

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LOKAL OLMAYAN SINIR ŞARTLI SİNGÜLER
PERTÜRBE PROBLEMLER İÇİN BİR YAKLAŞIK
METOT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BERNA AKBULUT

DANIŞMAN

DOÇ. DR. DERYA ARSLAN

ŞUBAT 2023
BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LOKAL OLMAYAN SINIR ŞARTLI SİNGÜLER
PERTÜRBE PROBLEMLER İÇİN BİR YAKLAŞIK
METOT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BERNA AKBULUT

0000-0002-3802-7191

DANIŞMAN

DOÇ. DR. DERYA ARSLAN

ŞUBAT 2023
BİTLİS

T.C.

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI

ETİK BEYANI

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisiyim. Hazırlamış olduğum **“Lokal Olmayan Sınır Şartlı Singüler Pertürbe Problemler İçin Bir Yaklaşık Metot”** başlıklı tezde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi; tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu; tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi; kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı; bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim 20/02/2023

İmza

Berna AKBULUT

T.C.

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

TEZ YAZIM KILAVUZU UYGUNLUK BEYANI

“Lokal Olmayan Sınır Şartlı Singüler Pertürbe Problemler İçin Bir Yaklaşık Metot” başlıklı yüksek lisans tezi Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırlanmıştır. 20/02/2023

Tezi Hazırlayan

Danışman

İmza

İmza

Berna AKBULUT

Doç. Dr. Derya ARSLAN

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

İmza

Doç Dr. Derya ARSLAN

T.C.

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY SAYFASI

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı öğrencisi Berna AKBULUT tarafından hazırlanan “**Lokal Olmayan Sınır Şartlı Singüler Pertürbe Problemler İçin Bir Yaklaşık Metot**” adlı Yüksek Lisans Tezi ile ilgili tez savunma sınavı, 02/02/2023 tarihinde yapılmış ve tezin oy birliği ile kabul edilmesine karar verilmiştir.

JÜRİ:

Başkan: Doç. Dr. Yener ALTUN
(Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi)

Danışman: Doç. Dr. Derya ARSLAN
(Bitlis Eren Üniversitesi)

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Fatma BULUT
(Bitlis Eren Üniversitesi)

İMZA

.....

.....

.....

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun tarih ve sayılı kararıyla jüri tarafından kabul edilmiş bu çalışmanın yüksek lisans tezi olarak kabulü onaylanmıştır.

....../...../2023

Doç. Dr. Mehmet Bakır ŞENGÜL
Enstitü Müdürü

T.C.
Bitlis Eren Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

**LOKAL OLMAYAN SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE PROBLEMLER
İÇİN BİR YAKLAŞIK METOT**

Yüksek Lisans Tezi

Berna AKBULUT

Danışman: Doç. Dr. Derya ARSLAN

Şubat 2023

ÖZET

Bu tez çalışmasında, sağ veya sol sınır katları olan singüler pertürbe lokal olmayan sınır şartlara sahip problemlerin yaklaşık çözümü için nümerik integral metodu kullanılmıştır. Nümerik integral metodu içerisinde yamuk metodu ve sonlu fark metodu kullanılarak problemleri sonlu fark problemine dönüştürüp cebirsel bir denklem sistemi oluşturulmaktadır. Sunulan metodun doğruluğunu ve güvenilirliğini göstermek için dört örnek uygulaması verilmiştir. Bu uygulamaların algoritmaları uygun bir matematik programı yardımıyla çözülmüştür. Elde edilen yaklaşık sonuçlar gerçek sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Singüler Pertürbe Diferansiyel Denklem, İntegro-Diferansiyel Denklem, Nümerik İntegral Metodu, Sınır Katı, Yaklaşık Çözüm.

Republic of Türkiye

Bitlis Eren University Graduate School

Department of Mathematics

**A NUMERICAL METHOD FOR SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS
WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS**

Master's Thesis

Berna AKBULUT

Supervisor: Doç. Dr. Derya ARSLAN

February 2023

ABSTRACT

In this thesis, numerical integral method is used for approximate solution of singularly perturbed problem with nonlocal boundary conditions. An algebraic equation system is created by transforming the problems into finite difference problems by using trapezoidal method and finite difference method within the numerical integral method. Four example applications are given to demonstrate the accuracy and reliability of the presented method. The algorithms of these applications are solved with the help of a suitable mathematical program. The approximate results obtained were compared with the exact results.

Keywords: Singularly Perturbed Equation, Integro-Differential Equation, Numerical Integration Method, Boundary Layer, Approximate Solution.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması sırasında, tez konusunun belirlenmesinden başlayarak son aşamaya kadar her konuda benden yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Derya ARSLAN 'a en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde büyük emekleri olan annem Nazife'ye, babam Şakir'e, yoğun çalışma temposunda benden maddi ve manevi desteğini esirgemeyen eşim Akif'e ve varlığıyla hayatıma anlam katan canım oğlum Fettah Emir'e teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	5
3.1. Nümerik İntegral Metodu.....	5
3.1.1. Sağ Sınır Katlı Problem İçin Nümerik İntegral Metodu.....	5
3.1.2. Sol Sınır Katlı Problem İçin Nümerik İntegral Metodu.....	6
4. BULGULAR.....	9
4.1. Nümerik İntegral Metodu Uygulamaları.....	9
5. TARTIŞMA.....	22
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	23
KAYNAKLAR.....	24

1.GİRİŞ

Singüler pertürbe problemlere olan ilgi ve çalışmalar 20. yy da asimtotik açılım yapılarak başlanmıştır. Daha sonraları çeşitli yaklaşık yöntemler ile günümüze kadar gelmiştir [1]. Singüler pertürbe problemler mühendislik, fen bilimleri, tıp, meteoroloji, iletişim hatları gibi fiziksel modellerde görülmektedir [23-29]. Bu kadar çeşitli bilim alanlarında yer bulan singüler pertürbe denklemi tanımlamak gerekirse, denklemde en yüksek mertebeden türevin katsayısında $0 < \varepsilon \ll 1$ pozitif parametresinin var olması demektir [1]. Bu parametre tanım bölgesinde sınır katları meydana getirir ve bu yerlerde çözümün davranışı aniden, hızlı bir şekilde değişir. Çözüm bölgesinin diğer kısımlarında da yavaş ve düzenli bir değişim gösterir [1]. Bu durumlar singüler pertürbe problemlerin çözümünde sınırsız türevler oluşturmaktadır. Bu nedenle kararlı çözümler veren sonlu fark yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi ve pertürbasyon teknikleri gibi yöntemler tercih edilmektedir. Literatüre bakıldığında singüler pertürbe lokal sınır değerli problem gibi lokal olmayan sınır değerli singüler pertürbe problemlerin yaklaşık çözümlerinin çeşitli metotlar kullanılarak incelendiği de gözlenmektedir [2,4-18]. İkinci mertebe lokal olmayan sınır değerli problemlerin varlık-teklik çalışmaları da yapılmıştır [22].

Nümerik integral metodu, yaklaşık çözümü araştırılan denklemin ayırık noktalarda integrali alındıktan sonra geriye kalan türevli terimler için fark türevleri yazılır. İntegrali alınamayan terimler için de yamuk metodu kullanılır. En sonunda bir cebirsel sistem oluşur. Bu sistem Thomas algoritması vasıtasıyla çözümlenerek nümerik çözüm bulunur. Nümerik integral metodu ve singüler pertürbe problemlere uygulandığı bazı bilim insanları tarafından çeşitli çalışmalarda görülmektedir [3, 5, 9, 19, 20, 21].

Bu tez çalışmasının planı şöyledir:

Çalışmanın ilk bölümü olan Giriş Bölümünde literatür bilgisi verilir. İkinci Bölümde, tanım ve teoremler yer alır. Üçüncü Bölümde, yaklaşık metot anlatılır. Dördüncü Bölümde, örnek uygulamaları yapılır. Son bölümlerde ise çalışmanın tartışma ve sonuçları verilir.

Çalışmada, aşağıda verilen singüler pertürbe lokal olmayan sınır değer problem tipleri nümerik integral metodu ile yaklaşık olarak çözülür [5,9]:

$$\varepsilon v''(x) + b(x)v'(x) + c(x)v(x) = g(x), \quad 0 < x < l, \quad (1.1)$$

$$v(0) = K, \quad v(l) = L, \quad (1.2)$$

burada K veya L sonlu sabitler ya da lokal olmayan noktalardır; $b(x)$, $c(x)$ ve $g(x)$ sürekli fonksiyonlardır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu kısımda tezin sonraki kısımlarında temel teşkil edecek olan bazı temel bilgiler verilir.

Tanım 2.1. Sonlu Fark Yöntemi

Diferansiyel denklemde türevler için sonlu fark türevleri getirilirse fark denklemi elde edilir. Yeni denklem bir lineer cebirsel denklem sistemidir [1].

Tanım 2.2. Yamuk Yöntemi

Bir $h(x)$ fonksiyonunun bir sonlu $[a, b]$ aralığı üzerinden yaklaşık integraline

$$\int_a^b h(x)dx \approx \frac{b-a}{2} [h(a) + h(b)] \quad (2.1)$$

yamuk yöntemi denir [1].

Tanım 2.3. Sınır Katı

Singüler pertürbe problemin çözümünün ani hızlı değişebildiği noktanın komşuluğuna, o noktaya ait sınır katı denir [1].

Tanım 2.4. Düzgün Şebeke

$[0, l]$ aralığı için eşit h aralıklı sonlu parçadan oluşan noktalar kümesine şebeke denir. x_i noktalarına ise şebeke düğümleri denir.

$$\omega_h = \left\{ x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, 2, \dots, N \text{ ve } h = \frac{l-0}{N} \right\},$$

ifadesi de düzgün şebeke olarak tanımlanır[1].

Tanım 2.5. Thomas Algoritması

$$A_j y_{j-1} - C_j y_j + B_j y_{j+1} = -F_j, \quad j = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$y_0 = k_1 y_1 + \lambda_1, \quad y_M = k_2 y_{M-1} + \lambda_2,$$

bu bir denklem sistemidir. Bu denklem sistemini çözen prosedür aşağıda verilen Thomas algoritmasıdır [1].

$$y_j = \alpha_{j+1}y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = M-1, \dots, 2, 1.$$

$$\alpha_{j+1} = \frac{B_j}{C_j - \alpha_j A_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{A_j \beta_j + F_j}{C_j - \alpha_j A_j}, \quad (C_j - \alpha_j A_j \neq 0), \quad j = 1, \dots, M-1.$$

$$\alpha_1 = k_1, \quad \beta_1 = \lambda_1,$$

Tanım 2.6. İntegro-Diferansiyel Denklemler

İçlerinde bilinmeyen fonksiyonun türevlerini bulunduran denklemlere integro-diferansiyel denklemler denir ve

$$s'(x) = h(x) + \mu \int_0^x n(x, t) s(t) dt,$$

Volterra integro-diferansiyel denklemdir. Burada $s(x)$ ve $h(x)$ sürekli fonksiyonlar, μ parametre, $n(x, t)$ çekirdek fonksiyondur [28].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Nümerik İntegral Metodu

Bu bölümde, sırasıyla sağ ve sol sınır katları olan singüler pertürbe problemin yaklaşık çözümü için nümerik integral metodunu sunulur.

3.1.1. $b(x) < \alpha < 0$ için Nümerik İntegral Metodu

(1.1) denkleminde $b(x) < \alpha < 0$ olması durumunda $x=1$ noktasına sınır katı denir. Yani problem sağ sınır katı olan bir problemidir. Şebekeyi belirlemek için $[a, b]$ aralığı N tane $\frac{b-a}{N} = h$ parçalara ayrılır ve şebeke düzgün oluşur.

$$\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N\}.$$

Nümerik integral metodu, (1.1) denkleminde her terimin x_{i-1} den x_i 'ye integrali alınarak başlar.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varepsilon v''(x) - b(x)v'(x) + c(x)v(x)]dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

ve

$$\varepsilon v'(x_i) - \varepsilon v'(x_{i-1}) - b_i v(x_i) + b_{i-1} v(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x)v(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx,$$

yukarıda bulunan ilk iki türev için $v'_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}$, $v'_{i-1} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h}$ fark türevleri yazılır ve aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\varepsilon \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right) - \varepsilon \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) - b_i v(x_i) + b_{i-1} v(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x)v(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx.$$

Buradaki integraller için ise yamuk metodu kullanılır ve

$$\varepsilon \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right) - \varepsilon \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) - b_i v_i + b_{i-1} v_{i-1} + \frac{h}{2} [c_i v_i + c_{i-1} v_{i-1}] = \frac{h}{2} [g_i + g_{i-1}],$$

denklemini oluştur. Bu denklemde bazı düzenlemeler yapılırsa

$$v_{i-1} \left(\frac{\varepsilon}{h} + b_{i-1} + h \frac{c_{i-1}}{2} \right) - v_i \left(\frac{2\varepsilon}{h} + b_i - h \frac{c_i}{2} \right) + v_{i+1} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right) = \frac{h}{2} [g_i + g_{i-1}],$$

$i = 1, 2, \dots, N-1$ için fark denklemi bulunur, burada sınır değerler de ilave edilirse aşağıdaki sonlu fark problemi bulunur [5]:

$$v_{i-1} \left(\frac{\varepsilon}{h} + b_{i-1} + h \frac{c_{i-1}}{2} \right) - v_i \left(\frac{2\varepsilon}{h} + b_i - h \frac{c_i}{2} \right) + v_{i+1} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right) = \frac{h}{2} [g_i + g_{i-1}], \quad (3.1)$$

$$v_0 = A, \quad v_N = \sum_{i=0}^{m-2} n_i v_{N_i}.$$

(3.1) fark probleminin yaklaşık çözümü Thomas algoritması sayesinde bulunur.

$$A_i = \frac{\varepsilon}{h} + b_{i-1} + h \frac{c_{i-1}}{2}, \quad B_i = \frac{\varepsilon}{h}, \quad C_i = \frac{2\varepsilon}{h} + b_i - h \frac{c_i}{2}, \quad F_i = -\frac{h}{2} [g_i + g_{i-1}],$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i + \beta_i A_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \alpha_1 = A, \quad \beta_1 = 0.$$

$$v_i = \alpha_{i+1} v_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 2, 1,$$

3.1.2. $b(x) > \alpha > 0$ için Nümerik İntegral Metodu

(1.1) denkleminde $b(x) > \alpha > 0$ olması halinde $x=0$ sınır noktası sol sınır katıdır.

$i = 0, 1, \dots, N-1$ için (1.1) denkleminde 3.1.1'e benzer işlemlerle

$$\varepsilon v'(x_{i+1}) - \varepsilon v'(x_i) + b_{i+1}v(x_{i+1}) - b_i v(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} c(x)v(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx,$$

denklemini elde edilir, buradaki birinci türevler yerine $v'_{i+1} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}$, $v'_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{h}$ sonlu

fark türevleri yazılırsa

$$\varepsilon \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right) - \varepsilon \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) + b_{i+1}v(x_{i+1}) - b_i v(x_i) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x)v(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx,$$

elde edilir ve integraller için de yamuk metodu kullanılarak

$$\varepsilon \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right) - \varepsilon \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) + b_{i+1}v_{i+1} - b_i v_i + \frac{h}{2} [c_{i+1}v_{i+1} + c_i v_i] = \frac{h}{2} [g_{i+1} + g_i],$$

denklemini elde edilir, burada bazı düzenlemeler yapılırsa

$$v_{i-1} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right) - v_i \left(\frac{2\varepsilon}{h} + b_i - h \frac{c_i}{2} \right) + v_{i+1} \left(\frac{\varepsilon}{h} + b_{i+1} + h \frac{c_{i+1}}{2} \right) = \frac{h}{2} [g_i + g_{i-1}],$$

sonlu fark denklemini ortaya çıkar [5].

$$v_{i-1} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right) - v_i \left(\frac{2\varepsilon}{h} + b_i - h \frac{c_i}{2} \right) + v_{i+1} \left(\frac{\varepsilon}{h} + b_{i+1} + h \frac{c_{i+1}}{2} \right) = \frac{h}{2} [g_i + g_{i-1}],$$

(3.2)

$$v_0 = A, v_N = \sum_{i=0}^{m-2} c_i v_{N_i}.$$

(3.2) sonlu fark şemasının çözümü için aşağıdaki gibi Thomas algoritması kullanılır.

$$A_i = \frac{\varepsilon}{h}, B_i = \frac{\varepsilon}{h} + a_{i+1} + h \frac{b_{i+1}}{2}, C_i = \frac{2\varepsilon}{h} + a_i - h \frac{b_i}{2}, F_i = -\frac{h}{2} [f_i + f_{i-1}],$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \beta_{i+1} = \frac{F_i + \beta_i A_i}{C_i - \alpha_i A_i}, i = 1, 2, \dots, N-1,$$

(3.3)

$$v_i = \alpha_{i+1} v_{i+1} + \beta_{i+1}, i = N-1, \dots, 2, 1, \quad \alpha_1 = A, \quad \beta_1 = 0.$$

Bu algoritmalar uygun bir matematik programı yardımı ile çözümlenerek yaklaşık çözüm bulunur.



4. BULGULAR

4.1. Nümerik İntegral Metodu Uygulamaları

Önceki bölümlerde nümerik integral metodunun teorisi anlatıldı. Bu bölümde ise metodun etkinliğini, zaman açısından ekonomikliğini ve güvenilirliğini göstermek için bazı örnek uygulamalar verilir.

Uygulama 1: [9]

$$-\varepsilon v''(x) + v'(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad (4.1)$$

$$v(0) = 0, \quad v(1) = d + v(0.25) + 2v\left(\frac{1}{3}\right) + 3v(0.5), \quad (4.2)$$

probleminin tam çözümü

$$v(x) = x - \frac{\exp\left(\frac{x-1}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)}{1 - \exp\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)},$$

olarak verilen lokal olmayan sınır değerli singüler pertürbe problem nümerik integral metodu ile şöyle çözülür:

(4.1) denkleminde $b(x) < 0$ olduğu için $x=1$ noktasında (4.1)-(4.2) problemi sağ sınır kata sahiptir. Bu durumda 3.1.1 bölümünde verilen çözüm adımları izlenir. İlk olarak (4.1) denkleminin integrali alınır.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [-\varepsilon v''(x) + v'(x)] dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} v''(x) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} v'(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx,$$

$$-\varepsilon v'(x_i) + \varepsilon v'(x_{i-1}) + v(x_i) - v(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx,$$

olur. Burada $v'_i(x_i) = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}$, $v'_{i-1}(x_{i-1}) = \frac{v_i - v_{i-1}}{h}$, sonlu fark türevleri yazılır ve aşağıdaki denklem elde edilir:

$$-\varepsilon \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right) + \varepsilon \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) + v(x_i) - v(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx,$$

bu denklemdeki integral için yamuk metodu kullanılırsa

$$-\varepsilon \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right) + \varepsilon \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) + v(x_i) - v(x_{i-1}) = \frac{h}{2} (g_i + g_{i-1}),$$

ve denklem yeniden düzenlenirse

$$v_{i-1} \left(-\frac{\varepsilon}{h} - 1 \right) - v_i \left(-\frac{2\varepsilon}{h} - 1 \right) + v_{i+1} \left(-\frac{\varepsilon}{h} \right) = h,$$

sonlu fark denklemi ve fark sınır değerler bulunur.

$$v_{i-1} \left(-\frac{\varepsilon}{h} - 1 \right) - v_i \left(-\frac{2\varepsilon}{h} - 1 \right) + v_{i+1} \left(-\frac{\varepsilon}{h} \right) = h,$$

(4.3)

$$v(x_0) = 0, \quad v(x_N) - v \left(\frac{x_N}{4} \right) - 2v \left(\frac{x_N}{3} \right) - 3v \left(\frac{x_N}{2} \right) = 2.$$

(4.3) sonlu fark problemini çözmek için (3.3) Thomas algoritması kullanılır. Sonuçta $v(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ yaklaşık çözümlerine ulaşılır. Thomas algoritması ise şöyledir:

$$A_i = -(\varepsilon - h)h^{-1}, \quad B_i = -\varepsilon h^{-1}, \quad C_i = -2\varepsilon h^{-1} - 1, \quad F_i = -h, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0,$$

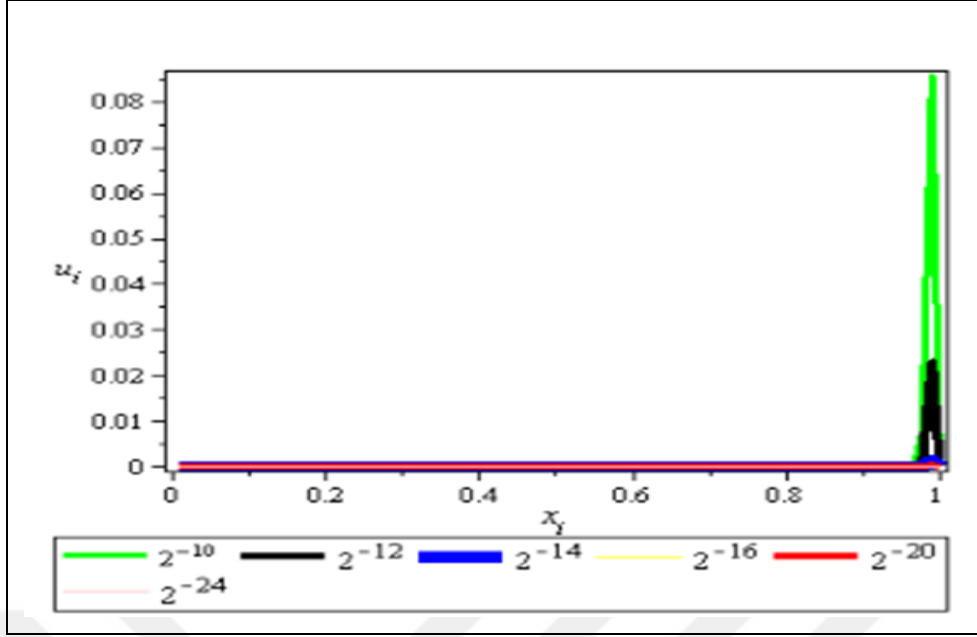
$$\alpha_{i+1} = \frac{\left(-\frac{\varepsilon}{h}\right)}{\left(-\frac{2\varepsilon}{h} - 1\right) - \left(-\frac{\varepsilon}{h} - 1\right)\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{h + \left(-\frac{\varepsilon}{h} - 1\right)\beta_i}{\left(-\frac{2\varepsilon}{h} - 1\right) - \left(-\frac{\varepsilon}{h} - 1\right)\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$v_i = \alpha_{i+1}v_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 2, 1.$$

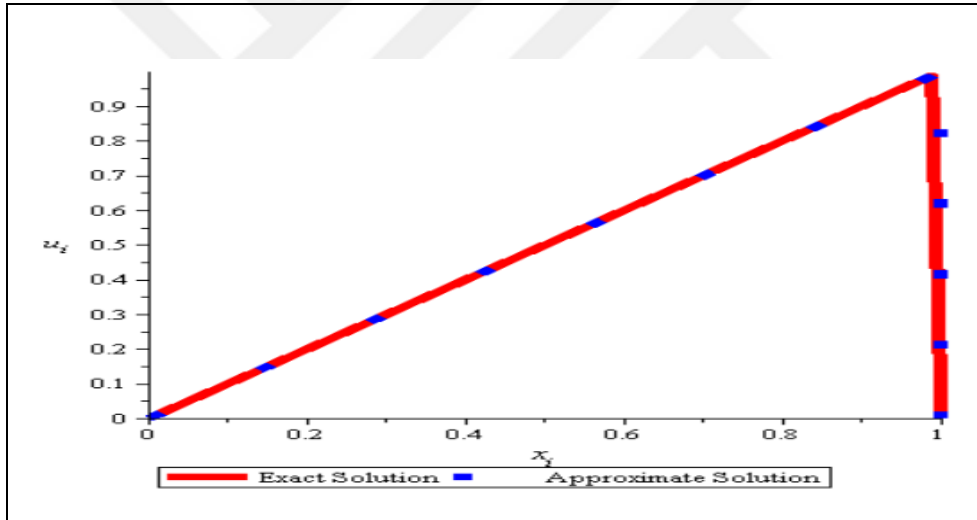
Bu algoritma için uygun bir matematik programı ile $N = 48, 96, \dots, 384$ ve $\varepsilon = 2^{-10}, 2^{-14}, \dots, 2^{-38}$ için nümerik sonuçlar elde edilir. Bu değerler için maksimum hatalar bulunur ve Çizelge 4.1 ile gösterilir. Yine tam çözüm, yaklaşık çözüm ve hata eğrileri çizilir. Sırasıyla Şekil 4.1 ve 4.2 ile gösterilir.

Çizelge 4.1. Maksimum hata değerleri

ε	N=48	N=96	N=192	N=384
2^{-10}	0.2032438190	0.1530668055	0.0856909703	0.0447761203
2^{-12}	0.0856909697	0.0447761249	0.0229007603	0.0115830129
2^{-14}	0.0229007511	0.0115830173	0.0058252399	0.0029211313
2^{-16}	0.0058252314	0.0029211358	0.0014626985	0.0007318875
2^{-18}	0.0014626899	0.0007318917	0.0003660741	0.0001830965
2^{-20}	0.0014626899	0.0001831732	0.0000914943	0.0000457989
...	...	...	...	...
2^{-35}	0.0000000018	0.0000000008	0.0000000004	0.0000000003



Şekil 4.1. $N = 96$ için hata grafikleri



Şekil 4.2. $N = 96, \varepsilon = 2^{-20}$ için kesin ve yaklaşık çözüm eğrileri

Çizelgede N ve ε değerlerinde maksimum hatalar yarılanarak ilerler. Kesin çözüm ve yaklaşık çözüm eğrileri çakışır. Hata eğrilerinin $x = 1$ civarı olan sınır katı bölgelerinde maksimum olduğu diğer yerlerde ise minimum olduğu görülür. Hataların maksimum olma nedeni de sınır katı bölgesinde çözümün ani ve hızlı bir şekilde bozulmasıdır. Minimum olma nedeni ise sınır katı dışındaki yerlerde çözümün yavaş ve düzenli olmasıdır. Metodun hatası birinci mertebededir. Yani $O(h)=1$. Bu da nümerik integral metodunun çalışmada ele alınan problemleri ne kadar hızlı ve güvenilir bir şekilde çözdüğünün göstergesidir.

Uygulama 2: [9]

$$\varepsilon v''(x) + v'(x) = 1 + 2x, \quad 0 < x < 1,$$

(4.4)

$$v(0) = 0, \quad v(1) - v(0.5) = d,$$

$$d \approx \frac{1}{4} + \varepsilon - (2\varepsilon - 1) \frac{1 - e^{-\frac{1}{2\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}},$$

$$v(x) = x(x + 1 - 2\varepsilon) + (2\varepsilon - 1) \frac{1 - e^{-\frac{x}{2\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}},$$

Görüldüğü gibi problemin $x=0$ noktasında sol sınır katı vardır ve buna göre nümerik integral metodu ile şöyle çözülür:

Öncelikle (4.4) probleminde denklemin $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varepsilon v''(x) + v'(x)] dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1 + 2x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\varepsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} v''(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} v'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1 + 2x) dx,$$

$$\varepsilon v'(x_{i+1}) - \varepsilon v'(x_i) + v(x_{i+1}) - v(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1 + 2x) dx,$$

$$\varepsilon \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right) - \varepsilon \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) + v(x_{i+1}) - v(x_i) = \frac{h}{2} (g_{i+1} + g_i), \quad g_i = 1 + 2x,$$

bulunur. Bu denklem aşağıdaki gibi düzenlenir ve fark denklemi bulunur. Sınır değerler için fark sınır değerler de yazılırsa

$$v_{i-1}\left(\frac{\varepsilon}{h}\right) - v_i\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 1\right) + v_{i+1}\left(\frac{\varepsilon}{h} + 1\right) = h(x_{i+1} + x_i + 1),$$

$$v(x_0) = 0, \quad v(x_N) - v\left(\frac{x_N}{2}\right) = d,$$

fark problemi bulunur.

$$A_i = \varepsilon h^{-1}, \quad B_i = \varepsilon h^{-1} + 1, \quad C_i = 2\varepsilon h^{-1} + 1, \quad F_i = -(x_{i+1} + x_i + 1)h,$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0,$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{h} + 1\right)}{\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 1\right) - \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{h(x_i + x_{i+1}) + \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\beta_i}{\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 1\right) - \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

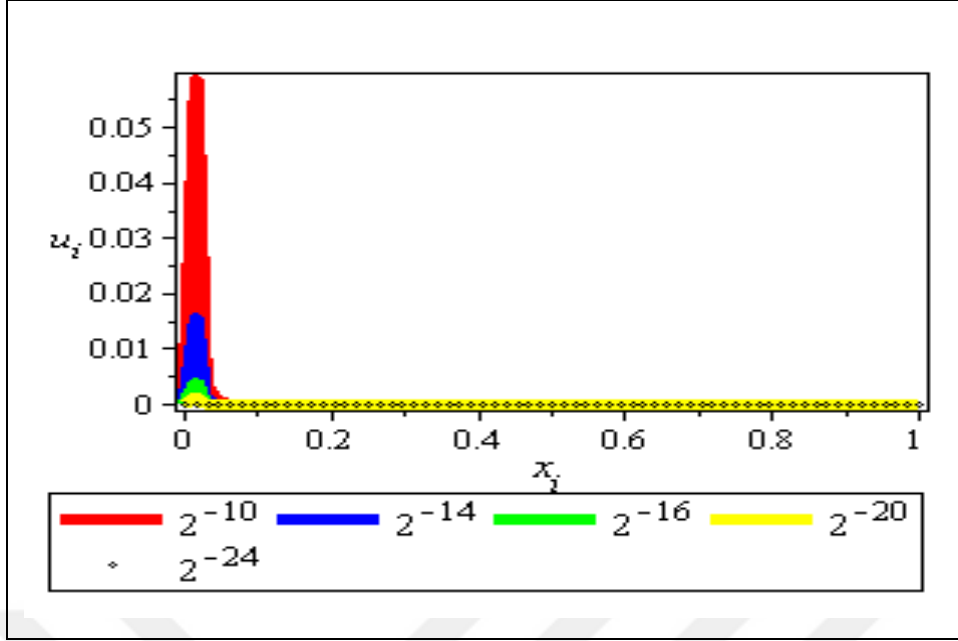
$$v_i = \alpha_{i+1}v_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 2, 1.$$

$N = 32, 64, \dots, 256$ ve $\varepsilon = 2^{-10}, 2^{-12}, \dots, 2^{-38}$ değerleri için maksimum hatalara ulaşılır.

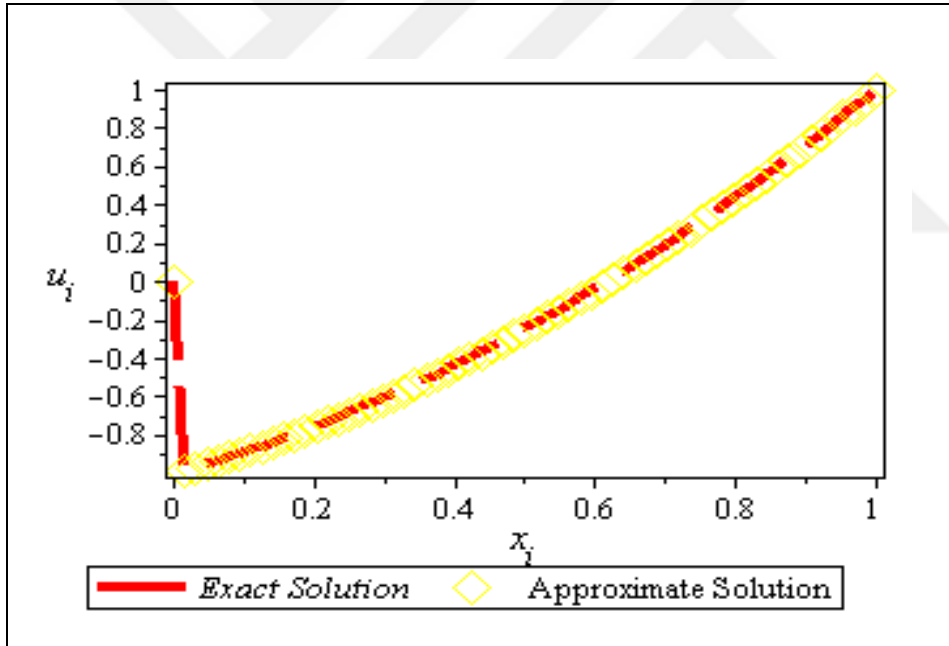
Tam çözüm, nümerik çözüm ve hata eğrilerinin N ve ε değerleri için şekilleri çizilir.

Çizelge 4.2. Maksimum hata değerleri

ε	N=32	N=64	N=128	N=256
2^{-10}	0.1813295077	0.1105592894	0.0587085267	0.0302438457
2^{-12}	0.0587946935	0.0302882346	0.0153771031	0.0077481537
2^{-14}	0.0153827368	0.0077509918	0.0038905760	0.0019490796
2^{-16}	0.0038909322	0.0019492576	0.0009755872	0.0004880281
2^{-18}	0.0009756416	0.0004880383	0.0002440706	0.0001220595
2^{-20}	0.0002440396	0.0001220755	0.0000610314	0.0000305131
...	...	...	...	...
2^{-38}	0.0000000012	0.0000000002	0.0000000002	0.0000000001



Şekil 4.3. $N = 64$ için hata eğrisi



Şekil 4.4. $N = 64$, $\varepsilon = 2^{-20}$ için kesin ve yaklaşık çözüm eğrileri

Uygulama 3:

$$\varepsilon v''(x) + v'(x) = 1, \quad 0 < x < 1,$$

(4.5)

$$v(0) = \varepsilon(\varepsilon - 1)(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}), \quad \int_0^1 v(x) dx = \varepsilon - \frac{1}{4}$$

$$v(x) = x + \varepsilon(\varepsilon - 1)(1 - e^{-\varepsilon^{-1}}) + (\varepsilon - 1)(1 - e^{-x_i \varepsilon^{-1}})$$

(1.1) denkleminde $b(x) > \alpha > 0$, $x = 0$ sol sınır katıdır. Dolayısı ile (4.5) problemi sol sınır katlı bir problemidir.

Çözüm için ilk olarak (4.5) problemine ait denklemde tüm terimlerin $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında integralini alınır.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varepsilon v''(x) + v'(x)] dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} 1 dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\varepsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} v''(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} v'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} 1 dx,$$

$$\varepsilon v'(x_{i+1}) - \varepsilon v'(x_i) + v(x_{i+1}) - v(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} 1 dx,$$

burada $v'_{i+1} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}$, $v'_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{h}$ fark yaklaşımları yukarıdaki ifade de yerlerine yazılır ve aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\varepsilon \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right) - \varepsilon \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) + v(x_{i+1}) - v(x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} 1 dx,$$

bu denklemde bulunan integraller için yamuk metodu kullanılır ve

$$\varepsilon \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right) - \varepsilon \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) + v(x_{i+1}) - v(x_i) = \frac{h}{2} (f(x_{i+1}) + f(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

olur. Burada bu denklem v_{i-1} , v_i ve v_{i+1} katsayılarına göre düzenlenirse

$$v_{i-1}\left(\frac{\varepsilon}{h}\right) - v_i\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 1\right) + v_{i+1}\left(\frac{\varepsilon}{h} + 1\right) = h,$$

fark denklemi ve sınırlara karşılık gelen fark sınır değerler bulunur.

$$v_{i-1}\left(\frac{\varepsilon}{h}\right) - v_i\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 1\right) + v_{i+1}\left(\frac{\varepsilon}{h} + 1\right) = h,$$

$$v_0 = \varepsilon(\varepsilon - 1)(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}), \quad v_N = \left[\varepsilon - \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{N-1} h v_i \right] h^{-1},$$

fark probleminin çözümü yine aşağıdaki algoritma ile elde edilir.

$$A_i = \varepsilon h^{-1}, \quad B_i = \varepsilon h^{-1} + 1, \quad C_i = 2\varepsilon h^{-1} + 1, \quad F_i = -h,$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \varepsilon(\varepsilon - 1)(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}),$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{h} + 1\right)}{\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 1\right) - \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{h + \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\beta_i}{\left(\frac{2\varepsilon}{h} + 1\right) - \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$v_i = \alpha_{i+1}v_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 2, 1.$$

Thomas algoritması kullanılarak yukarıda verilen çözüm akışı uygun bir matematik programıyla çözülür ve nümerik verilere ulaşılır. $N = 64, 128, \dots, 256$ ve $\varepsilon = 2^{-8}, 2^{-10}, \dots, 2^{-40}$ değerleri için birinci mertebeden hatalar bulunur. Çalışılan yöntemin singüler pertürbe lokal olmayan problemler için gayet elverişli ve zaman açısından ekonomik olduğunu gösterilir.

Çizelge 4.3. Maksimum hata değerleri

ε	N=64	N=128	N=256	N=512
2^{-12}	0.1815069339	0.0856909697	0.1106674686	0.0587659709
2^{-14}	0.0303011814	0.0153836758	0.0077514651	0.0038908135
2^{-20}	0.0004880419	0.0002439550	0.0001221176	0.0000610316
2^{-35}	0.0000000015	0.0000001334	0.0000000586	0.0000000002
2^{-40}	0.0000002544	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

Uygulama 4: [5]

$$\varepsilon v''(x) + 2v'(x) + \int_0^x v(s)ds = \frac{x}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - e^{-\frac{2x}{\varepsilon}}\right), \quad x \in [0,1],$$

(4.7)

$$v(0) = 0, \quad v(1) = \left(1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right) / 2,$$

$$v(x) = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2x}{\varepsilon}}\right)$$

(4.7) örneğinde $b(x) > 0$, $x=0$ sol sınır katıdır. Dolayısı ile (4.7) problemi sol sınır katlı bir problemidir. (4.7) probleminde denklemin her terimi $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında integre edililip gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varepsilon v'' + 2v'] dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_0^x v(s) ds dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{x}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - e^{-\frac{2x}{\varepsilon}}\right) \right] dx, \quad (4.8)$$

oluşur. Bu denklemde integral alındıktan sonra v'_{i+1} ve v'_i türevleri için

$$v'_{i+1} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}, \quad v'_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{h},$$

sonlu fark türevleri kullanılır ve diğer integrallere karşılıklı yamuk metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \varepsilon [v'(x_{i+1}) - v'(x_i)] + 2v(x_{i+1}) - 2v(x_i) + \frac{h^2}{4} v(x_0) + \frac{h^2}{2} \sum_{m=1}^{i-1} v(x_m) + \frac{h^2}{4} v(x_i) \\ & + \frac{h^2}{4} v(x_0) + \frac{h^2}{2} \sum_{m=1}^i v(x_m) + \frac{h^2}{4} v(x_{i+1}) = \frac{h}{2} [f_i + f_{i+1}], \end{aligned}$$

aşağıdaki sonlu fark problemi elde edilir:

$$\begin{aligned} & v_{i-1} \left[\frac{\varepsilon}{h} \right] - v_i \left[\frac{2\varepsilon}{h} + 2 - \frac{h^2}{4} \right] + v_{i+1} \left[\frac{\varepsilon}{h} + 2 + \frac{h^2}{4} \right] \\ & = - \left(2 \frac{h^2}{4} v_0 + \frac{h^2}{2} \sum_{m=1}^{i-1} v_m - \frac{h}{2} \left[\frac{x_{i+1}}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - e^{-\frac{2x_{i+1}}{\varepsilon}} \right) \right] + \frac{x_i}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - e^{-\frac{2x_i}{\varepsilon}} \right) \right), \end{aligned}$$

$$v_0 = 0, \quad v_N = \frac{1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}{2},$$

Bu sonlu fark probleminin çözümü için Thomas algoritması da şöyledir:

$$A_i = \frac{\varepsilon}{h}, \quad B_i = \frac{\varepsilon}{h} + 2 + \frac{h^2}{4}, \quad C_i = \frac{2\varepsilon}{h} + 2 - \frac{h^2}{4},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0,$$

$$F_i = 2 \frac{h^2}{4} v_0 + \frac{h^2}{2} \sum_{m=1}^{i-1} v_m + \frac{h^2}{2} \sum_{m=1}^i v_m - \frac{h}{2} \left[\frac{x_{i+1}}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - e^{-\frac{2x_{i+1}}{\varepsilon}} \right) \right] + \frac{x_i}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - e^{-\frac{2x_i}{\varepsilon}} \right),$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{\frac{\varepsilon}{h} + 2 + \frac{h^2}{4}}{\frac{2\varepsilon}{h} + 2 - \frac{h^2}{4} - \alpha_i \frac{\varepsilon}{h}},$$

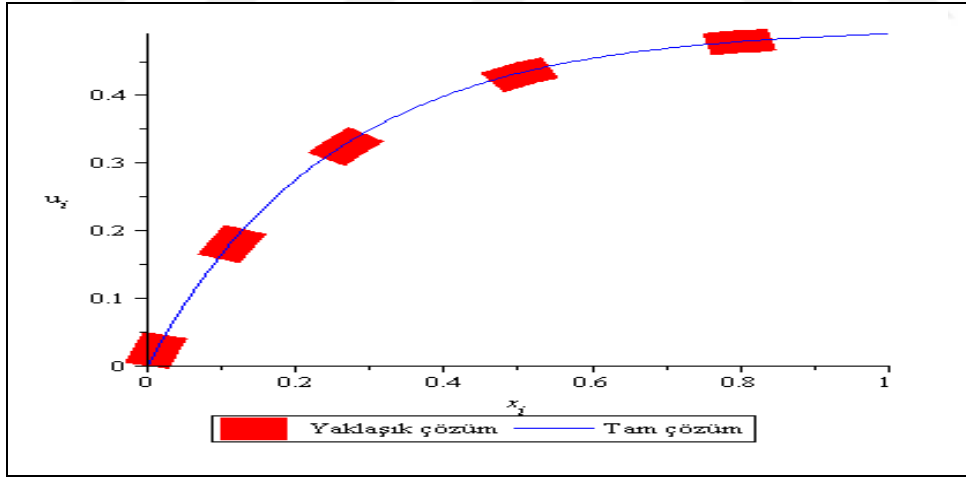
$$\beta_{i+1} = \frac{2 \frac{h^2}{4} v_0 + \frac{h^2}{2} \sum_{m=1}^{i-1} v_m + \frac{h^2}{2} \sum_{m=1}^i v_m - \frac{h}{2} \left[\frac{x_{i+1}}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - e^{-\frac{2x_{i+1}}{\varepsilon}} \right) \right] + \frac{x_i}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - e^{-\frac{2x_i}{\varepsilon}} \right) + \beta_i \frac{\varepsilon}{h}}{2\varepsilon h^{-1} + 2 - 0.25h^2 - \alpha_i \varepsilon h^{-1}},$$

$$v_i = \alpha_{i+1}v_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 2, 1.$$

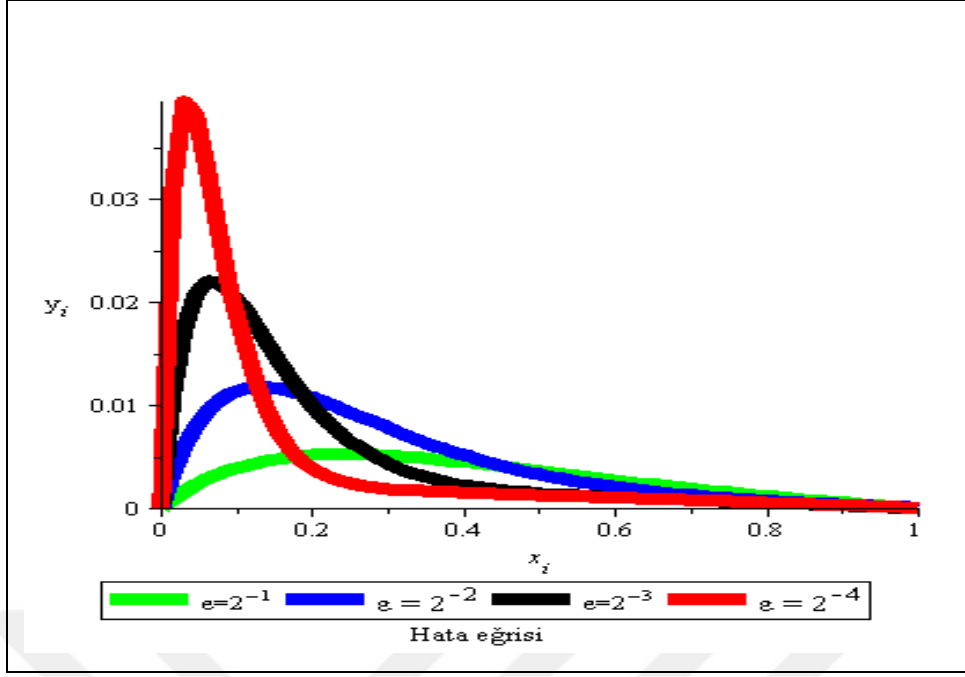
Yukarıda verilen Thomas algoritması akışı ile uygun bir matematik programından yararlanılarak singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel denklemin sınır değer probleminin yaklaşık çözüm sonuçları elde edilir. Çizelge 4.4 şeklinde maksimum hatalar bulunur ve görülür ki N parçalanışı büyüdükçe hata değerleri yarıya inerek azalmaktadır. Yani yakınsaklık birinci mertebededir. Böylece önerilen metodun singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel denklemin sınır değer problemleri için uygun ve güvenilir olduğu görülür.

Çizelge 4.4. Maksimum hata değerleri

ε	N=16	N=32	N=64	N=128
2^{-2}	0.0408410668	0.0223025458	0.0117111541	0.0060061453
2^{-3}	0.0696104025	0.0403029464	0.0219462477	0.0109212592
2^{-4}	0.1243379260	0.0641243472	0.0324417494	0.0164795314
2^{-5}	0.1577694930	0.0830021455	0.0419933425	0.0200012212



Şekil 4.5. $N = 64$ için hata eğrileri



Şekil 4.6. $N = 64$ için kesin ve yaklaşık çözüm eğrileri

5. TARTIŞMA

Lokal olmayan sınır değeri singüler pertürbe problemler birçok yazar tarafından çalışılmıştır [2-18]. Bu çalışmalarda analitik ve nümerik çözüm yöntemleri kullanılmıştır. Yaptığımız çalışmalar buralardan faydalanılarak oluşturulmuştur. Ayrıca daha önce yapılan bu çalışmalardan farklı olarak dördüncü uygulama geliştirilmiştir. Çalışma devam etmektedir. Çalışmada hesaplanan nümerik sonuçların teorik değerlendirmeleri desteklediği görülmüştür. Literatüre katkı sağlayacağı düşüncesi ile gecikmeli, kesirli, Fredholm, Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemlere nümerik integrasyon metodunun uygulanabileceği önerilmiştir.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Thomas algoritması kullanılarak uygun bir matematik programı ile singüler pertürbe diferansiyel ve Volterra integro-diferansiyel denklemlerin lokal olmayan sınır değer problemlerinin yaklaşık çözüm sonuçları elde edilmiştir. N ve ε değerleri için tam, yaklaşık çözüm ve hata grafikleri karşılaştırılmıştır. Maksimum hatalar çizelgelerde gösterilmiştir. Buralarda görülmüştür ki N parçalanışı artan değerler aldıkça hata değerleri azalmıştır. Böylece yakınsaklık birinci mertebeden olmuştur. Tezde her bir problem sınır katı içerdiğinden yaklaşık çözümlerde ani ve hızlı bir şekilde değişim olmuştur ve çözüm eğrileri eksenlere doğru yaslanmıştır. Çözüm grafiklerinin yer aldığı şekillerde ise tam ve yaklaşık çözüm eğrileri çakışmıştır. Tüm bu veriler gösterir ki metot kararlı, güvenilir ve elverişlidir.

KAYNAKLAR

- [1] G. Amirali ve I. Amirali, *Nümerik analiz teori ve uygulamalarla*: Seçkin Yayıncılık, Ankara, Türkiye, 2008.
- [2] G. M. Amiraliyev and M. Cakir, “Numerical solution of the singularly perturbed problem with nonlocal condition,” *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 23, no. 7, pp. 755-764, 2002.
- [3] A. Andargie and Y. N. Reddy, “Numerical integration method for singular perturbation problems with mixed boundary conditions,” *J. Appl. Math. & Informatics*, vol. 26, no. 5/6, pp. 1273-1287, 2008.
- [4] D. Arslan, “Finite difference method for solving singularly perturbed multi-point boundary value problem.” *Journal of the Institute of Natural and Applied Sciences*, vol. 22, no. 2, pp. 64-75, 2017.
- [5] D. Arslan, “Nümerik integrasyon metodu ile singüler pertürbe problemlerin yaklaşık çözümü.” *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilim Enstitüsü Dergisi.*, vol. 27, sayı. 3, ss.. 612-618, 2022.
- [6] D. Arslan, “A numerical solution study on singularly perturbed convection-diffusion nonlocal boundary value problem.” *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, vol. 68, no. 2, pp. 1482-1491, 2019.
- [7] D. Arslan, “Stability and convergence analysis on Shishkin mesh for a nonlinear singularly perturbed problem with three-point boundary condition.” *Quaestiones Mathematicae*, pp. 1-14, 2019.
- [8] D. Arslan, “A novel hybrid method for singularly perturbed delay differential equations,” *Gazi University Journal of Science*, vol. 32, no. 1, pp. 217-223, 2019.
- [9] D. Arslan, “A numerical solution for singularly perturbed multi-point boundary value problems with the numerical integration method,” *BEU Journal of Science*, vol. 9, no. 1, pp. 157-167, 2020.
- [10] O. Yapman and G. M. Amiraliyev, “A novel second-order fitted computational method for a singularly perturbed Volterra integro-differential equation.” *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 97, pp. 1293-1302, 2020.

- [11] M. Cakir and G. M. Amiraliyev, "Numerical solution of the singularly perturbed three-point boundary value problem." *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 84, no. 10, pp. 1465-1481, 2007.
- [12] M. Cakir and D. Arslan, "A numerical method for nonlinear singularly perturbed multi-point boundary value problem." *Journal of Applied Mathematics and Physics*, vol. 4, pp. 1143-1156, 2016.
- [13] R. Chegis, "The numerical solution of problems with small parameter at higher derivatives and nonlocal conditions." *Lietuvas Matematika Rinkiny*, (in Russian), vol. 28, pp. 144-152, 1988.
- [14] D. Arslan, "A new second-order difference approximation for nonlocal boundary value problem with boundary layers." *Mathematical Modelling and Analysis*, vol. 25, no. 2, pp. 257-270, 2020.
- [15] P. C. Gupta, and S. I. Trofimchuk, "A sharper condition for the solvability of a three-point second order boundary value problem." *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 205, pp. 586-597, 1997.
- [16] D. Herceg, "On the numerical solution of a singularly perturbed nonlocal problem." *Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat.*, vol. 20, pp. 1-10, 1990.
- [17] M. K. Kadalbajoo and Y. N. Reddy, "Analytic and numerical analysis of singular perturbation problems:" A survey, *Appl. Math. Comput.*, vol. 30, pp. 223-259, 1989.
- [18] M. Kudu and G. M. Amiraliyev, "Finite difference method for a singularly perturbed differential equations with integral boundary condition." *International Journal of Mathematics and Computation*, vol. 26, pp. 72-79, 2015.
- [19] R. Ranjan and H. S. Prasad, "An efficient method of numerical integration for a class of singularly perturbed two point boundary value problems." *Wseas Transactions on Mathematics*, vol. 17, pp. 265-273, 2018.
- [20] Y. N. Reddy, "A numerical integration method for solving singular perturbation problems." *Applied Mathematics and Computation*, vol. 37, pp. 83-95, 1990.
- [21] G. Soujanya and K. Phnaeendra, "Numerical intergration method for singular-singularly perturbed two-point boundary value problems." *Procedia Engineering*, vol. 127, pp. 545-552, 2015.

- [22] R. Ma, "Existence theorems for a second order m-point boundary value problem." *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 211, pp. 545-555, 1997.
- [23] A. H. Nayfeh, "*Introduction to perturbation techniques.*" Wiley, New York.
- [24] H. G. Roos, M. Stynes and L. Tobiska, "*Robust numerical methods for singularly perturbed differential equation: convection-diffusion and flow problems.*" Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [25] A. A. Samarskii, "*The theory of difference schemes*" Marcel Dekker, New York, 2001.
- [26] T. D. Burton, "A perturbation method for certain nonlinear oscillators." *Int. J. Non-Linear Mech.*, vol. 19, pp. 397-407, 1984.
- [27] A. H. Nayfeh, "*Perturbation method.*" Wiley. New York, 1973.
- [28] S. L. Ross, "*Differential equations.*" Blaisdel. New York, 1964.
- [29] J. J. H. Miller, E. O'Riordan and G. I. Shishkin, "*Fitted numerical methods for singular perturbation problems.*" World Scientific. Singapore, 1996.