsız normal rasgele değişkenlerdir. φ için 0.5, 0.8, 0.9, 0.95, 0.99, 0.999 değerleri ve σ_u için 0.01, 0.1, 0.25, 1, 9, 20 değerleri kullanılmıştır. Veri üretiminde her bir denemede v_t hataları için $t = 1, \dots, 76$ ve u_t hataları için $t = 17, \dots, 76$ değerleri kullanılmıştır. x_t değişkenleri (4.71.a) ve (4.71.b) denklemleri ile ve y_t gözlemleri (4.70) denklemi ile üretilmiştir. Her bir denemede $T = 60$ gözlem ve $p = 16$ gecikme sayısı kullanılmıştır. A matrisini oluşturmak için gecikme polinomunun derecesi $r = 2$ olarak seçilmiştir ve X matrisi oluşturulduktan sonra $Z = XA$ denkleminde yararlanılarak Z matrisi oluşturulmuştur. X ve Z matrisleri denemelerin başında oluşturulmuş ve denemeler boyunca sabit kalmıştır. Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edicilerinin mse değerleri 5000 deneme sonucunda elde edilmiştir. Sonuçlar Çizelge 4.10-4.15'de yer almaktadır. k ve d yanlılık parametrelerinin tahminleri çizelgedeki parantez içinde belirtilmiştir.

Çizelge 4.10. $\varphi = 0.5$ iken Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri

S_u	$\widehat{mse}(\hat{\alpha}_A)$	$\widehat{mse}(\hat{\alpha}(k, d))$		
		$(\hat{k}_{HM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{AM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{GM}, \hat{d}_{opt})$
0.01	5.2279	1.7386 (0.0150, 0.9918)	1.7348 (0.1247, 0.9928)	1.7352 (0.0557, 0.9911)
0.1	5.5277	1.8268 (0.0199, 0.9764)	1.8145 (0.2936, 0.9818)	1.8141 (0.1000, 0.9754)
0.25	6.0388	1.9408 (0.0303, 0.9273)	1.8944 (0.9510, 0.9437)	1.8843 (0.2238, 0.9235)
1	7.8762	1.6210 (0.0179, 0.1860)	1.7736 (2421, 0.6946)	1.7584 (1.0921, 0.6742)
9	6.9627	1.3716 (0.0541, 0.0135)	1.2546 (196.5537, 0.3657)	1.3771 (1.9423, 0.3569)
20	6.7313	1.4139 (0.0949, 0.1372)	1.2291 (398.0956, 0.3460)	1.3402 (2.9867, 0.3373)

Çizelge 4.11. $\varphi = 0.8$ iken Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri

S_u	$\widehat{mse}(\hat{a}(k, d))$			
	$\widehat{mse}(\hat{a}_A)$	$(\hat{k}_{HM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{AM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{GM}, \hat{d}_{opt})$
0.01	11.1639	3.7069 (0.0013, 0.7790)	3.6120 (1.1951, 0.9632)	3.6065 (0.0182, 0.6821)
0.1	11.4082	3.7688 (0.0027, 0.8320)	3.6513 (0.8811, 0.9479)	3.6614 (0.0258, 0.7798)
0.25	11.9742	3.8773 (0.0066, 0.8271)	3.6693 (1.2998, 0.9082)	3.6994 (0.0520, 0.7828)
1	15.6324	4.1307 (0.0561, 0.7439)	3.7397 (1.2021, 0.7391)	3.8297 (0.1935, 0.7076)
9	21.8510	2.7656 (0.0130, 0.2667)	3.7345 (147.8399, 0.6464)	3.8668 (0.9135, 0.6430)
20	22.1291	2.3394 (0.0085, 0.0467)	3.7085 (185.9181, 0.6403)	3.8265 (0.8712, 0.6377)

Çizelge 4.12. $\varphi = 0.9$ iken Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri

S_u	$\widehat{mse}(\hat{a}(k, d))$			
	$\widehat{mse}(\hat{a}_A)$	$(\hat{k}_{HM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{AM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{GM}, \hat{d}_{opt})$
0.01	5.8789	1.9441 (0.0023, 0.9609)	1.9110 (0.1815, 0.9739)	1.9215 (0.0133, 0.9525)
0.1	7.0976	2.3060 (0.0045, 0.9416)	2.2428 (0.1939, 0.9536)	2.2607 (0.0214, 0.9336)
0.25	9.9266	3.0021 (0.0106, 0.8880)	2.8577 (0.5217, 0.9086)	2.8747 (0.0532, 0.8779)
1	30.7525	6.6209 (0.1021, 0.7725)	6.4026 (0.5877, 0.7715)	6.4071 (0.2521, 0.7662)
9	45.6407	3.8408 (0.0038, 0.0265)	7.8345 (370.0438, 0.6917)	7.8703 (1.6124, 0.6914)
20	43.8535	3.7512 (0.0039, 0.0368)	7.4583 (351.8034, 0.6859)	7.5170 (1.2066, 0.6854)

Çizelge 4.13. $\phi = 0.95$ iken Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri

S_u	$\widehat{mse}(\hat{a}(k, d))$			
	$\widehat{mse}(\hat{a}_A)$	$(\hat{k}_{HM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{AM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{GM}, \hat{d}_{opt})$
0.01	8.0365	1.5252 (0.0242, 0.6103)	1.2614 (1.6822, 0.6177)	1.2639 (0.1128, 0.5634)
0.1	11.6212	2.2971 (0.0344, 0.6927)	2.0670 (1.1127, 0.6945)	2.0693 (0.1237, 0.6683)
0.25	19.3296	4.0928 (0.0617, 0.7641)	3.9145 (0.7758, 0.7623)	3.9129 (0.1602, 0.7531)
1	59.0885	12.2289 (0.8542, 0.7810)	12.2218 (1.2452, 0.7808)	12.2180 (1.0527, 0.7807)
9	62.5984	6.3683 (0.0041, 0.2653)	11.0244 (154.3581, 0.7095)	11.0463 (2.3443, 0.7093)
20	59.5467	6.8087 (0.0060, 0.3878)	10.3009 (244.5081, 0.7010)	10.3372 (2.0130, 0.7007)

Çizelge 4.14. $\phi = 0.99$ iken Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri

S_u	$\widehat{mse}(\hat{a}(k, d))$			
	$\widehat{mse}(\hat{a}_A)$	$(\hat{k}_{HM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{AM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{GM}, \hat{d}_{opt})$
0.01	2.1314	0.5135 (0.0571, 0.0905)	0.4397 (1.9158, 0.0571)	0.3673 (0.2042, 0.0099)
0.1	5.3649	0.5384 (0.0733, 0.2187)	0.5048 (2.6041, 0.1736)	0.3841 (0.2654, 0.1405)
0.25	17.8999	1.4830 (0.1670, 0.4359)	1.4213 (1.6206, 0.4251)	1.3578 (0.3905, 0.4179)
1	56.4969	3.8171 (0.0027, 0.00054)	9.1532 (1846, 0.6794)	9.0852 (1.3722, 0.6789)
9	59.6552	6.0843 (0.0054, 0.3381)	9.7125 (1740, 0.6783)	9.7387 (1.7524, 0.6778)
20	59.1702	6.9909 (0.0086, 0.4583)	9.5836 (954.3061, 0.6758)	9.6146 (1.9591, 0.6754)

Çizelge 4.15. $\varphi = 0.999$ iken Almon ve Almon iki parametrelili tahmin edici için elde edilen mse değerleri

S_u	$\widehat{mse}(\hat{a}(k, d))$			
	$\widehat{mse}(\hat{a}_A)$	$(\hat{k}_{HM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{AM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{GM}, \hat{d}_{opt})$
0.01	2.3702	0.6133 (0.0497, 0.0761)	0.4133 (1.4908, 0.0508)	0.4188 (0.1751, 0.0024)
0.1	22.0276	1.8522 (0.1766, 0.4482)	1.7773 (0.8171, 0.4434)	1.7607 (0.3186, 0.4388)
0.25	56.9583	4.4087 (0.0038, 0.2115)	8.7875 (147.0282, 0.6628)	8.6706 (0.5709, 0.6614)
1	71.8744	5.3960 (0.0022, 0.0022)	12.1372 (2297, 0.6966)	12.1422 (1.1877, 0.6962)
9	71.1853	8.6652 (0.0073, 0.4734)	11.8793 (1216, 0.6908)	11.9110 (1.8297, 0.6904)
20	71.0445	9.0454 (0.0086, 0.5073)	11.8390 (1031, 0.6902)	11.8718 (1.9457, 0.6898)

Çizelge 4.10-4.15 dikkate alındığında Almon iki parametrelili tahmin edicinin her durumda Almon tahmin ediciye üstünlük sağladığı görülmektedir. σ_u 'nın sabit değerleri için φ korelasyon değerinin artışı tahmin edicilerin mse değerlerinin artmasına neden olmaktadır. Ayrıca σ_u ve φ arttıkça tahmin edicilerin mse değerleri arasındaki fark artmaktadır. Çizelgelerden çıkarılacak diğer bir sonuç σ_u ve φ arttıkça çoklu iç ilişki problemi Almon tahmin edici üzerinde daha da etkili olmaktadır. Bu durumda Almon iki parametrelili tahmin edici çoklu iç ilişki probleminden daha az etkilenmektedir. Dolayısıyla çoklu iç ilişki probleminden etkilenen gecikmesi dağıtılmış modellerde Almon tahmin edici yerine Almon iki parametrelili tahmin ediciyi kullanmak daha iyi tahminler elde edilmesini sağlayacaktır. Almon iki parametrelili tahmin edicinin Almon tahmin ediciye olan üstünlüğü σ_u arttığında gözle görülür bir hal almaktadır. $\sigma_u = 9$ ve $\sigma_u = 20$ iken $\hat{a}(\hat{k}_{HM}, \hat{d}_{opt})$ çoğu durumda Almon tahmin ediciden daha iyi sonuçlar vermektedir. $\sigma_u = 0.01$ iken $\hat{a}(\hat{k}_{AM}, \hat{d}_{opt})$ genellikle iyi tahminler elde edilmesini sağlamaktadır. Öte yandan bazı durumlarda Almon iki parametrelili tahminlerinin hepsi ya da ikisi oldukça iyi performans sergilemektedir. Genel olarak çizelgelerin

tamamı dikkate alındığında yanlılık parametreleri için elde edilen değerlerin çok fazla önemli olmadığı sonucuna ulaşılabılır. Birçok k değeri ile elde edilecek olan d 'nin uygun değeri ile Almon iki parametrelili tahmin edici oldukça iyi tahminler verecektir.

4.2.2. Gecikmesi Dağıtılmış Modellerde Liu tipi Shiller Tahmin Edici ve Performansı

4.2.2.1. Tanım

(4.50) modeli için bilinmeyen β parametre vektörü hakkında (4.53) denklemi ile verilen ön bilginin doğru olduğu kabul edilsin. Bölüm 4.2.1'de gecikmesi dağıtılmış modellerde kullanılan alternatif tahmin yöntemleri incelenmişti. Bu tahmin yöntemlerinin hepsi (4.53) denklemi ile verilen $\beta = A\alpha$ Almon gecikme polinomunun doğru olduğu varsayımı altında ele alınmıştır. Öte yandan bu tür bir ön bilgide gecikme ağırlıklarının derecesi biliniyorken katsayılar bilinmemektedir. Gecikmesi dağıtılmış modellerde bilinmeyen parametre vektörü hakkında böyle bir ön bilginin varlığını kabul etmek kısıtlayıcı olabilir. Bu nedenle bilinmeyen β parametre vektörü hakkında $v \sim N(0, \sigma_v^2 I)$ olmak üzere

$$\beta = A\alpha + v \quad (4.72.)$$

formunda bir ön bilgi tanımlamak daha esnek bir yaklaşım olabilir.

Shiller (1973) ve Terasvirta (1976) çalışmaları göz önünde bulundurularak $RA = 0$ olacak şekilde $(p - r) \times (p + 1)$ tipindeki R matrisi

$$R = \begin{pmatrix} (-1)^0 \frac{\alpha+1}{\beta} & (-1)^1 \frac{\alpha+1}{\beta} & \dots & (-1)^{r+1} \frac{\alpha+1}{\beta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (-1)^0 \frac{\alpha+1}{\beta} & \dots & (-1)^r \frac{\alpha+1}{\beta} & (-1)^{r+1} \frac{\alpha+1}{\beta} & \dots & 0 \\ M & M & \dots & M & M & \dots & M \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & (-1)^{r+1} \frac{\alpha+1}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu durumda (4.72) denkleminde verilen stokastik ön bilgi $Rv \sim N(0, \sigma_v^2 RR')$ olmak üzere

$$R\beta = Rv \quad (4.73.)$$

ifade edilebilir.

Shiller (1973), $Rv \sim N(0, \sigma_v^2 I)$ olmak üzere Theil ve Goldberger (1961)'in mixed tahmin yöntemini kullanarak

$$\hat{\beta}_{SH} = (X'X + \lambda R'R)^{-1} X'y, \quad \lambda = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_v^2} \quad (4.74.)$$

Shiller tahmin ediciyi tanımlamıştır. Shiller tahmin edici (4.50) modeli için

$$\begin{aligned} E(\beta) &= 0 \\ Var(\beta) &= \sigma_v^2 (R'R)^{-1} \end{aligned} \quad (4.75.)$$

varsayımı altında (3.14) denkleminde yararlanılarak

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_B &= (X'X + \lambda R'R)^{-1}X'y \\ &= \hat{\beta}_{SH}\end{aligned}\quad (4.76.)$$

lineer Bayes tahmin yöntemi ile elde edilebilir.

(4.74) denkleminde tanımlanan Shiller tahmin edicinin gecikmesi dağıtılmış modellerde yeteri kadar iyi sonuçlar vermediği Maddala (1974) çalışmasında iki sayısal örnekten elde edilen sonuçlar ile ortaya konulmuştur.

(4.50) modeli için (4.73) denkleminde verilen stokastik kısıtlar doğru iken

$$\begin{aligned}E(\beta) &= 0 \\ Var(\beta) &= \sigma_v^2(R'(RR')^{-1}R)^{-1}\end{aligned}\quad (4.77.)$$

varsayımının sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda (3.14) denkleminde yararlanılarak lineer Bayes tahmin edici

$$\hat{\beta}_B = (X'X + \lambda R'(RR')^{-1}R)^{-1}X'y \quad (4.78.)$$

elde edilir (ayrıca bkz. Ullah ve Raj, 1979). Bu durumda Gruber (2012) çalışmasında tanımlanan Liu tipi tahmin edici, (4.50) modeli için (4.73) denkleminde verilen stokastik kısıtlar altında, $\hat{\beta}$ EKK tahmin edici ve (4.78) denklemindeki $\hat{\beta}_B$ lineer Bayes tahmin edici kullanılarak

$$\hat{\beta}_{LT} = d\hat{\beta} + (1 - d)\hat{\beta}_B, \quad 0 < d < 1 \quad (4.79.)$$

formunda tanımlanabilir. Liu tipi tahmin edicinin, lineer Bayes tahmin edicinin özel bir hali olduğu Gruber (2012) de gösterilmiştir.

(4.79)'da tanımlanan Liu tipi tahmin edici için (4.75) varsayımının sağlandığı kabul edilirse

$$\hat{\beta}_{LT}(SH) = d\hat{\beta} + (1-d)\hat{\beta}_{SH}, \quad 0 < d < 1 \quad (4.80.)$$

Liu tipi Shiller tahmin edici elde edilir.

4.2.2.2. Teorik Karşılaştırma

Bu bölümde Liu tipi Shiller tahmin edici Bölüm 1.3.6'da verilen hedef fonksiyonu altında PMSE kriterine gören EKK ve Shiller tahmin edici ile teorik olarak karşılaştırılacaktır. $\hat{\beta}$, $\hat{\beta}_{SH}$ ve $\hat{\beta}_{LT}(SH)$ tahmin edicileri kullanılarak

$$\hat{T} = X\hat{\beta} \quad (4.81.)$$

$$\hat{T}_{SH} = X\hat{\beta}_{SH} \quad (4.82.)$$

$$\hat{T}_{LT}(SH) = X\hat{\beta}_{LT}(SH) \quad (4.83.)$$

kestirimcileri elde edilir. Daha sonra $S_\lambda = (X'X + \lambda R'R)$ olmak üzere (1.22), (1.24), (4.81), (4.82) ve (4.83) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} PMSE(\hat{T}) &= E(\hat{T} - T)(\hat{T} - T)' \\ &= \sigma_u^2(1-2t)XS^{-1}X' + t^2\sigma_u^2I_{T-p} \end{aligned} \quad (4.84.)$$

$$\begin{aligned} PMSE(\hat{T}_{SH}) &= E(\hat{T}_{SH} - T)(\hat{T}_{SH} - T)' \\ &= \sigma_u^2XS_\lambda^{-1}SS_\lambda^{-1}X' + XS_\lambda^{-1}S\beta\beta'SS_\lambda^{-1}X' - XS_\lambda^{-1}S\beta\beta'X' \\ &\quad - 2\sigma_u^2tXS_\lambda^{-1}X' - X\beta\beta'SS_\lambda^{-1}X' + X\beta\beta'X' + t^2\sigma_u^2I_{T-p} \end{aligned} \quad (4.85.)$$

$$\begin{aligned} PMSE(\hat{T}_{LT}(SH)) &= E(\hat{T}_{LT}(SH) - T)(\hat{T}_{LT}(SH) - T)' \\ &= d\sigma_u^2(d-2t)XS^{-1}X' + (d-1)^2X\beta\beta'X' \\ &\quad + 2\sigma_u^2(1-d)(d-t)XS_\lambda^{-1}X' - (d-1)^2X\beta\beta'SS_\lambda^{-1}X' \\ &\quad - (d-1)^2XS_\lambda^{-1}S\beta\beta'X' + \sigma_u^2(d-1)^2XS_\lambda^{-1}SS_\lambda^{-1}X' \\ &\quad + (d-1)^2XS_\lambda^{-1}S\beta\beta'SS_\lambda^{-1}X' + t^2\sigma_u^2I_{T-p} \end{aligned} \quad (4.86.)$$

PMSE matrisleri elde edilir. $\hat{T}$, $\hat{T}_{SH}$ ve $\hat{T}_{LT}(SH)$ kestirimcilerinin PMSE performanslarını karşılaştırmak için $c = \lambda^2 d(2-d)$, $u = \frac{\sigma_u^2(2t-d)}{\lambda^2(d-2)}$, $\alpha_1 = \sigma_u^2(1-2t-d^2+2dt)$, $\alpha_2 = -2\sigma_u^2(1-d)(d-t) - \sigma_u^2(d-1)^2$, $\alpha_3 = \lambda\sigma_u^2(d-1)^2$, $\alpha_4 = \lambda^2(d-1)^2$, $\delta = S_\lambda^{-1}R'R\beta$, $W = S_\lambda^{-1}R'RS_\lambda^{-1}$, $A = (RS^{-1}R' + \frac{1}{\lambda}I_{p-r})$, $Z_1 = XS^{-1}X'$, $Z_2 = XS_\lambda^{-1}X'$, $Z_3 = XWX'$, $Z_4 = X\delta\delta'X'$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P_1 &= PMSE(\hat{T}) - PMSE(\hat{T}_{LT}(SH)) \\ &= \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \alpha_3 Z_3 - \alpha_4 Z_4 \end{aligned} \quad (4.87.)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= PMSE(\hat{T}_{LT}(SH)) - PMSE(\hat{T}_{SH}) \\ &= cX \left(\frac{\sigma_u^2}{\lambda} W + uS^{-1}R'A^{-1}RS^{-1} - \delta\delta' \right) X' \end{aligned} \quad (4.88.)$$

farkları hesaplanır.

Teorem 4.5. (4.87) denkleminde verilen P_1 matrisi için

(i) $t = \frac{d+1}{2}$ olsun. Bu durumda $P_1 \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul W^- matrisi W matrisinin herhangi bir g-inversi olmak üzere $\delta \in R(W)$ ve $\delta'W^-\delta \leq \frac{\sigma_u^2}{\lambda}$ olmasıdır.

(ii) $t < \frac{d+1}{2}$ olsun. .Bu durumda $P_1 \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $F_1 = \alpha_1 Z_1 + \alpha_3 Z_3$ ve $F_2 = \alpha_2 Z_2 + \alpha_4 Z_4$ olmak üzere $\lambda_i^{F_2}(F_1) \leq 1$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

(iii) $t > \frac{d+1}{2}$ olsun. .Bu durumda $P_1 \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $F_3 = \alpha_2 Z_2 + \alpha_3 Z_3$ ve $F_4 = \alpha_1 Z_1 + \alpha_4 Z_4$ olmak üzere $\lambda_i^{F_4}(F_3) \leq 1$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: $t \leq \frac{d+1}{2}$ iken $\alpha_1 \geq 0$ ve $t \geq \frac{d+1}{2}$ iken $\alpha_2 \geq 0$ olduğundan $P_1 \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha_3 Z_3 - \alpha_4 Z_4 \geq 0$ olmasıdır. Bu nedenle aşağıdaki durumlar ortaya çıkmaktadır:

(i) $t = \frac{d+1}{2}$ iken $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ve $P_1 = \alpha_3 Z_3 - \alpha_4 Z_4 = \lambda^2(d-1)^2 X \left(\frac{\sigma_u^2}{\lambda} W - \delta\delta' \right) X'$ elde edilir. Teorem 1.1'den $P_1 \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\left(\frac{\sigma_u^2}{\lambda} W - \delta\delta' \right) \geq 0$ olmasıdır. Daha sonra Teorem 1.3'ün kullanılmasıyla ispat tamamlanır.

(ii) $t < \frac{d+1}{2}$ iken $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$ ve $P_1 = F_1 - F_2$ elde edilir. Teorem 1.4'ün uygulanmasıyla ispat tamamlanır.

(iii) $t > \frac{d+1}{2}$ iken $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$ ve $P_1 = F_3 - F_4$ elde edilir. Teorem 1.4'ün uygulanmasıyla ispat tamamlanır.

Teorem 4.6. (4.88) denkleminde verilen P_2 matrisi için $d > 2t$ olsun. Bu durumda $P_2 \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul W^- matrisi W matrisinin herhangi bir g-inversi olmak üzere $\delta \in R(W)$ ve $\delta'W^-\delta \leq \frac{\sigma_u^2}{\lambda}$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: Teorem 1.1'den $P_2 \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\left(\frac{\sigma_u^2}{\lambda} W + uS^{-1}R'A^{-1}RS^{-1} - \delta\delta' \right) \geq 0$ olmasıdır. $u \geq 0$ olduğu dikkate alınırsa $\left(\frac{\sigma_u^2}{\lambda} W + uS^{-1}R'A^{-1}RS^{-1} - \delta\delta' \right) \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\left(\frac{\sigma_u^2}{\lambda} W - \delta\delta' \right) \geq 0$ olmasıdır. Daha sonra Teorem 1.3'ün uygulanmasıyla ispat tamamlanır.

4.2.2.3. Monte Carlo Simülasyonu

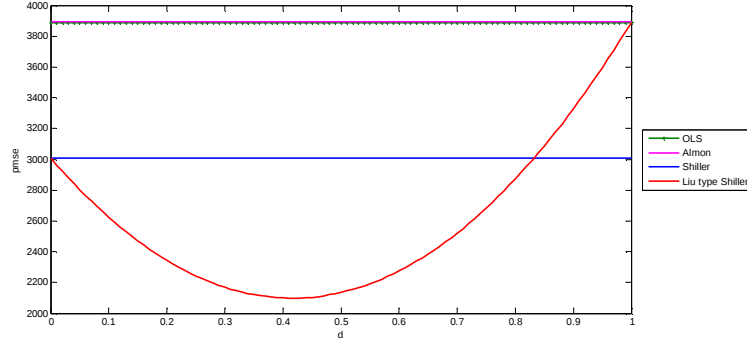
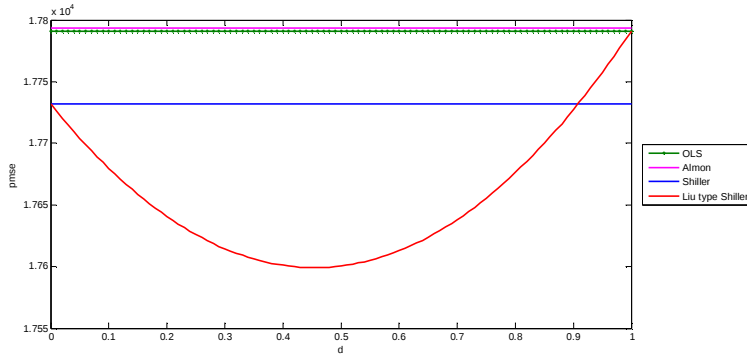
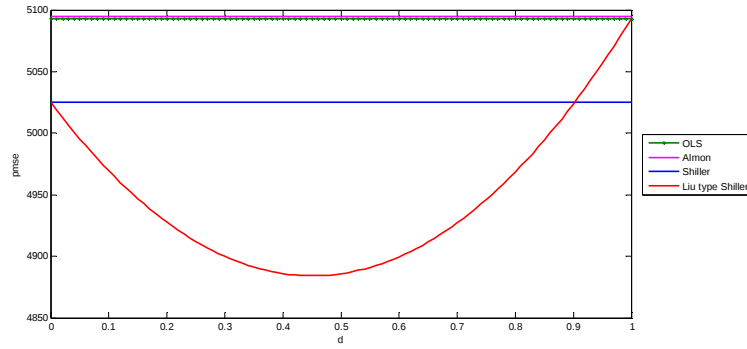
Bu bölümde gecikmesi dağıtılmış modellerde Liu tipi Shiller tahmin edicinin performansı Monte Carlo simülasyon çalışmasıyla incelenecektir. Simülasyon çalışmasında kullanılacak veri üretim süreci için (4.70)-(4.71.b) denklemlerinden yararlanılacaktır. u_t ve v_t hata terimleri 0 ortalamalı ve sırasıyla 10 ve 1 varyanslı bağımsız normal rasgele değişkenlerdir. φ için 0.8, 0.9, 0.99 ve $t = 0.5$ değerleri seçilmiştir. Lindley (1971) ve Lindley ve Smith (1972) çalışmalarından yararlanılarak g keyfi bir skaler olmak üzere λ 'nın tahmini için

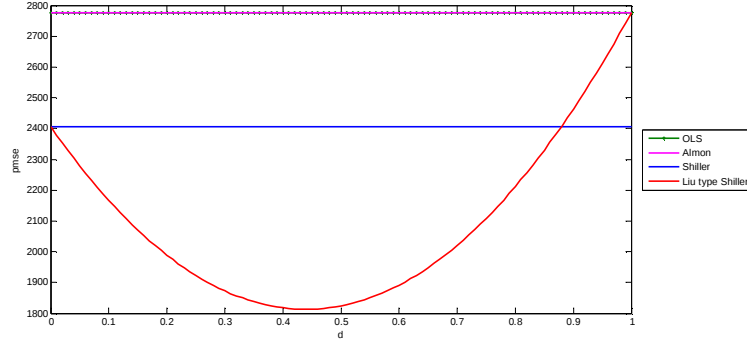
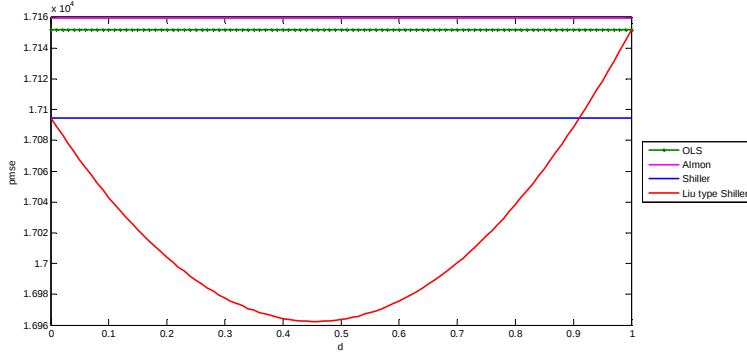
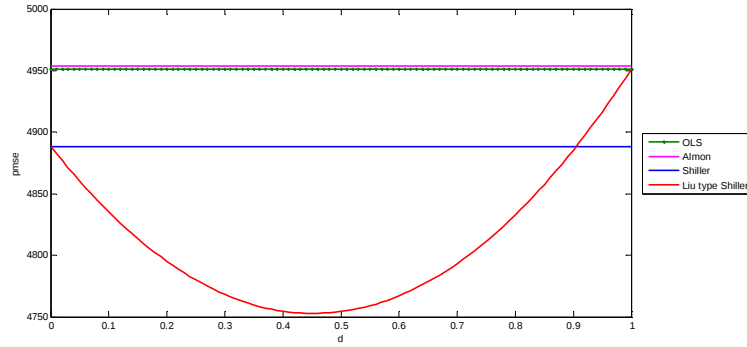
$\hat{\lambda} = \frac{g(y-X\hat{\beta})'(y-X\hat{\beta})}{\hat{\beta}'R'R\hat{\beta}}$ tahmini kullanılacaktır (ayrıca bkz. Vinod ve Ullah, 1981).

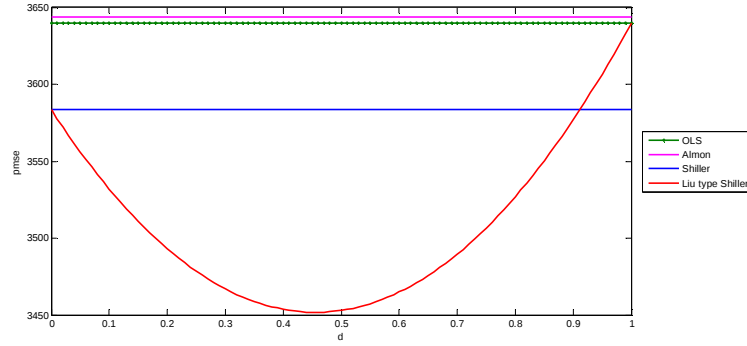
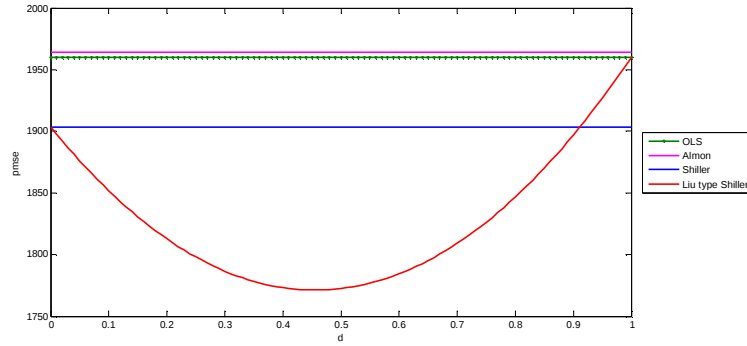
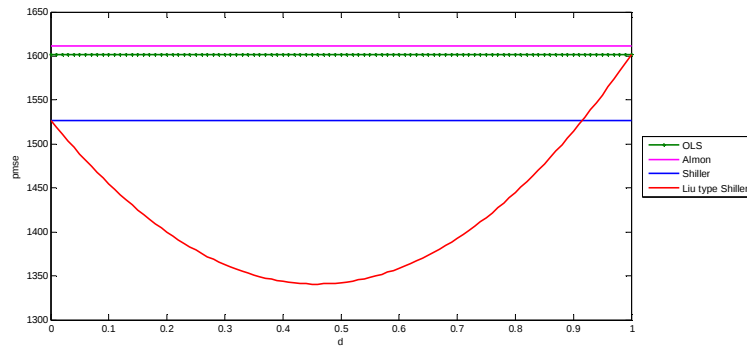
Ekonometrik olarak anlamlı sonuçlar elde etmek için Chanda ve Maddala (1984)'de önerilen üç parametre vektörü kullanılmıştır. Buna göre Deney I'de kullanılan gecikmeler salınımlı dağılım, Deney II'de azalan dağılım ve Deney III'de artıp azalan bir dağılım için önerilen parametre vektörüdür. Üç deney için kullanılan gerçek regresyon katsayıları Çizelge 4.16'da verilmiştir. EKK, Almon, Shiller ve Liu tipi Shiller tahmin edicilerin pmse değerleri 5000 deneme sonucunda hesaplanmıştır. Şekil 4.1-4.9 tahmin edicilerin üç deney tipi için kestirimci performanslarını göstermektedir.

Çizelge 4.16. Monte Carlo deneyinde kullanılan gerçek parametre değerleri (Chanda ve Maddala, 1984)

Katsayılar	Deney I	Deney II	Deney III
b_0	11.60	12.23	1.095
b_1	-11.0	10.98	2.620
b_2	9.66	10.21	2.263
b_3	-9.29	8.65	3.173
b_4	8.38	7.61	5.400
b_5	-6.0	6.45	6.165
b_6	7.11	6.44	4.495
b_7	-4.43	4.69	3.839
b_8	5.2	3.99	3.199
b_9	-3.09	2.66	2.751
b_{10}	2.31	2.00	0.973
b_{11}	-1.16	2.07	-0.131

Şekil 4.1. $\phi = 0.8$ iken **Deney I** için elde edilen pmse değerleriŞekil 4.2. $\phi = 0.8$ iken **Deney II** için elde edilen pmse değerleriŞekil 4.3. $\phi = 0.8$ iken **Deney III** için elde edilen pmse değerleri

Şekil 4.4. $\varphi = 0.9$ iken **Deney I** için elde edilen pmse değerleriŞekil 4.5. $\varphi = 0.9$ iken **Deney II** için elde edilen pmse değerleriŞekil 4.6. $\varphi = 0.9$ iken **Deney III** için elde edilen pmse değerleri

Şekil 4.7. $\phi = 0.99$ iken Deney I için elde edilen pmse değerleriŞekil 4.8. $\phi = 0.99$ iken Deney II için elde edilen pmse değerleriŞekil 4.9. $\phi = 0.99$ iken Deney III için elde edilen pmse değerleri

Şekil 4.1-4.9 dikkate alındığında Liu tipi Shiller tahmin edicinin genellikle EKK, Almon ve Shiller tahmin ediciden daha iyi performans sergilediği görülmektedir. φ değerinde bir artış söz konusu olduğu zaman tahmin edicilerin pmse değerleri genellikle azalmaktadır. Bu durum açıklayıcı değişkenler arasındaki korelasyon değerindeki artışın tahmin edicilerin kestirimci performanslarını artırdığını göstermektedir. Simülasyon sonuçlarından çıkarılacak bir diğer sonuç ise φ arttıkça çoklu iç ilişki probleminin EKK, Almon ve Shiller tahmin ediciler üzerindeki etkileri artmaktadır. Öte yandan Liu tipi Shiller tahmin edici çoklu iç ilişkinin artışından daha az etkilenmektedir. Bu nedenle gecikmesi dağıtılmış modellerde çoklu iç ilişki probleminin etkilerini gidermek için EKK, Almon ve Shiller tahmin edicinin yerine Liu tipi Shiller tahmin edici kullanılabilir.

Üç deney tipi için de Liu tipi Shiller tahmin edici farklı parametre değerleri kullanılarak EKK ve Almon tahmin ediciden daha iyi sonuçlar vermiştir. Liu tipi Shiller tahmin edicinin Shiller tahmin ediciye üstünlüğü ise genellikle $0 < d < 0.9$ aralığında gerçekleşmektedir. Şekillerden görüldüğü üzere hangi d değerinin kullanıldığı çok önemli değildir. Çünkü pek çok d değeri için Liu tipi tahmin edicinin performansı kullanılan diğer tahmin edicilerin performansından üstündür. Kullanılan gecikme katsayısı türlerine göre sonuçlar yorumlanacak olursa en yüksek pmse değerleri azalan katsayılar (Deney II katsayıları) kullanıldığında elde edilmiştir. Buradan EKK ve Almon tahmin edicilerin azalan gecikme katsayıları kullanıldığında yeterince iyi tahminler vermedikleri sonucuna ulaşılabilir. Genellikle Liu tipi Shiller tahmin edicinin gecikmeleri salınımlı parametre dağılımı katsayıları kullanıldığında (Deney I katsayıları) verdiği sonuçlar, gecikmeleri artıp azalan parametre dağılımı katsayıları kullanıldığında (Deney III) elde verdiği sonuçlardan daha iyidir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada lineer regresyon modellerinde kullanılan yanlış tahmin edicilere bayesyen yaklaşım ve tahmin edicilerin farklı kayıp fonksiyonları altında karşılaştırılması konuları ele alınmıştır.

Bayes tahmin ediciler istatistiğin hemen hemen tüm alanlarında ve pek çok ekonometrik çalışmada yoğun bir biçimde kullanılmaktadır. Bilinmeyen regresyon parametreleri hakkında yardımcı bilgiler mevcut olduğunda parametre tahmini yapmanın en etkili yollarından biri regresyona bayesyen yaklaşımı kullanmaktır. Bayesyen yaklaşımda parametre olasılık dağılımı olan bir rasgele değişken gibi düşünülmektedir. Bu doğrultuda parametre için bir olasılık dağılımı belirlenir. Bilinmeyen parametre vektörünün olasılık dağılımı değiştirilerek farklı Bayes tahmin ediciler elde edilebilir. Bu nedenle Bayes tahmin ediciler regresyondaki pek çok tahmin ediciyle doğrudan ilişkilidir. Bayes tahmin edicinin bu özelliği, bu tahmin edicilerin Bayesyen yaklaşımla elde edilmesine olanak sağlamıştır.

Tahmin edicilere bayesyen yaklaşım bölümünde çeşitli kaynaklarda ele alınan ridge tahmin ediciye bayesyen yaklaşım ve Stein-rule tahmin ediciye bayesyen yaklaşım konuları incelenmiştir. Bunun yanında MR, RR, Liu, AO ve iki parametrelili tahmin edicilere bayesyen yaklaşım ilk kez bu çalışmada ortaya konulmuştur.

Karşılaştırmalar bölümü için lineer regresyon modelinde ve gecikmesi dağıtılmış modelde kullanılan tahmin ediciler farklı kayıp fonksiyonları altında karşılaştırılmıştır. Ayrıca bu modeller için yeni tahmin ediciler tanımlanarak performansları incelenmiştir.

İlk olarak AO tahmin edici ve EKK tahmin edici EBLF altında risk kriterine göre teorik olarak karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmada AO tahmin edicinin EKK tahmin ediciden EBLF altında risk kriterine göre her zaman daha iyi olduğu görülmüştür. Bunun yanında karşılaştırmada elde edilen teorik bulgu bazı

özel durumlar için incelenmiştir. Buradan elde edilen teorik sonuçlar geniş kapsamlı bir Monte Carlo simülasyon çalışmasıyla desteklenmiştir.

Genel lineer regresyon modeli için lineer kısıtlar altında FGRR tahmin edici tanımlanmıştır. Yeni tanımlanan bu tahmin ediciye bayesyen yaklaşım konusu ele alınarak FGRR tahmin edicinin bir uygulanabilir genelleştirilmiş kısıtlı Bayes tahmin edici olduğu gösterilmiştir. Sonraki aşamada FGRR tahmin edicinin teorik performansı MSE kriterine göre kısıtlar doğru iken ve kısıtlar doğru değil iken incelenmiştir. Teorik sonuçlar Monte Carlo simülasyonu ile desteklenmiştir.

Bayesyen tahmin ediciler ve yanlış tahmin ediciler ekonometrik modellerde yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. Bu nedenle çalışmanın ilerleyen bölümlerinde gecikmesi dağıtılmış modellerde Almon iki parametrelili tahmin edici tanımlanıp teorik sonuçlara yer verilmiştir. Teorik sonuçlar sayısal örnek ve Monte Carlo simülasyon çalışması ile desteklenmiştir.

Gecikmesi dağıtılmış modellerde Liu tipi Shiller tahmin edici tanımlanarak bu tahmin edicinin hedef fonksiyonu altında PMSE kriterine göre kestirim performansı teorik olarak incelenmiştir. Daha sonra teorik bulgular ekonometrik olarak anlamlı sonuçlar elde etmek için üç tip gerçek parametre vektörü kullanılarak Monte Carlo simülasyon çalışması yardımıyla incelenmiştir.

Bu çalışmada tahmin edicilere bayesyen yaklaşım konusunda kapsamlı bir inceleme yapılmıştır. Bayesyen tahmin edicilerle ilişkili yeni tahmin ediciler tanımlanıp bu tahmin edicilerin performansları teorik ve uygulamalı olarak incelenmiştir. Gelecekte farklı modeller için yeni bayesyen tahmin ediciler tanımlanıp bu tahmin edicilerin özelliklerini incelemek planlanmıştır. Ayrıca bu çalışmada kullanılan EBLF kriteri, hedef fonksiyonu altında PMSE kriteri gibi kriterler kullanılarak farklı modeller için bu tahmin edicilerin performanslarını ortaya koymak planlanmıştır.

KAYNAKLAR

- Aitken, A. C., 1935. On Least Squares And Linear Combinations Of Observations. Proceedings Of The Royal Society Of Edinburgh Section A: Mathematics, 55: 42-48.
- Akdeniz, F., Kaçiranlar, S., 1995. On The Almost Unbiased Generalized Liu Estimator And Unbiased Estimation Of The Bias And Mse. Communications In Statistics-Theory And Methods, 24(7):1789-1797.
- Almon, S., 1965. The Distributed Lag Between Capital Appropriations And Expenditures. Econometrica, 33(1):178-196.
- Chanda, A. K., Maddala, G. S., 1984. Ridge Estimators For Distributed Lag Models. Communications In Statistics - Theory And Methods, 13(2): 217-225.
- Chaturvedi, A., Shalabh, 2014. Bayesian Estimation Of Regression Coefficients Under Extended Balanced Loss Function. Communications In Statistics-Theory And Methods, 43:4253-4264.
- Chaturvedi, A., Shukla, G., 1990. Stein Rule Estimation In Linear Model With Nonscalar Error Covariance Matrix. Sankhya B, 52: 293-304.
- Chaturvedi, A., Wan, A. T. K., Singh, S. P., 2001. Stein-Rule Restricted Regression Estimator In A Linear Regression Model With Nonspherical Disturbances. Communications In Statistics - Theory And Methods, 30(1): 55-68.
- Dwivedi, T. D., Srivastava, V. K., 1978. On The Minimum Mean Squared Error Estimators In A Regression Model. Communications In Statistics-Theory And Methods, 7:487-494.
- Eledum, H., Zahri, M., 2013. Relaxation Method For Two Stages Ridge Regression Estimator. International Journal Of Pure And Applied Mathematics, 85 (4): 653-667.

- Farebrother, R. W., 1975. The Minimum Mean Square Error Linear Estimator And Ridge Regression. *Technometrics*, 17:127-128.
- Farebrother, R. W., 1976. Further Results on the Mean Square Error of Ridge Regression. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 38(3):248-250.
- Fisher, I., 1937. Income In Theory And Income Taxation Practice. *Econometrica*, 5(1):1-55.
- Frost, P. A., 1975. Some Properties Of The Almon Lag Technique When One Searches For Degree Of Polynomial And Lag. *Journal Of The American Statistical Association*, 70(351):606-612.
- Giles, D. E., 2010. Bayesian Estimation Of A Possibly Mis-Specified Linear Regression Model. University Of Victoria, Department Of Economics, Econometrics Working Paper, Issn 1485-6441.
- Graybill, F. A., 1961. An Introduction To Linear Statistical Models. Mc Graw Hill, New York, 463p.
- Griffiths, W. E., Hill, R. C., Judge, G. G., 1993. Learning And Practicing Econometrics. John Wiley And Sons, New York, 896p.
- Gross, J., 2003. Restricted Ridge Estimation. *Statistics And Probability Letters*, 65:57-64.
- Gruber, M. H. J., 1998. Improving Efficiency By Shrinkage: The James-Stein And Ridge Regression Estimators. Marcell Dekker, New York, 648p.
- Gruber, M. H. J., 2010. Regression Estimators: A Comparative Study. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 412p.
- Gruber, M. H. J., 2012. Liu And Ridge Estimators: A Comparision. *Communications In Statistics-Theory And Methods*. 41(20):3739-3749.
- Gujarati, D. N., 1999. Basic Econometrics. Mcgraw-Hill, New York, 944p.

- Güler, H., Gültay, B. And Kaçiranlar, S., 2015. Comparisons Of The Alternative Biased Estimators For The Distributed Lag Models. Communications In Statistics-Simulation And Computation, Doi:10.1080/03610918.2015.1053919.
- Gültay, B., Kaçiranlar, S., 2015. Mean Square Error Comparisons Of The Alternative Estimators For The Distributed Lag Models. Hacettepe Journal Of Mathematics And Statistics, 44(5):1215-1233.
- Hoerl, A. E., Kennard, R. W., Baldwin, K. F., 1975. Ridge Regression: Some Simulations. Communications In Statistics, 4:105-123.
- Hoerl, E., Kennard, R. W., 1970. Ridge Regression: Biased Estimation For Nonorthogonal Problems. Technometrics, 12(1):55-67.
- Hoerl, E., Kennard, R. W., 1976. Ridge Regression Iterative Estimation Of The Biasing Parameter. Communications In Statistics, 5:77-78.
- Judge, G. G., Griffiths, W. E., Hill, R. C., Lutkepohl, H., And Lee, T. C., 1985. The Theory And Practice Of Econometrics. 2nd Ed. John Wiley And Sons, New York, 1064p.
- Kaçiranlar, S., 2010. Alternative Estimators For Distributed Lag Models. Journal Of Statistical Research, 9(1):1-10.
- Kaçiranlar, S., Sakallıoğlu, S., Özkale, M. R. And Güler, H., 2011. More On The Restricted Ridge Regression Estimation. Journal Of Statistical Computation And Simulation, 81(11):1433-1448.
- Kadane, J. B., 1970. Testing Overidentifying Restrictions When The Disturbances Are Small, Journal Of The American Statistical Association, 65:182-185.
- Kadane, J. B., 1971. Comparison Of K-Class Estimators When The Disturbances Are Small, Econometrica, 39:723-738.
- Kennedy, P. A., 2003. Guide To Econometrics. Mıt Press, Cambridge, 598p.
- Kibria, B. M. G., 2003. Performance Of Some New Ridge Regression Estimators. Communications In Statistics-Simulation And Computation, 32 (2): 419-435.

- Lawless, J. F., Wang, P., 1976. A Simulation Study Of Ridge And Other Regression Estimators. *Communications In Statistics*, 7:139-164.
- Lindley, D. V., 1971. *Bayesian Statistics: A Review*. Society For Industrial And Applied Mathematics, Philadelphia, 83p.
- Lindley, D. V., Smith, A. F. M., 1972. Bayes Estimates For The Linear Model. *Journal Of The Royal Statistical Society B Series*, 1-41.
- Liu, K., 1993. A New Class Of Biased Estimate In Linear Regression. *Communications In Statistics-Theory And Methods*, 22(2):393-402.
- Maddala, G. S., 1974. Ridge Estimator For Distributed Lag Models. Nber Working Paper Series 69.
- Marquardt, D. W., Snee, R. D., 1975. Ridge Regression In Practice. *The American Statistician*, 29:3-20.
- Mayer, L. S., Wilke, T. A., 1973. On Biased Estimation In Linear Models. *Technometrics*, 15:497-508.
- Mc Donald, G. C., Galarneau, D. I., 1975. A Monte Carlo Evaluation Of Some Ridge-Type Estimators. *Journal Of The American Statistical Association*, 70:407-416.
- Montgomery, D. C., Peck, E. A., 1992. *Introduction To Linear Regression Analysis*. John Wiley And Sons, New York, 526p.
- Myers, R. H., 1990. *Classical And Modern Regression With Application*. Duxbury Press, California, 488p.
- Nagar, A. L., 1959. The Bias And Moment Matrix Of The General K-Class Estimators Of The Parameters In Simultaneous Equations, *Econometrica*, 27:575-595.
- Özbay, N., Kaçiranlar, S. And Dawoud, I., 2016. The Feasible Generalized Restricted Ridge Regression Estimator. *Journal Of Statistical Computation And Simulation*, 87(4):753-765.

- Özbay, N., Kaçıranlar, S., (2016a). The Performance Of The Adaptive Optimal Estimator Under The Extended Balanced Loss Function. Communications In Statistics - Theory And Methods, Doi:10.1080/03610926.2016.1267760.
- Özbay, N., Kaçıranlar, S., (2016b). The Almon Two Parameter Estimator For The Distributed Lag Models. Journal Of Statistical Computation And Simulation, 87(4):834-843.
- Özkale M. R., Kaçıranlar, S., 2007. The Restricted And Unrestricted Two Parameter Estimators. Communications In Statistics-Theory And Methods, 36(15):2707-2725.
- Pliskin, J. L., 1987. A Ridge-Type Estimator And Good Prior Means. Communications In Statistics-Theory And Methods, 16(12):3429-3437.
- Rao, C. R., 1965. Linear Statistical Inference And Its Applications. Wiley, New York, 625p.
- Rao, C. R., 1971. Linear Statistical Inference And Its Applications. 2nd Ed., Wiley, London, 625p.
- Rao, C. R., 1976. Estimation Of Parameters In A Linear Model. The Annals Of Statistics, 4(6):1023-1037.
- Rao, C. R., Toutenburg, H., 1995. Linear Models: Least Squares And Alternatives. Springer-Verlag, New York, 572p.
- Sakallıoğlu, S., Kaçıranlar, S., Akdeniz, F., 1996. A Note On Combining Ridge And Least Squares Estimator. Journal Of Mathematics And Computer Science, 9(2):193-198.
- Sarkar, N., 1992. A New Estimator Combining The Ridge Regression And The Restricted Least Squares Methods For Estimation. Communications In Statistics-Theory And Methods, 21(7):1987-2000.
- Shalabh, Toutenburg, H., Heumann, C., 2009. Stein-Rule Estimation Under An Extended Balanced Loss Function. Journal Of Statistical Computation And Simulation, 79:1259-1273.

- Shalabh. 1995. Performance Of Stein-Rule Procedure For Simultaneous Prediction Of Actual And Average Values Of Study Variable In Linear Regression Model. *Bulletin Of The International Statistical Institute*, 56:1375-1390.
- Shiller, R. J., 1973. A Distributed Lag Estimator Derived From Smoothness Priors. *Econometrica*, 41 (4): 775-788.
- Stein, C., 1956. Inadmissibility Of Usual Estimator For The Mean Of A Multivariate Normal Distribution. *Proceeding Of The Third Berkeley Symposium On Mathematical Statistics And Probability*. University Of California Press, Berkeley, 197-206.
- Swindel, B. F., 1976. Good Ridge Estimators Based On Prior Information. *Communications In Statistics-Theory And Methods*, A5(11):1065-1075.
- Terasvirta, T., 1976. A Note On Bias In The Almon Distributed Lag Estimator. *Econometrica*, 44: 1317-1322.
- Theil, H., 1971. *Principles Of Econometrics*. John Wiley And Sons, New York, 784p.
- Theil, H., Goldberger, A. S., 1961. On Pure And Mixed Statistical Estimation In Economics. *International Economic Review*, 2:65-78.
- Theobald, C. M., 1974. Generalizations Of Mean Square Error Applied To Ridge Regression. *Journal Of The Royal Statistical Society Series B*, 36(1):103-106.
- Tracy, D. S., Srivastava, A. K., 1994. Comparison Of Operational Variants Of Best Homogeneous And Heterogeneous Estimators In Linear Regression. *Communications In Statistics - Theory And Methods*, 23:2313-2322.
- Trenkler, G., 1984. On The Performance Of Biased Estimators In The Linear Regression Model With Correlated Or Heteroscedastic Errors. *Journal Of Econometrics*, 25: 179-190.
- Ullah, A., Raj, B., 1979. A Distributed Lag Estimator Derived From Shiller's Smoothness Priors. *Economics Letters*, 2:219-223.

- Vinod H. D., Ullah, A., 1981. Recent Advances In Regression Methods. Marcel Dekker, New York, 361p.
- Yeo, S. J., Trivedi, P. K., 1989. On Using Ridge Type Estimators For A Distributed Lag Model. Oxford Bulletin Of Economics And Statistics, 51(1):85-90.
- Zellner, A., 1994. Bayesian And Non-Bayesian Estimation Using Balanced Loss Functions. Statistical Theory And Related Topics, Springer-Verlag, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Adana’da doğdu. İlkokul, ortaokul ve liseyi Adana’da bitirdi. 2007 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü’nde lisans eğitime başladı. 2008 yılında çiftanadal programı ile Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü’nde lisans eğitimi almaya başladı. 2011 yılında Matematik ve İstatistik bölümlerinden Matematik Bölümü bölüm birincisi ve Fen-Edebiyat Fakültesi fakülte ikincisi dereceleriyle mezun oldu. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilimdalı’nda yüksek lisans eğitime başladı. 2012 yılında Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü’nde araştırma görevlisi olarak çalışma hayatına başladı. 2013 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl Alper ÖZBAY ile evlendi. 2013 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilimdalı’nda doktora eğitime başladı. 2016 yılında kızı Defne ÖZBAY dünyaya geldi. Halen Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü’nde araştırma görevlisi olarak görevine devam etmektedir.