

**LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ PARABOLİK TİPTEN
DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI**

ZÜLEYHA BİRTANE KAYA

TEMMUZ 2024

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ PARABOLİK TİPTEN
DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI**

ZÜLEYHA BİRTANE KAYA

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

TEMMUZ 2024

DİYARBAKIR

LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ PARABOLİK TİPTEN DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI

Züleyha BİRTANE KAYA tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Danışman, **Matematik Bölümü**

Sınav Jürisi:

Prof. Dr. Erdal KORKMAZ^(*)
Matematik Bölümü, Muş Alparslan Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN^(**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Yavuz DİNÇ
Matematik Bölümü, Mardin Artuklu Üniversitesi

ONAY

Savunma Tarihi: 09 / 07 / 2024

(*) Jüri Başkanı
(**) Tez Danışmanı

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Züleyha BİRTANE KAYA

İmza:

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin başından sonuna kadar rehberliği ile bana yol gösteren danışmanım Prof. Dr. Erhan PİŞKİN hocama teşekkür ederim. Ayrıca bu süreçte desteğini ve yardımlarını esirgemeyen eşime teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	viii
ÖZET.....	ix
ABSTRACT.....	x
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
3. ÖN BİLGİLER.....	5
3.1 Diferansiyel Denklemlerle İlgili Bazı Temel Kavramlar.....	5
3.2 Normlu ve İç Çarpım Uzayları	7
3.3 Lebesgue Uzayı	10
3.4 Sürekli Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar Uzayı.....	13
3.5 Sobolev Uzayı	14
3.6 Bazı Eşitlik ve Eşitsizlikler	16
4. LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ PARABOLİK TİPTEN DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN BİR DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI	18
4.1 Giriş	18
4.2 Düşük Başlangıç Enerjisi	24
4.3 Kritik Başlangıç Enerjisi	31
4.4 Yüksek Başlangıç Enerjisi.....	32
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
R^n	n-boyutlu Euclid Uzayı
Ω	R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	Süreklı Fonksiyonlar Uzayı
$L^p(\Omega)$	p . mertebeden Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev Uzayı
$H^m(\Omega)$	Hilbert Uzayı
∇	Nabla operatörü (Gradyent)
Δ	Laplace operatörü

ÖZET

LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ PARABOLİK TİPTEN DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI

BİRTANE KAYA, Züleyha

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

Temmuz 2024, 47 sayfa

Bu tezin birinci bölümünde kısmi diferansiyel denklemlerin çeşitli uygulamalarını belirttik. Ayrıca Hadamard anlamında bir diferansiyel denklemin iyi konulmuş olmasını açıkladık. Diferansiyel denklemler her zaman klasik çözüme sahip olmadığından daha geniş anlamda olan çözümden söz ettik ve zayıf çözümü dile getirdik. Zayıf çözümler, ilişkili bir integral denklemini çözen çözümlerdir. Bir evölüsyon denklemi genellikle bağımsız değişkenlerden birinin t zamanı olduğu bir kısmi diferansiyel denklem anlamına gelir. Ayrıca bu bölümde trafik ve kuantum mekaniğinden gelen bazı evölüsyon denklemlerinden söz ettik. Bu tezin ikinci bölümünde bazı parabolik denklemlerin gelişimine tarihsel bir genel bakış sunduk. Logaritmik kaynak terimli parabolik denklem ve logaritmik kaynak terimli Petrovsky parabolik denklemi üzerine araştırmacıların çalışmalarının bir listesini verdik. Her bir araştırmacının çalışmasını özetledik. Bu tezin üçüncü bölümünde kısmi diferansiyel denklemin tanımı, Aubin-Lions kompaktlık teoremi, Hilbert uzayları, dual uzay, zayıf yakınsaklık, alt yarı sürekli, Lebesgue uzayları, Hölder eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği, Grönwall eşitsizliği, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon uzayları, zayıf türev, Sobolev uzayları ve gömme sonuçları gibi bazı temel kavram ve teoremleri kısa genel bir bakış ile verdik. Bunlar tezin alt yapısını anlamak için gereklidir. Ayrıca ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılmasından bahsedip eliptik, parabolik ve hiperbolik denklem tanımlarını ifade ettik. Son olarak tezin dördüncü bölümünde kısmi diferansiyel denklemlerin evölüsyon sistemlerinin bir örneğini ele aldık. Diferansiyel denklem sistemleri, birden fazla denklemle modellenen ve birden fazla bağımlı değişken içeren çok sayıda fiziksel durumda doğal olarak ortaya çıkar. Parabolik tipteki denklemlerin logaritmik kaynak terimleriyle çözümlerinin global varlığı olarak adlandırılan denkleminiz için yeterli koşulu verdik. Kısmi diferansiyel denkleminizin ispatında Galerkin yöntemini, Aubin-Lions kompaktlık teoremini, gömme teoremlerini ve Poincaré eşitsizliğini kullandık.

Anahtar Kelimeler: Logaritmik kaynak terim, Parabolik denklem, Petrovsky denklemi, Global varlık.

ABSTRACT

GLOBAL EXISTENCE OF SOLUTIONS OF PARABOLIC TYPE EQUATION WITH LOGARITHMIC SOURCE TERMS

BİRTANE KAYA, Züleyha

Master of Science in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

July 2024, 47 pages

In the first chapter of this dissertation we indicate various applications of partial differential equations. Also we explain well posedness of a differential equation in the sense of Hadamard. Since differential equations do not always have classical solutions, we mention broaden the solution concept and speak about weak solutions. Weak solutions are solutions which solve an associated integral equation. An evolution equation generally means a partial differential equation with one of the independent variables being time t . Also in this chapter we mention some examples of evolution equations which arise from traffic and quantum mechanics. In the second chapter of this dissertation we give a historical overview of the development of some parabolic equations. We provide a list of researchers work on parabolic equation with logarithmic source term and Petrovsky parabolic equation with logarithmic source term. We summarized each researchers work. In the third chapter of this dissertation we give a brief overview some basic notions and theorems such as, definition of partial differential equation, Aubin-Lions compactness theorem, Hilbert spaces, dual space, weak convergence, lower semi-continuous, Lebesgue spaces, Hölder's inequality, Minkowski inequality, Grönwall's inequality, continuously differentiable functions spaces, weak derivative, Sobolev spaces and some embedding results which are necessary for underground of this dissertation. Also, we mention classification of second-order partial differential equation and give their elliptic, parabolic and hyperbolic equations definitions. Finally, in the fourth chapter of this dissertation we deals with an example of evolution systems of partial differential equations. Systems of differential equations arise naturally in many physical situations that are modeled with more than one equation and involve more than one dependent variable. We give sufficient condition for our equation, which called global existence of solutions of parabolic type equations with logarithmic source terms. In the proof of our partial differential equation we used Galerkin's method, Aubin-Lions compactness theorem, embedding theorems and Poincaré inequality.

Keywords: Logarithmic source term, Parabolic equation, Petrovsky equation, Global existence.

1. GİRİŞ

Fizik, kimya, biyoloji, ekonomi, mühendislik gibi bilim dallarındaki bir çok problemin modellenmesinde diferansiyel denklemler kullanılır. Örneğin ses dalgaları, bir çubuktaki ısı iletimi, nüfus problemleri, soğuma problemleri, kuantum alan teorisi gibi denklem veya denklem sistemleri ortaya çıkmaktadır.

Kısmi diferansiyel denklemler de bu alanlarda vazgeçilmez konuma sahip bir daldır. Bu nedenle kısmi diferansiyel denklemler bir taraftan matematiksel ve fonksiyonel analize dayanarak teorik konuları ele alırken diğer taraftan da diferansiyel denklemlerin çözümü ile ilgili yöntemler üretmektedir.

Bağımsız değişkenlerden biri t zaman değişkeni olan kısmi diferansiyel denklemler evölüsyon denklemleri olarak bilinir. Parabolik ve hiperbolik tipten diferansiyel denklemler birer evölüsyon denklemidir. Dalgaların yayılması, roketlerin hareketleri, salgın hastalıkların yayılması...gibi durumların modellenmesi evölüsyon denklemlere birer örnektir (Pişkin, 2021). Dalga denklemi, ısı denklemi, iki basit evölüsyon denklemleridir. Ayrıca fizik, mekanik, biyoloji, kimya, malzeme bilimi gibi alanlarda araştırılmaya muhtaç çok sayıda lineer olmayan evölüsyon denklem vardır. Örneğin;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

denklemi bir boyutlu trafik problemi ile ilgilenildiğinde ortaya çıkmaktadır. Bu örnekte $u(x, t)$, x konumda t zamanda araba yoğunluğunu göstermektedir (Bedrossian ve Vicol, 2022). Kuantum mekaniğinde Sine-Gordon denklemi olarak bilinen

$$u_{tt} - \Delta u + \sin u = 0$$

ve Klein-Gordon denklemi olarak bilinen

$$u_{tt} - \Delta u + mu + \gamma u^3 = 0$$

denklemi lineer olmayan evölüsyon denklemleri olarak karşımıza çıkmaktadır (Bedrossian ve Vicol, 2022).

Diferansiyel denklemler teorisinde oldukça önemli konulardan birisi de denklemi çözmeden çözümlerin varlık ve tekliğinin araştırılmasıdır. Bu amaçla denklemde verilen fonksiyonlar, denklemin katsayıları, başlangıç veya sınır koşulları gibi veriler yardımıyla varlık ve teklik koşulları ele alınır.

Hadamard'a göre bir kısmi diferansiyel denklemin iyi konulmuş olması için

i) Problemin bir çözümü olmalı

ii) Problemin çözümü tek olmalı

iii) Çözümün davranışı başlangıç koşullarına sürekli olarak bağlı olmalı.

Kısmi diferansiyel denklemler alanı çok geniştir ve tüm kısmi diferansiyel denklemleri çözebilecek bir genel teori yoktur. Çoğu diferansiyel denklem klasik bir çözüme bile sahip değildir. Bir çözüm en az k defa sürekli olarak diferansiyellenebiliyorsa bu çözüme k mertebeden bir klasik çözüm denir. Bunun yerine çözümler enerji tipli bir norm ile donatılmış bir fonksiyon uzayında Sobolev Uzayı gibi zayıf veya genelleştirilmiş anlamda bir çözüme sahip olur.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde amacımız logaritmik kaynak terime sahip parabolik tipten dördüncü mertebeden

$$\begin{cases} z_t + \Delta^2 z = |w|^q |z|^{q-2} z \ln(|zw|), \\ w_t + \Delta^2 w = |z|^q |w|^{q-2} w \ln(|zw|) \end{cases}$$

denklem sisteminin çözümlerinin global varlığını incelemektir. Aşağıda logaritmik kaynak terimli parabolik denklemlerle ilgili çalışılmış problemleri ifade edeceğiz.

Logaritmik kaynak terimli diferansiyel denklemler; kuantum mekaniği, nükleer fizik, enflasyon kozmolojisi, optik ve süpersimetri alan teorileri gibi fiziğin bir çok alanında ortaya çıkar (Bialynicki- Birula ve Mycielski 1975, 1976).

Chen, Luo ve Liu 2015 yılında logaritmik kaynak terimli

$$z_t - \Delta z = z \ln |z|$$

parabolik denkleminin çözümlerinin global varlığı, enerji azalması ve sonsuzda patlamasını çalıştılar.

Chen ve Tian 2015 yılında logaritmik kaynak terime sahip

$$z_t - \Delta z - \Delta z_t = z \ln |z|$$

parabolik denkleminin çözümlerinin global varlığına ve sonsuzda patlamasına çalıştılar.

Nhan ve Truong 2017 yılında logaritmik kaynak terimli

$$z_t - \Delta z_t - \operatorname{div}(|\nabla z|^{p-2} \nabla z) = |z|^{p-2} z \ln |z|$$

parabolik tipten denklemin global zayıf çözümlerinin varlığı ya da yokluğu ile ilgili sonuçlar elde ettiler.

Cao ve Liu 2018 yılında logaritmik kaynak terime sahip lineer olmayan

$$z_t - k\Delta z_t - \operatorname{div}(|\nabla z|^{p-2} \nabla z) = |z|^{p-2} z \ln z$$

evolüsyon denklemin başlangıç sınır değer probleminin global zayıf çözümlerinin varlığına çalıştılar.

Li ve Liu 2018 yılında logaritmik kaynak terimli

$$z_t + \Delta^2 z = |z|^{p-2} z \ln |z|$$

parabolik tipten Petrovsky denkleminin çözümlerinin global varlığına ve sonlu zamanda patlamasına çalıştılar.

Peng ve Zhou 2021 yılında logaritmik kaynak terimli

$$z_t - \Delta z = |z|^{p-2} z \ln |z|$$

ısı denkleminin çözümlerinin global varlığına ve sonlu zamanda patlamasına çalıştılar.

Deng, Zeng ve Wang 2022 yılında logaritmik kaynak terime sahip

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = |w|^p |z|^{p-2} z \ln(|zw|), \\ w_t - \Delta w = |z|^p |w|^{p-2} w \ln(|zw|) \end{cases}$$

parabolik tipten denklem sisteminin global varlığını ve patlamasını çalıştılar.

Cömert ve Pişkin 2022 yılında logaritmik kaynak terimli

$$\begin{cases} z_t - M(\|\nabla z\|^2 + \|\nabla w\|^2) \Delta z - \Delta z_t = |z|^{q-2} z \ln z, \\ w_t - M(\|\nabla z\|^2 + \|\nabla w\|^2) \Delta w - \Delta w_t = w^{q-2} w \ln w \end{cases}$$

Kirchhoff tipten parabolik denklem sisteminin global varlığına çalıştılar.

Zeng, Deng ve Huang 2022 yılında logaritmik kaynak terimli pseudo-parabolik tipten

$$z_t - a \Delta z_t - \Delta z + bz = |z|^{p-2} z \ln z$$

denkleminin global varlığını çalıştılar.

Liu Ve Fang 2023 yılında logaritmik kaynak terimli

$$z_t - \Delta z_t + \Delta (|\Delta z|^{p-2} \Delta z) = |z|^{q-2} z \ln |z|$$

p -biharmonik parabolik denklemin lokal ve global varlığına çalıştılar.

Cömert ve Pişkin 2023 yılında logaritmik kaynak terimli

$$z_t + \mathcal{A}z - \Delta z_t = |z|^{k-2} z \ln z$$

yüksek mertebeden parabolik denklemin çözümlerinin patlamasını çalıştılar.

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezimiz için gerekli olan temel bilgileri kapsayan kavram ve teoremleri vereceğiz (Adams ve Fournier, 2003; Brezis, 2011; Edwards, 2012; Evans, 2022; Fibich, 2015; Friedman, 2008; Lebedev, Vorovich ve Gladwell 2012; Pişkin, 2018; Pişkin ve Okutmuşur 2021).

3.1 Diferansiyel Denklemlerle İlgili Bazı Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1 Bir bağımlı değişkenin bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denkleme *adi (sıradan, bayağı) diferansiyel denklem* denir. Adi diferansiyel denklemler çoğunlukla

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde veya eğer $y^{(n)}$ tek başına bırakılabiliyorsa

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

biçiminde ifade edilir. Örneğin

$$4y' + y = \sin x$$

denklemini bir adi diferansiyel denklemdir.

Tanım 3.1.2 Bir diferansiyel denklemde, bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin türevleri yalnız birinci dereceden ve bunlar denklemde birbirleri ile çarpım halinde bulunmuyorlarsa bu tür denklemlere *lineer (doğrusal) denklem*, aksi halde *doğrusal olmayan (nonlinear) denklem* denir. Örneğin;

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

denklemini lineer (doğrusal) bir adi diferansiyel denklemdir.

$$y^2 y' - x = 0$$

diferansiyel denklemini lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemdir.

Tanım 3.1.3 Bir diferansiyel denklem iki veya daha fazla bağımsız değişken içeriyorsa buna bir *kısmi diferansiyel denklem* denir. Kısmi diferansiyel denklemler ise çoğunlukla

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right) = 0$$

ya da

$$f(x, y, z, z_x, z_y, \dots) = 0$$

şeklinde ifade edilir. Örneğin;

$$y' - 4y = \sin x$$

denklemini adi diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

denklemini ise kısmi diferansiyel denklemdir.

Şimdi ikinci mertebeden iki bağımsız ve bir bağımlı değişkenli kısmi diferansiyel denklemleri sınıflandıracaktır.

$$A(x, y) z_{xx} + B(x, y) z_{xy} + C(x, y) z_{yy} = \psi(x, y, z, z_x, z_y)$$

denkleminde

$$\Delta(x, y) = (B(x, y))^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

olmak üzere

i) $\Delta(x, y) > 0$ ise bu denkleme hiperbolik,

ii) $\Delta(x, y) = 0$ ise bu denkleme parabolik,

iii) $\Delta(x, y) < 0$ ise bu denkleme eliptik

tipten denklem denir.

Örnek 3.1.4

$$z_{xx} + 4z_{xy} + 4z_{yy} = 1$$

denkleminde $A = 1$, $B = 4$, $C = 4$ tür.

$$B^2 - 4AC = 16 - 16$$

$$= 0$$

olduğundan bu denklem parabolik tiptendir.

3.2 Normlu ve İç Çarpım Uzayları

Tanım 3.2.1 X bir F ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde tanımlı bir vektör (lineer) uzay belirtsin. Bir

$$\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$$

fonksiyonu $\forall \gamma \in F$ ve $\forall x, w \in X$ için

$$(i) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(ii) \|\gamma x\| = |\gamma| \|x\|$$

$$(iii) \|x + w\| \leq \|x\| + \|w\|$$

özelliklerini sağlar ise bu fonksiyona X üzerinde bir *norm* denir. Üzerinde norm tanımlanmış bir vektör uzayına bir *normlu vektör uzayı* (*normlu lineer uzayı*) denir.

Örnek 3.2.2 $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında Öklid normu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu vektör uzayı

$$d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in X$$

metriği ile verildiğinde bir metrik uzay oluşturur.

Tanım 3.2.3 X normlu bir vektör uzayı olsun. Bir $\{x_j\} \subset X$ dizisi $x \in X$ için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j, x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_j - x\| = 0$$

oluyorsa $\{x_j\}$ dizisi X elemanına yakınsaktır denir ve $x_j \rightarrow x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.4 X bir normlu vektör uzayı ve bir $\{x_j\} \subset X$ dizisi verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $i, j \geq N \Rightarrow \|x_j - x_i\| < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_j\}$ dizisine bir *Cauchy (temel) dizisi* denir.

Tanım 3.2.5 X normlu bir vektör uzayı olmak üzere eğer X uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayın bir elemanına yakınsıyor ise X uzayına *tam uzay* denir. Bir tam normlu vektör uzayına bir *Banach uzayı* denir.

Örnek 3.2.6 $\mathbb{R}$ kümesi (uzayı) tamdır fakat $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi tam değildir çünkü $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \rightarrow e, e \notin \mathbb{Q}$ dur.

Tanım 3.2.7 $\|\cdot\|_A$ ve $\|\cdot\|_B$, X vektör uzayı üzerinde iki norm olmak üzere eğer her $w \in X$ için

$$c_1 \|w\|_A \leq \|w\|_B \leq c_2 \|w\|_A$$

olacak şekilde en az bir $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ sabitleri varsa bu iki norma *denk normlar* denir.

Sonlu boyutlu bir normlu vektör uzayında tüm normlar birbirine denktir. Örneğin, $\mathbb{R}^2$

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ve}$$

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y| \text{ normları denk olur.}$$

Tanım 3.2.8 X bir F cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzay belirtsin. Eğer bir

$$(\cdot, \cdot) \rightarrow X \times X \rightarrow F$$

fonksiyonu her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in F$ için

$$(i) (x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(ii) (x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$(iii) (\mu x + \lambda y, z) = \mu (x, z) + \lambda (y, z)$$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona bir *iç çarpım* denir. (ii) de (y, x) in kompleks eşleniği $\overline{(y, x)}$ olarak alınmıştır.

X bir vektör uzayı ve $(\cdot, \cdot)$, X üzerinde bir iç çarpım olsun. Her $x \in X$ için

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir norm olur. Bu norma *iç çarpımdan gelen norm* denir.

Bir iç çarpımlı X vektör uzayına bir *iç çarpım uzayı* denir.

Tanım 3.2.9 X bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer X uzayı

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

şeklindeki iç çarpımdan gelen norma göre tam ise X uzayına bir *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 3.2.10 X ve Y , F cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. Eğer bir $A : X \rightarrow Y$ dönüşümü (operatörü) $\forall x, y \in X, \forall \lambda, \mu \in F$ için

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$$

oluyorsa bu A operatörüne bir *lineer operatör* denir. X bir vektör uzayı olsun. X den F cisminde olan A dönüşümlerine *fonksiyonel* denir.

Tanım 3.2.11 X ve Y birer normlu uzay ve bir $A : X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için

$$\|A(x)\|_Y \leq k \|x\|_X$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabiti var ise $A : X \rightarrow Y$ operatörüne *sınırlı* denir.

X ve Y birer normlu uzaylar ve $A : X \rightarrow Y$ bir lineer operatör ise bu durumda A nın sınırlı ve sürekli olması denktir.

Tanım 3.2.12 Normlu bir X vektör uzayı üzerindeki sürekli lineer fonksiyonlar kümesine X uzayının *dual uzayı* denir ve X' sembolü ile gösterilir.

X' üzerindeki norm, her bir $\phi \in X'$ elemanı için

$$\|\phi\|_{X'} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\phi(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Bu norm ile X' bir *Banach uzayı* olur. X' uzayının duali $(X')' = X''$ şeklinde tanımlanır. X'' uzayına X uzayının *ikinci dual uzayı* denir.

Tanım 3.2.13 X normlu bir uzay ve X uzayının duali X' olsun. $\{x_j\} \subset X$ dizisi için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \phi(x_j) = \phi(x), \forall \phi \in X'$$

olacak biçimde bir $x \in X$ var ise $\{x_j\}$ dizisi, x elemanına *zayıf yakınsaktır* denir ve sembolik olarak $x_j \xrightarrow{w} x$ veya $x_j \rightharpoonup x$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.2.14 X normlu bir uzay ve bu uzayın duali X' olsun. Bir $\{\phi_j\} \subset X'$ dizisi ve $\phi \in X'$ verilsin. Eğer

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j(x) = \phi(x), \forall x \in X$$

ise $\{\phi_j\}$ dizisi ϕ -ye *zayıf** (*zayıf yıldız*) *yakınsaktır* denir. Bu yakınsaklık

$$\phi_j \xrightarrow{*} \phi$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.15 $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonel olsun.

a) Eğer $\lim_{j \rightarrow \infty} \|x_j - x\|_X = 0$ şeklindeki her $\{x_j\} \subset X$ dizisi için

$$\phi(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \phi(x_j)$$

oluyorsa ϕ — ye $x \in X$ noktasında *aşağı yarı sürekli* denir. Eğer ϕ , her bir $x \in X$ için aşağı yarı sürekli ise bu durumda ϕ fonksiyoneli X üzerinde *aşağı yarı sürekli* denir. Bir $x \in X$ noktasına zayıf yakınsak her $\{x_j\} \subset X$ dizisi için

$$\phi(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \phi(x_j)$$

oluyorsa ϕ ye $x \in X$ noktasına *zayıf aşağı yarı sürekli* denir.

b) Eğer $\lim_{j \rightarrow \infty} \|x_j - x\|_X = 0$ şeklindeki her $\{x_j\} \subset X$ dizisi için

$$\phi(x) \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \phi(x_j)$$

oluyorsa ϕ — ye $x \in X$ noktasında *yukarı yarı sürekli* denir.

$\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli $x \in X$ noktasında sürekli

 ancak ve ancak $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli $x \in X$ noktasında hem aşağı hem de yukarı yarı sürekli

Teorem 3.2.16 (Aubin-Lions kompaktlık, L^p versiyonu)

$X \subset Y \subset Z$ ayrılabilir yansılmalı Banach uzayları öyle ki $X \subset Y$ gömülmesi kompakt ve $Y \subset Z$ gömülmesi sürekli olsun. $T > 0$ ve $p, q > 1$ için

$\{u_n\}$ dizisi $L^p(0, T; X)$ uzayında düzgün sınırlı,

$\{\partial_t u_n\}$ dizisi $L^q(0, T; Z)$ uzayında düzgün sınırlı

olacak şekilde bir $\{u_n\}$ dizisinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{u_n\}$ dizisi $L^p(0, T; Y)$ uzayında (*güçlü*) *ön kompakt* olur (Bedrossian ve Vicol, 2022).

3.3 Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)

Lebesgue uzayı oldukça geniş ve farklı fonksiyonlara sahiptir.

Tanım 3.3.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir bir küme ve $p \in [1, \infty)$ olsun.

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ölçülebilir ve } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Her $f \in L^p(\Omega)$ için norm

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.3.2 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir bir küme olsun. Burada

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ölçülebilir ve } \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır.

Her $f \in L^\infty(\Omega)$ için norm

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

şeklindedir.

Bir $f \in L^\infty(\Omega)$ ise hemen hemen her $x \in \Omega$ için

$$|f(x)| \leq c$$

olacak şekilde bir $c \in (0, \infty)$ sabiti vardır.

Teorem 3.3.3 Her bir $p \in [1, \infty]$ için $L^p(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Teorem 3.3.4 (Minkowski eşitsizliği) $f, g \in L^p(\Omega)$ ve $p \in [1, \infty]$ olsun. Bu durumda $f + g \in L^p(\Omega)$ ve

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$$

olur.

Tanım 3.3.5 $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Eğer

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

ise $p' \in [1, \infty]$ elemanına p nin üs eşleniği denir. (Burada $\frac{1}{\infty} = 0$ olarak alınır.)

Teorem 3.3.6 (Hölder eşitsizliği) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi ölçülebilir ve $p \in [1, \infty]$ olsun.

Eğer $f \in L^p(\Omega)$ ve $g \in L^{p'}(\Omega)$ ise bu durumda $fg \in L^1(\Omega)$ ve

$$\int_{\Omega} |f(x) g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

olur.

Tanım 3.3.7 X ve Y birer normlu uzaylar olsunlar. Eğer

(i) $X \subset Y$

(ii) Her $x \in X$ için

$$\|x\|_Y \leq s \|x\|_X$$

olacak şekilde sabit bir $s \in (0, \infty)$ sayısı varsa X uzayı Y uzayına *sürekli olarak gömülür* denir ve

$$X \hookrightarrow Y$$

şeklinde gösterilir.

Hölder eşitsizliğinden aşağıdaki gömülme teoremi elde edilir.

Teorem 3.3.8 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi sonlu bir ölçüme sahip olsun. Eğer $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ise bu durumda $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ ve her $f \in L^q(\Omega)$ için

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}(1-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

olur. (Burada $q = \infty$ ise $\frac{p}{q} = 0$ alınır.)

Bu nedenle

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Bu teoremden $|\Omega| < \infty$ olması gereklidir aksi durumda $\Omega = (3, \infty)$ ve $f(x) = \frac{1}{x}$ olsun.

Bu durumda $f \in L^2(3, \infty)$ olur ancak $f \notin L^1(3, \infty)$ olur.

Örnek 3.3.9 $L^2(\Omega)$ uzayı

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayı olur.

Tanım 3.3.10 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir bir küme ve $p \in [1, \infty]$ olsun.

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f \in L^p(K) : \forall K \subset \Omega \text{ kompakt kümesi için}\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *lokal* $L^p(\Omega)$ *integrallenebilir fonksiyonlar* denir.

Teorem 3.3.11 (L^p Normları için interpolasyon eşitsizliği) $0 \leq \alpha \leq 1$, $1 \leq r \leq q \leq p \leq \infty$ ve

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{r} + \frac{1-\alpha}{p}$$

olsun. Eğer $f \in L^r(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ ise bu durumda $f \in L^q(\Omega)$ olur ve

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \|f\|_{L^r(\Omega)}^\alpha \|f\|_{L^p(\Omega)}^{1-\alpha}$$

olur.

3.4 Sürekli Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar Uzayı

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi açık, sınırlı ve bağlantılı olsun. Her bir $\alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ şeklindeki bir vektöre *multi indis* (*çoklu indis*) denir. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ niceliğine α nın *uzunluğu* denir.

Eğer f fonksiyonu m - defa diferansiyellenebiliyorsa bu durumda $|\alpha| \leq m$ olmak üzere

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

ifadesine α -*nıncı mertebeden kısmi türev* denir.

$C(\Omega)$, Ω üzerinde sürekli olan tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan uzayı gösterir.

$C(\overline{\Omega})$, Ω üzerinde düzgün sürekli olan fonksiyonlar uzayını gösterir.

$m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ için

$$C^m(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : D^\alpha f \in C(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

olarak tanımlanır.

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{f \in C(\overline{\Omega}) : D^\alpha f \in C(\overline{\Omega}), |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanır.

Cebirsel olarak $C^m(\overline{\Omega}) \subset C^m(\Omega)$ olur. $m = 0$ ise $C^0(\Omega)$ ve $C^0(\overline{\Omega})$ yerine $C(\Omega)$ ve $C(\overline{\Omega})$ yazılır.

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.4.1 Ω üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu verilsin.

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

kümesine f nin desteği denir.

3.5 Sobolev Uzayı

Tanım 3.5.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ olsun. Eğer

$$\int_{\Omega} f(x) D^{\alpha} \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx, \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

ise g fonksiyonuna f nin α -nıncı zayıf türevi denir.

Eğer $f \in C^m(\Omega)$ ise bu durumda $|\alpha| \leq m$ şeklindeki her α için klasik $D^{\alpha} f$ kısmi türevleri ayrıca f nin α -nıncı zayıf kısmi türevleri de olur.

Tanım 3.5.2 $m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ olmak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ölçülebilir ve } D^{\alpha} f \in L^p, |\alpha| \leq m\}$$

uzayına *Sobolev Uzayı* denir.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayındaki norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ olarak ya da $\|\cdot\|_{m,p}$ olarak gösterilir ve $p \in [1, \infty)$ için

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|f\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} f\|_{L^{\infty}(\Omega)}$$

olarak tanımlanır.

$p = 2$ olduğunda $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ yazılır.

$W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.5.3 $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının $W^{m,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

$p = 2$ için $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ yazılır.

$H^m(\Omega)$ ve $H_0^m(\Omega)$ uzayları

$$(f, g)_m = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} D^{\alpha} f(x) D^{\alpha} g(x) dx$$

iç çarpımı ile birer Hilbert uzayı olurlar.

Lemma 3.5.4 (Poincare eşitsizliği) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bölgesinin sınırı yeterli düzeyde düzgün olsun. Bu durumda her $f \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq C_{\Omega} \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx$$

olacak biçimde bir $C_{\Omega} \geq 0$ sabiti vardır.

Tanım 3.5.5 $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$ olsun.

$$C_B^m(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : |\alpha| \leq m \text{ için } D^{\alpha} f \text{ türevleri sınırlı ve süreklidir}\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.5.6 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge, $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun.

$mp < n$: Eğer $p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$ ise bu durumda

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

olur.

$mp = n$: Eğer $p \leq q < \infty$ ise bu durumda

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

olur. Eğer $p = 1$ ve $m = n$ ise bu durumda

$$W_0^{n,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B(\Omega)$$

olur.

$mp > n$:

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B(\Omega)$$

olur.

3.6 Bazı Eşitlik ve Eşitsizlikler

Lemma 3.6.1 (Cauchy eşitsizliği) $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

olur.

Lemma 3.6.2 (ε -lu Cauchy eşitsizliği) $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda

$$xy \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{4\varepsilon} y^2$$

olur.

Lemma 3.6.3 (Sobolev eşitsizliği) $n \geq 2$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık olsun. Ayrıca $n > p, p \geq 1$ ve $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise bu durumda

$$\|z\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leq K \|\nabla z\|_{L^p(\Omega)}$$

olacak biçimde $K = K(n, p)$ sabiti vardır.

$p > n$ ve Ω sınırlı ise bu durumda $z \in C(\overline{\Omega})$ ve

$$\sup_{\Omega} |z| \leq K |\Omega|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|\nabla z\|_{L^p(\Omega)}$$

olur.

Lemma 3.6.4 (Kısmi integral alma formülleri/ Green özdeşliği) $\phi(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \psi(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\Omega} \psi \Delta \phi dx = \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi dx$$

elde edilir. Burada $\nabla \phi \cdot n|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\partial\Omega}$ dır.

Lemma 3.6.5 (Gronwall eşitsizliği, Diferansiyel form)

$p(t)$ ve $\psi(t)$ fonksiyonları $[0, a]$ üzerinde negatif olmayan ve integrelenebilir fonksiyonlar olsun. $\eta : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0, a]$ üzerinde mutlak sürekli, negatif olmayan ve hemen hemen her t için

$$\eta'(t) \leq p(t) \eta(t) + \psi(t)$$

şeklindeki diferansiyel eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda her $t \in [0, a]$ için

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t p(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right]$$

olur.

Özel olarak; eğer $\eta(0) = 0$ ve $[0, a]$ nın hemen hemen her yerinde

$$\eta'(t) \leq p(t) \eta(t)$$

ise bu durumda $[0, a]$ üzerinde $\eta(t) = 0$ olur.

Lemma 3.6.6 (Gronwall eşitsizliği, İntegral form)

$f(t)$ fonksiyonu $[0, a]$ üzerinde, negatif olmayan integrallenebilir ve en az bir $c_1, c_2 \geq 0$ sabitleri için hemen hemen her t için

$$f(t) \leq c_1 \int_0^t f(s) ds + c_2$$

integral eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda hemen hemen her $t \in [0, a]$ için

$$f(t) \leq c_2 (1 + c_1 t e^{c_1 t})$$

olur.

Özel olarak; eğer hemen hemen her $t \in [0, a]$ için

$$f(t) \leq c_1 \int_0^t f(s) ds$$

ise bu durumda $[0, a]$ nın hemen hemen her yerinde $f(t) = 0$ olur.

4. LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ PARABOLİK TİPTEN DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN BİR DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI

4.1 Giriş

Bu çalışmada logaritmik kaynak terimli parabolik tipten

$$\begin{cases} z_t + \Delta^2 z = |w|^q |z|^{q-2} z \ln(|zw|), & x \in \Omega, t > 0 \\ w_t + \Delta^2 w = |z|^q |w|^{q-2} w \ln(|zw|), & x \in \Omega, t > 0 \\ z(x, 0) = z_0(x), w(x, 0) = w_0(x), & x \in \Omega \\ z(x, t) = w(x, t) = \Delta z(x, t) = \Delta w(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \end{cases} \quad (4.1)$$

denklem sisteminin global varlığını çalışacağız. Burada $\Omega, \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. Ayrıca $(z_0, w_0) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$, $T \in (0, +\infty)$ ve q parametresini aşağıdaki şekilde seçeceğiz:

$$2 < q < 2^* = \begin{cases} \infty, & n = 4, \\ \frac{2n}{n-4}, & n \geq 5 \end{cases} \quad (4.2)$$

dir. $(z, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ için I Nehari fonksiyoneli

$$\begin{aligned} I(z, w) &= \int_{\Omega} |\Delta z|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx - 2 \int_{\Omega} |zw|^q \ln(|zw|) dx, \\ &\simeq \|\Delta z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|\Delta w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 - 2 \int_{\Omega} |zw|^q \ln(|zw|) dx \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklinde ve J enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned} J(z, w) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta z|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{q^2} \int_{\Omega} |zw|^q dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} |zw|^q \ln(|zw|) dx \\ &\simeq \frac{1}{2} \|\Delta z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\Delta w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{q^2} \|zw\|_q^q \\ &\quad - \frac{1}{q} \int_{\Omega} |zw|^q \ln(|zw|) dx \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir. Şimdi bu fonksiyonelin elde edilmesini inceleyelim: (4.1) denklemindeki

$$z_t + \Delta^2 z = |w|^q |z|^{q-2} z \ln(|zw|)$$

ifadesini z_t ile

$$w_t + \Delta^2 w = |z|^q |w|^{q-2} w \ln(|zw|)$$

ifadesini ise w_t ile çarpıp Ω bölgesinde integral alalım.

$$\underbrace{\int_{\Omega} z_t z_t dx}_{A_1. \text{ terim}} + \underbrace{\int_{\Omega} \Delta^2 z \cdot z_t dx}_{A_2. \text{ terim}} = \underbrace{\int_{\Omega} |w|^q |z|^{q-2} z \cdot z_t \ln(|zw|) dx}_{A_3. \text{ terim}} \quad (4.5)$$

$$\underbrace{\int_{\Omega} w_t w_t dx}_{B_1. \text{ terim}} + \underbrace{\int_{\Omega} \Delta^2 w \cdot w_t dx}_{B_2. \text{ terim}} = \underbrace{\int_{\Omega} |z|^q |w|^{q-2} w \cdot w_t \ln(|zw|) dx}_{B_3. \text{ terim}} \quad (4.6)$$

A₁. Terim:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} z_t z_t dx &= \int_{\Omega} z_t^2 dx \\ &= \|z_t\|^2 \end{aligned}$$

dir.

A₂. Terim: Green özdeşliği ve sınır koşulları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^2 z \cdot z_t dx &= \int_{\Omega} \Delta z \cdot \Delta z_t dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta z\|^2 \end{aligned}$$

olur. Benzer işlemler B₁ ve B₂ terimleri için yapılırsa sırasıyla

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_t w_t dx &= \|w_t\|^2, \\ \int_{\Omega} \Delta^2 w \cdot w_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta w\|^2 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

A₃ ve B₃ terimlerini toplarsak

$$\int_{\Omega} (zw)^{q-1} \ln(|zw|) (wz_t + zw_t) dx = \int_{\Omega} (zw)^{q-1} \ln(|zw|) (zw)_t dx$$

dir. Buradan zw ye f dersek

$$\int_{\Omega} f^{q-1} \ln f \cdot f_t dx$$

olur.

$$\begin{aligned} (f^q \ln f)_t &= q f^{q-1} f_t \ln f + f^q \frac{f_t}{f} \\ &= q f^{q-1} f_t \ln f + f^{q-1} f_t \end{aligned}$$

her tarafı $\frac{1}{q}$ ya bölersek

$$\frac{1}{q} (f^q \ln f)_t = f^{q-1} f_t \ln f + \frac{1}{q} f^{q-1} f_t$$

elde edilir. Elde ettiğimiz bu terimleri (4.5) ve (4.6) denkleminde yerine yazıp taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned} & \|z_t\|^2 + \|w_t\|^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\Delta z\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta w\|^2 \right) \\ & - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{q} \int_{\Omega} (zw)^q \ln(|zw|) dx \right] + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{q^2} \|zw\|_q^q \right] \\ & = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|\Delta z\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta w\|^2 + \frac{1}{q^2} \|zw\|_q^q - \frac{1}{q} \int_{\Omega} (zw)^q \ln(|zw|) dx \right] = -(\|z_t\|^2 + \|w_t\|^2)$$

elde edilir.

$$\frac{d}{dt} J(z, w) = -(\|z_t\|^2 + \|w_t\|^2) \leq 0$$

olur.

(4.3) ve (4.4) ten

$$J(z, w) \simeq \frac{1}{2q} I(z, w) + \frac{q-1}{2q} \left(\|\Delta z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|\Delta w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{q^2} \|zw\|_q^q \quad (4.7)$$

dır. Nehari manifoldu

$$\mathcal{N} = \{(z, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \setminus \{(0, 0)\} \mid I(z, w) = 0\}$$

olsun. Ayrıca, W ve V kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$W = \{(z, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \mid I(z, w) > 0, J(z, w) < d\} \cup \{(0, 0)\}$$

dır ve

$$V = \{(z, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \mid I(z, w) < 0, J(z, w) < d\}.$$

Buradan

$$d = \inf_{(z, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \setminus \{(0, 0)\}} \sup_{k_1, k_2 > 0} J(k_1 z, k_2 w) = \inf_{(z, w) \in \mathcal{N}} J(z, w) \quad (4.8)$$

ifadesi W potansiyel kuyunun derinliğidir.

Yüksek enerji seviyeli zayıf çözümleri bulmak için bazı kavramları tanımlayalım.

$$J^\lambda = \{ (z, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \mid J(z, w) < \lambda \},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\lambda &= \mathcal{N} \cap J^\lambda \\ &= \left\{ (z, w) \in \mathcal{N} \mid \frac{q-1}{2q} \left(\|z\|_{H_0^2}^2 + \|w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{q^2} \|zw\|_q^q < \lambda \right\}, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda &= \inf \left\{ \frac{1}{2} (\|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) \mid (z, w) \in \mathcal{N}_\lambda \right\}, \\ \Gamma_\lambda &= \sup \left\{ \frac{1}{2} (\|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) \mid (z, w) \in \mathcal{N}_\lambda \right\}, \forall \lambda > d \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. γ_λ , λ ya göre artmayan ve Γ_λ , λ ya göre azalmayan olur.

(4.1) probleminin göre zayıf çözüm ve maksimum varlık zamanı kavramlarının tanımlarını verelim.

Tanım 4.1.1 (Zayıf çözüm) $(z_t, w_t) \in L^2([0, T], L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$ ve $(z, w) = (z(x, t), w(x, t)) \in L^\infty([0, T], H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega))$ ifadesi eğer $H_0^2(\Omega)$ uzayında $z(x, 0) = z_0(x)$, $w(x, 0) = w_0(x)$ başlangıç koşulunu her $y_1, y_2 \in H_0^2(\Omega)$ ve $t \in (0, T)$ için

$$(z_t, y_1) + (\Delta z, \Delta y_1) = (|w|^q |z|^{q-2} z \ln(|zw|), y_1)$$

ve

$$(w_t, y_2) + (\Delta w, \Delta y_2) = (|z|^q |w|^{q-2} w \ln(|zw|), y_2)$$

sağlarsa buna (4.1) probleminin $\Omega \times [0, T)$ üzerindeki bir *zayıf çözümü* denir. Ayrıca, her $t \in (0, T)$ için

$$\int_0^t (\|z_\tau\|_2^2 + \|w_\tau\|_2^2) d\tau + J(z, w) \leq J(z_0, w_0) \quad (4.9)$$

sağlanır.

Not. (4.1) probleminin $(z(t), w(t)) = (z(x, t), g(x, t))$ global zayıf çözümü için (z_0, w_0) in ω -limit kümesi

$$\omega(z_0, w_0) := \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{z(s), w(s) : s \geq t\}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.1.2 (Maksimum varlık zamanı) $(z, w) = (z(x, t), g(x, t))$, (4.1) probleminin bir zayıf çözümünü olsun. (z, w) nin maksimum varlık zamanı aşağıdaki gibi tanımlanır.

- (a) Eğer her bir $t \in [0, +\infty)$ için (z, w) var ise bu durumda $T = +\infty$ dur.
(b) Eğer $t \in [0, t_0)$ için (z, w) var fakat $t = t_0$ da (z, w) çözümü olmayacak şekilde bir pozitif t_0 sayısı varsa bu durumda $T = t$ dir.

Lemma 4.1.3 $(z, w) \in H_0^2(\Omega) \setminus \{(0, 0)\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (a) $\lim_{\gamma \rightarrow 0} J(\gamma z, \gamma w) = 0$, $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} J(\gamma z, \gamma w) = -\infty$.
(b) $\frac{d}{d\gamma} J(\gamma z, \gamma w)|_{\gamma=\gamma_*} = 0$ olacak biçimde bir tek $\gamma_* > 0$ sayısı vardır.
(c) $J(\gamma z, \gamma w)$, $(0, \gamma_*)$ aralığında artan, $(\gamma_*, +\infty)$ aralığında azalan ve $\gamma = \gamma_*$ noktasında maksimum değere sahiptir.
(d) $0 < \gamma < \gamma_*$ için $I(\gamma z, \gamma w) > 0$, $\gamma_* < \gamma < +\infty$ için $I(\gamma z, \gamma w) < 0$ ve $I(\gamma_* z, \gamma_* w) = 0$ olur.

İspat. (a) $J(z, w)$ tanımından ve $\gamma > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} J(\gamma z, \gamma w) &= \frac{1}{2} \|\Delta(\gamma z)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\Delta(\gamma w)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{q^2} \|(z\gamma)(w\gamma)\|_q^q - \frac{1}{q} ((\gamma z)(\gamma w))^q \ln(|(\gamma z)(\gamma w)|) dx \\ &= \frac{\gamma^2}{2} [\|\Delta z\|^2 + \|\Delta w\|^2] + \frac{\gamma^{2q}}{q^2} \|zw\|_q^q \\ &\quad - \frac{\gamma^{2q}}{q} \|zw\|_q^q \ln \gamma^2 - \frac{\gamma^{2q}}{q} |zw|^q \ln(|zw|) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\lim_{\gamma \rightarrow 0} J(\gamma z, \gamma w) = 0$, $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} J(\gamma z, \gamma w) = -\infty$ olur.

(b) $J(\gamma z, \gamma w)$ nin γ ya göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\gamma} J(\gamma z, \gamma w) &= \gamma \|\Delta z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \gamma \|\Delta w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{q} \gamma^{2q-1} \|zw\|_q^q \\ &\quad - 2\gamma^{2q-1} \|zw\|_q^q \ln \gamma^2 - 2\frac{\gamma^{2q-1}}{q} \|zw\|_q^q \\ &\quad - 2\gamma^{2q-1} |zw|^q \ln(|zw|) dx \\ &= \gamma \left[\|\Delta z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|\Delta w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 - 2\gamma^{2q-2} \ln \gamma^2 \|zw\|_q^q - \right. \\ &\quad \left. 2\gamma^{2q-2} (zw)^q \ln(|zw|) dx \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \phi(\gamma) &= \|\Delta z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|\Delta w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 - 2\gamma^{2q-2} \ln \gamma^2 \|zw\|_q^q \\ &\quad - 2\gamma^{2q-2} (zw)^q \ln(|zw|) dx \end{aligned}$$

alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma \rightarrow 0} \phi(\gamma) &= \|z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 > 0, \\ \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \phi(\gamma) &= -\infty\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\phi'(\gamma) &= -2(2q-2)\gamma^{2q-3} \ln \gamma^2 \|zw\|_q^q - 4\gamma^{2q-3} \|zw\|_q^q \\ &\quad - 2(2q-2)\gamma^{2q-3} |zw|^q \ln(|zw|) dx \\ &< 0\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu nedenle $\phi(\gamma_*) = 0$ olacak biçimde bir tek $\gamma_* > 0$ vardır. Bir başka deyişle $\frac{d}{d\gamma} J(\gamma z, \gamma w)|_{\gamma=\gamma_*} = 0$ olur.

(c) $J(\gamma z, \gamma w)$ nin $(0, \gamma_*]$ aralığında artan, (γ_*, ∞) aralığında azalan ve $\gamma = \gamma_*$ noktasında bir maksimuma sahiptir.

(d)

$$\begin{aligned}I(\gamma z, \gamma w) &= \|\Delta(\gamma z)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|\Delta(\gamma w)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 - 2(\gamma z \gamma w)^q \ln(|\gamma z| |\gamma w|) dx \\ &= \gamma \frac{d}{d\gamma} J(\gamma z, \gamma w)\end{aligned}$$

olmasından istenen sonuç doğrudan elde edilir.

Lemma 4.1.4 (4.3) koşulunun sağlandığını kabul edelim. $(z, w) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ ve $(z(t), w(t)) = (z(x, t), w(x, t))$, (4.1) probleminin bir zayıf çözümü olsun. Eğer $J(z_0, w_0) < d$ ve $I(z_0, w_0) < 0$ ise bu durumda $T, (z(t), w(t))$ nin maksimal varlık zamanı olmak üzere her bir $0 \leq t \leq T$ için $(z(t), w(t)) \in V$ olur.

İspat. Her bir $0 \leq t \leq T$ için $(z(t), w(t)) \in V$ olduğunu göstereceğiz. Çelişki yöntemiyle ispat yapacağız. $(z(t_0), w(t_0)) \notin V$ olmasını sağlayan en küçük $t_0 \in [0, T]$ olsun. $(z(t), w(t))$ nin sürekliliğinden $(z(t_0), w(t_0)) \in \partial V$ elde edilir. Bu nedenle

$$I(z(t_0), w(t_0)) = 0 \tag{4.10}$$

veya

$$J(z(t_0), w(t_0)) = d \tag{4.11}$$

elde edilir.

Eğer (4.10) sağlanırsa, bu durumda $(z(t_0), w(t_0)) \in \mathcal{N}$, $J(z(t_0), w(t_0)) > d$ olur. Bu durum da (4.9) ile çelişki oluşturur. Eğer (4.11) sağlanırsa, bu ayrıca (4.9) ile de çelişki oluşturur. Bu nedenle, her bir $0 \leq t \leq T$ için $(z(t), w(t)) \in V$ olur.

Lemma 4.1.5 (z, w) , (4.1) probleminin bir zayıf çözümü olsun. Bu durumda her bir $t \in [0, T)$ için

$$\frac{d}{dt}(\|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) = -2I(z, w)$$

olur.

İspat. Lemma 4.1.5 in ispatı doğrudan Tanım 4.1.1 de $y_1 = z$ ve $y_2 = w$ alınarak elde edilir.

4.2 Düşük Başlangıç Enerjisi $J(z_0, w_0) < d$.

Bu bölümde, başlangıç enerjisi $J(z_0, w_0) < d$ olan (4.1) probleminin global varlığını göstereceğiz.

Teorem 4.2.1 $(z_0, w_0) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ ve (4.2) koşulunu sağladığını kabul edelim.

Eğer $J(z_0, w_0) < d$ ve $I(z_0, w_0) \geq 0$ ise bu durumda (4.1) problemi $t \in [0, \infty)$ için $(z_t(t), w_t(t)) \in L^2((0, \infty); L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$ ve $(z(t), w(t)) \in L^\infty((0, \infty); H_0^2(\Omega) \times$

$H_0^2(\Omega))$ ile $(z(t), w(t)) \in W$ global çözüme sahiptir. Ayrıca, eğer $I(z_0, w_0) > 0$ ise bu durumda

$$\|z\|_2^2 + \|w\|_2^2 \leq (\|z_0\|_2^2 + \|w_0\|_2^2) e^{-2kt}$$

olacak şekilde bir $k > 0$ sabiti vardır.

İspat. $J(z_0, w_0) < d$ ve $I(z_0, w_0) \geq 0$ olduğundan

(i) Eğer $0 < J(z_0, w_0) < d$ ve $I(z_0, w_0) \geq 0$ ise bu durumda $I(z_0, w_0) > 0$ elde edilir.

Eğer $I(z_0, w_0) = 0$ ise bu durumda d nin (4.8) deki tanımından, $J(z_0, w_0) \geq d$ elde edilir. Bu ise bir çelişki oluşturur.

(ii) $J(z_0, w_0) = 0$ ve $I(z_0, w_0) \geq 0$ ise bu durumda $(z_0, w_0) = (0, 0)$ elde edilir. Eğer $(z_0, w_0) \neq (0, 0)$ ise (4.7) den

$$\frac{q-1}{2q} \left(\|z_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{q^2} \|z_0 w_0\|_q^q < 0$$

elde edilir. Bu da bir çelişki oluşturur.

(iii) Eğer $J(z_0, w_0) < 0$ ve $I(z_0, w_0) \geq 0$ ise (4.7) ile çelişir.

Yukarıdaki işlemlerden, $0 < J(z_0, w_0) < d$ ve $I(z_0, w_0) > 0$ durumlarını göz önüne alacağız.

$$\begin{cases} \Delta^2 \omega_i = \gamma_i \omega_i, & x \in \Omega \\ \omega_i = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ve ω_i, γ_i öz değerine karşılık gelen biharmonik operatörün öz fonksiyonu olmak üzere $H_0^2(\Omega)$ nin $\{\omega_i(x)\}_{i=1}^\infty$ şeklinde bir bazı vardır. Sonuç olarak, $\{\omega_i(x)\}_{i=1}^\infty$ bazını $H_0^2(\Omega)$ uzayında Δ^2 için Galerkin bazı olarak alıyoruz. Bu durumda Galerkin metodunun uygulanmasıyla (4.1) probleminin $z_m(x, 0) = z_{0m}, w_m(x, 0) = w_{0m}$ halindeki başlangıç koşullu ile

$i = 1, 2, \dots, m$ için

$$\begin{cases} z_m(x, t) = \sum_{i=1}^m u_{im}(t) \omega_i(x), & m = 1, 2, \dots, \\ w_m(x, t) = \sum_{i=1}^m v_{im}(t) \omega_i(x), & m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

dir. Buradan

$$(z_{mt}, \omega_i) + (\Delta z_m, \Delta \omega_i) = (|w_m|^q |z_m|^{q-2} z_m \ln(|z_m w_m|), \omega_i) \quad (4.12)$$

ve

$$(w_{mt}, \omega_i) + (\Delta w_m, \Delta \omega_i) = (|z_m|^q |w_m|^{q-2} w_m \ln(|z_m w_m|), \omega_i) \quad (4.13)$$

şeklinde bir $(z_m(x, t), w_m(x, t))$ çözüm elde edilir. Burada z_{0m} ve w_{0m} $H_0^2(\Omega)$ uzayında $m \rightarrow +\infty$ için

$$z_{0m} = \sum_{i=1}^m u_{im}(0) \omega_i(x) \rightarrow z_0 \quad (4.14)$$

ve

$$w_{0m} = \sum_{i=1}^m v_{im}(0) \omega_i(x) \rightarrow w_0 \quad (4.15)$$

dır. Burada z_{0m} ve w_{0m} fonksiyonları $\text{span}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ kümesinden alınmıştır.

Standart adi diferansiyel denklem teorisinden, (4.12)-(4.15) sistemi

$$(u_{im}(t), v_{im}(t)) \in C^1[0, T_0) \times C^1[0, T_0)$$

şeklindeki bir çözüme sahip olur. Burada T_0 her m için $u_{im}(t)$ ve $v_{im}(t)$ nin minimum varlık zamanıdır. Bu nedenle $(z_m(x, t), w_m(x, t)) \in C^1([0, T_0]; H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega))$ olur.

Daha sonra, (4.12) ve (4.13) ü sırası ile $u'_{im}(t)$ ve $v'_{im}(t)$ ile çarpıp $i = 1, 2, \dots, m$ için toplayalım. 0 dan t ye kadar τ ya göre integralini alalım ve bu iki denklemi toplayalım: $t \in [0, T_0)$ için

$$\int_0^t (\|z_{m\tau}\|_2^2 + \|w_{m\tau}\|_2^2) d\tau + J(z_m, w_m) = J(z_{0m}, w_{0m}) \quad (4.16)$$

elde edilir.

$J(z_0, w_0) < d$ ve (4.14)–(4.15) ten yeteri kadar büyük m için $J(z_{0m}, w_{0m}) < d$ olur.

Buradan (4.16) dan m ve $t \in [0, T_0)$ için

$$\int_0^t (\|z_{m\tau}\|_2^2 + \|w_{m\tau}\|_2^2) d\tau + J(z_m, w_m) = J(z_{0m}, w_{0m}) < d \quad (4.17)$$

elde edilir.

(4.14), (4.15) ve $(z_0, w_0) \in W$ durumu göz önüne alındığında yeteri kadar büyük m için $(z_{0m}, w_{0m}) \in W$ olur. Şimdi yeteri kadar büyük m ve $t \in [0, T_0)$ için $(z_m(x, t), w_m(x, t)) \in W$ olduğunu göstereceğiz. Eğer bu yanlış ise bu durumda $(z_m(x, t_0), w_m(x, t_0)) \in \partial W$ olacak şekilde $t_0 \in (0, T_0)$ vardır. Buradan $I(z_m(t_0), w_m(t_0)) = 0$ ve $(z_m(t_0), w_m(t_0)) \neq (0, 0)$ ya da $J(z_m(t_0), w_m(t_0)) = d$ olur.

(4.17) den, $J(z_m(t_0), w_m(t_0)) = d$ eşitliğinin sağlanmadığı görülür. Eğer

$$I(z_m(t_0), w_m(t_0)) = 0 \text{ ve } (z_m(t_0), w_m(t_0)) \neq (0, 0)$$

olursa böylece d nin tanımından

$$J(z_m(t_0), w_m(t_0)) \geq d$$

elde edilir. Bu da (4.8) ile çelişki oluşturur. Sonuç olarak yeteri kadar büyük m ve $t \in [0, T_0)$ için $(z_m(x, t), w_m(x, t)) \in W$ olur.

Yeteri kadar büyük m için $(z_m(x, t), w_m(x, t)) \in W$ olduğundan, (4.17) ve

$$\begin{aligned} J(z_m(t), w_m(t)) &= \frac{q-1}{2q} \left(\|z_m(t)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w_m(t)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{q^2} \|z_m(t) w_m(t)\|_q^q \\ &\quad + \frac{1}{2q} I(z_m(t), w_m(t)) \end{aligned}$$

olmasından yeteri kadar büyük m ve $t \in [0, T_0)$ için

$$\begin{aligned} & \int_0^t (\|z_{m\tau}\|_2^2 + \|w_{m\tau}\|_2^2) d\tau + \frac{q-1}{2q} \left(\|z_m(t)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w_m(t)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right) \\ & + \frac{1}{q^2} \|z_m(t) w_m(t)\|_q^q \\ & < d \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde edilir. Bu da

$$\|z_m(t)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 < \frac{2q}{q-1} d, \quad (4.19)$$

$$\|w_m(t)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 < \frac{2q}{q-1} d, \quad (4.20)$$

ve

$$\int_0^t (\|z_{m\tau}\|_2^2 + \|w_{m\tau}\|_2^2) d\tau < d \quad (4.21)$$

sonucunu verir.

(4.21) den, $T_0 = +\infty$ olduğu görülür. Bu nedenle (4.19)-(4.21) den $m \rightarrow +\infty$ için

$$z_m \rightarrow z, \quad L^\infty(0, +\infty; H_0^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf}^* \text{ yakınsak,} \quad (4.22)$$

$$w_m \rightarrow w, \quad L^\infty(0, +\infty; H_0^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf}^* \text{ yakınsak,} \quad (4.23)$$

$$z_{mt} \rightarrow z_t, \quad L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf}^* \text{ yakınsak,} \quad (4.24)$$

$$w_{mt} \rightarrow w_t, \quad L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf}^* \text{ yakınsak} \quad (4.25)$$

olacak şekilde z, w ve bunların $\{z_m\}_{i=1}^{+\infty}$ ve $\{w_m\}_{i=1}^{+\infty}$ alt dizileri vardır.

Buradan Aubin-Lions kompaktlık teoreminden

$$z_m \rightarrow z, \quad C([0, +\infty); L^2(\Omega)) \text{ uzayında güçlü yakınsak,}$$

$$w_m \rightarrow w, \quad C([0, +\infty); L^2(\Omega)) \text{ uzayında güçlü yakınsak}$$

olur.

Bu

$$z_m \rightarrow z, \quad \Omega \times [0, +\infty) \text{ nin h.h.h.y.}$$

$w_m \rightarrow w$, $\Omega \times [0, +\infty)$ nin h.h.h.y.

verir. Ayrıca $\Omega \times [0, +\infty)$ bölgesinde h.h.h.y.

$$|w_m|^q |z_m|^{q-2} z_m \ln(|z_m w_m|) \rightarrow |w|^q |z|^{q-2} z \ln(|zw|), \quad (4.26)$$

$$|z_m|^q |w_m|^{q-2} w_m \ln(|z_m w_m|) \rightarrow |z|^q |w|^{q-2} w \ln(|zw|) \quad (4.27)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| |w_m|^q |z_m|^{q-2} z_m \ln(|z_m w_m|) \right|^{\frac{q}{q-1}} dx \\ &= \int_{\Omega} (|w_m|^q |z_m|^{q-1} \ln(|z_m w_m|))^{\frac{q}{q-1}} dx \\ &= \int_{\{x \in \Omega: |z_m(x) w_m(x)| \leq 1\}} (|w_m|^q |z_m|^{q-1} \ln(|z_m w_m|))^{\frac{q}{q-1}} dx \\ & \quad + \int_{\{x \in \Omega: |z_m(x) w_m(x)| > 1\}} (|w_m|^q |z_m|^{q-1} \ln(|z_m w_m|))^{\frac{q}{q-1}} dx \\ &\leq \int_{\Omega} (e(q-1)^{-1} |w_m|)^{\frac{q}{q-1}} dx + \int_{\Omega} |z_m|^{\frac{(q-1+r)q}{q-1}} |w_m|^{\frac{(q+r)q}{q-1}} dx \\ &\leq e(q-1)^{-\frac{q}{q-1}} \|w_m\|_{\frac{q}{q-1}}^{\frac{q}{q-1}} + \|z_m\|_{2e}^e \|w_m\|_{2\sigma}^{\sigma} \\ &\leq c \|w_m\|_{H_0^2(\Omega)}^{\frac{q}{q-1}} + c \|z_m\|_{H_0^2(\Omega)}^e \|w_m\|_{H_0^2(\Omega)}^{\sigma} \leq c \end{aligned} \quad (4.28)$$

olur. Burada $x \in (0, 1)$ için $|x^{q-1} \ln x| \leq (e(q-1))^{-1}$ ve $x \in [1, \infty)$, $\mu \in (0, \infty)$ için $x^{-\mu} \ln x \leq (e\mu)^{-1}$ olmasından $\sigma = \frac{(q+r)q}{q-1}$, $e = \frac{(q-1+r)q}{q-1}$ dir. $0 < 2e < 2^*$ ve $0 < 2e < 2^*$ olması için bir $r \in (0, \infty)$ sayısı alalım, (4.28) ispatına benzer olarak

$$\int_{\Omega} \left| |z_m|^q |w_m|^{q-2} w_m \ln(|z_m w_m|) \right|^{\frac{q}{q-1}} dx \leq c \quad (4.29)$$

elde ederiz. Bu nedenle, (4.26)–(4.29) ve Aubin Lions lemmasından $L^\infty(0, +\infty; L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega))$ uzayında

$$|w_m|^q |z_m|^{q-2} z_m \ln(|z_m w_m|) \rightarrow |w|^q |z|^{q-2} z \ln(|zw|) \text{ zayıf}^* \text{ yakınsak} \quad (4.30)$$

$$|z_m|^q |w_m|^{q-2} w_m \ln(|z_m w_m|) \rightarrow |z|^q |w|^{q-2} w \ln(|zw|) \text{ zayıf}^* \text{ yakınsak} \quad (4.31)$$

elde edilir.

(4.22)–(4.25) ve (4.30),(4.31) göz önünde bulundurularak belirli i için, (4.12) ve (4.13) de limite geçilmesi ile hemen hemen her $0 < t < +\infty$ için

$$(z_t, w_i) + (\Delta z, \Delta w_i) = (|w|^q |z|^{q-2} z \ln(|zw|), \omega_i)$$

ve

$$(w_t, \omega_i) + (\Delta w, \Delta \omega_i) = (|z|^q |w|^{q-2} w \ln(|zw|), \omega_i)$$

elde edilir. $\{\omega_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, $H_0^2(\Omega)$ uzayının bazı olmasından her $y_1, y_2 \in H_0^2(\Omega)$ ve hemen hemen her $0 < t < +\infty$ için

$$(z_t, y_1) + (\Delta z, \Delta y_1) = (|w|^q |z|^{q-2} z \ln(|zw|), y_1) \quad (4.32)$$

ve

$$(w_t, y_2) + (\Delta w, \Delta y_2) = (|z|^q |w|^{q-2} w \ln(|zw|), y_2) \quad (4.33)$$

elde edilir. $t \in (0, +\infty)$ için (4.32) ve (4.33) ü 0 dan t ye integrali alındığında $\forall y_1 \in H_0^2(\Omega)$ için

$$(z, y_1) + \int_0^t (\Delta z, \Delta y_1) d\tau = \int_0^t (|w|^q |z|^{q-2} z \ln(|zw|), y_1) d\tau + (z(0), y_1) \quad (4.34)$$

ve $\forall y_2 \in H_0^2(\Omega)$ için

$$(w, y_2) + \int_0^t (\Delta w, \Delta y_2) d\tau = \int_0^t (|z|^q |w|^{q-2} w \ln(|zw|), y_2) d\tau + (w(0), y_2) \quad (4.35)$$

elde edilir.

Benzer olarak, (4.12) ve (4.13) ün 0 dan t ye integrali alınır ve limit alındığında $\forall y_1 \in H_0^2(\Omega)$ için

$$(z, y_1) + \int_0^t (\Delta z_m, \Delta y_1) d\tau = \int_0^t (|w_m|^q |z_m|^{q-2} z_m \ln(|z_m w_m|), y_1) d\tau + (z_0, y_1) \quad (4.36)$$

ve $\forall y_2 \in H_0^2(\Omega)$ için

$$(z, y_2) + \int_0^t (\Delta w_m, \Delta y_2) d\tau = \int_0^t (|z_m|^q |w_m|^{q-2} w_m \ln(|z_m w_m|), y_2) d\tau + (w_0, y_2) \quad (4.37)$$

sonucuna ulaşılır. (4.34)-(4.37) den $z(0) = z_0$ ve $w(0) = w_0$ elde edilir.

(4.14), (4.15), (4.18), (4.22)-(4.25), (4.30) ve (4.31) e göre ve normlu bir uzayda norm zayıf aşağı yarı sürekli olduğundan (4.9) enerji eşitsizliği sağlanır. Bu durumda Tanım 4.1.2 den $(z(t), w(t))$ global zayıf çözüm ve $(z(t), w(t)) \in W$ olur.

Şimdi $z(x, t)$ global çözümünün cebirsel azalmasını gösterelim. (4.7), (4.9) ve $(z(t), w(t)) \in W$ den

$$\frac{q-1}{2q} \left(\|z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{q^2} \|zw\|_q^q \leq J(z(t)) \leq J(z_0) \quad (4.38)$$

elde ederiz. $I(z, w) < 0$ olduğundan $I(\gamma_* z, \gamma_* w) = 0$ olacak şekilde bir $\gamma_* \in (0, 1)$ vardır. Ayrıca

$$\gamma_* \left(\frac{q-1}{2q} \left(\|z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right) \right) + \frac{1}{q^2} \|zw\|_q^q \geq J(\gamma_* z(t)) \geq d \quad (4.39)$$

olur.

(4.38) ve (4.39) dan

$$\gamma_* \geq \left(\frac{d}{J(z_0, w_0)} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.40)$$

sonucu çıkar. $I(\gamma_* f, \gamma_* g) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} I(\gamma_* z, \gamma_* w) &= \gamma_*^2 \left(\|z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right) - 2\gamma_*^{2q} \int_{\Omega} |zw|^q \ln |zw| \, dx \\ &\quad - 2\gamma_*^{2q} \ln \gamma_*^2 \|zw\|_q^q \\ &= (\gamma_*^2 - 2\gamma_*^{2q}) \left(\|z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + 2\gamma_*^{2q} I(z, w) - 2\gamma_*^{2q} \ln \gamma_*^2 \|zw\|_q^q \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Yani

$$I(z, w) \geq \left(1 - \frac{1}{2\gamma_*^{2(q-1)}} \right) \left(\|z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right) \quad (4.41)$$

olur. (4.40) ve (4.41) denklemlerinden

$$I(z, w) \geq \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{J(z_0, w_0)} \right)^{2(\frac{1}{q}-1)} \right) \left(\|z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right)$$

elde edilir.

$H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gömülmesinden

$$I(z, w) \geq c \left(\|z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (4.42)$$

dır.

Diğer taraftan Lemma 4.1.5 ten $t \in [0, \infty)$ için

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + I(z, w) = 0$$

olduğu görülür.

Gronwall eşitsizliğinden $t \in [0, \infty)$ için

$$\|z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\|z_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) e^{-2ct}$$

elde edilir. Buradan Teorem 4.2.1 in ispatı tamamlanmış olur.

4.3 Kritik Başlangıç Enerjisi $J(z_0, w_0) = d$.

Bu bölümde (4.1) probleminin $J(z_0, w_0) = d$ başlangıç enerjili global varlık çözümlerini göstereceğiz.

Teorem 4.3.1 $(z_0, w_0) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ ve (4.2) sağlansın. Eğer $J(z_0, w_0) = d$ ve $I(z_0, w_0) \geq 0$ ise bu durumda (4.1) problemi $t \in [0, \infty)$ için $(z_t(t), w_t(t)) \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$ ve $(z(t), w(t)) \in \overline{W} = W \cup \partial W$ ile $(z(t), w(t)) \in L^\infty(0, +\infty; H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega))$ bir global çözüme sahiptir.

İspat. $J(z_0, w_0) = d$ olduğundan $(z_0, w_0) \neq (0, 0)$ olur. $\gamma_m = 1 - \frac{1}{m}, (z_{0m}, w_{0m}) = \gamma_m(z_0, w_0)$, $m \in \{1, 2, \dots\}$ olmak üzere aşağıdaki probleme bakalım:

$$\begin{cases} z_{mt} + \Delta^2 z_m = |w_m|^q |z_m|^{q-2} z \ln(|z_m w_m|), & x \in \Omega, t > 0, \\ w_{mt} + \Delta^2 w_m = |z_m|^q |w_m|^{q-2} w \ln(|z_m w_m|), & x \in \Omega, t > 0, \\ z_m(x, 0) = z_{0m}(x), & x \in \Omega, \\ w_m(x, 0) = w_{0m}(x), & x \in \Omega, \\ z_m(x, t) = w_m(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \end{cases} \quad (4.43)$$

$I(z_0, w_0) \geq 0$ ve Lemma 4.1.3 ten $I(\gamma^* z_0, \gamma^* w_0) = 0$ olacak şekilde bir tek $\gamma^* \geq 1$ vardır. $\gamma_m < 1 < \gamma^*$ olmasından $I(\gamma_m z_0, \gamma_m w_0) > 0$, $J(\gamma_m z_0, \gamma_m w_0) < J(z_0, w_0) = d$ elde ederiz. Teorem 4.2.1 den, (4.43) problemi $H_0^2(\Omega)$ uzayında $m \rightarrow +\infty$ için

$$z_m(0) = z_{0m} \rightarrow z_0$$

başlangıç verili ve $(z_{mt}(t), w_{mt}(t)) \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$ olacak şekilde bir $(z_m(t), w_m(t)) \in L^\infty(0, +\infty; H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega))$ global çözüme sahip olur. Ayrıca $t \in [0, \infty)$ için $(z_m(t), w_m(t)) \in W$ olur. $\forall y_1 \in H_0^2(\Omega)$ ve $t \in [0, \infty)$ için

$$(z_{mt}, y_1) + (\Delta z_m, \Delta y_1) = (|w_m|^q |z_m|^{q-2} z_m \ln(|z_m w_m|), y_1),$$

$\forall y_2 \in H_0^2(\Omega)$ ve $t \in [0, \infty)$ için

$$(w_{mt}, y_2) + (\Delta w_m, \Delta y_2) = (|z_m|^q |w_m|^{q-2} w_m \ln(|z_m w_m|), y_2)$$

ve $t \in [0, \infty)$ için

$$\int_0^t (\|z_{m\tau}\|_2^2 + \|w_{m\tau}\|_2^2) d\tau + J(z_m, w_m) \leq J(z_{0m}, w_{0m}) < d \quad (4.44)$$

olur. (4.44) ten ve

$$\begin{aligned} J(z_m(t), w_m(t)) &= \frac{q-1}{2q} \left(\|z_m(t)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w_m(t)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right) + \\ &\quad \frac{1}{q^2} \|w_m(t)\|_q^q + \frac{1}{2q} I(z_m(t), w_m(t)) \end{aligned}$$

denklemden $t \in [0, T_0)$ için

$$\begin{aligned} &\int_0^t (\|z_{m\tau}\|_2^2 + \|w_{m\tau}\|_2^2) d\tau + \frac{q-1}{2q} \left(\|z_m(t)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w_m(t)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right) + \\ &\quad \frac{1}{q^2} \|z_m(t) w_m(t)\|_q^q \\ &< d \end{aligned}$$

elde edilir.

İspatın geriye kalan kısmı Teorem 4.2.1 in ispatına benzer olarak yapılır. Böylece Teorem 4.3.1 in ispatı tamamlanmış olur.

4.4 Yüksek Başlangıç Enerjisi $J(z_0, w_0) > d$.

Bu bölümde, $J(z_0, w_0) > d$ başlangıç enerjili (4.1) probleminin global varlık çözümünü sağlayan koşulları araştıracağız.

Teorem 4.4.1 $\lambda \in (d, +\infty)$ ve $(z_0, w_0) \in \Phi_\lambda$ olsun. Bu durumda (4.1) probleminin global çözümü vardır ve $t \rightarrow \infty$ için $(z(t), w(t)) \rightarrow (0, 0)$ olur. Burada

$$\Phi_\lambda = \mathcal{N}_+ \cap \left\{ (z(t), w(t)) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \mid \frac{1}{2} (\|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) < \gamma_\lambda, \right. \\ \left. d < J(z, w) \leq \lambda \right\} \quad (4.45)$$

ve

$$\gamma_\lambda = \inf \left\{ \frac{1}{2} (\|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) \mid (z, w) \in \mathcal{N}_\lambda \right\}$$

dır.

İspat: $(z_0, w_0) \in \Phi_\lambda$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Φ_λ tanımından ve γ_λ monotonluk özelliğinden $(z_0, w_0) \in \mathcal{N}_+$, $d < J(z, w) \leq \lambda$ ve

$$\frac{1}{2} (\|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) < \gamma_\lambda \leq \gamma_{J(z_0, w_0)} \quad (4.46)$$

elde edilir. $(z(t), w(t)) \in \mathcal{N}_+$ olduğunu gösterelim. Çelişki yöntemi ile ispatı yapacağız. $[0, t_0]$ için $(z(t), w(t)) \in \mathcal{N}_+$ ve $(z(t_0), w(t_0)) \in \mathcal{N}$ olacak şekilde bir $t_0 \in (0, T)$ olduğunu varsayalım. Lemma 4 ten

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) = -I(z, w) \quad (4.47)$$

elde ederiz. $\mathcal{N}_+$ nın tanımından ve (4.47) den $\|z\|_2^2 + \|w\|_2^2$ nin $[0, t_0]$ üzerinde azalan olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan (4.9) dan $J(z, w)$, t ye göre artmayan olur. Buradan her $t \in [0, T)$ için

$$J(z, w) \leq J(z_0, w_0)$$

elde edilir. (4.46) dan

$$\frac{1}{2} (\|z(t_0)\|_2^2 + \|w(t_0)\|_2^2) < \frac{1}{2} (\|z_0\|_2^2 + \|w_0\|_2^2) < \gamma_{J(z_0, w_0)} \quad (4.48)$$

olur. $(z(t_0), w(t_0)) \in \mathcal{N}$ ve (4.46) ten $(z(t_0), w(t_0)) \in \mathcal{N}_{J(z_0, w_0)}$ olur. $\gamma_{J(z_0, w_0)}$ tanımından

$$\gamma_{J(z_0, w_0)} = \inf \left\{ \frac{1}{2} (\|z\|_2^2 + \|w\|_2^2) \mid (z, w) \in \mathcal{N}_{J(z_0, w_0)} \leq \frac{1}{2} (\|z(t_0)\|_2^2 + \|w(t_0)\|_2^2) \right\}$$

olur. Bu (4.48) ile çelişir. Bu nedenle, her $t \in [0, T)$ ve $(z(t), w(t)) \in J^{J(z_0, w_0)}$ için $(z(t), w(t)) \in \mathcal{N}_+$ elde edilir. Yani her $t \in [0, T)$ için $(z(t), w(t)) \in J^{J(z_0, w_0)} \cap \mathcal{N}_+$ olur. $\mathcal{N}_\lambda$ tanımından her $t \in [0, T)$ için

$$\left(\|z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right) < \frac{2q}{q-2} J(z_0, w_0)$$

olur, böylece $T = +\infty$ elde edilir. Bu $(z(t), w(t))$ nin $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ da düzgün sınırlı olduğunu gösterir. Bu nedenle ω -limit kümesi boştan farklı olur.

Şimdi, herhangi $(\omega, \varphi) \in \omega(z_0, w_0)$ için yukarıdaki çıkarımlardan

$$J(\omega, \varphi) \leq J(z_0, w_0) \text{ ve } \frac{1}{2} (\|\omega\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2) < \gamma_{J(z_0, w_0)}$$

olur. Birinci eşitsizliğe göre $(\omega, \varphi) \in J^{J(z_0, w_0)}$ olur. İkinci eşitsizliğe ve $\gamma_{J(z_0, w_0)}$ tanımına göre $(\omega, \varphi) \notin \mathcal{N}_{J(z_0, w_0)}$ olduğu görülür. $\mathcal{N}_{J(z_0, w_0)} = \mathcal{N} \cap J^{J(z_0, w_0)}$ olduğundan $(\omega, \varphi) \notin \mathcal{N}$ elde edilir. Bu nedenle $\omega(z_0, w_0) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ olur. $\mathcal{N}$, (4.1) probleminin aşkar olmayan çözümlerini içerdiğinden, $\omega(z_0, w_0) = (0, 0)$ elde edilir. Yani $t \rightarrow \infty$ için $(z(t), w(t)) \rightarrow (0, 0)$ olur.

Böylece Teorem 4.4.1 in ispatı tamamlanmış olur.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Logaritmik kaynak terimli denklemler matematik, fizik, mühendislik gibi alanlarda sıklıkla kullanılmaktadır. Tezin dördüncü bölümünde logaritmik kaynak terimli parabolik tipten dördüncü mertebeden denklem sistemini

$$\begin{cases} z_t + \Delta^2 z = |w|^q |z|^{q-2} z \ln(|zw|), \\ w_t + \Delta^2 w = |z|^q |w|^{q-2} w \ln(|zw|) \end{cases}$$

sınırlı bir Ω bölgesi üzerinde başlangıç ve sınır koşulları altında ele alarak çözümlerin global varlığı Galerkin metodu kullanılarak çalışılmıştır.

5.2 Öneriler

Tezimizin dördüncü bölümünde logaritmik kaynak terimli parabolik tipten dördüncü mertebeden denklem sisteminin sınırlı bölgede çözümlerinin global varlığı gösterildi. İncelenen denklemlerin güncel ve literatür taraması yapıldığında hala açık problemlerin olduğunu gözlemledik. Bölge, farklı sınır koşulları ile ya da bölge sınırsız seçilerek de çözülebilir. Yine aynı problemin patlama durumu da çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- Adams, R. A., and Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev spaces*. New York: Elsevier.
- Bedrossian, J., and Vicol, V. (2022). *The mathematical analysis of the incompressible Euler and Navier-Stokes equations: an introduction* (Vol. 225). American Mathematical Society.
- Bialynicki-Birula I., Mycielski J. (1975). Wave equations with logarithmic nonlinearities. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 23(4), 461-466.
- Bialynicki-Birula I., Mycielski J. (1976). Nonlinear wave mechanics. Annalen der Physik, 100,62-93.
- Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York: Springer.
- Cao, Y., and Liu, C. (2018). Initial boundary value problem for a mixed pseudo-parabolic p-Laplacian type equation with logarithmic nonlinearity.
- Chen, H., Luo, P., and Liu, G. (2015). Global solution and blow-up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 422(1), 84-98.
- Chen, H., and Tian, S. (2015). Initial boundary value problem for a class of semi-linear pseudo-parabolic equations with logarithmic nonlinearity. Journal of Differential Equations, 258(12), 4424-4442.
- Cömert, T., and Pişkin, E. (2022). Global existence and stability of solutions for Kirchhoff-type parabolic system with logarithmic source term. Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal, Special, (10-2022), 153-170
- Cömert, T., and Pişkin, E. (2023). Blow-up of weak solutions for a higher-order heat equation with logarithmic nonlinearity. Miskolc Mathematical Notes, 24(2), 749-762.
- Deng, Q., Zeng, F., and Wang, D. (2022). Global existence and blow up of solutions for a class of coupled parabolic systems with logarithmic nonlinearity. Mathematical Biosciences and Engineering, 19(8), 8580-8600. DOI:10.3934/mbe.2022398
- Edwards, R. E. (2012). *Functional analysis: theory and applications*. Courier Corporation.
- Evans, L. C. (2022). *Partial differential equations*. American Mathematical Society.
- Fibich, G. (2015). *The nonlinear Schrödinger equation*. Berlin: Springer.
- Friedman, A. (2008). *Partial differential equations of parabolic type*. Courier Dover Publications.

- Lebedev, L. P., Vorovich, I. I., and Gladwell, G. M. L. (2012). *Functional analysis: applications in mechanics and inverse problems* (Vol. 41). Springer Science.
- Li, P., and Liu, C. (2018). A class of fourth-order parabolic equation with logarithmic nonlinearity. *Journal of inequalities and applications*, 2018, 1-21.
- Liu, Z., and Fang, Z. B. (2023). Well-posedness and Asymptotic Behavior for a Pseudo-parabolic Equation Involving p-biharmonic Operator and Logarithmic Nonlinearity. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 27(3), 487-523.
- Nhan, L. C. and Truong, L. X. (2017). Global solution and blow-up for a class of pseudo p-Laplacian evolution equations with logarithmic nonlinearity. *Computers & Mathematics with Applications*, 73, 2076-2091. doi: 10.1016/j.camwa.2017.02.030
- Peng, J., and Zhou, J. (2021). Global existence and blow-up of solutions to a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity. *Applicable Analysis*, 100(13), 2804-2824
- Pişkin, E. (2018). *Kısmi Türevli Denklemler*, Seçkin Yayıncılık.
- Pişkin, E. (2021). *Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması*, Pegem Akademi Yayıncılık, Ankara.
- Pişkin, E., ve Okutmuşur, B. (2021). *An introduction to Sobolev spaces*. Bentham Science Publishers.
- Zeng, F., Deng, Q., and Huang, Y. (2022). Global existence and blow up for a class of pseudo-parabolic equations with logarithmic nonlinearity. *Results in Applied Mathematics*, 15, 100308.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

Birtane Kaya, Züleyha

Web sayfası

(Research Gate, Academia, vs.)

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans		
Lisans	Dicle Üniversitesi	2013
Lise	Toplukonut Lisesi	2009

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2020-	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Züleyha BİRTANE KAYA
Öğrenci No	22804039
Ana Bilim Dalı	Matematik
Program Türü	Proje ☐ Yüksek Lisans ☒ Doktora ☐
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Tez Başlığı	Logaritmik Kaynak Terimli Parabolik Tıpten Denklemin Çözümlerinin Global Varlığı
RAPOR BİLGİLERİ	
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası
Sayfa Sayısı	47
Raporlama Tarihi	13.07.2024
Benzerlik Oranı (%)	%15

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 35 sayfalık kısmına ilişkin, 13/07/2024 tarihinde tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 15 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

☒Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç

☒Kaynaklar hariç

☐Alıntılar hariç/dâhil

☐Diğer (Açıklayınız)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Tez benzerlik oranı üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı, Soyadı: Züleyha BİRTANE KAYA

Tarih: 13/07/2024

İmza:

Danışman:

İmza:

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

Tarih: 13/07/2024

Ana Bilim Dalı Başkanı:

İmza:

Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY

Tarih:

