

LOKAL NİLPOTENT VE LOKAL ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLAR

Esengöl YILDIZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMETİK**

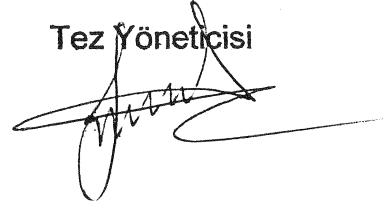
**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KASIM 2006
ANKARA**

Esengül YILDIZ tarafından hazırlanan LOKAL NİLPOTENT VE LOKAL ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLAR adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Aynur ARIKAN

Tez Yöneticisi

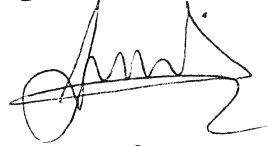


Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

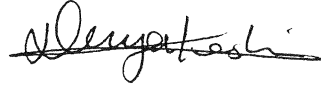
Başkan : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI



Üye : Yrd. Doç. Dr. Aynur ARIKAN



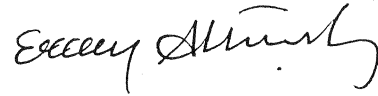
Üye : Doç. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ



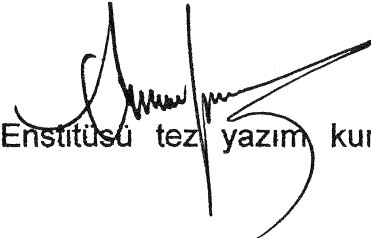
Üye : Doç. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN



Üye : Yrd. Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK



Tarih : 13/11/2006



Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Esengül YILDIZ

LOKAL NİLPOTENT VE LOKAL ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Esengül YILDIZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Kasım 2006

ÖZET

Bu tez çalışmasında genelleştirilmiş nilpotent ve çözülebilir gruplar incelenmiştir. 3. Bölümde lokal nilpotent gruplar incelenmiştir. 4. Bölümde; normalleyen şartını sağlayan gruplar, Baer gruplar ve Gruenberg gruplar incelenmiştir. 5. Bölümde Engel elamanları ve Engel grupları incelenmiştir. 6. Bölümde genel serilerle tanımlanan grupların sınıfı incelenmiştir. 7. Bölümde lokal çözülebilir gruplar incelenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.025
Anahtar Kelimeler : Lokal nilpotent gruplar, Lokal çözülebilir gruplar, Baer gruplar, Engel gruplar, Gruenberg gruplar.
Sayfa Adedi : 90
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Aynur ARIKAN

LOCALLY NILPOTENT AND LOCALLY SOLUBLE GROUPS
(M.Sc. Thesis)

Esengül YILDIZ

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
November 2006

ABSTRACT

In this thesis, we consider generalizations of nilpotent and soluble groups. In Chapter 3 we consider locally nilpotent groups. In chapter 4 we consider ;groups with normalizer condition, Baer groups and Gruenberg groups. In chapter 5 we consider Engel elements and Engel groups. In Chapter 6 we consider classes of groups defined by general series. In Chapter 7 we consider locally soluble groups .

Science Code	: 204.1.025
Key Words	: Locally nilpotent groups, Locally Soluble groups, Baer groups, Engel groups, Gruenberg groups,
Page Number	: 90
Adviser	: Assist. Prof. Dr. Aynur ARIKAN

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında değerli ilgi ve yardımlarını benden esirgemeyen, her konuda bilgi ve tecrübelerinden çok şey öğrendiğim Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Aynur Arıkan'a en derin saygılarımla teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, maddi ve manevi destekleri ile beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan eşim Bülent Yıldız'a, aileme ve İngilizce öğretmeni arkadaşım Yaşar Şenol Güven'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ	1
2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI	3
3. LOKAL NİLPOTENT GRUPLAR.....	18
3.1. Normal Nilpotent Altgrupların Çarpımları	20
3.2. Artan Altgruplar.....	22
3.3. Lokal Nilpotent Gruplarda Maksimal Altgruplar Ve Esas Faktörler	25
3.4. Sonluluk Şartına Bağlı Lokal Nilpotent Gruplar.....	27
3.5. Mc Lain'in Karakteristik Basit Grupları.....	30
4. LOKAL NİLPOTENT GRUPLARIN BAZI ÖZEL TİPLERİ.....	39
4.1. Normalleyen Şartı.....	39
4.2. Hipermerkez Gruplar.....	41
5. ENGEL ELEMANLARI VE ENGEL GRUPLARI.....	55
5.1. Engel Elemanları.....	55
5.2. Engel Grupları.....	58
5.3. Çözülebilir Gruplarda Engel Yapısı.....	59
5.4. 2-Engel Grupları.....	62

Sayfa

5.5. Maksimal Şartlı Gruplarda Engel Yapısı.....	66
6. GENEL SERİLERLE TANIMLI GRUPLARIN SINIFI.....	73
6.1. Kompozisyon Serileri.....	74
6.2. Merkez Serisi Olan Gruplar.....	76
6.3. Serisel Altgruplar.....	77
6.4. Genel Çözülebilir Gruplar	78
7. LOKAL ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLAR.....	82
7.1. Normal Altgruplar Üzerinde Maksimal Şartını Sağlayan Lokal Çözülebilir Gruplar.....	83
KAYNAKLAR.....	89
ÖZGEÇMİŞ.....	90

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 4.1. Grup sınıflarının diyagramı.....	54

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$[x,y]$	x ve y nin komutatörü
$[X_1, X_2]$	$\langle [x_1, x_2] : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$
G'	$[G, G]$
$G^{(n)}$	$[G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$
$H \triangleleft G$	H , G nin normal altgrubudur.
$H \triangleleft\triangleleft G$	H , G nin altnormal altgrubudur.
G / H	G nin H ile bölüm grubu
$s (G:H)$	H nın G içindeki altnormallik indeksi
$N_G (H)$	H nın G içindeki normalleyeni
$C_G (H)$	H nın G içindeki merkezleyeni
$Aut (G)$	G nin otomorfizmaları grubu
$H \cong K$	H ile K izomorftur
$o(g)$	g nin mertebesi
C_{p^∞}	quasi-devirli grup
$B(G)$	G nin Baer radikali
$\langle x \rangle$	x tarafından üretilen devirli grup
$\langle H, K \rangle$	H ve K tarafından üretilen grup
K^G	$\langle g^{-1}kg : g \in G, k \in K \rangle$
$Fit (G)$	G nin Fitting altgrubu
$Z(G)$	G grubunun merkezi
$Z_\alpha (G)$	G grubunun α merkezi
$\gamma_i (G)$	$\gamma_1(G) = G, \gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G]$
G^m	$\langle g^m : g \in G \rangle$

Simgeler	Açıklama
$ G:H $	H'nin G içindeki indeksi
$H \text{ char } G$	H, G'nin bir karakteristik alt grubudur.
$\text{Frat } G$	G'nin Frattini alt grubu

1.GİRİŞ

$\mathcal{P}$ grupların bir özelliği olsun. G bir grup olmak üzere G nin her sonlu alt kümesi bir $\mathcal{P}$ altgrubu tarafından içeriliyorsa, G ye bir lokal $\mathcal{P}$ - grubu denir. Eğer G nin her altgrubu $\mathcal{P}$ özelliğine sahipse, o zaman bu tanım G nin her sonlu üreteçli altgrubunun $\mathcal{P}$ grubu olmasıyla eşdeğerdir.

Burada göz önüne alacağımız, lokal nilpotent gruplar nilpotent grupların bir genellemesidir. Bir lokal nilpotent grubun görüntüsünün ve altgruplarının lokal nilpotent olduğu kolayca görülür.

Lokal nilpotent gruplar oluşturmaın diğeri bir yolu, nilpotent grupların bir ailesinin direkt çarpımını almaktır. Eğer direkt faktörlerin nilpotentlik sınıfları sınırlı değil ise , meydana gelen grup bir nilpotent olmayan lokal nilpotent grup olacaktır.

Her altgrubu altnormal olan grupların sınıfı hakkında çok az şey biliniyor. Böyle gruplara Baer gruplar denir. Baer gruplar normalleyen şartını sağlar. Dolayısıyla teorem 4.3 den dolayı lokal nilpotenttir. Bu konuda Roseblade'nin dikkate değer teoremi: "Eğer bir G grubunun her alt grubu altnormal ve altnormallik uzunluğu bir doğal sayı ile sınırlı ise bu grup nilpotenttir." şeklindedir [3].

Daha sonra Heineken ve Mohammed her altgrubu altnormal olan, nilpotent olmayan grup örneği inşa etmiştir [4]. Böylece Roseblade'nin teoreminin karşıtı doğru değildir. Sonunda Möhres tarafından eğer bir grubun her altgrubu altnormalse, bu grubun çözülebilir olduğu gösterildi.

Engel teoreminin başlıca amacı $L(G)$, $\bar{L}(G)$, $R(G)$, $\bar{R}(G)$ altgruplarının sırasıyla Hirsch-Plotkin radikal, Baer radikal, hipermerkez ve w-merkez ile

akışmasını garanti eden şartları bulmaktır. Bu eşitliğin daima doğru olmayacağı Golod'un bir sonlu reteęli sonsuz p -grup G nin (G yleki $G = L(G) = R(G)$) rneęi tarafından gösterilmiştir [2]. Bu grup kendi Hirsch-Plotkin radikaline eşit değildir. Aksi taktirde sonlu olur.

2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI

2.1. Tanım

G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Her $g \in G$ için $g^{-1}ng \in N$ ise o zaman N ye G nin bir normal altgrubu denir ve $N \triangleleft G$ şeklinde gösterilir.

2.2. Tanım

G bir grup ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ G nin elemanları olsun.

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2 = x_1^{-1}x_1^{x_2}$$

elemanına x_1 ile x_2 nin komütatörü denir. Genel olarak $n \geq 2$ ağırlıklı bir basit komütatör, indüksiyon yardımıyla

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n]$$

şeklinde tanımlanır. Buna ağırlığı n olan bir basit komütatör denir. Burada $[x_1] = x_1$ olarak kabul edilir.

$x, y \in G$ için $[x, y, \dots, y]$ komütatörü $[x, {}_ny]$ ile gösterilir. $n = 0$ için $[x, {}_0y] = x$

$$\leftarrow n \rightarrow$$

olarak tanımlanır.

$X_1, X_2, \dots$ bir G grubunun boştan farklı alt kümeleri olsun. X_1 ve X_2 nin komütatör alt grubu

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$$

olarak tanımlanır.

Burada $X_1 = X_2 = G$ ise $[G, G]$ komütatör grubuna G nin komütatör alt grubu denir ve G' ile gösterilir. Daha genel olarak $n \geq 2$ için indüksiyon yardımıyla

$$[X_1, \dots, X_n] = [[X_1, \dots, X_{n-1}], X_n]$$

olarak tanımlanır. Buna $X_1, X_2, \dots, X_n$ nin komütatör grubu denir.

2.3. Tanım

G bir grup olsun. Eğer, $1 = G_0, \dots, G_n = G$ G nin altgruplarının bir dizisi ve $G_i \triangleleft G_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) olmak üzere $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ ise bu diziye G nin bir sonlu serisi denir. G_{i+1}/G_i bölüm gruplarına serinin faktörleri denir ve G_i gruplarına serinin terimleri denir. Eğer bütün G_i ler farklı ise n negatif olmayan tamsayısına serinin uzunluğu denir.

$T = \{H_\alpha : \alpha \leq \beta\}$ bir β ordinaline eşit veya küçük ordinallerle indekslenen G nin altgruplarının bir kümesi olsun. Eğer T kümesi

(a) $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1} \leq H_{\alpha_2}$

(b) $H_0 = 1$ ve $H_\beta = G$

(c) $H_\alpha \triangleleft H_{\alpha+1}$

(d) Eğer λ limit ordinal ise $H_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} H_\alpha$ dır.

şartlarını sağlıyorsa T ye G nin bir artan serisi denir ve

$$1 = H_0 \triangleleft H_1 \dots H_\beta = G$$

şeklinde gösterilir.

Eğer T kümesi

$$(a') \alpha_1 \leq \alpha_2 \text{ ise } H_{\alpha_1} \geq H_{\alpha_2}$$

$$(b') H_0 = G \text{ ve } H_\beta = 1$$

$$(c') H_{\alpha+1} \triangleleft H_\alpha$$

$$(d') \text{ Eğer } \lambda \text{ limit ordinal ise } H_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H_\alpha \text{ dir.}$$

şartlarını sağlıyorsa T ye G nin bir azalan serisi denir ve

$$1 = H_\beta \dots \triangleleft H_2 \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$$

şeklinde gösterilir.

2.4. Tanım

G bir grup olsun. $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ G nin bir serisi olsun. Eğer G_{i+1}/G_i abeliyan ise G ye çözülebilir grup denir. G nin bu şekildeki serilerinin en küçük uzunluğuna G nin komütatör uzunluğu denir.

2.5. Tanım

G bir grup, H G nin bir alt grubu olsun. Eğer her $\alpha \in \text{End}G$ için $H^\alpha \leq H$ ise H ya G nin bir fully-invariant altgrubu, eğer her $\alpha \in \text{Aut}G$ için $H^\alpha \leq H$ ise H ya G nin karakteristik altgrubu denir.

2.6. Tanım

G bir grup olsun.

$$Z(G) = \{ z \in G : \text{her } g \in G \text{ için } gz = zg \}$$

kümesine G nin merkezi denir ve aynı zamanda $Z(G)$, G nin karakteristik altgrubudur.

2.7. Tanım

G bir grup olsun. G nin artan bir

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_\beta = G$$

serisi için $G_\alpha \triangleleft G$ ($\alpha \leq \beta$) ve her $\alpha < \beta$ için

$$G_{\alpha+1}/G_\alpha \leq Z(G/G_\alpha)$$

oluyorsa bu seriye artan merkez seri denir. Bir artan merkez seriye sahip olan gruba hipermerkez grup denir. Eğer G nin bir sonlu merkez serisi varsa G ye bir nilpotent grup denir. Bu durumda G nin merkez serilerinin uzunluklarının en küçüğüne G nin nilpotentlik sınıfı denir.

2.8. Tanım

G bir grup, $G^{(0)} = G$ olsun. Her $i > 1$ için $G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$ şeklinde tanımlansın. O zaman

$$\dots \leq G^{(2)} \leq G^{(1)} \leq G$$

dir. Buna G nin komütatör (derived) serisi denir. $G^{(1)} = G'$ ile gösterilir. G bir çözülebilir grup ise bir $n \geq 0$ için $G^{(n)} = 1$ dir. Bu şekildeki en küçük $n \geq 0$ tamsayısı G nin komütatör (derived) uzunluğuna eşittir.

2.9. Tanım

G bir grup $Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$ olsun. Eğer α limit ordinal ise

$$Z_\alpha(G) = \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta(G)$$

ve α limit ordinal değil ise

$$Z_\alpha(G)/Z_{\alpha-1}(G) = Z(G/Z_{\alpha-1}(G))$$

şeklinde tanımlansın. G nin kardinali aşılamayacağından $Z_\lambda(G) = Z_{\lambda+1} = \dots$ olacak şekilde bir λ ordinali vardır. Bu terminal gruba G nin hipermerkezi denir.

$$1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots$$

ye G nin genelleştirilmiş yukarı merkez serisi denir.

Eğer $Z_\lambda(G) = G$ ise G bir hipermerkez gruptur. Eğer bir n doğal sayısı için $Z_n(G) = G$ ise G nilpotent gruptur. Bu şekildeki n tamsayılarının en küçüğü G nin nilpotentlik sınıfına eşittir.

2.10. Tanım

G bir grup, $\gamma_1(G) = G$ olsun. Eğer α limit ordinal ise,

$$\gamma_\alpha(G) = \bigcap_{\beta < \alpha} \gamma_\beta(G)$$

ve α limit ordinal değil ise,

$$\gamma_{\alpha}(G) = [\gamma_{\alpha-1}(G), G]$$

şeklinde tanımlansın.

$$\dots \leq \gamma_2(G) \leq \gamma_1(G) \leq G$$

ye G nin genelleştirilmiş aşağı merkez serisi denir. Eğer bir n tamsayısı için $\gamma_{n+1}(G) = 1$ ise G nilpotenttir. Bu şekildeki doğal sayıların en küçüğü n ise G nin nilpotentlik sınıfı n dir.

2.11. Tanım

G bir grup olsun. G nin her sonlu üreteçli altgrubu nilpotent ise, G ye lokal nilpotent grup denir.

2.12. Tanım

G bir grup ve p bir asal sayı olsun. Her $g \in G$ için $g^{p^n} = 1$ olacak şekilde bir $n \geq 0$ tamsayı varsa, başka bir deyişle G nin her elemanının mertebesi p nin bir kuvveti ise o zaman G ye bir p -grubu denir.

2.13. Tanım

$G = \langle c_i : c_1^p = 1, c_{i+1}^p = c_i, i = 1, 2, 3, \dots \rangle$ şeklinde tanımlı G grubuna lokal devirli p -grubu veya prüfer p -grubu veya C_{p^∞} tipinde bir grup denir. C_{p^∞} grup her öz altgrubu sonlu devirli grup olan sonsuz bir p -grubudur.

2.14. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G sonlu sayıda C_{p^∞} tipindeki grupların direkt

çarpımının sonlu genişlemesi ise G ye bir Černikov grup denir.

2.15. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G grubunun her elemanının mertebesi sonlu ise o zaman G ye torsiyon (periyodik) grup denir. Eğer G grubunun birimden başka hiçbir elemanının mertebesi sonlu değilse o zaman G ye torsiysuz grup denir.

2.16. Tanım

G bir grup ve H , G nin bir altgrubu olsun. Eğer G nin

$$H = H_r \triangleleft H_{r-1} \triangleleft \dots \triangleleft H_0 = G$$

olacak şekilde $H_0, H_1, \dots, H_r$ alt grupları varsa H , G de altnormaldir denir. Burada r sonlu ve $i = 0, 1, \dots, r-1$ için $H_{i+1} \triangleleft H_i$ dir. $H \triangleleft^r G$ veya $H \triangleleft\triangleleft G$ veya $H \text{sn} G$ ile gösterilir. $H_r = H$ olacak şekildeki en küçük $r \geq 0$ tamsayısına H nin G içindeki altnormallik indeksi denir ve $s(G : H)$ ile gösterilir.

2.1. Teorem [1]

G bir nilpotent grup olsun. O zaman G de sonlu mertebeli elemanların kümesi T bir fully-invariant altgrubudur. Öyle ki G/T torsiysuzdur ve T_p nin G nin tek maksimum p - altgrubu olmak üzere $T = D_p T_p$ dir.

2.2. Teorem (Fitting's teorem) [1]

M ve N , bir G grubunun normal nilpotent grupları olsunlar. Eğer M ve N nin

nilpotentlik sınıfları sırasıyla c ve d ise, o zaman $L = MN$ nin nilpotentlik sınıfı en fazla $c + d$ dir.

2.17. Tanım

Kısmi sıralı bir kümenin boştan farklı her altkümesinin en az bir maksimal elemanı var ise, kısmi sıralı kümeye maksimal şartını sağlar denir.

2.3. Teorem [1]

Eğer G bir nilpotent grup ve G_{ab} sonlu üreteçli ise o zaman G , maksimal şartı sağlar.

2.4. Teorem [1]

G bir grup ve $x, y, z \in G$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

$$(i) [x, y] = [y, x]^{-1}$$

$$(ii) [xy, z] = [x, z]^y [y, z] \text{ ve } [x, yz] = [x, z] [x, y]^z$$

$$(iii) [x, y^{-1}] = \left([x, y]^{y^{-1}} \right)^{-1} \text{ ve } [x^{-1}, y] = \left([x, y]^{x^{-1}} \right)^{-1}$$

$$(iv) [x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1 \text{ (Hall-Witt Eşitliği)}$$

2.5. Teorem [1]

X bir grubun alt kümesi ve K da altgrubu olsun. O zaman

$$(i) X^K = \langle X, [X, K] \rangle$$

$$(ii) [X, K]^K = [X, K]$$

$$(iii) K = \langle Y \rangle \text{ ise } [X, K] = [X, Y]^K \text{ dır.}$$

2.6. Teorem [1]

G bir grup. H ve K G nin altgrupları olsunlar. Eğer $H = \langle X \rangle$ ve $K = \langle Y \rangle$ ise o zaman $[H, K] = [X, Y]^{HK}$ dir.

2.7. Teorem [1]

G bir sonlu grup olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir.

- (i) G nilpotenttir;
- (ii) G nin her altgrubu altnormaldir;
- (iii) G normalleyen şartını sağlar;
- (iv) G nin her maksimal altgrubu normaldir;
- (v) G , Sylow altgruplarının direk çarpımıdır.

2.8. Teorem [1]

G bir Ω grup ve H da G nin Ω -altgrubu olsun. $x \notin H$ ve $x \in G$ olsun. O zaman $H \leq K$ ve $x \notin K$ olacak şekilde G nin bir maksimal K Ω -altgrubu vardır.

2.9. Teorem [1]

Bir Ω grubun $\max - \Omega$ yı sağlaması için gerek ve yeter koşul her Ω altgrubun bir $\Omega -$ grup olarak sonlu üreteçli olabilmesidir.

2.10. Teorem [1]

Herhangi bir G grubunda Frattini altgrup, G nin üreteci olmayan elemanlarının kümesine eşittir.

2.18. Tanım

G bir grup olsun. G nin bütün maksimal altgruplarının kesişimine, G nin Frattini altgrubu denir. G nin maksimal altgrubu yoksa Frattini altgrup G ye eşit alınır. Açık olarak bu altgrup G nin karakteristik altgrubudur ve $\text{Frat } G$ biçiminde gösterilir.

2.11 Teorem [1]

G bir sonlu grup olsun. G nin nilpotent olması için gerek ve yeter şart $G' \leq \text{Frat } G$ olmasıdır.

2.19. Tanım

G bir grup, H ve K G nin altgrupları, $K \triangleleft G$ ve $K \leq H$ olsun. Eğer H/K , G/K nin bir minimal normal altgrubu ise H/K ya G nin bir esas faktörü denir.

2.12. Teorem [1]

G bir lokal nilpotent grup olsun. G grubunun esas faktörü merkezedir.

2.20. Tanım

G bir grup olsun. G nin bütün elemanları sonlu mertebeli ve sınırlı ise, o zaman G grubuna sonlu exponentlidir denir. Her $x \in G$ için öyle bir $n \geq 1$ tamsayısı vardır ki $x^n = 1$ dir.

2.13. Teorem [1]

G bir grup olsun. G normal alt gruplarda minimal şartı sağlasın. O zaman G

sonlu indeksli bir tek minimal altgruba sahiptir. Bu altgrup G de karakteristiktir.

2.14. Teorem [1]

G bir grup olsun. Eğer G grubu m -n yi sağlar ve H G nin sonlu indeksli bir altgrubu ise, o zaman H m -n yi sağlar.

2.15. Teorem [1]

G bir abeliyan grup olsun. G grubunun minimal şartı sağlaması için gerek ve yeter koşul G nin, sonlu sayıda quasidevirlı grupların ve mertebesi bir asal sayının kuvveti olan devirlı grupların bir direkt çarpımı olarak yazılmasıdır.

2.21. Tanım

G bir grup olsun. G nin bir tek maksimal normal lokal nilpotent altgrubu vardır. Bu altgruba G nin Hirsch-Plotkin radikali denir.

2.22. Tanım

G bir grup olsun. G nin bütün normal nilpotent altgruplarının ürettiği gruba G nin Fitting altgrubu denir ve $\text{Fit}(G)$ ile gösterilir.

2.16. Teorem [1]

G bir grup, i ve j pozitif tamsayılar olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

$$(i) [\gamma_i G, \gamma_j G] \leq \gamma_{i+j} G$$

$$(ii) \gamma_i (\gamma_j G) \leq \gamma_{ij} G$$

$$(iii) \text{Eğer } j \geq i \text{ ise } [\gamma_i G, Z_j G] \leq Z_{j-i} G$$

$$(iv) Z_i(G/Z_j G) = Z_{i+j} G/Z_j G$$

2.17. Teorem [1]

Eğer G bir nilpotent grup ve $1 \neq N \triangleleft G$ ise, o zaman $N \cap ZG \neq 1$ dir.

2.1. Zorn Lemma

X boş olmayan kısmi sıralı bir küme olsun. X in her zinciri bir üst sınıra sahip ise, o zaman X in bir maksimal elemanı vardır.

2.18. Teorem [1]

Nilpotent bir grubun, bir minimal normal altgrubu merkezdedir.

2.23. Tanım

G bir grup olsun. G nin bütün abeliyan altnormal altgruplarının ürettiği altgruba G nin Baer radikali denir ve $B(G)$ ile gösterilir. $G = B(G)$ ise G ye bir Baer grup denir.

2.19. Teorem [1]

G bir abeliyan grup olsun. G nin injektif olması için gerek ve yeter şart, G nin bölünebilir olmasıdır.

2.20. Teorem [1]

G bir nilpotent olmayan bir grup olsun. G grubunun her maksimal altgrubu nilpotent olsun. O zaman,

- (i) G çözülebilirdir.
- (ii) p ve q birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere $|G| = p^m q^n$ dir.
- (iii) Bir tek P , Sylow p -altgrubu vardır ve bir tek Q Sylow q -altgrubu devirlidir.
 $G = QP$ ve $P \triangleleft G$ dir.

2.21. Teorem [1]

G bir grup olsun. Eğer $N \triangleleft G$ ve N ile G/N nilpotent ise, o zaman G nilpotenttir.

2.22. Teorem [1]

F herhangi bir cisim, $G \leq GL(n, F)$ nin bir altgrubu olsun. Eğer G nin her elemanı unipotent ise, $G \leq U(n, F)$ nin bir altgrubuna eşleniktir. $U(n, F)$ bütün üst üçgensel matrislerin grubudur.

2.23. Teorem (Černikov) [1]

G bir çözülebilir grup olsun. G grubunun minimal şartı sağlaması için gerek ve yeter şart, sonlu sayıda quasidevirli grupların bir direkt çarpımının bir sonlu genişlemesi olmasıdır.

2.24. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G sonlu sayıda quasidevirli grupların bir direkt çarpımının bir sonlu genişlemesi ise G ye Černikov grup denir.

2.24. Teorem [1]

G grubu normal altgruplarda minimal şartı sağlasın. O zaman G , sonlu indeksin bir tek minimal altgrubuna sahiptir. Bu grup G de karakteristiktir.

2.25. Teorem [1]

G bir çözülebilir grup ve F , G nin Fitting altgrubu olsun.

(i) Eğer $1 \neq N \triangleleft G$ ise, o zaman N , G nin bir trivial olmayan normal abeliyan altgrubunu içerir ve $N \cap F \neq 1$ dir.

(ii) $C_G(F) = ZF$ dir.

2.26. Teorem (Jordan-Hölder) [1]

S bir Ω -kompozisyon serisi ve T bir G Ω -grubun herhangi bir Ω -serisi olsun. O zaman T bir kompozisyon serisi olan ve S ile Ω -izomorfik olan incelmışine sahiptir.

2.27. Teorem [1]

Normal altgruplarda maksimal şartı sağlayan bir çözülebilir G grubu sonlu üreteçlidir.

2.2. Lemma (D.H. Mc Lain) [7]

G bir grup, $X \leq G$ ve $N \triangleleft G$ olmak üzere $G = XN'$ olsun. O zaman i bir pozitif tamsayı olmak üzere $G = X\gamma_i(N)$ dir.

2.25. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G grubu bir normal devirli seriye sahipse, G ye süperçözülebilir grup denir. Yani faktörleri devirli olan normal altgrupların bir serisine sahipse. Aşıkarak süperçözülebilir gruplar çözülebilirdir.

2.28. Teorem [1]

Eğer G bir süperçözülebilir grup ise o zaman $\text{Fit}G$ nilpotenttir ve $G/\text{Fit}G$ bir sonlu abeliyan gruptur. Özel olarak G' nilpotenttir.

3. LOKAL NİLPOTENT GRUPLAR

$\mathcal{P}$ grupların bir özelliği olsun. G bir grup olmak üzere G nin her sonlu alt kümesi bir $\mathcal{P}$ altgrubu tarafından içeriliyorsa, G ye bir lokal $\mathcal{P}$ -grubu denir.

Eğer G nin her altgrubu $\mathcal{P}$ özelliğine sahipse, o zaman bu tanım G nin her sonlu üreteçli altgrubunun. $\mathcal{P}$ grubu olmasıyla eşdeğerdir.

Burada göz önüne alacağımız, lokal nilpotent gruplar nilpotent grupların bir genellemesidir. Bir lokal nilpotent grubun görüntüsünün ve altgruplarının lokal nilpotent olduğu kolayca görülür.

3.1. Teorem

G bir lokal nilpotent grup ve T , G nin mertebeleri sonlu olan elemanlarının kümesi olsun. O zaman T (Bu gruba G nin torsiyon altgrubu denir.) G nin fully-invariant altgrubudur öyle ki G/T torsiyonsuzdur ve T p-gruplarının bir direkt çarpımıdır [2] .

İspat

Önce T nin G nin bir altgrubu olduğunu gösterelim. T nin boştan farklı olduğu aşıkardır. x ve y T nin elamanları olsun. O zaman x ve y sonlu mertebeye sahiptir. $\langle x, y \rangle = K$ olsun. G lokal nilpotent olduğundan K nilpotenttir. T_1 , K nin mertebesi sonlu olan elemanların kümesi olsun. Teorem 2.1 den dolayı T_1 , K nin bir alt grubudur. Böylece $xy^{-1} \in T_1$ dir. Böylece xy^{-1} sonlu ve böylece $xy^{-1} \in T$ dir. T nin fully invariant ve G/T nin torsiyonsuz olduğu aşıkardır.

Şimdi T nin p-altgruplarının direkt çarpımı olduğunu gösterelim. Π , T nin elemanlarının mertebesinin bütün asal bölenlerinin kümesi olsun. $p \in \Pi$

olmak üzere T_p T nin bütün p -elamanlarıyla üretilen altgrup olsun. T_p nin bir p -grubu olduğunu gösterelim.

$1 \neq \chi \in T_p$ olsun. χ_i ler p -elemanlar olmak üzere $x = \chi_1 \cdot \chi_2 \dots \chi_n$ şeklinde yazılabilir.

$$H = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$

olsun. O zaman H nilpotenttir. H p elemanlar tarafından üretilen nilpotent grup olduğundan H bir p -gruptur. Böylece χ bir p elemanı ve dolayısıyla T_p bir p -gruptur. Ayrıca T_p , T nin normal alt grubudur.

Şimdi $1 \neq \chi \in T$ ve $o(\chi) = m$ olsun. O zaman $p_i \in \Pi$ birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere

$$m = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}$$

şeklinde yazılabilir. $m_i = \frac{m}{p_i^{e_i}}$ olmak üzere $(m_1, \dots, m_n) = 1$ dir. Böylece

$m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2 + \dots + m_n \ell_n = 1$ olacak şekilde $\ell_i \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$\chi = \chi^1 = (\chi^{m_1})^{\ell_1} (\chi^{m_2})^{\ell_2} \dots (\chi^{m_n})^{\ell_n} \in T_{p_1} T_{p_2} \dots T_{p_n}$$

olduğundan $T = \prod_{p \in \Pi} T_p$ dir. $T_p \cap \prod_{q \neq p} T_q = \langle 1 \rangle$ olduğu açıktır. Bundan

dolayı $T = \prod_{p \in \Pi} T_p$ dir.

Lokal nilpotent gruplar oluşturma'nın diğer bir yolu, nilpotent grupların bir ailesinin direk çarpımını almaktır. Eğer direk faktörlerin nilpotentlik sınıfları

sınırlı değil ise, meydana gelen grup bir nilpotent olmayan lokal nilpotent grup olacaktır.

3.1. Normal Lokal Nilpotent Altgrupların Çarpımları

İki normal nilpotent altgrubun çarpımı nilpotenttir. Bu Fitting's teoremdir. (Teorem 2.2). Benzer durum lokal nilpotent gruplar için geçerlidir ve büyük önem taşır.

3.2. Teorem

H ve K bir grubun normal lokal nilpotent altgrupları olsunlar. O zaman $J = HK$ çarpımı lokal nilpotenttir.

İspat

$h_i \in H$ ve $k_i \in K$ olmak üzere $\langle h_1k_1, \dots, h_mk_m \rangle$ J nin bir sonlu üretilmiş altgrubu olsun.

$X = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$, $Y = \langle k_1, \dots, k_m \rangle$ ve $Z = \langle X, Y \rangle$ olsun. $J \leq Z$ olduğundan, Z nin nilpotent olduğunu göstermek yeterlidir.

$i, j = 1, \dots, m$ olmak üzere, C tüm $[h_i, k_j]$ komütatörlerin kümesini gösterebilir.

O zaman H ve K normal olduğundan $C \subseteq H \cap K$ ve $C^x \leq H \cap K$ dir. C sonlu bir küme, X de sonlu üreteçli olduğundan, $\langle X, C \rangle$ H nin sonlu üreteçli bir alt grubudur. H lokal nilpotent olduğundan $\langle X, C \rangle$ nilpotenttir. Sonlu üreteçli nilpotent gruplar Teorem 2.3 den dolayı maksimal şartı sağlar Normal kapanış C^x sonlu üreteçli olduğundan nilpotenttir. Bundan başka $C^x \leq H \cap K$ olduğundan $C^x \leq K, Y \leq K$ olduğundan $\langle C^x, Y \rangle \leq K$ dir. $\langle C^x, Y \rangle$ sonlu üreteçli ve K lokal nilpotent olduğundan $\langle C^x, Y \rangle$ nilpotenttir. Maksimal

şartı sağlar. Teorem 2.6 dan dolayı $[X, Y] = C^{XY}$ dir. Teorem 2.5 den dolayı $\langle Y, C^X \rangle = \langle Y, C^{XY} \rangle = \langle Y, [X, Y] \rangle = Y^X$ dir. Böylece Y^X nilpotenttir. Benzer şekilde X^Y nilpotenttir. Teorem 2.2 den dolayı $Z = \langle X, Y \rangle = X^Y Y^X$ nilpotenttir.

3.3. Teorem

G bir grup olsun. G nin bütün normal lokal nilpotent altgruplarını içeren, bir tek maksimal lokal nilpotent altgrup vardır. Bu grup Hirsch-Plotkin radikal olarak adlandırılır.

İspat

$S = \{ H : H \triangleleft G, H \text{ lokal nilpotent} \}$ olsun.

$S \neq \emptyset$ olduğu açık. $\{H_i\}_{i \in I}$ S nin bir zinciri ve $H = \bigcup_{i \in I} H_i$ olsun. $H \triangleleft G$ dir. H nin lokal nilpotent olduğunu gösterelim. $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ H nin sonlu üreteçli bir altgrubu olsun. O zaman öyle bir $j \in I$ vardır ki $x_1, x_2, \dots, x_n \in H_j$ dir. H_j lokal nilpotent olduğundan ve $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ H_j nin sonlu üreteçli bir altgrubu olduğundan $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ nilpotenttir. Bundan dolayı H lokal nilpotenttir. Böylece $H \in S$ dir. H bu zincir için bir üst sınır olduğundan Zorn lemma (2.1) dan dolayı, S nin bir maksimal elemanı vardır.

Kabul edelim ki H ve K , G nin iki maksimal normal lokal nilpotent altgrupları olsun. O zaman Teorem 3.2. den dolayı HK lokal nilpotent ve $HK \triangleleft G$ dir. Ayrıca $H, K \leq HK$ dir. H maksimal normal lokal nilpotent olduğundan $H = HK$ dir. Böylece $K \leq H$ dir. O zaman $H = K$ dir.

FitG nin G nin Hirsch-plotkin radikali tarafından içerildiği aşıkardır. Eğer G sonlu ise bu iki grup birbirine eşittir.

3.2. Artan Altgruplar

G bir grup ve $T = \{H_\alpha \mid \alpha \leq \beta\}$ bir β ordinaline eşit veya küçük ordinallerle indekslenen G nin altgruplarının bir kümesi olsun. Eğer T kümesi,

- (a) $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ise $H_{\alpha_1} \leq H_{\alpha_2}$
- (b) $H_0 = 1$ ve $H_\beta = G$
- (c) $H_\alpha \triangleleft H_{\alpha+1}$
- (d) Eğer α limit ordinal ise $H_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} H_\alpha$ dır.

şartlarını sağlıyorsa T ye G nin bir artan serisi denir ve

$$1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots H_\beta = G$$

şeklinde gösterilir. H_α ya serinin terimleri, $H_{\alpha+1}/H_\alpha$ ya serinin faktörleri, β ya serinin uzunluk veya ordinal tipi denir. β sonlu ise, artan seri bir sonlu uzunlukta seri halini alır. Bazen, artan seri bir K altgrubunda başlar. Bu durumda $H_0 = K$ olur.

3.1. Örnek

$A \cong C_{p^\infty}$, $X = \langle x \rangle$ ve $o(x) = 2$ olmak üzere $a^x = a^{-1}$ olsun. $G = X \rtimes A$ yarıdirek çarpımını göz önüne alalım. G lokal dihedral 2-grubudur. A_i , A nın mertebesi 2^i olan tek (devirli) altgrubu olsun. $a \in A$ olmak üzere

$a^x = a^{-1}$ iken, A 2^∞ tiptir. A_i , 2^i mertebesi ile, A nın tek (devirli) altgrubu olsun. O zaman

$$[a, x] = a^{-1}x^{-1}ax = a^{-1}a^{-1} = a^{-2}$$

olduğundan $[A_{i+1}, X] = A_{i+1}^2 = A_i$. Bu nedenle $XA_i \triangleleft XA_{i+1}$ dır ve bir

$$X \triangleleft XA_1 \triangleleft XA_2 \triangleleft \dots \triangleleft XA = G$$

artan serisi vardır. Burada $\bigcup_{i < \omega} XA_i = XA$ dır. Bundan dolayı X , G de artandır. Diğer bir yandan

$$X^G = X^A = X[A, X] = XA = G$$

dir. Bu yüzden X , G de altnormal değildir.

Şimdi lokal nilpotent gruplara dönersek, Hirsch-Plotkin radikal, sadece normal lokal nilpotent altgruplar değil daha fazlasını içerir.

3.4. Teorem

G bir grup olmak üzere, G nin Hirsch-Plotkin radikali bütün artan lokal nilpotent altgrupları içerir.

İspat

H , G nin bir artan lokal nilpotent altgrubu olsun. O zaman,

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \dots H_\beta$$

olacak şekilde, G nin H_α artan serisi vardır. $\bar{H}_\alpha = H^{H_\alpha}$ olsun. O zaman,

$$H = \bar{H}_1 \triangleleft \bar{H}_2 \triangleleft \dots \bar{H}_\beta = H^G$$

bir artan seridir. Transfinite indüksiyon ile $\bar{H}_\alpha$ nın lokal nilpotent olduğunu gösterelim. Eğer $\alpha = 1$ ise $H = \bar{H}_1$ olur. H lokal nilpotent olduğundan $\bar{H}_1$ lokal nilpotenttir. $\alpha > 1$ olmak üzere kabul edelim ki $\bar{H}_\alpha$ lokal nilpotent olmayacak şekilde, α en küçük ordinal olsun. Eğer α limit ordinal ise $\bar{H}_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} H_\gamma$ şeklinde yazılabilir. Her $\gamma < \alpha$ için $\bar{H}_\gamma$ lokal nilpotent olduğundan, $\bar{H}_\alpha$ lokal nilpotenttir. Bu bir çelişkidir. Böylece α limit ordinal olamaz. Dolayısıyla $\alpha - 1$ vardır ve $\bar{H}_{\alpha-1}$ lokal nilpotenttir.

$$(\bar{H}_{\alpha-1})^{H_\alpha} = (H^{H_{\alpha-1}})^{H_\alpha} = H^{H_\alpha} = \bar{H}_\alpha$$

dır. O halde her $x \in H_\alpha$ için $\bar{H}_{\alpha-1}^x \triangleleft \bar{H}_\alpha^x = \bar{H}_\alpha$ dır. Böylece

$$\prod_{x \in H_\alpha} \bar{H}_{\alpha-1}^x = (\bar{H}_{\alpha-1})^{H_\alpha} = \bar{H}_\alpha$$

dır. Ayrıca $\bar{H}_{\alpha-1}^x$ lokal nilpotenttir. T_α , $\bar{H}_\alpha$ nın Hirsh-Plotkin radikali ise her $x \in \bar{H}_\alpha$ için $\bar{H}_{\alpha-1}^x \leq T_\alpha$ dır. Böylece $\bar{H}_\alpha \leq T_\alpha$ olduğundan $\bar{H}_\alpha = T_\alpha$ ve $\bar{H}_\alpha$ lokal nilpotenttir.

Bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır. Özel olarak H^G lokal nilpotenttir. Böylece H^G ve özel olarak H , G nin Hirsch-Plotkin radikali tarafından içerilir.

3.3. Lokal Nilpotent Gruplarda Maksimal Altgruplar Ve Esas Faktörler

Nilpotent grupların bilinen iki özelliğini hatırlayalım. Maksimal altgruplar normaldir ve esas faktörler merkezdedir (Teorem 2.7 ve Teorem 2.12). Şimdi bunların lokal nilpotent gruplar içinde sağlandığını görelim.

3.5. Teorem (Baer, McLain)

G bir lokal nilpotent grup ve M , G nin bir maksimal altgrubu olsun. O zaman $M \triangleleft G$ dir. Buna denk olarak $G' \leq \text{Frat } G$ dir.

İspat

Kabul edelim ki M , G de normal olmasın. O zaman $G' \leq M$ dir. Eğer $G' \leq M$ ise her $g \in G$, $m \in M$ için $g^{-1}m^{-1}gm = [g, m] \in G' \leq M$ dir. O halde $g^{-1}m^{-1}gm \in M$ ise $g^{-1}m^{-1}g \in Mm^{-1} = M$ dir. Bundan dolayı $(g^{-1}m^{-1}g)^{-1} \in M$ ve $g^{-1}mg \in M$ dir. Yani $M \triangleleft G$ olur. Bu bir çelişkidir. Böylece öyle $c \in G' \setminus M$ elemanı vardır ki M , G nin maksimal alt grubu olduğundan $G = \langle c, M \rangle$ dir. $c \in G'$ olduğundan $c \in \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle'$ olacak şekilde $g_i \in G$ elemanları vardır. $\langle c, M \rangle = G$ olduğundan, M nin öyle bir sonlu üreteçli F alt grubunu bulabiliriz ki her $g_i \in \langle c, F \rangle$ olur. $c \notin F$ olduğundan Teorem 2.8 den dolayı $F \leq N$ ve $c \notin N$ şartını sağlayan, maksimal olan bir N alt grubu vardır. Böylece N , $\langle c, F \rangle$ nin maksimal alt grubudur.

Kabul edelim ki $F < N < K \leq \langle c, F \rangle$ olacak şekilde K alt grubu olsun. O zaman $c \in K$ dir. Böylece $K = \langle c, F \rangle$ dir. Buradan N , nilpotent $\langle c, F \rangle = L$ grubun bir maksimal alt grubudur. Bu nedenle $N \triangleleft L$ ve L/N abeliyandır.

O zaman $L' \leq N$ ve $g_1, g_2, \dots, g_n \in L$ olduğundan $c \in \langle g_1, \dots, g_n \rangle' \leq L' \leq N$ Böylece $c \in N$ dir. Bu bir çelişkidir.

Sonlu gruplarda $G' \leq \text{Frat } G$ olma şartı nilpotentliği verir. Fakat sonsuz gruplarda bu şart daha zayıf bir şarttır. Çünkü sonsuz gruplarda maksimal altgrup olmayabilir ve $G = \text{Frat } G$ olabilir.

Örneğin $G = C_{p^\infty} \sim C_{q^\infty}$ ise $\text{Frat } G = G$ ve $G' \leq \text{Frat } G$ dir. Bununla birlikte $p \neq q$ ise G lokal nilpotent değildir. Böylece $G' \leq \text{Frat } G$ lokal nilpotent değildir.

3.6. Teorem (Mal'cev, McLain)

Bir lokal nilpotent G grubunun, bir esas faktörü merkezedir.

İspat

N , G nin minimal normal altgrubu olmak üzere $N \leq Z(G)$ olduğunu östermek yeterlidir. Kabul edelim ki $N \not\leq Z(G)$ olsun. O zaman $[a, g] \neq 1$ olacak şekilde $a \in N$, $g \in G$ vardır. $N \triangleleft G$ olduğundan $b = [a, g] = aga^{-1}g^{-1} \in N$ ve böylece $b^G \leq N^G = N$ dir. N G nin minimal normal altgrubu olduğundan $b^G = N$ dir. Ayrıca $a \in N$ olduğundan $a \in \langle b^{g_1}, \dots, b^{g_n} \rangle$ olacak şekilde $g_i \in G$ vardır. $H = \langle a, g, g_1, \dots, g_n \rangle$ olsun. H , G nin sonlu üreteçli altgrubu olduğundan nilpotenttir. $A = a^H$ olsun. O zaman $b = [a, g] \in [A, H]$ tır. Her $1 \leq i \leq n$ için $g_i \in H$ olduğundan $b^{g_i} \in [A, H]^{g_i} = [A^{g_i}, H^{g_i}]$ dir. $A = a^H$ olduğundan $A^{g_i} = (a^H)^{g_i} = a^H = A$ ve böylece $b^{g_i} \in [A^{g_i}, H^{g_i}] = [A, H]$ dir. Bundan dolayı $a \in [A, H]$ dir.

$$a^H = \langle a \rangle \langle \langle a \rangle, H \rangle \leq [A, H]$$

oldüğundan $a^H \leq [A, H]$ dir. Fakat $A \leq [A, H] \leq A$ olduğundan $A = [A, H]$ dir ve her $r \geq 1$ için

$$A = [A, H] = [[A, H], H] = [[[A, H], H], H] = \dots = [A, {}_r H].$$

dır. H nilpotent olduğundan $k \geq 1$ için $[A, {}_k H] = 1$ dir. Böylece $A = 1$ ve $a = 1$ dir. O zaman $b = [a, g] = 1$ dir. Bu bir çelişkidir. O halde $N \leq Z(G)$ dir.

3.4. Sonluluk Şartına Bağlı Lokal Nilpotent Gruplar

Her sonlu üreteçli lokal nilpotent grup nilpotenttir. Bazen bir sonluluk sınırlaması lokal nilpotent grup üzerine getirilirse, grup nilpotent olmaya zorlanır.

3.7. Teorem (McLain)

G normal altgrupları üzerinde maksimal şarta sahip (max-n) bir lokal nilpotent grup olsun. O zaman G sonlu üreteçli bir nilpotent gruptur.

İspat

G max-n yi sağladığından, G/G' de max-n yi sağlar. G/G' abeliyandır. Abeliyan grubun her altgrubu normaldir. G/G' max ı sağlar. Teorem 2.9 dan dolayı G/G' sonlu üreteçlidir. O zaman $G = XG'$ olacak şekilde sonlu üreteçli bir X altgrubu vardır. G lokal nilpotent ve X sonlu üreteçli olduğundan, X nilpotenttir. X in nilpotentlik sınıfı c olsun. Çizgiler mod $\gamma_{c+2}G$ ye göre bölüm gruplarını gösterebilirsin. O zaman $\bar{G} = \bar{X} \bar{G}'$ dir ve $\bar{G}$ nilpotent gruptur.

Teorem 2.11. den dolayı $G' \leq \text{Frat } G$ dir. O zaman $\bar{G} = \bar{X} \text{Frat } \bar{G}$ olur. Teorem 2.10. dan dolayı $\bar{G} = \bar{X}$ dir. Böylece $\bar{G}$ nilpotenttir. O zaman X in nilpotentlik sınıfı c olduğundan $\gamma_{c+1}(\bar{G}) = 1$ yani $\gamma_{c+1}(G/\gamma_{c+2}(G)) = 1$ dir. Bundan dolayı $\gamma_{c+1}(G) \leq \gamma_{c+2}(G)$ dir. Böylece $\gamma_{c+1}(G) = \gamma_{c+2}(G)$ dir. $\gamma_{c+1}(G)$ yi L ile

gösterelim. $L = \gamma_{c+2}(G)$ olduğundan $L = [L, G]$ olur. Eğer $L \neq 1$ ise, G max-n yi sağladığından $N < L$ şartına göre bir maksimal normal altgrup seçebiliriz. Fakat L/N , G/N de minimal normaldir. Bu yüzden Teorem 2.12 den dolayı L/N , G/N nin merkezindedir. Böylece $[L, G] \leq N < L$ dir. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $L = 1$ dir. Böylece $G = XL$ olduğundan $G = X$ ve G nilpotenttir.

Yukarıdaki teoremden lokal nilpotent gruplar için max ve max-n nin aynı özellik olduğu kolayca görülür. Gerçekten G max şartını sağlıyorsa max-n yide sağladığı açıktır. Eğer lokal nilpotent grup max-n yi sağlıyorsa yukarıdaki teoremden dolayı sonlu üreteçli nilpotent gruptur. O zaman Teorem 2.3 den dolayı max şartını sağlar.

3.8. Teorem

G bir lokal nilpotent grup olsun. G nin min-n şartını sağlaması için gerek yeter şart, G nin sonlu sayıda Černikov p-gruplarının direkt çarpımı olmasıdır.

İspat

Önce G min-n şartını sağlasın. Teorem 2.13 e göre G de sonlu indeksli bir tek minimal sonlu residual F altgrubu vardır. Teorem 2.14 den dolayı F , min-n şartını sağlar. Eğer F abeliyan ise, min şartını sağlar. Teorem 2.15 den dolayı, F sonlu ayıdaki C_{p^∞} gruplarının bir direkt çarpımıdır. Böylece G sonlu sayıdaki Černikov p-gruplarının bir direk çarpımıdır.

O halde F nin abeliyan olmadığını kabul edelim. F min-n yi sağladığından, F nin bir aşikar olmayan minimal normal F_1 altgrubu vardır. Teorem 3.6. dan dolayı $1 \neq F_1 \leq Z(F)$ olduğundan $Z(F) \neq 1$ dir. Benzer şekilde $Z(F/Z(F)) \neq \langle 1 \rangle$ olur. Teorem 2.16 (iv) dan dolayı

$$Z(F/Z(F)) = Z_2(F)/Z_1(F) \neq \langle 1 \rangle$$

dir. Bundan dolayı $Z_1(F) < Z_2(F)$ dir. $x \in Z_2(F)$ ve $y \in F$ olsun.

$$y^{-1}xyZ_1(F) = xZ_1(F)$$

dir. O zaman $y^{-1}xy = xz$ olacak şekilde $z \in Z_1(F)$ vardır. F min- n yi sağladığından $Z_1(F)$ ve $Z_2(F)/Z_1(F)$ min şartını sağlar. Böylece $Z_2(F)$ min şartını sağlar. O zaman x in mertebesi sonludur. $o(x) = n$ olsun. O zaman $x^n = 1$ ve

$$(y^{-1}xy)^n = (y^{-1}xy)(y^{-1}xy)\dots(y^{-1}xy) = y^{-1}x^ny = y^{-1}1y = 1$$

dir. Bundan dolayı $o(y^{-1}xy) < \infty$ ve $o(y^{-1}xy) = (xz) < \infty$ dur. O halde $o(z) < \infty$ dur. x i sabit tutup y yi değişken olarak alırsak, verilen her merteye için $Z_1(F)$ de, bu mertebeye eşit sonlu sayıda eleman vardır. Böylece x in F içindeki eşleniklerinin sayısı sonludur. Yani

$$|F : C_F(x)| < \infty$$

dır. O zaman

$$|G : C_F(x)| = |G : F| |F : C_F(x)| < \infty$$

dır. F , G nin sonlu indeksli bir tek minimal altgrubu olduğundan $C_F(x) = F$ dir.

O zaman $x \in Z_1(F)$ ise $Z_2(F) \leq Z_1(F)$ dir. Böylece $Z_2(F) = Z_1(F)$ dir. Fakat bu $Z_1(F) < Z_2(F)$ olmasıyla çelişir.

Karşıt olarak G sonlu sayıda Černikov p -gruplarının bir direkt çarpımı olsun. Her Černikov grup min şartını sağlar. Ayrıca min şartını sağlayan altgrupların sonlu sayıdaki direkt çarpımında min şartını sağladığı için, G min şartını sağlar.

Lokal nilpotent gruplarda min şartı ve min- n şartı aynıdır.

3.5. Mc Lain'in Karakteristik Basit Grupları

Bu kısımda Mc Lain in karakteristik basit ve lokal nilpotent olan önemli örneğini vereceğiz.

F bir cisim $n \geq 1$ tamsayı olsun. O zaman F üzerinde tanımlı, diagonal üzerindeki girişleri 1 olan, bütün üst üçgensel matrislerin grubuna unitriangular grup denir ve $U(n, F)$ ile gösterilir.

$$A \in U(n, F) \text{ ise } A = \begin{bmatrix} 1 & & X \\ & 1 & \\ & \dots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Her $1 \leq m \leq n$ için $U^m(n, F)$, $U(n, F)$ nin diagonal üstündeki ilk $m-1$ diagonalı 0 olan elemanların oluşturduğu altgrup olsun.

$$\text{Yani } A \in U^1(n, F) \text{ ise } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots & & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

O zaman

$$U(n, F) = U^1(n, F) > U^2(n, F) > \dots > U^{n-1}(n, F) > U^n(n, F) = \{1\}$$

serisi $U(n, F)$ nin aşağı merkez serisi ve yukarı merkez serisidir. $U(n, F)$ nilpotent ve sınıfı $n-1$ dir.

$E_{ij}(i, j)$ girişi 1 ve diğer girişleri 0 olan $n \times n$ tipinde matris olsun. $1 \leq i, j \leq n$ için

$$U(n, F) = \langle 1 + a E_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ ve } a \in F \rangle$$

dir.

$$U^m(n, F) = \langle 1 + a E_{ij} \mid j-i \geq m, a \in F \rangle$$

dir.

F bir cisim olsun. Q sıralı rasyonel sayıların kümesini göz önüne alalım. (Q lineer sıralı bir küme). V, F üzerinde sayılabilir sonsuz boyutlu vektör uzayı, V için bir baz $\{V_\lambda \mid \lambda \in Q\}$ olsun.

Eğer $\lambda < \mu$ ise, V nin alışılmış elemanter lineer transformasyonu $e_{\lambda\mu}$ ile gösterilsin. Böylece

$$V_\lambda e_{\lambda\mu} = V_\mu \text{ ve } v \neq \lambda \text{ için}$$

$$V_v e_{\lambda\mu} = 0$$

dır.

$e_{\lambda\mu}$ için standart çarpım kuralları geçerli olsun.

$$e_{\lambda\mu} e_{\mu\nu} = e_{\lambda\nu} \text{ ve } \mu \neq v \text{ için}$$

$$e_{\lambda\mu} e_{v\xi} = 0$$

dır. Özel olarak $e_{\lambda\mu}^2 = 0$ dır. Bundan dolayı her $a \in F$ için $1 + ae_{\lambda\mu}$ tersinir ve $(1 + ae_{\lambda\mu})^{-1} = 1 - ae_{\lambda\mu}$ dür. Bundan başka

$$\begin{aligned}
 [1+ae_{\lambda\mu}, 1+be_{\mu\nu}] &= (1+ae_{\lambda\mu})^{-1} (1+be_{\mu\nu})^{-1} (1+ae_{\lambda\mu}) (1+be_{\mu\nu}) \\
 &= (1-ae_{\lambda\mu}) (1-be_{\mu\nu}) (1+ae_{\lambda\mu}) (1+be_{\mu\nu}) \\
 &= (1-be_{\mu\nu} - a_{\lambda\mu} + abe_{\lambda\mu} e_{\mu\nu}) (1+be_{\mu\nu} + ae_{\lambda\mu} + abe_{\lambda\mu} e_{\mu\nu}) \\
 &= (1 - be_{\mu\nu} - a_{\lambda\mu} + abe_{\lambda\nu}) (1 + be_{\mu\nu} + ae_{\lambda\mu} + abe_{\lambda\nu}) \\
 &= 1 + be_{\mu\nu} + ae_{\lambda\mu} + abe_{\lambda\nu} - be_{\mu\nu} - b^2 e_{\mu\nu}^2 - abe_{\mu\nu} e_{\lambda\mu} - ab^2 e_{\mu\nu} \\
 &\quad e_{\lambda\nu} - ae_{\lambda\mu} - abe_{\lambda\nu} - a^2 0 - a^2 b 0 + ab e_{\lambda\nu} + 0 + 0 + 0 \\
 &= 1 + be_{\mu\nu} + ae_{\lambda\mu} + abe_{\lambda\nu} - be_{\mu\nu} - ae_{\lambda\mu} - abe_{\lambda\nu} + abe_{\lambda\nu} \\
 &= 1 + abe_{\lambda\nu}
 \end{aligned}$$

dır.

Eğer $\lambda = \xi$ ve $\mu \neq \nu$ ise

$$\begin{aligned}
 [1+ae_{\lambda\mu}, 1+be_{\nu\xi}] &= (1 + ae_{\lambda\mu})^{-1} (1 + be_{\nu\xi})^{-1} (1 + ae_{\lambda\mu}) (1 + be_{\nu\xi}) \\
 &= (1-ae_{\lambda\mu}) (1 - be_{\nu\xi}) (1 + ae_{\lambda\mu}) (1 + be_{\nu\xi}) \\
 &= (1 - be_{\nu\xi} - ae_{\lambda\mu} + a.b.0) (1 + be_{\nu\xi} + ae_{\lambda\mu} + a.b.0) \\
 &= [1 - (ae_{\lambda\mu} + be_{\nu\xi})] [1 + (ae_{\lambda\mu} + be_{\nu\xi})] \\
 &= 1^2 - (ae_{\lambda\mu} + be_{\nu\xi})^2 \\
 &= 1 - (a^2 e_{\lambda\mu}^2 + b^2 e_{\nu\xi}^2 + 2abe_{\nu\xi} e_{\lambda\mu}) = 1
 \end{aligned}$$

dir. Mc Lain grubu

$$M = M(Q, F) = \langle 1 + ae_{\lambda\mu} \mid \lambda, \mu \in Q, \lambda < \mu, a \in F \rangle$$

olarak tanımlanır.

$$e_{\lambda\mu} e_{v\xi} = \begin{cases} e_{\lambda\xi} & , \mu = v \text{ ise} \\ 0 & , \mu \neq v \text{ ise} \end{cases}$$

özelliğini kullanarak M nin her elemanı tek olarak $a_{\lambda\mu} \in F$ olmak üzere $1 + \sum_{\lambda < \mu} a_{\lambda\mu} e_{\lambda\mu}$ şeklinde olduğu görülür.

$$[(1 + a_{\lambda\mu} e_{\lambda\mu}) (1 + b_{v\xi} e_{v\xi}) \dots]$$

şeklinde görülür. Burada yalnız sonlu sayıda $\lambda < \mu$ için $a_{\lambda\mu} \neq 0$ olabilir. Tersine olarak bu şekildeki her eleman μ nün içindedir.

$x = 1 + \sum_{\lambda < \mu} a_{\lambda\mu} e_{\lambda\mu}$ olsun. Kabul edelim ki $x \neq 1$ ve λ_0 için $a_{\lambda_0 \mu_0} \neq 0$ olacak şekilde, muhtemel en büyük $\mu_0 \in Q$ yu seçelim. $u = a_{\lambda_0 \mu_0} e_{\lambda_0 \mu_0}$ ve $v = x - u - 1$ olsun. O zaman

$$x = 1 + u + v = (1 + u) (1 + v) - uv$$

şeklinde yazılabilir. $uv = 0$ dır. Çünkü $\mu_0 < \mu_1$ ise $a_{\mu_0 \mu_1} = 0$ olur. x de, sıfırdan farklı terimlerin sayıları üzerinde indüksiyon ile $1 + v \in M$ elde edilir. Böylece $x \in M$ dir.

3.1. Tanım

M bir grup olsun. M nın 1 ve kendisinden başka karakteristik alt grubu yoksa, M ye karakteristiksel basit grup denir.

3.9. Teorem (Mc Lain)

$M = M (Q , F)$ olsun.

i) M , kendisinin normal abeliyan alt gruplarının direkt çarpımı olarak yazılabilir. Böylece M lokal nilpotent gruptur.

(ii) Eğer F nin karakteristiği $p > 0$ ise, o zaman M bir lokal nilpotent p - grubudur. Eğer F nin karakteristiği 0 ise, o zaman F torsiyonsuzdur.

(iii) M karakteristiksel basittir.

(IV) $Z(M) = 1$ ve $M = M'$

İspat

$M = M(Q, F) = \langle 1 + a e_{\lambda \mu} \mid \lambda, \mu \in Q, \lambda < \mu, a \in F \rangle$ dir.

(i) $x = [1 + a e_{\lambda \mu}, 1 + b e_{v\xi}]$ yi hesaplayalım .

$$= (1 - a e_{\lambda \mu}) (1 - b e_{v\xi}) (1 + a e_{\lambda \mu}) (1 + b e_{v\xi})$$

$$= (1 - b e_{v\xi} - a e_{\lambda \mu} + a b e_{\lambda \mu} e_{v\xi}) (1 + b e_{v\xi} + a e_{\lambda \mu} + a b e_{\lambda \mu} e_{v\xi}) \text{ dir.}$$

$\mu = v$ olsun.

$$\begin{aligned} x &= 1 + b e_{v\xi} + a e_{\lambda \mu} + a b e_{\lambda \xi} - b e_{v\xi} - b^2 e_{v\xi}^2 - a b e_{v\xi} e_{\lambda \mu} - a b^2 e_{v\xi} e_{\lambda \xi} - a e_{\lambda \mu} \\ &- a b e_{\lambda \mu} e_{v\xi} - a^2 e_{\lambda \mu}^2 - a^2 b e_{\lambda \mu} e_{v\xi} + a b e_{\lambda \xi} + a b^2 e_{\lambda \xi} e_{v\xi} - a^2 b e_{\lambda \xi} e_{\lambda \mu} - a^2 b^2 e_{\lambda \xi}^2 \\ &= 1 + a b e_{\lambda \xi} \text{ dir. } (\lambda < \mu = v < \xi) \end{aligned}$$

$\mu \neq v$ olsun.

$$\begin{aligned} x &= (1 - a e_{\lambda \mu}) (1 - b e_{v\xi}) (1 + a e_{\lambda \mu}) (1 + b e_{v\xi}) \\ &= (1 - b e_{v\xi} - a e_{\lambda \mu}) (1 + b e_{v\xi} + a e_{\lambda \mu}) \text{ dir.} \end{aligned}$$

$\xi \neq \lambda$ olsun.

$$x = 1 + b e_{v\xi} + a e_{\lambda \mu} - b e_{v\xi} - a e_{\lambda \mu} = 1 \text{ dir.}$$

$\xi = \lambda$ olsun.

$x^{-1} = [1 + be_{v\xi}, 1 + ae_{\lambda\mu}] = 1 + abe_{v\mu}$ dır. Böylece

$$x = (1 + abe_{v\mu})^{-1} = 1 - abe_{v\mu} \quad (v < \xi = \lambda < \mu) \text{ dır.}$$

Şimdi $1 + ae_{\lambda\mu}$ sabit olsun. Buradan $1 + ae_{\lambda\mu}$ nün bütün eşleniklerinin ürettiği altgrup A olsun. O zaman A, $1 + be_{v\xi}$ ($v \leq \lambda < \mu < \xi$) şeklindeki elemanlar tarafından üretilen alt grubun içindedir. $v \leq \lambda < \mu \leq \xi$, $v' \leq \lambda < \mu \leq \xi'$ olmak üzere

$$(1 + be_{v\xi})(1 + b'e_{v'\xi'}) = (1 + b'e_{v'\xi'})(1 + be_{v\xi})$$

olduğunu görelim.

$$1 + be_{v\xi} + b'e_{v'\xi'} + \underbrace{bb'e_{v\xi}e_{v'\xi'}}_0 = 1 + be_{v\xi} + b'e_{v'\xi'} + \underbrace{bb'e_{v'\xi'}e_{v\xi}}_0$$

olduğundan bu alt gruplar abeliyandır. O zaman A abeliyandır.

$$(1 + ae_{\lambda\mu})^M \subseteq A$$

olduğundan, $(1 + ae_{\lambda\mu})^M$ abeliyan gruptur. Fakat M, $(1 + ae_{\lambda\mu})$ tipindeki elemanlar tarafından üretildiğinden, M normal abeliyan altgruplarından üretilir. O zaman M, Hirsch – Plotkin radikali içindedir. Böylece M, Hirsch – Plotkin radikaline eşittir. Bundan dolayı M lokal nilpotenttir.

(ii) $x \in M$ olsun. $v_i < \mu_i$ ve $v_i, \mu_i \in Q$ olmak üzere

$$x = (1 + a_1 e_{v_1 \mu_1})(1 + a_2 e_{v_2 \mu_2}) \dots (1 + a_r e_{v_r \mu_r})$$

dir. $\lambda_1 = \min \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ ve $\lambda_n = \max \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$ olsun. O zaman her $e_{v_j \mu_j}, e_{\lambda_k \lambda_{k+1}}$ $k = 1, 2, \dots, n$ lerin bazlarının çarpımı olarak yazılabilir. O zaman x

elemanı $L = \langle 1 + a_{i+1} e_{\lambda_i} e_{\lambda_{i+1}} \mid r = 1, 2, \dots, n-1 \rangle$ alt grubu içindedir. Bu grup $v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, \dots, v_{\lambda_n}$ vektörleri tarafından gerilen n - boyutlu altuzay üzerine etki eder.

Her $1 \leq i, j \leq n$ için E_{ij} (i, j) girişi 1, diğer girişleri 0 olan matris olsun. O zaman $e_{\lambda_i} e_{\lambda_{i+1}}$ in matrisi, E_{i+1} dir. $1 + a_{i+1} e_{\lambda_i} e_{\lambda_{i+1}}$ in matrisi, $1 + a_{i+1} E_{i+1}$ dir. Fakat

$$U(n, F) = \langle 1 + a E_{ij} \mid 0 \neq a \in F, 0 \leq i < j \leq n \rangle$$

olduğundan $1 + a_{i+1} e_{\lambda_i} e_{\lambda_{i+1}} \rightarrow 1 + a_{i+1} E_{i+1}$ eşlemesi L den $U(n, F)$ içine bir monomorfizmadır. Fakat $U(n, F)$ nilpotent ve nilpotentlik sınıfı $n-1$ dir. Önce $\text{char}(F) = p$ olsun.

$$(1 + a E_{ij})^k = 1 + k a E_{ij}$$

dır. Dolayısıyla $k = p$ için $1 + p a E_{ij} = 1$ olur. Böylece $U(n, F)$ p -elemanları tarafından üretilir. Aynı zamanda $U(n, F)$ nilpotent olduğundan, $U(n, F)$ bir p -gruptur. Böylece L bir p -gruptur. $x \in L$ olduğundan, x bir p -elemanıdır. Bundan dolayı M bir p -gruptur.

Şimdi $\text{char}(F) = 0$ olsun. Bu durumda $U(n, F)$ nin torsiyonsuz grup olduğunu gösterelim. U nun torsiyon elemanlarının kümesi $T(U)$ olsun. U nilpotent olduğundan $T(U)$, U nun alt grubudur. O zaman $T(U) \triangleleft U$ dur. Mümkünse $T(U) \neq 1$ olsun U nilpotent olduğundan Teorem 2.17 den dolayı

$$T(U) \cap Z(U) \neq 1$$

dır. Bundan dolayı $Z(U) \setminus 1$ bir torsiyon eleman içerir. Fakat

$$Z(U(n, F)) = \{1 + a E_{1n} : a \in F\}$$

dır. Her $k \geq 1$ için

$$(1 + a E_{1n})^k = 1 + k a E_{1n} \neq 1$$

olduğundan $Z(U(n, F))$ torsiyonsuzdur. Bu ise kabulümüzle çelişir.

$$T(U(n, F)) = 1$$

dir. Böylece $U(n, F)$ torsiyonsuzdur. O zaman L torsiyonsuzdur. $x \in L$ olduğundan, x in mertebesi sonsuzdur. Bundan dolayı M torsiyonsuzdur.

(iii) Mümkünse $N \text{ char } M$ ve $N \neq 1$ olsun. $1 \neq x \in N$ olsun. O zaman (ii) de olduğu gibi N nin öyle bir altgrubu vardır ki $x \in L$ dir ve L den $U(n, F)$ içine bir monomorfizma vardır. $U(n, F)$ nin, M içindeki ters görüntüsü H olsun. O zaman $x \in H \cong U(n, F)$ dir. $x \in N \cap H \triangleleft H$ olduğundan Teorem 2.17 den dolayı $(N \cap H) \cap Z(H) \neq 1$ dir. Bilindiği gibi $Z(H) = \{1 + a e_{1n} \mid a \in F\}$ dir. Bir $0 \neq a \in F$ için $1 + a e_{\lambda_1 \lambda_n} \in N$ dir. Dolayısıyla M nin en az bir üretici, N nin içindedir. $\lambda, \mu \in Q$ ve $\lambda < \mu$ olsun. Q nın bir sırayı koruyan permütasyonu vardır ki

$$(\lambda)^\alpha = \lambda_1$$

$$(\mu)^\alpha = \lambda_2$$

ve

$$1 + b_{v\xi} \rightarrow 1 + b_{e(v)^\alpha(\xi)^\alpha}$$

eşlemesi M nin bir otomorfizmasıdır. O zaman

$$1 + ae_{\lambda\mu} \xrightarrow{\alpha} 1 + ae_{\lambda_1 \lambda_n} \in N$$

dir. $N \text{ char } M$ olduğundan her $\lambda, \mu \in Q$ ve $\lambda < \mu$ için $1 + ae_{\lambda\mu} \in N$ dir. Fakat $\lambda, \xi \in Q$, her $\lambda < \xi$ için

$$[1 + ae_{\lambda\mu}, 1 + a^{-1} be_{\mu\xi}] = 1 + be_{\lambda\xi}$$

olduğundan her $a \in F$ ve $\lambda < \mu$ için $1 + ae_{\lambda\mu} \in N$ dir. Böylece $M = N$ elde edilir. M karakteristiksel basittir.

(IV) $Z(M) \text{ char } M$ dir. Fakat M karakteristiksel basit grup olduğundan dolayı $Z(M) = 1$ veya $Z(M) = M$ dir. M abeliyan olmadığından $Z(M) \neq M$ dir. O halde $Z(M) = 1$ dir. Ayrıca $M' \neq 1$ ve $M' \text{ char } M$ dir, tekrar M karakteristiksel basit grup olduğundan $M' = M$ dir.

4. LOKAL NİLPOTENT GRUPLARIN BAZI ÖZEL TİPLERİ

Bu bölümde lokal nilpotentlikten daha kuvvetli olan nilpotentliğin bazı doğal genellemelerini göz önüne alacağız.

4.1. Normalleyen Şartı

Bir grubun her bir öz altgrubu kendi normalleyeni içinde öz ise, bu gruba normalleyen şartını sağlıyor denir. Yani G bir grup olsun. G nin her H özalt grubu için $H < N_G(H)$ ise, G ye normalleyen şartını sağlıyor denir. Sonlu gruplarda normalleyen şartı nilpotentliğe denktir.

4.1. Teorem

G bir sonlu grup olsun. G nin nilpotent olması için gerek ve yeter şart, G nin normalleyen şartına sahip olmasıdır.

4.2. Teorem

Bir grubun normalleyen şartını sağlaması için gerek ve yeter şart her altgrubunun artan olmasıdır

İspat

G normalleyen şartını sağlasın.

G nin herhangi bir H altgrubu için α ordinal ve λ bir limit ordinal olmak üzere $H_0 = H$, $H_{\alpha+1} = N_G(H_\alpha)$ ve $H_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta$ şartlarıyla $\{H_\alpha\}$ altgruplarının bir zinciri tanımlanabilir. Eğer her α için $H_\alpha < H_{\alpha+1}$ ise $|G|$, α nın kardinalinden daha küçük olur ki bu bir çelişkidir. Böylece en az bir α için

$$H_\alpha = H_{\alpha+1} = N_G(H_\alpha)$$

dır. Fakat normalleyen şartından dolayı $H_\alpha < N_G(H_\alpha)$ olduğundan $H_\alpha = N_G(H_\alpha)$ ise $H_\alpha = G$ olur. Böylece H_α lar H dan artan bir seri oluşturduğundan H, G içinde artan altgruptur.

Karşıt olarak G nin her altgrubu artan altgrup olsun ve $H < G$ olsun. O zaman

$$H = H_0 < H_1 < \dots < H_\beta = G$$

artan serisi vardır. Bazı terimleri ihmal ederek $H \neq H_1$ kabul edebiliriz. O zaman $H < H_1$ ve $H < H_1$ olduğundan $H_1 \leq N_G(H_1) \leq N_G(H)$ dır. Böylece $H_1 \leq N_G(H)$ ve $H \neq H_1$ olduğundan $H \neq N_G(H)$ ve $H < N_G(H)$ elde edilir. Yani G grubu normalleyen şartını sağlar.

Şimdi normalleyen şartı ile lokal nilpotentlik arasındaki ilişkiyi araştıralım.

4.3. Teorem (Plotkin)

Eğer bir G grubu normalleyen şartını sağlıyorsa, o zaman G lokal nilpotent gruptur.

İspat

$g \in G$ olsun. G grubu normalleyen şartını sağladığından ise Teorem 4.2 den dolayı $\langle g \rangle$, G de artan altgruptur. H, G nin Hirsch – Plotkin radikali olsun. Teorem 3.4 den dolayı, $\langle g \rangle$ nilpotent olduğundan, $H < \langle g \rangle$ yi içerir. O zaman $g \in H$ olduğundan $G \leq H$ ve böylece $H = G$ dir. O halde G lokal nilpotent gruptur.

Bunun tersi doğru değildir. Yani lokal nilpotent bir G grubu, normalleyen şartını sağlamak zorunda değildir. $M(Q, F)$ Mc Laine's grubu normalleyen

sağlamayan lokal nilpotent gruplara bir örnektir. Gerçekten $a \in F$ $\lambda < \mu \leq 0$ veya $0 < \lambda < \mu$ olmak üzere $1 + ae_{\lambda\mu}$ şeklindeki elemanlar tarafından üretilen grubu göz önüne alalım. $\lambda < \mu < 0$ olsun.

$$\begin{aligned}
 (1 + e_{12})^{-1} (1 + e_{\lambda\mu}) (1 + e_{12}) &= (1 - e_{12}) (1 + e_{\lambda\mu}) (1 + e_{12}) \\
 &= 1 + e_{\lambda\mu} - e_{12} - e_{12} e_{\lambda\mu} + e_{12} e_{\lambda\mu} e_{12} - e_{12} e_{12} - e_{12} \\
 &\quad e_{\lambda\mu} e_{12} \\
 &= 1 + e_{\lambda\mu} - e_{12}
 \end{aligned}$$

dır.

$$N = \{ 1 + \sum a_{\lambda_i \mu_i} e_{\lambda_i \mu_i} \mid \lambda_i < \mu_i, a_{\lambda_i \mu_i} \in F \}$$

olmak üzere $1 + e_{\lambda\mu} e_{12} \notin N$ dir.

4.2. Hipermerkez Gruplar

G bir grup olsun. G nin artan bir

$$1 = G_1 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_\beta = G$$

serisi için $G_\lambda \triangleleft G$ ($\lambda \leq \beta$) ve $\alpha < \beta$ için

$$G_{\alpha+1} / G_\alpha \leq Z(G / G_\alpha)$$

oluyorsa bu seriye artan merkez seri denir. Bir artan merkez seriye sahip olan bir gruba hipermerkez grup denir.

$Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$ olsun. Eğer α limit ordinal ise

$$Z_{\alpha}(G) = \bigcup_{\beta < \alpha} Z_{\beta}(G)$$

α limit ordinal değilse

$$Z_{\alpha}(G) / Z_{\alpha-1}(G) = Z(G / Z_{\alpha-1}(G))$$

şeklinde tanımlansın. G nin kardinali aşılamayacağından

$$Z_{\lambda}(G) = Z_{\lambda+1}(G) = \dots$$

olacak şekilde bir λ ordinali vardır. Bu terminal gruba G nin hipermerkezi denir ve $Z_{\alpha}(G)$ ye G nin α - merkezi denir.

4.4. Teorem

G bir grup olsun. G nin hipermerkez grup olması için gerek ve yeter şart G nin hipermerkezine eşit olmasıdır

İspat

$Z_{\beta}(G)$, G nin hipermerkezi olmak üzere, eğer $Z_{\beta}(G) = G$ ise G bir hipermerkez gruptur. G bir hipermerkez grup olsun.

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_{\alpha} = G$$

G nin artan serisi olsun. Her β ordinali için $G_{\beta} \leq Z_{\beta}(G)$ olduğunu gösterelim. Eğer $\beta = 0$ ise $1 = G_0 = Z_0(G)$ dir. Kabul edelimki $\beta < \alpha$ için iddia doğru olsun. Eğer α limit ordinal ise her $\beta < \alpha$ için $G_{\beta} \leq Z_{\beta}(G)$ olduğundan

$$\bigcup_{\beta < \alpha} G_{\beta} \leq \bigcup_{\beta < \alpha} Z_{\beta}(G)$$

dir . Böylece $G_\alpha \leq Z_\alpha$ dir.

α limit ordinal olmasın. O zaman $\alpha - 1$ vardır ki hipotezden dolayı

$$G_{\alpha-1} \leq Z_{\alpha-1} (G)$$

dir. $x \in G_\alpha$ ise $[x, G] \leq G_{\alpha-1} \leq Z_{\alpha-1}(G)$ dir. Böylece $[x Z_{\alpha-1} (G), G / Z_{\alpha-1} (G)] = 1$ dir. O halde

$$x Z_{\alpha-1} (G) \in Z (G / Z_{\alpha-1} (G)) = Z_\alpha (G) / Z_{\alpha-1} (G)$$

olduğundan $x \in Z_\alpha (G)$ dir. Bundan dolayı $G_\alpha \leq Z_\alpha (G)$ dir. Özel olarak $G \leq Z_\gamma(G)$ olduğundan $G = Z_\gamma (G)$ dir.

Şimdi hipermerkez gruplarla lokal nilpotent gruplar arasında nasıl bir ilişki olduğunu görelim.

4.5. Teorem

Hipermerkez bir G grubu normalleyen şartını sağlar ve böylece G grubu lokal nilpotenttir.

İspat

$\{G_\alpha \mid \alpha \leq \beta\}$, G nin bir artan merkez serisi ve $H < G$ olsun. $G_{\alpha+1} / G_\alpha$, G / G_α nin merkezinde olduğundan her α için $HG_\alpha \triangleleft HG_{\alpha+1}$ dir. Gerçekten $g_{\alpha+1} \in G_{\alpha+1}$, $g_\alpha \in G_\alpha$ ve $h_1, h_2 \in H$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (g_{\alpha+1} h_1)^{-1} (g_\alpha h_2) (g_{\alpha+1} h_1) &= h_1^{-1} g_{\alpha+1}^{-1} g_\alpha h_2 g_{\alpha+2} h_1 \\ &= h_1^{-1} (g_{\alpha+1}^{-1} g_\alpha g_{\alpha+1}) (g_{\alpha+1}^{-1} h_2 g_{\alpha+1} h_2^{-1}) h_2 h_1 \end{aligned}$$

$$= h_1^{-1} (g_{\alpha+1}^{-1} g_{\alpha} g_{\alpha+1}) [g_{\alpha+1}, h_2^{-1}] h_2 h_1 \in HG_{\alpha} \text{ dir.}$$

Böylece HG_0 , HG_{β} da artan olduğundan dolayı Teorem 4.2. den dolayı, G normalleyen şartını sağlar. Teorem 4.3. den dolayı, G lokal nilpotenttir.

O halde G bir hipermerkez grup ise normalleyen şartını sağlar. O zaman her altgrubu artandır ve böylece G lokal nilpotenttir.

4.6. Teorem

Bir lokal nilpotent grup normal altgruplar üzerinde minimal (min-n) şartı sağlıyorsa hipermerkezdir.

İspat

G min-n yi sağlasın. G nin bir minimal normal altgrubu $N_1 \neq 1$ vardır. Eğer $G \neq N_1$ ise, o zaman G / N_1 de min-n yi sağladığından G / N_1 in bir $N_2 / N_1 \neq 1$ minimal normal altgrubu vardır. Yani $N_1 < N_2$ dir. Bu şekilde devam edilirse transfinite indüksiyonla

$$N_1 < N_2 < \dots N_{\beta} = G$$

olacak şekilde normal serisi vardır ki her $\alpha < \beta$ için $N_{\alpha+1} / N_{\alpha}$, G / N_{α} nin minimal normal altgrubudur. Bu seri G nin artan bir serisidir ve her faktörü esas faktördür. Teorem 2.12 den dolayı bir lokal nilpotent grubun esas faktörü merkezdendir. Böylece bu seri G nin artan merkez serisidir. G hipermerkezdir.

4.7. Teorem

H ve K bir G grubunun sonlu üreteçli nilpotent altgrupları ve $J = \langle H, K \rangle$ olsun.

(i) (Gruenberg) H ve K , G de artan altgruplar ise o zaman J artan ve nilpotenttir.

(ii) (Baer) H ve K , G de altnormal ise, o zaman J altnormal ve nilpotenttir.

İspat

R , G nin Hirsch-Plotkin radikali olsun. O zaman H ve K G nin artan lokal nilpotent altgrupları olduğundan Teorem 3.4. den dolayı $H, K \leq R$ dir. Böylece $J \leq R$ dir. H ve K sonlu üreteçli olduğundan, $J = \langle H, K \rangle$ da sonlu üreteçlidir ve $J \leq R$ dir. R lokal nilpotent olduğundan, J nilpotenttir.

Şimdi, J nin, G nin artan altgrubu olduğunu gösterelim. $H \text{ asc } G$ olduğundan $\alpha > 0$ olmak üzere

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots H_\alpha = G$$

dir. H ve J sonlu üreteçli olduğundan, H^J de sonlu üreteçlidir. $H^J \leq R$ olduğundan, H^J nilpotenttir. α üzerine indüksiyonla H^J nin, G de artan olduğunu gösterelim. $\alpha=1$ ise ispat tamamdır. $\beta < \alpha$ için $H^J \text{ asc } H_\beta$ olsun. α limit ordinal olsun. Öyle $\beta < \alpha$ için $H^J \leq H_\beta$ dir. O zaman $H_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta$ şeklinde yazılabilir. İndüksiyon hipotezinden $H^J \text{ asc } H_\beta \text{ asc } G$ olduğundan $H^J \text{ asc } G$ dir.

Şimdi α limit ordinal olmasın. O zaman $\alpha-1$ vardır. O zaman

$$H \leq H_{\alpha-1} \triangleleft H_\alpha = G$$

dir. Böylece $H^J \leq H_{\alpha-1}^J = H_{\alpha-1}$ dir. Buradan $H^J \text{ asc } H_{\alpha-1} \triangleleft H_\alpha = G$ olur. Yani $H^J \text{ asc } G$ dir.

$$J = \langle H, K \rangle = \langle H^J, K \rangle = H^J K$$

dır. Böylece H yerine H^J alırsak, $H \triangleleft J$ kabul edebiliriz. $\overline{H}_\alpha = H^{H_\alpha}$ ile gösterelim.

$$\overline{H} = \overline{H}_0 = \overline{H}_1 \triangleleft \overline{H}_2 \triangleleft \dots \overline{H}_\alpha = H^G$$

bir artan seridir. Gerçekten

$$\overline{H}_0 = H^{H_0} = H^H = H$$

$$\overline{H}_1 = H^{H_1} = H$$

$$\overline{H}_\alpha = H^{H_\alpha} = H^G$$

dir.

α limit ordinal ise $H_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta$ olduğundan $\overline{H}_\alpha = H^{H_\alpha} = H^{\bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta} = \bigcup_{\beta < \alpha} H^{H_\beta}$ dır.

Yani $\overline{H}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \overline{H}_\beta$ dır. Şimdi

$$H_\beta^* = \bigcap_{k \in K} (\overline{H}_\beta)^k = \text{Cor}_K \overline{H}_\beta$$

olarak tanımlayalım. $H \triangleleft J$ olduğundan

$$H_0^* = \bigcap_{k \in K} (\overline{H}_0)^k = \bigcap_{k \in K} (H)^k = H$$

dır.

$$H_1^* = \bigcap_{k \in K} (\overline{H}_1)^k = \bigcap_{k \in K} (H)^k = H^k = H$$

olduğundan $H = H_0^* = H_1^*$ dır ve

$$H_\alpha^* = \bigcap_{k \in K} (\bar{H}_\alpha)^k = \bigcap_{k \in K} (H^G)^k = \bigcap_{k \in K} (H)^G = H^G$$

dır. Aynı zamanda $H_\beta^* = \bigcap_{k \in K} (\bar{H}_\beta)^k$ ve $H_{\beta+1}^* = \bigcap_{k \in K} (\bar{H}_{\beta+1})^k$ dır. $\bar{H}_\beta \triangleleft \bar{H}_{\beta+1}$

olduğundan $\bar{H}_\beta^k \triangleleft \bar{H}_{\beta+1}^k$ dır. Buradan $\bigcap_{k \in K} \bar{H}_\beta^k \triangleleft \bigcap_{k \in K} \bar{H}_{\beta+1}^k$ dır. Böylece

$H_\beta^* \triangleleft H_{\beta+1}^*$ dır.

λ limit ordinal olsun. $\bar{H}_\lambda^* = \bigcup_{\beta < \lambda} H_\beta^*$ olduğunu gösterelim.

$$H_\beta^* = \bigcap_{k \in K} (\bar{H}_\beta)^k = \bigcap_{k \in K} (H^{H_\beta})^k$$

dır.

$$H_\lambda^* = \bigcap_{k \in K} (H^{H_\lambda})^k = \bigcap_{k \in K} \left(H^{\bigcup_{\beta < \lambda} H_\beta} \right)^k \geq \bigcap_{k \in K} (H^{H_\beta})^k$$

olduğundan $H_\lambda^* \geq \bigcap_{k \in K} (\bar{H}_\beta)^k = H_\beta^*$ dır. O halde $H_\lambda^* \geq \bigcup_{\beta < \lambda} H_\beta^*$ dır. Şimdi

$\bigcup_{\beta < \lambda} H_\beta^* \leq H_\lambda^*$ olduğunu gösterelim. $x \in H_\lambda^* = \bigcap_{k \in K} (H^{H_\lambda})^k$ olsun. O zaman her

$k \in K$ için $x \in (H^{H_\lambda})^k$ dır. Bundan dolayı $x \in H^{H_\lambda}$ dır.

Böylece $\langle x, K \rangle \leq \langle H^{H_\lambda}, K \rangle$ dır. $K \leq R$ ve $H \leq R$ olduğundan $H^G \leq R^G$ dır.

$R \triangleleft G$ olduğundan $R^G = R$ ve böylece $H^G \leq R$ dır. O zaman $\langle H^G, K \rangle \leq R$ dır.

$\langle x, K \rangle \leq \langle H^{\lambda}, K \rangle \leq \langle H^G, K \rangle \leq R$ olduğundan $\langle x, K \rangle \leq R$ dir. R lokal nilpotent olduğundan, $\langle x, K \rangle$ nilpotenttir ve x^K sonlu üreteçlidir. Fakat $x \in H_{\lambda}^*$ için $x^K \leq (H_{\lambda}^*)^K = H_{\lambda}^*$ dir. Bundan dolayı $x^K \leq H_{\lambda}^* \leq \bar{H}_{\lambda} = \bigcup_{\beta < \lambda} \bar{H}_{\beta}$ dir.

$x^K \leq \bar{H}_{\lambda} \text{asc} G$ olduğundan

$$x^K \leq \bar{H}_{\lambda} \triangleleft \bar{H}_{\lambda+1} \triangleleft \dots G$$

dir. Buradan $x^K \leq \bar{H}_{\beta}$ öyleki $\beta < \lambda$ dir. Bundan başka

$$x^K \leq H_{\beta}^* = \bigcap_{k \in K} (H^{\beta})^K$$

dir. Özel olarak $x \in H_{\beta}^*$ ise $x \in \bigcup_{\beta < \lambda} H_{\beta}^*$ dir. Buradan $H_{\lambda}^* \leq \bigcup_{\beta < \lambda} H_{\beta}^*$ olur. Yani

$H_{\lambda}^* = \bigcup_{\beta < \lambda} H_{\beta}^*$ dir. Böylece $H \text{ asc } H^G$ dir. Her $\beta < \alpha$ için $H_{\beta}^* \triangleleft H_{\beta+1}^*$ olduğundan

$H_{\beta}^* \triangleleft H_{\beta+1}^* K$ dir. Ayrıca hipotezden dolayı $K \text{asc } G$ olduğundan $K \text{asc } H_{\beta+1}^* K$ dir.

Böylece $H_{\beta}^* K \text{asc } H_{\beta+1}^* K$ dir.

$$H_0^* K = H_1^* K \triangleleft H_2^* K \triangleleft \dots H^G K$$

oldüğundan

$$J = HK \triangleleft \dots H_{\alpha}^* K = H^G K \text{ asc } G$$

dir. Buradan $J \text{asc } G$ dir.

(ii) (i) ye benzer şekilde yapılır. Fakat altnormalliğin tanımından α nın limit ordinal olmasına ihtiyaç yoktur.

4.8. Teorem

G bir grup ve G nin her devirli altgrubunda artan ise o zaman G nin sonlu üreteçli her altgrubu artan ve nilpotenttir.

İspat

H , G nin sonlu üreteçli altgrubu olsun. O zaman $H = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ şeklinde yazılabilir.

n üzerine indüksiyon yapalım. $n = 1$ ise G nin her devirli altgrubu artan olduğundan sağlanır. $n = 2$ ise $H_1 = \langle x_1 \rangle$, $H_2 = \langle x_2 \rangle$ ve H_1 ve H_2 , G nin artan ve nilpotent altgrupları olduğundan Teorem 4.7. (i) den dolayı

$$\langle H_1, H_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle = H$$

artan ve nilpotenttir. İddia $n-1$ için doğru olsun. Yani $H_1 = \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$ artan nilpotent olsun. $K = \langle x_n \rangle$ nilpotent ve hipotezden dolayı artandır. Teorem 4.7. (i) den dolayı

$$\langle H_1, K \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle = H$$

da artan ve nilpotenttir.

4.9. Teorem

Bir grubun her devirli altgrubu altnormal ise o zaman her sonlu üreteçli altgrubu altnormal ve nilpotenttir.

İspat

İspatı Teorem 4.8. e benzer şekilde yapılır.

4.1. Tanım

Bir grubun her devirli altgrubu artan ise, bu gruba Gruenberg grup denir. Bir grubun her devirli altgrubu altnormal ise bu gruba Baer grup denir. Her devirli altgrubu altnormal alan grup, normalleyen şartını sağlar. Normalleyen şartını sağlayan her grup Teorem 4.2 den dolayı artandır. Böylece her Baer grup bir Gruenberg gruptur.

4.10. Teorem

G normal altgruplarda minimal şartı sağlayan bir Baer grup olsun. O zaman G nilpotenttir ve merkezi sonlu indekslidir.

İspat

Teorem 3.8. den dolayı G bir Černikov gruptur. N , G nin sonlu indeksli minimal normal altgrubu olsun. Böylece N , bölünebilir abeliyan gruptur. N nin G nin merkezinde olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki N , $Z(G)$ de olmasın. O zaman $[N, g] \neq \langle 1 \rangle$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. G bir Baer grup olduğundan $\langle g \rangle$ G de altnormaldir. Böylece

$$\langle g \rangle = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_r = G$$

şeklinde $H_i \leq G$ ler vardır. Her $g \in H_{r-1} \triangleleft G$ için

$$[g, G] \leq [G, H_{r-1}] \leq H_{r-1}$$

dir.

$$[H, {}_2 g] \leq [G, {}_2 g] = [G, g, g] \leq [H_{r-1}, g] \leq H_{r-2}$$

dir.

$$[N, {}_r g] \leq [G, {}_r g] = [[G, {}_{r-1} g], g] \leq \langle g \rangle$$

olduğundan

$$[N, {}_{r+1} g] = [[N, {}_r g], g] \leq \langle g \rangle, g = 1$$

dir. Bundan dolayı $[N, {}_{r+1} g] = 1$ dir. r bu şartı sağlayan en küçük tamsayı olsun.

O zaman $r \geq 1$ dir. $M = [N, {}_{r-1} g]$ ve $o(g) = m$ olsun. $M = [N, {}_{r-1} g]$ olduğundan $[M, g, g] = 1$ dir. Böylece $[M, g]^m = [M, g^m] = 1$ dir.

m üzerine indüksiyonla $[M, g]^m = [M, g^m]$ olduğunu gösterelim. $m = 2$ ise

$$[M, g^2] = [M, g]^2$$

olduğunu gösterelim. $x \in M$ olsun.

$$\begin{aligned} [x, g^2] &= [x, gg] \\ &= [x, g] [x, g]^g \\ &= [x, g] g^{-1} [x, g] g \\ &= [x, g] [g, [x, g]^{-1}] [x, g] \end{aligned}$$

dır. Fakat $[g, [x, g]^{-1}] = 1$ olduğundan

$$[x, g^2] = [x, g] [x, g] = [x, g]^2$$

dir. Yani $[M, g^2] = [M, g]^2$ dir. $m-1$ için doğru olsun. O zaman

$$[M, g^{m-1}] = [M, g]^{m-1}$$

dir. Her $n \in M$ için

$$\begin{aligned} [n, g^m] &= [n, g^{m-1}g] \\ &= [n, g] [n, g^{m-1}]^g \\ &= [n, g] ([n, g]^{m-1})^g \\ &= [n, g] g^{-1} [n, g]^{m-1} g \\ &= [n, g] [g([n, g]^{m-1})^{-1}] [n, g]^{m-1} \\ &= [n, g]^m \end{aligned}$$

dir. Yani $[M, g]^m = [M, g^m]$ dir. $o(g) = m$ olduğundan $[M, g]^m = [M, g^m] = [M, 1] = 1$ dir.

$$\varphi : N \rightarrow N$$

$$a \rightarrow [a_r, g]$$

N nin bir endomorfizmasıdır. Bu nedenle Teorem 2.19 dan dolayı

$$[M, g] = [[N_{r-1}g], g] = [N_r, g]$$

bölünebilirdir. Her $x \in [M, g]$ için $x^m = 1$ dir. Bu ise r nin seçimiyle çelişir. Böylece $[M, g] = 1$ dir. Buradan $N \leq Z(G)$ dir. Böylece G/N sonlu indeksli olduğundan, $G/Z(G)$ sonlu indekslidir.

G bir grup olsun G grubu normal nilpotent altgruplarının bir çarpımı ise, G ye bir Fitting grup denir. $G = \text{Fit}G$ ile gösterilir Mc Lain grubu bir Fitting gruptur. Eğer $x \in G = \text{Fit}G$ ise, o zaman x normal nilpotent altgrupların sonlu çarpımları içindedir. Fitting's Teoreminden (2.2.) dolayı sonlu sayıda normal

nilpotent grupların çarpımı nilpotent olduğundan, $x \in G$ nin normal nilpotent alt grubunun bir elemanıdır. Böylece Fitting gruplarının başka bir tanımı elde edilmiş olur.

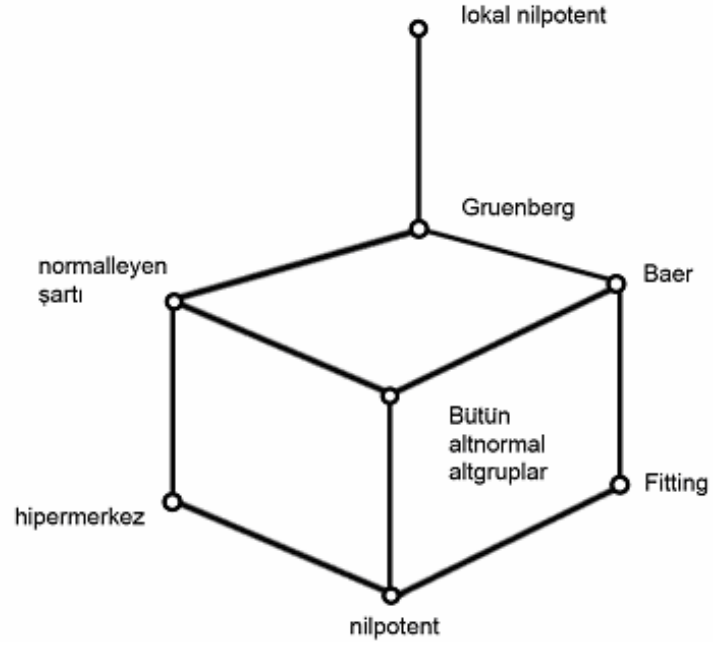
4.11. Teorem

G bir grup olsun. $\text{Fit}G = G$ olması için gerek ve yeter şart her elemanın bir normal nilpotent alt grubu tarafından içerilmesidir. Ayrıca her Fitting grup, bir Baer gruptur.

Her alt grubu altnormal olan grupların sınıfı hakkında çok az şey biliniyor. Açıkça böyle gruplara Baer gruplar denir. Baer gruplar normalleyen şartını sağlar. Dolayısıyla Teorem 4.3. den dolayı lokal nilpotenttir. Bu konuda Roseblade nin dikkate değer teoremi “Eğer bir G grubunun her alt grubu altnormal ve altnormallik uzunluğu bir doğal sayı ile sınırlı ise bu grup nilpotenttir” şeklindedir [3].

Daha sonra Heineken ve Mohammed her alt grubu altnormal olan, nilpotent olmayan grup örneği inşa etmiştir [4]. Böylece Roseblade’nin teoreminin karşıtı doğru değildir.

Sonunda Möhres tarafından; eğer bir grubun her alt grubu altnormalse, bu grubun çözülebilir olduğu gösterildi.



Şekil 4.1. Grup sınıflarının diyagramı

5. ENGEL ELEMANLARI VE ENGEL GRUPLARI

Bu ve bundan sonraki bölümlerde lokal nilpotent olmayan genellenmiş nilpotent gruplar çalışılacaktır. Bu tipte grupların en çok bilinenleri arasında Engel grupları vardır. Bu gruplar, başlangıcı grup teorisinin dışına uzanan, Lie halkalar teorisinde gruplardır.

5.1. Engel Elemanları

5.1. Tanım

G bir grup ve $g \in G$ olsun. Eğer her $x \in G$ için $[g, {}_n x] = 1$ olacak şekilde bir $n = n(g, x) \geq 0$ varsa g ye bir sağ Engel elemanı denir. Dikkat edilirse değişken x elemanı burada sağda görünüyor. Eğer n x den bağımsızsa g ye bir sağ n – Engel elemanı veya sınırlı sağ Engel elemanı denir. $g \in G$ olmak üzere, eğer her $x \in G$ için $[x, {}_n g] = 1$ olacak şekilde bir $n = n(g, x) \geq 0$ varsa g ye bir sol Engel elemanı denir. Burada x değişkeni soldadır. Eğer n , x den bağımsızsa, o zaman g ye bir sol n –Engel elemanı veya sınırlı sol Engel eleman denir. Sağ Engel elemanlarının kümesi $R(G)$ ile, sınırlı sağ Engel elemanlarının kümesi $\bar{R}(G)$ ile gösterilir.

Sol Engel elemanlarının kümesi $L(G)$ ile sınırlı sol Engel elemanlarının kümesi $\bar{L}(G)$ ile gösterilir.

5.1. Teorem (Heineken)

G bir grup olsun. Bir sağ Engel elemanının tersi, bir sol Engel elemanıdır ve bir sağ n – Engel elemanının tersi, bir sol $n+1$ – Engel elemanıdır. Böylece

$$R(G)^{-1} \subseteq L(G) \text{ ve } \bar{R}(G)^{-1} \subseteq \bar{L}(G)$$

dır.

İspat

x bir sağ Engel elemanı, g G nin elemanı olsun. O zaman $[x, {}_n g] = 1$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ tamsayısı vardır. $x = 1$ ise durum aşikardır. O halde $x \neq 1$ olsun. her $y \in G$ olmak üzere

$$\begin{aligned} [x^g, {}_n y] &= [[x^g, y], {}_{n-1} y] = [([x, y^{g^{-1}}])^g, {}_{n-1} y] \\ &= [[x, y^{g^{-1}}], {}_{n-1} y^{g^{-1}}]^g \\ &= [x, {}_n y^{g^{-1}}]^g = 1 \end{aligned}$$

dir. Böylece x^g de bir sağ Engel elemanıdır.

$$\begin{aligned} 1 &= [x^g, {}_n x^{-1}]^{x^{-1}} = [[x^g, x^{-1}], {}_{n-1} x^{-1}]^{x^{-1}} \\ &= [[x [x, g], x^{-1}], {}_{n-1} x^{-1}]^{x^{-1}} \\ &= [[[x, g], x^{-1}], {}_{n-1} x^{-1}]^{x^{-1}} \\ &= [[x, g]^{x^{-1}}, {}_n x^{-1}] \\ &= [[g, x^{-1}], {}_n x^{-1}] \\ &= [g, {}_{n+1} x^{-1}] \end{aligned}$$

olduğundan x^{-1} bir sol Engel elemanıdır. Bundan dolayı $R(G)^{-1} \subseteq L(G)$ ve $\bar{R}(G)^{-1} \subseteq \bar{L}(G)$ dir.

5.2. Teorem

G herhangi bir grup olsun.

- (i) $L(G)$, G nin H.P radikalini; $\bar{L}(G)$ de G nin Baer radikalini içerir.
- (ii) $R(G)$, G nin hipermerkezini; $\bar{R}(G)$ de G nin w-merkezini içerir.

İspat

(i) H, G nin H.P. radikali olmak üzere $g \in H, x \in G$ olsun. $H \triangleleft G$ olduğundan $[g, x] \in H$ dir. Böylece $K = \langle [g, x], g \rangle \leq H$ dir. H lokal nilpotent olduğundan, K nilpotenttir. Bundan dolayı $[x, n g] = 1$ olacak şekilde $n > 0$ vardır. Böylece $g \in L(G)$ dir. Sonuç olarak $H \subseteq L(G)$ dir. g, G nin Baer radikalinin bir elemanı olsun. O zaman $\langle g \rangle, G$ de altnormaldir. Böylece

$$\langle g \rangle = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

olacak şekilde G_i ($0 \leq i \leq n$) altgrupları vardır. $G_i \triangleleft G_{i+1}$ olduğundan her $x \in G$ için;

$$[x, g] \in G_{n-1}$$

$$[x, 2g] \in G_{n-2}$$

...

...

$$[x, n g] \in G_0 = \langle g \rangle$$

elde edilir. Sonuç olarak $[x, n+1 g] = 1$ ve $g \in \bar{L}(G)$ dir. Böylece $B(G) \subseteq \bar{L}(G)$ dir.

(ii) g, G nin hipermerkezinde ve $x \in G$ olsun. Kabul edelim ki her $n \geq 0$ için $[g, n x] \neq 1$ olsun. g, G nin hipermerkezinde olduğundan, bir ilk α ordinali için $g \in Z_\alpha(G)$ dir.

Eğer α limit ordinal ise $Z_\alpha(G) = \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta(G)$ olduğundan bir $\beta < \alpha$ için

$g \in Z_\beta(G)$ olur. Bu bir çelişkidir. Böylece α limit ordinal olamaz. Dolayısıyla $\alpha-1$ vardır. α ilk ordinal olduğundan $g \in Z_\alpha(G) \setminus Z_{\alpha-1}(G)$ dir. Böylece $[g, x] \in$

$Z_{\alpha-1}(G)$ dir. α' , $[g, x] \in Z_{\alpha'}(G)$ olacak şekilde ilk ordinal olsun. O zaman α' limit ordinal olamaz. Böylece

$$[g, x] \in Z_{\alpha'}(G) \setminus Z_{\alpha'-1}(G)$$

dir. $\alpha'' < \alpha' < \alpha$ için $[g, x] \in Z_{\alpha''}(G) \setminus Z_{\alpha''-1}(G)$ dir. Bu şekilde devam ederek

$$\dots < \alpha'' < \alpha' < \alpha$$

olacak şekilde ordinallerin bir sonsuz azalan dizisi elde edilir. Bu dizi hiçbir zaman sınırlanamayacağından çelişki elde edilir. Bundan dolayı bir $n \geq 0$ için $[g, x] = 1$ dir. O halde $g \in R(G)$ dir. Böylece $Z_{\alpha}(G) \subseteq R(G)$ dir. Son olarak $g \in Z_w(G)$ olsun. Böylece bir $n \geq 0$ için $g \in Z(G)$ dir. Buradan $g \in \overline{R}(G)$ ise $Z_w(G) \subseteq \overline{R}(G)$ dir.

5.2. Engel Grupları

5.2. Tanım

G herhangi bir grup olsun. Eğer $G = L(G) = R(G)$ ise, G grubuna Engel grubu denir. Teorem 5.2. den dolayı her lokal nilpotent grup bir Engel gruptur. Fakat bunun tersi doğru değildir. Golod [2] de lokal nilpotent olmayan Engel grup örneği vermiştir. Böylece Engel grupları nilpotent grupların oldukça geniş genellemesini temsil eder.

G bir grup olsun. G grubu, her $x, y \in G$ için $[x, {}_n y] = 1$ eşitliğini sağlıyorsa, G grubuna n -Engel grubu denir. Yani G 'nin her elemanı hem sağ, hem de sol n -Engeldir. Böylece n -Engel gruplarının sınıfı $[x, {}_n y] = 1$ kuralı ile verilebilir. Örneğin nilpotentlik sınıfı n olan bir nilpotent grup, n – Engel grubudur. Öbür taraftan n -Engel grupları nilpotent olmak zorunda değildir. Eğer bir grup herhangi n için n – Engel ise, o gruba sınırlı n – Engel grup denir.

5.3. Çözülebilir Gruplarda Engel Yapısı

5.3. Teorem

G bir çözülebilir grup olsun.

- (i) $L(G)$, Hirsch – Plotkin radikaline eşittir ve $L(G)$ bir Gruenberg gruptur. Böylece bir çözülebilir Engel grup, bir Gruenberg gruptur.
- (ii) $\bar{L}(G)$, Baer radikaline eşittir. Böylece bir çözülebilir sınırlı Engel grup, bir Baer gruptur.

İspat

(i) $g \in L(G)$ olsun. Teorem 4.8. den dolayı, $\langle g \rangle$ nin, G de artan olduğunu ispatlamak yeterlidir. G nin derived uzunluğu d olsun.

Eğer $d = 1$ ise, o zaman G abeliyandır ve böylece $\langle g \rangle \triangleleft G$ dir. O halde derived uzunluğu d den küçükler için doğru olsun. $A = G^{(d-1)}$ olsun. $d(G/A) = d-1$ dir. $g \in L(G)$ olduğundan $gA \in L(G/A)$ dır. Bu yüzden indüksiyon hipotezinden dolayı, $\langle g, A \rangle$ G/A da artan olduğundan dolayı $\langle g, A \rangle$, G de artandır. Geriye $\langle g \rangle$ nin $\langle g, A \rangle$ da artan olduğunu ispatlamak kalır. A abeliyan olduğundan

$$\xi : A \rightarrow A$$

$$a \rightarrow [a, g]$$

şeklinde tanımlanan ξ bir endomorfizmadır. Eğer $F \neq 1$, A nın bir sonlu alt kümesi ise, F deki her x için $[x, n g] = 1$ olacak şekilde bir n tamsayısı vardır. Böylece $F^{\xi^n} = 0$ dır. Bu açıkça $C_A(g) \neq 1$ anlamına gelir. α bir ordinal ve λ bir limit ordinal olmak üzere

$$A_{\alpha+1} / A_{\alpha} = C_{A/A_{\alpha}}(g) \text{ ve } A_{\lambda} = \bigcup_{\beta < \lambda} A_{\beta}$$

kuralları ile $1 = A_0, A_1, \dots$ alt gruplarını tanımlayalım. A nın trivial olmayan bölümünde, g tarafından merkezlenen trivial olmayan bir eleman her zaman bulabileceğimizden dolayı, $A_{\gamma} = A$ olacak şekilde bir γ ordinali vardır. Şimdi

$$\langle g, A_{\alpha} \rangle \triangleleft \langle g, A_{\alpha+1} \rangle$$

dir. Çünkü $g, A_{\alpha+1}/A_{\alpha}$ yı merkezler. $\langle g, A_{\alpha} \rangle, \langle g \rangle$ den $\langle g, A \rangle$ ya artan bir seri formundadır. Fakat $\langle g, A \rangle$ asc G olduğundan $\langle g \rangle, G$ de artandır. Bundan dolayı g, G nin H.P. radikali tarafından içerilir ve böylece $L(G) \subseteq HP(G)$ olduğundan $L(G) = HP(G)$ dir.

(ii) g bir sol n -Engel eleman olsun. (i) deki notasyonları sabit tutarak d üzerine indüksiyonla

$$\langle g, A \rangle \triangleleft \triangleleft G$$

dir. Her $a \in G$ için $[a, {}_n g] = 1$ olduğundan $[A, {}_n g] = 1$ dir.

$$T = \langle g, A \rangle = \langle g \rangle A$$

dır.

$$\begin{aligned} \gamma_1(T) &= T, \quad \gamma_2(T) = T = [\langle g \rangle A, \langle g \rangle A] \\ &= [\langle g \rangle, \langle g \rangle] [\langle g \rangle, A] [A, A] \\ &= [\langle g \rangle, A] \end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned}
\gamma_3(T) &= [[\langle g \rangle A, \langle g \rangle A] \\
&= [\langle g \rangle, A, \langle g \rangle] [\langle g \rangle, A, A] \\
&= [A, \langle g \rangle, \langle g \rangle] = [A, {}_2 \langle g \rangle]
\end{aligned}$$

dir. Bu şekilde devam edilirse

$$\gamma_n(T) = [A, {}_n \langle g \rangle]$$

elde edilir. Böylece

$$[a, g^{k_1} \dots g^{k_n}] = [a, g^{\sum_{i=1}^n k_i}]$$

dir. $\sum_{i=1}^n k_i$ üzerine indüksiyonla $[A, {}_n \langle g \rangle] = 1$ olduğu görülür. Böylece $\langle A, g \rangle$ nilpotenttir.

$$\langle g \rangle \triangleleft \triangleleft \langle A, g \rangle \triangleleft \triangleleft G$$

olduğundan $\langle g \rangle \triangleleft \triangleleft G$ dir. Böylece $g \in B(G)$ olduğundan $\bar{L}(G) \subseteq B(G)$ dir. Bundan dolayı $\bar{L}(G) = B(G)$ dir.

5.4. Teorem (Zorn)

Her sonlu Engel grup nilpotenttir.

İspat

Kabul edelim ki bu yanlış olsun. G nilpotent olmamasına göre en küçük mertebeli bir sonlu Engel grup olsun. O zaman G nin her öz altgrubu nilpotenttir ve G Schmit'in teoreminden (2.20) dolayı çözülebilirdir. Teorem

5.3. den dolayı G , Hirsch Plotkin radikaline eşittir. G lokal nilpotenttir. Fakat G sonlu olduğu için nilpotenttir.

5.4. 2-Engel Grupları

0 - Engel grupları aşikar olarak mertebesi 1 olan gruplardır.

1- Engel grupları kesinlikle abeliyan gruplardır.

5.5. Teorem

Üssü 3 olan her grup 2 – Engel gruptur.

İspat

G bir grup ve $\exp(G) = 3$ olsun. $x, y \in G$ için $(xy^{-1})^3 = 1$ olduğundan $(xy^{-1})^2 = yx^{-1}$ dir.

$$\begin{aligned}
 x(y^{-1}xy) &= (yx^{-1})^{-1}xy = (yx^{-1})^2xy = yx^{-1}yx^{-1}xy \\
 &= yx^{-1}y^2 = y^{-2}x^{-1}y^{-1} \\
 &= y^{-1}(y^{-1}x^{-1}y^{-1}) = y^{-1}xx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} \\
 &= y^{-1}x(x^{-1}y^{-1})^2 \\
 &= y^{-1}x(x^{-1}y^{-1})^{-1} \\
 &= y^{-1}xyx = (y^{-1}xy)x
 \end{aligned}$$

dir. Böylece x, x^y ile değişmelidir.

$$[y, x, x] = [[y, x], x] = [x^y x, x] = [x^{-y} x, x]^x [x, x] = 1$$

dır. Bundan dolayı G bir 2 – Engel gruptur.

5.6. Teorem (Levi)

G bir 2 – Engel grup ve $x, y, z, t \in G$ olsun. O zaman

- (i) x^G abeliyandır.
- (ii) $[x, y, z] = [z, y, x]$
- (iii) $[x, y, z]^3 = 1$
- (iv) $[x, y, z, t] = 1$ dir. Böylece G nilpotenttir ve G nin nilpotentlik sınıfı ≤ 3 tür.

İspat

(i) Her $x, y \in G$ için $[x, x^y] = [x, x[x, y]] = [x, [x, y]] = 1$ olduğundan x ile x^y değişmelidir. Her $y, z \in G$ için $[x^y, x^z] = [((x^y)^z)^{-1}, x]^z = 1$ dir. Bundan dolayı x^G abeliyandır.

(ii) $y \in G$ olmak üzere $y^G = A$ olsun $A \triangleleft G$ ve (i) den dolayı A abeliyandır. A abeliyan olduğundan $a \in A$ için $[a, y] \in A$ dır.

$$f_y : A \rightarrow A$$

$$a \rightarrow [a, y]$$

şeklinde tanımlansın

$$\begin{aligned} f_y(ab) &= [ab, y] = [a, y]^b [b, y] \\ &= [a, y] [b, y] \\ &= f_y(a) f_y(b) \end{aligned}$$

olduğundan f_y bir endomorfizmadır.

$$(f_y)^2(a) = f_y(f_y(a)) = f_y([a, y]) = [[a, y], y] = 1$$

dir. Bundan dolayı $(f_y)^2 = 0$ dir

$$\begin{aligned}
 f_{yz}(a) &= [a, yz] \\
 &= [a, z] [a, y]^2 \\
 &= [a, z][a, y][a, y, z] \\
 &= [a, y][a, z][a, y, z] \\
 &= f_y(a) + f_z(a) + f_{yz}(a)
 \end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı $f_{yz} = f_y + f_z + f_{yz} \dots (1)$ dir.

$$\begin{aligned}
 f_y^{-1}(a) &= [a, y^{-1}] \\
 &= ([a, y]^{y^{-1}})^{-1} \\
 &= (y^{-1} [a, y] y)^{-1} \\
 &= ([a, y] [[a, y], y])^{-1} \\
 &= ([a, y])^{-1} \\
 &= (f_y(a))^{-1} \\
 &= f_{-y}(a)
 \end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı $(f_y)^{-1} = f_{-y} \dots (2)$ dir. G bir 2-Engel grup olduğundan $[a, y, z]$ ile $(yz)^{-1}$ değişmelidir. (1) ve (2) yi kullanarak

$$(f_{z^{-1}y^{-1}} f_{yz})(a) = f_{z^{-1}y^{-1}}([a, yz]) = [a, yz, z^{-1}y^{-1}] = 1$$

dir. Bundan dolayı $f_{z^{-1}y^{-1}} f_{yz} = 0$ dir

$$\begin{aligned}
 0 &= f_{z^{-1}y^{-1}} f_{yz} = (f_{z^{-1}} + f_{y^{-1}} + f_{z^{-1}y^{-1}})(f_y + f_z + f_{yz}) \\
 &= f_{z^{-1}}f_y + f_{y^{-1}}f_z + f_{y^{-1}}f_zf_y + f_{y^{-1}}f_{z^{-1}}f_y \\
 &= -f_zf_y - f_yf_z - f_yf_zf_y + f_yf_zf_y
 \end{aligned}$$

olduğundan $f_z f_y = -f_y f_z \dots \dots (3)$ dir. A abeliyan olduğundan

$$\begin{aligned} [x, y, z] &= [x, z, y]^{-1} = y^{-1} [x, z]^{-1} y [x, z] \\ &= [x, z] y^{-1} [x, z]^{-1} y \\ &= [[x, z]^{-1}, y] \\ &= [z, x, y] \end{aligned}$$

dir. Yani $[x, y, z] = [z, x, y]$ olur.

(iii) (i) ve (ii) yi kullanarak

$$\begin{aligned} [x, y^{-1}, z]^y &= y^{-1} [x, y^{-1}, z] y \\ &= [x, y^{-1}, z] [z, x, y^{-1}, y] \\ &= [x, y^{-1}, z] \\ &= [[x, y]^{-1}, z] \\ &= [x, y, z]^{-1} \end{aligned}$$

dir. Hall – Witt (Teorem 2.4.) eşitliğinden dolayı

$$[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$$

dir. Buradan

$$[x, y, z]^{-1} [y, z, x]^{-1} [z, x, y]^{-1} = 1$$

olur. Bundan dolayı

$$[x, y, z] [y, z, x] [z, x, y] = 1$$

dir. O halde

$$[x,y,z] [x,y,z] [y,z,x] = 1$$

dir. Sonuç olarak $[x,y,z] = 1$ dir.

(iv) (3) u kullanarak $f_z f_y + f_y f_z = 0$ dir. Bundan dolayı

$$(f_z + f_t + f_t f_z) f_y + f_y (f_z + f_t + f_z f_t) = 0$$

dır. Yani

$$f_z f_y + f_t f_y + f_t f_z f_y + f_y f_z + f_y f_t + f_y f_z f_t = 0$$

dır. O halde $2 f_y f_z f_t = 0$ elde edilir. Böylece $[x,y,z,t]^2 = 1$ dir. Aynı zamanda $[x,y,z,t]^3 = [[x,y],z,t]^3 = 1$ dir. O halde $[x,y,z,t] = 1$ olur. Bundan dolayı G nin nilpotentlik sınıfı ≤ 3 tür.

G nin 2 – Engel grup olması için gerek ve yeter şart G deki bütün x ler için, x^G nin abeliyan olmasıdır. G nin 3 – Engel grup olması için gerek ve yeter şart G nin her x elemanı için $n.c(x^G) \leq 2$ olmasıdır (Kappe [5]). Genel olarak 3-Engel grupları nilpotent değildir ama daima lokal nilpotenttir (Heineken [6]).

5.5. Maksimal Şartlı Graplarda Engel Yapısı

Teorem 5.4. e göre bir sonlu Engel grup nilpotenttir. Burada sonluluk hipotezini zayıflatabilir miyiz? Golod un örneğinde belirtildiği gibi sonlu üreteçli bir grup nilpotent olmak zorunda değil. Ama maksimal şart bunu yapabilir mi? cevap olumludur. Aslında max lı gruplar mükemmel Engel yapısına sahiptir.

5.7. Teorem (Baer)

G maksimal şartını sağlayan bir grup olsun. O zaman $L(G)$ ve $\bar{L}(G)$, G nin Hirsch – Plotkin radikaline eşittir ve G nin Hirsch – Plotkin radikali nilpotenttir. $R(G)$ ve $\bar{R}(G)$, G nin bir sonlu m için $Z_m(G)$ ye eşit olan hipermerkezine eşittir. Özel olarak G bir Engel grup ise nilpotenttir.

Bu teoremin ispatından önce aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

5.8. Teorem

Eğer G max şartını sağlayan bir grup ve $a \in L(G)$ ise o zaman $\langle a^G \rangle$ sonlu üreteçli ve nilpotenttir.

İspat

Kabul edelim ki bu teorem yanlış olsun.

(i) $\{a^G\}$ ile a nın G içindeki bütün eşleniklerinin kümesi gösterilsin. X G nin bir altgrubu olmak üzere, eğer $\langle X \cap \{a^G\} \rangle = X$ ise, X e a -üreteçli altgrup denir.

(ii) Eğer X ve Y , $X < Y$ şartını sağlayan a üreteçli altgruplar ise o zaman $N_Y(X)$ içinde a nın X tarafından içerilmeyen en az bir eşleniği vardır. $X < Y$ ve Y nilpotent olduğundan, $X < Y$ de altnormal altgruptur. Böylece

$$X = X_0 < X_1 < \dots < X_s = Y$$

olacak şekilde $X_0, X_1, \dots, X_s$ altgrupları vardır. $X \neq Y$ ve Y a -üreteçli olduğundan $Y \setminus X$ a nın bir eşleniğini içerir. Böylece

$$X \cap \{a^G\} = X_i \cap \{a^G\} \subsetneq X_{i+1} \cap \{a^G\}$$

olacak şekilde bir i tamsayısı vardır. Kabul edelim ki $y \in X_{i+1} \cap \{a^G\}$ ve $y \notin X_i$ olsun. O zaman y , X_i yi normaller.

$$(X \cap \{a^G\})^y = (X_i \cap \{a^G\})^y = X_i \cap \{a^G\} = X \cap \{a^G\}$$

dir. $X = \langle X \cap \{a^G\} \rangle$ olduğundan y elemanı, X i normaller.

(iii) İki farklı maksimal a -üreteçli nilpotent altgruplar U ve V olsun. S bütün a -üreteçli nilpotent altgrupların bir kümesi olsun.

$\langle a \rangle \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$ dir. Maksimal şartından dolayı S nin her elemanı, bir maksimal eleman tarafından içerilir. S nin bir tek maksimal elemanı M olsun. $\langle a \rangle \in S$ olduğundan $\langle a \rangle \subseteq M$ dir. Fakat M nin bütün eşlenikleri S de ve M S nin tek maksimal elemanı olduğundan $M \triangleleft G$ dir. Böylece $a^G \leq M$ dir. Fakat M nilpotent olduğundan a^G nilpotenttir. G maksimum şartını sağladığından a^G sonlu üreteçlidir. Bu bir çelişkidir.

S nin $I = \langle U \cap V \cap \{a^G\} \rangle$ maksimal olacak şekilde, U ve V elemanlarını seçelim. $W = \langle N_U(I) \cap \{a^G\} \rangle$ olsun. Tanımdan dolayı I a -üreteçlidir. Aynı zamanda $I \leq V$ olduğundan $I \neq U$ dur. (ii) den dolayı $I < W$ dir. Çünkü $I < U$ olduğundan (ii) den dolayı $N_U(I)$ nın I tarafından içerilmeyen bir a^x elemanı vardır.

$$I \cap \{a^G\} \subset N_U(I) \cap \{a^G\}$$

oldüğundan $I < W$ dir. Benzer şekilde $N_V(I) \cap \{a^G\}$ de, I tarafından içerilmeyen a nın bir eşleniği v vardır. Kabul edelim ki $v \in N_G(W)$ olsun. G maksimum şartını sağladığından W sonlu üreteçlidir.

$$W = \langle a^{g_1}, a^{g_2}, \dots, a^{g_m} \rangle$$

olsun. v ile a eşlenik olduğundan $v \in L(G)$ dir. Böylece $[a^{g_i}, {}_n v] = 1$ olacak şekilde n tamsayısı vardır. $H = \langle v, W \rangle$ olsun. O zaman $H = \langle v \rangle W$ dir. Böylece $W' \triangleleft H$ dir. Bundan dolayı H / W' nilpotenttir. Çünkü

$$(H / W')' = [\langle v \rangle W, \langle v \rangle W] W' / W' = [\langle v \rangle, W] W' / W'$$

⋮

$$\gamma_n(H / W') = [W, \underbrace{\langle v \rangle \dots \langle v \rangle}_{\leftarrow n \rightarrow}] W' / W' = 1 \text{ dir.}$$

Bundan dolayı H / W' nilpotenttir.

$W = \langle N_U(I) \cap \{a^G\} \rangle \subseteq U$ ve U nilpotent olduğundan W de nilpotenttir. Böylece Hall kriterinden (2.21) dolayı H nilpotenttir. W a -üreteçli ve v ile a eşlenik olduğundan H da a -üreteçlidir. Bundan dolayı $H \in S$ dir ve H , S nin bir maksimal T elemanı tarafından içerilir. $v \in T \setminus U$ olduğundan $T \neq U$ dur. Ayrıca $W \leq H \leq T$ olduğundan $N_U(I) \cap \{a^G\} \leq U \cap T \cap \{a^G\}$ dir. Böylece $I < W \leq \langle U \cap T \cap \{a^G\} \rangle$ dir. Bu ise I nin maksimalliği ile çelişir. Bundan dolayı $v \notin N_G(W)$ dir.

(v) (iv) den dolayı $v \notin N_G(W)$ dir. $I < U$ olduğundan (ii) den dolayı

$$u \in N_U(I) \cap \{a^G\} \setminus I$$

elemanı vardır. (ii) den dolayı $u \in L(G)$ olduğundan $[v, {}_n u] = 1$ olacak şekilde bir n tamsayısı vardır. Bundan dolayı

$$[v, {}_k u], W = \langle N_U(I) \cap \{a^G\} \rangle$$

yi normalleyecek şekilde en az bir k tamsayısı vardır. $v \notin N_G(W)$ olduğundan $k > 0$ dir. $z = [v,_{k-1}u]$ olsun. $[z,u] = (u^z)^{-1}u \in N_G(W)$ olduğundan $u^z \in N_G(W)$ dir. (iv) de olduğu gibi $K = \langle u^z, W \rangle \in S$ dir. Böylece K , S nin bir maksimal R elemanı tarafından içerilir. Fakat W a-üreteçli olduğundan

$$I < W \leq \langle U \cap R \cap \{a^G\} \rangle$$

dir. $R \neq U$ ise, bu I nin maksimal seçimiyle çelişir. Bundan dolayı $U = R$ ise o zaman $u^z \in U$ dur. $u, v \in N_G(I)$ olduğundan $z = [v,_{k-1}u] \in N_G(I)$ dir. u^z, a ya eşlenik olduğundan

$$u^z \in N_U(I) \cap \{a^G\} \subseteq W$$

dir. $u \in W$ olduğundan $u^z \in W^z$ dir. Böylece $u^z \in U \cap W^z \cap \{a^G\}$ dir. $I \leq W$ ve $I = I^z \leq W^z$ dir. Böylece

$$I < \langle U \cap W^z \cap \{a^G\} \rangle$$

dir. W^z , nin S bir maksimal elemanı tarafından içerilir ise $W^z = U$ dur. Sonuç olarak $W^z \leq U$ ve

$$\begin{aligned} (N_G(I) \cap \{a^G\})^z &\subseteq N_G(I)^z \cap U \cap \{a^G\} \\ &= N_G(I) \cap U \cap \{a^G\} \\ &= N_U(I) \cap \{a^G\} \subseteq W \end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı $W^z \leq W$ dir. $W^z \neq W$ olduğu için $W^z < W$ dir. z nin negatif kuvvetleriyle eşleniklersek

$$W < W^{z^{-1}} < W^{z^{-2}} < \dots$$

yi elde ederiz. Bu ise maksimal şartı ile çelişir.

Teorem 5.7. nin ispatı

$G \in \text{Max}$ ve $a \in L(G)$ olsun. Teorem 5.8. den dolayı a^G sonlu üreteçli ve nilpotenttir. G nın H.P. radikali $H(G)$ olsun. O zaman $a^G \leq H(G)$ dir. Böylece $L(G) \subseteq H(G)$ dir. Fakat $H(G) \subseteq L(G)$ olduğundan $L(G) = H(G)$ dir.

Eğer $a \in \bar{L}(G)$ ise a^G nilpotent olduğundan $\langle a \rangle \triangleleft\triangleleft a^G \triangleleft G$ dir. Böylece $a \in B(G)$ olduğundan $\bar{L}(G) \subseteq B(G)$ dir. Fakat Teorem 5.2. (i) de $B(G) \subset \bar{L}(G)$ olduğundan $\bar{L}(G) = B(G)$ dir.

$$B(G) = \bar{L}(G) \subseteq L(G) = H(G)$$

oldüğundan $B(G) \subseteq H(G)$ dir. $x \in H(G)$ olsun. $x \in L(G)$ olduğundan x^G nilpotenttir. Böylece $\langle x \rangle \triangleleft\triangleleft x^G \triangleleft G$ olduğundan $x \in B(G)$ ve $H(G) \subseteq B(G)$ dir. O halde

$$\bar{L}(G) = B(G) = H(G) = L(G)$$

dir. Şimdi $a \in R(G)$ olsun. Teorem 5.1. den dolayı $a^{-1} \in L(G)$ dir. $(a^{-1})^G = a^G$ nilpotent ve sonlu üreteçtir. $A = a^G$ olsun. O zaman A/A' sonlu üreteçlidir. Böylece

$$A/A' = \langle a^{g_1} A', \dots, a^{g_n} A' \rangle$$

şeklinde yazılabilir. Her $xA' \in G/A'$ için xA' sağ engel elaman olduğundan $[a^{g_n} A', {}_n xA'] = \bar{1}$ olacak şekilde $n \geq 1$ vardır. Böylece $\langle A, x \rangle / A'$ nilpotenttir. Hall kriterinden dolayı $\langle A, x \rangle$ nilpotenttir.

A'nın yukarı merkez serisini faktörleri elemanter abeliyan veya sonlu rankın serbest abeliyanı olan G'nin kabul edilebilir serisine incelt. B böyle bir faktör olsun. O zaman x B üzerine tek türlü etki eder. Teorem 2.22 den dolayı G'nin B üzerindeki etkisi üstüçgenseldir. Sonuç olarak Teorem 5.2. den dolayı

$$\bar{R}(G) = Z_r(G)$$

dir.

6. GENEL SERİLERLE TANIMLI GRUPLARIN SINIFI

6.1. Tanım

G bir Ω -operatör grup olsun. G nin aşağıdaki şartları sağlayan, 1 ve G dahil olmak üzere içermeye göre lineer sıralı altgrupların kümesi S ye, G nin Ω -serisi denir.

- (i) Eğer $1 \neq x \in G$ ise S nin x i içermeyen terimleri vardır ve bu terimlerin birleşimi V_x S nin bir terimidir.
- (ii) Eğer $1 \neq x \in G$ ise S nin x i içeren terimleri vardır ve bu terimlerin kesişimi Λ_x S nin bir terimidir.
- (iii) $V_x \triangleleft \Lambda_x$
- (iv) G deki bazı $x \neq 1$ için, S nin her bir terimi V_x veya Λ_x formundadır.

Böylece $x \in \Lambda_x \setminus V_x$ dir. Λ_x / V_x bölüm grupları S nin faktörleridir. Ayrıca V_x ve Λ_x arasında S nin hiçbir terimi yeralmaz. Bundan dolayı $1 \neq x, y \in G$ için $\Lambda_x \leq V_y$ veya $\Lambda_y \leq V_x$ dir. Eğer $\Lambda_x \leq V_y$ ise, S nin faktörleri Λ_x / V_x in Λ_y / V_y den önce gelme kuralına göre lineer sıralıdır.

S nin terimlerinin sayısına S nin order tipi denir. S nin order tipi S nin faktörlerinin kümesinin order tipidir.

$$V_x = \bigcup \Lambda_y \text{ ve } \Lambda_x = \bigcap V_y$$

dir. Burada birleşim Λ_x / V_x den önce gelen ve kesişimde Λ_x / V_x den sonra gelen tüm Λ_y / V_y faktörleri üzerinde düzenlenmiştir.

Gerçekten Λ_y / V_y ; Λ_x / V_x den önce geliyorsa $\Lambda_y \leq V_x$ dir. Bundan dolayı

$$\bigcup \Lambda_y \leq V_x \text{ dir....(1)}$$

$t \in V_x$ olsun. O zaman $\Lambda_x \subseteq \bigcup \Lambda_y$ dir. O halde $t \in \bigcup \Lambda_y$ dir. Yani

$$V_x \subseteq \bigcup \Lambda_y \text{ dir....(2)}$$

(1) ve (2) den dolayı $V_x = \bigcup \Lambda_y$ dir. Diğeride benzer şekilde gösterilir.

Eğer S sonlu order tipine sahip ise S nin sonlu uzunlukta bir serisi vardır. Bu sonlu uzunluktaki en küçük V_x 1 e eşittir ve en geniş Λ_x G ye eşittir.

S bir β ordinal sayısının order tipine sahipse, seri bir artan seridir. S nin terimleri β ordinalin tersine göre indekslenmiş ise o zaman seriye azalan seri denir. Bu

$$1 \triangleleft \dots \triangleleft H_2 \triangleleft H_1 \triangleleft H_0 = G$$

şeklindedir. Burada α ordinal ve λ limit ordinal olmak üzere

$$H_{\alpha+1} \triangleleft H_\alpha \text{ ve } H_\lambda = \bigcup_{\gamma < \lambda} H_\gamma$$

dır.

6.1. Kompozisyon Serileri

Eğer S ve S^* , G nin Ω - serileri ve S nin her terimi S^* in da terimi ise S^* , S den daha incedir denir ve $S << S^*$ ile gösterilir. O zaman

$$V_x \leq V_x^* \leq \Lambda_x^* \leq \Lambda_x$$

dir. S G nin bir Ω - serisi olsun. $S \ll S^*$ olacak şekilde S den daha ince G nin S^* Ω - serisi yoksa S ye Ω - kompozisyon serisi denir. $\Omega = \emptyset$ ise yalnızca seri ve kompozisyon serisi kelimeleri kullanılır. Eğer Ω iç-otomorfizmalarının grubu ise o zaman seriye, normal seri ve kompozisyon serisine de esas seri denir.

6.1. Teorem

Her Ω -serisi bir Ω -kompozisyon serisine inceltilebilir.

İspat

G bir Ω -grubu ve S_0 , G nin Ω -serisi olsun

$$\chi = \{ K: S_0 \ll K, G \text{ nin } \Omega\text{-serisi} \}$$

$\chi \ll$ ye göre kısmi sıralıdır. $Y = \{ S^{(\gamma)} \mid \gamma \in \Gamma \}$, χ de bir zincir olsun. χ de Y için bir üst sınır oluşturalım. Eğer $1 \neq x \in G$ ise $V_x^{(\gamma)}, \Lambda_x^{(\gamma)} \in S^{(\gamma)}$ olmak üzere

$$V_x = \bigcup_{\gamma} V_x^{(\gamma)}, \Lambda_x = \bigcap_{\gamma} \Lambda_x^{(\gamma)}$$

şeklinde tanımlansın. Burada Γ de her bir γ için

$$V_x^{(\gamma)} \leq V_x \leq \Lambda_x \leq \Lambda_x^{(\gamma)}$$

dır. Böylece $S = \{ \Lambda_x, V_x : 1 \neq x \in G \}$ kümesi içermeye göre lineer sıralıdır. S nin Y için bir üst sınır olan bir seri olduğu açıktır. Şimdi Zorn Lemma dan dolayı χ in bir maksimal elamanı vardır. Fakat bu elaman G nin bir kompozisyon serisidir.

Bu teorem genel seriler için verilen Jordan–Hölder teoreminden farklıdır. Örneğin tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$

$$\dots 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < 2\mathbb{Z} < \mathbb{Z} \text{ ve } \dots 27\mathbb{Z} < 9\mathbb{Z} < 3\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

şeklinde iki kompozisyon serisine sahiptir. Fakat bunların izomorfik faktörleri yoktur.

6.2. Merkez Serisi Olan Gruplar

G bir grup ve S , G nin bir serisi olsun. Eğer S nin her terimi G de normal ve her bir Λ_x / V_x faktörü G / V_x in merkezinde ise S ye G nin bir merkez serisi denir. Bu özelliğe sahip gruplara Z - grupları denir.

6.2. Teorem

Eğer G bir lokal nilpotent grup ise o zaman G bir merkez seriye sahiptir.

İspat

Teorem 6.1. den dolayı G nin bir esas serisi vardır. Bu serinin faktörleri G nin esas faktörleridir ve Teorem 3.6. dan dolayı G nin merkezindedir.

Azalan merkez serisi olan gruplara örnek Z -gruplarıdır. Bu gruplar bazen hipermerkez gruplar olarak da adlandırılır ve bu grubun aşağı merkez serisi transfinite olarak devam edilirse birime ulaşır. En çok bilinen hipermerkez gruplar arasında residually nilpotent gruplar vardır. Hatta bu sınıf pekçok nilpotent olmayan grupların kapsandığı geniş bir sınıftır.

6.3. Serisel Altgruplar

Bir G grubunun herhangi bir serisinde olan bir altgruba serisel altgrup denir. Serisel altgrup, altnormal ve artan altgrupların bir genellemesidir. Serisel bir altgrup kendi normalleyenine ya da normal kapanışına eşit olabilir.

Burada bütün serisel altgruplarına sahip olan gruplarla ilgileniyoruz. Doğal olarak bunlar nilpotent grupları içerir. Bu tip gruplar, altgruplarının Frattini özelliklerinde karakterize edilebilir.

6.3. Teorem

G bir grup olsun. G nin her altgrubunun serisel olması için gerek ve yeter şart her $H \leq G$ için $H' \leq \text{Frat } H$ olmasıdır.

İspat

Her $H \leq G$ için $H' \leq \text{Frat } H$ şartı, H nin maksimal altgrubunun H da normal olması anlamına gelir. G nin her altgrubu serisel ve M H nin maksimal altgrubu olsun. G nin her altgrubu serisel olduğundan, G nin M yi içeren bir serisini elde etmek için H yı, G nin M yi içeren serisinin her terimi ile kesiştirelim. Fakat M H da maksimal olduğundan, elde edilen yeni seride H ile M ardışık olacağından $M \triangleleft H$ dir. Böylece $H' \leq \text{Frat } H$ dir.

Karşıt olarak her $H \leq G$ için $H' \leq \text{Frat } H$ olsun. $\chi, 1 \leq L \leq G$ nin incelmışleri olan altgrupların bütün zincirlerinin kümesi olarak tanımlansın ve Tanım 6.1. in ve normallik şartı (iii) dışında, bir serinin tanımındaki tüm şartlar sağlanıyor olsun. Teorem 6.1 deki gibi Zorn lemmadan dolayı χ in bir maksimal S elemanı vardır. Eğer X ve Y , S nin ardışık terimleri ise, o zaman S nin maksimalliğinden dolayı X, Y de maksimaldir. Böylece $Y' \leq \text{Frat } Y \leq X$ olduğundan $X \triangleleft Y$ dir ve S bir seridir. Sonuç olarak L, G de serialdir.

6.4. Teorem

Bir lokal nilpotent grubun her altgrubu seriseldir.

İspat

G bir lokal nilpotent grup ve M , G nin bir altgrubu olsun. G lokal nilpotent olduğundan, M de lokal nilpotenttir. O halde Teorem 3.5. den dolayı $M' \leq \text{Frat } M$ dir. Her $M \leq G$ için $M' \leq \text{Frat } M$ olduğundan Teorem 6.3 den dolayı, G nin her altgrubu seriseldir.

Fakat bunun tersi doğru değildir. Diğer yandan her altgrubu serisel olan bir grubun lokal nilpotent olmadığı Wilson [10] tarafından gösterilmiştir.

6.4. Genel Çözülebilir Gruplar

Seri kavramı genelleştirilmiş çözülebilir grupların sınıflarının oluşturulmasına olanak sağlar. En önemlilerinden bazılarını kısaca değineceğiz.

Abeliyan faktörlü bir seriye sahip olan bir gruba SN-grup denir. Bu çözülebilirliğin oldukça geniş bir genellemesidir. Örneğin asal mertebeli olmayan basit SN-grupların olduğu bilinir.[9]

Abeliyan faktörlü bir normal seriye sahip olan gruplara SI-gruplar denir. Teorem 7.2 de lokal çözülebilir grupların SI-gruplar olduğu gösterilmiştir. SI-grupların önemli bir alt sınıfı, abeliyan faktörlü artan bir normal seriye sahip grupların sınıfıdır. Bunlara hiperabeliyan gruplar denir. Çözülebilir gruplara bu kadar yakın olmasından dolayı nispeten işlevsel bir sınıftır.

6.5. Teorem (Černikov)

Bir SN-grubu G nin minimal şartı sağlaması için gerek ve yeter koşul, bir çözülebilir Černikov grup olmasıdır.

İspat

G bir çözülebilir Černikov grup ise Teorem 2.23 den dolayı G min şartını sağlar. Şimdi SN-grubu min şartını sağlasın. O zaman Teorem 2.24 den dolayı G nin sonlu indeksli birtek minimal altgrubu F vardır ve $F \neq 1$ dir. G bir SN-grup olduğundan dolayı, G nin faktörleri abeliyan olan bir serisi vardır. Minimal şartından dolayı bu serinin terimleri içermeye göre iyi sıralıdır. $S = \{S_i : i \in I\}$ G nin bir serisi olsun. G üzerinde $\leq$ bağıntısı şöyle tanımlansın: “ $X, Y \in S$ olmak üzere $X \leq Y$ olması için gerek ve yeter koşul $Y \subseteq X$ olmasıdır.”

$A \subseteq S$, $(A, \leq)$ kısmi sıralı ve $T = \{A_j : j \in J\}$ A nın bir zinciri olsun. O zaman

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$$

dir. G min şartını sağladığından dolayı öyle bir $n_0 \geq 1$ vardır ki

$$A_{n_0} = A_{n_0+1} = \dots$$

dir. Böylece A_{n_0} T nin bir maksimal elemanıdır. Zorn lemmadan dolayı A nın bir maksimal elemanı vardır. Bu eleman A^* olsun. O zaman her $X \in A$ için $A^* \leq X$ ise $A = A^*$ dir. Böylece $X \subseteq A^*$ ise $A^* = X$ dir. “ $\leq$ ” bağıntısına göre A^* A nın bir minimal elamanıdır.

G nin serisi $S = \{ S_i : i \in I \}$ olsun. O zaman S nin en küçük bir elemanı vardır. Bu eleman S_1 olsun. $S \setminus \{ S_1 \} \neq \Phi$ ise bir en küçük S_2 vardır ki $S_1 \triangleleft S_2$ dir. Bu şekilde devam edilirse

$$S_1 \triangleleft S_2 \triangleleft \dots S_\alpha = G$$

olacak şekilde en az bir α ordinali vardır.

Şimdi $\lambda < \alpha$ olsun. O zaman $S_{\lambda+1} / S_\lambda$ abeliyandır. Gerçekten $S_{\lambda+1}$, $S \setminus \{ S_1, \dots, S_\lambda \}$ kümesinin minimal elemanı olduğundan S_λ ile $S_{\lambda+1}$ arasında başka eleman yoktur. $S_{\lambda+1} / S_\lambda$ abeliyandır. Böylece G nin faktörleri abeliyan olan bir serisi vardır.

$F \neq 1$ olduğundan G nin artan serisini F ile arakesiti trivial olmayan bir en küçük terimi vardır. $A = \{ X \in S : X \cap F = \{ 1 \} \}$ olsun. $A \neq \emptyset$ dir. $A \subset S$ iyi sıralı, X_0 A nın en küçük elemanı ise $X_0 \cap F = \{ 1 \}$ ve her $X \in A$ için $X_0 \subseteq X$ olduğundan $X_0 \cap F \subseteq X \cap F$ dir. Bu terim G_α olsun.

α limit ordinal ise her $\lambda < \alpha$ için $G_\alpha = \bigcup_{\lambda < \alpha} G_\lambda$ dir. Böylece her $\lambda < \alpha$ için $G_\lambda \cap F = \{ 1 \}$ olduğundan $G_\alpha \cap F = \{ 1 \}$ dir. Bu bir çelişkidir.

α limit ordinal olmasın. $\alpha - 1$ vardır ve $G_{\alpha-1} \cap F = \{ 1 \}$ dir.

$$1 \neq G_\alpha \cap F \cong (G_\alpha \cap F) G_{\alpha-1} / G_{\alpha-1}$$

oldüğundan $G_\alpha \cap F$ abeliyandır.

$G_\alpha \cap F$, F de artandır ve lokal nilpotenttir. $G_\alpha \cap F$ Teorem 3.4. den dolayı F

nin bir H , Hirsch-plotkin radikalinde kapsanır. Teorem 4.6. dan dolayı H bir hipermerkez gruptur. Böylece $1 \neq Z(H) \triangleleft G$ dir. Teorem 2.25 den dolayı F, G nin trivial olmayan normal abeliyan altgrubu A yı içerir.

$1 \neq a \in A$ olsun. $N = a^G$ olsun. $N \triangleleft G$ ve $\exp(N) < \infty$ olduğundan ve G minimal şartını sağladığından N sonludur. Böylece $G / C_G(N)$ sonludur. Böylece $F \leq C_G(N)$ dir. $a \in Z(F)$ ise $A \leq Z(F)$ dir. Bundan dolayı $Z(F) \neq \langle 1 \rangle$ dir. $G = G / Z(F)$ olsun. $Z(G / Z(F)) \leq Z_2(F) / Z_1(F) \neq 1$ dir. Böylece $Z_1(F) \leq Z_2(F)$ dir. $z \in Z_2(F) \setminus Z_1(F)$ olsun.

O zaman $[zZ_1(F), xZ_1(F)] = 1$ ise $[z, x] \in Z_1(F)$ dir. Böylece $z^{-1}x^{-1}zx \in Z_1(F)$ dir. Dolayısıyla $x^{-1}zx \in zZ_1(F)$ dir. O halde $z^x = zz_1$ olacak şekilde $z_1 \in Z_1(F)$ dir. Böylece $|z_1|, |z|$ yi böler. $Z_1(F)$ min şartını sağladığı için z_1 in sayıları sonludur. Böylece $|\{z^x : x \in F\}| < \infty$ dur.

$$|F : C_F(z)| < \infty \text{ ise } F = C_F(z)$$

dir. O halde $z \in Z_1(F)$ dir. Bu bir çelişkidir. Böylece $F = Z(F)$ dir. Bundan dolayı G çözülebilir Černikov gruptur.

7. LOKAL ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLAR

Her sonlu üreteçli altgrubu çözülebilir olan gruba lokal çözülebilir grup denir. Genel olarak bu grup tipiyle uğraşmak lokal nilpotent gruplara göre daha zordur. Çünkü sonlu üreteçli altgrupların $\max$ ı sağlamasına gerek yoktur. Örneğin Hirsch-Plotkin teoreminin karşılığı yoktur [7].

7.1. Teorem

Eğer G bir lokal çözülebilir grup ise, G nin her esas faktörü abeliyandır.

İspat

Açık olarak G nin bir minimal altgrubu N nin abeliyan olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki N abeliyan olmasın. O zaman $c = [a, b] \neq 1$ olacak şekilde $a, b \in N$ vardır. $c \in N$ ve N , G nin minimal normal altgrubu olduğundan

$c^G = N$ dir. Böylece $a, b \in \langle c^{g_1}, \dots, c^{g_m} \rangle$ olacak şekilde $g_1, g_2, \dots, g_m \in G$ vardır. $H = \langle a, g_1, \dots, g_m, b \rangle$ olsun. G lokal çözülebilir olduğundan, H çözülebilirdir. $A = c^H$ olsun. $a, b \in A$ olduğundan $c = [a, b] \in A'$ dür. $A \triangleleft H$ olduğundan $A' \triangleleft H$ dir. $c^H \leq A'$ ise $A = A'$ olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $A=1$ ve $c = [a, b] = 1$ dir. Bundan dolayı N abeliyandır.

7.2. Teorem

Her lokal çözülebilir G grubu bir SI-grubudur. Böylece bir basit lokal çözülebilir grup asal mertebelidir.

İspat

Teorem 6.1 den dolayı G bir esas seriye sahiptir. G lokal nilpotenttir. Teorem 7.1 den dolayı faktörleri abeliyandır. Böylece G bir SI-grubudur. Diğer yandan sonsuz basit SN-grupların varlığı P.Hall tarafından gösterildi [7].

7.3. Teorem

Normal altgruplarda minimal şartı sağlayan bir lokal çözülebilir grup hiperabeliyandır.

Genel olarak min-n yi sağlayan bir lokal çözülebilir grup, bir Cernikov grup değildir. Hatta lokal çözülebilir grupların sınıfları ve hiperabeliyan gruplar kıyaslanamaz. Bu konularda daha fazla bilgi için [7] ye başvurunuz.

7.1. Normal Altgruplar Üzerinde Maksimal Şartını Sağlayan Lokal Çözülebilir Gruplar

7.4. Teorem (Mc Lain)

G max-n yi sağlayan bir lokal çözülebilir grup olsun. O zaman bir $p \geq 0$ sayısına, p nin her $r_1, r_2, \dots, r_p$ pozitif tamsayılar dizisi için

$G^{(m)} \leq \gamma_{r_p} (\dots \gamma_{r_2} (\gamma_{r_1} (G)) \dots)$ olacak şekilde $m = m(p, G)$ karşılık gelir.

İspat

$m(0, G) = 0$ olarak tanımlansın. O zaman iddia $p = 0$ için doğrudur. Kabul edelim ki $m = m(p, G)$ tanımlanan özellik olsun. Yani

$$G^{(m)} \leq \gamma_{r_p} (\dots \gamma_{r_2} (\gamma_{r_1} (G)) \dots)$$

dir. G/G^{m+1} max-n yi sağlayan çözülebilir bir grup olduğundan Teorem 2.27 den dolayı G/G^{m+1} sonlu üreteçlidir. Böylece $G = X G^{m+1}$ olacak şekilde sonlu üreteçli bir X altgrubu vardır. G lokal çözülebilir olduğundan X çözülebilirdir. Kabul edelim ki X in derived uzunluğu d olsun.

$$G = X G^{(m+1)} = X(G^{(m)})' \text{ ve } G^{m+1} \triangleleft G$$

olduğundan Lemma 2.2 den dolayı $G = X \gamma_{r_{p+1}}(G^{(m)})$ dir. Fakat $X^{(d)} = 1$ olduğundan

$$G^{(d)} \leq X^{(d)} \gamma_{r_{p+1}}(G^{(m)}) = \gamma_{r_{p+1}}(G^{(m)})$$

dir. Böylece

$$G^{(d)} \leq \gamma_{r_{p+1}}(\gamma_{r_p} \dots \gamma_{r_1}(G) \dots)$$

olduğundan $m(p+1, G) = d$ dir.

7.5. Teorem

G normal altgruplarda maksimal şartı sağlayan bir lokal çözülebilir grup olsun. O zaman G nin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart G nin sonlu üreteçli altgruplarının sınırlı nilpotent uzunluğuna sahip olmasıdır.

İspat

Kabul edelim ki G nin her sonlu üreteçli altgrubunun nilpotent uzunluğu $\leq \ell$ olsun. Teorem 7.4 den dolayı $m = m(\ell, G)$ vardır öyle ki $s_1, \dots, s_\ell$ için

$$G^{(m)} \leq \gamma_{s_\ell}(\dots \gamma_{s_1}(G) \dots)$$

dir. G/G^{m+1} sonlu üreteçli olduğundan, X sonlu sonlu üreteçli olmak üzere $G=XG^{(m+1)}$ şeklinde yazılır. Ayrıca X in nilpotentlik sınıfı $\leq \ell$ olduğundan öyle $r_1, r_2, \dots, r_\ell$ pozitif tamsayıları vardır ki

$$\gamma_{r_\ell}(\dots \gamma_{r_1}(x)\dots) = 1$$

dir. Böylece

$$G^{(m)} \leq \gamma_{r_\ell}(\dots \gamma_{r_1}(G)\dots) \leq \gamma_{r_\ell}(\dots \gamma_{r_1}(X)\dots) G^{(m+1)} = G^{(m+1)}$$

dir. O halde $G^{(m)} \leq G^{(m+1)}$ olduğundan $G^{(m)} = (G^{(m)})'$ dir.

$G^{(m)} \neq 1$ olsun. G max-n yi sağladığından M , $M \leq G^{(m)}$ ye göre maksimal olan G nin normal altgrubu olsun. $G^{(m)}/M$ G nin esas faktörü olduğundan ve Teorem 7.1 den dolayı $G^{(m)}/M$ abeliyandır. Böylece $(G^{(m)})' \leq M < G^{(m)}$ dir. Bu bir çelişkidir. O halde $G^{(m)} = 1$ dir. G çözülebilirdir.

7.6. Teorem (Mc Lain)

Normal altgruplarda maksimal şartı sağlayan bir lokal süperçözülebilir G grubu süperçözülebilirdir.

İspat

Eğer X G nin bir sonlu üreteçli altgrubu ise, o zaman X süperçözülebilirdir. Teorem 2.28 den dolayı X' nilpotenttir. Böylece X in nilpotentlik uzunluğu 2 yada daha azdır. Şimdi G nin çözülebilir olması sonucuna ulaşmak için Teorem 7.5. i uygulayalım.

Teorem 2.27 den dolayı G grubu sonlu üreteçlidir ve böylece süperçözülebilirdir.

7.1. Örnek

Max-n yi sağlayan çözümlü ve sonlu üreteçli olmayan lokal çözülebilir grular vardır.

Her i sayısı için bir tek minimal normal N_i olan sonlu üreteçli olmayan G_i grupları elde edilebilir.

$$G_1 = S_3 \text{ ise } N_1 = A_3 \triangleleft S_3$$

dür. G_i sonlu üreteçli ve N_i , G_i nin bir tek minimal normal altgrubu olsun. p bir asal sayı ve $p+|G_i|$ olsun. R , $GF(p)$ üzerinde G nin grup cebiri olsun. O zaman R sol R -modül olarak düşünüldüğünde Maschke's Teoreminden tam indirgenir. R nin her bir indirgenmez altmodülü sadık değil ise o zaman N_i , G_i nin indirgenmez gösterimlerinin çekirdeği içindedir. Bundan başka R sadık değildir. Böylece R nin sadık indirgenmez altmodülleri vardır.

Buna N_{i+1} diyelim. G_{i+1} i N_{i+1} toplamsal altgrubu ile G_i nin yarıdirek çarpımı olarak alırsak G_{i+1} sonlu çözümlü grup ve $N_{i+1} = C_{G_{i+1}}(N_{i+1})$ dir. Böylece N_{i+1} , G_{i+1} in tek minimal normal altgrubu olur. G ,

$$G_1 < G_2 < \dots$$

artan zincirinin birleşimi olsun. G lokal çözümlü ve torsiyon gruptur. G sonlu üreteçli değildir.

$1 \neq N \triangleleft G$ olsun. O zaman bir j için $N \cap G_j \neq 1$ ise N_i, G_i nin tek minimal normal altgrubu olduğundan $N_i \leq N$ dir ve $i > 1$ ise

$$N \cap G_i = N \cap (N_i G_{i-1}) = N_i (N \cap G_{i-1})$$

dir. $J, N \cap G_j \neq 1$ yi sağlayan ilk sayı olsun. O zaman

$$N = \langle N \cap G_j, N \cap G_{j+1}, \dots \rangle$$

$$N = \langle N_j, N_{j+1}, N_{j+2}, \dots \rangle$$

$G^{(i)}$, G nin derived serisinin $(J+1)$ inci terimi olsun.

$$G_{j+1} = N_{j+1} G_j = N_{j+1} (N_j) G_{j-1}$$

$$G_{j+2} = N_{j+2} G_{j+1} = (N_{j+2} N_{j+1} N_j) G_{j-1}$$

$\vdots$

$$G_k \leq N G_{j-1}$$

bulunur. O zaman

$$G = \bigcup_{k=j}^{\infty} G_k \subset N G_{j-1} \subseteq G$$

olduğundan $G = N G_{j-1}$ dir. Bundan dolayı G max-n yi sağlar. $d(G_j) = d_j$ olsun. $d_{j+1} \geq d_j + 1$ olduğunu gösterelim. $G_{j+1} = N_{j+1} G_j$ olduğundan

$$(G_{j+1})^{(d_{j-1})} = (N_{j+1} G_j)^{(d_{j-1})} \geq G_j^{(d_{j-1})} \neq 1$$

dir. Bundan dolayı $G_{j+1}^{(d_{j-1})} \neq 1$ dir. Böylece $N_{j+1} \leq G_{j+1}^{(d_{j-1})}$ olduğundan

$$G_{j+1}^{(d_{j-1})} = N G_j^{(d_{j-1})} \text{ dir.}$$

$$G_{j+1}^{(d_j)} \geq [N_{j+1} G_j^{(d_{j-1})}] \neq 1 \Rightarrow G_{j+1}^{(d_j)} \neq 1$$

dir. $d_1 = d(S_3) = d(G_1) = 2$ olduğundan $d_j(G_j) \geq J$ dir. Bundan dolayı G çözülebilir değildir.

$$G_{j+1} = N_{j+1} G_i$$

$$G_{j+1}^{(1)} = [N_{j+1}, G_j] G_j^{(1)} = N G_j^{(1)}$$

$\vdots$

$$G_{j+1}^{(d_{j-1})} = N_{j+1} G_j^{(d_{j-1})} \text{ ve } G_j^{(d_{j-1})} \neq 1$$

olduğundan

$$G_{j+1}^{(d_j)} = N_{j+1} \Rightarrow d_{j+1} = d_j + 1$$

dir. $d(G_1) = d_1 = 2$ olduğundan her $j \geq 1$ için $d(G_j) = j+1$ dir. Bundan dolayı $d(G) = \infty$ dur.

KAYNAKLAR

1. Robinson, D.J.S., "A course in the theory of groups 2nd ed.", Springer-Verlag-**New York, Berlin Heidelberg**, 1-385 (1996).
2. Golod E.S. "On nil-algebras and residually finite p -groups", *izv. Akadnauk SSSR Ser. Mat.*, 28 : 273-276 (1964)
3. Roseblade, J.E., "On groups in which every subgroup is subnormal ", *J. Algebra*, 2: 402-412 (1965)
4. Heineken, H. and Mohamed, I. J. "A group withe trivial centre satisfying the normalizer condition". *J. Algebra*, 10 : 368-376 (1968).
5. Kappe, L.-C. And Kappe, W.P., "On theree-Engel Groups", *Math. Soç.*, 7: 391-405 (1972).
6. Heineken, H., "Engelsche Elemente der Lange drei", *Illinois J. Math*, 5: 681-707 (1961).
7. Robinson, D.J.S., "Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups 2nd ed.", Springer-Verlag, **Berlin**, 1-110 (1972).
8. Wilson, J.S., "On periodic generalized nilpotent groups", *Bull London Math. Soc.*, 9: 81-85 (1977).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : YILDIZ Esengül
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 20.08.1978
Medeni hali : Evli
Telefon : 0 (312) 320 28 81
e-mail : esenguleren@yahoo.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Kocaeli Üniversitesi / Matematik Bölümü	1999
Lise	Şehremini Lisesi	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1999-2006	Cebeci A.M.L. ve K.M.L.	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap, Seyahat, Tiyatro