



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**LOKAL HAUSDORFF VE PRE-HAUSDORFF
SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OSMAN ÇELTİK

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

AKSARAY, 2022

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 192342412 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Osman ÇELTİK** tarafından hazırlanan **LOKAL HAUSDORFF VE PRE-HAUSDORFF SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLAR** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Ali AYTEKİN

Pamukkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 15/06/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HİNİS
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Lokal Hausdorff Ve Pre-Hausdorff Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar konulu yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Osman ÇELTİK

TEŞEKKÜR

Tez çalışmasının, konu seçiminde, araştırma yönteminde, hazırlanması, tamamlanması ve sonuçlandırılmasında deneyimleri ile beni yönlendiren, her aşamasında bana yol gösteren her türlü görüş, destek ve yardımlarını esirgemeyen, değerli vakitlerini bana ayıran kıymetli hocam sayın Doç. Dr. Ayhan ERCİYES'e, bu süreç zarfı içinde beni yönlendiren ve tecrübelerini benimle paylaşan Aksaray Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak tüm hayatım boyunca yanımda olan aldığım kararları her zaman destekleyen, sadece bu çalışma sürecinde değil tüm hayatım boyunca beni cesaretlendiren ve moral veren anneme, babama ve kardeşlerime sonsuz şükranlarımı sunar ve teşekkür ederim.

Osman ÇELTİK
AKSARAY, 2022

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KATEGORİK KAVRAMLAR VE TEOREMLER	3
2.1 Kategori.....	3
2.2 Özel Obje Ve Morfizmler.....	4
2.3 Fanktor.....	6
2.4 Topolojik Kategori	8
3. SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLAR.....	11
3.1 Süzgeç Ve Yakınsaklık Kavramı	11
3.2 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar	14
3.3 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar İle Topolojik Uzaylar Arasındaki İlişki.....	16
3.4 Noktada Eksen Dönüşümleri.....	17
4. LOKAL T_2 VE $PRET_2$ SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLAR	21
4.1 Topolojik Kategorilerde Ayırma Aksiyomları	21
4.2 Lokal T_0 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar	34
4.3 Lokal $PreT_2$ Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar.....	35
4.4 $PreT_2(ConFCO)$ Kategorisinde Alt Uzaylar Ve Çarpım Uzaylar	42
4.5 Lokal T_2 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar	47
4.6 $T_2(ConFCO)$ Kategorisinde Alt Uzaylar Ve Çarpım Uzaylar	52
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	56
5.1 $PreT_2$ Uzaylar İle İlgili Sonuçlar.....	56
5.2 T_2 Uzaylar İle İlgili Sonuçlar	57
5.3 Öneriler.....	58
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ.....	61

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LOKAL HAUSDORFF VE PRE-HAUSDORFF SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLAR

Osman ÇELTİK

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır ve tezin amaçları aşağıdaki gibidir:

- (1) Lokal preHausdorff ($preT_2$) ve Hausdorff (T_2) sabit süzgeç yakınsak uzayları karakterize etmek, çeşitli formları arasındaki ilişkileri araştırmak,
- (2) Lokal $preT_2$ ve lokal T_2 sabit süzgeç yakınsak uzaylardan oluşan ve **ConFCO** sabit süzgeç yakınsak uzayların kategorisinin dolu alt kategorilerinin kalıtsal, çarpımsal ve co-çarpımsallığını araştırmak,
- (3) **ConFCO** nun $KT_2(\text{ConFCO})$ ve $pre\bar{T}_2(\text{ConFCO})$ dolu alt kategorilerinin izomorfik kategoriler olduğunu göstermektir.

Birinci ve ikinci bölümde, kategori, fanktor, topolojik fanktor, başlangıç-bitiş kaldırmaları, diskre objeler ve bazı gerekli teoremler verildi. Üçüncü bölümde, sabit süzgeç yakınsak uzaylar tanımlandı ve örnekler verildi. Sabit süzgeç yakınsak uzaylar ile topolojik uzaylar arasındaki ilişkiler belirlendi. **ConFCO** kategorisinin normalleştirilmiş bir topolojik kategori olduğu gösterildi. Daha sonra **ConFCO** kategorisindeki bazı özel obje ve morfizmler karakterize edildi. Dördüncü bölümde, p noktasındaki eksen dönüşümleri ve topolojik kategorilerde ayırma aksiyomları verildi. Daha sonra **ConFCO** kategorisindeki lokal T_0 objeler araştırıldı ve bu objeler **ConFCO** kategorisindeki lokal $preT_2$ objeler ve lokal T_2 objeleri tanımlamada kullanıldı. **ConFCO** kategorisinin, lokal $preT_2$ ve lokal T_2 sabit süzgeç yakınsak uzaylardan oluşan dolu alt kategorilerinin ($pre\bar{T}_2(\text{ConFCO})$, $preT'_2(\text{ConFCO})$, $\bar{T}_2(\text{ConFCO})$, $T'_2(\text{ConFCO})$ ve $KT_2(\text{ConFCO})$) kalıtsal, çarpımsal ve co-çarpımsal oldukları gösterildi. Son olarak $KT_2(\text{ConFCO})$ ve $pre\bar{T}_2(\text{ConFCO})$ alt kategorilerinin izomorfik kategoriler olduğu verildi. Beşinci bölümde, teoremlerden elde edilen sonuçlar bir araya getirildi, değerlendirme ve öneriler yapıldı.

Anahtar Kelimeler: T_0 objeler, $preT_2$ objeler, topolojik kategori, sabit süzgeç yakınsak uzaylar.

Haziran, 2022; 61 sayfa

M. Sc. THESIS

LOCAL HAUSDORFF VE PRE-HAUSDORFF CONSTANT FILTER
CONVERGENCE SPACES

Osman ÇELTİK

Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters and the goals of this thesis is as follows:

- (1) To characterize local pre-Hausdorff ($preT_2$) and Hausdorff (T_2) constant filter convergence spaces and investigate the relationships among these various forms,
- (2) To research that these full subcategories of the category of constant filter convergence spaces consisting of local $preT_2$ and local T_2 constant filter convergence spaces are hereditary, productive, and co-productive,
- (3) To show the full subcategories $KT_2(ConFCO)$ and $pre\bar{T}_2(ConFCO)$ of $ConFCO$ are isomorphic categories.

In the first and second chapters, the concepts of category, fanctor, topological fanctor, initial-final lifts, discrete objects, and some necessary theorems are given. In the third chapter, constant filter convergence spaces are defined and examples are given. Then, the relationships among constant filter convergence spaces and topological spaces are determined. The category $ConFCO$ are shown a normalized topological category. Then, some special objects and morphisms in the $ConFCO$ category are characterized. In the fourth chapter, the axis maps at point p and separation properties in topological categories are given. Furthermore local T_0 objects in $ConFCO$ are given and these objects used to describe local $preT_2$ and local T_2 objects in $ConFCO$. It is shown that the full subcategories of consisting of local $preT_2$ and local T_2 constant filter convergence spaces ($pre\bar{T}_2(ConFCO)$, $preT_2'(ConFCO)$, $\bar{T}_2(ConFCO)$, $T_2'(ConFCO)$, and $KT_2(ConFCO)$) are hereditary, productive, and co-productive. Finally, it is present that the subcategories $KT_2(ConFCO)$ and $pre\bar{T}_2(ConFCO)$ are isomorphic categories. In the fifty chapter, the results obtained from the theorems are brought together, evaluations and suggestions are given.

Keywords: T_0 objects, $preT_2$ objects, topological category, constant filter convergence spaces.

June, 2022; 61 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Doğal dönüşüm diyagramı.....	7
Şekil 2.2. <i>Set</i> ve <i>Top</i> kategorilerinde doğal dönüşüm diyagramı.....	7
Şekil 4.1. $Pre\bar{T}_2$ diyagramı.....	26
Şekil 4.2. $PreT'_2$ diyagramı.....	30
Şekil 4.3. <i>ConFCO</i> da $pre\bar{T}_2$ diyagramı..	35
Şekil 4.4. <i>ConFCO</i> da $preT'_2$ diyagramı..	39
Şekil 4.5. <i>ConFCO</i> da $\bar{T}_2$ diyagramı.	47



SİMGELER VE KISALTMALAR

A_p	Temel Eksen Dönüşümü
$Born$	Bornolojik Uzaylar Kategorisi
C	Kategori
$ConFCO$	Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar Kategorisi
$ConLim$	Sabit Limit Uzaylar Kategorisi
$ConSCO$	Sabit Yığın Yakınsak Uzaylar Kategorisi
E	Topolojik Kategori
$F(X)$	X Kümesi Üzerindeki Tüm Süzgeçlerin Kümesi
FCO	Süzgeç Yakınsak Uzaylar Kategorisi
$FILTER$	Süzgeç Uzaylar Kategorisi
Grp	Gruplar Kategorisi
$Haus$	Hausdorff Uzaylar Kategorisi
$Hom_C(X, Y)$	C Kategorisinde X den Y ye Morfizm
K	Süzgeç Yakınsaklık Yapısı
$LFCO$	Lokal Süzgeç Yakınsak Uzaylar Kategorisi
Lim	Limit Uzaylar Kategorisi
Met	Metrik Uzaylar Kategorisi
$Mor(C)$	C Kategorisinin Morfizmleri Kümesi
N_x	x Noktasının Komşuluklar Sınıfı
$Ob(C)$	C Kategorisinin Objeleri Kümesi
$P(X)$	X in Kuvvet Kümesi
$Pborn$	Pre-bornolojik Uzaylar Kategorisi
$Poset$	Kısmi Sıralama Bağıntılı Uzaylar Kategorisi
$PUConv$	Pre-düzgün Yakınsak Uzaylar Kategorisi
$PreT_2$	Pre-Hausdorff Obje
$Preord$	Ön Sıralama Bağıntılı Uzaylar Kategorisi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
Rel	Bağıntı Uzaylar Kategorisi
$Ring$	Halkalar Kategorisi
$RRel$	Yansıma Bağıntılı Uzaylar Kategorisi
SCO	Yığın Yakınsak Uzaylar Kategorisi
Set	Kümeler Kategorisi
S_p	p de Skewed Eksen Dönüşümü
$SUConv$	Yarı Düzgün Yakınsak Uzaylar Kategorisi
$Unif$	Düzgün Uzaylar Kategorisi
Top	Topolojik Uzaylar Kategorisi
$Vect$	Tüm Reel Vektör Uzaylar Kategorisi
XV_pX	X Kümesinin p Noktasında Wedge Çarpımı
$X \sqcup X$	X Kümesinin Ayrık Birleşimi
∇_p	p de Katlama Dönüşümü
τ	Topoloji

1. GİRİŞ

Bir uzaydaki yakınsak dizilerin ailesini bilmenin bu uzay üzerindeki topoloji bilmeye yetmeyeceği açıktır. Çünkü aynı X uzayı üzerinde aynı yakınsak dizi ailesine sahip birden fazla topoloji bulunabilir. Başka bir ifadeyle dizi kavramı uzayın topolojisini belirleme konusunda yetersiz kalmaktadır. Topolojik uzayların alt sınıfı olan birinci sayılabilir uzaylarda dizilerde yakınsaklık kavramı ile süreklilik, Hausdorff olma ve kapalı küme olma gibi topolojik yapıları belirlemek mümkündür. Fakat her topolojik uzay birinci sayılabilir olmadığından dizilerin yakınsaklık kavramı ile bu topolojik yapıların belirlenmesi yetersiz kalmaktadır. Bu yüzden dizi yerine ağ veya süzgeç kavramını kullanma ihtiyacı doğmuştur. Dizilerin bir genelleştirmesi olan süzgeç kavramı 1937 yılında Cartan [1] tarafından tanımlandı. Süzgeç, bir metrik uzayda dizilerin üstlendiği role benzer tarzda yakınsaklığı tanımlamakta önemli bir yere sahiptir. 1948 de Choquet [2], süzgeç yakınsaklığı kavramını tanımladı. 1954 de Kowalsky [3], çalışmalarında süzgeç yakınsaklığını kullandı. 1964 de Kent [4], yakınsaklık aksiyomlarından daha zayıf olan lokal süzgeç yakınsak uzaylar giriş yaptı. 1979 da Schwarz [5], **ConFCO** (objeleri sabit süzgeç yakınsak uzaylar, morfizmleri sürekli dönüşümler) kategorisini tanımladı ve **ConFCO** kategorisinin **FILTER** (objeleri süzgeç uzaylar, morfizmleri sürekli dönüşümler) kategorisine izomorf olduğunu gösterdi.

Ayırma aksiyomları, topolojide bağlantılılık, tam bağlantısızlık, kalıtsal tam bağlantısızlık, kompaktlık, soberlik, gibi kavramların yanında Urysohn Lemması, Urysohn Metrikleşme Teoremi ve Tietze Genişleme Teoremi gibi önemli teoremlerde de yer aldığından bu kavramları belirli topolojik kategorilerde karakterize etmek önemlidir. Ayırma aksiyomlarını topolojik kategoriye genişletmek için çalışılan topolojik kategorideki başlangıç-final kaldırmaları ve diskre-indiske yapıları belirlemek çok önemlidir. Çünkü bu kavramların her birisinin başlangıç kaldırma ve diskrelik ile ilişkisi vardır.

1991'de Baran [6], klasik ayırma aksiyomlarının çeşitli genelleştirmelerini p noktasında (lokal) ve noktadan bağımsız olarak verdi. Baran ve Altındış [7], lokal pre -Hausdorff $((X, \tau)$ topolojik uzayının $preT_2$ olması $x, y \in X$, $x \neq y$ için $\{x, y\}$ kümesi indiske değilse, x ve y nin ayırık komşuluklara sahip olması demektir.) uzaya giriş yaptı. $preT_2$ objeler topolojik uzaylarda $preT_2$ topolojik uzaylara indirgenir [7].

Lokal *pre*-Hausdorff ($preT_2$) objelerin en önemli kullanımı topolojik kategorilerde lokal Hausdorff, T_3 , T_4 , regüler, tam regüler, normal, tam bağlantısız, kalıtsal bağlantısız objelerin ve bu objelerin çeşitli formlarını tanımlamakta kullanılır [8-11].

$PreT_2$ objeler bir toposta [12] decidable objeleri [13] karakterize etmekte kullanılmasının yanında kümenin sonlu olması durumunda uzaylar Borel field [14] kavramını tanımlamakta kullanılır ((X, τ) sonlu bir topolojik uzay olsun. τ ailesi Borel field dir ancak ve ancak (X, τ) $preT_2$ uzaydır.). Ayrıca T_2 ve $preT_2$ uzayların sober uzaylar [15] ((X, τ) uzayının sober olması demek her indirgenemez alt kümesinin tek bir generic noktaya sahip olması demektir, yani $B \subset X$ indirgenemez bir küme ve $b \in X$ olmak üzere $\overline{\{b\}} = B$ dir) ile çift yönlü gerektirmesi de bulunmaktadır. Bundan başka $preT_2$ objeler geometrik realization da, onların ilgili aralıklarında ve homotopik yapılar karşılık gelen kavramların belirlenmesinde önemli rol oynar.

1994 yılında Mielke [16], genel topolojide bazı klasik teoremlerde geçen T_2 lik şartı yerine $preT_2$ kullanarak, kalıtsallık, çarpımsallık, kompaktlık gibi kavramları topolojik kategorilere genişletti.

Bu tez çalışmasında, lokal $preT_2$ ve lokal T_2 sabit süzgeç yakınsak uzaylar karakterize edilerek, çeşitli formları arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Daha sonra lokal $preT_2$ ve lokal T_2 sabit süzgeç yakınsak uzaylardan oluşan **ConFCO** sabit süzgeç yakınsak uzayların kategorisinin dolu alt kategorileri olan $pre\bar{T}_2(\mathbf{ConFCO})$, $preT_2'(\mathbf{ConFCO})$, $\bar{T}_2(\mathbf{ConFCO})$, $T_2'(\mathbf{ConFCO})$, $KT_2(\mathbf{ConFCO})$ ve $LT_2(\mathbf{ConFCO})$ nin kalıtsal, çarpımsal ve co-çarpımsal olup olmadıkları gösterilmiştir. Ardından $KT_2(\mathbf{ConFCO})$ ile $pre\bar{T}_2(\mathbf{ConFCO})$ kategorilerinin ve $T_2'(\mathbf{ConFCO})$ ile $preT_2'(\mathbf{ConFCO})$ kategorilerinin izomorfik kategoriler olduğu ispatlanmıştır. Son olarak teoremlerden elde edilen sonuçlar bir araya getirilerek sonuç ve öneriler verilmiştir.

2. KATEGORİK KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1 Kategori

Tanım 2.1.1 $\mathcal{C}$ nin objeleri (nesneler) ile objeler arasındaki tüm morfizmlerin (dönüşümler) sınıfı, iki morfizm için bileşke işleminin tanımlandığı ve bu bileşke işlemi aşağıdaki şartları sağlaması halinde bu yapıya kategori denir [17,18].

(i) $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ için $1_X : X \rightarrow X$ ve $1_Y : Y \rightarrow Y$ birim morfizmleri vardır öyle ki her $f : X \rightarrow Y$ morfizmi için

$$f \circ 1_X = 1_Y \circ f = f$$

(ii) Her $f, g, h \in Mor(\mathcal{C})$ için $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ ve $h : Z \rightarrow W$ için

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

$\mathcal{C}$ kategorisindeki objeler sınıfı kısaca $Ob(\mathcal{C})$, $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ için X den Y ye tüm morfizmlerin sınıfı $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) = \{f | f : X \rightarrow Y \text{ morfizm}\}$ şeklinde ve verilen iki morfizmin bileşkesi de

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

$$(f, g) \rightarrow g \circ f$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.2 (1) Objeleri tüm kümeler, morfizmleri ise kümeler arasındaki fonksiyonlar olan yapı kategoridir ve **Set** ile gösterilir.

(2) Objeleri tüm topolojik uzaylar, morfizmleri ise sürekli fonksiyonlar olan yapı bir kategoridir ve **Top** ile gösterilir.

(3) Objeleri tüm gruplar, morfizmleri grup homomorfizmleri olan yapı bir kategoridir ve **Grp** ile gösterilir.

(4) Objeleri tüm süzgeç yakınsak uzaylar (lokal yakınsak uzaylar, limit uzaylar) morfizmleri sürekli dönüşümler olan yapı bir kategoridir ve ***FCO*** (sırasıyla ***LFCO***, ***Lim***) ile gösterilir

(5) Objeleri tüm bağıntı uzayları (yansıma bağıntılı uzayları, ön sıralama bağıntılı uzaylar), morfizmleri bağıntı koruyan dönüşümler olan yapı bir kategoridir ve ***Rel*** (sırasıyla ***RRel***, ***Preord***) ile gösterilir.

2.2 Özel Obje Ve Morfizmler

Önerme 2.2.1 $X \neq \emptyset$ bir küme ve Y bir küme, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) f birebirdir.
- (ii) $g \circ f = 1_X$ olacak şekilde $g: Y \rightarrow X$ fonksiyonu vardır.

Tanım 2.2.2 $\mathcal{C}$ kategori ve $f \in \mathcal{C}$ de morfizm olsun. $g \circ f = 1_X$ şeklinde $g: Y \rightarrow X$ morfizmi varsa f ye kesit (section) denir.

Önerme 2.2.3 $f: X \rightarrow Y$ için aşağıdakiler denktir:

- (i) f örtendir.
- (ii) $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde $g: Y \rightarrow X$ fonksiyonu vardır.

Tanım 2.2.4 $\mathcal{C}$ bir kategori ve $f: X \rightarrow Y$ morfizm olsun. $f \circ g = 1_Y$ olduğunda $g: Y \rightarrow X$ ise f ye retraksiyon (retraction) denir.

Önerme 2.2.5 $f: X \rightarrow Y$ için aşağıdakiler denktir:

- (i) f birebirdir ve örtendir.
- (ii) $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde $g: Y \rightarrow X$ fonksiyonu vardır.

Tanım 2.2.6 $\mathcal{C}$ bir kategori ve $f: X \rightarrow Y$ morfizmi olsun. $g \circ f = 1_X$ ve $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde $g: Y \rightarrow X$ morfizmi varsa f ye izomorfizm (yani hem kesit hemde retraksiyon) denir.

Önerme 2.2.7 $f: X \rightarrow Y$ için aşağıdakiler denktir:

- (i) f birebirdir.
- (ii) $f \circ h = f \circ k$ olacak şekilde tüm h ve k için $h = k$ dır.

Tanım 2.2.8 $\mathcal{C}$ bir kategori ve $f: X \rightarrow Y$ morfizmi olsun. $f \circ h = f \circ k$ olacak şekilde $\mathcal{C}$ kategorisindeki tüm h ve k için $h = k$ ise f ye monomorfizm (monic) denir.

Önerme 2.2.9 $f: X \rightarrow Y$ için aşağıdakiler denktir:

- (i) f örtendir.
- (ii) $h \circ f = k \circ f$ olacak şekilde tüm h ve k için $h = k$ dır.

Tanım 2.2.10 $\mathcal{C}$ bir kategori ve $f: X \rightarrow Y$ morfizmi olsun. $h \circ f = k \circ f$ olacak şekilde $\mathcal{C}$ kategorisindeki tüm h ve k için $h = k$ ise f ye epimorfizm (epic) denir.

Tanım 2.2.11 $\mathcal{C}$ bir kategori ve $f: X \rightarrow Y$ morfizmi hem monomorfizm hemde epimorfizm ise f ye bimorfizm denir.

Tanım 2.2.12 Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde ve $A \in Ob(\mathcal{C})$ olsun. Eğer her bir $X \in Ob(\mathcal{C})$ için $Hom_{\mathcal{C}}(A, X)$ tek elemanlı oluyorsa A ya $\mathcal{C}$ nin başlangıç objesidir denir. Eğer her $B \in Ob(\mathcal{C})$ için $Hom_{\mathcal{C}}(X, B)$ tek elemanlı oluyorsa B ye $\mathcal{C}$ nin bitiş objesidir denir. Eğer başlangıç ve bitiş objesi aynı ise bu objeye sıfır obje denir [17].

Set te $A = \emptyset$ başlangıç, $B = \{x\}$ cümlesi bitiş objedir.

Top da $A = (\emptyset, \tau = \{\emptyset\})$ başlangıç obje ve $B = (\{x\}, \tau = \{\emptyset, \{x\}\})$ nin bitiş objesidir.

Grp da $A = B = \{e\}$ hem başlangıç hemde bitiş objesidir. Dolayısıyla bu obje bu kategoride sıfır objedir.

Born veya **PBorn** da $A = (\emptyset, \{\emptyset\})$ başlangıç, $B = (\{x\}, F = \{\emptyset, \{x\}\})$ cümlesi bitiş objedir.

RRel de $A = (\emptyset, R = \emptyset)$ boş bağıntılı uzay başlangıç, $B = (\{x\}, R = \{x\}^2)$ cümlesi bitiş objedir.

2.3 Fanktor

Tanım 2.3.1 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $\mathcal{C}$ nin her bir X objesi için $\mathcal{D}$ nin $F(X)$ objesine, $\mathcal{C}$ nin her $f: X \rightarrow Y$ morfizmi $\mathcal{D}$ nin $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$ morfizmine dönüşsün. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ye fanktor denir [17,18].

(i) Her $X \in Ob(\mathcal{C})$ için

$$F(1_X) = 1_{F(X)}$$

(ii) $f, g \in Mor(\mathcal{C})$ için $g \circ f$ tanımlı olmak üzere,

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

Örnek 2.3.2 (1) $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$, $U((X, \tau)) = X$ ve $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$, $U((G, *)) = G$ şeklinde tanımlanan dönüşümler yapıyı ihmal ettiğinden unutkan fanktor olarak adlandırılırlar.

(2) $U: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$, $U(X) = (X, P(X))$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir fanktordur ve bu fanktora diskre fanktor denir. $U(X) = (X, \{\emptyset, X\})$ olsaydı U ya indiskre fanktor denir.

Tanım 2.3.3 ([17,18]) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ bir fanktor olsun.

(1) Her $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ ve her $f: X \rightarrow Y$ dönüşümü için en az bir $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ dönüşümü vardır öyle ki $F(g) = f$ ise F ye dolu fanktor denir, yani dolu fanktor bir bakıma morfizm anlamında örtenliğe denk gelmektedir.

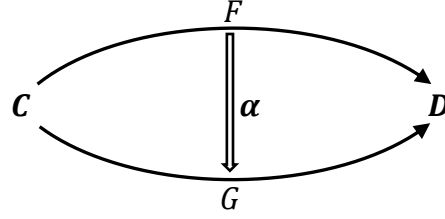
(2) Her $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ ve her $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ dönüşümleri için $F(f) = F(g)$ olduğunda $f = g$ oluyorsa F ye düzenli (faithful) fanktor denir, yani düzenli fanktor bir bakıma morfizm anlamında birebirliğe denk gelmektedir.

(3) Her $X \in Ob(\mathcal{C})$ için her $f: X \rightarrow X$ dönüşümü izomorfizm ve $F(f) = 1_{U(X)}$ olduğunda $f = 1_X$ oluyorsa F ye amnestik fanktor denir.

(4) F amnestik ve düzenli ise F ye belirli (concrete) fanktor denir.

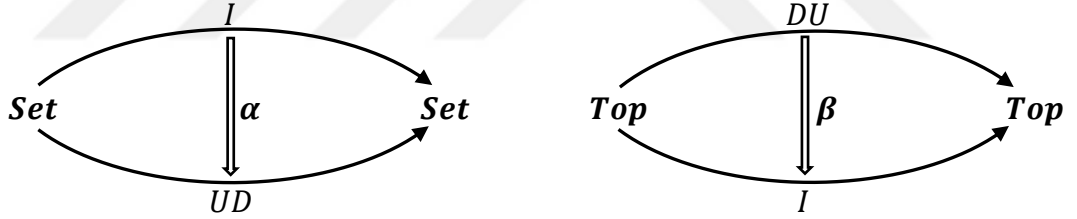
(5) $G \circ F = 1_C$ ve $F \circ G = 1_D$ olmak üzere $G: D \rightarrow C$ bir fanktor varsa F ye izomorfizm, G ve F ye ise izomorfik kategoriler denir.

Tanım 2.3.4 $F, G: C \rightarrow D$ fanktorlar olsun. Her $A, B \in Ob(C)$ ve her $f: A \rightarrow B$ morfizmi için $\alpha_A: F(A) \rightarrow G(A)$ dönüşümü D kategorisinde bir morfizm olmak üzere $G(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ F(f)$ oluyorsa $\alpha: F \rightarrow G$ ye doğal dönüşüm denir [17,18].



Şekil 2.1. Doğal dönüşüm diyagramı.

Örnek 2.3.5 $U: Top \rightarrow Set$ unutkan, $D: Set \rightarrow Top$ diskre fanktor olsun. $\alpha: I \rightarrow UD$ ve $\beta: DU \rightarrow I$ doğal dönüşümlerdir. Burada I birim fanktordur, yani $I(B) = B$ dir.



Şekil 2.2. Set ve Top kategorilerinde doğal dönüşüm diyagramı.

Tanım 2.3.6 C ve D iki kategori olsun. $F: C \rightarrow D$ ve $G: D \rightarrow C$ fanktorları verilsin. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa F ye G nin sağ adjointi veya G ye F nin sol adjointi denir [17,18].

(i) $\eta: I \rightarrow G \circ F$ ve $\varepsilon: F \circ G \rightarrow I$ doğal dönüşümleri olmalıdır.

(ii) $(\eta G) \circ (G \varepsilon) = I$ ve $(\varepsilon F) \circ (F \eta) = I$ eşitlikleri sağlanmalıdır.

İki topolojinin çarpımı nasıl topolojilerin çarpımı değilse bir $\mathcal{C}$ kategorisindeki A ve B objelerinin çarpımı da bilinen kartezyen çarpımı değildir. Evrensel özellik ile birlikte çarpımın tek bir izomorfizm ile kaldırılabilir olmasıdır. Yani burada önemli olan bir nesnenin diğer nesnelerle veya diğer morfizmlerle olan ilişkisidir.

Tanım 2.3.7 ([17,18]) $\mathcal{C}$ kategori ve $\{A_i\}_{i \in I}$ objelerin sınıfı olmak üzere bu durumda,

(1) $B \in Ob(\mathcal{C})$ ve her $i \in I$ için $p_i: B \rightarrow A_i$ morfizmleri için $X \in Ob(\mathcal{C})$ objesi ve her $i \in I$ için $f_i: X \rightarrow A_i$ için $p_i \circ \varphi = f_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi: X \rightarrow B$ varsa $(B, \{p_i\}_{i \in I})$ ye $\{A_i\}_{i \in I}$ objelerinin çarpımı denir.

(2) $R \in Ob(\mathcal{C})$ objesi ve her $i \in I$ için $c_i: A_i \rightarrow R$ morfizmleri için $X \in Ob(\mathcal{C})$ objesi ve her $i \in I$ için $f_i: A_i \rightarrow X$ için $\varphi \circ c_i = f_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi: R \rightarrow X$ varsa $(R, \{c_i\}_{i \in I})$ ye $\{A_i\}_{i \in I}$ objelerinin co-çarpımı denir.

Örnek 2.3.8 *Set* kategorisinde iki objenin çarpımı bildiğimiz kartezyen çarpımdır. *Grp* kategorisinde iki objenin çarpımı direkt çarpımdır. *Top* kategorisindeki iki objenin çarpımı ise τ_* çarpım uzayıdır.

2.4 Topolojik Kategori

Tanım 2.4.1 $U: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ bir fanktoru aşağıdaki şartlarsa U ya topolojik fanktor ve $\mathcal{C}$ ye $\mathcal{D}$ üzerinde topolojik kategori denir [17,19].

(i) U belirlidir,

(ii) Her $B \in Ob(\mathcal{D})$ için $U^{-1}(B) = \{X \in Ob(\mathcal{C}) | U(X) = B\}$ bir kümedir. Yani U küçük demetlere sahiptir. Burada $U^{-1}(B)$ ifadesine B üzerindeki demet denir.

(iii) Her U -kaynağı bir başlangıç kaldırmasına sahiptir veya buna denk olarak her U -kavşağı bir bitiş kaldırmasına sahiptir.

$\mathcal{D}$ de ki her $i \in I$ $f_i: U(X) = A \rightarrow U(X_i)$ ailesi için $(\bar{f}_i) = f_i$ olacak şekilde $\mathcal{C}$ de bir $f_i: X \rightarrow X_i, i \in I$ ailesi vardır ve $U(\bar{h}_i: Y \rightarrow X_i) = f_i \circ k: U(Y) \rightarrow U(X) = A \rightarrow U(X_i)$ iken $k: U(Y) \rightarrow U(X)$ dönüşümüne karşılık $U(\bar{k}) = k$ olacak şekilde en az bir $\bar{k}: Y \rightarrow X$ dönüşümü mevcuttur öyle ki $\bar{f}_i \circ \bar{k} = \bar{g}_i$.

Tanım 2.4.2 $U: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ topolojik fanktor olmak üzere eğer $\mathbf{D}$ nin bitiş objesinin her alt objesi B olmak üzere $U^{-1}(B)$ tek bir yapıya sahipse U ya normalleştirilmiş topolojik fanktor denir [17].

Örnek 2.4.3 $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$, $U(X, \tau) = X$ normalleştirilmiş bir topolojik fanktordur.

(i) U unutkan fanktor yani $U(X, \tau) = X$ ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ için $U(f) = f: X \rightarrow Y$ şeklinde verilsin. $f, g: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ sürekli dönüşümleri için kabul edelim ki $U(g) = U(f)$ olsun. Burada $f = g$ olur. Yani U düzenlidir. Diğer taraftan ise $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \varphi)$ sürekli, $U(f) = 1_X$ ve f homeomorfizm olsun. Bu durumda $f = 1_{(X, \tau)}$ yani $\varphi = \tau$ olduğunu gösterelim. f ve f^{-1} sürekli ve $U(f) = f = I$ olduğundan, $f^{-1}(\varphi) \subset \tau$ olduğundan $\varphi \subset \tau$ dır. $f^{-1}(\tau) \subset \varphi$ olduğundan $\tau \subset \varphi$ olup $\tau = \varphi$ dir. Yani U amnestiktir. O halde U hem amnestik hem de düzenli olduğundan U belirlidir.

(ii) Şimdi ise $U^{-1}(X) = \{ (X, \tau) | U(X, \tau) = X \}$ nin küme olduğunu gösterelim. $\Phi = \{ \tau | \tau, X \text{ üzerinde topoloji} \}$ olsun. $\theta: U^{-1}(X) \rightarrow \Phi$ ve $\theta(X, \tau) = \tau$ olarak alınırsa θ nin birebir ve örten olduğu açıktır. Dolayısıyla $U^{-1}(X)$ ile Φ denktir. Φ bir küme olduğundan $U^{-1}(X)$ de bir küme olur. O halde U küçük demetlere sahiptir.

(iii) $\{ f_i: X \rightarrow U(X_i, \tau_i) = X_i, i \in I \}$ $\mathbf{Set}$ de bir U kaynağı ve τ_* üretilen topoloji olmak üzere $f_i: (A, \tau_*) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ olsun. $\tau = \tau_*$ olması için gerek ve yeter şart (Y, σ) topolojik uzayı ve sürekli $g_i: (Y, \sigma) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ fonksiyonlar ailesi için eğer $g_i = f_i \circ h$ olacak şekilde en az bir $h: Y \rightarrow X$ fonksiyonu varsa h süreklidir. Bu önermeden dolayı $f_i: (X, \tau_*) \rightarrow (X_i, \tau_i)$, U -kaynağının başlangıç kaldırmasıdır. $\{ f_i: U(X_i, \tau_i) = X_i \rightarrow X, i \in I \}$ sınıfı, $\mathbf{Set}$ de herhangi bir U kavşağı ve τ^* zayıf (coinduced) topoloji olsun. $f_i: (X_i, \tau_i) \rightarrow (X, \tau^*)$ verilen kavşağın bitiş kaldırmasıdır.

Yukarıda **Top** yerine **Unif**, **SUConv**, **PUConv**, **Rel**, **RRel** kategorileri alınırsa bu kategorilerin de topolojik kategori olduğu görülür.

Örnek 2.4.4 (1) **Met**, metrik uzaylar kategorisinde metrik uzayların keyfi çarpımları her zaman bir metrik tanımlamaz. Bu ise U -kavşağının bir başlangıç kaldırmasına sahip olmadığını gösterir. **Grp**, **Ring** kategorilerinde bir grubun ve bir halkanın alt kümesi grup ve halka değildir. Bu ise U -kaynağının bir başlangıç kaldırmasına sahip

olmadığını gösterir. Benzer şekilde **Poset** kısmi sıralama bağıntı uzaylar kategorisi, **Vect** tüm reel vektör uzaylar kategorisi alındığında da bu fanktorların topolojik fanktor olmadığı görülür.

(2) Objeleri topolojik gruplar morfizmleri topolojik grup homomorfizmi olan **TopGrp** kategorisi için $U: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ topolojik fanktordur. Fakat $U: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor değildir.

Tanım 2.4.5 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ iki kategori olsun. $U: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ topolojik fanktoru $D: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ sol adjointine sahip ise D ye diskre fanktor, $D^*: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ sağ adjointe sahip ise D^* a indiskre fanktor denir. Yani $X \in Ob(\mathcal{C})$ için $X = D(U(X))$ objesine $\mathcal{C}$ de diskre obje ve $Y = D^*(U(Y))$ objesine de $\mathcal{C}$ indiskre obje denir. Diskre ve indiskre objeler şu şekilde de tanımlanabilir [17].

$X \in Ob(\mathcal{C})$ diskre olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{C}$ nin her Y objesi için $U(X) \rightarrow U(Y)$ morfizmi $X \rightarrow Y$ kaldırılabilir.

$X \in Ob(\mathcal{C})$ indiskre olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{C}$ nin her Y objesi için $U(Y) \rightarrow U(X)$ dönüşümü $Y \rightarrow X$ kaldırılabilir.

3. SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLAR

3.1 Süzgeç Ve Yakınsaklık Kavramı

Tanım 3.1.1 $B \neq \emptyset$ bir cümle, $\alpha \neq \emptyset$ ve $\alpha \subset P(B)$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa α ya B üzerinde bir öz süzgeç (proper) denir.

(i) $\emptyset \notin \alpha$

(ii) Her $U, V \in \alpha$ için $U \cap V \in \alpha$

(iii) $U \in \alpha$ ve $U \subset V$ ise $V \in \alpha$

(i) ve (ii) şarttan α süzgecine ait sonlu sayıda kümelerin kesişiminin boş olamayacağı ve (iii) şarttan α süzgecine ait her sayıda kümelerin birleşiminin α süzgecine ait olduğu anlaşılır. Ayrıca (i) şarttan $P(B)$ kümesinin kendisi bir süzgeç değildir. (iii) şarttan ise süzgeçlerin artan bir yapıda olduğunu gösterir.

$\emptyset \in \alpha$ ve (ii) ve (iii) şartlar sağlanırsa $\alpha = P(B)$ dir. Bu durumda α ya B üzerinde bir öz olmayan süzgeç (improper) denir. B üzerindeki tüm süzgeçlerin cümlesi $F(B)$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.2 (1) $B = \{x\}$ olsun. B üzerindeki süzgeçleri bulalım.

$P(B) = \{\{x\}, \emptyset\}$ dir. $\alpha \subset P(B)$ için $\alpha = \{\emptyset, \{x\}, P(B)\}$ dir. Süzgeç tanımından $\emptyset \notin \alpha$ olduğundan $\alpha = \emptyset, \alpha = \{\emptyset\}, \alpha = \{P(B)\}$ süzgeç değildirler. $\alpha = \{\{x\}\}$ süzgeçtir. Çünkü $\emptyset \notin \alpha$ ve $U = V = \{x\}$ olacağından $U \cap V = \{x\} \in \alpha$, $U = \{x\} \in \alpha$ ve $U \subset V = \{x\}$ olduğundan $V \in \alpha$ dir.

(2) $B = \{x, y\}$ kümesi için B üzerindeki süzgeçleri yazalım.

$P(B) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, B\}$ dir. $\alpha \subset P(B)$ olacağından α , $2^4 = 16$ tane süzgeç adayı vardır. Fakat bunlardan sadece 3 tanesi süzgeçtir. Bunlar $\alpha_1 = \{B\}$, $\alpha_2 = \{\{x\}, B\}$ ve $\alpha_3 = \{\{y\}, B\}$ dir.

(3) $B = \{x, y, z\}$ olsun. B üzerindeki süzgeçleri yazalım.

$\alpha_1 = \{B\}$ aşikar süzgeç.

$\alpha_2 = \{\{x, y\}, B\}$

$\alpha_3 = \{\{x, z\}, B\}$

$\alpha_4 = \{\{y, z\}, B\}$

$\alpha_5 = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, B\} = [x]$

$\alpha_6 = \{\{y\}, \{x, y\}, \{y, z\}, B\} = [y]$

$\alpha_7 = \{\{z\}, \{x, z\}, \{y, z\}, B\} = [z]$ şeklindedir.

B üzerinde süzgeç olmayan yapılarda vardır bunlardan bazıları ise;

$\alpha_8 = \{\{x\}, \{x, y\}, \{y, z\}, B\}$

$\alpha_9 = \{\{z\}, \{x\}, \{y, z\}, \{x, z\}, B\}$ dir.

Örnek 3.1.3 B boş olmayan bir cümle, $\emptyset \neq A \subset B$ ve $x \in B$ olsun.

(1) $\alpha = \{U \subset B : x \in U\} = [x]$ bir süzgeçtir. $[x]$ kümesi x noktasını içeren B nin tüm alt cümlelerin cümlesidir.

(i) $\emptyset \notin \alpha$ dir.

(ii) $U, V \in \alpha$ olsun. Tanımdan $x \in U$ ve $x \in V$ dir. $x \in U \cap V$ olur, dolayısıyla $U \cap V \in \alpha$ elde edilir.

(iii) $U \in \alpha$ ve $U \subset V$ olsun. $U \in \alpha$ olduğundan $x \in U$ dir. $x \in U \subset V$ den $x \in V$ elde edilir. Dolayısıyla $V \in \alpha$ dir.

(2) $\alpha = \{U \subset B : A \subset U\} = [A]$ ifadesi B üzerinde öz süzgeç olur. Gerçekten,

(i) $\emptyset \notin [A]$ dir.

(ii) $U \in [\alpha]$ ve $V \in [\alpha]$ ise $\alpha \subset U$ ve $\alpha \subset V$ dir. Buradan $U \cap V \subset \alpha$ olduğunda $U \cap V \in [\alpha]$ dir.

(iii) $U \in [\alpha]$ ve $U \subset V$ alalım. $U \in [\alpha]$ ise $\alpha \subset U$ dir. $U \subset V$ olduğundan $\alpha \subset U \subset V$ dir. $\alpha \subset V$ elde edilir. Buradan $V \in [\alpha]$ bulunur.

(3) (B, τ) topolojik uzay ve $x \in B$ olsun. x noktasının tüm komşuluklarını ihtiva eden $N_x = \{U \subseteq B \mid \text{en az bir } V \in \tau \text{ ve } x \in V \subset U\} \subset P(B)$ ailesi bir süzgeçtir ve bu süzgece x nın komşuluklarının süzgeci denir.

Tanım 3.1.4 $B \neq \emptyset$ ve α ise B de bir süzgeç olmak üzere,

(1) Her $U \subset B$ için $U \in \alpha$ veya $U^c \in \alpha$ ise α ya ultra (maximal) süzgeç denir.

(2) $\alpha \subset \beta$ ise α süzgeci β dan daha kalındır veya β süzgeci α dan daha incedir denir.

Tanım 3.1.5 $B \neq \emptyset$ ve $\alpha \subset P(B)$, $\alpha \neq \emptyset$ olsun. Eğer α aşağıdaki şartları sağlarsa α ya süzgeç bazı denir.

(i) $\emptyset \notin \alpha$ dır.

(ii) Her $U, V \in \alpha$ için $W \subset U \cap V$ olacak şekilde $W \in \alpha$ vardır.

Örnek 3.1.6 $B = \{x, y, z\}$, $\beta = \{\{x\}, B\}$ olsun.

(i) $\emptyset \notin \beta$ sağlar.

(ii) $\{x\}, B \in \beta$ için $\{x\} \cap B = \{x\} \in \beta$, $\{x\} \cap \{x\} = \{x\} \in \beta$ ve $B \cap B = B \in \beta$ olduğundan şartlar sağlanır β süzgeç bazıdır.

Tanım 3.1.7 B boş olmayan bir cümle, $\emptyset \neq \beta \subset F(B)$, B üzerinde süzgeç bazı olarak alalım. $F = \{U \subset B : \exists V \in \beta \text{ vardır öyle ki } V \subset U\}$ ifadesine β süzgeç bazı(tabanı) tarafından üretilen süzgeç denir.

Örnek 3.1.8 $B = \{x, y, z\}$, $\beta = \{\{x\}\}$ olsun.

(i) $\emptyset \notin \beta$ sağlar

(ii) $U, V \in \beta$ için $U, V = \{x\}$ olduğundan $U \cap V = \{x\} \in \beta$ dır. Şartlar sağlandığından β süzgeç bazıdır.

Fakat $\{x\} \subset \{x, z\}$ iken $\{x, z\} \notin \beta$ olduğundan β süzgeç değildir. β süzgeç bazı tarafından üretilen süzgeç Tanım 3.1.7 den $\alpha = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, B\} = [x]$ dir.

3.2 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar

Tanım 3.2.1 X bir küme, $F(X)$ ise X üzerindeki süzgeçlerin sınıfı ve $K: X \rightarrow P(F(X))$ fonksiyon olsun. K aşağıdaki şartları sağlarsa K ya sabit süzgeç yakınsaklık yapısı ve (X, K) ya ise sabit süzgeç yakınsak uzay denir [5].

(i) Her $x \in X$ için $[x] \in K$ dır, burada $[x] = \{A \subset X \mid x \in A\}$ dir.

(ii) F, X kümesi üzerinde süzgeç ve $F \subset G$ olsun. Eğer $F \in K$ ise $G \in K$ dir.

(X, K) ve (Y, L) sabit süzgeç yakınsak uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun. $F \in K$ olduğunda $f(F) \in L$ ise f dönüşümüne süreklidir denir. Objeleri sabit süzgeç yakınsak uzaylar, morfizmleri yukarıdaki şekilde tanımlanan sürekli dönüşümler olan sınıfa sabit yakınsak süzgeç uzaylar kategorisi denir ve **ConFCO** ile gösterilir.

Örnek 3.2.2 $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki bazı sabit süzgeç yakınsak uzayları yazalım. X deki süzgeçlerin sınıfı

$F(X) = \{[a], [b], [c], [\{a, b\}], [\{a, c\}], [\{b, c\}], [X], [\emptyset]\}$ olmak üzere,

$K_1 = \{[a], [b], [c], [\emptyset]\}$

$K_2 = \{[a], [b], [c], [\{a, b\}], [\emptyset]\}$

$K_3 = \{[a], [b], [c], [\{a, b\}], [\{a, c\}], [\emptyset]\}$

Teorem 3.2.3 $U: \mathbf{ConFCO} \rightarrow \mathbf{Set}$, $U((X, K)) = X$ şeklinde tanımlanan U dönüşümü normalleştirilmiş bir topolojik fanktordur.

İspat: U dönüşümünün fanktor olduğu açıktır. Şimdi topolojik fanktor şartlarını sağlatalım:

(i) U nun belirli olduğunu göstermeliyiz. Bunun için öncelikle U fanktorunun düzenli olup olmadığını inceleyelim. $(X, K), (Y, L) \in \mathbf{ConFCO}$ ve $f, g: (X, K) \rightarrow (Y, L)$ dönüşümleri için $U(f) = U(g)$ ise $U(f) = f$ ve $U(g) = g$ olup $f = g$ dir.

U nun amnestik olduğunu göstermeliyiz.

$f: (X, K) \rightarrow (X, L)$ için $U(f) = f = 1_X$, $X \rightarrow X$ ve f izomorfizm olsun. Her $x \in X$ için $\alpha \in K$ olsun. f sürekli olduğundan $f(\alpha) \in L$ dir. $1_X(\alpha) \in L$ ise $\alpha \in L$ dir, sonuç olarak $K \subset L$ dir. f izomorfizm olduğundan $f^{-1}: (X, L) \rightarrow (X, K)$ olur. f^{-1} sürekli olduğundan $\alpha \in L$ için $f^{-1}(\alpha) \in K$ dir. Böylece $f^{-1} = 1_X$ için $1_X(\alpha) \in K$ olduğundan $\alpha \in K$ dir. Dolayısıyla $L \subset K$ ve $K = L$ dir. Sonuç olarak $f = 1_{(X, K)}$ dir, yani U amnestik tir.

(ii) U nun küçük demetlere sahip olduğunu, yani her $X \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Set})$ için $U^{-1}(X)$ in cümle olduğunu göstermeliyiz.

$U^{-1}(X) = \{(X, K) : U(X, K) = X\}$ ve $\Phi = \{K : K \subset X \times P(F(X))\}$ olsun. O halde $\theta: U^{-1}(X) \rightarrow \Phi$, dönüşümü $\theta((X, K)) = K$ olsun. θ birebir ve örten olduğundan $U^{-1}(X)$ ile Φ denktir ve Φ küme olduğundan her $X \in \mathbf{Set}$ için $U^{-1}(X)$ da bir kümedir. Sonuç olarak, U küçük demetlere sahiptir.

(iii) (X_i, K_i) $\mathbf{ConFCO}$ nın objeleri ve $\{f_i: (X, K) \rightarrow U(X_i, K_i) = X_i (i \in I)\}$ $\mathbf{Set}$ de bir U kaynağı olsun. $K = \{\alpha: f_i(\alpha) \in K_i, \text{ her } i \in I\}$ olsun. $(X, K) \in \mathbf{ConFCO}$ olduğunu gösterelim. $f_i: (X, K) \rightarrow (X_i, K_i)$ kaynağın $f_i: X \rightarrow X_i$ nin başlangıç kaldırması olduğunu gösterelim.

Her $(Y, L) \in \mathbf{ConFCO}$, $(X_i, K_i) \in \mathbf{ConFCO}$ ve $\mathbf{ConFCO}$ de herhangi bir $h_i: (Y, L) \rightarrow (X_i, K_i)$ dönüşüm ailesi için en az bir $k: Y \rightarrow X$ fonksiyonu vardır ve $U(f_i) \circ k = h_i$ dir. Göstereceğiz ki en az bir $\bar{k}: (B, L) \rightarrow (X, K)$ fonksiyonunun sürekli öyle ki $U(\bar{k}) = k$ dir. Yani her $\alpha \in L$ için $k(\alpha) \in K$ olduğunu göstermeliyiz. $\alpha \in L$ olsun, h_i ler sürekli olduklarından $h_i \alpha \in K_i (h_i(y))$ dir. $U(f_i) \circ k = h_i$ den $f_i(k(\alpha)) = h_i \alpha \in K_i$ olur. Böylece $f_i(k(\alpha)) \in K_i$ ve K nın tanımından $k(\alpha) \in K$ dir. Dolayısıyla $U: \mathbf{ConFCO} \rightarrow \mathbf{Set}$ bir topolojik fanktordur.

$U^{-1}(\{x\})$ ve $U^{-1}(\emptyset)$ un tek bir yapı oluşturup oluşturmadığına incelemek gerekir.

$U^{-1}(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset) = (\emptyset, K)$ yani $K = \emptyset$ dur. $U^{-1}(\{x\}) = (\{x\}, K), K = \{[x], [\emptyset]\}$ dir. Dolayısıyla boş ve tek nokta cümlesi üzerinde yalnız tek bir yapı vardır. Böylece $U: \mathbf{ConFCO} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiştir topolojik fanktordur.

Tanım 3.2.4 Genel topolojide bilinen klasik ayırma aksiyomlarını **ConFCO** kategorisine genelleştirmemize yardım eden temel kavramları tanımlayalım:

(1) **ConFCO** da için $\{f_i: (A, K) \rightarrow (A_i, K_i), i \in I\}$ kaynağı $f_i: A \rightarrow A_i$ nin bir başlangıç kaldırmasıdır ancak ve ancak her $\alpha \in K$ için $f_i(\alpha) \in K_i$ dir [20,21].

(2) **ConFCO** da $f: (A_i, K_i) \rightarrow (A, K)$ kavşağı bitiş kaldırmasıdır ancak ve ancak her $\alpha \in K$ için en az bir $\beta_i \in K_i$ vardır öyle ki $f_i(\beta_i) \subset \alpha$ dir [5,20].

(3) **ConFCO** da (X, K) objesi diskre objedir ancak ve ancak her $a \in X$ için $K = \{[a], P(X) = [\emptyset]\}$ dir.

(4) **ConFCO** da (X, K) objesi indiskre objedir ancak ve ancak $K = F(X)$ olmalıdır.

3.3 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar İle Topolojik Uzaylar Arasındaki İlişki

Teorem 3.3.1 Her topolojik uzay sabit süzgeç yakınsak uzayıdır.

İspat: (X, τ) topolojik uzay ve $x \in X$ için $L = \{\alpha \in F(X): \alpha \supset \mathcal{N}_x\}$ olsun. (X, L) nin sabit süzgeç yakınsak uzayı olduğunu gösterelim.

(1) $[x] \supset \mathcal{N}_x$ olduğunu gösterelim. $U \in \mathcal{N}_x$ ise en az bir $V \in \tau$ vardır öyle ki $x \in V \subset U$ ise $U \in [x]$ dir. Buradan $[x] \in L$ olur.

(2) $\alpha \in L(x)$ ve $\alpha \subset \beta$ olsun. $\alpha \supset \mathcal{N}_x$ ve $\beta \supset \alpha \supset \mathcal{N}_x$ den $\beta \supset \mathcal{N}_x$ ve $\beta \in L$ olur.

Teorem 3.3.2 Her metrik uzay sabit süzgeç yakınsak uzayıdır.

İspat: (X, d) bir metrik uzay olsun. $D_\varepsilon = \{(x, y): d(x, y) < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ ve $\delta = \{U \subset X: \text{en az bir } \varepsilon > 0 \text{ için } D_\varepsilon \subset U\}$ olsun. Böylece $L^d = \{\beta \in F(X): \beta \supset \delta\}$ sınıfı X üzerinde bir sabit süzgeç yakınsaklık yapısıdır.

(1) $U \in \delta$ olsun. O halde $\varepsilon > 0$ için $D_\varepsilon \subset U$ dır. Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için $d(x, x) = 0 < \varepsilon$ olduğundan $(x, x) \in D_\varepsilon$ dır. $(x, x) \in D_\varepsilon$ ve $D_\varepsilon \subset U$ olduğundan $(x, x) \in U$ ve dolayısıyla $U \in [x]$ dır. Buradan her $x \in B$ için $\delta \subset [x]$ den $[x] \in L^d$ dır.

(2) $\alpha \in L^d$ ve $\alpha \subset \beta$ olsun. $\alpha \in L^d$ ise $\delta \subset \alpha$ dır. $\alpha \subset \beta$ ise $\delta \subset \alpha \subset \beta$ dır. Buradan $\delta \subset \beta$ ve $\beta \in L^d$ dır.

Teorem 3.3.3 $X \neq \emptyset$ bir küme, τ ve τ^* ler X üzerinde iki topoloji olsun. Ayrıca β ve β^* da sırasıyla τ ve τ^* topolojilerinin birer bazı olsun. Bu durumda $\tau \subset \tau^*$ dir ancak ve ancak her $x \in X$ için her $x \in B \subset \beta$ için $x \in B^* \subset \beta$ olacak şekilde en az bir $B^* \subset \beta^*$ dır.

3.4 Noktada Eksen Dönüşümleri

Tanım 3.4.1 X bir küme, $p \in X$ olsun. $X \amalg X$, X in ayrık birleşimi olsun. X in p de wedge çarpımı $X \amalg X$ nin p de çakışmasıdır denir ve $XV_p X$ ile gösterilir [6]. $XV_p X$ den alınan bir x noktası birinci kümeden ise x_1 , ikinci kümeden ise x_2 ile ifade edilir. Örneğin $X = \{m, n, p\}$ olsun. X in ayrık birleşimi $X \amalg X = \{m_1, n_1, p_1, m_2, n_2, p_2\}$ ve X in p de wedge çarpımı $XV_p X = \{m_1, n_1, p, m_2, n_2\}$ şeklindedir.

Tanım 3.4.2 (1) p de Temel Eksen Dönüşümü (Principle p -Axis Map): $A_p: XV_p X \rightarrow X^2$ şeklindeki dönüşüm için,

$$A_p(x_1) = (x, p)$$

$$A_p(x_2) = (p, x)$$

(2) p de Skewed Eksen Dönüşümü (Skewed p -Axis Map): $S_p: XV_p X \rightarrow X^2$ şeklindeki dönüşüm için,

$$S_p(x_1) = (x, x)$$

$$S_p(x_2) = (p, x)$$

(3) p de Katlama Dönüşümü (The Fold Map): $\nabla_p: X \vee_p X \rightarrow X$ şeklindeki dönüşüm için,

$$\nabla_p(x_i) = x \quad i = 1, 2$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.4.3 X kümesi yerine $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini ve $p = 0$ olarak alırsak,

p de temel eksen dönüşümünün görüntüsü x ve y eksenlerinin birleşimi,

p de Skewed eksen dönüşümünün görüntüsü $y = x$ doğrusu ve y ekseninin birleşimi,

p de katlama dönüşümünün görüntüsü ise x eksenini verir.

Şimdi de sonraki bölümde kullanacağımız $\pi_{ij}: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow B$ fonksiyonları altında bir küme üzerindeki muhtemel tüm süzgeçlerin durumlarını belirten teoremleri ifade edelim.

Teorem 3.4.4 ([22]) $i, j = 1, 2$ için α_{ij} ler B üzerindeki öz süzgeçler ve $\pi_{ij}: B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow B$ olsun.

$$\sigma = \bigcup_{i,j=1}^2 \pi_{ij}^{-1} \alpha_{ij}$$

ise bu durumda

(1) σ öz süzgeçtir ancak ve ancak

(a) $\alpha_{11} \cup \alpha_{12}$ ve $\alpha_{22} \cup \alpha_{21}$ öz süzgeç veya **(b)** $\alpha_{11} \cup \alpha_{21}$ ve $\alpha_{12} \cup \alpha_{22}$ öz süzgeçtir.

(2) σ öz süzgeç ise bu taktirde

$$\pi_{11}\sigma = \begin{cases} \alpha_{11} \cup \alpha_{21} & , \quad (a) \text{ sağlanmaz ise} \\ \alpha_{11} \cup \alpha_{12} & , \quad (b) \text{ sağlanmaz ise} \\ \alpha_{11} \cup (\alpha_{21} \cap \alpha_{12}), & (a) \text{ ve } (b) \text{ sağlanmaz ise} \end{cases}$$

$$\pi_{21}\sigma = \begin{cases} \alpha_{11} \cup \alpha_{21} & , \quad (a) \text{ sağlanmaz ise} \\ \alpha_{22} \cup \alpha_{21} & , \quad (b) \text{ sağlanmaz ise} \\ \alpha_{21} \cup (\alpha_{11} \cap \alpha_{22}) & , \quad (a) \text{ ve } (b) \text{ sağlanmaz ise} \end{cases}$$

$$\pi_{12}\sigma = \begin{cases} \alpha_{12} \cup \alpha_{22} & , \quad (a) \text{ sağlanmaz ise} \\ \alpha_{11} \cup \alpha_{12} & , \quad (b) \text{ sağlanmaz ise} \\ \alpha_{12} \cup (\alpha_{11} \cap \alpha_{22}) & , \quad (a) \text{ ve } (b) \text{ sağlanmaz ise} \end{cases}$$

$$\pi_{22}\sigma = \begin{cases} \alpha_{12} \cup \alpha_{22} & , \quad (a) \text{ sağlanmaz ise} \\ \alpha_{22} \cup \alpha_{21} & , \quad (b) \text{ sağlanmaz ise} \\ \alpha_{22} \cup (\alpha_{12} \cap \alpha_{21}) & , \quad (a) \text{ ve } (b) \text{ sağlanmaz ise} \end{cases}$$

Teorem 3.4.5 ([22]) $i = 1, 2, 3$ için α_i ler B üzerinde ki öz süzgeçler olsun.

$\sigma = (\pi_1 A_p)^{-1} \alpha_1 \cup (\pi_2 A_p)^{-1} \alpha_2 \cup (\pi_2 S_p)^{-1} \alpha_3$ ise bu durumda,

(1) σ öz süzgeçtir ancak ve ancak

(a) $\alpha_2 \subset [p]$ ve $\alpha_1 \cup \alpha_3$ öz süzgeç veya (b) $\alpha_1 \subset [p]$ ve $\alpha_2 \cup \alpha_3$ öz süzgeçtir.

(2) σ öz süzgeç ise bu taktirde

$$\pi_1 A_p \sigma = \begin{cases} [p] & , \quad (a) \text{ sağlanmaz ise} \\ \alpha_1 \cup \alpha_3 & , \quad (b) \text{ sağlanmaz ise} \\ [p] \cap (\alpha_1 \cup \alpha_3) & , \quad (a) \text{ ve } (b) \text{ sağlanmaz ise} \end{cases}$$

$$\pi_2 A_p \sigma = \begin{cases} \alpha_2 \cup \alpha_3 & , \quad (a) \text{ sağlanmaz ise} \\ [p] & , \quad (b) \text{ sağlanmaz ise} \\ [p] \cap (\alpha_2 \cup \alpha_3) & , \quad (a) \text{ ve } (b) \text{ sağlanmaz ise} \end{cases}$$

$$\pi_2 S_p \sigma = \begin{cases} \alpha_2 \cup \alpha_3 & , \quad (a) \text{ sağlanmaz ise} \\ \alpha_1 \cup \alpha_3 & , \quad (b) \text{ sağlanmaz ise} \\ \alpha_3 \cup (\alpha_1 \cap \alpha_2) & , \quad (a) \text{ ve } (b) \text{ sağlanmaz ise} \end{cases}$$

Teorem 3.4.6 ([22]) $BV_p B$ üzerinde en az bir σ öz süzgeci vardır öyle ki $\pi_1 A_p \sigma = \alpha_1$, $\pi_2 A_p \sigma = \alpha_2$ ve $\pi_2 S_p \sigma = \alpha_3$ dır ancak ve ancak

(1) Teorem 3.4.5 in (a) sağlanmaz ise $\alpha_2 = \alpha_3$ ve $\alpha_1 = [p]$ dir,

(2) Teorem 3.4.5 in (b) sağlanmaz ise $\alpha_1 = \alpha_3$ ve $\alpha_2 = [p]$ dir,

(3) Teorem 3.4.5 in ne (a) ne de (b) sağlanmaz ise $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \alpha_3 \cap [p]$ dir.

Teorem 3.4.7 ([22]) B bir küme ve α_1, α_3 ler ise B üzerindeki öz süzgeçler olsun. Bu durumda $BV_p B$ üzerinde en az bir σ öz süzgeci vardır öyle ki $\pi_1 S_p \sigma = \alpha_1$ ve $\nabla \sigma = \alpha_3$ dır ancak ve ancak

(1) $\alpha_1 \cup \alpha_3$ öz olmayan süzgeç ise $\alpha_1 = [p]$ ve $\pi_2 A_p \sigma = \alpha_3$,

(2) $\alpha_1 \not\subset [p]$ ise $\alpha_1 = \alpha_3$ ve $\pi_2 A_p \sigma = [p]$,

(3) $\alpha_1 \subset [p]$ ve $\alpha_1 \cup \alpha_3$ öz süzgeç ise $\alpha_1 \supset \alpha_3 \cap [p]$ ve $\pi_2 A_p \sigma = \alpha_3 \cap [p]$ dir.

4. LOKAL T_2 VE $PRET_2$ SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLAR

4.1 Topolojik Kategorilerde Ayırma Aksiyomları

Tanım 4.1.1 $U: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor $X \in Ob(\mathbf{E})$, $p \in U(X) = B$ ve D diskre fanktor olsun.

(1) X uzayı p de $\bar{T}_0$ dır ancak ve ancak

$$\{A_p: BV_p B \rightarrow U(X^2) = B^2 \text{ ve } \nabla_p: BV_p B \rightarrow UD(B) = B\}$$

U - kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır [8].

(2) X uzayı p de T'_0 dır ancak ve ancak

$$\{id: BV_p B \rightarrow U(XV_p X) = BV_p B \text{ ve } \nabla_p: BV_p B \rightarrow UD(B) = B\}$$

U -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada $XV_p X$ kümesi, $\{qoi_1, qoi_2: U(X) = B \rightarrow BV_p B\}$ U -kavşağının bitiş kaldırması ve $D(B)$ ise B üzerindeki diskre yapıdır. Ayrıca $i_1, i_2: B \rightarrow B \coprod B$ kanonik dönüşümler ve $q: B \coprod B \rightarrow BV_p B$ ise bölüm dönüşümüdür [8].

(3) X uzayı p de $pre\bar{T}_2$ dir ancak ve ancak

$$A_p: BV_p B \rightarrow U(X^2) = B^2 \text{ ve } S_p: BV_p B \rightarrow U(X^2) = B^2$$

U - kaynaklarının başlangıç kaldırması aynıdır [7].

(4) X uzayı p de $preT'_2$ dir ancak ve ancak $S_p: BV_p B \rightarrow U(X^2) = B^2$ U -kaynağının başlangıç kaldırması ile $\{i_1, i_2: U(X) = B \rightarrow BV_p B\}$ U -kavşağının bitiş kaldırması aynıdır [7].

(5) X uzayı p de $\bar{T}_2$ dir ancak ve ancak X, p noktasında $\bar{T}_0$ ve $pre\bar{T}_2$ dir [6-8].

(6) X uzayı p de T'_2 dir ancak ve ancak X, p noktasında T'_0 ve $preT'_2$ dir [6-8].

(7) X uzayı p de KT_2 dir ancak ve ancak X, p noktasında T'_0 ve $pre\bar{T}_2$ dir [8].

(8) X uzayı p de LT_2 dir ancak ve ancak X, p noktasında $\bar{T}_0$ ve $preT'_2$ dir [8].

Tanım 4.1.2 (B, τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun.

(1) Her $a \in B$ ve $a \neq p$ için $a \notin G_p$ için p nin bir G_p açığı veya $p \notin G_a$ olacak şekilde a nın bir G_a açığı varsa (B, τ) ya p noktasında T_0 dır denir.

(2) Her $a, b \in B$ ve $a \neq b$ için $a \notin G_b$ olacak şekilde b nin bir G_b açığı veya $b \notin G_a$ olacak şekilde a nın G_a açığı varsa (B, τ) uzayı T_0 dır.

(3) Her $a \in B$ ve $a \neq p$ için $\{a, b\}$ kümesi indiskre değilse a ve b nin ayırık komşulukları varsa (B, τ) uzayına $preT_2$ denir.

(4) Her $a \in B$ ve $a \neq p$ için $G_a \cap G_p = \emptyset$ olacak şekilde a nın bir G_a açığı ve p nin bir G_p açığı varsa (B, τ) ya p noktasında T_2 dir denir.

(5) Her $a, b \in B$ ve $a \neq b$ için $G_a \cap G_p = \emptyset$ olacak şekilde a nın bir G_a açığı ve b nin bir G_b açığı varsa (B, τ) noktasında T_2 dir denir.

Teorem 4.1.3 (X, τ) topolojik uzayı p noktasında $T_0 (\bar{T}_0 = T'_0)$ dır ancak ve ancak $X \vee_p X$ üzerinde A_p ve ∇_p fonksiyonları tarafından doğrulan topoloji diskredir.

İspat: Kabul edelim ki (X, τ) topolojik uzayı p noktasında T_0 olsun. $X \vee_p X$ üzerinde tanımlı üretilen topolojinin diskre olduğunu gösterelim.

(X, τ) nın p de T_0 olduğundan $q \neq p$ ise p nin q yi içermeyen N_p açığı vardır veya q nın p yi içermeyen N_q açığı vardır. Kabul edelim ki $q \notin N_p$ olsun.

Eğer $U = \{q\}$ ve $W = N_p \times X$ alınırsa ki bunlar DX ve X^2 de açık kümelerdir. Buradan,

$\{q\} = A_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(U)$ olacaktır. Çünkü $q \in A_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(U)$ ise $\nabla_p(q) = q \in U = \{q\} \Rightarrow A_p(q) = (q, p)$ veya $A_p(q) = (p, q)$ dir. $q \notin N_p$ olduğundan $A_p(q) = (p, q) \notin W$ olacaktır. Buradan $\{q_1\} = \nabla_p^{-1}(U) \cap A_p^{-1}(W)$ dir.

Kabul edelim ki $p \notin N_q$ olsun. $U = \{q\}$ ve $W = N_q \times X$ sırasıyla DX ve X^2 de açık kümeleridir. $A_p(q) = (q, p) \in W$ veya $A_p(q) = (p, q) \in W$ dir. $(p, q) \notin W$ olduğundan $\{q_1\} = A_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(U)$ dir.

Eğer $p = q$ ise $U = \{p\}$ kümesi DX de ve $W = X^2$ ise X^2 de açıklar olduğundan $A_p(q) = (p, q) \in W$ ve $p \in U$ dir. Buradan $\{p\} = \nabla_p^{-1}(U) \cap A_p^{-1}(W)$ sağlanır. Böylece $X \vee_p X$ üzerindeki A_p ve ∇_p nin ürettiği uzay diskredir.

Tersine olarak $X \vee_p X$ üzerinde A_p ve ∇_p nin doğurmuş olduğu uzay diskre olsun. X in p de T_0 olduğunu gösterelim. Yani her $q \neq p$ için p yi kapsayan, q nın her N_q komşuluğu için p nin $\exists N_p$ komşuluğu vardır ki $q \notin N_p$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$q \neq p$ ve $X \vee_p X$ diskre olduğundan $\{q_1\} = \nabla_p^{-1}(\{q\}) \cap A_p^{-1}(W)$ olacak şekilde X^2 de W açık kümesi vardır. W, X^2 de açık olduğundan X de N_q ve V açıkları vardır öyle ki $A_p(q) = (q, p) \notin N_q \times V \subset W$ dir.

Eğer $q \notin V$ ise $N_p = V$ olsun.

Eğer $q \in V$ ise $(p, q) \in N_q \times V \subset W$ dir. Çünkü q nın her N_q komşuluğu p yi içerir. Fakat $\{q_1, q_2\} = A_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(\{q\})$ dir. $q_1 \neq q_2$ olduğundan bu uzayın diskre olması ile çelişir. Dolayısıyla $q \notin V$ dir.

Teorem 4.1.4 (X, τ) topolojik uzayı p de $preT_2$ ($pre\bar{T}_2 = preT'_2$) dir ancak ve ancak $X \vee_p X$ üzerinde A_p ve S_p tarafından üretilen topolojiler aynıdır.

İspat: Kabul edelim ki (X, τ) topolojik uzayı p noktasında $preT_2$ olsun. Tanım 4.1.2(3) den her $q \neq p$ için eğer $\{p, q\}$ cümlesi indiskre değilse p ve q ayrık komşulukları vardır. Şimdi $X \vee_p X$ üzerinde S_p ve A_p nin doğurduğu topolojilerin aynı olduğunu gösterelim. Bunu yaparken Teorem 3.3.3 kullanılacaktır. X^2 üzerindeki çarpım topolojisi τ olsun. Önce $A_p^{-1}(\tau) \subseteq S_p^{-1}(\tau)$ olduğunu gösterelim. $A_p^{-1}(\tau)$ nin bazının $q \in U$ elemanı için $U = A_p^{-1}(W)$ olarak şekilde τ nın en az bir W baz elemanı vardır. $q \in U$ olduğundan $A_p(q) = (p, q) \in W$ veya $A_p(q) = (q, p) \in W$ dir.

$A_p(q) = (p, q) \in W$ olsun. Buna göre p ve q nın sırasıyla komşulukları N_p ve N_q olmak üzere $W = N_p \times N_q$ alınabilir. Çünkü W, τ nın baz elemanıdır. Eğer $\{p, q\}$ kümesi indiskre ise açık olarak $q = q_2 \in S_p^{-1}(W) \subseteq A_p^{-1}(W)$ dir çünkü $r \in S_p^{-1}(W) \Rightarrow S_p(r) = (r, p) \in W$ veya $(r, r) \in W$ dir. Şu halde $r \in A_p^{-1}(W)$ dir.

Eğer $\{p, q\}$ cümlesi indiskre değilse ve X, p de $preT_2$ olduğundan p ve q nin sırasıyla $N_{\check{p}}$ ve $N_{\check{q}}$ komşulukları vardır.

$W_1 = (N_p \cap N_{\check{p}}) \times (N_q \cap N_{\check{q}})$ olsun. $q = q_2 \in S_p^{-1}(W_1) \subseteq A_p^{-1}(W)$ olduğunu gösterelim. $r \in S_p^{-1}(W_1)$ olsun. Böylece $S_p(r) = (r, r) \in W_1$ veya $(p, r) \in W_1$ dir. $N_{\check{q}} \cap N_{\check{p}} = \varnothing$ olduğundan $(r, r) \notin W_1$ dir. $A_p(r) = S_p(r) = (p, r)$ olup $r \in A_p^{-1}(W)$ dir. $A_p(q) = (q, p) \in W$ olsun. $W = N_q \times N_p$ olacak şekildeki X de p nin N_p , q nin N_q komşuluğu vardır.

Eğer $\{p, q\}$ cümlesi indiskre ise açık olarak $q_1 \in S_p^{-1}(W) \subseteq A_p^{-1}(W)$ dir. Eğer $\{p, q\}$ cümlesi indiskre değilse ve X, p de $pre\bar{T}_2$ olduğundan p ve q nin $N_{\check{p}}, N_{\check{q}}$ komşulukları vardır. $W_1 = (N_q \cap N_{\check{q}}) \times (N_q \cap N_{\check{q}})$ olsun. Açık olarak $q_1 \in S_p^{-1}(W_1)$ dir. $S_p^{-1}(W_1) \subseteq A_p^{-1}(W)$ olduğunu gösterelim. $r \in S_p^{-1}(W_1)$ olsun. $S_p(r) = (r, r) \in W_1$ veya $(p, r) \in W_1$ dir. Bu takdirde $S_p(r) = (p, r) \in (N_q \cap N_{\check{q}}) \times (N_q \cap N_{\check{q}}) = W_1, p \in N_q$ olur ki buda çelişkidir. Şu halde $S_p(r) = (r, r) \in W_1$ olmak zorundadır. Buna göre $(r, p) \in W \Rightarrow r \in A_p^{-1}(W)$ sağlanır. Bu ise Teorem 3.3.3 gereğince $A_p^{-1}(\tau) \subseteq S_p^{-1}(\tau)$ olmasıdır.

$S_p^{-1}(\tau) \subseteq A_p^{-1}(\tau)$ olduğunu gösterelim. Yine Teorem 3.3.3 ü kullanacağız $U, S_p^{-1}(\tau)$ nin baz elemanı ve $q \in U$ olsun. Bu takdirde $U = S_p^{-1}(W)$ olacak şekilde τ nin en az bir W baz elemanı vardır. $S_p(q) = (q, q) \in W$ olsun. Bu takdirde q nin komşuluğu N_q olmak üzere $W = N_q \times N_q$ olsun. Çünkü W, τ nin baz elemanıdır.

Eğer $\{p, q\}$ cümlesi indiskre ise bu takdirde $q_1 \in A_p^{-1}(W) \subseteq S_p^{-1}(W)$ dir. Gerçekten $r \in A_p^{-1}(W)$ olsun. $A_p(r) = (r, p) \in W$ veya $A_p(r) = (p, r) \in W$ sağlanır. Buradan $r \in S_p^{-1}(W)$ dir.

Eğer $\{p, q\}$ cümlesi indiskre değilse ve X, p de $preT_2$ olduğundan p ve q nin ayrık açık $N_{\check{p}}$ ve $N_{\check{q}}$ komşulukları vardır. Buna göre $W_1 = (N_q \cap N_{\check{q}}) \times N_p$ olsun. $q \in U_1 = A_p^{-1}(W_1)$ dir. $U_1 = A_p^{-1}(W_1) \subseteq U = S_p^{-1}(W)$ olduğunu gösterelim. $r \in A_p^{-1}(W_1)$ olsun. $A_p(r) = (r, p) \in W_1$ veya $(p, r) \in W_1$ dir. $A_p(r) = (p, r) \in W_1$ olması halinde $p \in N_q \cap N_{\check{q}}$ olacaktır. Bu ise çelişkidir. O halde

$A_p(r) = (r, p) \in W_1$ olmak zorundadır. Buradan $r \in S_p^{-1}(W)$ dir. Yani $r \in U_1 \Rightarrow U_1 \subseteq U$ dır.

$S_p(q) = (p, q) \in W$ olsun. Bu takdirde q nın komşuluğu N_q olmak üzere $W = N_p \times N_q$ olsun.

Eğer $\{p, q\}$ cümlesi indiskre ise bu takdirde açık olarak $A_p^{-1}(W) \subseteq S_p^{-1}(W)$ dir.

Eğer $\{p, q\}$ cümlesi indiskre değilse ve X, p de $preT_2$ olduğundan p ve q nın ayrık açık N_p ve N_q komşulukları vardır. Buna göre $W_1 = (N_p \cap N_p) \times (N_q \cap N_q)$ olsun. Kolayca görülebilir ki $U_1 = A_p^{-1}(W_1) \subseteq U = S_p^{-1}(W)$ dir. Gerçekten $r \in U_1 = A_p^{-1}(W_1)$ olsun. $A_p(r) = (r, p) \in W_1$ veya $(p, r) \in W_1$ dir. $A_p(r) = (r, p) \in W_1$ olması halinde $p \in N_q \cap N_q$ olur ki bu çelişkidir. O halde $A_p(r) = (p, r) \in W_1$ olmak zorundadır. Bu ise $r \in S_p^{-1}(W) = U$ olmasıdır. Yani $U_1 = A_p^{-1}(W_1) \subseteq S_p^{-1}(W) = U$ olmasıdır. Şu halde Teorem 3.3.3 den $S_p^{-1}(\tau) \subseteq A_p^{-1}(\tau)$ olmasıdır. Bu ise $S_p^{-1}(\tau) = A_p^{-1}(\tau)$ olmasının ispatını tamamlar.

Tersine olarak $S_p^{-1}(\tau) = A_p^{-1}(\tau)$ olsun. X in p de $preT_2$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelimki her $q \neq p$ için $\{p, q\}$ cümlesi indiskre olmasın. Yani p nın $\exists N_p$ komşuluğu vardır öyle ki $\{p, q\} \cap N_p = \{p\}$ veya q nın $\exists N_q$ komşuluğu vardır ki $\{p, q\} \cap N_q = \{q\}$ olsun. Dikkat edelim ki $q_2 \in S_p^{-1}(X \times N_q)$ ve kabulden $A_p^{-1}(\tau)$ nin en az bir baz elemanı $A_p^{-1}(W) \subseteq S_p^{-1}(X \times N_q)$ dir. Öyleki burada $W = (N_p \times (N_q \cap N_q))$ dir. Tekrar kabulden $S_p^{-1}(\tau)$ nin q_2 yi ihtiva eden en az bir $S_p^{-1}(W)$ baz elemanı vardır. Öyle ki $S_p^{-1}(W_1) \subseteq A_p^{-1}(W)$ dir. Burada $W_1 = (N_p \cap N_p) \times (N_q \cap N_q) = N \times M$ dir.

İddia ediyoruz ki $N \cap M = \varnothing$ dir. Aksi halde $r \in N \cap M$ olsun. Buna göre $S_p(r) = (r, r) \in W_1$ veya $S_p(r) = (p, p) \in W_1$ dir. $p \notin N_q$ olduğundan $A_p(r) = (r, p) \notin W$ dir. Dolayısı ile $r_1 \notin A_p^{-1}(W)$ dir. Buradan $N \cap M = \varnothing$ dir.

Kabul edelim ki $N_p \cap \{p, q\} = \{p\}$ olsun. Hipotezden $S_p^{-1}(\tau)$ nin en az bir $S_p^{-1}(W)$, $W = N_q \times N_q$ baz elemanı vardır öyle ki $q_1 \in S_p^{-1}(W) \subseteq A_p^{-1}(U)$ dir. ($U = X \times N_q$) p, N_q da değildir. Aksi halde $S_p(q_2) = (p, q) \in W = N_q \times N_q$ dir.

Fakat $S_p^{-1}(W) \subseteq A_p^{-1}(U)$ olduğundan $q_2 \in A_p^{-1}(U)$ dir. O halde $A_p(q_2) = (p, q) \in U = X \times N_p$ olur. $q \notin N_p$ olduğundan bu çelişkidir. Yani $p \notin N_q$ dir.

İspatın bir önceki kısmında yapılan işlemlere benzer düşünceyle (X, τ) uzayının p noktasında $preT_2$ olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi de yukarıda ki teoremin bir uygulaması olan örnek verelim.

Örnek 4.1.5 $X = \{a, b\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ topolojisini alalım. (X, τ) uzayının a noktasında $pre\bar{T}_2$ olduğunu gösterelim. Şimdi A_a ve S_a tarafından üretilen topolojileri bulalım.

$$\begin{array}{ccc} (XV_a X, \tau_{XV_a X}) & \xrightarrow{A_a} & (X^2, \tau_*) \\ \downarrow S_a & & \downarrow \pi_2 \quad \downarrow \pi_1 \\ (X^2, \tau_*) & \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} & (X, \tau) \end{array}$$

Şekil 4.1. $Pre\bar{T}_2$ diyagramı.

Öncelikle X^2 üzerinde ki çarpım topolojisini yazalım.

$$\tau_* = \left\{ \begin{array}{l} X^2, \emptyset, \{(a, a)\}, \{(b, b)\}, \{(a, b)\}, \{(b, a)\}, \{(a, a), (b, b)\}, \{(a, a), (a, b)\}, \\ \{(a, a), (b, a)\}, \{(b, b), (a, b)\}, \{(b, b), (b, a)\}, \{(a, b), (b, a)\}, \{(a, a), (b, b), (a, b)\}, \\ \{(a, a), (b, b), (b, a)\}, \{(a, a), (a, b), (b, a)\}, \{(b, b), (a, b), (b, a)\} \end{array} \right\}$$

S_a dönüşümü tarafından üretilen topolojiyi bulmak için çarpım topolojisindeki elemanların ters görüntülerini bulup alt baz, baz ardından da topolojiyi oluşturalım.

$$S_a^{-1}(X^2) = XV_a X$$

$$S_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a)\}) = \{a\}$$

$$S_a^{-1}(\{(b, b)\}) = \{b_1\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, b)\}) = \{b_2\}$$

$$S_a^{-1}(\{(b, a)\}) = \emptyset$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (b, b)\}) = \{a, b_1\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (a, b)\}) = \{a, b_2\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (b, a)\}) = \{a\}$$

$$S_a^{-1}(\{(b, b), (a, b)\}) = \{b_1, b_2\}$$

$$S_a^{-1}(\{(b, b), (b, a)\}) = \{b_1\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, b), (b, a)\}) = \{b_2\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (b, b), (a, b)\}) = \{a, b_1, b_2\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (b, b), (b, a)\}) = \{a, b_1\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (a, b), (b, a)\}) = \{a, b_2\}$$

$$S_a^{-1}(\{(b, b), (a, b), (b, a)\}) = \{b_1, b_2\}$$

Şimdi de bunlardan yararlanarak S_a tarafından üretilen topolojinin alt baz, baz ve topolojiyi yazalım.

$$\delta = \{XV_aX, \emptyset, \{a\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}\}$$

$$\beta = \{XV_aX, \emptyset, \{a\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}\}$$

$$\tau_{XV_aX} = \{XV_aX, \emptyset, \{a\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}\} = P(XV_aX)$$

Şimdi ise A_a dönüşümü tarafından üretilen topolojiyi bulalım.

$$A_a^{-1}(X^2) = XV_aX$$

$$A_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$A_a^{-1}(\{(a, a)\}) = \{a\}$$

$$A_a^{-1}(\{(b, b)\}) = \emptyset$$

$$A_a^{-1}(\{(a, b)\}) = \{b_2\}$$

$$A_a^{-1}(\{(b, a)\}) = \{b_1\}$$

$$A_a^{-1}(\{(a, a), (b, b)\}) = \{a\}$$

$$A_a^{-1}(\{((a, a), (a, b))\}) = \{a, b_2\}$$

$$A_a^{-1}(\{(a, a), (b, a)\}) = \{a, b_1\}$$

$$A_a^{-1}(\{(b, b), (a, b)\}) = \{b_2\}$$

$$A_a^{-1}(\{(b, b), (b, a)\}) = \{b_1\}$$

$$A_a^{-1}(\{(a, b), (b, a)\}) = \{b_2, b_1\}$$

$$A_a^{-1}(\{(a, a), (b, b), (a, b)\}) = \{a, b_2\}$$

$$A_a^{-1}(\{(a, a), (b, b), (b, a)\}) = \{a, b_1\}$$

$$A_a^{-1}(\{(a, a), (a, b), (b, a)\}) = \{a, b_2, b_1\}$$

$$A_a^{-1}(\{(b, b), (a, b), (b, a)\}) = \{b_2, b_1\}$$

$$\delta = \{XV_a X, \emptyset, \{a\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}\}$$

$$\beta = \tau_{XV_a X} = \{XV_a X, \emptyset, \{a\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}\} = P(XV_a X)$$

olur ki burdan da A_a ve S_a tarafından doğrulan topolojilerin aynı olduğunu görürüz. O halde (X, τ) uzayı a noktasında $pre\bar{T}_2$ dir.

Örnek 4.1.6 $X = \{a, b\}$ için $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ alalım. X in a noktasında $pre\bar{T}_2$ olmadığını gösterelim. Öncelikle X^2 üzerindeki çarpım topolojisini yazalım.

$$\tau_* = \{X^2, \emptyset, \{(a, a)\}, \{(a, a), (a, b)\}, \{(a, a), (b, a)\}, \{(a, a), (a, b), (b, a)\}\}$$

S_a dönüşümü tarafından üretilen topolojiyi bulalım.

$$S_a^{-1}(X^2) = XV_aX$$

$$S_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a)\}) = \{a\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (a, b)\}) = \{a, b_2\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (b, a)\}) = \{a\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (a, b), (b, a)\}) = \{a, b_2\}$$

$$\delta = \{XV_aX, \emptyset, \{a\}, \{a, b_2\}\}$$

$$\beta = \tau = \{XV_aX, \emptyset, \{a\}, \{a, b_2\}\}$$

Şimdi de A_a dönüşümü tarafından üretilen topolojiyi bulalım.

$$A_a^{-1}(X^2) = XV_aX$$

$$A_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$A_a^{-1}(\{(a, a)\}) = \{a\}$$

$$A_a^{-1}(\{(a, a), (a, b)\}) = \{a, b_2\}$$

$$A_a^{-1}(\{(a, a), (b, a)\}) = \{a, b_1\}$$

$$A_a^{-1}(\{(a, a), (a, b), (b, a)\}) = \{a, b_1, b_2\}$$

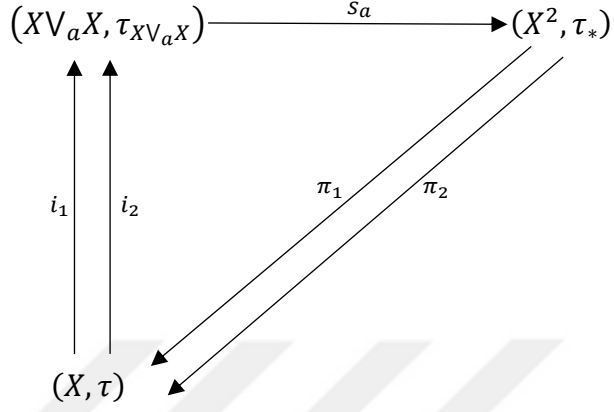
$$\delta = \{XV_aX, \emptyset, \{a\}, \{a, b_2\}, \{a, b_1\}\}$$

$$\beta = \tau = \{XV_aX, \emptyset, \{a\}, \{a, b_2\}, \{a, b_1\}\}$$

olur ki buradan da A_a ve S_a tarafından doğrulan topolojilerin aynı olmadığını görürüz.

O halde (X, τ) uzayı a noktasında $pre\bar{T}_2$ değildir.

Örnek 4.1.7 $X = \{a, b\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ topolojisini alalım. X in a noktasında $preT'_2$ olduğunu gösterelim. Bunun için $i_1, i_2: (X, \tau) \rightarrow X \vee_a X$ içine dönüşümleri ile elde edilen bitiş topolojisi τ_i ve $S_a: X \vee_a X \rightarrow (X^2, \tau_*)$ ile elde edilen başlangıç topolojisi τ_{S_a} olsun. $\tau_i = \tau_{S_a}$ olduğunu göstereceğiz.



Şekil 4.2. $PreT'_2$ diyagramı.

$$X \vee_a X = \{a, b_1, b_2\}$$

$$P(X \vee_a X) = \{X \vee_a X, \emptyset, \{a\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}\}$$

$$i_1^{-1}(X \vee_a X) = \{a, b\} \in \tau$$

$$i_2^{-1}(X \vee_a X) = \{a, b\} \in \tau$$

$$i_1^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$$

$$i_2^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$$

$$i_1^{-1}(\{a\}) = \{a\} \in \tau$$

$$i_2^{-1}(\{a\}) = \{a\} \in \tau$$

$$i_1^{-1}(\{b_1\}) = \{b\} \in \tau$$

$$i_2^{-1}(\{b_1\}) = \emptyset \in \tau$$

$$i_1^{-1}(\{b_2\}) = \emptyset \in \tau$$

$$i_2^{-1}(\{b_2\}) = \{b\} \in \tau$$

$$i_1^{-1}(\{a, b_1\}) = \{a, b\} \in \tau$$

$$i_2^{-1}(\{a, b_1\}) = \{a\} \in \tau$$

$$i_1^{-1}(\{a, b_2\}) = \{a\} \in \tau$$

$$i_2^{-1}(\{a, b_2\}) = \{a, b\} \in \tau$$

$$i_1^{-1}(\{b_1, b_2\}) = \{b\} \in \tau$$

$$i_2^{-1}(\{b_1, b_2\}) = \{b\} \in \tau$$

$$\tau_i = \{\{a\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}, \emptyset, X \vee_a X\} = P(X \vee_a X)$$

Şimdi de S_a dönüşümü tarafından üretilen topolojiyi oluşturalım.

$$\tau_* = \left\{ \begin{array}{l} X^2, \emptyset, \{(a, a)\}, \{(b, b)\}, \{(a, b)\}, \{(b, a)\}, \{(a, a), (b, b)\}, \{(a, a), (a, b)\}, \\ \{(a, a), (b, a)\}, \{(b, b), (a, b)\}, \{(b, b), (b, a)\}, \{(a, b), (b, a)\}, \{(a, a), (b, b), (a, b)\}, \\ \{(a, a), (b, b), (b, a)\}, \{(a, a), (a, b), (b, a)\}, \{(b, b), (a, b), (b, a)\} \end{array} \right\}$$

$$S_a^{-1}(X^2) = XV_aX$$

$$S_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a)\}) = \{a\}$$

$$S_a^{-1}(\{(b, b)\}) = \{b_1\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, b)\}) = \{b_2\}$$

$$S_a^{-1}(\{(b, a)\}) = \emptyset$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (b, b)\}) = \{a, b_1\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (a, b)\}) = \{a, b_2\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (b, a)\}) = \{a\}$$

$$S_a^{-1}(\{(b, b), (a, b)\}) = \{b_1, b_2\}$$

$$S_a^{-1}(\{(b, b), (b, a)\}) = \{b_1\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, b), (b, a)\}) = \{b_2\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (b, b), (a, b)\}) = \{a, b_1, b_2\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (b, b), (b, a)\}) = \{a, b_1\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (a, b), (b, a)\}) = \{a, b_2\}$$

$$S_a^{-1}(\{(b, b), (a, b), (b, a)\}) = \{b_1, b_2\}$$

$$\delta = \{XV_aX, \emptyset, \{a\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}\}$$

$$\beta = \{XV_aX, \emptyset, \{a\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}\}$$

$$\tau_{S_a} = \{XV_aX, \emptyset, \{a\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}\} = P(XV_aX)$$

Buradan $\tau_i = \tau_{S_a}$ olduğu görülür. Yani (X, τ) uzayı a noktasında $preT'_2$ dır.

Örnek 4.1.8 $X = \{a, b\}$ için $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ olsun. X in a noktasında $preT'_2$ olmadığını gösterelim. Bunun için $i_1, i_2: (X, \tau) \rightarrow XV_aX$ ile elde edilen bitiş topolojisi τ_i ve $S_a: XV_aX \rightarrow (X^2, \tau_*)$ ile elde edilen başlangıç topolojisi τ_{S_a} olsun. $\tau_i \neq \tau_{S_a}$ olduğunu göstereceğiz.

$$i_1, i_2: (X, \tau) \rightarrow (XV_aX, \tau_{XV_aX})$$

$$XV_aX = \{a, b_1, b_2\}$$

$$P(XV_aX) = \{XV_aX, \emptyset, \{a\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}\}$$

$$i_1^{-1}(XV_aX) = \{a, b\} \in \tau$$

$$i_2^{-1}(XV_aX) = \{a, b\} \in \tau$$

$$i_1^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$$

$$i_2^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$$

$$i_1^{-1}(\{a\}) = \{a\} \in \tau$$

$$i_2^{-1}(\{a\}) = \{a\} \in \tau$$

$$i_1^{-1}(\{b_1\}) = \{b\} \notin \tau$$

$$i_2^{-1}(\{b_1\}) = \emptyset \in \tau$$

$$i_1^{-1}(\{b_2\}) = \emptyset \in \tau$$

$$i_2^{-1}(\{b_2\}) = \{b\} \notin \tau$$

$$i_1^{-1}(\{a, b_1\}) = \{a, b\} \in \tau$$

$$i_2^{-1}(\{a, b_1\}) = \{a\} \in \tau$$

$$i_1^{-1}(\{a, b_2\}) = \{a\} \in \tau$$

$$i_2^{-1}(\{a, b_2\}) = \{a, b\} \in \tau$$

$$i_1^{-1}(\{b_1, b_2\}) = \{b\} \notin \tau$$

$$i_2^{-1}(\{b_1, b_2\}) = \{b\} \notin \tau$$

$$\tau_i = \{\{a\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \emptyset, XV_aX\}$$

Şimdi ise S_a dönüşümü tarafından üretilen topolojiyi bulmak için öncelikle çarpım topolojini oluşturalım.

$$\beta_* = \{X^2, \emptyset, \{(a, a)\}, \{(a, a), (a, b)\}, \{(a, a), (b, a)\}\}$$

$$\tau_* = \{X^2, \emptyset, \{(a, a)\}, \{(a, a), (a, b)\}, \{(a, a), (b, a)\}, \{(a, a), (a, b), (b, a)\}\}$$

$$S_a^{-1}(X^2) = XV_aX$$

$$S_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a)\}) = \{a\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (a, b)\}) = \{a, b_2\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (b, a)\}) = \{a\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a), (a, b), (b, a)\}) = \{a, b_2\}$$

$$\delta = \{XV_aX, \emptyset, \{a\}, \{a, b_2\}\}$$

$$\beta = \tau_{S_a} = \{XV_aX, \emptyset, \{a\}, \{a, b_2\}\}$$

Buradan da görüldüğü üzere $\tau_i \neq \tau_{S_a}$ olur dolayısıyla (X, τ) uzayı a noktasında $preT'_2$ değildir.

Teorem 4.1.9 (X, τ) topolojik uzayı p noktasında T_2 uzayıdır ancak ve ancak (X, τ) uzayı p de T_0 ve $preT_2$ dir.

İspat: (X, τ) topolojik uzayı p noktasında T_2 olsun. Böylece Tanım 4.1.2 den her bir $x \neq p$ için p ve x in ayrık açık komşulukları vardır. Özel olarak (X, τ) uzayı p de T_0 ve $preT_2$ dir.

Tersine olarak (X, τ) uzayı p de T_0 ve $preT_2$ olsun. X uzayı p noktasında T_0 olduğundan $\{p, x\}$ cümlesi indiske değildir. X uzayı p noktasında $preT_2$ olduğundan p ve x in ayrık açık komşuluğu vardır. Bu ise (X, τ) uzayının p de T_2 olmasıdır.

4.2 Lokal T_0 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar

Teorem 4.2.1 ([23]) **(1)** (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı $p \in B$ noktasında $\bar{T}_0$ olması için gerek ve yeter şart $x \neq p$ şeklindeki her $x \in B$ için $[x] \cap [p] \notin K$ dir.

(2) Her sabit süzgeç yakınsak uzayı $p \in B$ noktasında T'_0 dir.

Not 4.2.2 B sonlu bir küme olmak üzere (B, K) sabit yakınsak süzgeç uzayı $\bar{T}_0$ dir ancak ve ancak (B, K) diskre uzaydır.

Örnek 4.2.3 $B = \{a, b, c\}$ olsun. B üzerinde tanımlanan sabit süzgeç yakınsak uzayların $\bar{T}_0$ ve T'_0 olup olmama durumlarını inceleyelim.

$K_1 = \{[a], [b], [c], [\emptyset]\}$ diskre yapısı için (B, K) uzayı $[a] \cap [b] \notin K_1$, $[b] \cap [c] \notin K_1$, $[a] \cap [c] \notin K_1$ olduğundan Teorem 4.2.1(1) den dolayı a, b ve c noktalarında $\bar{T}_0$ dir.

$K_2 = \{[a], [b], [c], [a] \cap [b], [\emptyset]\}$ için (B, K) uzayı, $[a] \cap [b] \in K_2$ olduğundan Teorem 4.2.1(1) den dolayı a ve b noktalarında $\bar{T}_0$ uzayı değildir, fakat $[a] \cap [c] \notin K_2$, $[b] \cap [c] \notin K_2$ olduğunda c noktasında $\bar{T}_0$ dir.

$K_3 = \{[a], [b], [c], [a] \cap [c], [\emptyset]\}$ ve $K_4 = \{[a], [b], [c], [b] \cap [c], [\emptyset]\}$ yapılarının $\bar{T}_0$ olması durumu benzer şekilde incelenir.

$K_5 = \{[a], [b], [c], [a] \cap [b], [b] \cap [c], [\emptyset]\}$ için (B, K) uzayı, $[a] \cap [b] \in K_5$, $[b] \cap [c] \in K_5$ olduğundan Teorem 4.2.1(1) den dolayı a, b ve c noktalarında $\bar{T}_0$ uzayı değildir.

$K_6 = \{[a], [b], [c], [a] \cap [b], [a] \cap [c], [\emptyset]\}$,

$K_7 = \{[a], [b], [c], [a] \cap [c], [b] \cap [c], [\emptyset]\}$ yapılarının $\bar{T}_0$ olması durumu benzer şekilde incelenir.

$K_8 = \{[a], [b], [c], [a] \cap [b], [b] \cap [c], [a] \cap [c], [\emptyset]\}$ indiskre yapısı için (B, K) uzayı, $[a] \cap [b] \in K_8$, $[b] \cap [c] \in K_8$ olduğundan Teorem 4.2.1(1) den a, b ve c noktalarında $\bar{T}_0$ uzayı değildir.

Teorem 4.2.1(2) den B üzerindeki tüm sabit süzgeç yakınsak yapılar T'_0 dir.

4.3 Lokal $PreT_2$ Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar

Teorem 4.3.1 (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında $pre\bar{T}_2$ olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlar sağlanır:

(1) $K_p = \{\alpha: \alpha \subset [p], \alpha \in K\}$ sonlu kesişim altında kapalıdır.

(2) Her $\alpha \in K_p$ ve $\beta \in K$ için $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç ve $\beta \cap [p] \subset \alpha$ ise $\beta \cap [p] \in K$ dir.

İspat: (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayının p de $pre\bar{T}_2$ ve $\alpha, \beta \in K_p$ olduğunu kabul edelim. Teorem 3.4.5 de belirtilen α_1, α_2 ve α_3 öz süzgeçlerini $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$ ve $\alpha_3 = \alpha \cap \beta$ şeklinde alırsak $\alpha_1 \cup \alpha_3 = \alpha$ ve $\alpha_2 \cup \alpha_3 = \beta$ öz süzgeç olduğundan $\alpha_1, \alpha_2 \subset [p]$ ve $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \alpha \cap \beta = \alpha_3 \cap [p]$ olur. Teorem 3.4.6(3) den wedge çarpımı üzerinde en az bir σ öz süzgeci vardır öyle ki

$$\left(BV_p B, K_{BV_p B} \right) \xrightarrow[S_p]{A_p} (B^2, K^2) \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} (B, K)$$

Şekil 4.3. $ConFCO$ da $pre\bar{T}_2$ diyagramı.

$$\pi_1 A_p \sigma = \alpha_1 = \alpha$$

$$\pi_2 A_p \sigma = \alpha_2 = \beta$$

ve

$$\pi_2 S_p \sigma = \alpha_3 = \alpha \cap \beta$$

dır.

$\pi_1 A_p \sigma, \pi_2 A_p \sigma \in K$ ve (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında $pre\bar{T}_2$ olduğundan $\pi_2 S_p \sigma = \alpha \cap \beta \in K$ dir. $\alpha \cap \beta \subset [p]$ olduğundan K_p nin tanımı gereği $\alpha \cap \beta \in K_p$ dir, böylece (1) sağlanır.

Şimdi (2) nin sağlandığını gösterelim.

Kabul edelim ki $\alpha \in K_p$ ve $\beta \in K$ olsun. Burada $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç ve $\beta \cap [p] \subset \alpha$ olsun. Bu durumda $\beta \cap [p] \in K$ olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.4.5 de verilen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ öz süzgeçlerini $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta \cap [p]$ ve $\alpha_3 = \beta$ şeklinde seçelim.

$$\alpha_1, \alpha_2 \subset [p]$$

olur ki burada hem $\alpha_1 \cup \alpha_3 = \alpha \cup \beta$ hem de $\alpha_2 \cup \alpha_3 = (\beta \cap [p]) \cup \beta = \beta$ öz süzgeçtir.

Teorem 3.4.6(3) ü uygularsak,

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 = \alpha \cap (\beta \cap [p]) = \beta \cap [p] = \alpha_3 \cap [p]$$

dır. (Dikkat edelim ki $\beta \cap [p] \subset \alpha$ dir).

Böylece Teorem 3.4.6(3) den dolayı wedge çarpımı üzerinde en az bir σ öz süzgeci vardır ve

$$\pi_1 A_p \sigma = \alpha$$

$$\pi_2 A_p \sigma = \beta \cap [p]$$

ve

$$\pi_2 S_p \sigma = \beta$$

dır.

$\pi_1 S_p \sigma \in K$, $\pi_2 S_p \sigma \in K$ ve (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında $pre\bar{T}_2$ olduğundan $\pi_2 A_p \sigma = \beta \cap [p] \in K$ dir. Dolayısıyla (2) sağlanır.

Tersine olarak (1) ve (2) şartlarının sağlandığını kabul edelim. (B, K) nın p noktasında $pre\bar{T}_2$ olduğunu göstereceğiz. Yani (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzay, $p \in B$ noktası için K_{A_p} yapısı A_p dönüşümü ile elde edilen başlangıç yapısı ve K_{S_p} yapısı ise S_p dönüşümü ile elde edilen başlangıç yapısı olmak üzere Tanım 4.1.1(3) den $K_{A_p} = K_{S_p}$ olduğunu göstereceğiz. Wedge çarpımı üzerindeki herhangi bir σ süzgeci için kabul edelim ki $\sigma \in K_{S_p}$ olsun, yani $\pi_1 S_p \sigma, \pi_2 S_p \sigma \in K$ ise $\pi_1 A_p \sigma, \pi_2 A_p \sigma \in K$ olduğunu

göstermeliyiz. $\pi_1 S_p \sigma = \pi_1 A_p \sigma$ olduğundan $\pi_1 A_p \sigma \in K$ dır. O halde $\pi_2 A_p \sigma \in K$ olduğunu göstermeliyiz.

σ öz olmayan süzgeç ise $\pi_2 A_p \sigma = \pi_2 A_p [\emptyset] = [\emptyset] \in K$ olduğunda $\sigma \in K_{A_p}$ dir.

σ öz süzgeç ise

Teorem 3.4.6(1) den dolayı

$$\pi_1 S_p \sigma = [p]$$

$$\pi_2 A_p \sigma = \pi_2 S_p \sigma$$

dır ve sonuç olarak $\pi_2 S_p \sigma \in K$ olduğundan $\pi_2 A_p \sigma \in K$ olur, böylece $\sigma \in K_{A_p}$ dir.

Teorem 3.4.6(2) den dolayı

$$\pi_2 A_p \sigma = [p]$$

$$\pi_2 S_p \sigma = \pi_1 S_p \sigma$$

olur ki $[p] \in K$ olduğundan $\pi_2 A_p \sigma \in K$ olur, böylece $\sigma \in K_{A_p}$ dir.

Teorem 3.4.5 den dolayı

$$\pi_1 S_p \sigma \subset [p],$$

$$\pi_1 S_p \sigma \cup \pi_2 S_p \sigma$$

öz süzgeçtir ve

$$\pi_1 S_p \sigma \supset \pi_2 S_p \sigma \cap [p]$$

olduğundan kabulden dolayı $\alpha = \pi_1 S_p \sigma$ ve $\beta = \pi_2 S_p \sigma$ dir. Böylece $\pi_2 S_p \sigma \cap [p] \in K$ dır. Sonuç olarak Teorem 3.4.6(3) den dolayı $\pi_2 A_p \sigma \supset \pi_1 S_p \sigma \cap \pi_2 A_p \sigma = \pi_2 S_p \sigma \cap [p]$ olur ki $\pi_2 A_p \sigma \supset \pi_2 S_p \sigma \cap [p]$ ve $\pi_2 S_p \sigma \cap [p] \in K$ olduğundan $\pi_2 A_p \sigma \in K$ olur, böylece $\sigma \in K_{A_p}$ dir. O halde $K_{S_p} \subset K_{A_p}$ dir.

Şimdi ise $K_{A_p} \subset K_{S_p}$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $\sigma \in K_{A_p}$ olsun yani $\pi_1 A_p \sigma, \pi_2 A_p \sigma \in K$ ise $\pi_1 S_p \sigma, \pi_2 S_p \sigma \in K$ olduğunu göstereceğiz. $\pi_1 S_p \sigma = \pi_1 A_p \sigma$ olduğundan $\pi_1 S_p \sigma \in K$ dir. $\pi_2 S_p \sigma \in K$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Eğer σ öz olmayan süzgeç ise bu durumda $\pi_2 S_p \sigma = \pi_2 S_p [\emptyset] = [\emptyset] \in K$ olduğundan $\sigma \in K$ olur.

Eğer σ öz süzgeç ise bu durumda

Teorem 3.4.6(1) den dolayı $\pi_1 A_p \sigma = [p]$ ve $\pi_2 S_p \sigma = \pi_2 A_p \sigma$ dir, sonuç olarak $\pi_2 A_p \sigma \in K$ den dolayı $\pi_2 S_p \sigma \in K$ dir, böylece $\sigma \in K_{S_p}$ dir.

Teorem 3.4.6(2) den dolayı $\pi_2 A_p \sigma = [p] \in K$ ve $\pi_1 S_p \sigma = \pi_2 S_p \sigma$ yazabiliriz ve sonuç olarak $\pi_1 S_p \sigma \in K$ den dolayı $\pi_2 S_p \sigma \in K$ dir, böylece $\sigma \in K_{S_p}$ dir.

Teorem 3.4.6(3) den dolayı

$$\pi_1 A_p \sigma \subset [p] \text{ ve } \pi_2 A_p \sigma \subset [p]$$

ve

$$\pi_1 A_p \sigma \cap \pi_2 A_p \sigma = \pi_2 S_p \sigma \cap [p] \text{ dir.}$$

Böylece (1) şartından dolayı $\pi_1 A_p \sigma \cap \pi_2 A_p \sigma \in K$ dir. Böylece $\pi_2 S_p \sigma \in K$ dir, böylece $\sigma \in K_{S_p}$ dir. O halde $K_{A_p} \subset K_{S_p}$ elde edilir. Sonuç olarak $K_{A_p} = K_{S_p}$ olur ki Tanım 4.1.1(3) dan dolayı (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında $pre\bar{T}_2$.

Örnek 4.3.2 $A = \{a, b, c\}$, $K = \{[a], [b], [c], [\emptyset], [b] \cap [c], [a] \cap [c]\}$ olmak üzere (A, K) uzayı a noktasında $pre\bar{T}_2$ olup olmadığını gösterelim.

(1) $K_a = \{[a], [a] \cap [c]\}$ sonlu kesişim altında kapalıdır.

(2) $\alpha \in K_a$ ve $\beta \in K$ için $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç ve $\beta \cap [a] \subset \alpha$ olmak üzere $\alpha = [a]$ ve $\beta = [a] \cap [c]$ için $[a] \cup ([a] \cap [c]) = [a]$ öz süzgeç ve $([a] \cap [c]) \cap [a] = [a] \cap [c] \subset [a]$ den $\beta \cap [a] = ([a] \cap [c]) \cap [a] = [a] \cap [c] \in K$ olur.

$\alpha = [a] \cap [c]$ olması durumunda da yukarıdakine benzer düşünce ile yapılır. Böylece (A, K) uzayı a noktasında $pre\bar{T}_2$ dir.

Teorem 4.3.3 (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzay, $p \in B$ ve $K_p = \{ \alpha \in K : \alpha \subset [p] \}$ olsun. Bu durumda (B, K) uzayı p noktasında $preT'_2$ dir ancak ve ancak $K_p = \{[p]\}$.

İspat: (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayının p de $preT'_2$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{array}{ccc} (BV_p B, K_{BV_p B}) & \xrightarrow{S_p} & (B^2, K^2) \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} (B, K) \\ & \searrow \text{ } i_1, i_2 & \nearrow \end{array}$$

Şekil 4.4. *ConFCO* da $preT'_2$ diyagramı.

Tanım 3.2.4(1-2), 4.1.1(4) den dolayı wedge çarpımındaki herhangi bir σ süzgeci için

- i. $\pi_1 S_p \sigma \in K$ ve $\pi_2 S_p \sigma \in K$ dir ancak ve ancak
- ii. Bazı $\sigma_1 \in K$ ve $k = 1, 2$ için $\sigma \supset i_k \sigma_1$ dir.

Kabul edelim ki $K_p \neq \{[p]\}$ olsun. Bu durumda en az bir $\alpha \in K$ süzgeci vardır $\alpha \subset [p], \alpha \neq [p]$ dir.

Eğer Teorem 3.4.7 de geçen $\alpha_1 = \alpha = \alpha_3$ ve $\alpha_1 \subset [p]$ olduğundan $\alpha_1 \cup \alpha_3 = \alpha$ öz süzgeç ve $\alpha_1 = \alpha \supset \alpha_3 \cap [p] = \alpha$ dir.

Böylece Teorem 3.4.7(3) den dolayı $\pi_1 S_p \sigma = \alpha = \pi_2 S_p \sigma$ ve $\pi_2 A_p \sigma = \alpha_3 \cap [p] = \alpha$ olacak şekilde wedge çarpımı üzerinde en az bir σ öz süzgeci vardır.

Bu ise (B, K) uzayı p noktasında $preT'_2$ olduğundan Tanım 3.2.4(2) den bazı $\sigma_1 \in K$ için $\sigma \supset i_1 \sigma_1$ veya $\sigma \supset i_2 \sigma_1$ olduğunu gösterir.

Eğer $\sigma \supset i_1 \sigma_1$ ise $\alpha = \pi_2 A_p \sigma \supset \pi_2 A_p i_1 \sigma_1 = [p]$ ve sonuç olarak $\alpha = [p]$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

Eğer $\sigma \supset i_2 \sigma_1$ ise $\alpha = \pi_1 S_p \sigma \supset \pi_1 S_p i_2 \sigma_1 = [p]$ ve böylece $\alpha = [p]$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

Böylece her iki durumdan dolayı $K_p = \{[p]\}$ olmalıdır.

Tersine olarak, kabul edelim ki $K_p = \{[p]\}$, σ ise $BV_p B$ üzerinde bir süzgeç, K_{S_p} yapısı S_p tarafından üretilen $BV_p B$ üzerindeki sabit süzgeç yakınsak yapı ve K_W de $i_1, i_2: (B, K) \rightarrow BV_p B$ içine dönüşümleri ile elde edilen $BV_p B$ üzerindeki yapı olsun.

Şimdi $K_{S_p} = K_W$ olduğunu göstereceğiz.

Kabul edelim ki $\sigma \in K_{S_p}$ olsun. Tanım 3.2.4(1) den, $\pi_1 S_p \sigma \in K$ ve $\pi_2 S_p \sigma \in K$ olur. Teorem 3.4.7 de ifadesi olan α_1 ve α_3 süzgeçleri $\alpha_1 = \pi_1 S_p \sigma$ ve $\alpha_3 = \pi_2 S_p \sigma$ şeklinde seçelim.

Teorem 3.4.7(1) durumundan,

$(\pi_1 S_p \sigma) \cup (\pi_2 S_p \sigma)$ öz olmayan süzgeç ise $\pi_1 S_p \sigma = [p]$ ve $\pi_2 A_p \sigma = \pi_2 S_p \sigma$ dir. Dolayısıyla $\sigma \supset i_2 \pi_2 S_p \sigma$ dir. Çünkü, $U \in i_2 \pi_2 S_p \sigma$ ise bazı $W = U_1 V_p U_2 \in \sigma$ için $U \supset i_2 \pi_2 S_p(W)$ dir. $\pi_1 S_p \sigma = [p]$ ve $\pi_2 S_p \sigma \notin [p]$ olduğundan $U_1 = \emptyset$ alabiliriz. Böylece $W = U_2 = i_2 \pi_2 S_p(W) \subset U$ olur. Sonuç olarak $U \in \sigma$ ve $\sigma \supset i_2 \pi_2 S_p \sigma$ dir. Bu ise $\sigma_1 = \pi_2 S_p \sigma$ alınırsa $\sigma \supset i_2 \sigma_1$ olur ki $\sigma \in K_W$ dir.

Teorem 3.4.7(2) durumundan,

$\pi_1 S_p \sigma \notin [p]$ ve $\pi_1 S_p \sigma = \pi_2 S_p \sigma$ dir ki $\sigma \supset i_1 \pi_1 S_p \sigma$ dir. Çünkü, $U \in i_1 \pi_1 S_p \sigma$ ise bazı $W = U_1 V_p U_2 \in \sigma$ için $U \supset i_1 \pi_1 S_p(W)$ dir. $\pi_2 A_p \sigma = [p]$ olduğundan $U_2 = \emptyset$ alabiliriz. Böylece $W = U_1 = i_1 \pi_1 S_p(W) \subset U$ olur. Sonuç olarak $U \in \sigma$ ve $\sigma \supset i_1 \pi_1 S_p \sigma$ dir. Bu ise $\sigma_1 = \pi_1 S_p \sigma$ alınırsa $\sigma \supset i_1 \sigma_1$ olur ki $\sigma \in K_W$ dir.

Teorem 3.4.7(3) durumunda,

$\pi_1 S_p \sigma \subset [p]$, $(\pi_1 S_p \sigma) \cup (\pi_2 S_p \sigma)$ öz süzgeç, $\pi_1 S_p \sigma \supset (\pi_2 S_p \sigma) \cap [p]$ ve $\pi_2 A_p \sigma = (\pi_2 S_p \sigma) \cap [p]$ dir. Burada $\pi_1 S_p \sigma \in K, \pi_1 S_p \sigma \subset [p]$ dir ve kabulden $\pi_1 S_p \sigma = [p]$ dir. $(\pi_1 S_p \sigma) \cup (\pi_2 S_p \sigma) = [p] \cup (\pi_2 S_p \sigma)$ öz süzgeçtir ancak ve ancak $\pi_2 S_p \sigma \subset [p]$ ve $\pi_2 S_p \sigma \in K$ dir ki sonuç olarak $\pi_2 S_p \sigma = [p]$ olur. Böylece $\sigma = [p_1] = i_1[p] = [p_2] = i_2[p]$ dir. Burada $p_1 = p_2 \in BV_p B$ dir.

Sonuç olarak $\sigma \in K_W$ olur ki bu ise $K_{S_p} \subset K_W$ olduğunu gösterir.

Şimdi ise $K_W \subset K_{S_p}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\sigma \in K_W$ olsun. Tanım 3.2.4(2) den $\sigma \supset i_1\sigma_1$ veya $\sigma \supset i_2\sigma_1$ olacak şekilde en az bir $\sigma_1 \in K$ vardır.

Eğer $\sigma \supset i_1\sigma_1$ ise

$$\pi_1 S_p \sigma \supset \pi_1 S_p i_1 \sigma_1 = \sigma_1$$

ve

$$\pi_2 S_p \sigma \supset \pi_2 S_p i_1 \sigma_1 = \sigma_1$$

dir. Yani $\pi_1 S_p \sigma \in K, \pi_2 S_p \sigma \in K$ dir. Tanım 3.2.4(1) den $\sigma \in K_{S_p}$ olur ki $K_W \subset K_{S_p}$ dir.

Eğer $\sigma \supset i_2\sigma_1$ ise

$$\pi_1 S_p \sigma \supset \pi_1 S_p i_2 \sigma_1 = [p]$$

ve

$$\pi_2 S_p \sigma \supset \pi_2 S_p i_2 \sigma_1 = \sigma_1$$

dir. Yani $\pi_1 S_p \sigma \in K, \pi_2 S_p \sigma \in K$ olur. Tanım 3.2.4(1) den $\sigma \in K_{S_p}$ olur ki $K_W \subset K_{S_p}$ dir. Sonuç olarak $K_W = K_{S_p}$ dir. Tanım 4.1.1(4) den dolayı (B, K) uzayı p noktasında $preT'_2$ dir.

Not: B sonlu bir küme olmak üzere (B, K) sabit yakınsak süzgeç uzayı $preT'_2$ dir ancak ve ancak K diskre yapıdır.

Örnek 4.3.4 (1) $A = \{a, b, c\}$, $K = \{[a], [b], [c], [\emptyset], [b] \cap [c], [a] \cap [c]\}$ olmak üzere (A, K) uzayının hangi noktalarda $preT'_2$ olup olmadığını inceleyelim.

$K_a = \{\alpha: \alpha \subset [a], \alpha \in K\} = \{[a], [a] \cap [c]\} \neq \{[a]\}$ olduğundan (A, K) uzayı a noktasında $preT'_2$ değildir. Benzer şekilde (A, K) uzayı b ve c noktalarında da $preT'_2$ değildir.

(2) $B = \{a, b, c\}$, $K = \{[a], [b], [c], [\emptyset], [b] \cap [c]\}$ olmak üzere (B, K) uzayının hangi noktalarda $preT'_2$ olup olmadığını inceleyelim.

$K_a = \{\alpha: \alpha \subset [a], \alpha \in K\} = \{[a]\} = \{[a]\}$ olduğundan (B, K) uzayı a noktasında $preT'_2$ dir. Fakat $K_b = \{\alpha: \alpha \subset [b], \alpha \in K\} = \{[b], [b] \cap [c]\} \neq \{[b]\}$ olduğundan (B, K) uzayı b noktasında $preT'_2$ değildir. Benzer şekilde (B, K) uzayı c noktasında da $preT'_2$ değildir.

4.4 $PreT_2(\text{ConFCO})$ Kategorisinde Alt Uzaylar Ve Çarpım Uzayları

Objeleri $pre\bar{T}_2$ uzaylardan oluşan **ConFCO** nun dolu alt kategorisi $pre\bar{T}_2(\text{ConFCO})$ olsun [7] de ki Teorem 3.4 den dolayı $pre\bar{T}_2(\text{ConFCO})$ bir topolojik kategoridir.

Şimdi $pre\bar{T}_2(\text{ConFCO})$ topolojik kategorisinin kalıtsallığını ve çarpımsal olduğunu gösteren teoremleri ifade ve ispat edelim.

Teorem 4.4.1 (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında $pre\bar{T}_2$ ve $p \in M \subset B$ ise M de p noktasında $pre\bar{T}_2$ dir.

İspat: K_M, M üzerindeki $i: (M, K_M) \hookrightarrow (B, K)$ dönüşümü ile elde edilen başlangıç yapısı ve $\alpha, \beta \in (K_M)_p$ olsun. Teorem 4.3.1 in şartlarının sağlandığını gösterelim:

(1) Tanım 3.2.4(1) den $i(\alpha), i(\beta) \in K$ ve Teorem 4.3.1 den $i(\alpha \cap \beta) \in K$ ve Tanım 3.2.4(1) den $\alpha \cap \beta \in K_M$ olur. Böylece $\alpha \cap \beta \in (K_M)_p$ dir.

(2) Kabul edelim ki $\alpha \in (K_M)_p$ ve $\beta \in K_M$ olsun. Burada $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç ve $\beta \cap [p] \subset \alpha$ dir. Bu ise Tanım 3.2.4(1) den $i(\alpha), i(\beta) \in K_p, i(\alpha) \cup i(\beta) = i(\alpha \cup \beta)$ nın öz süzgeç olması anlamına gelir.

$i(\beta \cap [p]) = i(\beta) \cap i([p]) \subset i(\alpha)$ olur. Teorem 4.3.1 den $i(\beta \cap [p]) \in K$ ve Tanım 3.2.4(1) den $\beta \cap [p] \in K_M$. Böylece (M, K_M) uzayı p noktasında $pre\bar{T}_2$ dir.

Teorem 4.4.2 Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler $p_i \in B_i$ de $pre\bar{T}_2$ dir ancak ve ancak $(B = \prod_{i \in I} B_i, K)$ çarpım uzayı p noktasında $pre\bar{T}_2$ dir. $p = (p_1, p_2, p_3, \dots) \in B$ olmak üzere K yapısı B üzerindeki çarpım uzay yapısıdır.

İspat: Kabul edelim ki $(\prod_{i \in I} B_i, K)$ çarpım uzayı p noktasında $pre\bar{T}_2$ olsun. Her $i \in I$ için (B_i, K_i) sabit süzgeç yakınsak uzayları (B, K) ın bir alt uzayına izomorfik olduğundan ve Teorem 4.4.1 den dolayı her $i \in I$ olmak üzere $p_i \in B_i$ için (B_i, K_i) uzayı p_i noktasında $pre\bar{T}_2$ dir.

Tersine olarak kabul edelim ki her $i \in I$ için $p_i \in B_i$ olmak üzere (B_i, K_i) alt uzayı $p_i \in B_i$ noktasında $pre\bar{T}_2$ olsun. Teorem 4.3.1 in şartlarının sağlandığını göstereceğiz. **(1)** $p = (p_1, p_2, p_3, \dots)$ olmak üzere $\alpha, \beta \in K_p$ olsun. Tanım 3.2.4(1) den, her $i \in I$ için, $\pi_i: (\prod B_i, K) \rightarrow (B_i, K_i)$ olmak üzere $\pi_i(\alpha), \pi_i(\beta) \in (K_i)_{p_i}$ dir.

Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler $p_i \in B_i$ de $pre\bar{T}_2$ olduğundan, Teorem 4.3.1 den $\pi_i(\alpha) \cap \pi_i(\beta) = \pi_i(\alpha \cap \beta) \in (K_i)_{p_i}$ olur ve Tanım 3.2.4(1) den $\alpha \cap \beta \in K_p$ olur.

(2) Kabul edelim ki $\alpha \in K_p$ ve $\beta \in K$ için $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç ve $\beta \cap [p] \subset \alpha$ olsun. Her $i \in I$ için $\pi_i(\alpha) \in (K_i)_{p_i} \in K_i$ ve $\pi_i(\beta) \in K_i$ olmak üzere $\pi_i(\alpha) \cup \pi_i(\beta) = \pi_i(\alpha \cup \beta)$ öz süzgeç ve $\pi_i(\beta) \cap [p] = \pi_i(\beta \cap [p]) \subset \pi_i(\alpha)$ olur.

Teorem 4.3.1 in, $\pi_i(\beta \cap [p]) = \pi_i(\beta) \cap \pi_i([p]) = \pi_i(\beta) \cap [p_i] \in K_i$ olur. Her $i \in I$ için (B_i, K_i) uzayı p_i noktasında $pre\bar{T}_2$ olduğundan ve Tanım 3.2.4(1) den $\beta \cap [p] \in K$ dir. Böylece (B, K) çarpım uzayı p noktasında $pre\bar{T}_2$ olur.

Teorem 4.4.3 Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler $p_i \in B_i$ de $pre\bar{T}_2$ ise $(B = \prod_{i \in I} B_i, K)$ co-çarpım uzayı (i, p) de $pre\bar{T}_2$ dir. Burada K yapısı $(i, p) \in B$ olmak üzere B üzerindeki co-çarpım yapısıdır.

İspat: Her $i \in I$ için $p_i \in B_i$ olmak üzere (B_i, K_i) sabit süzgeç yakınsak uzayları p_i de $pre\bar{T}_2$ olsun. $(B = \prod_{i \in I} B_i, K)$ co-çarpım uzayı (i, p) noktasında $pre\bar{T}_2$ olduğunu yani Teorem 4.3.1 in şartlarının sağlandığını göstereceğiz. Burada $i: (B_i, K_i) \rightarrow (\prod_{i \in I} B_i, K)$ dir.

(1) $K_{(i,p)} = \{\alpha: \alpha \subset [(i, p)], \alpha \in K\}$ sonlu kesişim altında kapalı olduğunu göstereceğiz. Eğer $\alpha, \beta \in K_{(i,p)}$ ise Tanım 3.2.4(2) den $i(\delta) \subset \alpha$ ve $i(\gamma) \subset \beta$ olacak şekilde en az bir $\delta, \gamma \in (K_i)_{p_i}$ süzgeçleri vardır. Burada

$$i(\delta \cap \gamma) = i(\delta) \cap i(\gamma) \subset \alpha \cap \beta \text{ dir.}$$

Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler $p_i \in B_i$ noktasında $pre\bar{T}_2$ olduğundan ve Teorem 4.3.1 den, $\delta \cap \gamma \in (K_i)_{p_i}$ ve Tanım 3.2.4(2) den dolayı $\alpha \cap \beta \in K_{(i,p)}$ olur.

(2) Kabul edelim ki $\alpha \in K_{(i,p)}$ ve $\beta \in K$ için $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç ve $\beta \cap [(i,p)] \subset \alpha$ olsun. Bu durumda $i(\delta) \subset \alpha$ ve $i(\gamma) \subset \beta$ olacak şekilde en az bir $\delta \in (K_i)_{p_i}$ ve $\gamma \in K_i$ vardır. Dikkat edelim ki

$$i(\delta) \cup i(\gamma) = i(\delta \cup \gamma)$$

öz süzgeç ve

$$i(\gamma \cap [p_i]) = i(\gamma) \cap [(i,p)] \subset \beta \cap [(i,p)] \subset \alpha$$

olması $\delta \cup \gamma$ nin öz süzgeç ve $\gamma \cap [p_i] \subset \delta$ olmasını gerektirir.

Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler $p_i \in B_i$ noktasında $pre\bar{T}_2$ olduğundan ve Teorem 4.3.1 den, $\gamma \cap [p_i] \in (K_i)_{p_i}$ ve Tanım 3.2.4(2) den $\beta \cap [(i,p)] \in K_{(i,p)}$ olur.

Böylece Teorem 4.3.1 den (B, K) co-çarpım sabit süzgeç yakınsak uzayı (i, p) noktasında $pre\bar{T}_2$ dir.

Teorem 4.4.4 (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı p de $preT_2'$ ve $p \in M \subset B$ ise M de p noktasında $preT_2'$ dir.

İspat: K_M nin M üzerindeki $i: (M, K_M) \hookrightarrow (B, K)$ dönüşümü ile elde edilen başlangıç yapısı ve $p \in M$ olduğunu kabul edelim. Teorem 4.3.3 den dolayı $(K_M)_p = \{[p]\}$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $(K_M)_p \neq \{[p]\}$ olsun. Bu durumda en az bir $\alpha \in (K_M)_p$ vardır ve $\alpha \neq [p]$ dir. $\alpha \in (K_M)_p$ ise $\alpha \subset [p]$, $\alpha \in K_M$ dir ve $i(\alpha) \in K$ dir.

$\alpha \subset [p]$ olduğunda $i(\alpha) \subset i([p]) = [i(p)] = [p]$ den $i(\alpha) \subset [p]$ olur.

$i(\alpha) \in K$ olduğunda $i(\alpha) \in K_p$ olur. (B, K) uzayı $preT_2'$ olduğundan Teorem 4.3.3 den dolayı $i(\alpha) = [p]$ olmalıdır.

$$i^{-1}i(\alpha) = i^{-1}[p]$$

$$\alpha = [i^{-1}(p)]$$

$$\alpha = [p]$$

olur. Bu da $\alpha \neq [p]$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $(K_M)_p = \{[p]\}$ olmalıdır. Sonuç olarak (M, K_M) alt uzayı $preT_2'$ dir.

Teorem 4.4.5 Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler $p_i \in B_i$ de $preT_2'$ dir gerek ve yeter şart $B = (\prod_{i \in I} B_i, K)$ çarpım uzayı p noktasında $preT_2'$ dir. Burada $p = (p_1, p_2, \dots) \in B$ olmak üzere K yapısı B üzerindeki çarpım uzay yapısıdır.

İspat: Kabul edelim ki $(B = \prod_{i \in I} B_i, K_*)$ çarpım uzayı $p = (p_1, p_2, \dots) \in B$ da $preT_2'$ olsun. Her $i \in I$ için her bir (B_i, K_i) uzayı (B, K_*) çarpım uzayının bir alt uzayına izomorf olduğundan Teorem 4.4.4 den her $i \in I$ için (B_i, K_i) uzayı p_i noktasında $preT_2'$ dir.

Tersine olarak her $i \in I$, $p_i \in B_i$ için (B_i, K_i) uzayları p_i noktasında $preT_2'$ olsun. $p = (p_1, p_2, \dots) \in B$ için (B, K_*) çarpım uzayının p noktasında $preT_2'$ olduğunu göstereceğiz, yani $(K_*)_p = \{[p]\}$ olduğunu göstereceğiz.

$$\pi_i: \left(\prod B_i, K \right) \rightarrow (B_i, K_i)$$

Kabul edelim ki $(K_*)_p \neq \{[p]\}$ olsun. O halde en az bir $\alpha \in (K_*)_p$ vardır ve $\alpha \neq [p]$ dir. $\alpha \in (K_*)_p$ ise $\alpha \subset [p]$, $\alpha \in K_*$ dır.

$\alpha \subset [p]$ ise $\pi_i \alpha \subset \pi_i [p] = [\pi_i(p)] = [p_i]$ den $\pi_i \alpha \subset [p_i]$ elde edilir. Her $i \in I$ için (B_i, K_i) kabulden $preT_2'$ olduğu için $\pi_i \alpha \in (K_i)_{p_i}$ den $\pi_i \alpha = [p_i]$ olur.

$$\pi_i^{-1} \pi_i \alpha = \pi_i^{-1} [p_i]$$

$$\alpha = [\pi_i^{-1}(p_i)]$$

$$\alpha = [p]$$

olur ki bu ise $\alpha \neq [p]$ seçilmesi ile çelişir. Böylece $\alpha = [p]$ olmalıdır. O halde $(K_*)_p = \{[p]\}$ olur. Teorem 4.3.3 den dolayı (B, K_*) çarpım süzgeç uzayı $preT_2'$ dir.

Teorem 4.4.6 Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler $p_i \in B_i$ de $preT_2'$ ise $(B = \coprod_{i \in I} B_i, K^*)$ co-çarpım uzayı (i, p) noktasında $preT_2'$ dir. Burada $K, (i, p) \in B$ olmak üzere B üzerindeki co-çarpım yapısıdır.

İspat: Kabul edelim ki her $i \in I, (B_i, K_i)$ sabit yakınsak süzgeç uzayları p_i noktasında $preT_2'$ ve $K^*, B = \coprod_{i \in I} B_i$ üzerindeki co-çarpım yapı olmak üzere (B, K^*) co-çarpım sabit yakınsak süzgeç uzayının $preT_2'$ olduğunu göstereceğiz, yani $(i, p) \in B$ için $(K^*)_{(i,p)} = \{[(i, p)]\}$.

Kabul edelim ki $(K^*)_{(i,p)} \neq \{[(i, p)]\}$ olsun. Bu durumda en az bir $\alpha \in (K^*)_{(i,p)}$ vardır ve $\alpha \neq [(i, p)]$ dir.

$\alpha \in (K^*)_{(i,p)}$ olduğundan $\alpha \subset [(i, p)]$, $\alpha \in K^*$ olur. $\alpha \in K^*$ ise $q: (B_i, K_i) \rightarrow (B, K^*)$ final kaldırması olduğu için $q(\alpha_1) \subset \alpha$ olacak şekilde $\alpha_1 \in K_i$ vardır.

$$q(\alpha_1) \subset \alpha \subset [(i, p)]$$

ifadesinde her tarafa q^{-1} uygulanırsa,

$$q^{-1}q\alpha_1 = [q^{-1}(i, p)]$$

$$\alpha_1 \subset [p_i]$$

haline gelir. Her $i \in I$ için (B_i, K_i) uzayları $p_i \in B_i$ noktasında $preT_2'$ olduğundan $(K_i)_{p_i} = \{[p_i]\}$ olur ki $\alpha_1 = [p_i]$ dir. Buradan

$$q\alpha_1 = q([p_i]) = [q(p_i)] = [(i, p)] \subset \alpha$$

olur ki $\alpha = [(i, p)]$ elde ederiz. Bu ise $\alpha \neq [(i, p)]$ olması ile çelişir o halde

$(K^*)_{(i,p)} = \{[(i, p)]\}$ olmalı sonuç olarak Teorem 4.3.3 den (B, K^*) uzayı

(i, p) noktasında $preT_2'$ olur.

4.5 Lokal T_2 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar

Teorem 4.5.1 (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı p de $\bar{T}_2$ olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlar sağlanır:

- (1) Her $x \in B$ için $x \neq p$ olmak üzere $[x] \cap [p] \notin K$.
- (2) $K_p = \{\alpha: \alpha \subset [p], \alpha \in K\}$ kümesi sonlu kesişim altında kapalıdır.
- (3) Her $\alpha \in K_p$ ve $\beta \in K$ için $\alpha \cup \beta$ öz-süzgeç ve $\beta \cap [p] \subset \alpha$ ise bu durumda $\beta \cap [p] \in K$ dır.

İspat: Kabul edelim ki (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında $\bar{T}_2$ olsun. Yani Tanım 4.1.1(5) den (B, K) uzayı p noktasında hem $\bar{T}_0$ hem de $pre\bar{T}_2$ dir. Eğer bazı $x \in B$ için $x \neq p$ olmak üzere $[x] \cap [p] \in K$ ise bu durumda K_d yapısı B üzerindeki diskre yapı ve $\sigma = [x_1] \cap [x_2]$ şeklinde olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} (BV_p B, K_{BV_p B}) & \xrightarrow{A_p} & (B^2, K^2) \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} (B, K) \\ \downarrow \nabla_p & & \\ (B, K_d) & & \end{array}$$

Şekil 4.5. *ConFCO* da $\bar{T}_2$ diyagramı.

$$\begin{aligned} \pi_1 A_p \sigma &= \pi_1 A_p ([x_1] \cap [x_2]) \\ &= \pi_1 A_p (\{x_1, x_2\}) \\ &= \pi_1 (\{(x, p), (p, x)\}) \\ &= [x, p] \\ &= [x] \cap [p] \in K \\ \pi_2 A_p \sigma &= \pi_2 A_p ([x_1] \cap [x_2]) \\ &= \pi_2 A_p (\{x_1, x_2\}) \end{aligned}$$

$$= \pi_2[\{(x, p), (p, x)\}]$$

$$= [\{p, x\}]$$

$$= [p] \cap [x] \in K$$

ve

$$\nabla_p \sigma = \nabla_p([x_1] \cap [x_2]) = [x] \in K_d$$

olur bu ise (B, K) nın p de $\bar{T}_2$ ile çelişir. Böylece her $x \in B$ için $x \neq p$ olmak üzere $[x] \cap [p] \notin K$ dır ki (1) şartı sağlanır. (B, K) uzayı p noktasında $pre\bar{T}_2$ olduğundan Teorem 4.3.1 den (2) ve (3) sağlanır.

Tersine olarak kabul edelim ki şartlar sağlansın ve $\sigma \in F(B \vee_p B)$ olsun. Bazı $x \in B$ için $\pi_1 A_p \sigma \in K$, $\pi_2 A_p \sigma \in K$ ve $\nabla_p \sigma = [\emptyset]$, $\nabla_p \sigma = [x]$ olsun.

Eğer $\nabla_p \sigma = [\emptyset]$ ise $\sigma = [\emptyset]$ dır.

Eğer $\nabla_p \sigma = [x]$ ise $\sigma = [x_1]$, $\sigma = [x_2]$ veya $\sigma \supset \{\{x_1, x_2\}\}$ dir.

Eğer $\sigma = \{\{x_1, x_2\}\}$ ise

$$\pi_1 A_p \sigma = \pi_1 A_p[\{x_1, x_2\}]$$

$$= \pi_1[\{(x, p), (p, x)\}]$$

$$= [\{x, p\}]$$

$$= [x] \cap [p] \in K$$

ve

$$\pi_2 A_p \sigma = \pi_2 A_p[\{x_1, x_2\}]$$

$$= \pi_2[\{(x, p), (p, x)\}]$$

$$= [\{p, x\}]$$

$$= [p] \cap [x] \in K \text{ dir.}$$

Bu ise $x \neq p$ için $[x] \cap [p] \notin K$ olması ile çelişir. Bu yüzden $\sigma \neq \{\{x_1, x_2\}\}$ dir.

Eğer $[\emptyset] \neq \sigma \neq [\{x_1, x_2\}]$ için $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ ise $U \neq \{x_1, x_2\}$ ve $U \neq \emptyset$ olacak şekilde az bir $U \in \sigma$ vardır. $\{x_1, x_2\} \in \sigma$ ve σ süzgeç olduğundan

$$U \cap \{x_1, x_2\} = \{x_1\} \in \sigma \text{ veya } U \cap \{x_1, x_2\} = \{x_2\} \in \sigma$$

dir, yani $\sigma = [x_1]$ veya $\sigma = [x_2]$ dir. Böylece $\sigma = [x_1]$, $\sigma = [x_2]$ veya $\sigma = [\emptyset]$ olur ki Tanım 4.1.1(1) ve Teorem 4.2.1(1) den ∇_p ve A_p nin başlangıç kaldırması diskredir, yani (B, K) uzayı p de $\bar{T}_0$ dir.

(2) ve (3) şartları sağlanırsa Teorem 4.3.1 den (B, K) uzayı p noktasında $pre\bar{T}_2$ dir. Sonuç olarak Tanım 4.1.1(5) den (B, K) uzayı p de $\bar{T}_0$ ve $pre\bar{T}_2$ olduğundan $\bar{T}_2$ dir.

Teorem 4.5.2 (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı $p \in B$ noktasında T'_2 olması için gerek ve yeter şart $K_p = \{[p]\}$ dir.

İspat: Kabul edelim ki (B, K) uzayı $p \in B$ noktasında T'_2 olsun. Ayrıca $\sigma \in F(B \vee_p B)$ için bazı $\beta \in K$ süzgeçleri için $\sigma \supset i_1(\beta)$ ve $\sigma \supset i_2(\beta)$ şartını sağlayan bir süzgeç ve $\nabla_p \sigma \in K_d$ olduğunu kabul edelim. Burada K_d , B üzerindeki diskre yapıdır. Bazı $x \in B$ için $\nabla_p \sigma = [\emptyset]$ veya $\nabla_p \sigma = [x]$ dir.

Eğer $\nabla_p \sigma = [\emptyset]$ ise $\sigma = [\emptyset]$ olur.

Eğer $\nabla_p \sigma = [x]$ ise bazı $x \in B$ için $\nabla_p \sigma = [x]$ olsun.

$x = p$ ise $\nabla_p \sigma = [p]$ olur ki bu ise $\sigma = [p]$ dir.

$x \neq p$ ise $\sigma = [x_1]$, $\sigma = [x_2]$ veya $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ olur.

$\sigma = [\{x_1, x_2\}]$ ise $\sigma \supset i_1(\beta)$ ve $\sigma \supset i_2(\beta)$ dir ki bu ise $\{x_1, x_2\}$ nin bir eksen üzerinde bulunduğunu gösterir. Dolayısıyla $x \neq p$ olduğundan bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $\sigma \neq [\{x_1, x_2\}]$ olmalıdır.

Eğer $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ ise Teorem 4.5.1 in ispat metoduna benzer düşünceyle $\sigma = [x_1]$ veya $\sigma = [x_2]$ dir. Sonuç olarak, $\sigma = [x_1]$, $[x_2]$ veya $[\emptyset]$ olur ki bu ise Tanım 4.1.1(2) ve Teorem 4.2.1(2) den dolayı (B, K) uzayı p de T_0' dir.

Teorem 4.3.3 den (B, K) uzayı p noktasında $preT'_2$ dir. Sonuç olarak (B, K) uzayı p noktasında T'_0 ve $preT'_2$ olduğundan T'_2 dir.

Tersine olarak, kabul edelim ki $K_p = \{[p]\}$ olsun. Bu durumda Teorem 4.3.3 ün ispatına benzer şekilde bir çelişki elde edilir ki (B, K) uzayı p noktasında T'_2 dir.

Örnek 4.5.3 $A = \{a, b, c\}$, $K = \{[a], [b], [c], [\emptyset], [b] \cap [c], [a] \cap [c]\}$ olmak üzere (A, K) uzayının a noktasında T'_2 ve $\bar{T}_2$ olma durumlarını inceleyelim.

Teorem 4.2.1(2) den (A, K) uzayı a noktasında T'_0 dir. Teorem 4.3.3 den (A, K) uzayı a noktasında $preT'_2$ değildir. Dolayısıyla $T'_2 = T'_0 + preT'_2$ olduğundan (A, K) uzayı a noktasında T'_2 değildir.

Teorem 4.2.1(1) den, $a \neq c$ için $[a] \cap [c] \in K$ olduğundan a noktasında $\bar{T}_0$ değildir. Teorem 4.3.1 den $pre\bar{T}_2$ olmasında rağmen, $\bar{T}_2 = \bar{T}_0 + pre\bar{T}_2$ olduğundan (A, K) uzayı a noktasında $\bar{T}_2$ değildir. Benzer şekilde b ve c noktalarında da $\bar{T}_2$ olmadığı görülür. $K = \{[a], [b], [c], [\emptyset]\}$ diskre yapıyı alsaydık her noktada $pre\bar{T}_2$, $preT'_2$, $\bar{T}_2$ ve T'_2 dir.

Teorem 4.5.4 (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında KT_2 dir ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanır:

- (1) $K_p = \{\alpha: \alpha \subset [p], \alpha \in K\}$ sonlu kesişim altında kapalıdır.
- (2) Her $\alpha \in K_p$ ve $\beta \in K$ için $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç ve $\beta \cap [p] \subset \alpha$ ise $\beta \cap [p] \in K$ dir.

İspat: (B, K) uzayının $p \in B$ noktasında KT_2 olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla Tanım 4.1.1(7) den (B, K) uzayı p noktasında hem T'_0 hem de $pre\bar{T}_2$ dir. (B, K) uzayı p noktasında $pre\bar{T}_2$ olduğundan Teorem 4.3.1 den şartlar sağlanır.

Tersine olarak, kabul edelim ki şartlar sağlansın. Tanım 4.1.1(7) den (B, K) uzayının p noktasında T'_0 ve $pre\bar{T}_2$ olduğunu göstermeliyiz.

$\sigma, B \vee_p B$ wedge çarpımı üzerinde herhangi bir süzgeç olsun. Bu süzgeç, bazı $\alpha \in K$ lar için $\sigma \supset i_1 \alpha$ ve $\sigma \supset i_2 \alpha$ şartları sağlansın ve bazı $x \in B$ için $\nabla_p \sigma = [x]$ veya $\nabla_p \sigma = [\emptyset]$ olsun.

Eğer $\nabla_p \sigma = [\emptyset]$ ise $\sigma = [\emptyset]$.

Eğer bazı $x \in B$ ler için $\nabla_p \sigma = [x]$ ise

$$\sigma = [x_1], [x_2], [\{x_1, x_2\}]$$

veya

$$\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$$

Eğer $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ ise $\sigma \supset i_1 \alpha$ veya $\sigma \supset i_2 \alpha$ olduğundan σ wedge çarpımının her iki bileşeninde de vardır. Böylece $\sigma = [x_1]$ veya $\sigma = [x_2]$ olmalıdır. Böylece $\sigma, BV_p B$ de

$$\sigma \supset i_1 \alpha, \sigma \supset i_2 \alpha$$

ve

$$\nabla_p \sigma = [\emptyset] \text{ veya } \nabla_p \sigma = [x]$$

şartlarını sağlayan süzgeç ise bu taktirde $\sigma = [\emptyset], \sigma = [x_1], \sigma = [x_2]$ dir. Böylece Tanım 4.1.1(2) den dolayı (B, K) uzayı p noktasında T'_0 dir.

Teorem 4.3.1 den dolayı şartlar sağlandığından (B, K) uzayı p noktasında $pre\bar{T}_2$ dir. Sonuç olarak Tanım 4.1.1(7) den dolayı (B, K) uzayı p noktasında KT_2 dir.

Teorem 4.5.5 (B, K) uzayı p noktasında LT_2 dir ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanır:

- (1) Her $x \in B, x \neq p$ için $[x] \cap [p] \notin K$
- (2) $K_p = \{[p]\}$

İspat: Teorem 4.2.1(1) ve Teorem 4.3.3 den ispat açıktır.

Not: (1) B sonlu bir küme olmak üzere (B, K) sabit yakınsak süzgeç uzayı LT_2 dir ancak ve ancak K diskre yapıdır.

(2) Objeleri lokal $KT_2(LT_2)$ sabit süzgeç yakınsak uzaylar olan $KT_2(\mathbf{ConFCO})$, $(LT_2(\mathbf{ConFCO}))$ kategorisi $\mathbf{ConFCO}$ nın bir alt kategorisi olsun.

Teorem 4.5.6 $KT_2(\mathbf{ConFCO})$ ve $pre\bar{T}_2(\mathbf{ConFCO})$ kategorileri izomorfiktir.

Teorem 4.5.7 $KT_2(\mathbf{ConFCO})$ kategorisi tüm limit ve colimitlere sahiptir.

İspat: Teorem 4.5.6 dan $KT_2(\mathbf{ConFCO})$ kategorisi $pre\bar{T}_2(\mathbf{ConFCO})$ ya izomorfik olduğundan ve $pre\bar{T}_2(\mathbf{ConFCO})$ kategorisi [7] de ki Teorem 3.4 den dolayı topolojik kategori olduğu için $KT_2(\mathbf{ConFCO})$ kategorisi tüm limit ve colimitlere sahiptir. Özellikle de $KT_2(\mathbf{ConFCO})$ kategorisi tüm alt uzaylar, çarpımlar, co-çarpımlar ve bölümlere sahiptir.

Teorem 4.5.8 $LT_2(\mathbf{ConFCO})$ kategorisi tüm limit ve colimitlere sahiptir.

İspat: Teorem 4.4.4, 4.4.5, 4.4.6 ve 4.2.1(2) den elde edilir.

Teorem 4.5.9 $T'_2(\mathbf{ConFCO})$ ve $preT'_2(\mathbf{ConFCO})$ kategorileri izomorfiktir.

İspat: Teorem 4.3.3 ve 4.5.2 den elde edilir.

4.6 $T_2(\mathbf{ConFCO})$ Kategorisinde Alt Uzaylar Ve Çarpım Uzayları

Teorem 4.6.1 (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında $\bar{T}_2$ ve $p \in M \subset B$ ise M de p noktasında $\bar{T}_2$ dir.

İspat: Teorem 4.5.1 in şartlarının sağlandığını gösterelim.

(1) Kabul edelim ki K_M , M üzerindeki $i: M \hookrightarrow B$ ile elde edilen başlangıç yapısı ve $x \in M$, $x \neq p$ için $[x] \cap [p] \in K_M$ olsun. Bu durumda $i([x] \cap [p]) = i([x]) \cap i([p]) = [x] \cap [p] \in K$ olur. (B, K) uzayı p de $\bar{T}_2$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece $[x] \cap [p] \notin K_M$ olur. Şimdi ise $\alpha, \beta \in (K_M)_p$ olsun.

(2) Tanım 3.2.4(1) den $i(\alpha), i(\beta) \in K$ ve Teorem 4.5.1 den $i(\alpha \cap \beta) \in K$ ve Tanım 3.2.4(1) den $\alpha \cap \beta \in K_M$ olur. Böylece $\alpha \cap \beta \in (K_M)_p$ dir.

(3) Kabul edelim ki $\alpha \in (K_M)_p$ ve $\beta \in K_M$ olsun. Burada $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç ve $\beta \cap [p] \subset \alpha$ dir. Bu ise Tanım 3.2.4(1) den $i(\alpha), i(\beta) \in K_p$, $i(\alpha) \cup i(\beta) = i(\alpha \cup \beta)$ nın öz süzgeç olması anlamına gelir.

$i(\beta \cap ([p])) = i(\beta) \cap i([p]) \subset i(\alpha)$ olur. Teorem 4.5.1 den $i(\beta \cap ([p])) \in K$ ve Tanım 3.2.4(1) ve Teorem 4.5.1 den $\beta \cap [p] \in K_M$. Böylece (M, K_M) uzayı p noktasında $\bar{T}_2$ dir.

Teorem 4.6.2 Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler $p_i \in B_i$ de $\bar{T}_2$ dir ancak ve ancak $B = (\prod_{i \in I} B_i, K)$ çarpım uzayı p noktasında $\bar{T}_2$ dir. Burada $p = (p_1, p_2, p_3, \dots) \in B$ olmak üzere K yapısı B üzerindeki çarpım uzay yapısıdır.

İspat: Kabul edelim ki $(\prod_{i \in I} B_i, K)$ çarpım uzayı p noktasında $\bar{T}_2$ olsun. Her $i \in I$ için (B_i, K_i) sabit süzgeç yakınsak uzayları (B, K) ın bir alt uzayına izomorfik olduğundan ve Teorem 4.6.1 den dolayı her $i \in I$ olmak üzere $p_i \in B_i$ için (B_i, K_i) uzayı p_i noktasında $\bar{T}_2$ dir.

Tersine olarak kabul edelim ki her $i \in I$ için $p_i \in B_i$ olmak üzere (B_i, K_i) alt uzayı p_i noktasında $\bar{T}_2$ olsun. Teorem 4.5.1 in şartlarının sağlandığını göstereceğiz.

(1) Kabul edelim ki $x \neq p$ için $x = (x_1, x_2, \dots)$ olmak üzere $[x] \cap [p] \in K$ olduğunda π_j dönüşümü altında $\pi_j([x] \cap [p]) = \pi_j([x]) \cap \pi_j([p]) = [x_j] \cap [p_j] \in K_j$ olur. (B_j, K_j) ler p_j de $\bar{T}_2$ olduğundan bir çelişkidir. Böylece $[x] \cap [p] \notin K$ olur.

(2) $p = (p_1, p_2, p_3, \dots)$ olmak üzere $\alpha, \beta \in K_p$ olsun. Tanım 3.2.4(1) den, her $i \in I$ için $\pi_i(\alpha), \pi_i(\beta) \in (K_i)_{p_i}$ dir. Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler $p_i \in B_i$ de $pre\bar{T}_2$ olduğundan, Teorem 4.5.1 den $\pi_i(\alpha) \cap \pi_i(\beta) = \pi_i(\alpha \cap \beta) \in (K_i)_{p_i}$ olur ve Tanım 3.2.4(1) den $\alpha \cap \beta \in K_p$ olur.

(3) Kabul edelim ki $\alpha \in K_p$ ve $\beta \in K$ için $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç ve $\beta \cap [p] \subset \alpha$ olsun. Her $i \in I$ için $\pi_i(\alpha) \in (K_i)_{p_i} \in K_i$ ve $\pi_i(\beta) \in K_i$ olmak üzere $\pi_i(\alpha) \cup \pi_i(\beta) = \pi_i(\alpha \cup \beta)$ öz süzgeç ve $\pi_i(\beta) \cap [p] = \pi_i(\beta \cap [p]) \subset \pi_i(\alpha)$ olur.

Teorem 4.5.1 den, $\pi_i(\beta \cap [p]) = \pi_i(\beta) \cap \pi_i([p]) = \pi_i(\beta) \cap [p_i] \in K_i$ olur. Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler p_i noktasında $\bar{T}_2$ olduğundan ve Tanım 3.2.4(1) den $\beta \cap [p] \in K$ dır. Böylece (B, K) çarpım uzayı p noktasında $\bar{T}_2$ olur.

Teorem 4.6.3 Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler $p_i \in B_i$ de $\bar{T}_2$ ise $(B = \coprod_{i \in I} B_i, K)$ co-çarpım uzayı (i, p) de $\bar{T}_2$ dir. Burada K yapısı $(i, p) \in B$ olmak üzere B üzerindeki co-çarpım yapısıdır.

İspat: Her $i \in I$ için $p_i \in B_i$ olmak üzere (B_i, K_i) sabit süzgeç yakınsak uzayları p_i de $\bar{T}_2$ olsun. $(B = \coprod_{i \in I} B_i, K)$ co-çarpım uzayı (i, p) noktasında $\bar{T}_2$ olduğunu yani Teorem 4.5.1 in şartlarının sağlandığını göstereceğiz.

(1) Kabul edelim ki $(i, x) \in B$, $(i, x) \neq (i, p)$ olsun. $[(i, x)] \cap [(i, p)] \in K$ olsun. Bu durumda $i(\beta_i) \subset [(i, x)] \cap [(i, p)]$ olacak şekilde en az bir $\beta_i \in K_i$ vardır. Bu ise $\beta_i = [x_i] \cap [p_i] \in K_i$ olması demektir. Fakat her $i \in I$ için (B_i, K_i) uzayları p_i noktasında $\bar{T}_2$ olduğundan çelişkidir. Böylece her $(i, x) \in B$ için $(i, x) \neq (i, p)$ olmak üzere $[(i, x)] \cap [(i, p)] \notin K$ olur.

(2) $\alpha, \beta \in K_{(i,p)}$ ise Tanım 3.2.4(2) den $i(\delta) \subset \alpha$ ve $i(\gamma) \subset \beta$ olacak şekilde en az bir $\delta, \gamma \in (K_i)_{p_i}$ süzgeçleri vardır. Burada

$$i(\delta \cap \gamma) = i(\delta) \cap i(\gamma) \subset \alpha \cap \beta \text{ dır.}$$

Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler $p_i \in B_i$ noktasında $\bar{T}_2$ olduğundan ve Teorem 4.5.1 den, $\delta \cap \gamma \in (K_i)_{p_i}$ ve Tanım 3.2.4(2) den dolayı $\alpha \cap \beta \in K_{(i,p)}$ olur.

(3) Kabul edelim ki $\alpha \in K_{(i,p)}$ ve $\beta \in K$ için $\alpha \cup \beta$ öz-süzgeç ve $\beta \cap [(i, p)] \subset \alpha$ olsun. Bu durumda $i(\delta) \subset \alpha$ ve $i(\gamma) \subset \beta$ olacak şekilde en az bir $\delta \in (K_i)_{p_i}$ ve $\gamma \in K_i$ vardır. Dikkat edelim ki,

$$i(\delta) \cup i(\gamma) = i(\delta \cup \gamma)$$

öz süzgeç ve

$$i(\gamma \cap [p_i]) = i(\gamma) \cap [(i, p)] \subset \alpha$$

olması $\delta \cup \gamma$ nın öz süzgeç ve $\gamma \cap [p_i] \subset \delta$ olmasını gerektirir.

Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler $p_i \in B_i$ noktasında $\bar{T}_2$ olduğundan ve Teorem 4.5.1 den, $\gamma \cap [p_i] \in (K_i)_{p_i}$ ve Tanım 3.2.4(2) den, $\beta \cap [(i, p)] \in K_{(i,p)}$ olur.

Böylece Teorem 4.5.1 den, (B, K) co-çarpım sabit süzgeç yakınsak uzayı (i, p) noktasında $\bar{T}_2$ dır.

Teorem 4.6.4 (1) (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı p de T_2' ve $p \in M \subset B$ ise M de p noktasında T_2' dir.

(2) Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler $p_i \in B_i$ de T_2' dir ancak ve ancak $B = (\prod_{i \in I} B_i, K)$ çarpım uzayı p de T_2' dir. Burada $p = (p_1, p_2, p_3, \dots) \in B$ olmak üzere K yapısı B üzerindeki çarpım uzay yapısıdır.

(3) Her $i \in I$ için (B_i, K_i) ler $p_i \in B_i$ de T_2' ise $(B = \coprod_{i \in I} B_i, K)$ co-çarpım uzayı (i, p) noktasında T_2' dir. $K, (i, p) \in B$ olmak üzere B üzerindeki co-çarpım yapısıdır.

İspat: Teorem 4.3.3 ve 4.5.2 den dolayı (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzayının p noktasında $preT_2'$ olması ile p de T_2' olması denk olduğundan Teorem 4.4.4, 4.4.5 ve 4.4.6 nın ispatı ile aynıdır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Lokal $PreT_2$ Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar İle İlgili Sonuçlar

(1) **Set** üzerindeki bir topolojik kategoride, p noktasında $pre\bar{T}_2$ olan objeler sadece indiske objeler olabilir. Örneğin objeleri yığın yakınsak uzaylar (sabit yığın yakınsak uzaylar) ve morfizmleri yığın yakınsak uzaylar (sabit yığın yakınsak uzaylar) arasındaki dönüşümler olan **SCO** (**ConSCO**) topolojik kategorisinde bir p noktasında $pre\bar{T}_2$ objeler yalnızca indiske objelerdir [24].

(2) $Pre\bar{T}_2$ ve $preT'_2$ olan objeler topolojik kategorinin tüm objeleri olabilir [25]. Örneğin, objeleri sabit limit uzaylar ve morfizmleri sabit limit uzaylar arasındaki dönüşümler olan **ConLim** topolojik kategorisinde her obje p de $pre\bar{T}_2$ ve $preT'_2$ dir.

(3) $PreT'_2$ ve T'_2 olan objeler sadece diskre objeler olabilir. **RRel** topolojik kategorisinde bir p noktasında $preT'_2$ olan objeler yalnızca diskre objelerdir [26].

(4) $\mathcal{U}: \mathcal{E} \rightarrow B$ topolojik fanktor, B çarpım ve sonlu limitlere, co-limitlere sahip bir kategori olsun. Bu durumda, $\mathcal{E}$ nin full alt kategorisi olan $pre\bar{T}_2(\mathcal{E})$ bir topolojik kategoridir [7]. Dolayısıyla objeleri $pre\bar{T}_2$ sabit süzgeç yakınsak uzaylar, morfizmleri sürekli dönüşümler olan $pre\bar{T}_2(\mathbf{ConFCO})$ topolojik kategoridir ve **ConFCO** nın bir alt kategorisidir. Burada dikkat edelim ki $pre\bar{T}_2(\mathbf{ConFCO})$ izomorfizm-kapalı bir kategoridir. Benzer şekilde $\bar{T}_2(\mathbf{ConFCO})$, $T'_2(\mathbf{ConFCO})$ ve $preT'_2(\mathbf{ConFCO})$ da topolojik kategorilerdir ve **ConFCO** nın birer alt kategorileridir.

(5) $\mathcal{E}$ topolojik kategorisinde objeleri $preT'_2$, morfizmleri $\mathcal{E}$ deki dönüşümler olan $preT'_2(\mathcal{E})$ deki alt kategori genelde topolojik kategori değildir. Örneğin **ConSCO** kategorisinde (B, L) uzayı $preT'_2$ olsun. Dolayısıyla [24] deki Teorem 2.14 den dolayı $B = \emptyset$ veya $B = \{b\}$ tek nokta kümesidir. $s(A) > 1$ olmak üzere $f: A \rightarrow B$ sabit dönüşümdür. f nin başlangıç kaldırması $f: (A, S) \rightarrow (B, L)$ şeklindedir. Burada $S = S(A)$ dır. Böylece [7] deki Teorem 4.12 den (A, S) uzayı $preT'_2$ değildir. O halde **ConSCO** deki $preT'_2$ objelerindeki alt kategorisi olan $preT'_2(\mathbf{ConSCO})$ topolojik kategori değildir. Çünkü başlangıç limitlerini korumaz.

5.2 Lokal T_2 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar İle İlgili Sonuçlar

(1) Teorem 4.1.4 den dolayı **Top** da p noktasında $\bar{T}_2$ ve p noktasında KT_2 denktir ve bilinen p noktasında T_2 ayırma aksiyomuna indirgenir.

(2) $\bar{T}_2, T'_2, KT_2$ ve LT_2 olan objeler topolojik kategorinin tüm objeleri olabilir. Örneğin, **ConLim** topolojik kategorisinde her obje p noktasında $\bar{T}_2, T'_2, KT_2$ ve LT_2 dir.

(3) $\mathcal{U}: \varepsilon \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş topolojik fanktor ise uzayın p noktasında $pre\bar{T}_2$ olması, p noktasında KT_2 olmasıdır.

(4) $\mathcal{U}: \varepsilon \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor, $X \in Ob(\varepsilon)$ ve $p \in U(X)$ olsun. Yani $p: 1 \rightarrow \mathcal{U}(X)$ kaynağının $h: \{x\} \rightarrow X$ başlangıç kaldırmasıdır. Burada $\{x\}$, **Set** kategorisindeki son objedir. Eğer X, p noktasında $\bar{T}_0$ ise X uzayı p noktasında T'_0 dir ve sonuç olarak Tanım 4.1.1(5,7) den uzayın p de $\bar{T}_2$ olması p noktasında KT_2 olmasının gerektirir, fakat Teorem 4.5.4 ve 4.5.1 den tersi doğru değildir. Örneğin $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $K = F(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerindeki indiskre yapı olsun. Teorem 4.5.4 den $(\mathbb{R}, K)$ uzayı p noktasında KT_2 dir fakat Teorem 4.5.1 den dolayı p noktasında $\bar{T}_2$ değildir. Çünkü Teorem 4.5.1(1) şartını sağlamaz.

(5) **Set** üzerindeki bir topolojik kategoride Teorem 4.1.4 den dolayı p noktasında $\bar{T}_2$ ile p noktasında KT_2 olma durumları denk olabilir. p de $\bar{T}_0$, p de T'_0 , p de $pre\bar{T}_2$, p de $\bar{T}_2$ ve p de KT_2 objeler birbirine denk olabilir. p de $\bar{T}_2$ ve p de KT_2 olma durumu ya tek nokta kümesi veya boş küme olma ile ilişkilendirilebilir veya kategorinin tüm objeleri p de $\bar{T}_2$ ve p de KT_2 olabilir [27,28].

(6) p noktasında $\bar{T}_0$ ve T'_0 objeler, lokal T_2 objeleri tanımlamakta ve küme tabanlı topolojik kategorilerde kapalılık kavramını tanımlamakta kullanılırlar [8].

(7) p noktasında $pre\bar{T}_2, \bar{T}_2$ ve KT_2 objeler küme tabanlı topolojik kategorilerde lokal tam regüler objeler, lokal T_4 objeler ve lokal T_3 objeleri tanımlamak için kullanılır [9-11].

(8) T'_2 objeler aynı zamanda $\bar{T}_2$ dir. Fakat tersi genelde doğru değildir [9].

5.3 Öneriler

Bu tez çalışmasından faydalananak ilerde yapılabilecek çalışmalar için bazı tavsiyeler verebiliriz. Burada A_p , S_p ve V_p dönüşümlerinden yararlanıldı ve noktada $pre\bar{T}_2$, $\bar{T}_2$, $preT'_2$, T'_2 , KT_2 , LT_2 objeler **ConFCO** kategorisinde incelendi. Bu topolojik kategoride süzgeç kavramını temel alındığı için morfizmleri düzgün sürekli dönüşümler olan **SUConv**, (objeleri yarı düzgün yakınsak uzaylar), **SULim** (objeleri yarı düzgün limit uzaylar), **ULim** (objeleri düzgün limit uzaylar), **PUConv** (objeleri pre-düzgün yakınsak uzaylar), **QUnif** (objeleri quase-düzgün uzaylar) topolojik kategorilerinde de $preT_2$, T_2 objeler ile farklı formları hem noktada hem de genelde incelenmeye açıktır. Literatür taramasında da bununla ilgili bir çalışma olmadığı bilinmektedir. Bunun dışında süzgeç kavramını barındırmayan topolojik kategorilerde de eksen dönüşümleri kullanılarak gerek noktada gerekse genelde $preT_2$ ile T_2 objeler ve bu objeler yardımıyla elde edilen bağlantılılık, (güçlü) kapalılık, kalıtsal bağlantısızlık, (güçlü) tam bağlantısızlık, kavramları ve özellikleri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

1. Cartan, H., 1937. Filters and ultrafilters, Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences, Paris, 205, 777-779.
2. Choquet, G., 1947. Convergences, Annales de l'université de Grenoble, 23, 55-112.
3. Kowalsky, H.J., 1954. Beiträge zur topologischen algebra, Mathematische Nachrichten, 11, 143-185.
4. Kent, D. C., 1964. Convergence functions and their related topologies, Fundamenta Mathematicae, 54, 125-133.
5. Schwarz, F. ve Hannover, T.U., 1978. Connections between convergence and nearness, Lecture Notes in Mathematics, 719, 345-425.
6. Baran, M., 1991. Separation properties, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 23, 333-341.
7. Baran, M., 2009. $PreT_2$ objects in topological categories, Applied Categorical Structures, 17, 591-602.
8. Baran M. ve Altindis, H., 1996. T_2 -objects in topological categories, Acta Mathematica Hungarica 71, 41-48.
9. Baran, M., 1998. T_3 and T_4 -objects in topological categories, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 29, 59-69.
10. Erciyes, A. ve Baran, T.M., 2020. Local T_3 constant filter convergence spaces, Gazi University Journal of Science, 33, 2, 446-454.
11. Erciyes, A. ve Baran, T.M., 2021. T_4 , Urysohn's Lemma, and Tietze Extension Theorem for constant filter convergence space, Turkish Journal of Mathematics, 45, 843-855.
12. Johnstone, P.T., 1977. Topos theory, L.M.S Mathematics Monograph: No. 10. Academic, New York.
13. Mielke, M.V., 1999. Hausdorff separations and decidability, Symposium on Categorical Topology, University of Cape Town, Rondebosch, 155-160.
14. Stine, J. ve Mielke, M.V., 2008. Pre-Hausdorff spaces, Publicationes Mathematicae-Debrecen, 73, 379-390.
15. Baran M., ve Abughalwa, H., 2022. Sober spaces. Turkish Journal of Mathematics, 46, 299-310.
16. Mielke, M.V., 1994. Separation axioms and geometric realizations. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 25, 711-722.

17. Adamek, J., Herrlich, H., ve Strecker, G.E., 1990. Abstract and concrete categories, A Willey-Interscience Publication, New York, USA.
18. Herrlich, H. ve Strecker G.E., 1973. Category theory, Allyn and Bacon inc. Boston, 101, 236-242.
19. Preuss, G., 1988. Theory of topological structures, An Approach to Topological Categories, Published by D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.
20. Nel, L.D., 1975. Initially structured categories and cartesian closedness, Canadian Journal of Mathematics, 27, 1361-1377.
21. Lowen-Colebunders, E., 1989. Function classes of cauchy continuous maps, New York USA, Marcel Dekker Inc.
22. Baran, M., 1992. Stacks and filters, Doga- Turkish Journal of Mathematics, 16, 95-108.
23. Özdemir, K., 2022. Lokal T_0 ve T_1 sabit süzgeç yakınsak uzaylar, Yüksek lisans tezi Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aksaray.
24. Baran, M., 1993. Separation properties in category of stack convergence spaces, Turkish Journal of Mathematics, 17, 55-62.
25. Baran, M., 1994. Separation properties in categories of constant convergence spaces, Turkish Journal of Mathematics, 18, 238-248.
26. Baran, M., 1996. T_2 objects in categories of filter and localfilter convergence spaces, Turkish Journal of Mathematics, 17, 159-168.
27. Erciyes, A. ve Baran, T.M., 2018. Local T_2 constant filter convergence spaces, Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 10, 88-947.
28. Erciyes, A. ve Baran, M., 2018. Local pre-Hausdorff constant filter convergence Spaces, Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 82-87.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Osman ÇELTİK

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2014-2018.

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2019-2022.

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Aksaray Aratol Ortaokulu, 2018-2019.
2. Aksaray Anadolu İmam Hatip Lisesi, 2019-2020.
3. Hatay Karasüleymanlı Uzunköy Ortaokulu, 2020-2021.
4. Aksaray Yeşiltepe Şehit Atilla Mutlu Çok Programlı Anadolu Lisesi, 2021-2022.

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Çeltik, O. ve Erciyes, A., 2021. Hereditary and Productive of Local Pre-Hausdorff Objects in **ConFCO**, 1st International Conference on Applied Engineering and Natural Sciences (ICAENS-2021), 01.11.2021-03.11.2021.