

155947

**LİNEER SİSTEMLERİN KARARLILIĞI VE KARARLILIK
KRİTERLERİ ÜZERİNE**

Özgür ŞEN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MATEMATİK)**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

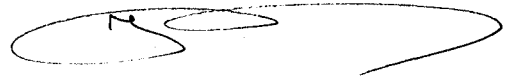
Haziran 2004

ANKARA

Özgür ŞEN tarafından hazırlanan LİNEER SİSTEMLERİN KARARLILIĞI VE KARARLILIK KRİTERLERİ ÜZERİNE adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR

Tez Yöneticisi



Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

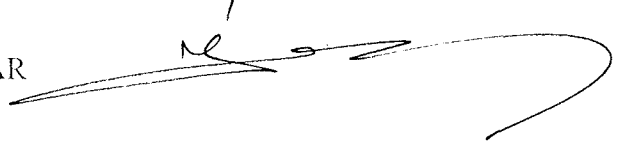
Başkan : Prof. Dr. Muhsin MERT



Üye : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR



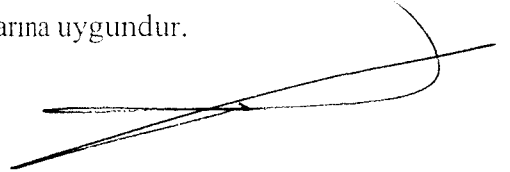
Üye : Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR



Üye :

Üye :

Bu tez, Gazi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER.....	3
2.1. Sistemler Hakkında Genel Bilgiler.....	3
2.2. Lineer Sistemler.....	7
2.3. Sabit Katsayılı Homogen Olmayan Lineer Sistemler.....	15
2.3.1. Parametrelerin değişimi yöntemi.....	16
2.3.2. Deneme ve yanılma yöntemi.....	18
2.4. Bir Diferensiyel Denklem Sisteminin, Daha Yüksek Basamaktan Bir Tek Denkleme İndirgenmesi.....	19
2.5. İntegre Edilebilir Kombinasyonların Bulunması.....	26
2.6. Otonom Sistemler, Faz Düzlemi ve İlişkin Durumlar.....	29
2.7. Faz Düzleminde Bazı İkinci Mertebe Diferensiyel Denklemler.....	37
2.7.1. Sarkaç denklemi için faz diyagramı	38
2.7.2. Faz düzleminde özerk denklemler.....	42
2.7.3. Bazı korunumlu sistemler.....	48
3. KARARLILIĞA GİRİŞ.....	51
3.1. Kritik Nokta Türleri ve Kararlılık.....	51

3.2. Lineer Sistemler İçin Kritik Noktalar ve Kararlılık.....	58
3.3. Liapunov Doğrudan Yöntemi İle Kararlılık.....	72
3.4. Lineer Olmayan Sistemlerin Basit Kritik Noktaları.....	78
4. KARARLILIKLA İLİŞKİLİ TANIMLAR.....	85
5. ROUTH ‘S VE HURWITZ KARARLILIK KRİTERLERİ.....	92
5.1. Routh Kararlılık Kriteri.....	93
5.2. Hurwitz Kararlılık Kriteri.....	99
6. LIAPUNOV ‘UN BİRİNCİ VE İKİNCİ METOTLARI.....	104
6.1. Liapunov ‘un Birinci Metodu.....	104
6.2. Liapunov ‘un İkinci Metodu.....	107
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	121
KAYNAKLAR.....	123
ÖZGEÇMİŞ.....	124

**LİNEER SİSTEMLERİN KARARLILIĞI VE KARARLILIK
KRİTERLERİ ÜZERİNE
(Yüksek Lisans Tezi)**

Özgür ŞEN

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2004**

ÖZET

Bu tez çalışmasında lineer diferensiyel denklem sistemlerinin kararlılığı araştırılmış ve kararlılık kriterlerinden olan Routh, Hurwitz ve Liapunov kararlılık kriterleri incelenerek bu kriterler altında bazı önemli sonuçlara varılmıştır.

Bilim Kodu : 403.06.01
Anahtar Kelimeler: Kararlılık ve kriterleri
Sayfa Adedi : 124
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR

**ON THE STABILITY OF LINEAR SYSTEMS AND
CRITERIA OF STABILITY**

(M.Sc. Thesis)

Özgür ŞEN

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
JUNE 2004**

ABSTRACT

In this thesis , we examined the stability systems of linear differential equations and some important results are obtained under the stability criteria of Routh, Hurwitz, Liapunov.

**Science Code : 403.06.01
Key Words : Stability and criterions
Page Number : 124
Adviser : Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR**

TEŞEKKÜRLER

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla bana yol gösteren, yönlendiren önerilerde bulunarak değerli zamanını benden esirgemeyen sayın Hocam Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR'a, ayrıca seminerler sırasında beni dinleyerek uyarı ve yardımlarını gördüğüm sayın Hocam Prof. Dr. Ömer AKIN'a ve desteğini benden esirgemeyen aileme teşekkürü borç bilirim.



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1 φ_{ij} , m_i ile m_j arasındaki uzaklık.....	6
Şekil 2.2. İki boyutlu bir akışkan hareketi	36
Şekil 2.3. Basit sarkaç.....	38
Şekil 2.4. Basit sarkaç için faz diyagramı.....	40
Şekil 2.5. Sarkaç için kararsız denge noktası.....	42
Şekil 2.6. Bir faz yolu	46
Şekil 2.7. Basit harmonik titreşken için merkez nokta.....	47
Şekil 3.1. Düğüm noktası.....	54
Şekil 3.2. Semer noktası.....	54
Şekil 3.3. Merkez nokta.....	55
Şekil 3.4. Sarmal nokta.....	56
Şekil 3.5. (0,0) kararlı kritik noktası.....	57
Şekil 3.6. m_1 ve m_2 kökleri reel, farklı ve aynı işaretli ise (0,0) kritik noktası için düğüm noktası.....	61
Şekil 3.7. m_1 ve m kökleri reel, farklı ve zıt işaretli ise (0,0) kritik noktası için semer noktası.....	63
Şekil 3.8. m_1 ve m kökleri eşlenik karmaşık ancak sırf sanal değilse (0,0) kritik noktası için sarmal nokta.....	65
Şekil 3.9. $m < 0$, kritik nokta düğüm noktası	67
Şekil 3.10 (0,0) noktası bir düğüm noktası.....	68
Şekil 3.11. m_1 ve m kökleri sırf sanal ise (0,0) kritik noktası için merkez nokta ...	69
Şekil 3.12. (0,0) kritik noktasının yapısı ve kararlılık özellikleri.....	71

Şekil	Sayfa
Şekil 3.13. Pozitif tanımlı $z = V(x, y)$ fonksiyonu.....	73
Şekil 3.14 (0,0) kritik noktası kararlı.....	75
Şekil 3.15 Lineer olmayan bir sistem için semer noktası.....	80
Şekil 4.1. x_e kararlı denge konumu, x_0 temsili yörünge başlangıcı.....	87
Şekil 4.2. x_e asimtotik kararlı denge konumu.....	89
Şekil 4.3. Zamanla geçen temsili yörünge planı.....	89
Şekil 4.4. x_e kararsız denge konumu.....	91
Şekil 6.1. $\alpha(\ x\)$, $\beta(\ x\)$ ve $V(x, t)$ eğrileri	109

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
ϕ	fî
δ	delta
μ	mü
ε	epsilon
λ	lamda
η	vü
α	alfa
β	beta
S	Kararlılık
$V(x, t)$	Liapunov fonksiyonu
x_e	Denge konumu
x_0	Temsili yörünge başlangıcı
$\ x\ $	x 'in öklid normu
Ω	omega

1.GİRİŞ

Lineer sistemler ve lineer olmayan sistemlerle ilgili çalışmalar 19. yüzyılda A.V. Balakrishanan, L.M. Sirverman, J.J. Distefano, R.C. Erdmann, N. Levan, Kalman R.E., Y.C. Ho, K.S. Narendra, Zadeh Lotfi, S. Butman, R. Sivan, John Robert Ward, Robert D. Strum gibi ve daha bir çok matematikçi tarafından incelenerek ayrıntılı bir biçimde ele alınmıştır. Bu çalışmalarda dinamik sistemlerin dizaynı ve analizi için lineer uzay yaklaşımının pratik ve teorik kullanımları ve bunun sonucunda bazı kararlılık kriterleri ve tekniklerinin kullanılması ile mühendislik, tıp, ekonomi, ticaret bilimlerinin daha iyi algılanması sağlanmıştır. Kararlılık kriterleri tekniklerinin kullanılması ile değişen zaman parametrelili lineer sistemle, sabit zamanlı lineer sistemler gibi özde aynı yöntemle analiz edilebilir olduğu görülmüştür. Fiziksel sistemlerin zaman davranışları matematiksel olarak ifade edilmesinde ve bunun sonucunda modern kontrol tekniklerinin oluşturulması gerekliliği ortaya çıktığı görülmektedir. Burada matris analiz bilgisinin lineer sistemleri ve diferensiyel denklem sistemlerinin kapsam olarak çok iyi bilinmesi önemlidir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde sistemler hakkında genel bilgiler, lineer sistemler, homogen ve homogen olmayan sistemler ve bu sistemlerin çözüm yöntemleri için gerekli konularda temel tanım, kavram ve teoremler verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde kararlılığa giriş ve bu konu ile ilgili kritik nokta türleri, lineer sistemler için kritik noktalar ve kararlılık durumları tanım ve teoremler olarak ele alınmıştır. Ayrıca daha sonra önemli bir yöntem olan Liapunov'un doğrudan yöntemi ile kararlılık incelenecektir.

Çalışmanın dördüncü bölümün de kararlılıkla ilgili bazı özel tanımlar ve kavramlar verilerek düzgün kararlılık, asimtotik kararlılık gibi kavramlar ifade edilmiştir.

Çalışmanın beşinci bölümünde zamandan bağımsız lineer sistemlerin kararlılığı incelenmiş Routh ve Hurwitz kararlılık kriterleri üzerinde durularak bu kriterler araştırma ve incelemeye alınmış ve örnekler sunulmuştur.

Çalışmanın altıncı bölümünde önemli bir kararlılık kriteri olarak yer alan ve araştırılmaya değer Liapunov kararlılığının birinci ve ikinci yöntemleri ele alınarak detaylı bir şekilde incelenerek üzerinde durulmuştur.

Çalışmanın yedinci bölümünde bu inceleme ve araştırma sonucunda karşılaşılan sonuç ve bulgulara varılarak bu konularda öneriler verilmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1. Sistemler Hakkında Genel Bilgiler

Analizin temel kavramlarından biri, birinci mertebeden n diferensiyel denklem sistemidir. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ bir bağımsız x değişkeninin bilinmeyen fonksiyonları ise, bu durumda ilgi duyulan en genel sistem, $y_1', y_2', \dots, y_n'$ türevlerini x ve $y_1, y_2, \dots, y_n$ nin fonksiyonları şeklinde açık olarak veren

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad [2.1]$$

sistemidir (1).

Diferensiyel denklem sistemleri birçok bilimsel problemde tamamen doğal olarak ortaya çıkarlar.

Sistemleri incelemede önemli bir matematiksel neden n yinci mertebeden

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad [2.2]$$

şeklinde tek denklemin, daima “Eş.2.1” in bir özel durumu olarak dikkate alınmış olmasıdır. “Eş.2.2” denklemini normal formdan n yinci mertebeden denklemdir.

$$y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)} \quad [2.3]$$

konursa, “Eş.2.2” denklemini,

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_3 \\
&\dots \\
y_n' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)
\end{aligned}
\tag{2.4}$$

şeklinde “Eş.2.1”in bir özel durumu olan eşdeğer sisteme indirgenir. “Eş.2.2” ve “Eş.2.4”ün eşdeğer olma ifadesi aşağıdaki anlamda eğer $y(x)$, “Eş.2.2” denkleminin bir çözümü ise, bu durumda “Eş.2.3” ile tanımlı $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ fonksiyonları “Eş.2.4” sistemini sağlar ve tersine olarak $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ fonksiyonları “Eş.2.4” sistemini sağlar ise, bu durum da $y(x) = y_1(x)$, “Eş.2.2”in bir çözümüdür.

n yinci mertebeden bir denklemi, n tane birinci mertebeden bir sisteme indirgemenin çeşitli avantajları vardır. Bu durumu, “Eş.2.1” sistemi ve “Eş.2.2” denklemi için varlık ve teklik teoremleri arasındaki bağıntıyı göz önüne almakla açıklayalım.

Belli bir $x = x_0$ noktası seçilir ve bilinmeyen fonksiyonların

$$y_1(x_0) = a_1, y_2(x_0) = a_2, \dots, y_n(x_0) = a_n \tag{2.5}$$

değerleri, $f_1, f_2, \dots, f_n$ fonksiyonları tanımlı olacak şekilde keyfi olarak ayırt edilir ise, bu durumda “Eş.2.1” sistemi $y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x)$ türevlerinin değerlerini verir. Bu durum ile diferensiyel denklemlerde varlık ve teklik teoremine ilişkin irdeleme arasındaki benzerlik, bizleri Picard teoreminin aşağıdaki benzerine götürür.

Teorem2.1. $f_1, f_2, \dots, f_n$ fonksiyonları ve $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial y_n}, \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial y_n}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial y_n}$

kısmi türevleri $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ uzayının bir R bölgesinde sürekli ve $(x_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ R ’nin bir iç noktası ise, bu durumda “Eş.2.1” sistemi, “Eş.2.5” başlangıç koşullarını sağlayan bir tek $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ çözümüne sahiptir.

Bu teoremin ispatı genel anlamda her kaynakta bulunmak üzere, yukarıdaki indirgeme nedeniyle Teorem 2.1, “Eş.2.2” denkleminde karşılık gelen aşağıdaki teoremi bir özel durum olarak kapsar.

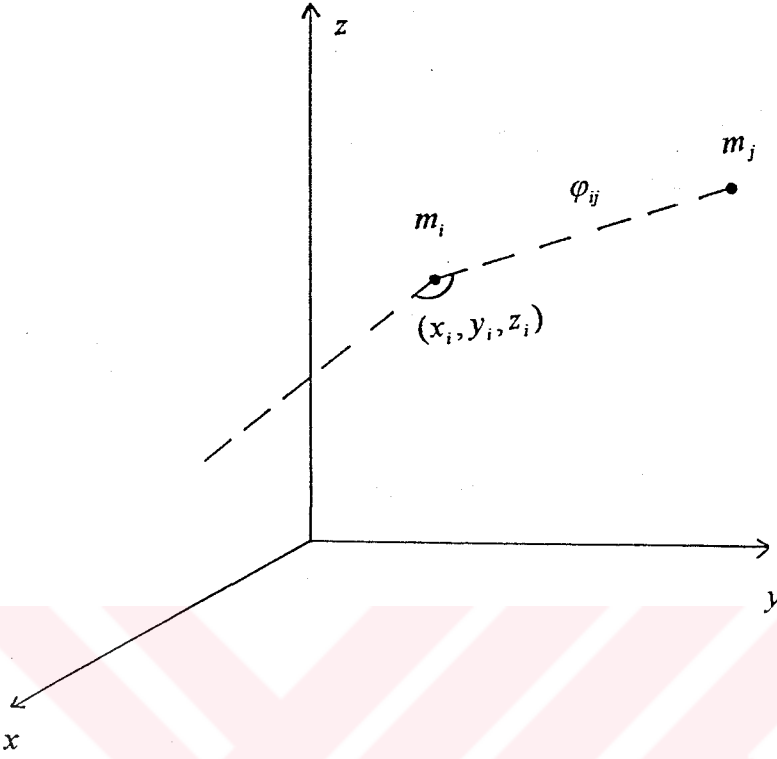
Teorem 2.2. f ve $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ kısmi türevleri $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ uzayının bir R bölgesinde sürekli ve $(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$, R ’nin bir iç noktası ise, bu durumda “Eş.2.2” denkleminin $y(x_0) = a_1, y'(x_0) = a_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_n$ başlangıç koşullarını sağlayan bir tek $y(x)$ çözümüne sahiptir.

Yüksek basamaktan denklemleri. birinci mertebeden denklemlere indirgemenin yararının bir diğer açıklaması olarak. klasik mekanik’in meşhur n cisim problemini göz önüne alalım.

Kütleleri m_i olan n parçaçık (x_i, y_i, z_i) noktalarında yerleşmiş olsun ve onların birbirlerini Newton çekim yasasına göre çektiklerini varsayalım. φ_{ij} , m_i ile m_j arasında uzaklık ve θ da pozitif x ekseninden onları birleştiren doğru parçası arasındaki açı ise (Şekil 2.1), bu durumda m_i üzerinde m_j tarafından kullanılan kuvvetin x bileşen G çekim sabiti olmak üzere

$$\frac{Gm_i m_j}{\varphi_{ij}^2} \cos \theta = \frac{Gm_i m_j (x_j - x_i)}{\varphi_{ij}^3}$$

dır.



Şekil 2.1. φ_{ij} , m_i ile m_j arasındaki uzaklık

Her $j \neq i$ için bu bileşenlerin toplamı $m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}$ ye eşit olduğundan,

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j (x_j - x_i)}{\varphi_{ij}^3}$$

şeklinde n tane ikinci mertebeden diferensiyel denklem ve benzer olarak ,

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j (y_j - y_i)}{\varphi_{ij}^3}$$

$$\frac{d^2 z_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j (z_j - z_i)}{\varphi_{ij}^3}$$

diferensiyel denklemleri elde edilir.

$v_{x_i} = \frac{dx_i}{dt}$, $v_{y_i} = \frac{dy_i}{dt}$ ve $v_{z_i} = \frac{dz_i}{dt}$ konur ve yukarıdaki indirgeme kullanılırsa, bu durumda $x_1, v_{x_1}, \dots, x_n, v_{x_n}, y_1, v_{y_1}, \dots, y_n, v_{y_n}, z_1, v_{z_1}, \dots, z_n, v_{z_n}$ bilinmeyen fonksiyonlarına göre “Eş.2.1” şeklinde $6n$ denklem sistemi elde edilir.

$$\varphi_{ij}^3 = \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \right]^{3/2}$$

eşitliği kullanılırsa, bu durumda Teorem 2.1, aşağıdaki sonucu verir: Parçacıkların hareketlerinin başlangıç durumları ve başlangıç hızları yani belli bir $t = t_0$ anında bilinmeyen değerleri verilir ve φ_{ij} ler sıfıra gitmemesi anlamında parçacıklar çarpışmaz ise, bu durumda onların daha sonraki durum ve hızları tek olarak saplanabilir. Bu sonuç bizce benimsenen mekanik determinizim (gerekircilik) felsefesinin temelini oluşturur, zira evren, geleceği herhangi bir anda onun durumu ile karşı konulmaz şekilde belli olan dev bir makineden başka bir şey değildir. Keza Sir James Jeans, N. Eddington sayısı olmak üzere “GN diferensiyel denklem sistemini kendi kendine çözme” olarak kainatı tanımlamada önderlik etti. Sir Arthur Eddington evrende madde parçacıklarının tüm sayısı $N = \frac{3}{2} \times 136 \times 2^{256}$ olduğunu (gerçekten, bu iddianın gerçekçiliği ne kadar doğrudur?) iddia etti.

2.2. Linear Sistemler

Bu kesimde

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(t, x, y) \end{cases} \quad [2.6]$$

şeklinde iki bilinmeyen fonksiyon kapsayan birinci mertebeden iki denklem sistemi üzerinde durulacaktır.

Parantez gösterimi, denklemlerin birbirlerine bağlı olduğunu vurgulamak için kullanılmaktadır ve bağımsız değişken için t ve bağımlı değişkenler için x ve y harfleri kullanılacaktır.

Bu ve daha sonraki kesimde ayrıca

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{cases} \quad [2.7]$$

şeklindeki lineer sistemler ele alınacaktır.

Şimdiki irdeleme ve aşağıda ifade edilen teoremlerde, t ekseninin belli bir $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde $a_i(t), b_i(t)$ ve $f_i(t)$ $i=1,2$, fonksiyonlarının sürekli oldukları varsayılacaktır.

$f_1(t)$ ve $f_2(t)$ özdeş olarak sıfır ise, bu durumda “Eş.2.7” sistemi homogen, aksi halde homogen olmayan sistem adını alır.

$[a,b]$ üzerinde “Eş.2.7”nin bir çözümü, kuşkusuz tamamen bu aralık üzerinde “Eş.2.6”nin her iki denklemini sağlayan $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonlar çiftidir. Böyle bir çözümü,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

şeklinde yazalım. Şimdi “Eş.2.7” genel lineer sistem teorisi üzerinde kısaca duralım. Bu teorenin, ikinci mertebeden lineer denklem teorisine son derece benzer olduğu görülecektir. Önce varlık ve teklik teoremini ifade edelim.

Teorem2.3 t_0 , $[a,b]$ aralığının herhangi bir noktası ve x_0, y_0 herhangi iki sayı ise, bu durumda “Eş.2.7” sistemi, $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ olacak şekilde $[a,b]$ üzerinde geçerli

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

şeklinde bir tek çözüme sahiptir.

Bir sonraki adım, “Eş.2.7” den $f(t)$ ve $f_2(t)$ terimlerini kaldırmakla elde edilen

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y \\ \frac{dy}{dt} = a(t)x + b(t)y \end{cases} \quad [2.8]$$

şeklindeki homogen sistemin çözümlerinin yapısını incelemek olacaktır.

“Eş.2.8” sisteminin $x(t)$ ve $y(t)$ nin her ikisinin özdeş olarak sıfır olduğu aşıkâr çözüm tarafından sağlandığı açıktır. Daha yararlı çözümleri oluşturmada temel araç aşağıdaki teoremdir.

Teorem2.4. “Eş.2.8” homogen sistemi $[a, b]$ üzerinde

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases} \quad [2.9]$$

şeklinde iki çözüme sahip ise, bu durumda c_1 ve c_2 sabitleri için

$$\begin{aligned} x &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y &= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{aligned} \quad [2.10]$$

de $[a, b]$ üzerinde bir çözümdür.

İspat: Bu teoremin ispatı doğrudan bir sağlama işidir. Gerçekten “Eş.2.9” çözümleri “Eş.2.8” sistemini sağlıyor ise,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1 x_1 + b_1 y_1 & \text{ve} & & \frac{dx_2}{dt} &= a_1 x_2 + b_1 y_2 \\ \frac{dy_1}{dt} &= a_2 x_1 + b_2 y_1 & & & \frac{dy_2}{dt} &= a_2 x_2 + b_2 y_2 \end{aligned}$$

dır. Diğer yandan “Eş.2.10”, “Eş.2.8” de yerlerine konulursa

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c_1 \frac{dx_1}{dt} + c_2 \frac{dx_2}{dt} = c_1 (a_1 x_1 + b_1 y_1) + c_2 (a_1 x_2 + b_1 y_2) \\ \frac{dy}{dt} &= c_1 \frac{dy_1}{dt} + c_2 \frac{dy_2}{dt} = c_1 (a_2 x_1 + b_2 y_1) + c_2 (a_2 x_2 + b_2 y_2) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 (c_1 x_1 + c_2 x_2) + b_1 (c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 (c_1 x_1 + c_2 x_2) + b_2 (c_1 y_1 + c_2 y_2) \end{aligned}$$

nedeniyle “Eş.2.10”, “Eş.2.8” sisteminin bir çözümüdür.

“Eş.2.10” çözümü, “Eş.2.9” çözüm çiftinden ilkinin c_1 , ikincisini c_2 ile çarpıp toplamakla elde edilir. Bu yüzden “Eş.2.10” çözümü, “Eş.2.9” çözümlerinin bir lineer kombinasyonudur. Bu teknik terim ile Teorem 2.4 yeniden aşağıdaki şekilde

ifade edilebilir. “Eş.2.8” homogen sisteminin iki çözümünün herhangi bir lineer kombinasyonu da bir çözümdür.

Açıklığa kavuşturmak zorunda olduğumuz bir sonraki soru, acaba “Eş.2.10”, $[a,b]$ üzerinde “Eş.2.8”in bütün çözümlerini kapsıyor mu sorusudur, yani, acaba “Eş.2.10”, $[a,b]$ üzerinde “Eş.2.8”in genel çözümüdür. Teorem 2.3 nedeniyle c ve c_2 sabitleri, $[a,b]$ de keyfî bir t_0 noktasında keyfî $x(t_0) = x_0$ ve $y(t_0) = y_0$ koşulları sağlanacak şekilde seçilebilirse, yada eşdeğer olarak her x_0 ve y_0 sayılar çifti ve $[a,b]$ de her bir t_0 için

$$\begin{aligned} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) &= x_0 \\ c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

linear cebirsel denklem sistemi c ve c_2 bilinmeyenlerine göre çözülebilirse, “Eş.2.10” genel çözüm olacaktır. Determinant teorisi nedeniyle,

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}$$

katsayılar determinantı, $[a, b]$ üzerinde sıfır olmadığı taktirde sistem c ve c_2 bilinmeyenlerine göre çözülebilir. Bu determinant, “Eş.2.9” çözümler çiftinin Wronskiye’ni adını alır ve yukarıdaki uyarılar nedeniyle aşağıdaki teoremin ispatı yapılmış olur.

Teorem 2.5. “Eş.2.8” homogen sisteminin “Eş.2.9” çözümler çifti, $[a,b]$ üzerinde sıfır olmayan bir $W(t)$ Wronskiye’ne sahip ise, bu durumu “Eş.2.10”, bu aralık üzerinde “Eş.2.8”in genel çözümüdür.

$W(t)$ Wronskiye’ninin sıfır olması yada olmamasının, t ’nin seçimine bağlı olmadığına ilişkin teorem aşağıdadır.

Teorem 2.6. “Eş.2.8” homogen sisteminin “Eş.2.9” çözümler çiftinin Wronskiyeni $W(t)$ ise, bu durumda $W(t)$, $[a,b]$ üzerinde ya özdeş olarak sıfır yada özdeş olarak sıfırdan farklıdır.

İspat: “Eş.2.9” çözüm çiftinin $W(t)$ Wronskiyeninin türevi alınır ve “Eş.2.9”un “Eş.2.8” sistemini sağladığı düşünülerek $W(t)$ ye ilişkin birinci mertebeden

$$\frac{dW}{dt} = [a_1(t) + b_2(t)]W \quad [2.11]$$

denkleme varılır. Buradan bir c sabiti için

$$W(t) = ce^{\int [a_1(t) + b_2(t)] dt} \quad [2.12]$$

elde edilir. Buradan teoremin sonucu, “Eş.2.12” deki üstel çarpanın $[a,b]$ üzerinde kesinlikle sıfır olmaması nedeniyle aşıkardır.

Teorem 2.5 , “Eş.2.10”un “Eş.2.8” homogen sisteminin genel çözümü olduğunu gerçeklemenin uygun araçlarını temin eder. Yani, bu durumda “Eş.2.9” çözüm çiftinin $W(t)$ Wronskiyeni sıfır değildir. Şimdi doğrudan ve daha uygun olan bir test geliştirelim. “Eş.2.9” çözümler çiftinden biri, $[a,b]$ de her t ve herhangi bir k için

$$\begin{array}{ll} x_1(t) = kx_2(t) & \text{yada} \quad x_2(t) = kx_1(t) \\ y_1(t) = ky_2(t) & y_2(t) = ky_1(t) \end{array}$$

anlamında diğerinin bir skaler katı ise, “Eş.2.9” çözümler çifti $[a,b]$ üzerinde lineer bağımlı ve biri, diğerinin bir skaler katı değilse lineer bağımsızdır denir. Lineer bağımlılığın, $[a,b]$ de her t için

$$\begin{array}{l} c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = 0 \\ c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0 \end{array} \quad [2.13]$$

olacak şekilde en az biri sıfır olmayan c_1 ve c_2 sabitlerinin var olması koşuluna eş değer olduğu açıktır. Şimdi aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.7. “Eş.2.8” homogen sisteminin “Eş.2.9” çözümler çifti $[a,b]$ üzerinde lineer bağımsız ise, bu durumda “Eş.2.10”, bu aralık üzerinde “Eş.2.8”in genel çözümüdür.

İspat: Teorem 2.5 ve “Eş.2.9”a göre, “Eş.2.9” çözümlerinin lineer bağımlı olmasının, onların $W(t)$ Wronskiyeninin özdeş olarak sıfır olması ile eş değer olduğunu göstermek yetecektir. Onların, diyelim

$$\begin{aligned} x_1(t) &= kx_2(t) \\ y_1(t) &= ky_2(t) \end{aligned} \quad [2.14]$$

olacak şekilde lineer bağımlı olduğunu varsaymakla işe başlayalım. Bu durumda $[a,b]$ de her t için

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kx_2(t) & x_2(t) \\ ky_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = kx_2(t)y_2(t) - kx_2(t)y_2(t) = 0$$

dır. k sabiti, “Eş.2.14” eşitliklerinin diğer yanında ise, iddia aynı şekilde geçerlidir. Şimdi $W(t)$ ’nin özdeş olarak sıfır olduğunu varsayarak, “Eş.2.9” çözümlerinin “Eş.2.13” eşitlikleri anlamında lineer bağımlı olduklarını gösterelim. t_0 , $[a,b]$ de belli bir nokta olsun. $W(t_0) = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) &= 0 \\ c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

lineer cebirsel denklem sistemi, her ikisi sıfır olmayan bir c_1, c_2 çözümüne sahiptir. Böylece

$$\begin{aligned} x &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y &= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{aligned} \quad [2.15]$$

ile verilen “Eş.2.8” sisteminin çözümü, t da aşikar çözümdür. Buradan Teorem2.3’ün teklik kısmı nedeniyle “Eş.2.15”, $[a,b]$ üzerinde aşikar çözüme eşit olmak zorundadır. Böylece “Eş.2.13” geçerlidir ve ispat tamamlanmış olur.

Bu testin değeri, özel problemlerde “Eş.2.8”in iki çözümünün lineer bağımlı yada bağımsız olup olmadığına karar vermede kolaylıkla kullanılabilir olmasındandır.

Şimdi homogen olmayan “Eş.2.7” sistemine dönerek bu sisteme ilişkin bir teorem verelim.

Teorem2.8. “Eş.2.8” homogen sisteminin “Eş.2.9” çözümler çifti $[a,b]$ üzerinde lineer bağımsız ve

$$\begin{cases} x = x_p(t) \\ y = y_p(t) \end{cases}$$

bu aralık üzerinde “Eş.2.7”nin herhangi bir özel çözümü ise, bu durumda

$$\begin{cases} x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_p(t) \\ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t) \end{cases} \quad [2.16]$$

$[a,b]$ üzerinde “Eş.2.7”nin genel çözümüdür.

İspat:
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

“Eş.2.7”nin keyfi bir çözümü ise, bu durumda

$$\begin{cases} x = x(t) - x_p(t) \\ y = y(t) - y_p(t) \end{cases}$$

de “Eş.2.8”in bir çözümü olduğunu göstermek yetecektir. $[a,b]$ de her bir t_0 ve her x_0, y_0 sayılar çifti için

$$\begin{aligned} x(t_0) &= c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) + x_p(t_0) = x_0 \\ y(t_0) &= c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + y_p(t_0) = y_0 \end{aligned}$$

sistemi, ikinci yan elemanları ne olursa olsun, daima bir c_1, c_2 çözümler cümlesine sahiptir. Gerçekten katsayılar determinantı, $t = t_0$ noktasında lineer bağımsız (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) çözümler çiftinin Wronskiyenidir ve Teorem 2.7 nedeniyle bu Wronskiyen sıfırdan farklıdır. Buradan sistem, ikinci yan elemanları ne olursa olsun c_1, c_2 çözümüne sahiptir. $[a,b]$ de her bir t_0 için

$$\begin{aligned} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) &= x(t_0) - x_p(t_0) \\ c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= y(t_0) - y_p(t_0) \end{aligned}$$

olması nedeniyle $x = x(t) - x_p(t), y = y(t) - y_p(t)$ çifti de “Eş.2.8” sisteminin çözümüdür (2).

2.3. Sabit Katsayılı Homogen Olmayan Linear Sistemler

Homogen olmayan linear sistemlerin genel çözümünün verilen sisteme ilişkin homogen sistemin genel çözümü ile verilen sistemin bir özel çözümünün toplamıdır. Şimdi homogen olmayan linear sistemlerin bir özel çözümünün nasıl bulunabileceğine ilişkin iki yöntem üzerinde duralım.

2.3.1. Parametrelerin değişimi yöntemi

Bu yöntem, homogen olmayan lineer sisteme ilişkin homogen sistemin genel çözümü bilinmek kaydıyla sadece sabit katsayılı homogen olmayan sistemlere değil aynı zamanda değişken katsayılı homogen olmayan lineer sistemlerin özel çözümünün bulunmasında kullanılan bir yöntemdir.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{cases} \quad [2.17]$$

homogen olmayan lineer sistemi ile bu sisteme ilişkin

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y \\ \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y \end{cases} \quad [2.18]$$

homogen sistemini göz önüne alalım.

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases} \quad [2.19]$$

çiftleri, “Eş.2.18” homogen sisteminin bağımsız çözümleri ise, bu durumda homogen sistemin genel çözümü

$$\begin{cases} x = x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y = y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{cases} \quad [2.20]$$

şeklindedir. Buna göre $c_1(t)$ ve $c_2(t)$ fonksiyonları

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1 + c_2'(t)x_2 = f_1 \\ c_1'(t)y_1 + c_2'(t)y_2 = f_2 \end{cases} \quad [2.21]$$

sistemini sağlamak üzere, “Eş.2.17” homogen olmayan sisteminin bir özel çözümü

$$\begin{cases} x = x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) \\ y = y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) \end{cases} \quad [2.22]$$

şeklindedir. Gerçekten “Eş.2.22”, “Eş.2.17” homogen olmayan sisteminde yerlerine konulursa

$$\begin{aligned} c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_1x_1' + c_2x_2' &= a_1(c_1x_1 + c_2x_2) + b_1(c_1y_1 + c_2y_2) + f_1 \\ c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_1y_1' + c_2y_2' &= a_2(c_1x_1 + c_2x_2) + b_2(c_1y_1 + c_2y_2) + f_2 \end{aligned}$$

ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_1(x_1' - a_1x_1 - b_1y_1) + c_2(x_2' - a_1x_2 - b_1y_2) &= f_1 \\ c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_1(y_1' - a_2x_1 - b_2y_1) + c_2(y_2' - a_2x_2 - b_2y_2) &= f_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Parantez içindeki toplamalar, “Eş.2.19” çiftinin homogen sistemin çözümleri olması nedeniyle sıfırdır. Böylece c_1' ve c_2' ye ilişkin

$$\begin{cases} c_1'x_1 + c_2'x_2 = f_1 \\ c_1'y_1 + c_2'y_2 = f_2 \end{cases} \quad [2.23]$$

sistemine varılır. “Eş.2.19” çözümler çifti lineer bağımsız olduğundan “Eş.2.23” sisteminin katsayılar determinantı sıfırdan farklıdır. Buna göre c_1' ve c_2' ye göre lineer olan “Eş.2.23” sisteminden c_1' ve c_2' tek olarak bulunabilir. c_1' ve c_2' den c_1 ve c_2

c_2 bulunarak “Eş.2.22” de yerlerine konulması ile (Y) homogen olmayan lineer sistemin bir özel çözümü elde edilir (3).

2.3.2. Deneme ve yanılma yöntemi

Bu yöntemin uygulanabilmesi için lineer sistemin hem sabit katsayılı hem de ikinci yanda bulunan $f_i(t)$ fonksiyonlarının özel formda olması gerekir. Buna göre $f_i(t)$ fonksiyonları t 'nin polinomları, e^{at} şeklinde üstel fonksiyonlar, $\sin \beta t$ ve $\cos \beta t$ şeklinde trigonometrik fonksiyonlar yada bunların çarpımları şeklinde olabilir. Başka bir anlatım ile, verilen sisteme ilişkin homogen sistemin genel çözümü kısaca

$$\begin{cases} x = x_h(t) \\ y = y_h(t) \end{cases} \quad [2.24]$$

ile gösterilirse, bu yöntem ikinci yanda bulunan $f_i(t)$ fonksiyonlarının sadece $x_h(t)$ ve $y_h(t)$ de bulunabilecek fonksiyon türlerinin bir lineer kombinasyonu olması durumunda uygulanabilir. Bu türdeki fonksiyonların tümü, onların tekrarlanan türevlerinden sadece aynı türden terimleri elde etme özelliğine sahiptir. $\sec t$, $\ln t$, $\sqrt{t}$, vb gibi fonksiyonlar bu özelliğe sahip değildir. Dolayısıyla $f_i(t)$ fonksiyonları (kuvvet fonksiyonları), bu türdeki fonksiyonları kapsamaması halinde bu yöntem uygulanamaz.

Deneme ve yanılma yöntemini uygulamada başarılı olmanın yolu, $x_p(t)$ ve $y_p(t)$ için uygun bir varsayım yapılabilmektedir.

Aşağıdaki bir düzen içerisinde özetlenen yöntem dikkatle izlenirse bir zorluk söz konusu olmayacaktır.

- i.) Verilen homogen olmayan sisteme ilişkin homogen sistemin genel çözümü bulunur.
- ii.) $f_i(t)$ 'nin her bir terimi için

- (a.) kendisi ile onun türevi alınarak elde edilen bütün olurlu fonksiyonların listesi yapılır.
- (b.) basamak (ii.a) da ki herhangi bir terim , x_h ve y_h da var ise, bu durumda o terim sistemin çözümünden farklı olacak şekilde t 'nin en küçük dereceli polinomu ile çarpılır.
- iii.) x_p ve y_p , basamak (ii.) deki bütün terimlerin bir lineer kombinasyonu olarak alınır.
- iv.) x_p ve y_p için varsayılan formlar, homogen olmayan sistemde yerlerine konularak, katsayıların karşılaştırılması ile ortaya çıkan lineer cebirsel sistemden katsayılar bulunur (4).

2.4. Bir Diferensiyel Denklem Sisteminin, Daha Yüksek Basamaktan Bir Tek Denkleme İndirgenmesi

Bir diferensiyel denklem sistemini integre etmede temel yöntemlerden biri şudur: Bir tanesi dışında bilinmeyen fonksiyonların tümü, sisteme ilişkin denklemler ile bu denklemlerin türevini almakla elde edilen denklemler arasından yok edilerek bir tek bilinmeyen fonksiyonun bulunmasına ilişkin daha yüksek basamaktan bir tek diferensiyel denklem bulunur. Bu yüksek mertebeden denklemi integre etmekle, bilinmeyen fonksiyonlardan bir tanesi bulunur. Diğer bilinmeyen fonksiyonlar orijinal denklemlerle ile onların türevlerinin alınması ile elde edilen denklemlerden (mümkünse integral işlemi yapmaksızın) elde edilir.

Şimdi verilen denklem sisteminden bir tanesi dışında bilinmeyen fonksiyonların tümünü yok etmenin daha tam bir yöntemini verelim. Öncelikle

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad [2.25]$$

denklem sisteminin $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ çözümünün bir bileşeni olan bilinmeyen fonksiyonlardan birinin, diyelim $x_1(t)$ nin n yinci mertebeden belli bir denklemi sağladığı gösterilecektir. Burada f_i fonksiyonlarının tümünün her argümente göre $(n-1)$ inci basamağa kadar sürekli kısmi türevlere sahip oldukları varsayılmaktadır.

Herhangi bir $x_1(t), x_2(t), \dots, x(t)$ çözümü, “Eş.2.25” de yerlerine konulursa, denklemlerin tümü özdeşliklere indirgenir. Özellikle sistemin ilk denklemi

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

bir özdeşliğe indirgenmiş olacaktır. Bu özdeşliğin t ’ye göre türevi alınarak

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad [2.26]$$

yada

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} f_i \quad [2.27]$$

elde edilir. “Eş.2.27”in ikinci yanı $F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile gösterilirse

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad [2.28]$$

elde edilir. “Eş.2.28”in tekrar türevi alınarak

$$\frac{d^3 x_1}{dt^3} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad [2.29]$$

yada

$$\frac{d^3 x_1}{dt^3} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial x_i} f_i \quad [2.30]$$

ve ikinci yani $F_3(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile gösterilerek

$$\frac{d^3 x_1}{dt^3} = F_3(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad [2.31]$$

elde edilir. “Eş.2.31”in tekrar türevi alınarak ve işlem $n-2$ kez sürdürülerek

$$\frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad [2.32]$$

ve bir kez daha türev alınarak “Eş.2.25” yardımıyla

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

elde edilir. Böylece

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad [2.33]$$

özdeşlikleri ile birlikte

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad [2.34]$$

özdeşliği elde edilir. Değişkenlerin verilen değişim bölgesinde

$$\frac{D(f_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)} \neq 0$$

ile verilen determinantın sağlandığını varsayalım. Bu durumda “Eş.2.33” sisteminden $x_2, x_3, \dots, x_n$ bilinmeyenleri $t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt}$ cinsinden çözülebilir. “Eş.2.33” den bulunun $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyenleri “Eş.2.34” de yerlerine konulursa, “Eş.2.25” sisteminin $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ çözümünün bir bileşeni olan $x_1(t)$ bileşen fonksiyonu tarafından sağlanan

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \phi(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}) \quad [2.35]$$

şeklinde n yinci mertebeden bir denklem elde edilir.

Şimdi ispatlayacağı ki n yinci mertebeden “Eş.2.35” denkleminin herhangi bir $x_1(t)$ çözümü alınarak “Eş.2.33” sistemine konur ve bu sistemden $x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$ bulunursa, bu durumda

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \quad [2.36]$$

fonksiyonlar sistemi, “Eş.2.25” sistemini çözümü olacaktır. “Eş.2.36” fonksiyonlar sistemi “Eş.2.33” sisteminde yerlerine konulursa, sistemin tüm denklemleri bir özdeşliğe indirgenir. Özel olarak

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad [2.37]$$

özdeşliği elde edilir. Bu özdeşliğin t 'ye göre türevi alınarak

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad [2.38]$$

elde edilir.

“Eş.2.34” denklemleri ile “Eş.2.33” sisteminden yukarıda belirtilen yöntem ile elde edilen $x_1, x_2, \dots, x_n$ fonksiyonlarının “Eş.2.25” sistemini sağladıkları henüz gösterilmediğinden, bu özdeşlikte $\frac{dx_i}{dt}$ yi f_i fonksiyonları ile değiştirmek mümkün değildir. Dahası, bu iddia ispatın amacını oluşturmaktadır.

“Eş.2.27” özdeşliği “Eş.2.38” den çıkarılırsa $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \left(\frac{dx_i}{dt} - f_i \right) = 0$ yada “Eş.2.37”

nedeniyle $\sum_{i=2}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \left(\frac{dx_i}{dt} - f_i \right) = 0$ elde edilir. Benzer biçimde “Eş.2.27”in türevi alınır ve “Eş.2.30” çıkarılırsa ve daha sonra “Eş.2.29”in türevi alınır ve benzer şekilde devam edilirse,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \left(\frac{dx_i}{dt} - f_i \right) &= 0 \\ \dots \\ \sum_{i=2}^n \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_i} \left(\frac{dx_i}{dt} - f_i \right) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $n-1$ tane $\left(\frac{dx_i}{dt} - f_i \right)$ bilinmeyenlerine göre $n-1$ denklemden oluşan

$$\begin{cases} \sum_{i=2}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \left(\frac{dx_i}{dt} - f_i \right) = 0 \\ \sum_{i=2}^n \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \left(\frac{dx_i}{dt} - f_i \right) = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=2}^n \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_i} \left(\frac{dx_i}{dt} - f_i \right) = 0 \end{cases} \quad [2.39]$$

homogen lineer denklem sisteminin determinanı,

$$\frac{D(f_1, F_2, \dots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_n)} \neq 0 \quad [2.40]$$

şeklinde sıfırdan farklı fonksiyonel determinat kabul eder. “Eş.2.39” sistemi göz önüne alınan bölgenin her noktasında sadece

$$\frac{dx_i}{dt} - f_i \equiv 0 \quad , \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

aşkar çözümünü kabul eder. “Eş.2.37” de dikkate alınarak n tane $x_1, x_2, \dots, x_n$ fonksiyonları

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

denklem sisteminin çözümleri oldukları anlaşılır.

Not i.) Bir tanesi dışında bilinmeyen fonksiyonların tümünü yok etme yöntemi. “Eş.2.40”nın sağlandığını varsaymaya dayanır. Eğer bu koşul sağlanmıyor ise, bu durumda x_1 yerine “Eş.2.25” sisteminin çözümünü tamamlayan $x_2, x_3, \dots, x_n$ fonksiyonlarından bir diğeri alınarak aynı yöntem kullanılabilir.

Not ii.) Yukarıda belirtilen birisi dışında bilinmeyenlerin tümünü yok etme işlemi,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

homogen lineer sisteme uygulanırsa, bu durumda kolaylıkla gerçekleşeceği üzere, n yinci mertebeden

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \phi \left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} \right)$$

denklemini de homogen lineer olacaktır ve a_{ij} katsayılarının tümü sabit olması durumunda, elde edilen denklemde n yinci mertebeden sabit katsayılı lineer homogen denklem olacaktır. Benzer düşünce, lineer homogen olmayan

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t) \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sistemi için geçerlidir. Bu sistemde n yinci mertebeden lineer homogen olmayan bir denkleme indirgenmiş olacaktır.

Not iii.) Bir denklem sisteminde denklemlerin sayısı n ve bilinmeyen fonksiyonların sayısı N ise,

(a.) $N > n$ için, sistem belirsizdir. Bu durumda $N - n$ tane bilinmeyen fonksiyonu (onlar gerekli sayıda türevlenebilir olmak koşulu ile) keyfi seçmek suretiyle geri kalan n bilinmeyen fonksiyon bulunabilir.

(b.) $N < n$ için, sistem uyumsuzdur. Yani bu durumda sistemin çözümü yoktur.

2.5. İntegre Edilebilir Kombinasyonların Bulunması

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad [2.41]$$

diferansiyel denklem sisteminin integrasyonu, çok defa integre edilebilir kombinasyonları seçmekle yapılabilir. İntegre edilebilir bir kombinasyon, “Eş.2.41” denkleminin bir sonucu olarak, kolaylıkla integre edilebilen bir diferansiyel denklemdir. Örneğin böyle bir denklem

$$d\phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad [2.42]$$

şeklinde bir denklemdir yada değişken değişimi ile bir bilinmeyen fonksiyona göre integre edilebilen bir denklem türüne indirgenen bir denklemdir.

İntegre edilebilir bir kombinasyon,

$$\phi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 \quad [2.43]$$

şeklinde bir bağıntı elde etmeye imkan verir. Bu bağıntı, bilinmeyen fonksiyonlarla bağımsız değişkeni birbirine bağlar ve “Eş.2.41” sisteminin ilk integrali adını alır. Böylece “Eş.2.41” denklem sisteminin

$$\phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c \quad [2.44]$$

şeklinde ilk integrali, ϕ de bulunan $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) yerine “Eş.2.41” sisteminin $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ çözümü konulduğunda bir özdeşliğe dönen bir sonlu bağıntıdır.

“Eş.2.44” bağıntısının $\phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile belirtilen birinci yanı da çoğunlukla ilk integral (bazen bir integral), özdeş olarak bir sabite eşit olmayan, ancak “Eş.2.41” sisteminin integral eğrileri boyunca bir sabit değer alan bir fonksiyon olarak

tanımlıdır. Burada $\phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ şeklinde verilen bir bağıntının “Eş.2.41” sisteminin bir ilk integrali olması için, sistemin $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ çözümü yerlerine konulduğunda bir sabit değer olması gerekir. Diğer yandan verilen bir $\phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun bir integrali olması için (ki bu durumda ilk integral $\phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ şeklinde yazılır) gerek ve yeter koşul, bir D bölgesinde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad [2.45]$$

olmasıdır. Bu koşul, “Eş.2.42”ye eş değer olan bir koşuldur. Gerçekten

$$d\phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial x_n} dx_n = 0$$

ve buradan

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = 0$$

ve dolayısıyla

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial x_n} f_n = 0$$

şeklinde “Eş.2.45” bağıntısı elde edilir.

Geometrik olarak belli bir c için $\phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ integrali, koordinatları $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ olan $(n+1)$ boyutlu uzayda n boyutlu bir yüzey olarak yorumlanabilir. Bu yüzey, yüzeyle ortak bir noktaya sahip her bir integral eğrisinin tamamen yüzey içerisinde kalma özelliğine sahiptir. Değişken c için, aynı özelliğe sahip birbirini kesmeyen yüzey ailesi elde edilir. Yani, “Eş.2.41” sisteminin $(n-1)$ parametrelili bir integral eğrileri ailesinin noktalarından oluşan ve birbirini kesmeyen yüzey ailesi elde edilir.

Eğer k tane integre edilebilir kombinasyon bulunmuş ise, bu durumda

$$\begin{cases} \phi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 \\ \phi_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2 \\ \dots \\ \phi_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c_k \end{cases} \quad [2.46]$$

şeklinde k tane ilk integral elde edilir. Bütün bu integraller bağımsız ise, yani $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}; x_1, x_2, \dots, x_n$ yi tamamlayan belli k fonksiyon olmak üzere, en az bir determinant

$$\frac{D(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k})} \neq 0$$

ise, bu durumda “Eş.2.46” sistemin k bilinmeyen fonksiyonu, diğeri cinsinden ifade etmek mümkündür. Burada “Eş.2.41” de yerlerine konulursa problem, daha az sayıda bilinmeyenli bir denklem sisteminin integrasyonuna indirgenir. $k = n$ ve tüm integraller bağımsız ise, bu durumda bilinmeyen fonksiyonların tümü “Eş.2.46” sisteminden saptanabilir. İntegre edilebilir kombinasyonlar bulunurken, çoğunlukla “Eş.2.41” sistemini,

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\varphi_0(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

olmak üzere

$$\frac{dx_1}{\varphi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{\varphi_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{\varphi_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dt}{\varphi_0(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad [2.47]$$

şeklinde simetrik formda yazmak uygun düşer. Simetrik formda verilen bir sistemde değişkenler eşdeğer olan kapsanır ve bu form bazen integre edilebilir kombinasyonların bulunmasında kolaylık sağlar.

“Eş.2.47” sistemini çözmek için ya değişkenlerin ayrılmasına imkan veren bağıntı çiftleri alınır yada $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ katsayıları keyfi olmak üzere

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n} \quad [2.48]$$

şeklinde türetilen oranlar kullanılır. Burada λ_i katsayıları ya pay paydanın diferansiyeli olmak üzere yada payda sıfır ve total diferansiyel olacak şekilde seçilir.

2.6 Otonom Sistemler, Faz Düzlemi ve İlişkin Durumlar

Diferansiyel denklemlerin tarihsel gelişiminde iki temel yol izlenmiştir. Bunlardan ilki ve en eskisi, ya çok nadiren kapalı formda yada kuvvet serileri cinsinden açık çözümleri bulmak için gösterilen çabalardır. İkincisi de denklemlerin tümünü çözme ümidi terk edilerek, bunun yerine çözümlerin genel davranışına ilişkin kalitatif yaklaşım (topolojik yaklaşım yada geometrik yaklaşım) hakkında inceleme ve araştırmayı yoğunlaştırmak olmuştur. Bu görüş açısı bakımından lineer denklemler incelenebilir. Lineer olmayan denklemlerin kalitatif teorisi ise tamamen farklıdır. Bu inceleme yöntemi, gök mekaniği alanındaki çalışmaları ile ilgili olarak 1880 yılları civarında ilk defa Poincare tarafından kullanılmıştır ve o zamandan beri hem soyut hem de uygulamalı matematikçiler bakımından artan bir ilgi konusu olmuştur.

Lineer diferansiyel denklemler teorisi, geçen 200 yıldan beri geniş ve yoğun bir şekilde incelenmiş bulunduğundan oldukça tam ve kapsamlı olarak bilinen bir teori niteliğindedir. Bununla beraber, lineer olmayan denklemler hakkında genel yapının çok azı bilinmektedir. Bu bölümde, bu konunun temel kavram ve yöntemlerinin bir

kısmını incelemek ve lineer teoride bulunmayan bir ilgi alanı oluşturduğunu ve farklı yeni durumlar ortaya koyduğunu göstermek olacaktır. .

Niçin lineer olmayan diferensiyel denklemler üzerinde durulması gerekiyor? Temel neden, fiziksel sistem ve onları tanımlayan denklemler çoğu lineer olmayan türden karşımıza çıkmaktadır. Doğal olarak yapılan lineerleştirmeler, yaklaşık ifade eden türetmelerdir ve bu türetmeler kısmen orijinal lineer olmayan problemlerdeki zorluğun bir ifadesi ve kısmen de bir somunun yarısının hiç olmamasından daha iyi olmasının gereği olarak pratik bakışın ifadeleridir. Hemen eklenmese gerekiyor ki çok sayıda fiziksel durum için lineer bir yaklaşıklık bazı amaçlar bakımından uygun ve yararlıdır. Ancak böyle olmasına rağmen yine de diğer çok sayıda durum için lineerleştirmenin uygun düşmediği gerçeği saklı kalır.

Hatta Einstein, fiziğin temel denklemlerinin lineer olmamasından dolayı, matematik fiziğin tümünün yeniden ele alınması gerektiğini vurgulamıştır. Bu bakımdan geleceğin matematiği, geçmiş ve şimdikiinden çok farklı olacaktır.

Lineer olmayan problem örnekleri kolaylıkla verilebilir. Örneğin, ucundaki kütlesi m olan a uzunluğundaki sönümsüz bir sarkacın sapma açısı x ise, onun hareket denklemi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{a} \sin x = 0 \quad [2.49]$$

şeklinde ve sarkaç topunun hızına orantılı bir sönüm kuvveti var ise, bu durumda hareket denklemi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{g}{a} \sin x = 0 \quad [2.50]$$

şeklinde olur.

Doğal olarak yapılan lineerleştirmede $\sin x$, x ile değiştirilir. Bu durum küçük salınımlar için uygundur, ancak x büyük olduğunda büyük hata yapılmış olur. Farklı türden bir örnek, radyo lamba teorisinde ortaya çıkar ve

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad [2.51]$$

şeklinde önemli Van Der Pol denklemi elde edilir.

Bu lineer olmayan denklemlerin her biri, diğerleri paylaşılmayan ilginç özelliklere sahiptir. Bu bölümde “Eş.2.49”, “Eş.2.50” ve “Eş.2.51” denklemlerini özel durum olarak kapsayan

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad [2.52]$$

şeklinde ikinci mertebeden lineer olmayan denklemler göz önüne alınacaktır.

x ekseninde hareket eden birim kütleli bir parçacıkta oluşan basit bir dinamik sistem düşünülürse ve $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ de ona etki yapan kuvvet ise, bu durumda “Eş.2.52” parçacığın hareket denklemidir. Her bir anda sistemin durumunu karakterize eden x (yer) ve $\frac{dx}{dt}$ (hız) ın değerleri onun fazları ve x , $\frac{dx}{dt}$ değişkenler düzlemi de faz düzlemi adını alır. $y = \frac{dx}{dt}$ konursa, bu durumda “Eş.2.52” denklemi,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = f(x, y) \end{cases} \quad [2.53]$$

şeklinde eşdeğer sistem ile değiştirilebilir.

“Eş.2.52” denklemleri hakkında çok şeyin, “Eş.2.53” sisteminin çözümlerinin incelenmesi ile öğrenilebileceği görülecektir. t bir parametre olarak dikkate alınırsa, bu durumda genel olarak “Eş.2.53”in bir çözümü, xy faz düzleminde bir eğri tanımlayan $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonlar çiftidir. .

Daha genel olarak, F ve G düzlemin bir D bölgesinde sürekli ve birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad [2.54]$$

şeklinde sistemler ele alınacaktır.

İkinci yanda F ve G fonksiyonlarında t bağımsız değişkenin açık olarak gözükmeyeceği bu türdeki bir sistem otonom sistem adını alır. Böyle bir sistemin çözümlerinin daha yakın bir incelemesine dönelim.

Yukarıdaki varsayımlar ve Teorem.2.1’in bir sonucu olarak, t_0 herhangi bir sayı ve (x_0, y_0) faz düzleminde herhangi bir nokta ise, bu durumda “Eş.2.54”ün $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ olacak şekilde bir tek

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad [2.55]$$

çözümü vardır.

$x(t)$ ve $y(t)$ nin her ikisi sabit fonksiyon değilse, bu durumda “Eş.2.55”, faz düzleminde sistemin bir yolu (yörüngesi yada karakteristiği) denen bir eğri tanımlar.

Lemma2.1. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\gamma_1 < t < \gamma_2$, “Eş.2.54”ün bir çözümü ise, bu durumda herhangi bir reel c sabiti için

$$x_1 = x(t + c) , \quad y_1 = y(t + c) \quad [2.56]$$

fonksiyonlar çifti de “Eş.2.54”ün bir çözümüdür.

İspat: $\dot{x}_1 = \dot{x}(t + c)$, $\dot{y}_1 = \dot{y}(t + c)$ ve $\dot{x} = F(x(t), y(t))$, $\dot{y} = G(x(t), y(t))$ olduğundan, t , $t + c$ ile değiştirilirse,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F[x(t + c), y(t + c)] = F(x_1, y_1) \\ \dot{y}_1 &= G[x(t + c), y(t + c)] = G(x_1, y_1) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu durumda x_1 ve y_1 'in de çözüm olduğu anlamına gelir. $x(t)$, $y(t)$, $\gamma_1 < t < \gamma_2$ üzerinde tanımlı olduğundan $x_1(t)$, $y_1(t)$ çözümü de $\gamma_1 < t + c < \gamma_2$ nedeniyle $\gamma_1 - c < t < \gamma_2 - c$ üzerinde tanımlıdır.

Lemma2.1'e göre her bir yol, biri diğerinden sadece parametrenin bir kayması kadar fark eden çok sayıda çözüm ile gösterilebilir. Ayrıca (x_0, y_0) noktasından geçen herhangi bir yolun, “Eş.2.56” biçimindeki bir çözüme karşılık gelmesi gerektiği kolaylıkla gösterilebilir. Başka bir anlatım ile, “Eş.2.54”nın yörüngeleri ile çözümleri arasındaki ayrıcalığa dikkat etmek gerekir. Gerçekten yörünge, birden fazla çözüm ile parametrik olarak gösterilebilen faz düzleminin bir D bölgesinde eğridir. Yani $x(t)$, $y(t)$ ve $x(t + c)$, $y(t + c)$, $c \neq 0$ çiftleri farklı çözümler gösterdiği halde, bu çiftler parametrik olarak aynı eğriyi gösterirler.

Lemma 2.2. D nin herhangi bir noktasından en fazla bir yörünge geçer.

İspat: $x_1(t), y_1(t)$ ve $x_2(t), y_2(t)$ ortak bir (x_0, y_0) noktasına sahip farklı C_1 ve C_2 yörüngelerini gösteren “Eş.2.54”ün çözümleri olsun. Bu durumda

$$x_1(t_1) = x_2(t_2) = x_0, \quad y_1(t_1) = y_2(t_2) = y_0$$

olacak şekilde t ’nin farklı t_1 ve t_2 değerleri vardır. Şimdi

$$x_1(t + t_1 - t_2), \quad y_1(t + t_1 - t_2) \quad [2.57]$$

fonksiyonlar çiftini göz önüne alalım. F ve G , t ’yi açık olarak kapsamadığından Lemma 2.1 nedeniyle “Eş.2.57” çifti de “Eş.2.54”ün bir çözümüdür. $t = t_2$ için

$$x(t + t_1 - t_2) = x_2(t), \quad y_1(t + t_1 - t_2) = y_2(t) \quad [2.59]$$

olacağından, teklik nedeniyle “Eş.2.59” her t için geçerlidir. “Eş.2.57” çifti C_1 yörüngesini gösterdiğinden C_1 ve C_2 yörüngeleri aynıdır ve böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur. Kuşkusuz bu lemma, “Eş.2.54” sistemi otonom olmadıkça genel olarak doğru değildir.

Verilen bir yol yada yörünge boyunca t ’nin artış yönü, yolu gösteren bütün çözümler için aynıdır. Bu yüzden bir yol, bir yönlü eğridir ve grafikte t artarken yolun çizdiği yönü göstermek için oklar kullanılacaktır.

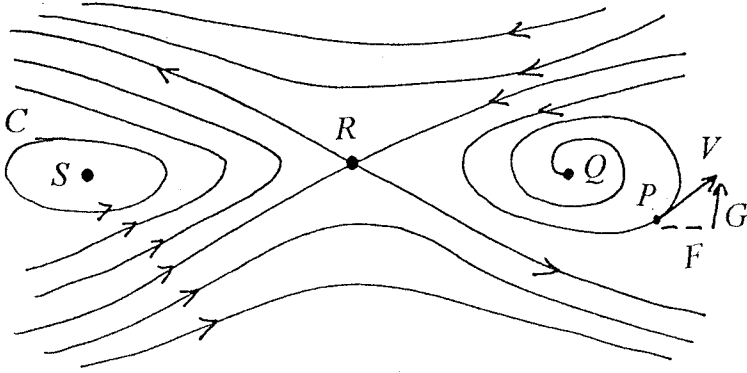
Yukarıdaki uyarılar genel olarak gösteriyor ki “Eş.2.54”ün yolları tüm faz düzlemini kaplar ve birbirlerini kesmezler. Tek ayrıcalık, F ve G nin her ikisinin $F(x_0, y_0) = 0$ ve $G(x_0, y_0) = 0$ olduğu (x_0, y_0) noktalarında ortaya çıkar. Bu noktalar kritik noktalar adını alır ve böylece bir noktada Teorem 2.1 nedeniyle garanti

edilen tek çözüm $x = x_0$ ve $y = y_0$ sabit çözümdür. Tanım nedeniyle “Eş.2.52”ün kritik noktaları ve yolları, eşdeğer “Eş.2.53” sisteminin kritik nokta ve yollarıdır.

Bir sabit çözüm bir yol tanımlamaz ve bu yüzden hiçbir yol bir kritik noktadan geçmez. İşlemlerimizden başka bir kritik noktanın kapsamadığı (x_0, y_0) merkezli bir çemberin varlığı anlamında her bir (x_0, y_0) kritik noktasının ayrık olduğu varsayılacaktır. Yani (x_0, y_0) merkezli bir çember var ve bu çember başka bir kritik nokta kapsamıyor ise, bu durumda (x_0, y_0) kritik noktası , ayrık kritik nokta adını alır.

Kritik noktaların fiziksel bir yorumunu elde etmek için. “Eş.2.52” dinamik sisteminden ortaya çıkan özel “Eş.2.53” otonom sistemini göz önüne alalım. Bu durumda bir kritik nokta, $y = 0$ ve $f(x_0, 0) = 0$ olan bir $(x_0, 0)$ noktasıdır, yani bu nokta parçacığın hareketinin hem $\frac{dx}{dt}$ hızı ve hem de $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ivmesinin sıfır olduğu bir duruma karşılık gelir. Bu demektir ki, parçacık ona etki yapan kuvvetin bulunmadığı hareketsiz durumlardır ve bu yüzden parçacık denge durumundadır denir. Bu yüzden kritik nokta yerine denge noktası yada denge değeri terimleri de kullanılır. Kuşkusuz bir fiziksel sistemin denge durumları, onun en önemli özellikleri arasındadır ve bu durum kritik noktalarla ilgilenmemizi kısmen açıklamaktadır.

“Eş.2.54” genel otonom sistemi, “Eş.2.52” biçimindeki herhangi bir dinamik denklemden zorunlu olarak ortaya çıkması gerekmez. Doğrudan karşımıza çıkabilir. Bu durumda yollara ve kritik noktalara hangi türden fiziksel anlam verilebilir? Burada Şekil 2.2’yi ve tipik bir $P = (x, y)$ noktasının $F = (x, y)$ ve düşey $G = (x, y)$ bileşenine sahip olduğu $V(x, y) = F(x, y)i + G(x, y)j$ ile tanımlı iki boyutlu vektör alını göz önüne almak uygun olacaktır.



Şekil 2.2. İki boyutlu bir akışkan hareketi

$\frac{dx}{dt} = F$ ve $\frac{dy}{dt} = G$ olduğundan, bu vektör P noktasında yolu teğettir ve t 'nin artma yönünü gösterir. t zaman olarak düşünülürse, bu durumda V , yol boyunca hareket eden bir parçacığın hız vektörü olarak yorumlanabilir. Ayrıca tüm faz düzleminin parçacıklarla dolu olduğunu ve her bir yolun, aynı yol üzerinde çok sayıda diğerleri tarafından izlendiğini ve önce gelen hareketli bir parçacığın izi olduğu düşünülebilir. Bu durum, iki boyutlu bir akışkan hareketi olarak tanımlanabilir ve “Eş.2.54” sistemi otonom olduğundan, yani $V(x,y)$ vektörü belli bir (x,y) noktasında zamanla değişmediğinden, akışkan hareketi, kullanılamaz yada durgun vaziyettedir denir. Yollar, hareketli parçacıkların yörüngeleridir ve Q , R ve S noktaları (akışkan hareketin durgun noktaları), parçacıkların dengede olduğu sıfır hızlı noktalardır.

Şekil2.2 de açıklanan akışkan hareketin en belirgin özellikleri şu şekilde sıralanabilir

- i.) Kritik noktalar
- ii.) Kritik noktalara yakın yolların düzeni
- iii.) Kritik noktaların kararlılık ve kararsızlığı, yani , böyle bir noktaya yakın bir parçacığın düzlemin bir diğer parçasına kalması yada kalmaması
- iv.) Periyodik çözümlere karşılık gelen kapalı yollar (Şekil2.2 deki C gibi)

Bu özellikler, “Eş.2.54” sisteminin tüm yollarının şekli olan faz diyagramı yada faz portresi nin esas kısmını oluşturur. Lineer olmayan denklemler ve sistemler genel olarak açık bir şekilde çözülmediğinden, bu bölümde irdelenen kalitatif teoremin amacı, faz diyagramı hakkında doğrudan F ve G fonksiyonlarından mümkün olduğu kadar çok bilgi ortaya çıkmaktadır. Elde edileceği ümit edilen daha çok bilgiye sahip olmak bakımından, $x(t)$ “Eş.2.52” dinamik denkleminin bir periyodik çözümü ise, bu durumda onun $y(t) = \frac{dx}{dt}$ türevinin de periyodik ve bu yüzden “Eş.2.53” sisteminin buna karşılık gelen yolunun kapalı olduğuna dikkat edilmelidir. Tersine olarak, “Eş.2.53”in herhangi bir yolu kapalı ise, bu durumda “Eş.2.52” bir periyodik çözüme sahiptir. bu düşüncenin uygulamasının somut bir örneği olarak, Van Der Pol denkleminin çözülmemesine rağmen, onun eşdeğer otonom sisteminin bir tek kapalı yola sahip olduğunu göstermekle onun periyodik çözüme ($\mu > 0$ ise) sahip olduğu gösterilebilir.

2.7. Faz Düzleminde Bazı İkinci Mertebe Diferensiyel Denklemler

Keyfi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek genellikle mümkün değildir. Bu işlem pratikte karşılaşılan diferensiyel denklemlerle standart fonksiyonlar cinsinden ifade edilen çözümleri bağdaştırmak çok sınırlı olduğundan kolay bir işlem değildir. Analitik çözüm buluna bilse bile, bu formül çözümün temel özelliklerini açıkça göstermek için çok karmaşıktır.

Diferensiyel denklemlerin kalitatif araştırması, onları tam olarak çözmeksizin, diferensiyel denklem çözümlerinin önemli karakteristiklerinin nasıl elde edilebileceği ile ilgilidir. Bu esaslar lineer denklemlere ve çok fazla lineer olmayan denklem türlerine eşit olarak uygulanır. Bu bölümde geometrik yöntemi, faz düzlemini tanımlıyoruz. Faz düzlemi denge periyodiklik, limitsiz büyüme, kararlılık özelliklerinin diferensiyel denklemlerden doğrudan elde edilmesi için kullanılır. Klasik sarkaç problemi özel bir diferensiyel denklemin çözümlerinin ana özelliklerini ortaya çıkarmak için faz düzleminin nasıl kullanılabileceğini gösterir .

2.7.1. Sarkaç denklemi için faz diyagramı

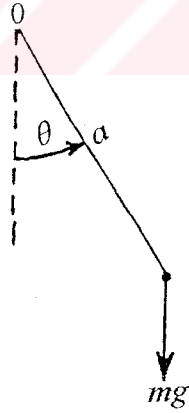
Basit sarkaç hafif ipe veya a uzunluklu bir kolla sabit bir noktadan asılmış m kütleli bir cisimden oluşur. Sarkacın dikey bir düzlemde salınmasına izin verilir. Sürtünme yoksa hareket denklemi

$$ma^2\ddot{\theta} + mga \sin \theta = 0 \quad [2.60]$$

Burada θ sarkacın denge konumundan açısal yer değiştiğidir. (Şekil 2.3),

$\ddot{\theta} = \dot{\theta} \left(\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \right)$ ifadesi “Eş.2.60” denkleminde yerlerine yazılırsa

$$ma^2 \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} + mga \sin \theta = 0$$



Şekil 2.3. Basit sarkaç

Bu denklem θ ve t 'nin yerlerine θ ve $\dot{\theta}$ 'yi birbirine bağlar. θ 'ya göre integre edilmesiyle

$$ma^2 \int \dot{\theta} d\dot{\theta} + mga \int \sin \theta d\theta = C$$

burada C bir sabit. O nedenle

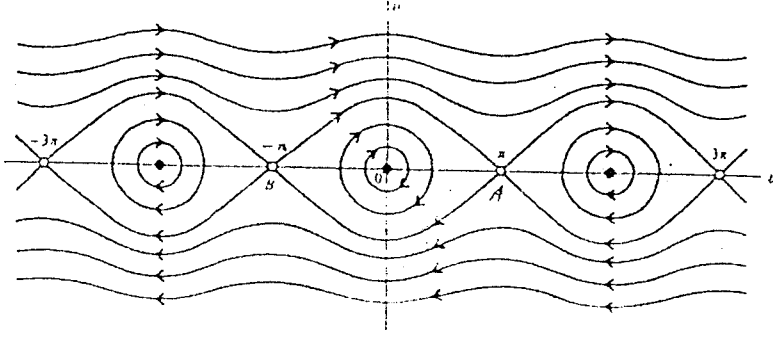
$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta = C \quad [2.61]$$

“Eş.2.61” denklemi enerjinin korunumunu ifade eder. Eşitliğin solundaki terimler, sırayla, sarkacın kinetik enerjisi ve potansiyel enerjisidir. Özel bir hareket için C ’nin değeri başlangıç şartları ($t = 0$ da θ ve $\dot{\theta}$ nin değerleri) kullanılarak belirlenebilir. O zaman “Eş.2.61” denklemi bu başlangıç şartlarına karşılık olan hareket için θ ve $\dot{\theta}$ arasındaki ilişkiyi verir. C için farklı değerlerin seçilmesiyle olası herhangi bir hareket için bu bağıntıyı elde ederiz.

“Eş.2.61” denklemi bir de θ ’yi t ’ye bağlayan bir diferensiyel denklemdir. Ancak elementer fonksiyonlar cinsinden çözülemez. O nedenle, t ’nin bir fonksiyonu olarak θ ’nin yararlı bir temsilini elde etmek kolay değildir. Çözümün ana karakteristiklerini açığa çıkarmak için, “Eş.2.61” denklemiyle doğrudan çalışmakla, bunun nasıl mümkün olacağını göstereceğiz.

“Eş.2.61” bağıntısı bir diyagramla gösterilebilir. θ ve $\dot{\theta}$ eksenlerine sahip bir kartezyen faz düzlemi kurulur ve farklı C değerleri için “Eş.2.61” denklemiyle üretilmiş bir parametrelili eğri ailesinin grafiği çizilir. (Şekil2.4)

Verilen bir $(\theta, \dot{\theta})$ değerleri çiftine sistemin durumu denir ve diyagram zaman ilerledikçe herhangi bir durumun yavaş yavaş nasıl geliştiğini gösterir. Verilen bir durum, sonra gelen bütün durumları belirler veya sonra gelen hareket için başlangıç şartları vaziyetini görür (5).



Şekil 2.4. Basit sarkaç için faz diyagramı

Şekil 2.4 de resimlendirilmiş eğriler, faz yolları, yörüngeleri veya “Eş.2.60” denkleminin karşılık gelen integral eğrileri olarak bilinir ve şeklin tamamına sistemin faz diyagramı veya faz resmi denir. Her bir faz yolu sistemin mümkün olan özel bir hareketine karşılık gelir. Her bir yola ait doğrultu (şekilde bir okla gösterilmiştir) sistemin durumunun nasıl değişeceğini gösterir. Okların doğrultusu $\dot{\theta}$ 'nin pozitif (θ zamanla artmalıdır) veya $\dot{\theta}$ 'nin negatif (θ zamanla azalmalıdır) olduğunun gözlenmesiyle belirlenir.

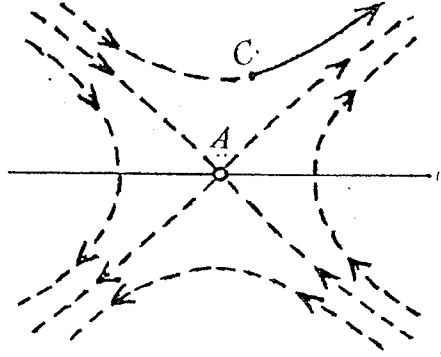
Gösterilen faz düzleminde zaman değişkeninin açıkça görülmemesine karşın, Şekil 2.4 den olası sarkaç hareketinin birkaç fiziksel özelliğini elde edebiliriz. İlk sarkacın olası fiziksel denge durumlarını göz önüne alalım. Salınım olmaksızın asılan sarkaç için $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ olduğu aşikardır. Bu durum Şekil 2.4 de orijine karşılık gelir. Karşılık gelen $\theta(t) = 0$ fonksiyonu “Eş.2.60”ın sabit çözümleriyle mükemmel uyur. Faz yolu bir tekil noktaya yozlaşır. Askı hafif bir koldan oluşuyorsa ikinci bir denge konumu vardır ve burada en sonunda sarkaç dikey olarak ortalanır. Bu $\theta = \pi$, $\dot{\theta} = 0$ durumudur, diğer sabit çözüm faz diyagramı üzerindeki A noktasıyla temsil edilir. Aynı fiziksel şart $\theta = -\pi$, $\dot{\theta} = 0$ ile de tanımlanır, faz diyagramında B noktası ile temsil edilir. Gerçekten $\theta = n\pi$, $\dot{\theta} = 0$ (n bir tamsayı) durumu bu iki denge şartından birine karşılık gelir. Aslında Şekil 2.4 de faz diyagramının sadece bir kısmını gösterdik. Bu desen periyodik olarak tekrarlanır, bu durumda faz diyagramı üzerindeki noktalar ve sarkacın fiziksel durumu arasında birebir ilişki yoktur.

O, A, B noktaları fiziksel denge durumlarını temsil eder. Bunlara faz diyagramında denge noktaları veya kritik noktalar denir.

Şimdi Şekil 2.4 de orijini doğrudan doğruya çevreleyen kapalı eğri ailesini göz önüne alalım. Bunlar periyodik hareketleri gösterir. Bu tür hareketlerde sarkaç dikey etrafında ileri geri salınır. Salınımın genliği, eğri üzerinde karşılaşılan, θ 'nin maksimum değeridir. Yeteri kadar küçük genlikler için, eğriler sarkaç denkleminin küçük genlikli çözümlerini temsil eder ve sarkaç denklemi $\sin \theta \approx \theta$ yazılmasıyla basitleşir. Faz yolları küçük genlik bölgesinde yaklaşık olarak elipslerdir.

Şekil 2.4 nin üstündeki ve altındaki dalgalı çizgiler (bu çizgiler üzerinde $\dot{\theta}$ sabit işaretlidir ve θ sürekli olarak artar veya azalır) sarkacın dönme (fırıldama) hareketine karşılık gelir. $\dot{\theta}$ da ki dalgalanmalar çekim etkisinden dolayıdır. $\dot{\theta}$ çok büyük olduğundan faz yollarındaki bu dalgalanmalar belli belirsizdir. Faz yolları yaklaşık olarak θ eksenine paralel doğrular olur.

Bir de O ve A denge noktalarında kararlılığı tartışabiliriz. Başlangıç durumu O noktasından az yer değiştirmişse, yakın kapalı eğrilerden birbirine girer ve sarkaç O etrafında küçük genliklerle titreşir. Böylece O denge noktasını, kararlı olarak tanımlarız. Başlangıç durumu A dan az yer değiştirmişse, sarkaç A denge durumundan daha uzak bir duruma taşıyan faz yolu üzerine düşecektir. Bu denge noktası bu nedenle kararsız olarak tanımlanır.



Şekil 2.5 Sarkaç için kararsız denge noktası

2.7.2. Faz düzleminde özerk denklemler

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \quad [2.62]$$

genel formundaki ikinci mertebe diferensiyel denklem mekaniksel bir sistemin hareket denklemi olarak tanımlanabilir. x , birim kütleli parçacığın yer değiştirmesini temsil eder. $\dot{x}$ hızı, $\ddot{x}$ ivmesi ve f uygulanan kuvvettir. Öyle ki “Eş.2.62”, parçacık için Newton hareket konumu ifade eder.

İvme = Birim başına kuvvet

Durumu zamanla değişmeyen mekaniksel bir sistem dengededir. Bu, denge durumunun, “Eş.2.62” denkleminin sabit bir çözümüne karşılık geldiğini söyler (terside doğrudur). Sabit bir çözüm özel olarak $\dot{x}$ ve $\ddot{x}$ nın sıfır olmasını gerektirir. Dikkat edilirse $\dot{x} = 0$ denge için tek başına yeterli değildir. Salınan sarkaç maksimum genliğe geldiğinde bir an için hareketsizdir. Ancak bu bir denge durumu değildir. Öyle ki sabit çözümler

$$f(x, 0, t) = 0 \quad [2.63]$$

denklemin sabit çözümleridir.

İki denklem tipinden bahsedebiliriz:

i.) $\frac{df}{dt} = 0$ şeklinde özerk tip, yani, f t 'ye açıkça bağlı değildir.

ii.) Özerk olmayan veya kuvvet içiren tip, burada t , f fonksiyonunda açıkça görülür.

Tipik bir özerk olmayan denklem, $f(x, \dot{x}, t) = -k\dot{x} - w_0^2 x + F \cos(wt)$ şeklinde harmonik kuvvet terimine sahip lineer salımcıdır.

$$\ddot{x} + k\dot{x} + w_0^2 x = F \cos(wt)$$

denge durumları mevcut değildir. Denge durumları, örneğin

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos t)x = 0$$

gibi bir denklemde meydana gelebilseler de, özerk olmayan denklemler genelde ilişkili değildirler. (Yukarıdaki denklem $x = 0$ da denge durumuna sahiptir.)

Bu bölümde özerk denklemleri göz önüne alacağız, bu durumda t yoktur ve “Eş.2.62” yerine

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad [2.64]$$

yazıyoruz. Denge durumlarını veren sabit çözümler

$$f(x, 0) = 0 \quad [2.65]$$

(eğer varsa) ın çözümleridir. Örneğin, $\ddot{x} = (1 - x^2) + x\dot{x}$ denklemi $x = 1$ ve $x = -1$ sabit çözümlerine sahiptir. Şimdi “Eş.2.64” denklemini faz düzleminde temsil edelim. $t = t_0$ da sistemin durumu $(x(t_0), \dot{x}(t_0))$ sayı çiftlerinden ibarettir. Bu durum başlangıç şartları çifti gibi dikkate alınabilir ve böylece sonra gelen durumlar

belirlenir. Birbiri ardına gelen durumlar faz düzleminde resmedilebilir. Bunu yaparken eksenlerimiz x ve $\dot{x}$ olacaktır. Ancak $\dot{x}$ eksenini y olarak etiketleyelim

$$\dot{x} = y \quad [2.66]$$

o zaman $\ddot{x} = \dot{y}$ ve “Eş.2.64” denklemi

$$\dot{y} = f(x, y) \quad [2.67]$$

olur. “Eş.2.66” ve “Eş.2.67” denklemlerine $x(t), y(t)$ fonksiyonları için eş zamanlı birinci mertebe denklemler olarak bakılabilir. Faz yollarını verecek olan x ve y arasındaki ilişkiyi elde etmek için “Eş.2.67”in “Eş.2.66” ile bölünmesi ile t yok edilir.

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y} \quad [2.68]$$

bu denklemin çözümleri faz yollarıdır.

Örnek2.1. $\ddot{x} + \alpha \sin x = 0$ denklemi için faz düzlemini bulun. Bu temel olarak “Eş.2.60” denklemdir.

$$\dot{x} = y$$

tanımını yapıyoruz ve denklem

$$\dot{y} = -\alpha \sin x$$

halini alır. Faz yolları veren denklem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha \sin x}{y}$$

dır. Değişkenlerine ayılıp taraf tarafa integre edilirse

$$\int y dy = -\alpha \int \sin x dx + C$$

veya

$$\frac{1}{2}y^2 - \alpha \cos x = C$$

burada C faz yolları parametresidir. Faz düzleminde diyagram Şekil 2.4 deki gibidir.

“Eş.2.64” denkleminin sabit çözümlerinin elde edilmesi işlemi, “Eş.2.66” ve “Eş.2.67” de $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$ yerleştirilmesi veya $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ yerleştirilmesidir. Faz diyagramı üzerindeki bir (x_0, y_0) denge noktası,

$$y = 0, f(x, y) = 0 \quad [2.69]$$

çiftinin herhangi bir çözümüdür.

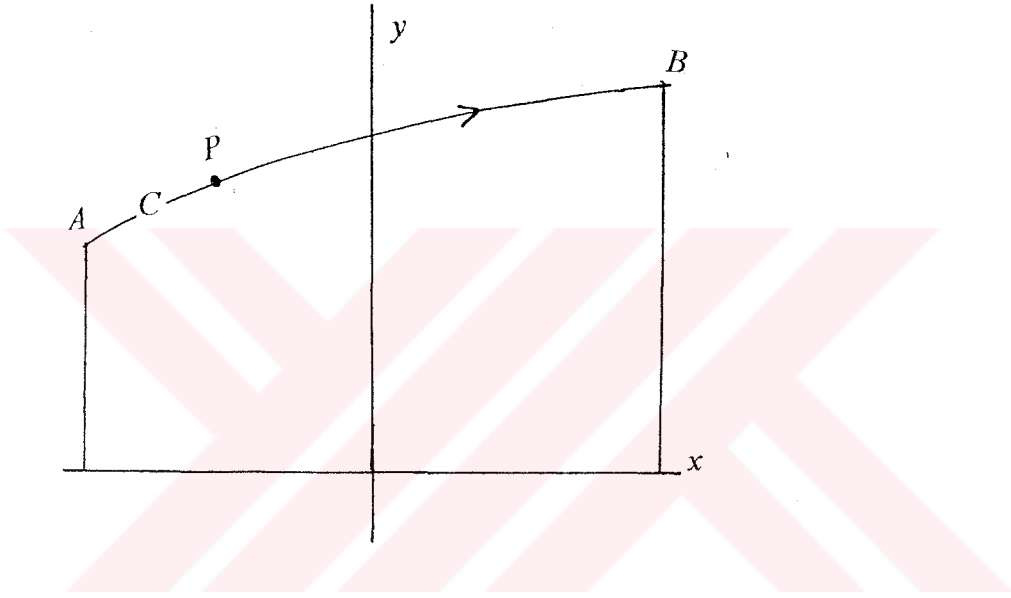
Dikkat edilirse

- i.) Denge noktaları daima x eksenine yerleştirilmiştir.
- ii.) Denge noktaları hariç, faz yolları x eksenini dik açılarla keser. (“Eş.2.66”, “Eş.2.67” ve “Eş.2.69” denklemlerinden)
- iii.) Kapalı eğriler periyodik çözümleri temsil eder. Bir dolanım tamamlandığında, orijinal durum geri döner ve hareket basitçe sonsuza kadar kendini tekrarlar.

Şimdi faz yolları üzerine iki nokta arasında geçen zamanı göz önüne alalım. Şekil 2.6 da görülen ζ daire kesmesi, faz yolu üzerindeki A ve B noktalarını birleştirir. P herhangi bir ara durumu temsil eder, bu noktaya temsil noktası denir. P noktası ζ boyunca $(\dot{x}, \dot{y})$ veya $(\dot{x}, \ddot{x})$ hızıyla hareket eder. Geçen zaman, T_{AB}

$$T_{AB} = \int_{\zeta} dt \equiv \int_{\zeta} \left(\frac{dx}{dt} \right)^{-1} \left(\frac{dx}{dt} \right) dt = \int_{\zeta} \frac{dx}{y} \quad [2.70]$$

ile verilir ve ζ verildiğinde hesaplanabilir. Faz diyagramı zaman değişkenini sadece gizler, izini tamamen yok etmez. “Eş.2.70” sadece faz yolunun geometrisine bağlıdır.



Şekil 2.6. Bir faz yolu

Örnek 2.2. Basit harmonik titreşken denklemi

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

için faz düzlemi oluşturalım. Bu küçük genlikli salınımlar için sarkaç denklemine yaklaşıyor. “Eş.2.66” ve “Eş.2.67”e karşılık

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -\omega^2 x$$

dir. $x = 0$ ve $y = 0$ da bir denge noktası vardır. Faz yolları

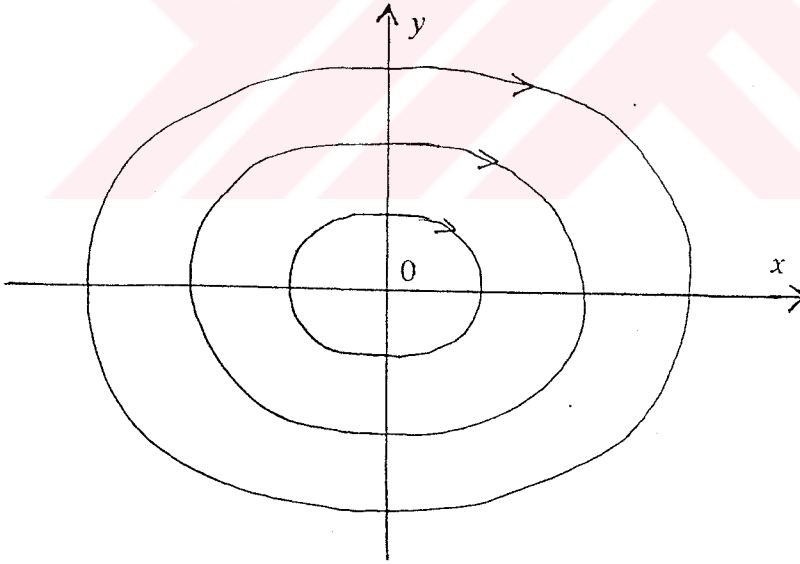
$$\frac{dy}{dx} = -w^2 \frac{x}{y}$$

denkleminin çözümleridir. Bu denklem değişkenlerine ayrılırsa

$$y^2 + w^2 x^2 = C$$

denklemini elde ederiz. Faz resmi orijin ile eş merkezli elips ailesidir. Bu nedenle bütün çözümler periyodiktir. Denge noktası karardır.

Birbirine yakın komşu olan kapalı yollarla çevrilmiş denge noktasına merkez nokta denir. Merkez nokta, karardır denge noktasıdır.



Şekil 2.7. Basit harmonik titreşken için merkez nokta

2.7.3. Bazı korunumlu sistemler

Bir serbestlik dereceli bir sistem göz önüne alalım. x genelleştirilmiş koordinat (konum, açı, v.b) olsun. T ve V kinetik enerji ve potansiyel enerji fonksiyonları olsun ve bunların

$$T = \frac{1}{2} m(x) \dot{x}^2, \quad V = V(x) \quad [2.71]$$

formunda sağladığını varsayalım. Burada m , $m(x) > 0$ eşitliğini sağlayan başka bir fonksiyondur. Sistem korunumluysa, o zaman toplam enerji, ξ , hareket boyunca sabittir.

$$\frac{1}{2} m(x) \dot{x}^2 + V(x) = \xi, \text{ sabit} \quad [2.72]$$

ve faz yollarını verir. Hareket denkleminin tipi “Eş.2.72”in zaman türevine bakılarak elde edilebilir

$$m(x) \ddot{x} + \frac{1}{2} m'(x) \dot{x}^2 + V'(x) = 0 \quad [2.73]$$

“Eş.2.73” denklemini x ’in yerine yeni bir u değişkeninin tanımlanmasıyla basitleştirilebilir.

$$u = \int \sqrt{m(x)} dx$$

“Eş.2.73” denklemini

$$\ddot{u} + \gamma'(u) = 0 \quad [2.74]$$

olur. Burada $\gamma'(u) = V'(x)m^{-1/2}(x)$ dir. Faz yolları için karşılık gelen enerji tipi denklem

$$\frac{1}{2}\dot{u}^2 + \gamma(u) = C \quad [2.75]$$

“Eş.2.74” ve “Eş.2.75” genel gösterime dönüştürülürse, korunumlu bir sistem için standart denklem

$$\ddot{x} = f(x) \quad [2.76]$$

olur. Burada f birim kütle başına kuvvettir ve $\dot{x}$ dan bağımsızdır. f 'nin sürekli olduğunu varsayalım ve V fonksiyonu yeni problem için

$$V(x) = -\int f(x)dx \text{ veya } V''(x) = -f(x) \quad [2.77]$$

olarak tanımlayalım. O zaman “Eş.2.76” için potansiyel enerji fonksiyonundan söz edebiliriz. “Eş.2.76”nin denge noktaları

$$-f(x) = V'(x) = 0 \quad [2.78]$$

ile verilir. “Eş.2.76” deki gibi $\dot{x} = y$ yazılırsa, faz yolları C 'nin farklı değerleri için aşağıdaki enerji denklemi ile verilir

$$\frac{1}{2}y^2 + V(x) = C \quad [2.79]$$

veya

$$y = \pm\sqrt{(2C - 2V(x))} \quad [2.80]$$

Alternatif olarak konuyu $f(x)$ (lineer olmayan yaya bağlı bir parçacık için geri çağırıcı kuvvet) görünümünde ele alabiliriz. Parçacık denge noktasından geçtiğinde $f(x)$ 'in işareti pozitiften negatife değişirse, sistem basit lineer yay gibi davranır ve titreşir (denge noktası merkez noktadır). $f(x)$ 'in işareti negatiften pozitive değişirse, parçacık denge noktasından uzağa sürülür (denge noktası eyer noktasıdır).



3. KARARLILIĞA GİRİŞ

3.1. Kritik Nokta Türleri Ve Kararlılık

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad [3.1]$$

otonom sistemini göz önüne alalım. F ve G fonksiyonlarının tümü xy düzleminde sürekli ve birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olduğunu varsayalım. “Eş.3.1” in kritik noktaları kural olarak $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$ denklem sistemini çözmekle bulunabilir. Sık sık ortaya çıkan dört basit kritik nokta türü vardır. Bu bölümde amacımız onları açıklamak olacaktır. Bununla beraber iki tanıma ihtiyacımız vardır.

(x_0, y_0) , “Eş.3.1” in ayrık kritik noktası olsun. $C = [x(t), y(t)]$ “Eş.3.1” in bir yolu olmak üzere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \text{ ve } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0 \quad [3.2]$$

ise, bu durumda $t \rightarrow \infty$ a giderken C yolu (x_0, y_0) kritik noktasına *yaklaşıyor* denir.

Diğer yandan “Eş.3.2”, bir $x(t), y(t)$ çözümü için doğru ise bu durumda (x_0, y_0) ’in zorunlu bir kritik nokta olduğu kanıtlanabilir.

Geometrik olarak, bu demektir ki $P = (x, y)$ noktası $x = x(t), y = y(t)$ denkleminde göre C ’yi çizen bir nokta ise, bu durumda $t \rightarrow \infty$ a giderken $P \rightarrow (x_0, y_0)$ a gider. Diğer bir tanım olarak,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} \quad [3.3]$$

limiti mevcut yada $t \rightarrow \infty$ giderken “Eş.3.3” deki oran pozitif yada negatif sonsuz olur ise, bu durumda $t \rightarrow \infty$ a giderken C yolu (x_0, y_0) kritik noktasına gidiyor denir.

“Eş.3.3”deki oran, koordinatları $x(t)$ ve $y(t)$ olan P noktası ile (x_0, y_0) noktasını birleştiren doğrunun eğimidir ve bu doğru $t \rightarrow \infty$ a giderken belli bir doğrultuya yaklaşıyor demektir. Bu tanımlarda $t \rightarrow -\infty$ için de limitler göz önüne alınabilir. Bu özelliklerin, C yolunun özellikleri olduğu açıktır ve bunlar yolu göstermede kullanılan çözüme bağlı değildir.

Bazı durumlarda “Eş.3.1” sisteminin açık çözümlerini bulmak mümkündür ve bu durumda bu çözümler yolları belirtmede kullanılabilir. Bununla beraber, çoğunlukla yolları bulmak için denklem sistemi arasından t ’yi yok etmek gerekir. Böylece

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \quad [3.4]$$

denkleme varılır.

Bu birinci mertebeden denklem, “Eş.3.1”in (x, y) noktasından geçen yoluna çizilen teğetin eğimini verir. Bu (x, y) noktasında F ve G fonksiyonlarının her ikisinin sıfır olmaması gerekir. Kuşkusuz bu durumda belirtilen nokta bir kritik noktadır ve hiçbir yol böyle bir noktadan geçmez. Bu yüzden “Eş.3.1”in yolları, “Eş.3.4”ün bir parametrelili integral eğrileri ile çakışır. Bununla beraber “Eş.3.1”in yolları yönlü eğriler olduğu halde “Eş.3.4”ün integral eğrilerine ilişkin bir yön söz konusu değildir.

Şimdi dört temel kritik nokta türünün geometrik açıklamasına geçelim. Her bir durumda irdelenen kritik noktaların $O = (0,0)$ orijini olduğu varsayılacaktır. Bu durum genelliği bozmaz. Gerçekten kritik nokta $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ ise

$$v = x - x_0, \quad w = y - y_0$$

konumu ile “Eş.3.1” sistemi

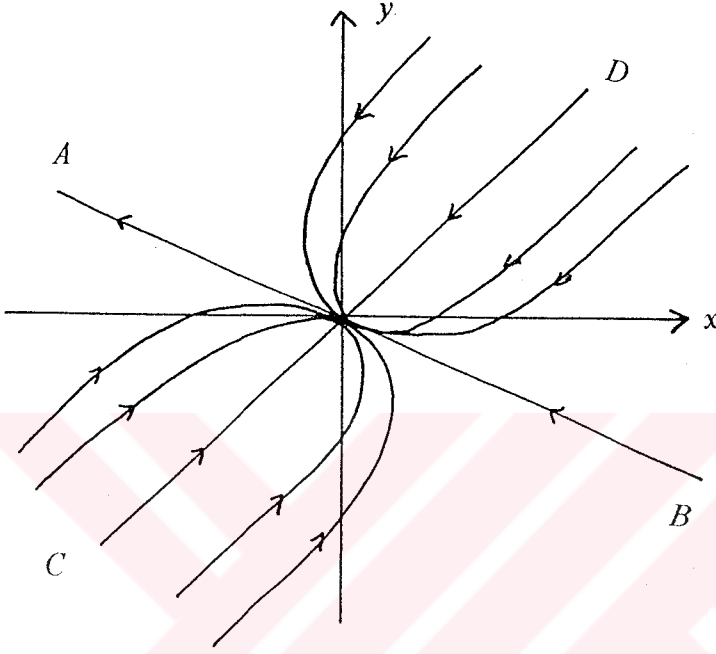
$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = F(v + x_0, w + y_0) \\ \frac{dw}{dt} = G(v + x_0, w + y_0) \end{cases}$$

sistemine indirgenir. $F(x_0, y_0) = 0, G(x_0, y_0) = 0$ olduğundan bu yeni sistemde kritik nokta $(v, w) = (0,0)$ noktasıdır. Böylece $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ kritik noktası daima $(0,0)$ kritik noktasına indirgenebilir.

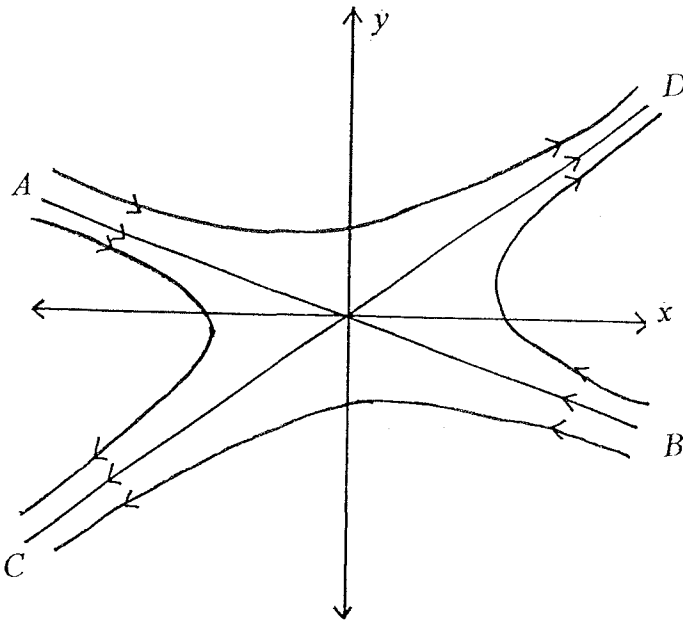
1. Düğüm noktaları : Şekil 3.1’de kine benzer bir kritik nokta, bir düğüm noktasıdır. Böyle bir noktaya $t \rightarrow \infty$ (yada $t \rightarrow -\infty$) için her bir yol ile yaklaşılr ve girilir. Şekil 3.1’de görülen düğüm noktası için orijin ile birlikte AB ve CD doğrularını oluşturan dört tane AO , BO , CO ve DO yarı doğru yolları vardır. Diğer bütün yollar parabol parçalarına benzer ve bu yolların her biri O orijinine ve eğimi de AB doğrusunun eğimine yaklaşır.

2. Semer noktaları : Şekil 3.2’de kine benzer bir kritik nokta, bir semer noktasıdır. Bu kritik noktaya $t \rightarrow \infty$ için AO ve BO yarı doğruları ile yaklaşılr ve girilir. Bu iki yol, bir AB doğrusu üzerinde bulunur. Aynı kritik noktaya $t \rightarrow -\infty$ için CO ve DO yarı doğruları ile yaklaşılr ve girilir. Ve bu yarı doğrular da bir diğer CD doğrusu üzerinde bulunur. Bu dört yarı doğru arasında dört bölge vardır ve bunların her biri hiperbollere benzer bir yol ailesi kapsar. Bu yollar $t \rightarrow \infty$ yada $t \rightarrow -\infty$ için

orijine yaklaşmazlar, ancak bunlar $t \rightarrow \infty$ ve $t \rightarrow -\infty$ için yarı doğru yollarından birine yada diğeriine asimtotik olurlar.

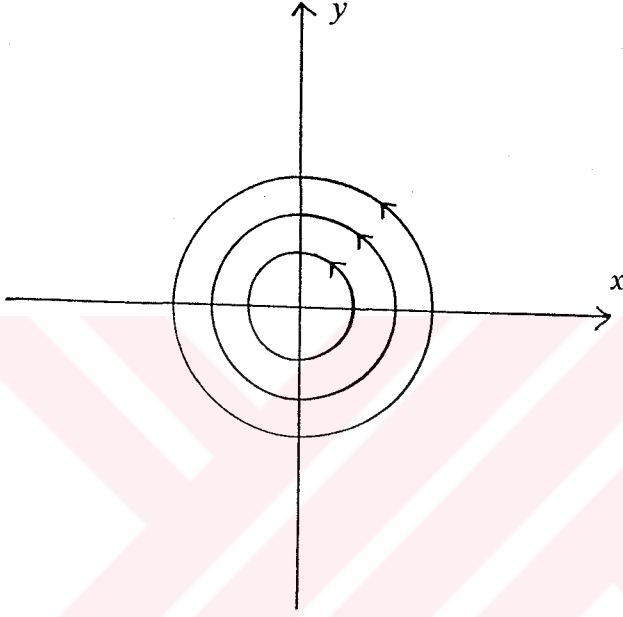


Şekil 3.1. Düğüm noktası



Şekil 3.2. Siner noktası

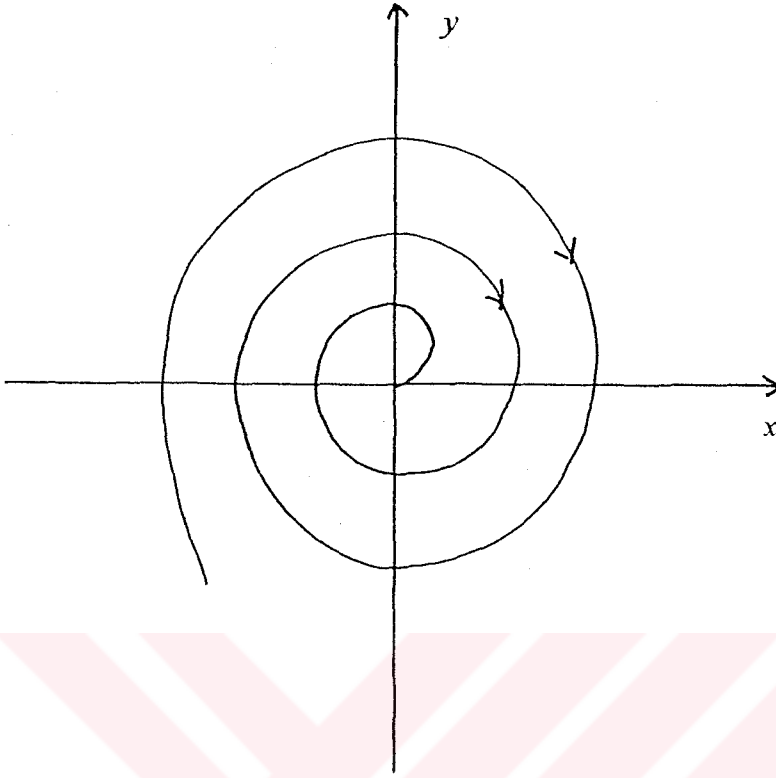
3. Merkezler: Bir merkez, bir kapalı yol ailesi ile çevrili bir kritik noktadır. Böyle bir noktaya $t \rightarrow \infty$ yada $t \rightarrow -\infty$ için herhangi bir yol ile yaklaşılamaz.



Şekil 3.3. Merkez nokta

4. Sarmal noktalar: Şekil 3.4 dekinе benzer bir kritik nokta, bir sarmal noktadır. Böyle bir noktaya, $t \rightarrow \infty$ (yada $t \rightarrow -\infty$) için orijin etrafında sonsuz sayıda dönen bir yol ailesi ile sarmal benzeri biçimde yaklaşılr.

Özel olarak dikkat edilirse, bu yolları orijine yaklaştıkları halde onlar orijine girmezler. Yani böyle bir yol boyunca hareket edilen bir P noktası, $t \rightarrow \infty$ (yada $t \rightarrow -\infty$) için orijine yaklaşır, ancak OP doğrusu herhangi bir belli doğrultuya yaklaşmaz.

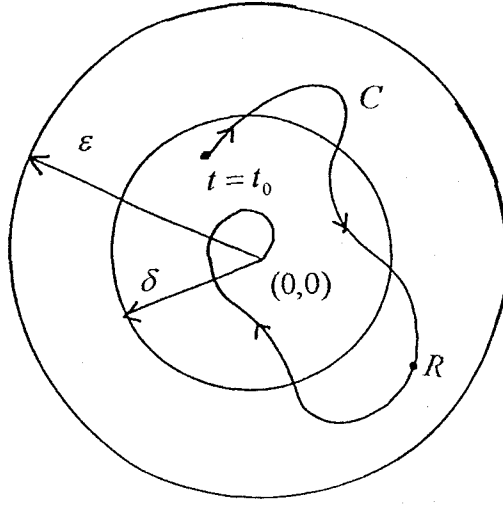


Şekil 3.4. Sarmal nokta

Verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık aşağıdaki koşullar geçerli olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı var ise, bu durumda $(0,0)$ kritik noktasına kararlıdır denir.

- i.) Herhangi bir $t = t_0$ değerine karşılık $(0,0)$ 'ın δ komşuluğunda bulunan “Eş.3.1”in her yolu $t_0 \leq t < \infty$ için tanımlıdır
- ii.) Bir yol “Eş.3.1” koşulunu sağlıyor ise, o yol $t_0 \leq t < \infty$ için $(0,0)$ 'ın ε komşuluğunda kalır.

Başka bir anlatımla, $(0,0)$ noktası kararlı ise, bu durumda $t = t_0$ da δ yarıçaplı $x^2 + y^2 = \delta^2$ çemberi içerisinde bulunan her $C: x = x(t), y = y(t)$ yolu her $t \geq t_0$ için ε yarıçaplı $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ çemberi içerisinde kalır (Şekil3.5).



Şekil 3.5. $(0,0)$ kararlı kritik noktası

Bir başka deyişle, $t = t_0$ da C yolu üzerindeki R noktası arasındaki uzaklık δ dan küçük kalmak üzere her $t \geq t_0$ için $(0,0)$ ile C yolu üzerindeki R noktası arasındaki uzaklık ε dan küçük kalıyor ise, $(0,0)$ noktası kararlıdır. Kararlılık tanımı kabaca diyor ki, bir kez bir yörünge $(0,0)$ 'ı kapsayan bir küçük disk içerisine girer ise, o yörünge gelecek her zaman biraz daha büyük bir disk içerisinde kalır. Eş.3.1" ve "Eş.3.2" koşullarını sağlayan her C yolu için ayrıca ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

geçerli ise, $(0,0)$ kritik noktası asimtotik kararlıdır denir. Kritik nokta kararlı değilse kararsızdır denir.

Yukarıdaki tanım bazen sağda kararlılık olarak adlandırılır. Benzer tanım $t \rightarrow -\infty$ a giderken solda kararlılık için verilebilir.

Bir kritik nokta kararlı ve asimtotik kararlı ise tam kararlıdır denir. Bir kritik nokta kararlı ancak asimtotik kararlı değilse yansız kararlı adını alır. Asimtotik kararlılık, sabit katsayılı lineer otonom sistem için tam kararlılığı gerektirir, ancak tüm otonom sistemler için gerektirmez.

Bu kavramlar örnek olarak Şekil 3.3'deki merkez kararlı olup asimtotik kararlı değildir. Şekil 3.1'deki düğüm noktası, Şekil 3.4'deki sarmal nokta asimtotik kararlıdır.

“Eş.3.1” sistemini çoğunlukla açık olarak çözmek zor olduğundan, genel olarak kararlılık sorusunu çözmek zordur. Kolaylıkla incelenebilen durum “Eş.3.1” sisteminin otonom olması durumudur.

3.2. Lineer Sistemler İçin Kritik Noktalar Ve Kararlılık

Bu bölümde

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases}$$

şeklinde lineer olmayan otonom sistemlerin faz portrelerini incelenmesi ile lineer olmayan diferensiyel denklemler hakkında olacaktır. Bu amaçla ele alınacak ilk problem, böyle bir sistemin kritik noktalarını, onların yapısı ve kararlılığına göre sınıflandırma problemi olacaktır. Daha sonra uygun koşullar altında bu problemin, verilen bir lineer olmayan sistem için ona ilişkin bir lineer sistemi incelemekle çözülebileceği görülecektir. Bu yüzden bu kesimde lineer otonom sistemlerin kritik noktalarının analizi üzerinde durulacaktır (6).

Şimdi

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases} \quad [3.5]$$

sistemini göz önüne alalım. Bu sistem kritik nokta olarak (0,0) orijin noktasına sahiptir. Bu kesimde tamamen

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \quad [3.6]$$

olarak varsayılıyor. (0,0) sistemin tek kritik noktasıdır. Sistemin karakteristik denklemi olarak adlandırılan

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0 \quad [3.7]$$

kuadratik denkleminin bir kökü m olmak üzere “Eş.3.5” sistemi

$$\begin{cases} x = Ae^{mt} \\ y = Be^{mt} \end{cases}$$

şeklinde belirgin olmayan bir çözüme sahiptir. Buna göre “Eş.3.6” koşulu, “Eş.3.7”in bir kökünün sıfır olmayacağını belirlemektedir.

m_1 ve m_2 , “Eş.3.7”in kökleri olsun. Buna göre “Eş.3.5” sistemin (0,0) kritik noktasının yapısının, m_1 ve m_2 sayılarının yapısı ile belirtileceği görülecektir. m_1 ve m_2 ’nin reel ve farklı, reel ve eşit, yada eşlenik karmaşık olmasına göre doğal olarak üç olurlu durumun ortaya çıkacağı beklenebilir. Ancak durum bundan biraz daha karışıktır ve aşağıda olduğu gibi beş durumu göz önüne almak gereği vardır (7).

Temel durumlar:

Durum A. m_1 ve m_2 kökleri reel, farklı ve aynı işaretli ise, bu durumda (0,0) kritik noktası bir düğüm noktasıdır.

İspat: m_1 ve m_2 nin her ikisinin negatif olduğunu varsaymakla işe başlayalım ve $m_1 < m_2 < 0$ olsun. Bu durumda “Eş.3.5”in genel çözümü, A ’lar ve B ’ler $\frac{B_1}{A_1} \neq \frac{B_2}{A_2}$ olacak şekilde belli sabitler ve c ’ler keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{m_1 t} + c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y = c_1 B_1 e^{m_1 t} + c_2 B_2 e^{m_2 t} \end{cases} \quad [3.8]$$

şeklindedir. $c_2 = 0$ olduğunda

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{m_1 t} \\ y = c_1 B_1 e^{m_1 t} \end{cases} \quad [3.9]$$

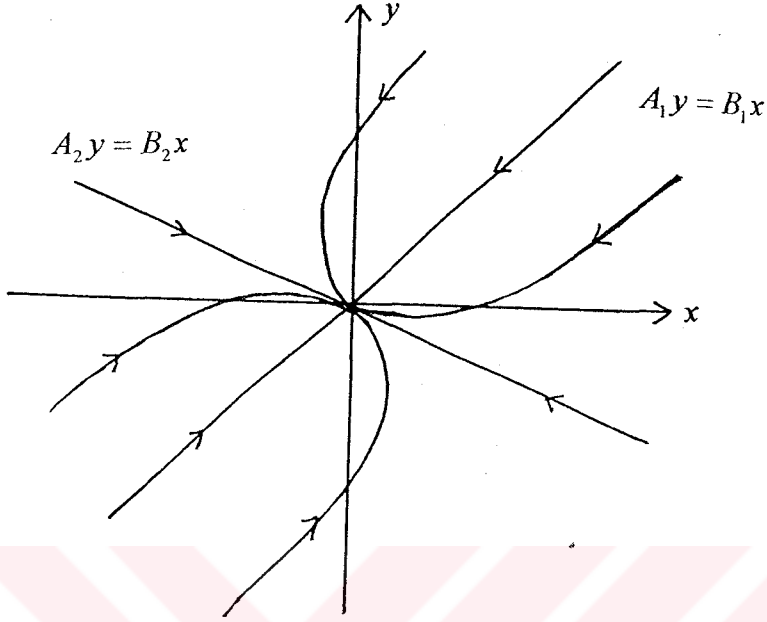
çözümü ve $c_1 = 0$ olduğunda

$$\begin{cases} x = c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y = c_2 B_2 e^{m_2 t} \end{cases} \quad [3.10]$$

çözümleri elde edilir.

Herhangi bir $c_1 > 0$ için “Eş.3.9” çözümleri, eğimi $\frac{B_1}{A_1}$ olan $A_1 y = B_1 x$ doğrusunun yarısından oluşan bir yol gösterir ve herhangi bir $c_1 < 0$ için bu doğrunun diğer yarısından oluşan (orijinin diğer taraftaki yarısı) bir yol gösterir. $m_1 < 0$ olduğundan yarı doğrulardan oluşan yolların her ikisi $t \rightarrow \infty$ için $(0,0)$ ’a yaklaşır ve $\frac{y}{x} = \frac{B_1}{A_1}$

olduğundan her ikisi $\frac{B_1}{A_1}$ eğimli olarak $(0,0)$ girer. (Şekil 3.6)



Şekil 3.6. m_1 ve m_2 kökleri reel, farklı ve aynı işaretli ise $(0,0)$ kritik noktası için düğüm noktası

Aynı şekilde “Eş.3.10” çözümleri, eğimi $\frac{B_2}{A_2}$ olan $A_2y = B_2x$ doğrusu üzerinde bulunan iki yarı doğrudan oluşan yolları gösterir. Bu iki yol da $t \rightarrow \infty$ için $(0,0)$ ‘a yaklaşır ve $\frac{B_2}{A_2}$ eğimli olarak $(0,0)$ ‘a girer.

$c_1 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ ise, “Eş.3.8” genel çözümü eğrisel yollar gösterir. $m_1 < 0$ ve $m_2 < 0$ olduğundan bu yollar da $t \rightarrow \infty$ için $(0,0)$ ‘a yaklaşır. Ayrıca $m_1 - m_2 < 0$ ve

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 B_1 e^{m_1 t} + c_2 B_2 e^{m_2 t}}{c_1 A_1 e^{m_1 t} + c_2 A_2 e^{m_2 t}} = \frac{\frac{c_1 B_1}{c_2} e^{(m_1 - m_2)t} + B_2}{\frac{c_1 A_1}{c_2} e^{(m_1 - m_2)t} + A_2}$$

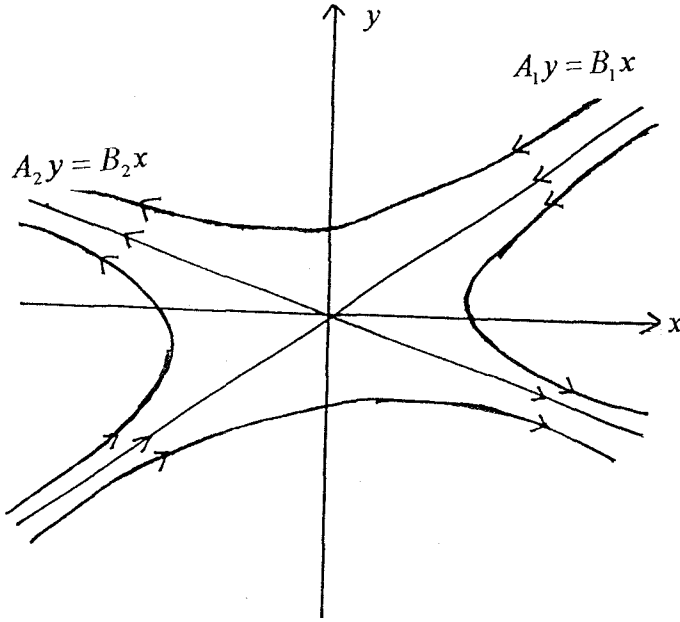
olduğundan, $t \rightarrow \infty$ için $\frac{y}{x} = \frac{B_2}{A_2}$ ye gider. Böylece bu yolların tümü $\frac{B_2}{A_2}$ eğimli olarak $(0,0)$ 'a girer. Şekil 3.6, bu durumun bir kalitatif şeklini göstermektedir. Böylece çok açık olarak kritik noktanın bir düğüm olduğu anlaşılır. Ve bu nokta aynı zamanda asimtotik kararlıdır.

m_1 ve m_2 nin her ikisi pozitif olmak üzere $m_1 > m_2 > 0$ ise, bu durumda yolların durumu bu kez $t \rightarrow -\infty$ için $(0,0)$ yaklaşmak ve girmek üzere tamamen aynıdır. Şekil 3.6 daki yollar, yönleri gösteren oklar, tersine çevrilmek üzere değişmez. Bu durumda kritik nokta bir düğüm noktasıdır, ancak bu kez kritik nokta kararsızdır.

Durum B. m_1 ve m_2 kökleri reel, farklı ve zıt işaretli ise, bu durumda $(0,0)$ kritik noktası bir semer noktasıdır.

İspat: $m_1 < 0 < m_2$ olsun. Bu durumda "Eş.3.5" in genel çözümü keza "Eş.3.8" şeklinde yazılabilir. Ve yine "Eş.3.9" ve "Eş.3.10" şeklinde özel çözümler elde edilir. "Eş.3.9" ile gösterilen iki yarı doğrudan oluşan yollar $t \rightarrow \infty$ için $(0,0)$ 'a yaklaşır ve girer, ancak bu zaman "Eş.3.10" ile gösterilen iki yarı doğrudan oluşan yollar için $t \rightarrow -\infty$ için $(0,0)$ 'a yaklaşır ve girer. $c_1 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ ise, "Eş.3.8" genel çözümü eğrisel yollar gösterir, ancak $m_1 < 0 < m_2$ olduğundan bu yolların hiç birisi $t \rightarrow \infty$ yada $t \rightarrow -\infty$ için $(0,0)$ a yaklaşmaz. Bunun yerine $t \rightarrow \infty$ a girerken bu yolların her ikisi "Eş.3.10" ile gösterilen yarı doğru yollarından birine asimtotik ve $t \rightarrow -\infty$ girerken her biri "Eş.3.9" ile gösterilen yarı doğru yollarından birine asimtotik olurlar. (Bu durum sistemin yolları bulunarak $y = mx$ ile kesiştirilmesi ile $x \rightarrow \infty$ ve $y \rightarrow \infty$ olmasının bir sonucu olarak $m_1 = \frac{B_1}{A_1}$ ve $m_2 = \frac{B_2}{A_2}$ elde edilir. Böylece x ve y arasındaki yol ailesinin asimtotları elde edilir).

Şekil 3.7, bu davranışın kalitatif şeklini göstermektedir. Bu durumda kritik nokta bir semer noktasıdır ve kararsızdır.



Şekil 3.7. m_1 ve m_2 kökleri reel, farklı ve zıt işaretli ise $(0,0)$ kritik noktası için semer noktası

Durum C. m_1 ve m_2 kökleri eşlenik karmaşık ancak sıfır sanal değilse, bu durumda $(0,0)$ kritik noktası bir samal noktadır.

İspat: Bu durumda a ve b sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere m_1 ve m_2 , $a \pm ib$ şeklinde yazılabilir. Keza daha sonraki kullanım için “Eş.3.7” denkleminin D diskriminantının

$$\begin{aligned} D &= (a_1 + b_2)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= (a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 < 0 \end{aligned} \quad [3.11]$$

olduğuna dikkat edelim. Bu durumda “Eş.3.5”ın genel çözümü, A ’lar ve B ’ler belli sabitler ve c ’ler keyfî sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} x = e^{at} [c_1 (A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + c_2 (A_1 \sin bt + A_2 \cos bt)] \\ y = e^{at} [c_1 (B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + c_2 (B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)] \end{cases} \quad [3.12]$$

şeklindedir. Öncelikle $a < 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda “Eş.3.12” den $t \rightarrow \infty$ için $x \rightarrow 0$ ve $y \rightarrow 0$ olduğu anlaşılır ve böylece bütün yollar $t \rightarrow \infty$ için $(0,0)$ ’a yaklaşır. $t \rightarrow \infty$ için $(0,0)$ ’a girmez, ancak bunun yerine onun etrafında sarmal benzeri biçimde döner. Bunu göstermek için θ kutupsal koordinatlarını kullanarak herhangi bir yol boyunca $\frac{d\theta}{dt}$ nin her t için ya pozitif yada her t için negatif olduğunu gösterelim. $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ olduğundan,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{x^2 + y^2} \quad \text{ve “Eş.3.5” denklemleri kullanılarak}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{a_2 x^2 + (b_2 - a_1)xy - b_1 y^2}{x^2 + y^2} \quad [3.13]$$

elde edilir.

Sadece yolları gösteren çözümlerle ilgilendiğimizden $x^2 + y^2 \neq 0$ olduğunu varsayalım. “Eş.3.11” koşulu a_2 ve b_1 in zıt işaretli olması gerektiği ifade eder. $a_2 > 0$ ve $b_1 < 0$ durumunu göz önüne alalım. $y = 0$ olduğundan “Eş.3.13” den $\frac{d\theta}{dt} = a_2 > 0$ elde edilir. $y \neq 0$ ise, $\frac{d\theta}{dt}$ sıfır olamaz. Zira öyle olsaydı, “Eş.3.13” den

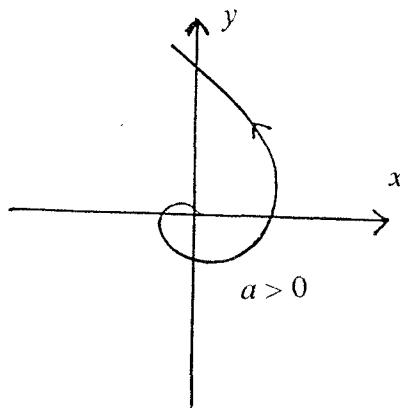
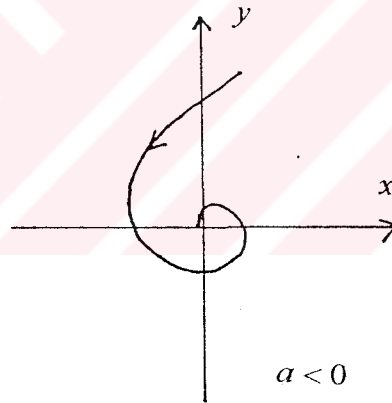
$$a_2 x^2 + (b_2 - a_1)xy - b_1 y^2 = 0$$

yada bir $\frac{x}{y}$ reel sayısı için,

$$a_2 \left(\frac{x}{y} \right)^2 - (b_2 - a_1) \frac{x}{y} - b_1 = 0 \quad [3.14]$$

elde edilir ki, “Eş.3.14” kuadratik denkleminin diskriminantı, “Eş.3.11” nedeniyle negatif olan D olduğundan bu doğru olamaz. Bu gösteriyor ki $\frac{d\theta}{dt}$, $a > 0$ olduğunda daima pozitif ve aynı şekilde $a < 0$ olduğunda daima negatiftir. “Eş.3.12” nedeniyle $t \rightarrow \infty$ a giderken x ve y ’nin işaretleri sonsuz çoklukta değiştiğinden, bütün yollar orijin etrafında içine doğru sarmal biçimli ($a > 0$ yada $a < 0$ olmasına göre pozitif yönde yada negatif yönde) olması gerekmektedir. Bu durumda kritik nokta bir sarmal noktadır ve asimtotik kararlıdır.

$a > 0$ ise, yollar $t \rightarrow -\infty$ için $(0,0)$ ’a yaklaşma dışında aynıdır ve bu durumda kritik nokta kararsızdır. Şekil 3.8, $a > 0$ olduğunda yolların düzenini göstermektedir.



Şekil 3.8. m_1 ve m_2 kökleri eşlenik karmaşık ancak sıfır sanal değil değilse $(0,0)$ kritik noktası için sarmal nokta

Sınırdaki durumlar:

Durum D. m ve m_2 kökleri reel ve eşit ise, bu durumda $(0,0)$ kritik noktası bir düğüm noktasıdır.

İspat: $m_1 = m_2 = m < 0$ olacak işe başlayalım. İrdelenmesi gereken iki alt durum vardır.

i.) $a_1 = b_2 \neq 0$ ve $a_2 = b_1 = 0$

ii.) “Eş.3.7” denklemi için katlı kök veren diğer durumlar

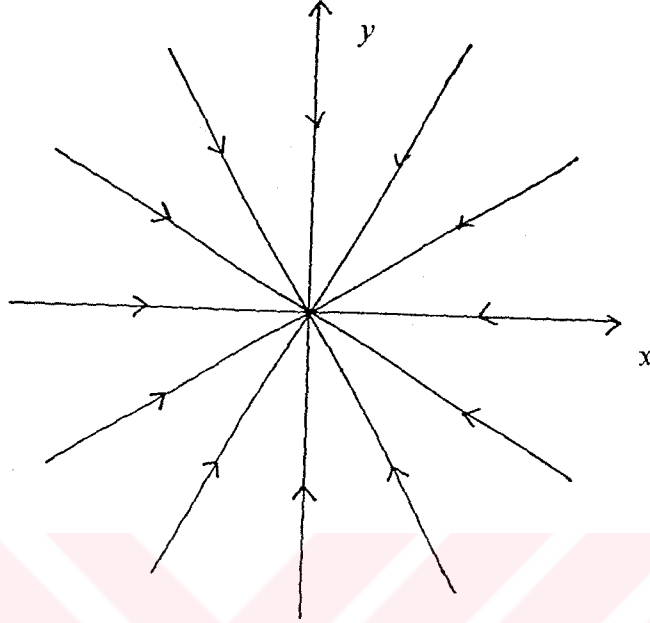
İlk olarak (i.) alt durumunu göz önüne alalım. Bu durum, Euler yönteminin eşit kökler halinde tanımlanan durumlardır. a, a_1 ve b_2 nin ortak değerini gösterirse, bu durumda “Eş.3.7” denklemi, $m^2 - 2am + a^2 = 0$ şeklini alır ve buradan $m = a$ dır. Buna göre “Eş.3.5” sistemi

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = ay \end{cases}$$

şeklini alır. Bu sistemin genel çözümü

$$\begin{cases} x = c_1 e^{mt} \\ y = c_2 e^{mt} \end{cases} \quad [3.15]$$

şeklindedir. “Eş.3.15” ile tanımlı yollar, bütün olurlu eğimlere sahip yarı doğrulardır. Şekil 3.9 ve $m < 0$ olduğundan her bir yol $t \rightarrow \infty$ için $(0,0)$ ’a yaklaşır ve girer. Bu yüzden kritik nokta bir düğüm noktasıdır ve asimtotik kararlıdır. $m > 0$ ise, bu kez yollar $t \rightarrow -\infty$ için $(0,0)$ yaklaşmak ve girmek dışında aynıdır. Şekil 3.9 da oklar tersine çevrilmiş olur ve bu yüzden $(0,0)$ noktası kararsızdır.



Şekil 3.9. $m < 0$, kritik nokta düğüm noktası

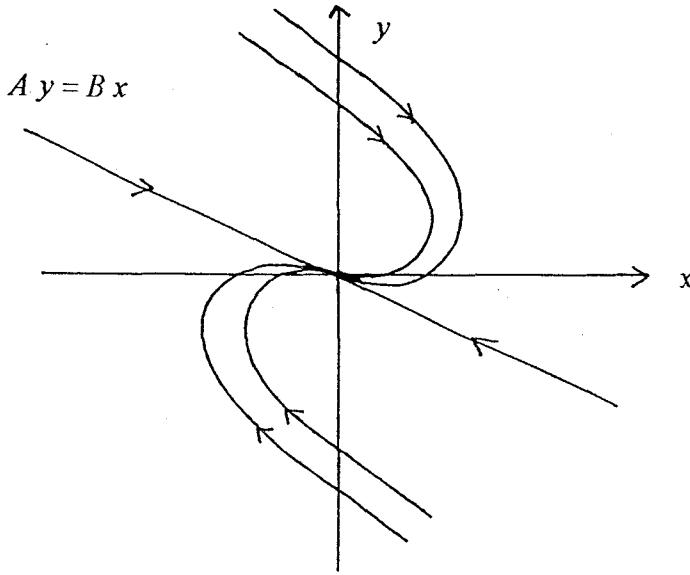
Şimdi (ii.) alt durumunu ele alalım. Bu durumda “Eş.3.5”ın genel çözümü

$$\begin{cases} x = c_1 A e^{mt} + c_2 (A_1 + At) e^{mt} \\ y = c_1 B e^{mt} + c_2 (B_1 + Bt) e^{mt} \end{cases} \quad [3.16]$$

şeklinde yazılabilir. $c_2 = 0$ olduğunda

$$\begin{cases} x = c_1 A e^{mt} \\ y = c_1 B e^{mt} \end{cases} \quad [3.17]$$

çözümleri elde edilir. Bu çözümler, $\frac{B}{A}$ eğimli $Ay = Bx$ doğrusu üzerinde bulunan iki yarı doğru gösterir ve $m < 0$ olduğundan her iki yol, $t \rightarrow \infty$ için $(0,0)$ ’a yaklaşır. (Şekil 3.10)



Şekil 3.10. $(0,0)$ noktası bir düğüm noktası

Ayrıca $\frac{y}{x} = \frac{B}{A}$ olduğundan her iki yol, $\frac{B}{A}$ eğimli olarak $(0,0)$ 'a girer.

$c_2 \neq 0$ ise, “Eş.3.16” çözümleri eğrisel yollar gösterir ve $m < 0$ olduğundan, bu yollar $t \rightarrow \infty$ a girerken $(0,0)$ 'a yaklaşır. Ayrıca

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 B e^{mt} + c_2 (B_1 + Bt) e^{mt}}{c_1 A e^{mt} + c_2 (A_1 + At) e^{mt}} = \frac{\frac{c_1 B}{c_2} + B_1 + Bt}{\frac{c_1 A}{c_2} + A_1 + At}$$

nedeniyle $t \rightarrow \infty$ için $\frac{y}{x} = \frac{B}{A}$ ya girer. O halde eğrisel yolların tümü $\frac{B}{A}$ eğimli

olarak $(0,0)$ 'a girer. $t \rightarrow -\infty$ için de $\frac{y}{x} \rightarrow \frac{B}{A}$ ya girer. Şekil 3.10, bu yolların

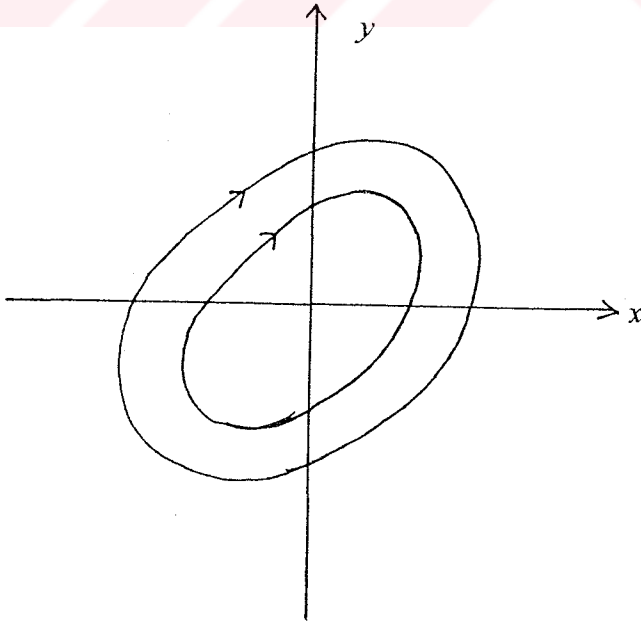
düzeninin bir kalitatif şeklini göstermektedir. Buna göre $(0,0)$ noktası bir düğüm noktasıdır ve asimtotik kararlıdır. $m > 0$ ise, yolların yönleri tersine çevrilir ve bu durumda kritik nokta kararsızdır.

Durum E. m_1 ve m_2 kökleri sıfır sanal ise, bu durumda $(0,0)$ kritik noktası merkezdir.

İspat: Burada Durum C'nin irdelenmesine dönerek $a = 0$ ve $b \neq 0$ olmak üzere m_1 ve m_2 nin $a \pm ib$ şeklini ele almamız yeterlidir. Buna göre "Eş.3.5"nin genel çözümü, üstel çarpan olmamak üzere "Eş.3.12" şeklindedir. Yani $x(t)$ ve $y(t)$ periyodiktir ve her bir yol orijin etrafında kapalı bir yoldur. Şekil 3.11 de görüldüğü üzere bu eğriler elipslerdir. Yolların elipsler olduğu, yolların

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2x + b_2y}{a_1x + b_1y} \quad [3.18]$$

şeklindeki diferensiyel denkleminin çözülmesiyle görülebilir. $(0,0)$ kritik noktası bir merkez olup kararlıdır, ancak asimtotik kararlı değildir.



Şekil 3.11. m_1 ve m_2 kökleri sıfır sanal ise $(0,0)$ kritik noktası merkez nokta

Yukarıdaki irdelemelerde kararlılık hakkında çok sayıda ifade kullanıldı. Bunları aşağıda olduğu gibi özetlemek uygun olacaktır.

Teorem 3.1. “Eş.3.5” lineer sisteminin (0,0) kritik noktasının kararlı olması, “Eş.3.7” karakteristik denkleminin her iki kökünün pozitif olmayan reel kısmı olması ile ve asimtotik kararlı olması, her iki kökünün negatif reel kısmı olması ile eşdeğerdir.

Şimdi “Eş.3.7” denklemi

$$(m - m_1)(m - m_2) = m^2 + pm + q = 0 \quad [3.19]$$

şeklinde yazılırsa, buradan

$$p = -(m_1 + m_2) \quad \text{ve} \quad q = m_1 m_2$$

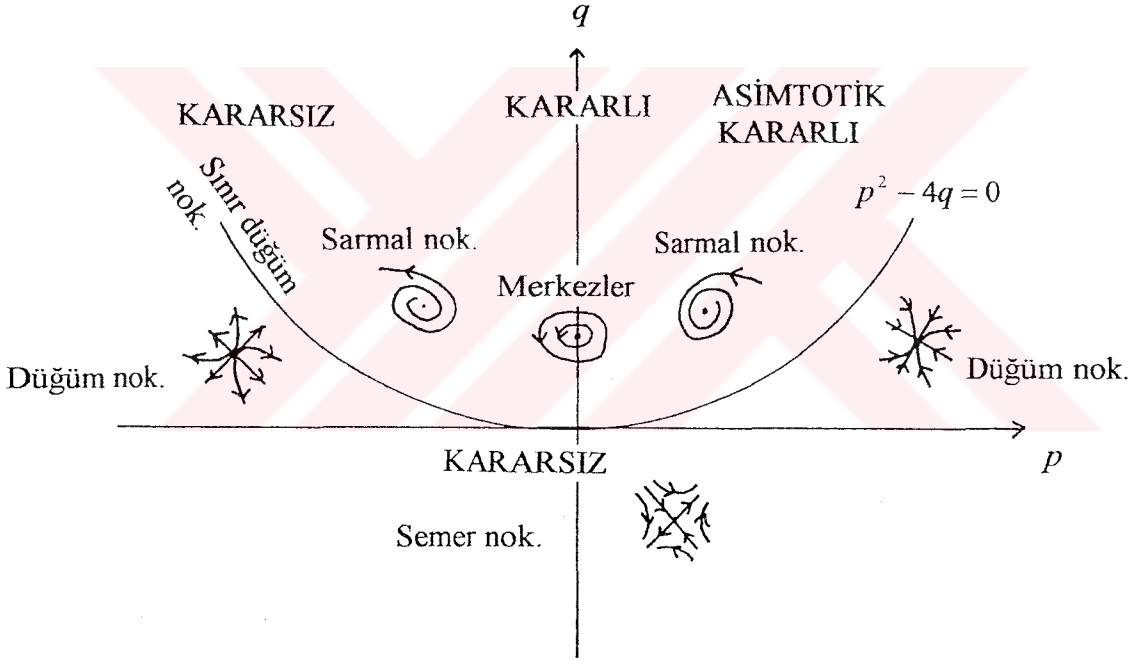
dir. Buna göre beş durum, m_1 ve m_2 kökleri cinsinden olduğu gibi p ve q katsayıları cinsinden de kolaylıkla açıklanabilir. Gerçekten bu durumlar pq düzleminde yorumlanırsa, bu durumda Şekil 3.12 de belirtilen çarpıcı şekle varılır. Bu şekil ilk bakışta (0,0) kritik noktasının yapısını ve kararlılık özelliklerini göstermektedir.

Burada ilk dikkat edilecek şey, “Eş.3.6” koşulu nedeniyle $m_1 m_2 \neq 0$ olduğundan p eksenini olan $q = 0$ hariç tutuluyor. Beş durum hakkında öğrendiklerimizin ışığında Şekil 3.12’de kapsayan bilginin tümü doğrudan

$$m_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

den anlaşılır. Böylece $p^2 - 4q = 0$ parabolü üstünde $p^2 - 4q < 0$ dir. Böylece m_1 ve m_2 nin sırf sanal olan eşlenik karmaşık sayılar olması, $p = 0$ olması ile eşdeğerdir ve bunlar merkez ve sarmal noktaları kapsayan C ve E durumlarıdır. p eksenini

altında $q < 0$ dır ve bu zaman m_1 ve m_2 nin reel, farklı ve ters işaretli olması demektir. Bu da Durum B'nin semer noktasını verir. Sonuç olarak, bu iki bölge arasındaki kuşak (p eksenini dışında parabolü kapsayan) $p^2 - 4q \geq 0$ ve $q > 0$ bağıntıları ile karakterize edilir. Buradan m_1 ve m_2 reel ve aynı işaretlidir. Böylece A ve D 'nin düğüm noktaları elde edilir. Ayrıca asimtotik kararlılığa ilişkin bir tek bölge vardır ve bu bölgede birinci bölgedir. Bu durum aşağıda olduğu gibi ifade edilebilir.



Şekil 3.12. (0,0) kritik noktasının yapısı ve kararlılık özellikleri

Teorem 3.2. “Eş.3.5” lineer sisteminin (0,0) kritik noktasının asimtotik kararlı olması, “Eş.3.7” karakteristik denkleminin $p = -(a_1 + b_2)$ ve $q = a_1b_2 - a_2b_1$ katsayılarının her ikisinin pozitif olması ile eşdeğerdir.

Böylece sistemin açık çözümlerini analiz etmek suretiyle bir kritik nokta komşuluğunda lineer sistemin yollarını incelemiş olduk.

3.3. Liapunov Doğrudan Yöntemi İle Kararlılık

Bir fiziksel sistemin toplam enerjisi belli bir kritik noktada yerel minimuma sahip ise, bu durumda kritik noktanın sezgisel olarak karalı olduğu anlaşılır. Bu düşünce daha kapsamlı olarak kararlılık probleminin incelenmesinde basit ancak etkili bir yöntemle Liapunov tarafından genelleştirilmiştir. Liapunov yöntemi ve onun bazı uygulamaları üzerinde durulacaktır.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad [3.20]$$

şeklinde bir otonom sistemini göz önüne alalım ve bu sistemin ayırık bir kritik olarak $(0,0)$ orijinine sahip olduğunu varsayalım. Bilindiği üzere bir (x_0, y_0) kritik noktası daima orijine dönüştürülebileceğinden, bu varsayımın genelliği bozmayacağı açıktır.

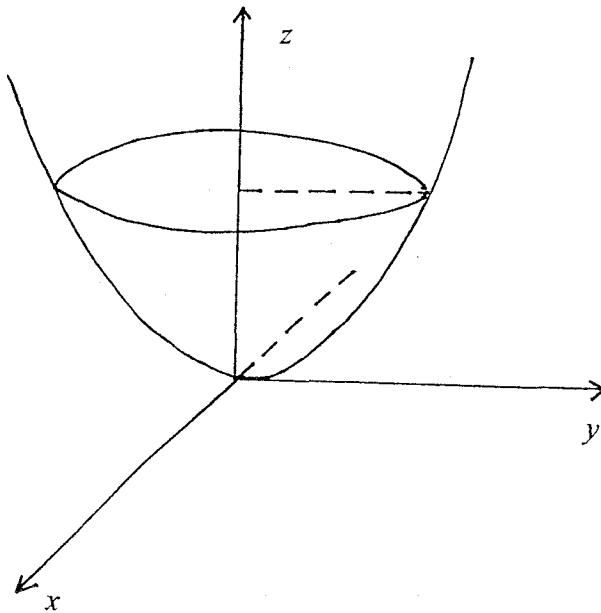
$C = [x(t), y(t)]$, “Eş.3.20”in bir yolu olsun ve bu yolu kapsayan bir bölgede kendisi ve birinci mertebeden parçalı türevleri sürekli bir $V(x, y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bir (x, y) noktası, $x = x(t)$, $y = y(t)$ denkleminde göre yol boyunca hareket ediyor ise, bu durumda $V(x, y)$, C boyunca t 'nin bir fonksiyonu olarak düşünülebilir. Bu fonksiyon $V(t)$ ile gösterilirse, onun değişme oranı

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} F + \frac{\partial V}{\partial y} G \end{aligned} \quad [3.21]$$

şeklinde. Bu formül, Liapunov'un düşüncelerinin özünü oluşturur ve bundan faydalanmak için ilgilenilecek fonksiyon türlerini ayırt eden bazı durumlara ihtiyaç vardır.

$V(x, y)$ 'nin orijini kapsayan bir bölgede sürekli ve sürekli birinci mertebeden parçalı türevlere sahip olduğunu varsayalım. V fonksiyonu $(0,0)$ için $V(0,0) = 0$ olmakla birlikte $(x, y) \neq (0,0)$ için $V(x, y) > 0$ ise pozitif tanımlı, $(x, y) \neq (0,0)$ için $V(x, y) < 0$ ise negatif tanımlıdır denir. Benzer olarak $V(0,0) = 0$ ve $(x, y) \neq (0,0)$ için $V(x, y) \geq 0$ ise pozitif yarı-tanımlı, $(x, y) \neq (0,0)$ için $V(x, y) \leq 0$ negatif yarı-tanımlı denir.

a ve b pozitif sabitler ve m, n tamsayılar olmak üzere $ax^{2m} + by^{2n}$ şeklindeki fonksiyonlar pozitif tanımlıdır. $V(x, y)$ 'nin negatif tanımlı olması, $-V(x, y)$ 'nin pozitif tanımlı olması ile eşdeğer olduğundan $a < 0$ ve $b < 0$ olmak üzere $ax^{2m} + by^{2n}$ şeklindeki fonksiyonlar negatif tanımlıdır. x^{2m} , y^{2m} ve $(x - y)^{2m}$ fonksiyonları pozitif tanımlı değildir, ancak bunlar pozitif yarı tanımlıdır (örneğin, x^{2m} fonksiyonu $(0,0)$ için sıfır, ancak $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$ için de sıfırdır). $V(x, y)$ pozitif tanımlı ise, bu durumda $z = V(x, y)$ fonksiyonu, yukarı doğru açılan ve xy düzlemine orijinde teğet olan bir paraboloid benzer bir yüzeyin denklemi olarak yorumlanabilir. (Şekil 3.13)



Şekil 3.13. Pozitif tanımlı $z = V(x, y)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G \quad [3.22]$$

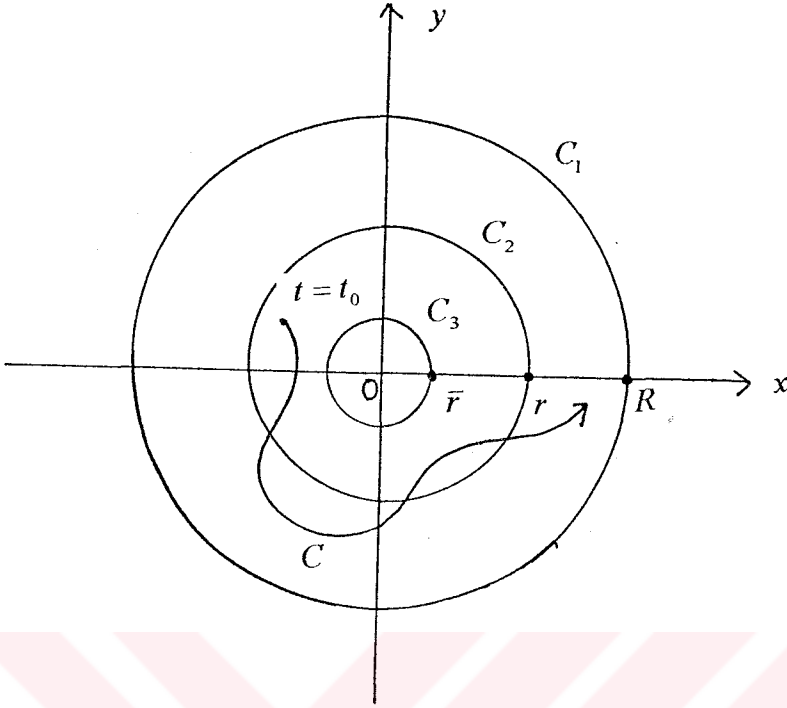
negatif yarı tanımlı özelliğine sahip pozitif tanımlı bir $V(x,y)$ fonksiyonu, “Eş.3.20” sistemi için bir Liapunov fonksiyonu adını alır. “Eş.3.21” formülü nedeniyle, “Eş.3.22”in negatif yarı tanımlı olması, $\frac{dV}{dt} \leq 0$ olması demektir ve bu yüzden V fonksiyonu orijin komşuluğunda “Eş.3.20”nin yolları boyunca artmayan bir fonksiyondur. Bu fonksiyonlar, bir fiziksel sistemin toplam enerji kavramını genelleştirir. Kararlılık problemleri bakımından onların ilgisi, Liapunov ‘un temel keşfi olan aşağıdaki teoremda açıklığa kavuşmaktadır.

Teorem 3.3. “Eş.3.20” sistemi için bir $V(x,y)$ Liapunov fonksiyonu var ise, bu durumda $(0,0)$ kritik noktası kararlıdır. Ayrıca, bu fonksiyon “Eş.3.22” fonksiyonunun negatif tanımlı ek özelliğine sahip ise, bu durumda $(0,0)$ kritik noktası asimtotik kararlıdır.

İspat: C_1 merkezi orijinde yarıçapı $R > 0$ olan bir çember olsun (Şekil 3.14) ve ayrıca C_1 ’in tamamen V fonksiyonunun tanım bölgesinde bulunacak şekilde yeteri kadar küçük olduğunu varsayalım.

$V(x,y)$ sürekli ve pozitif tanımlı olduğundan C_1 üzerinde bir pozitif m minimumuna sahiptir. $V(x,y)$ orijinde sürekli ve o noktada sıfır olduğundan (x,y) noktası r yarıçaplı C_2 çemberi içerisinde olduğundan $V(x,y) < m$ olacak şekilde pozitif bir $r < R$ sayısı bulunabilir. $C = [x(t), y(t)]$, $t = t_0$ için C_2 içerisinde olan herhangi bir yol olsun. Bu durumda $V(t_0) < m$ ve “Eş.3.22” negatif yarı tanımlı olduğundan, $\frac{dV}{dt} \leq 0$ dır ve bu her $t > t_0$ için $V(t) \leq V(t_0) < m$ olmasını gerektirir.

Buna göre anlaşıyor ki C yolu, kesinlikle herhangi bir $t > t_0$ için C_1 çemberine varamaz. böylece kararlılık durumu ortaya çıkar.



Şekil 3.14. $(0,0)$ kritik noktası kararlı

Teoremin ikinci kısmını ispatlamak için, ek varsayım altında $V(t) \rightarrow 0$ olduğunu göstermek yeter, zira $V(x, y)$ pozitif tanımlı olduğundan, bu durum C yolunun $(0,0)$ kritik noktasına yaklaştığını ifade eder. $\frac{dV}{dt} < 0$ olduğundan, $V(t)$ azalan bir fonksiyondur ve varsayım nedeniyle $V(t)$ aşağıdan sıfır ile sınırlı olduğundan, $V(t)$ 'nin $t \rightarrow \infty$ için bir $L \geq 0$ limitine yaklaştığı sonucuna varılır. $V(t) \rightarrow 0$ olduğunu kanıtlamak için $L = 0$ olduğunu göstermek yeter. Buna göre $L > 0$ olduğunu varsayarak bir çelişkiye varıldığını görelim. (x, y) , $\bar{r}$ yarıçaplı C_3 çemberi içerisinde olduğunda $V(x, y) < L$ özelliğine sahip pozitif bir $\bar{r} < r$ sayısı seçelim. “Eş.3.22” fonksiyonu sürekli ve negatif tanımlı olduğundan, C_1 ve C_3 çemberlerinden oluşan halka ile onlar arasındaki bölgede bir $-k$ negatif maksimumuna sahiptir. Bu halka $t \geq t_0$ için tüm C yolunu kapsar. Böylece

$$V(t) = V(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dV}{dt} dt$$

eşitliğinden, her $t \geq t_0$ için

$$V(t) \leq V(t_0) - k(t - t_0) \quad [3.23]$$

eşitsizliğine varılır. Bununla beraber, “Eş.3.23”ün ikinci yanı $t \rightarrow \infty$ a giderken negatif olur ve böylece $t \rightarrow \infty$ için $V(t) \rightarrow -\infty$ olur. Bu durum, $V(x, y) \geq 0$ olması gerçeği ile çelişir. Böylece $L = 0$ olduğu sonucuna varılarak ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki özelliklere sahip bir $V(x, y)$ fonksiyonu var ise, bu durumda “Eş.3.20” sisteminin $(0,0)$ kritik noktası kararsızdır.

- i.) $V(x, y)$ fonksiyonu orijini kapsayan bir bölgede sürekli ve sürekli birinci mertebeden parçalı türevlere sahiptir.
- ii.) $V(0,0) = 0$ dır.
- iii.) $(0,0)$ merkezli her çember, $V(x, y)$ 'nin pozitif olduğu en az bir nokta kapsar.
- iv.) $\frac{\partial V}{\partial x} F + \frac{\partial V}{\partial y} G$ pozitif tanımlıdır.

Örnek 3.1.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2xy \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - y^3 \end{cases}$$

sistemi $(0,0)$ ayırık kritik noktasına sahiptir. $V(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$ şeklinde bir Liapunov fonksiyonu oluşturmak suretiyle kararlılığı kanıtlamaya çalışalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} F + \frac{\partial V}{\partial y} G &= 2 \max^{2m-1} (-2xy) + 2nby^{2n-1} (x^2 - y^3) \\ &= (-4 \max^{2m} y + 2nbx^2 y^{2n-1}) - 2nby^{2n+2} \\ &= (-4.1.1.x^{2.1} y + 2.1.2.x^2 y^{2.1-1}) - 2.1.2.y^{2.1+2} \\ &= -4x^2 y + 4x^2 y - 4y^4 \end{aligned}$$

$$= -4y^4$$

olduğuna göre $m=1, n=1, a=1, b=2$ olarak seçmek suretiyle parantez içindeki ifade sıfır yapılabilir. Bu seçimlere göre $V(x, y) = x^2 + 2y^2$ olur ve bu fonksiyon pozitif tanımlıdır. Ve $\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G = -4y^4$ de negatif yarı tanımlıdır. Buna göre verilen sisteminin $(0,0)$ kritik noktası kararlıdır.

Bu örnekten anlaşılıyor ki karışık durumlarda uygun Liapunov fonksiyonlarını oluşturmak gerçekten çok zor olabilir. Bu bakımdan aşağıdaki sonuç bazen yararlıdır.

Teorem 3.4. $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ fonksiyonunun pozitif tanımlı olması $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ olması ile ve negatif tanımlı olması $a < 0$, $b^2 - 4ac < 0$ olması ile eşdeğerdir.

İspat: $y = 0$ ise, $V(x, 0) = ax^2$ dir. $x \neq 0$ için $V(x, 0) > 0$ olması $a > 0$ olması ile eşdeğerdir.

$$y \neq 0 \text{ ise } V(x, y) = y^2 \left[a \left(\frac{x}{y} \right)^2 + b \left(\frac{x}{y} \right) + c \right]$$

yazılabilir ve $a > 0$ olduğunda büyük parantez içerisindeki $\frac{x}{y}$ ye göre olan

polinomun $\left(\frac{x}{y} \right)$ nin büyük değerleri için pozitifdir) her $\frac{x}{y}$ için pozitif olması,

$b^2 - 4ac < 0$ olması ile eşdeğerdir. Buna göre teorem ispatlanmış olur.

3.4. Lineer Olmayan Sistemlerin Basit Kritik Noktaları

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad [3.24]$$

otonom sistemini göz önüne alalım. Ve $(0,0)$ bu sistemin ayırık kritik noktası olsun. $F(x, y)$ ve $G(x, y)$, x ve y 'ye göre kuvvet serisine açılabilir ise, bu durumda “Eş.3.24” sistemi

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1x^2 + d_1xy + e_1y^2 + \dots \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2x^2 + d_2xy + e_2y^2 + \dots \end{cases} \quad [3.25]$$

şeklini alır.

$|x|$ ve $|y|$ küçük olduğunda, yani (x, y) orijine yakın olduğunda, ikinci ve daha yüksek dereceli terimler çok küçük olur. Bu yüzden lineer olmayan terimleri ihmal ederek $(0,0)$ kritik noktası komşuluğunda “Eş.3.25”in yollarının kalitatif davranışının, “Eş.3.25”e ilişkin

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases} \quad [3.26]$$

lineer sisteminin yollarınıninkine benzer olduğunu düşünmek yerinde olacaktır. Genel olarak durumun böyle olduğu görülecektir.

“Eş.3.25”in “Eş.3.26” lineer sistemi ile değiştirilmesi işlemi çoğunlukla *lineerleştirme* adını alır. Daha genel olarak,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + g(x, y) \end{cases} \quad [3.27]$$

şeklindeki sistemler ele alınacaktır. “Eş.3.27”ye ilişkin “Eş.3.26” lineer sisteminin $(0,0)$ ’a bir ayrık kritik nokta olarak sahip olması için

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \quad [3.28]$$

olduğu varsayılacaktır. Burada $f(x, y)$ ve $g(x, y)$ fonksiyonları her (x, y) için sürekli ve birinci mertebeden sürekli parçalı türevlere sahiptir ve $(x, y) \rightarrow (0,0)$ için

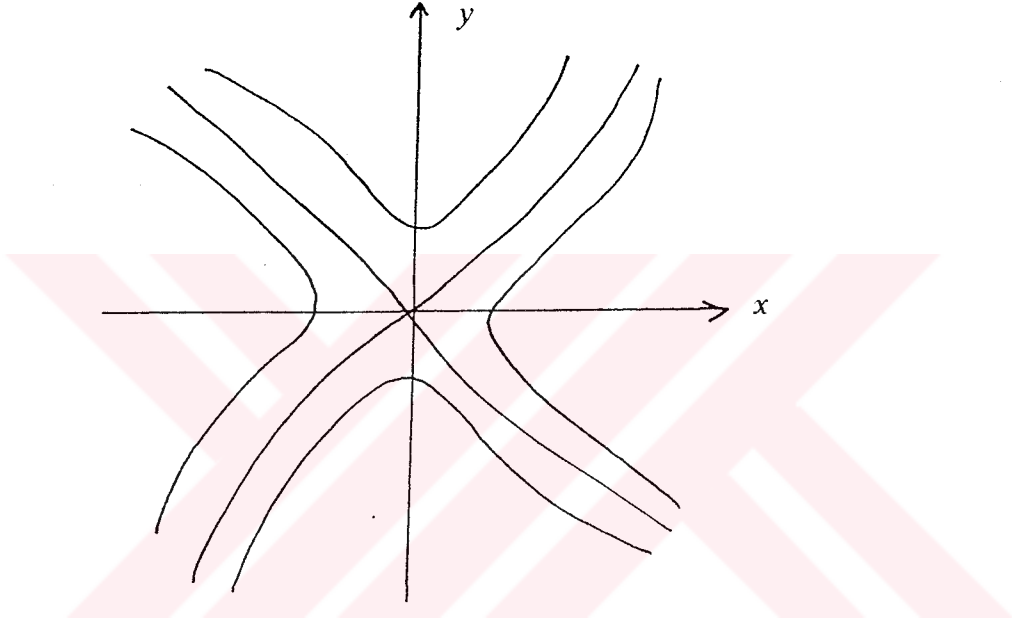
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad [3.29]$$

dır. “Eş.3.29” koşullarının $f(0,0) = 0$ ve $g(0,0) = 0$ olduğunu ifade ettiğine dikkat edilmelidir ve buna göre $(0,0)$, “Eş.3.27”nin bir kritik noktasıdır. Bu nokta aynı zamanda ayrıktır. Yukarıda belirtilen kısıtlamalara göre $(0,0)$ noktası, “Eş.3.27” sisteminin bir basit kritik noktası adını alır.

Basit kritik noktalarının yapısı hakkında temel gerçekler, aşağıdaki Poincare teoreminde verilmektedir.

Teorem 3.5. $(0,0)$, “Eş.3.27” lineer olmayan sisteminin bir basit kritik noktası olsun ve buna ilişkin “Eş.3.26” lineer sistemini göz önüne alalım. “Eş.3.26”nin $(0,0)$ kritik noktası, Kısım 3.2. de açıklanan üç temel durumdan herhangi birine giriyor ise, bu durumda “Eş.3.27”nin $(0,0)$ kritik noktası aynı türdendir.

Teoremdede kapsanan durumlarda $(0,0)$ kritik noktasının türü “Eş.3.26” ve “Eş.3.27” için aynı olduğu halde, yolların gerçek durumu bir dereceye kadar farklıdır. Örneğin, Şekil 3.7, bir lineer sistem için tipik bir semer noktası gösterildiği halde, Şekil 3.15 lineer olmayan bir sistem için semer noktasının nasıl görüldüğünü belirtmektedir.



Şekil 3.15. Lineer olmayan bir sistem için semer noktası

Teorem 3.5 de belirtilmeyen iki sınır durumu doğal olarak merak edilebilir: ilişkin “Eş.3.26” lineer sistemi orijinde bir sınır düğüm noktasına sahip ise (Durum D), bu durumda “Eş.3.27” lineer olmayan sistemi yada düğüm yada bir sarmal noktaya sahip olabilir ve “Eş.3.26” sistemi orijinde bir merkez sahip ise (Durum E), bu durumda “Eş.3.27” sistemi bir merkeze yada bir sarmal noktaya sahip olabilir.

Lineer sistemlerin kritik noktalarında dikkate değer çeşitli şekillerde karşılaştık. Buna göre yukarıdaki uyarılar gösteriyor ki, lineer olmayan sistemlerin basit kritik noktalarında yeni bir durum ortaya çıkmaz. Basit olmayan kritik noktalarda acaba ne olabilir? Buradaki seçenekler en iyi şekilde “Eş.3.25” şeklinde lineer olmayan bir sistemi incelemekle ayırt edilebilir. “Eş.3.25” deki lineer terimler, orijin

komşuluğunda yolların modelini belirtmiyor ise, bu durumda ikinci derece terimlerinin göz önüne alınması gerekir. Bunlar da modeli ortaya çıkarmıyor ise, bu durumda üçüncü dereceden terimlerin dikkate alınması gerekir ve benzeri.

Buradaki basit bir kritik nokta için kararlılık sorusu için temel sonuç Liapunov 'a aittir. “Eş.3.26” sistemi orijinde asimtotik kararlı ise, bu durumda “Eş.3.27” sistemi de orijinde asimtotik kararlıdır. Bunun teorem olarak ifadesi aşağıdadır.

Teorem 3.6. $(0,0)$, “Eş.3.27” lineer olmayan sisteminin bir basit kritik noktası olmak üzere ilişkin “Eş.3.26” lineer sistemini göz önüne alalım. “Eş.3.26”nın $(0,0)$ kritik noktası asimtotik kararlı ise, bu durumda “Eş.3.27”ni $(0,0)$ kritik noktası da asimtotik kararlıdır.

İspat: Bölüm 3.3 , Teorem 3.3 nedeniyle, “Eş.3.27” sistemi için uygun bir Liapunov fonksiyonu oluşturma yeterlidir ve yapılacak olan budur. Bölüm 3.2, Teorem 3.2 nedeniyle, “Eş.3.26” lineer sisteminin katsayıları

$$p = -(a_1 + b_2) > 0 \quad \text{ve} \quad q = a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0 \quad [3.30]$$

koşullarını sağlar. Şimdi

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

şeklinde bir fonksiyon ele alalım.

$$D = pq = -(a_1 + b_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

olmak üzere V deki katsayılar

$$a = \frac{a_2^2 + b_2^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{D}$$

$$b = -\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{D}$$

$$c = \frac{a_1^2 + b_1^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{D}$$

şeklinde olsun. “Eş.3.30” nedeniyle $D > 0$ ve $a > 0$ dır. Basit bir hesap sonucunda $(ac - b^2)$ bulunur ise),

$$D^2(ac - b^2) = (a_2^2 + b_2^2)(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2 + a_1^2 + b_1^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 - (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2$$

$$= (a_2^2 + b_2^2 + a_1^2 + b_1^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) + 2(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 > 0$$

elde edilir. Buna göre $D^2(ac - b^2) > 0 \Rightarrow b^2 - ac < 0$ olduğu anlaşılır. Buradan Bölüm 3.3 Teorem 3.4 nedeniyle $V(x, y)$ fonksiyonu pozitif tanımlıdır. Ayrıca bir diğer hesap ile

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a_1 x + b_1 y) + \frac{\partial V}{\partial y}(a_2 x + b_2 y) = -(x^2 + y^2) \quad [3.31]$$

elde edilir. Bu fonksiyon negatif tanımlıdır. Böylece $V(x, y)$, “Eş.3.26” lineer sistemi için bir Liapunov fonksiyonudur. Yukarıdaki a, b ve c seçimlerinin, “Eş.3.31” eşitliği geçerli olması şeklinde (ki negatif tanımlı olsun) belirtilmiş sabitler olduğuna dikkat edilmelidir.

Şimdi gösterelim ki $V(x, y)$ aynı zamanda “Eş.3.27” lineer olmayan sitemi için de bir Liapunov fonksiyonudur.

$$F(x, y) = a_1 x + b_1 y + f(x, y)$$

$$G(x, y) = a_2 x + b_2 y + g(x, y)$$

ile tanımlanır ise, bu durumda V 'nin pozitif tanımlı olduğu bilindiğinden,

$$\frac{\partial V}{\partial x} F + \frac{\partial V}{\partial y} G \quad [3.32]$$

nin negatif tanımlı olduğunu göstermek yeter. “Eş.3.31” kullanılırsa “Eş.3.32” fonksiyonu

$$-(x^2 + y^2) + (ax + by)f(x, y) + (bx + cy)g(x, y)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade kutupsal koordinatların kullanılması ile

$$-r^2 + r[(a \cos \theta + b \sin \theta)f(x, y) + (b \cos \theta + c \sin \theta)g(x, y)]$$

şeklini alır. $|a|, |b|, |c|$ sayılarının en büyüğü K ile gösterilirse “Eş.3.29” varsayımı, yeteri kadar küçük her r için

$$|f(x, y)| < \frac{r}{6K} \quad \text{ve} \quad |g(x, y)| < \frac{r}{6K}$$

olmasını gerektirir. Buna göre yeteri kadar küçük her $r > 0$ için,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} F + \frac{\partial V}{\partial y} G &< -r^2 + r[K(\cos \theta + \sin \theta)f(x, y) + K(\cos \theta + \sin \theta)g(x, y)] \\ &= -r^2 + Kr(\cos \theta + \sin \theta)[f(x, y) + g(x, y)] \\ &< -r^2 + Kr(2)\left[\frac{r}{6K} + \frac{r}{6K}\right] \\ &= -r^2 + \frac{4Kr^2}{6K} = -\frac{r^2}{3} < 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece $V(x, y)$ fonksiyonu, “Eş.3.32”nin negatif tanımlı olma özelliğine sahip pozitif tanımlı bir fonksiyondur. O halde V , “Eş.3.27” için de bir Liapunov fonksiyonudur. Buradan Bölüm 3.3 Teorem 3.3 nedeniyle $(0,0)$ noktası, “Eş.3.27” lineer olmayan sisteminin asimtotik kararlı bir kritik noktasıdır ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.



4. KARARLILIKLA İLİŞKİLİ TANIMLAR

Diferensiyel denklem sistemlerinin tanımı zamandan bağımsız lineer denklemlerden, zamanla değişen lineer denklemler ve lineer olmayan denklemlere doğru gelişme gösterdikçe dinamik sistemlerin kararlılığının karmaşıklık derecesi de hızla yükselmektedir.

Çeşitli kararlılık kriterleri zamandan bağımsız lineer sistemlere uygulanabilir. Sadece birkaç metot zamanla değişen lineer sistemlere ve lineer olmayan sistemlere uygulanabilir. Bunların pek çoğunun uygulaması sınırlıdır.

Bölüm 5’de zamandan bağımsız lineer sistemlere uygulanabilen Routh ‘s ve Hurwitz kararlılık kriterleri ve Bölüm 6’da lineer ve lineer olmayan sistemlere uygulanabilen Liapunov’un kararlılık kriterleri (Liapunov’un birinci ve ikinci metodu) üzerinde duracağız.

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin kesin çözümleri konu dışı olduğu için bu sistemlerin kararlılığı araştırılırken en uygun metot Liapunov’un ikinci metodudur. Bu metot lineer olmayan sistemlerin asimtotik kararlılığı için gerekli koşulları, lineer zamandan bağımsız sistemlerin denge konumlarının asimtotik kararlılığı için gerekli ve yeterli koşulları verir. Liapunov ‘un ikinci metodu ayrıca kararlı optimal kontrol sistemlerin şekillendirilmesinde son derece yararlıdır.

Dinamik sistemlerin kararlılığı için gerekli olacak terminolojik bilgiler;

Sistem: Burada tanımlanan sistem

$$\dot{x} = f(x, t) \quad [4.1]$$

x konum vektörü (n boyutlu vektör) ve $f(x, t)$, elemanları $x_1, x_2, \dots, x_n, t$ fonksiyonları olan bir n boyutlu vektördür.

Çözümlerin başlangıç koşullarına devamlı bağlılığı çözümlerin tek olduğu anlamına gelecektir. "Eş.4.1" denkleminin çözümü $\phi(t; x_0, t_0)$ ile göstermektedir ki $t = t_0$ iken $x = x_0$ ve t gözlem zamanı

$$\phi : R^n \times R \rightarrow R^n$$

$$\phi(t_0; x_0, t_0) = x_0$$

Hareket: Kararlılık, asimtotik kararlılık ve kararsızlık tanımlanırken sıklıkla hareket kelimesi kullanılacaktır. Hareket n boyutlu konum uzayında herhangi bir konum yada noktadan yörüngeye başlangıç olarak tanımlanacaktır.

Denge Konumu : "Eş.4.1" denklem sisteminde

$$f(x_e, t) = 0 \text{ her } t \text{ için} \quad [4.2]$$

oluyorsa x_e konumuna *denge konumu* denir.

Eğer sistem zamandan bağımsız lineer sistem ise, $f(x, t) = Ax$, A singüler değil ise bir denge konumu, A singüler ise birçok denge konumu ortaya çıkacaktır. Lineer olmayan sistemler için bir yada daha fazla denge konumu ortaya çıkar. Denge konumları sistemin sabit çözümleriyle eşlenmektedir. ($x = x_e$, her t için) Denge konumunun tanımı sadece "Eş.4.1" diferensiyel denklem sisteminin çözümünü değil "Eş.4.2" denkleminin çözümünü de içermektedir.

Eğer denge konumlarının her biri birbirinden ayrılmış ise, bunlara *izole denge konumları* denir. Her bir izole denge konumu koordinatların ötelenmesiyle orijine kaydırılabilir ($f(0, t) = 0$). Burada x_e izole denge konumudur.

Kararlılık: “Eş.4.1” denklem sisteminin x_e denge konumu *kararlıdır* eğer, her $\varepsilon > 0$ reel sayısı için bir $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ reel sayısı varsa öyleki

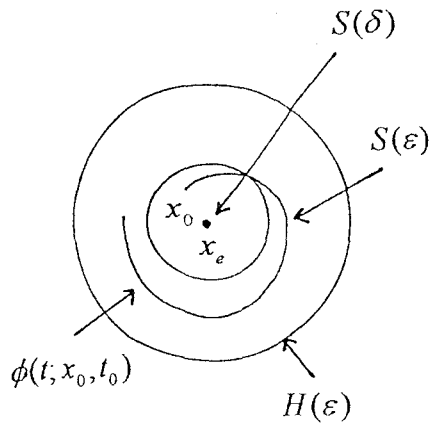
$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta$$

olmak üzere

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \varepsilon, \text{ her } t \geq t_0$$

δ reel sayısı ε ve genellikle t_0 a bağlıdır. Eğer δ, t_0 a bağlı değil ise denge konumuna düzgün kararlı denir.

Şekil 4.1 x_e kararlı denge konumu ve x_0 temsili yörünge başlangıcını göstermektedir. $S(\varepsilon)$ ve $S(\delta)$, x_e denge konumunda $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ çembersel bölümleridir (kapalı sınırlı n boyutlu konum uzayının yüzeyinde $S(\varepsilon)$ ve $S(\delta)$ dairesel bölgeleri kullanılabilir). $S(\varepsilon)$, $\|x - x_e\| < \varepsilon$ unu sağlayan x konumlarını kapsamaktadır. Bu şekil göstermektedir ki, her $S(\varepsilon)$ için $S(\delta)$ vardır ki. $S(\delta)$ ’in x_0 konumundan başlayan her hareket $S(\varepsilon)$ dan ayrılmaz yada $\phi(t; x_0, t_0)$ ı sağlayan $S(\delta)$ da ki x_0 , her $t \geq t_0$ için $S(\varepsilon)$ bağlıdır. Yani $S(\delta)$ dan başlayan bir hareket asla $S(\varepsilon)$ sınırındaki $H(\varepsilon)$ dairesine ulaşmaz.



Şekil 4.1. x_e kararlı denge konumu, x_0 temsili yörünge başlangıcı

“Eş.4.1” denkleminin çözümü sınırlıdır eğer, verilen bir $\delta > 0$ için $\varepsilon(\delta, t_0)$ sabiti varsa öyleki

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta$$

olmak üzere

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \varepsilon(\delta, t_0) \quad \text{her } t \geq t_0$$

dır. Eğer t_0 , ε a bağlı değilse, çözüm düzensiz sınırlıdır.

Asimtotik kararlılık: “Eş.4.1” denklemini ile verilen sistemin x_e denge konumu asimtotik kararlıdır eğer, x_e denge konumu kararlı ve t belirsiz olarak artarken x_e ’ye yeterince yakın olan x_0 konumundan başlayan her çözüm x_e ’ye yakınsıyorsa.

Verilen iki reel sayı $\delta > 0$ ve $\mu > 0$ için $\varepsilon > 0$ ve $T(\mu, \delta, t_0)$ reel sayıları varsa öyleki

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta$$

olmak üzere

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \varepsilon \quad \text{her } t \geq t_0 \text{ için}$$

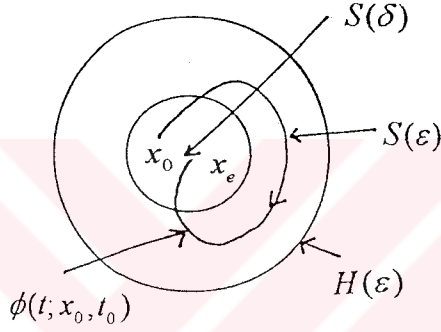
ve

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \mu \quad \text{her } t \geq t_0 + T(\mu, \delta, t_0)$$

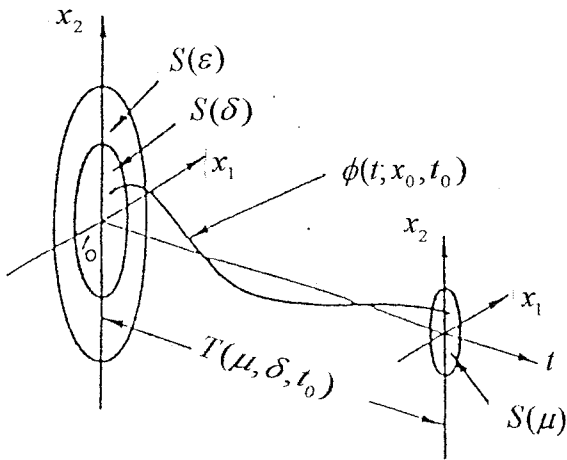
eşitlikleri sağlanır.

Şekil 4.2 x_e asimtotik kararlı denge konumu ve x_0 da temsili yörünge başlangıcını göstermektedir

Şekil 4.3 zamanla geçen temsili yörünge planını göstermektedir. Bu şekillerde $S(\varepsilon)$, $S(\delta)$ ve $S(\mu)$ sırasıyla x_e denge konumunun yarıçapları $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\mu > 0$ çembersel bölgelerdir. Eğer x_e denge konumu asimtotik kararlı ise $S(\delta)$ da x_0 konumundan başlayan her hareket $S(\varepsilon)$ dan ayrılmadan zaman belirsiz artarken orijine yakınsar.



Şekil 4.2. x_e asimtotik kararlı denge konumu



Şekil 4.3. Zamanla geçen temsili yörünge planı

Pratikte asimtotik kararlılık tek başına kararlılıktan daha önemlidir.

Geniş kapsamda asimtotik kararlılık : Eğer asimtotik kararlılık hareketlerin doğduğu tüm konumlar için geçerliyse denge konumu geniş kapsamda asimtotik kararlıdır.

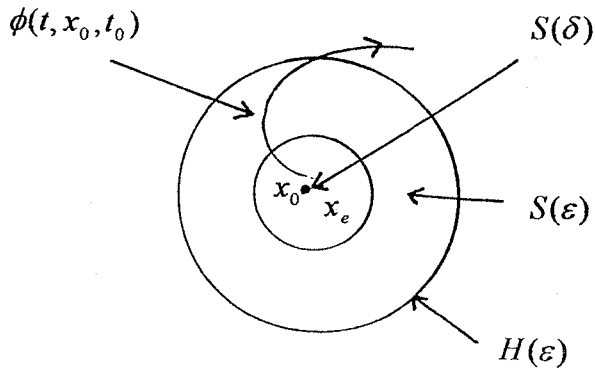
“Eş.4.1” denklemiyle verilen sistemin x_e denge konumu geniş kapsamda asimtotik kararlıdır eğer, x_e denge konumu kararlı ve t belirsiz olarak artarken her çözüm x_e ’ye yakınsıyorsa.

Açıkça geniş kapsamda asimtotik kararlılık için gerekli koşul tüm konum uzayında sadece bir denge konumunun olmasıdır.

Kontrol mühendislik problemlerinde arzu edilen nitelik geniş kapsamda asimtotik kararlılıktır. Eğer sistemin denge konumu geniş kapsamda asimtotik kararlı değil ise, bu durumda problem asimtotik kararlılığın en geniş bölümünde belirlenmektedir. Bu genellikle çok zordur. Pratik amaçla yapılacak en uygun şey asimtotik kararlılığın mümkün olan en geniş yerini belirlemektir.

Kararsızlık: Denge konumu kararlı yada asimtotik kararlı değilse *kararsızdır* denir.

Şekil 4.4. x_e kararsız denge konumunu ve x_0 temsili yörünge başlangıcını göstermektedir. Şekilde görüldüğü gibi kararsız bir denge konumu söz konusu olduğunda, bazı $\varepsilon > 0$ reel sayıları ve $\delta > 0$ herhangi bir reel sayısı için ne kadar küçük olursa olsun. $S(\delta)$ çembersel bölgesinde her zaman hareketin başladığı ve $S(\varepsilon)$ ’in sınırındaki $H(\varepsilon)$ dairesine ulaştığı bir x_0 konumu vardır (8).



Şekil 4.4. x_e kararsız denge konumu

5. ROUTH 'S VE HURWITZ KARARLILIK KRİTERLERİ

Zamandan bağımsız lineer sistemlerin kararlılık analizinin önemli olmasının nedeni ; zamandan bağımsız lineer modellere birçok pratik sistemle yaklaşılabilmesi bunun yanında, lineer olmayan sistemlerin denge konumlarının lokal (yerel) kararlılığında lineerleştirme tekniğini kullanarak elde edilebilecek zamandan bağımsız lineer modelin kararlılığı ile incelenebilmesidir.

$$\dot{x} = Ax$$

sistemini ele alalım. x , n boyutlu bir konum vektörü ve A , $n \times n$ singüler olmayan bir matris. Denge konumu açıkça ($x=0$) orijindir. Bu denklemin çözümünün yapısı A 'nin özdeğerlerine yada

$$|A - \lambda I| = 0$$

karakteristik denkleminin köklerine göre belirlenir. Eğer karakteristik denklemin katsayılarının hepsi reel ise bu denklemin kökleri reel yada kompleks eşleniktir. Eğer farklı köklerin sayısı p ise x çözümünün n tane bileşeni şu şekilde yazılabilir

$$x_i = \sum_{j=1}^p g_{ij}(t)e^{\lambda_j t} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

λ_j , A 'nin farklı özdeğerleri ve $g_{ij}(t)$ t deki sabitler yada polinomlardır.

Eğer A 'nin özdeğerlerinin tümü negatif reel kısımlara sahip ise sistemin $x=0$ denge konumu asimtotik kararlıdır.

Bir kez A nın karakteristik polinomu bulunduktan sonra çeşitli kararlılık kriterleri tüm köklerin negatif reel kısımlarının olup olmadığını belirlemek için

kullanılabilir. Bu amaç için kullanılan iki genel kriter Routh 's kararlılık kriteri ve Hurwitz kararlılık kriteridir (9).

5.1. Routh 's Kararlılık Kriteri

Aşağıda verilmiş sabit katsayılı polinomda

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad [5.1]$$

a katsayıları reel değerlidir. (Genellikle “Eş.5.1” denklemi a_0 ile bölünerek λ^n katsayısının tekliği sağlanır.)

Eğer bir polinom sabit fakat belirsiz katsayılar ile birlikte verilirse, Routh 's kararlılık kriteri polinom katsayılarının tüm köklerinin negatif reel kısımlarının olmasını sağlayacak koşulu verir. (Bu sistemin denge konumu için “Eş.5.1” denklemi ile verilen karakteristik denklemin asimtotik kararlılık şartıdır.)

Eğer polinom bilinen sabit katsayılar ile birlikte verilirse Routh 's kararlılık kriteri polinomun kaç kökünün negatif reel kısmı, kaç tanesinin pozitif reel kısmı ve kaç tanesinin sıfır reel kısmı olduğunu verecektir.

Bu kritere göre kararlılık analizinin uygulaması aşağıdaki şekildedir:

“Eş.5.1” denkleminin sisteminin asimtotik kararlı olması için gerekli şartlar polinomun tüm katsayılarının aynı işaretli olması ve hiçbir katsayı sıfır olmamalıdır. Tüm a katsayılarının pozitif olduğu koşul, kararlılığı sağlamak için yeterli değildir. Kararlılık için gereken (fakat yeterli olmayan) koşul “Eş.5.1”ün tüm a katsayılarının var olduğu ve hepsinin de pozitif olduğu koşuldur.

Eğer tüm a katsayıları pozitif ise, polinomun katsayıları aşağıdaki şekilde satır ve sütunlara yerleştirebiliriz.

λ^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$\dots$	$\rightarrow$ birinci satır
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$\dots$	$\rightarrow$ ikinci satır
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\dots$	
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
λ^3	d_1	d_2	0			
λ^2	e_1	e_2	0			
λ^1	f_1	0				
λ^0	g_1					
	$\uparrow$					
	birinci sütun					

$b_1, b_2, b_3, \dots$ sabitleri aşağıdaki tarife göre değerlendirilir.

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$
$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$
$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$
$$\dots$$
$$\dots$$

b 'nin değerlendirmesi geriye kalan b 'lerin tümü sıfıra eşit oluncaya kadar devam eder. Önceki iki satırdaki katsayıların çapraz çarpılması işlemi c, d, e katsayılarının değerlendirilmesinde de kullanılır. Örneğin;

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_4 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_4}{b_1}$$

...

...

$$f_1 = \frac{e_1 d_2 - d_1 e_2}{e_1}$$

$$g_1 = e_2$$

Katsayıların değerlendirilmesi $(n+1)$ satır tamamlanuncaya kadar devam edilir. Routh katsayılar düzeni üçgen biçimindedir. Routh kararlılık kriteri, pozitif reel kısmı olan köklerin sayısının ilk sütundaki katsayılarının işaretlerinin değişim sayısına eşit olduğunu gösterir. İlk kolondaki terimlerin kesin değerlerinin bilinmesine gerek yoktur, sadece bu terimlerin işaretlerinin bilinmesi gerekir. “Eş.5.1” denklemindeki tüm köklerin negatif reel kısımlarının olması için gerek ve yeter koşul, “Eş.5.1” denklemindeki tüm a katsayılarının pozitif ve ilk sütundaki tüm terimlerin işaretlerinin de pozitif olmasıdır.

Örnek 5.1. Routh kararlılık kriteri üçüncü dereceden polinoma uygulanırsa

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

tüm a katsayıları pozitif sayılarsa, katsayıların Routh düzeni

$$\begin{array}{rcl}
 \lambda^3 & a_0 & a_2 \\
 \lambda^2 & a_1 & a_3 \\
 \lambda^1 & \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & 0 \\
 \lambda^0 & a_3 &
 \end{array}$$

şeklindedir. Tüm köklerin negatif reel kısımlara sahip olması gereken koşul $a_1 a_2 > a_0 a_3$ dır.

Örnek 5.2. $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$

katsayılarının Routh düzeni

$$\begin{array}{rcll}
 \lambda^4 & 1 & 3 & 5 \\
 \lambda^3 & 2 & 4 & 0 \\
 \lambda^2 & 1 & 5 & 0 \\
 \lambda^1 & -6 & 0 & \\
 \lambda^0 & 5 & &
 \end{array}$$

listelemenin ilk sütunda iki işaret değişimi olduğu görülmektedir. Bunun anlamı pozitif reel kısma sahip iki kök vardır.

Herhangi bir satırın ilk sütunundaki terim sıfır fakat diğer terimler sıfır değilse sıfır olan terim çok küçük bir ε pozitif sayısı ile yer değiştirilir ve düzenin geri kalanı değerlendirilir (10,11).

Örnek 5.3. $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

katsayılarının Routh düzeni

λ^3	1	1
λ^2	2	2
λ	$0 \approx \varepsilon$	0
λ	2	

şeklindedir. Eğer sıfırın(ε) üstündeki katsayının işareti ile altındakinin işareti aynı ise, bu bir çift imajiner kök olduğunu gösterir. bu denklemin $\lambda = j$ ve $\lambda = -j$ kökleri vardır. Sıfırın (ε), üstündeki katsayının işareti altındakinin tersi ise bu işaret değişikliğinin olduğunu gösterir.

Örnek 5.4. $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 11\lambda + 10 = 0$

olarak verilen karakteristik denklemin Routh düzeni

λ^5	1	2	11
λ^4	2	4	10
λ^3	$0 \approx \varepsilon$	6	0
λ^2	$-\frac{12}{\varepsilon}$	10	0
λ	6	0	0
λ	10		

şeklindedir. Birinci sütunda görüldüğü gibi iki tane işaret değişikliği vardır. O halde sistem kararsızdır.

Bir satırdaki tüm elemanların sıfır olması halinde; bu durumda bir yada daha fazla çift eşit büyüklükte ters işaretli reel kök olduğu veya bir yada daha fazla çift eşlenik imajiner kök olduğunu gösterir. Bu durumda sıfır olan satırın bir üstündeki satırdaki katsayılarından yardımcı bir denklem oluşturulur. Bir sonraki satır için bu polinomun türevinin katsayıları alınarak düzenin geri kalanına devam edilir. Yardımcı denklem

hep çift bir polinomdur, bu sadece λ 'nın çift üslerden oluştuğu anlamına gelir. Routh düzenindeki birinci sütundaki işaret değişimi daha önceki alışlagelmiş biçimde yorumlanır. Eşit büyüklükte ve farklı işaretli kökler yardımcı denklem çözülerek bulunur.

Örnek 5.5. $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 24\lambda^3 + 48\lambda^2 - 25\lambda - 50 = 0$

Katsayılarının Routh düzeni

λ^5	1	24	-25
λ^4	2	48	-50
λ^3	0	0	

λ^3 satırındaki terimlerin hepsi sıfırdır. Yardımcı denklem λ^4 satırındaki katsayılar ile oluşturulur. Yardımcı denklem $P(\lambda)$,

$$P(\lambda) = 2\lambda^4 + 48\lambda^2 - 50$$

iki çift eşit büyüklükte ve farklı işaretli kökü vardır. Bu iki çift kök $P(\lambda) = 0$ yardımcı denklemini çözülerek bulunur. $P(\lambda)$ nın λ ya göre türevi

$$\frac{dP(\lambda)}{d\lambda} = 8\lambda^3 + 96\lambda$$

λ^3 satırındaki terimler, son denklemin katsayıları ile yer değiştirilir. Katsayıların düzeni

λ^5	1	24	-25	
λ^4	2	48	-50	
λ^3	8	96	0	$\rightarrow \frac{dP(\lambda)}{d\lambda}$ nın katsayıları

$$\begin{array}{rclcl}
 \lambda^2 & 24 & -50 & 0 \\
 \lambda^1 & 112.7 & 0 & \\
 \lambda^0 & -50 & &
 \end{array}$$

şeklinde olur. Yeni düzenin ilk sütununda bir işaret değişikliği vardır. Bu nedenle orijinal denklemin pozitif reel kısmı olan bir kökü vardır. Yardımcı denklemin kökleri orijinal denklemin de sağlar. Buna göre yardımcı denklem çözülürse ilk denklemin kökleri bulunmuş olur.

$$2\lambda^4 + 48\lambda^2 - 50 = 0$$

$$\lambda = \pm 1 \quad \text{ve} \quad \lambda = \pm 5j$$

Orijinal denklem çarpanlarına ayrılmış şekli;

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda + 5j)(\lambda - 5j)(\lambda + 2) = 0$$

5.2. Hurwitz Kararlılık Kriteri

Hurwitz kararlılık kriteri “Eş.5.1” denklemi ile verilen polinomun tüm köklerinin negatif olması için katsayıların taşıyacağı şartları verir.

Tüm köklerin negatif reel kısımları sahip olması için tüm a katsayıları pozitif olmak zorundadır. Bu gerekli fakat yeterli bir koşul değildir. Eğer bu koşul yeterli değilse bu bazı köklerin pozitif reel kısımları olduğu veya imajiner yada sıfır olduğu anlamına gelir. Tüm köklerin negatif reel kısımlara sahip olması için yeterli koşul aşağıda verilmiştir.

Polinomun tüm katsayıları pozitif ise, bu katsayıları aşağıdaki determinanтта olduğu gibi düzenleyelim.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & a_{n-2} & a_n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

Δ_n , determinantının denklemin derecesi boyutunda n satır n sütunludur. Eğer $s > n$ ise alternatif olarak

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdot & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

Tüm köklerin negatif reel kısımlara sahip olması için gerekli ve yeterli koşul Δ_n in ardışık minörlerinin pozitif olmasıdır.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdots & a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & \cdots & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & \cdots & a_{2i-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2i-1} & a_{2i-2} & \cdots & a_i \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$i = 1 \Rightarrow \Delta_1 = |a_1|$$

$$i = 2 \Rightarrow \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$i = 3 \Rightarrow \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

...

Eğer tüm bu determinantlar pozitif ve $a_0 > 0$ ise “Eş.5.1” denklemi ile verilen karakteristik denklemin denge konumu asimtotik kararlıdır.

Örnek 5.6. Aşağıdaki karakteristik denklem

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^1 + a_4 = 0$$

asimtotik kararlılık koşulu için tüm a 'lar pozitif olmalı ve

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_0 a_3^2 = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0$$

Eğer tüm a 'lar pozitif ise ve $\Delta_3 > 0$ sağlanırsa $\Delta_2 > 0$ koşulu sağlanır. Bu nedenle verilen karakteristik denklemin tüm köklerinin negatif reel kısımlarının olması için gerek ve yeter koşul $\Delta_3 > 0$ ve a katsayılarının pozitif olmasıdır.

Örnek 5.7. $\lambda^3 + 8\lambda^2 + 14\lambda + 24 = 0$

olarak veriliyor. Sistemin kararlı olup olmadığına bakalım

$$n=3, a_0=1, a_1=8, a_2=14, a_3=24$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & 24 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = 8 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 8 & 24 \end{vmatrix} - 24 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 24 \end{vmatrix} = 8 \cdot [14 \cdot 24 - 0 \cdot 8] - 24 [1 \cdot 24 - 0] = 2112 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 8 \cdot 14 - 24 \cdot 1 = 88 > 0$$

$$\Delta_1 = |a_1| = 8 > 0$$

Routh ve Hurwitz kararlılık kriterlerinin denkliği

Routh ve Hurwitz kararlılık kriterlerinin denkliği kolayca kurulabilir. Eğer Hurwitz determinantını üçgen biçiminde yazarsak

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & a_{ii} \end{vmatrix} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

ana köşegenin sol altındaki elementler sıfır ve ana köşegenin sağ üstündeki elementler sıfır veya sıfırdan farklı ise

$$\Delta_i = a_{11}a_{22} \dots a_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

yazabiliriz. Hurwitz şartlarında

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0$$

şartları azaltırsak

$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} > 0, \dots, a_{nn} > 0$$

olur. Bu terimleri a_1, b_1, c_1 v.b. gibi isimlendirilse Routh düzenindeki $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ terimleri $a_{11} = a_1, a_{22} = b_1, a_{33} = c_1, \dots$ olarak elde edilir. Buradan $a_1 > 0, b_1 > 0, c_1 > 0, \dots$ elde edilir.

Bu yolla Routh kararlılık kriteri ve Hurwitz kararlılık kriterlerinin denkliği kurulmuş olur.

6. LIAPUNOV 'UN BİRİNCİ VE İKİNCİ METOTLARI

6.1. Liapunov 'un Birinci Metodu

Liapunov'un birinci metodu kararlılık analizi için açık çözüm şeklinin kullanıldığı tüm işlemleri içerir. Bu metot da eğer birden fazla denge konumu var ise her biri ayrı incelenir.

$$\dot{x} = f(x) \quad [6.1]$$

sistemini ele alalım. x konum vektörü ve $f(x)$, n bileşenli vektör $x_1, x_2, \dots, x_n$ sürekli değişkenler. "Eş.6.1" denklemini açık biçimde yazarsak

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Lineer olmayan $f(x)$ vektör fonksiyonunu Taylor serisine genişletelim. Yeni bir $y = x - x_e$ vektör tanımlanarak denge konumunu orijine ötelenebilir.

$\dot{x} = f(x)$ formunu $x = x_e$ olacak şekilde Taylor serisine açtığımızda

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= f(x) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x - x_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x - x_n) \right] + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x - x_1)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x - x_2)^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x - x_n)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x - x_1)(x - x_2) + \dots \right]$$

$$\dot{y} = Ay + G(y)y$$

formunda yazılır.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} x - x_1 \\ x - x_2 \\ \vdots \\ x - x_n \end{bmatrix}$$

A , $n \times n$ Jakobian matrisi $f_1, f_2, \dots, f_n$, $f(x)$ 'in n bileşenleridir. A Jakobian matrisinde belirtilen tüm kısmi türevler $x = x_e$ yada $y = 0$ denge konumunda değerlendirilir. $G(y)$ $n \times n$ matrisi. Taylor serisine genişletilmesinde yüksek dereceli türevlere ait terimler içerir. $G(y)$ 'nin elemanları denge konumunda sıfırdır. “Eş.6.1” denklemi

$$\dot{y} = A(y) \quad [6.2]$$

şeklinde orijin civarında lineer hale gelir. “Eş.6.2” denklemi, lineer olmayan “Eş.6.1” denkleminin ilk yaklaşımıdır. “Eş.6.2” denklemini lineerleştirip “Eş.6.1” denkleminin elde ettik.

Liapunov göstermektedir ki “Eş.6.2”da ki sabit A matrisinin tüm özdeğerleri sıfırdan farklı reel kısımlara sahip ise, bu durumda orijinal lineer olmayan “Eş.6.1” denkleminin x_e denge konumunun kararlılığı lineer hale getirilmiş “Eş.6.2” denkleminin $y = 0$ denge konumunun kararlılığı ile aynıdır.

Eğer A 'nın özdeğerleri negatif reel kısımlara sahip ise x_e denge konumu asimtotik kararlıdır ve “Eş.6.1” denklemi ile verilen sistemin tüm çözümlerinin $x(0)$ başlangıç koşulu x_e 'ye yeterince yakın olacak şekilde $t \rightarrow \infty$ iken x_e 'ye yakınsar.

Eğer A 'nın özdeğerlerin den en az bir tanesi pozitif reel kısma sahip ise, bu durumda x_e denge konumu kararsızdır.

Eğer A 'nın özdeğerlerin den en az bir tanesi sıfır reel kısma sahip ise, “Eş.6.1” denkleminin $x = x_e$ denge konumu lokal (yerel) kararlılık davranışı “Eş.6.2” denklemi ile belirlenemez. Bu durum kritik durum olarak adlandırılır. Kritik durumda sistemin denge konumunun yerel kararlılık davranışı $f(x)$ in Taylor serisine açılımının yüksek dereceli terimlerine bağlıdır. Örneğin A Jakobian matrisinin özdeğerlerin den biri denge konumunda sıfır ise, bu durumda bu konum, eğer A komşuluğunda sadece negatif reel kısımları olan özdeğerleri varsa asimtotik kararlıdır. Eğer komşuluğunda pozitif reel kısmı olan en az bir tane özdeğeri varsa kararsızdır.

İlk yaklaşımda kararlılık ilgili sonuçlar sadece denge konumu komşuluğunda uygulanabilir. Liapunov'un ilk metodu kararlılığı sadece dar kapsamda ele almaktadır. Örneğin, x_e denge konumu komşuluğunda orijin alan bir hareket, t sonsuz olarak arttıkça x_e 'ye yakınsayacaktır. Bu metot t sonsuza giderken hareketin x_e 'ye yaklaşabilmesi için komşuluğun ne kadar küçük olması gerektiği ile ilgili bir belirleme yapmaz. Geniş kapsamda bir kararlılık kriteri yapmak dar kapsamda kararlılık kriteri yapmaktan daha zordur. Liapunov'un ikinci metodu, geniş kapsamda kararlılık kriteri, lineer ve lineer olmayan sistemlerin yerel kararlılığı ile ilgili bazı sonuçlara cevap vermektedir.

6.2. Liapunov 'un İkinci Metodu

Liapunov'un ikinci metodu çözümleri hakkında bir bilgi sahibi olmadan lineer ve lineer olmayan sistemlerin denge konumlarının kararlılığı hakkında bilgi verir. Bu metottan kararlılıkla ilgili elde edilen bilgiler kesindir ve herhangi bir tahmin içermez.

Liapunov'un ikinci metodu Liapunov fonksiyonları olarak adlandırılan hayali bir enerji fonksiyonunun tespitini içermektedir. Liapunov fonksiyon görüşü enerji görüşünden daha genel ve daha geniş kapsamda uygulanmaktadır.

Liapunov fonksiyonları $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve t fonksiyonlarıdır. Liapunov fonksiyonları $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ veya basitçe $V(x, t)$ olarak ifade etmekteyiz ($V(x, t): R^n \times R \rightarrow R$). Eğer Liapunov fonksiyonları t 'yi kesin olarak içermiyorsa bu durumda $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ veya $V(x)$ olarak ifade edilir.

Liapunov fonksiyonları sadece $x_1, x_2, \dots, x_n, t$ olarak ifade edilmez bazen de $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ olarak ifade edilir. Buradaki çizgi kompleks eşleniği ifade eder. Bu sistemler $V(x_1, x_2, \dots, x_n; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, t)$ basitçe $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ veya $V(x, t)$ olarak ifade edilir. Çünkü x_i ve x_j kompleks eşlenik çift ise $\bar{x}_i = x_j$ dir. Eğer x_k reel ise $\bar{x}_k = x_k$ dir.

Liapunov'un ikinci metodunda $V(x, t)$ 'in işaret davranışları ve onun zamanla türevinin $\dot{V}(x, t)$ direkt çözümünü yapmadan denge konumunun kararlılığı, asimtotik kararlılığı yada kararsızlığı ile ilgili bilgi verir (bu lineer ve lineer olmayan sistemlere uygulanabilir.)

Bu bölümde ilk olarak Liapunov'un esas kararlılık teoremi ve ispatı sonra kararlılık teoreminin geliştirilmiş çeşitli formları sunulmaktadır. Burada bahsedilen denge konumunun, konum uzayının orijininde olduğunu kabul etmekteyiz.

Teorem 6.1. (Liapunov'un esas kararlılık teoremi) Denklem sistemimiz

$$\dot{x} = f(x, t)$$

şeklinde belirtildiğini kabul edelim. Varsayalım $f(0, t) = 0$, her t için olsun. Sürekli birinci kısmi türevlere sahip bir $V(x, t)$ skalar fonksiyonu var olsun. Eğer $V(x, t)$ aşağıdaki koşulları sağlıyor ise,

- 1.) $V(x, t)$ pozitif tanımlı, $V(0, t) = 0$
- 2.) $V(x, t) \geq \alpha(\|x\|) > 0$ her $x \neq 0$ ve her t için α sürekli, azalmayan bir skalar fonksiyondur ve $\alpha(0) = 0$
- 3.) $\dot{V}$ toplam türev negatif her $x \neq 0$ ve her t için yada $\dot{V}(x, t) \leq -\eta(\|x\|) < 0$ her $x \neq 0$ ve her t için η sürekli, azalmayan bir skalar fonksiyondur ve $\eta(0) = 0$
- 4.) $V(x, t) \leq \beta(\|x\|)$ her t için bir sürekli azalmayan skalar fonksiyondur ve $\beta(0) = 0$
- 5.) $\|x\|$ bağımsız olarak artarken $\alpha(\|x\|)$ sonsuza yakınsar
 $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\alpha(\|x\|) \rightarrow \infty$

sistemin $x = 0$, orijini geniş kapsamda düzgün asimtotik kararlıdır.

İspat: Geniş kapsamda düzgün asimtotik kararlılığı ispatlamak için aşağıdakilerin ispatına ihtiyacımız vardır.

i.) Orijin düzgün kararlıdır

ii.) Her çözüm düzgün sınırlıdır

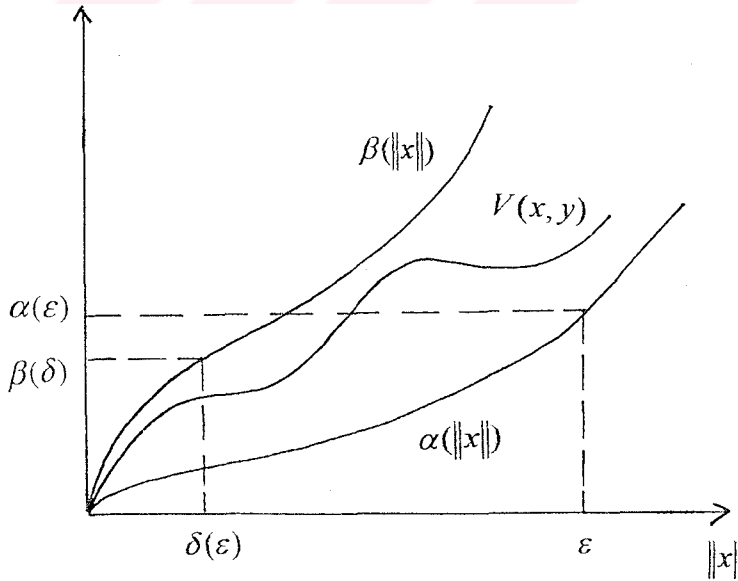
iii.) Her çözüm $t \rightarrow \infty$ iken t_0 göre düzgün ve $\|x_0\| \leq \delta$, δ sabit fakat istediğimiz genişlikte, orijine yakınsaktır, verilen iki reel sayı $\delta > 0$ ve $\mu > 0$ için bir $T(\mu, \delta)$ sayısı var $\|x_0\| \leq \delta$ bu durumda

$$\|\phi(t; x_0, t_0)\| \leq \mu \quad \text{her } t \geq t_0 + T(\mu, \delta) \text{ için}$$

sonucunu verir. Burada $\phi(t; x_0, t_0)$ verilen diferensiyel denklemin çözümüdür.

β sürekli olduğundan ve $\beta(0) = 0$, bir $\delta(\varepsilon) > 0$ alabiliriz öyleki herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\beta(\delta) < \alpha(\varepsilon)$ (*1) dır. Şekil 6.1 $\alpha(\|x\|)$ ve $\beta(\|x\|)$ ve $V(x, t)$ eğrilerini göstermektedir. Dikkat edelim

$$V(\phi(t; x_0, t_0), t) - V(x_0, t_0) = \int_{t_0}^t \dot{V}(\phi(\tau; x_0, t_0), \tau) d\tau < 0 \quad , \quad t > t_0 \quad (3. \text{koşuldan}) \quad (*2)$$



Şekil 6.1 $\alpha(\|x\|)$ ve $\beta(\|x\|)$ ve $V(x, t)$ eğrileri

Eğer $\|x_0\| \leq \delta$ ve t_0 bir keyfi sayı ise, o zaman

$$\alpha(\|x_0\|) \leq \alpha(\delta) \Rightarrow \alpha(\phi(t; x_0, t_0)) \leq \alpha(\delta) \text{ dir.}$$

$$\alpha(\varepsilon) \underset{(*1'den)}{>} \beta(\delta) \underset{(4.koy.)}{\geq} V(x_0, t_0) \underset{(*2'den)}{\geq} V(\phi(t; x_0, t_0), t) \underset{(2.koy.)}{\geq} \alpha(\|\phi(t; x_0, t_0)\|) \text{ her } t \geq t_0 \text{ için}$$

α azalmayan ve pozitif $\alpha(\varepsilon) \geq \alpha(\|\phi(t; x_0, t_0)\|) \Rightarrow \varepsilon \geq \|\phi(t; x_0, t_0)\|$, $t \geq t_0, \|x_0\| \leq \delta$ için bundan dolayı $\varepsilon > 0$ herhangi bir reel sayısı için $\delta > 0$ bir reel sayısı olduğundan $\|x_0\| \leq \delta$ iken $\|\phi(t; x_0, t_0)\| \leq \varepsilon$ her $t \geq t_0$ için olduğunu gösterdik. Bu nedenle ispatımız düzgün kararlıdır.

Sonra $t \rightarrow \infty$ iken t_0 göre düzgün $\|\phi(t; x_0, t_0)\| \rightarrow 0$ ve $\|x_0\| \leq \delta$ olduğunu ispatlayalım.

Kabul edelim ki herhangi bir $0 < \mu < \|x_0\|$ alalım ve bulduğumuz bir $v(\mu) > 0$ olmak üzere $\beta(v) < \alpha(\mu)$ (*3) olsun. $v(\mu) \leq \|x\| \leq \varepsilon(\delta)$ kompakt küme üzerinde $\eta(\|x\|)$ sürekli azalmayan fonksiyonun minimum noktasını $\varepsilon'(\mu, \delta) > 0$ olduğundan aşağıdaki şekilde

$$T(\mu, \delta) = \frac{\beta(\delta)}{\varepsilon'(\mu, \delta)} > 0 \quad (*4)$$

göstereлим.

Farz edelim ki $\|\phi(t; x_0, t_0)\| > v$, $t_0 \leq t \leq t_1 = t_0 + T$ arasında ki zaman üzerinde

O zaman

$$0 < \alpha(v) \underset{2.koy.}{\leq} V(\phi(t_1; x_0, t_0), t_1) \underset{3.koy.}{\leq} V(x_0, t_0) - (t_1 - t_0)\varepsilon' \underset{4.koy., *4'den}{\leq} \beta(\delta) - T\varepsilon' = 0$$

ki bu aykırıdır. Bundan dolayı $t_0 \leq t \leq t_1$ arasındaki bazı t ler için mesela, t_2

$$\|x_2\| = \|\phi(t_2; x_0, t_0)\| = v \text{ söyleyebiliriz.}$$

Ayrıca

$$\alpha(\|\phi(t; x_2, t_2)\|) \underset{2.koş.}{\leq} V(\phi(t; x_2, t_2), t) \underset{3.koş.}{\leq} V(x_2, t_2) \underset{4.koş.}{\leq} \beta(v) \underset{*3'den}{<} \alpha(\mu) \text{ her } t \geq t_2 \text{ için.}$$

Buradan

$$\|\phi(t; x_0, t_0)\| < \mu \quad \text{her } t \geq t_0 + T(\mu, \delta) \geq t_2$$

ki bu düzgün asimtotik kararlı olduğunu ispatlar.

Daha sonra $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\alpha(\|x\|) \rightarrow \infty$, istediğimiz genişlikte δ için $\beta(\delta) < \alpha(\varepsilon)$ olmak üzere $\varepsilon(\delta)$ bir sabiti vardır. $\varepsilon(\delta), t_0$ bağlı değilse $\phi(t; x_0, t_0)$ çözümü düzgün sınırlıdır (12).

Liapunov fonksiyonları

$V(x, t)$ Liapunov fonksiyonu, skalar pozitif tanımlı ve orijin civarında Ω bölgesinde birinci kısmi türevleriyle birlikte sürekli ve eğri boyunca alındığında negatif tanımlı (veya yarı negatif tanımlı) bir zaman türevine sahiptir.

Aslında $\dot{V}(x, t)$ sisteminin bir çözümünün t boyunca $V(x, t)$ 'nin toplam türevidir. Dolayısıyla $\dot{V}(x, t) < 0$, $V(x, t)$ 'nin t azalan bir fonksiyon olduğunu sağlamaktadır. Liapunov fonksiyonu verilen bir sistemde bir tek değildir. (Bu sebeple Liapunov 'un ikinci metodu koveksiyonel enerji anlayışından daha güçlü bir araçtır. Bir sistemin tüm ortalama azalan E enerjisi fakat her bir noktadaki gerekli değil, kararlıdır ama E bir Liapunov fonksiyonu değildir.)

En basit pozitif tanımlı fonksiyonun kuadratik formu

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

genel olarak Liapunov fonksiyonu basit kuadratik form olmayabilir. Herhangi bir Liapunov fonksiyonu için V deki en düşük dereceli terimler çift olmak zorundadır.

Bunu şu şekilde gösterebiliriz;

$$\frac{x_1}{x_n} = z_1, \frac{x_2}{x_n} = z_2, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = z_{n-1}$$

bu durumda orijin komşuluğunda sadece, en küçük dereceli terimler baskın olur ve $V(x)$ 'i şekilde yazılabilir.

$$\frac{x_1}{x_n} = z_1 \Rightarrow x_1 = z_1 x_n$$

$$\frac{x_2}{x_n} = z_2 \Rightarrow x_2 = z_2 x_n$$

...

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = z_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} = z_{n-1} x_n$$

$$\frac{x_n}{x_n} = 1 \Rightarrow x_n = x_n$$

$$V(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$V(x) = V(z_1 x_1, z_2 x_2, \dots, z_{n-1} x_{n-1}, x_n)$$

$$V(x) = x_n^p V(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, 1)$$

p var olan değerlerin sayısı, eğer z_i sabit tutularak $V(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, 1)$ sabit bir değer olur. p sayısı için x_n^p orijin yakınında hem pozitif hem negatif değer olabilir ki bu $V(x)$ in pozitif tanımlı olmadığı anlamına gelir. Dolayısıyla p çift olmak zorunda.

Liapunov'un ikinci metodu prensipte kolay uygulanabilir fakat pratikte çoğu durumda kolay değildir. Çünkü Liapunov fonksiyonlarını kurmak için genel bir metot yok ise de bir Liapunov fonksiyonu seçiminde büyük esneklik vardır. Bununla birlikte bir diferensiyel denklemi çözmek için gereklilik yoktur. Unutulmamalıdır ki uygun bir V fonksiyonunun bulunmaması kararsızlık anlamına gelemez sadece kararlılık durumunun garanti olmadığını gösterir

Örnek 6.1.
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - ax_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - ax_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}\quad [6.3]$$

a pozitif sabit. Açıkça orijin ($x = 0$) denge konumu. Eğer $V(x)$ skalar fonksiyonu $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ olarak tanımlayalım, orijin haricinde pozitiftir. “Eş.6.3” denkleminin bir çözümü $\dot{V}(x)$ zaman türevi boyunca

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \\ &= 2x_1 [x_2 - ax_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2 [-x_1 - ax_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= 2x_1x_2 - 2ax_1^4 - 2ax_1^2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2ax_2^2x_1^2 - 2ax_2^4 \\ &= -2ax_1^4 - 4ax_1^2x_2^2 - 2ax_2^4 \\ &= -2a(x_1^4 + 2ax_1^2x_2^2 + x_2^4) \\ &= -2a(x_1^2 + x_2^2)^2\end{aligned}$$

$x_1 = x_2 = 0$ değil ise negatif. Bu göstermektedir ki “Eş.6.3” denkleminin sürekli, azalan herhangi bir çözümü boyunca $V(x)$ bir Liapunov fonksiyonudur. Kabul edelim ki $V(x)$ ’in sabit değerleri $0 < C_1 < C_2 < \dots$ alalım. Bu durumda $V = 0$ konum uzayının orijinine karşılık gelir. $V = C_k$ dairesi tamamıyla $V = C_{k+1}$ dairesinin içinde yer alır. Temsili eğri (A), V ’nin sınırlarından içeriye doğru geçer. Buradan yola çıkarak Liapunov fonksiyonun yorumu şu şekilde yapılabilir; $V(x)$, konum uzayında

x konumunun orijine olan uzaklık ölçüsüdür. Eğer t artarken orijin ve $x(t)$ konumu arasında mesafe sürekli azalıyorsa ($\dot{V}(x(t)) < 0$) bu durumda $x(t) \rightarrow 0$ dır. Bu yüzden $V(x)$ Liapunov fonksiyonu konum uzayında orijine olan mesafe olarak tanımlandığından bunun türevi yaklaşma hızıyla ilgili nicelliği bir tahmin yapma imkanı verir. Dikkat edelim bu örnekte $V(x)$ denge konumu sonsuz ile birlikte sonsuza sapma olur. Böylece sistemin denge konumu orijin tüm ilk şartlar ihmal için asimtotik kararlı yada geniş kapsamda asimtotik kararlıdır.

Teorem 6.1. temel kabul eden çeşitli kararlılık kriterleri şimdi sunulmaktadır. Teorem 6.2 den Teorem 6.6 ya kadarki ele alınan sistemin diferensiyel denklemi

$$\dot{x} = f(x, t) \quad [6.4]$$

olarak tanımlanmaktadır. x konum vektörü (n boyutlu vektör) ve $f(x, t)$. Ω bölgesi orijinin de kapsayan sürekli birinci kısmi türevleri olan bir n vektördür. $f(0, t) = 0$ kabul edelim yani denge konumu orijindir. Aynı zamanda $V(x, t) > 0$ ın Teorem 6.1 deki (ii.) ve (iv.) şartlarını sağladığını kabul etmekteyiz.

Teorem 6.2. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan skalar, sürekli, birinci mertebeden kısmi türevlere sahip $V(x, t)$ fonksiyonu var ise,

$$\text{i.) } V(x, t) > 0 \quad \Omega \text{ da her } x \neq 0 \text{ ve her } t \text{ için}$$

$$V(0, t) = 0 \quad \text{her } t \text{ için}$$

$$\text{ii.) } \dot{V}(x, t) < 0 \quad \Omega \text{ da her } x \neq 0 \text{ ve her } t \text{ için}$$

$$\dot{V}(0, t) = 0 \quad \text{her } t \text{ için}$$

“Eş.6.4” denklem sisteminin orijini düzgün asimtotik kararlıdır.

Eğer geçmiş şartlar tüm konum uzayında sağlanıyor ve $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $V(x,t) \rightarrow \infty$ yada her $\|x\| > M$ ve bazı $m, M > 0$ için $\dot{V}(x,t) \leq -m < 0$ o zaman orijin geniş kapsamda düzgün asimtotik kararlıdır.

Eğer asimtotik kararlılık sadece Ω içinde başlaması mümkün tüm hareketler için belli ise daha sonra pratik düşüncede Ω hacmi yeterli olup olmadığına karar verebiliriz .

Orijinin kararlılık (fakat asimtotik kararlı değil) ispatı için aşağıdaki teorem veriliyor.

Örnek 6.2. $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1^2 x_2 - x_2^3\end{aligned}$$

denge konumu orijindir. Eğer $V(x) = Ax_1^2 + Bx_2^2$ Liapunov fonksiyonu

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \\ &= 2Ax_1(-x_1^3 + x_1 x_2^2) + 2Bx_2(-4x_1^2 x_2 - x_2^3) \\ &= -2Ax_1^4 + 2Ax_1^2 x_2^2 - 8Bx_1^2 x_2^2 + 2Bx_2^4 \\ &= -2Ax_1^4 + (2A - 8B)x_1^2 x_2^2 - 2Bx_2^4\end{aligned}$$

$A = 4$ ve $B = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= -2.4x_1^4 + (2.4 - 8.1)x_1^2 x_2^2 - 2.1x_2^4 \\ \dot{V}(x) &= -8x_1^4 - 2x_2^4\end{aligned}$$

fonksiyonu negatif tanımlıdır. $V(x) = 4x_1^2 + x_2^2$ pozitif tanımlıdır.

Teorem 6.3. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan skalar, sürekli birinci mertebeden kısmi türevleri olan $V(x,t)$ fonksiyonu var ise,

$$\text{i.) } V(x,t) > 0 \quad \Omega \text{ da her } x \neq 0 \text{ ve her } t \text{ için}$$

$$V(0,t) = 0 \quad \text{her } t \text{ için}$$

$$\text{ii.) } \dot{V}(x,t) \leq 0 \quad \Omega \text{ da her } x \neq 0 \text{ ve her } t \text{ için}$$

$$\dot{V}(0,t) = 0 \quad \text{her } t \text{ için}$$

“Eş.6.4” denklem sisteminin orijini düzgün kararlıdır.

Bu teorem orijinin düzgün kararlılığını sağlayan böyle bir $V(x,t)$ fonksiyonunun var olduğunu ispatlamaktadır. Eğriler için $\dot{V}(x,t) \leq 0$ olması orijinin düzgün kararlı olduğu anlamına gelse de fakat düzgün asimtotik kararlılık da gerekli değildir. Bundan dolayı, bu durumda bu sistem bir limit dairesel davranış gösterir.

Teorem 6.4. Varsayalım ki sürekli birinci mertebeden kısmi türevlere sahip bir skalar $V(x,t)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa

$$\text{i.) } V(x,t) > 0 \quad \text{her } x \neq 0 \text{ ve her } t \text{ için}$$

$$V(0,t) = 0 \quad \text{her } t \text{ için}$$

$$\text{ii.) } \dot{V}(x,t) \leq 0 \quad \text{her } x \neq 0 \text{ ve her } t \text{ için}$$

$$\dot{V}(0,t) = 0 \quad \text{her } t \text{ için}$$

Kabul edelim ki E , $\dot{V}(x,t) = 0$ ı sağlayan tüm noktaların kümesi olsun ve kabul edelim ki M , E içindeki maksimum değişmez kümesi olsun. (eğer M içindeki her bir eğri her t için M nin yerinde kalıyorsa M kümesi bağımsız olduğunu söyleyebiliriz.) $t \geq 0$ için “Eş.6.2” denkleminin her çözümü sınırlıdır $t \rightarrow \infty$ iken M ye yakınsar. Ek olarak $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $V(x,t) \rightarrow \infty$, $t \geq 0$ için her bir çözüm sınırlıdır, ve tüm çözümler $t \rightarrow \infty$ iken M ye yakınsar.

Söyleyebiliriz ki t sonsuza yakınsarken bir M kümesi $x(t)$ ye yakınsar eğer her bir $\varepsilon > 0$ için bir $T > 0$, her bir $t > T$ özelliği ile birlikte vardır. M nin içinde bir p noktası $\|x(t) - p\| < \varepsilon$ her $t > T$ için vardır. $x(t)$ konumu M nin ε mesafesidir. Eğer E maksimum invaryant küme orijini içeriyorsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.5. Eğer sürekli, birinci mertebeden kısmi türevleri olan skalar $V(x, t)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyor ise

i.) $V(x, t) > 0$ her $x \neq 0$ ve her t için

$V(0, t) = 0$ her t için

ii.) $\dot{V}(x, t) \leq 0$ her $x \neq 0$ ve her t için

$\dot{V}(0, t) = 0$ her t için

iii.) $\dot{V}(\phi(t; x_0, t_0), t)$ herhangi bir t_0 ve herhangi bir $x_0 \neq 0$ için $t \geq t_0$ da özdeş olarak sıfır olmaz. $\phi(t; x_0, t_0)$, x_0 da t_0 çözümün başlangıcı olarak nitelendirilir.

“Eş.6.4” denklem sisteminin orijini geniş kapsamda asimtotik kararlıdır.

Bunu şu şekilde gösterebiliriz; eğer $\dot{V}(x, t)$ negatif tanımlı değil sadece yarı negatif tanımlı ise bu durumda temsili noktanın eğrisi belirli bir $V(x, t) = C$ yüzeyine teğet olur. Bundan dolayı $\dot{V}(\phi(t; x_0, t_0), t)$ herhangi bir t_0 ve herhangi bir $x_0 \neq 0$ için $t \geq t_0$ da sıfırlanmadığından temsili noktanın teğet noktasında kalmayabilir (bu nokta $\dot{V}(x, t) = 0$ tekabül etmektedir) ve bu nedenle hareket orijine doğru olmak zorundadır.

Örnek 6.3.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3$$

[6.5]

açıkça denge konumu orijin. Kabul edelim ki

$$V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$$

şeklinde daha sonra

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{dV(x_1, x_2)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \\ &= 4x_1^3 x_2 + 4x_2(-x_2 - x_1^3) \\ &= 4x_1^3 x_2 - 4x_2^2 - 4x_2 x_1^3 \\ \dot{V}(x_1, x_2) &= -4x_2^2 \leq 0\end{aligned}$$

E , $\dot{V}(x_1, x_2) = 0$ olan tüm noktaların kümesi olsun ve M , E içindeki maksimum bağımsız küme olsun.

$$\begin{aligned}E &= \{(x_1, x_2); \dot{V}(x_1, x_2) = 0\} \\ &= \{(x_1, 0); -\infty < x_1 < +\infty\}\end{aligned}$$

eğer, $x_2 = 0$ ise $\dot{x}_2 = -x_1^3 = 0$ yada $x_1 = 0$

Dolayısıyla maksimum bağımsız M kümesi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ orijindir. Bundan dolayı $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $V(x) \rightarrow \infty$, $t \geq 0$ için her bir çözüm sınırlıdır ve $t \rightarrow \infty$ iken tüm çözümler M 'ye yakınsar. “Eş.6.5” denklem sisteminin orijini geniş kapsamda asimtotik kararlıdır.

Teorem 6.6. Eğer sürekli, birinci kısmi türevleri olan skalar $V(x, t)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyor ise

- i.) $V(x, t) > 0$ Ω da her $x \neq 0$ ve her t için
- $V(0, t) = 0$ her t için

ii.) $\dot{V}(x,t) > 0$ Ω da her $x \neq 0$ ve her t için

$$\dot{V}(0,t) = 0 \quad \text{her } t \text{ için}$$

veya

iii.) $V(x,t) < 0$ Ω da her $x \neq 0$ ve her t için

$$V(0,t) = 0 \quad \text{her } t \text{ için}$$

iv.) $\dot{V}(x,t) < 0$ Ω da her $x \neq 0$ ve her t için

$$\dot{V}(0,t) = 0 \quad \text{her } t \text{ için}$$

“Eş.6.2” denklem sisteminin orijini kararsızdır.

Bu teorem, eğer $V(x,t)$ ve $\dot{V}(x,t)$ her ikisi birlikte tanımlı ve aynı işarete sahip ise orijin kararsız ve orijine yakın eğriler bir limit değerine yada sonsuza yakınsar.

Örnek 6.4. $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > |x_2|\} \subset R^2$

$$\dot{x}_1 = 2x_1^3 - 2x_1x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = -5x_1^2x_2 - 4x_2^3$$

Sisteminin $(0,0)$ kritik noktasıdır. $V(x) = Ax_1^2 + Bx_2^2$ Liapunov fonksiyonu

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \\ &= 2Ax_1(2x_1^3 - 2x_1x_2^2) + 2B(-5x_1^2x_2 - 4x_2^3) \\ &= 4Ax_1^4 - 4Ax_1^2x_2^2 - 10Bx_1^2x_2^2 - 8Bx_2^4 \\ &= 4Ax_1^4 + (-4A - 10B)x_1^2x_2^2 - 8Bx_2^4 \end{aligned}$$

$A = 5$ ve $B = -2$ alınırsa $\dot{V}(x) = 20x_1^4 + 16x_2^4$ pozitif tanımlıdır.

$$V(x) = 5x_1^2 - 2x_2^2, \quad V(0,0) = 0 \text{ ve } V(x_1, x_2) > 0$$

Bu bölümün içerisinde bu kararlılık teoremlerini verilen bir sisteme uyarlarken belirli bir V fonksiyonunda elde edilen kararlılık durumları yeterli olabilir fakat gerekli olmayabilir. Liapunov fonksiyonu belirli bir sistem için tek olmayabilir. Bu nedenle aşağıdakilere dikkat edilmelidir.

1. Denge konumunun kararlılığı yada asimtotik kararlılığı yada kararsızlığını göstermek üzere bir V fonksiyonunun bulunmaması kararlılıkla ilgili bilgi vermeyebilir.
2. Belirli bir V fonksiyonunun denge konumunu içeren Ω bölgesinde denge konumunun kararlı yada asimtotik kararlı olduğunu ispatlayabilse de, hareketin Ω bölgesinin dışında kararsız olması anlamında gerekli değildir.
3. Kararlı yada asimtotik kararlı bir denge konumu için gerekli özellikleri olan bir V fonksiyonu her zaman vardır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma ve araştırmada aşağıdaki sonuçlar varılmıştır.

1. Kontrol mühendislik problemlerinin araştırma ve incelemesinde nitelik bakımından geniş kapsamda kararlılık ve asimtotik kararlılığın söz konusu olduğu görülmektedir.
2. Sistemlerin denge konumu geniş kapsamda asimtotik kararlı olmadığı durumda problem asimtotik kararlılığın en geniş şekliyle ele alınması gerektiğini vermektedir. Bu genellikle zorluklar göstermektedir. Ancak pratik olarak en uygun şey asimtotik kararlılığın mümkün olan en geniş aralığını belirlemektir.
3. Zamandan bağımsız lineer sistemlerin kararlılığının önemli bir nedeni zamandan bağımsız lineer modellere bir çok sistemle yaklaşılabilmesi. lineer olmayan sistemlerin denge konumlarının mevzi kararlılığında lineerleştirme tekniği kullanılmasının zamandan bağımsız lineer modelin kararlılığını inceleyebilmemize imkan vermesi.
4. $\dot{x} = Ax$ sisteminde A nın özdeğerlerinin tümü negatif reel kısımlara sahip olması halinde sistemin $x = 0$ denge konumunda asimtotik kararlılığını ortaya koyması.
5. A nın karakteristik polinomunun köklerinin negatif reel kısımlarının olup olmadığının tayininde kararlılık kriterlerinin kullanılabilmesi bu konuda Routh ve Hurwitz kararlılık kriterlerinin işleme girmesi.
6. $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$, a reel değerli [5.1]
şeklinde bir polinom sabit fakat belirsiz katsayılar ile birlikte verilmiş ise Routh kararlılık kriteri nedeniyle polinom katsayılarının tüm köklerinin negatif reel kısımlarının olması koşulunu vermektedir.

7. “Eş.5.1” sisteminin denge konumu için verilen karakteristik denkleminin asimtotik kararlılık şartı bağdaşmaktadır.

8. Eğer polinom bilinen sabit katsayılarla birlikte verilirse Routh kararlılık kriteri polinomun kaç kökünün negatif reel kısmı ve kaç tanesinin pozitif reel kısmı ve kaç tanesinin sıfır reel kısmı olduğunu vermektedir.

9. Hurwitz kararlılık kriteri “Eş.5.1” ile verilen polinomun tüm köklerinin negatif olması için katsayıların taşıyacağı şartları vermektedir.

10. Routh ve Hurwitz kriterleri için tüm köklerin negatif reel kısımlara sahip olması ve tüm a katsayılarının pozitif olmak zorunda olduğunu ifade etmektedir. Ancak unutulmamalıdır ki bu gerekli ve yeterli bir koşul olmamaktadır.

11. Hurwitz kararlılık kriterine göre “Eş 5.1” tüm köklerinin negatif reel kısımlara sahip olması için tüm Hurwitz determinantlarının pozitif olmalıdır.

12. Routh kararlılık kriterine göre Routh düzenindeki birinci sütundaki elemanların işaretlerin hepsi aynı ise denklemin köklerinin tümü negatif reel kısımlıdır. Birinci sütundaki elemanların işaret değişim sayısı kadar pozitif reel kısımlı kök vardır.

13. Routh listelemesinde bir tüm elemanları sıfır olan bir satır ile karşılaşırsa; elemanları sıfır olan satırın bir üstündeki satır elemanları ile yardımcı denklem oluşturulur. Bir sonraki satır için bu polinomun katsayılarının geri kalanına devam edilir.

14. Denge konumunun kararlılığı yada asimtotik kararlılığı yada kararsızlığını göstermek üzere bir Liapunov fonksiyonunun bulunmaması kararlılıkla ilgili bilgi vermeyebilir.

15. Kararlı veya asimtotik kararlı bir denge konumu için gerekli özellikleri olan bir Liapunov fonksiyonu her zaman vardır.

KAYNAKLAR

1. Sanchez, D. A. "Ordinary Differential Equations and Stability Theory" *Freeman*, San Francisco 127-129 (1968).
2. Zadeh, L.A., and C.A.Desoer, "Linear System Theory-The State Space Approach" *McGraw-Hill Book Company, Inc.*, 505-509 (1963).
3. E. I. Jury, J.Blanchard, "A Stability Test for Linear Discrete Systems in Table Form", *IEEE Proc.*, AC-49: 1947-1948 (1961).
4. Kreidler, E. "Contributions to the Theory of Teme Optimal Control" *J. Franklin Inst.*, 314-444 (1963).
5. Kalman, R.E., Y.C. Ho and K. S. Narendra, "Controllability of Linear Dynamical Systems," *Cont. Differential Equations*, 189-213 (1962).
6. Kreindler, E. And P. E. Saranchik, "On The Concepts of Controllability and Observability Of Linear Systems" *IEEE Trans* Automatic Control, 129-136 (1964).
7. Falb, P.L. and M. Athans, " A Direct Constructive Proof of the Criterion for Complete Controllability of Time- Invariant Linear Systems." *IEEE Trans* Automatic Control, 189-190 (1964).
8. M. L. Cohen, "A Set of Stability Constraints on the Denominator of a Sampled-Data Filtler", *IEEE Trans*. Automatic Control, AC-11: 327-328 (1966).
9. K. J. Khatwani, "On the Routh-Hurwitz Criterion". *IEEE Trans*. Automatic Control, AC-26: 583 (1981).
10. S. K. Pillai, "The ε Method of the Routh-Hurwitz Criterion," *IEEE Trans* Automatic Control, AC-26: 584 (1981).
11. E. I. Jury, "The Number of Roots of a Real Polynomial Inside (or Outside) the Unit Circle Using the Determinant Method", *IEEE Trans*. Automatic Control, AC-10: 371-372 (1965).
12. La Salle, J. and Lefshetz, S., "Stability by Liapunov's Direct Method", *Academic Pres*, New York 214-215 (1961).

ÖZGEÇMİŞ

Bu çalışmayı yapan Özgür ŞEN, 1976 yılında Kastamonu ilinde doğdu. İlköğrenimini Çorum Mehmet Akif Ersoy İlkokulu'nda ortaokul öğrenimini Tekirdağ Namık Kemal Ortaokulu'nda ve lise öğrenimini Ankara Atatürk Lisesi'nde tamamladı. Daha sonra Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1999 yılında mezun oldu. Halen M.E.B. Özdemir Gürocak İlköğretim Okulu'nda öğretmen olarak görev yapmaktadır.

