

**T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

LOKAL ROUGH KÜMELER VE ROUGH ALTGRUPOİDLER

Hatice TAŞBOZAN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**MALATYA
Mayıs 2017**

Tezin Başlığı : Lokal Rough Kümeler ve Rough Altgrupoidler
Tezi Hazırlayan : Hatice TAŞBOZAN
Sınav Tarihi : 15.05.2017

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İlhan İÇEN
İnönü Üniversitesi
Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU
Gazi Üniversitesi
Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ
İnönü Üniversitesi
Doç. Dr. İshak ALTUN
Kırıkkale Üniversitesi
Doç. Dr. M. Habil GÜRSOY
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora tezi olarak sunduğum "Lokal Rough Kümeler ve Rough Altgrupoidler" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Hatice TAŞBOZAN



ÖZET

Doktora Tezi

Lokal Rough Kümeler ve Rough Altgrupoidler

Hatice TAŞBOZAN

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

76+vi sayfa

2017

Danışman: Prof. Dr. İlhan İÇEN

Beş bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü Giriş bölümü olarak düzenlendi ve literatür özeti de bu bölümde verildi.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlara yer verildi. Bu bölümde, temel topolojik kavramlar olan kategori teorisi ve demet teorisi tanım ve teoremler ile birlikte verildi. Demet teoride, demetin global kesiti olan lokal denklik bağıntısı kavramından bahsedildi.

Üçüncü bölümde, rough kümelerin bazı tanımları ve temel özellikleri verildi. Ayrıca, rough cebirsel yapılarından olan rough grup kavramı, grubun bir alt kümesinin alt ve üst yaklaşımları yardımıyla verildi.

Dördüncü ve beşinci bölümler bu tezin orjinal bölümlerini oluşturmaktadır.

Dördüncü bölümde, grupoid ve rough teori kavramları kullanılarak yeni bir kavram olan rough altgroupoid kavramı tanımlandı ve bazı teoremler verildi.

Son bölümde ise lokal denklik bağıntısı kavramı yardımıyla yeni bir rough küme olan lokal rough küme tanıtıldı. Ayrıca, lokal rough kümelerin alt ve üst yaklaşımları tanımlandı ve bazı özellikler verildi.

ANAHTAR KELİMELELER: Grupoid, Lokal denklik bağıntısı, Rough küme, Rough alt grup, Rough (normal) altgrupoid, Lokal Rough küme, Lokal rough yaklaşım uzayı, Coherent lokal yaklaşım uzayı, Lokal bağlantılılık.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

Local Rough Sets and Rough Subgroupoids

Hatice TAŞBOZAN

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

76+vi pages

2017

Supervisor: Prof. Dr. İlhan İÇEN

The first chapter of this thesis, which is consisting of five chapters, has been arranged as an introduction chapter and the literature survey has also been given in this chapter.

In the second chapter, basic concepts to be used in the upcoming chapters are introduced. In this chapter, the basic topological concepts; category theory and sheaf theory are presented with relevant definitions and theorems. In sheaf theory, the concept of local equivalence relation, which is the global section of sheaf, are given.

In the third chapter, some definitions and basic features of rough sets are given. In addition, the concept of rough group, which is a rough algebraic structures, is presented with the help of the lower and the upper approximations of a subset of a group.

Fourth and fifth chapters constitute the original parts of this thesis.

In the fourth chapter, the concept of rough subgroupoid, which is a new definition, is introduced by using the concepts of groupoid and rough theory and relevant theorems are given.

In the final chapter, local rough set that is a new rough set is presented with the help of the concept of local equivalence relation. In addition, the lower and the upper approximations of local rough sets are presented and some of their features have been given.

KEY WORDS: Groupoid, Local equivalence relation, Rough set, Rough subgroup, Rough (normal) subgroupoid, Local Rough set, Local rough approximation space, Coherent local approximation space, Local connectedness.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince engin bilgisi ve titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan tez danışmanım çok değerli hocam Prof.Dr. İlhan İÇEN'e, araştırmalarım sırasında görüşleriyle yol gösteren, ilgi ve desteğini esirgemeyen ve her zaman bana yardımcı olan değerli hocalarım Doç.Dr. M. Habil GÜRSOY'a, Yrd.Doç.Dr. A. Fatih ÖZCAN'a, Matematik Bölümü Başkanı Prof.Dr. Sadık KELEŞ'e, her zaman desteklerini aldığım anneme, babama ve kardeşlerime, çok kıymetli eşim Orkun'a ve biricik kızım Eylül'e teşekkürü bir borç bilirim.

Hatice TAŞBOZAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Kategori	3
2.2 Funktor	5
2.3 Grupoid	7
2.4 Öndemetler	12
2.5 Demetler	14
2.6 Lokal Denklik Bağıntısı	21
2.7 Coherent Lokal Denklik Bağıntısı	24
3 ROUGH KÜME VE ROUGH ALTGRUP	27
3.1 Rough Küme	27
3.2 Rough Topoloji	34
3.3 Rough Alt Gruplar	35
3.3.1 N normal alt grubuna göre X kümesinin $N(X)$ Rough Kümesi	36
3.4 Alt ve Üst Yaklaşımlı Rough Alt Gruplar	37
3.5 Alt ve Üst Yaklaşımlı Rough Alt Gruplar İçin Özellikler	38
4 ROUGH ALTGRUPOİD	46
4.1 N normal alt grupoidine göre A kümesinin $N(A)$ Rough Kümesi	46
4.2 Alt ve Üst Yaklaşımlı Rough Alt Grupoidler	47
4.3 Alt ve Üst Yaklaşımlı Rough Alt Grupoidler İçin Özellikler	49
5 LOKAL ROUGH KÜMELER	59
5.1 Lokal Yaklaşım Uzayı	59
5.2 Lokal Rough Kümeler	59

5.3	Lokal Rough Kümeler İçin Özellikler	65
6	SONUÇLAR	72
	KAYNAKLAR	73
	ÖZGEÇMİŞ	76



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	$(\mathcal{F}, p)$ demeti	15
Şekil 2.2	X' in $(0, 1)$ aralığındaki lokal şekli	17
Şekil 3.1	Bir kümenin alt ve üst yaklaşımları	28
Şekil 3.2	Rough R —tanımlanabilir küme	31
Şekil 3.3	Rough internal R —tanımlanamaz küme	32
Şekil 3.4	Rough external R —tanımlanamaz küme	32
Şekil 3.5	Rough total R —tanımlanamaz küme	32



1. GİRİŞ

Rough küme teorisi, 1982' de ilk olarak Pawlak [1] tarafından ortaya atılmıştır. Bu teori kesin olmayan bilginin belirsizliği ve anlaşılabilirliği ile ilgili bir yöntem olarak tanıtıldı. Bu teoride nesnelerin sınıflandırmasının temeli bir denklik bağıntısıdır. Teorinin temeli olan rough (yaklaşımlı) küme kavramı, evrensel kümenin herhangi bir alt kümesi olup, evrensel küme üzerinde tanımlanan bir denklik bağıntısı ile oluşturulan alt ve üst yaklaşımlar ikilisi ile tanımlanır. Rough kümeler; belirsiz veya kesin olmayan bilginin tanımlanması, analizi, eksik bilgiye dayanan akıl yürütme gibi çeşitli problemlerin çözümünde bir araç oldu. Ayrıca kesin olmayan bilgiler için yeni bir matematiksel yöntemdir. Bu yöntemde; belirsizlik, bir kümenin sınır bölgesi ile açıklanır [1].

Rough cebirsel yapılardan, rough grup kavramı iki şekilde tanımlanmıştır. Bunlardan birincisi, Bismas ve Nanda [2] tarafından sadece üst yaklaşım tanımı kullanılarak verilmiş, ikincisi ise Kuroki ve Wang [3] tarafından hem üst hem de alt yaklaşım tanımı kullanılarak verilmiştir. Yani bir G grubu üzerinde N alt grubuna göre tanımlanan $x \equiv y(mod N) \Leftrightarrow xy^{-1} \in N$ denklik bağıntısı kullanılarak, grubun bir alt kümesinin alt ve üst yaklaşımları tanımlanmıştır [4].

Rough altgrupoid ve lokal rough küme kavramlarının oluşturulması için öncelikle kategori ve grupoid kavramlarından bahsedilerek altgrupoidlerle ilgili örnekler ele alındı. Sonrasında ise demet teorisine geçilerek demet ve öndemet arasındaki ilişkiden yola çıkarak bir topolojik uzayın açıkları üzerindeki tüm denklik bağıntılarından oluşan küme ile elde edilen E öndemetine karşılık gelen $\mathcal{E}$ demetinin r -global kesiti olan lokal denklik bağıntısı tanımı verildi [5].

Bu çalışmada, rough altgroupoid kavramının oluşturulabilmesi için grupoid ve rough alt grup kavramları ile yeni bir tanım verildi. Bir grupoid üzerinde, normal altgrupoidine göre verilen bir kümenin alt ve üst yaklaşımları bulunarak bu kümenin rough kümesi elde edildi. Rough kümedeki alt ve üst yaklaşımlar, grupoidin birer altgrupoidi ise bu rough kümeye grupoidin alt ve üst yaklaşımlarına göre rough altgrupoididir denildi. Rough alt gruplarda teoremlerle verilen durumların rough

altgroupoidler için de incelenebileceği görüldü.

Son olarak, lokal denklik bağıntısı kavramından hareketle yeni bir kavram olan "lokal rough küme" tanıtılarak, bu kavram alt ve üst yaklaşım işlemleri ile tanımlandı. Lokal rough kümeler ile ilgili örnekler verilerek, lokal rough kümedeki yaklaşımın kesinliği ile rough kümedeki yaklaşımın kesinliği karşılaştırıldı. Ayrıca lokal yaklaşım uzayında coherentlik ve bağlantılılık gibi kavramlar elde edildi ve bu kavramlar ile ilgili bazı teoremler verildi.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Kategori

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

Tanım 2.1.1. Nesnelerin kümesi $Ob(C)$, morfizmlerin kümesi $Mor(C) = C$ olmak üzere, morfizmlerin kompozisyon işlemi,

$$m = Mor(C)_\alpha \times_\beta Mor(C) = \{(f, g) \in Mor(C) \times Mor(C) \mid \alpha(g) = \beta(f)\}$$

$$m(f, g) = g \cdot f$$

kaynak ve hedef dönüşümleri sırasıyla $\alpha, \beta : Mor(C) \longrightarrow Ob(C)$ ve nesne dönüşümü $\varepsilon : Ob(C) \longrightarrow Mor(C), X \mapsto \varepsilon(X) = I_X$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $(C, Ob(C), \alpha, \beta, \varepsilon, \mu)$ altılısına kategori denir [6].

KAT1) $\forall (f, g) \in Mor(C)_\alpha \times_\beta Mor(C)$ için $\alpha(g \cdot f) = \alpha(f)$ ve $\beta(g \cdot f) = \beta(g)$.

KAT2) $\forall f, g, h \in Mor(C)$ ile $\alpha(h) = \beta(g)$ ve $\alpha(g) = \beta(f)$ için $h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$.

KAT3) $\forall x \in Ob(C)$ için $\alpha(I_x) = x = \beta(I_x)$.

KAT4) $\forall f \in Mor(C)$ için $f \cdot I_{\alpha(f)} = f$ ve $I_{\beta(f)} \cdot f = f$.

Örnek 2.1.1. Bazı kategori örneklerini ve onların nesneleri ile morfizmleri aşağıda verilmiştir [6].

KATEGORİ	NESNELERİ	MORFİZMLERİ
<i>Grp</i>	Gruplar	Grup morfizmleri
<i>Set</i>	Kümeler	Kümeler arası dönüşümler
<i>Cat</i>	Kategoriler	Funktorlar
<i>Top</i>	Topolojik uzaylar	Sürekli fonksiyonlar
<i>Gpd</i>	Tüm grupoidler	Grupoid morfizmleri

Tanım 2.1.2. C bir kategori olsun. Bir C^{op} kategorisi;

$$Ob(C) = Ob(C^{op})$$

ve $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C}^{op})$ için

$$Mor_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Mor_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

şartlarını sağlayan kategoridir. Bu kategoriye $\mathcal{C}$ kategorisinin **dual (veya zıt) kategorisi** denir [7].

Örnek 2.1.2. X bir topolojik uzay ve X' in bütün açıklarını nesne kümesi ve

$$O(X) = \{f : U \rightarrow V \mid U, V \subset X \text{ açık}\}$$

kümesinin dualini de morfizm kabul eden $O(X)^{op}$ kategorisi aşağıdaki gibi tanımlıdır.

1. Nesneler kümesi,

$$Ob(O(X)^{op}) = \{U : U, X \text{ uzayının açık altkümesi}\}.$$

2. Morfizmler kümesi,

$$Mor(O(X)^{op}) = \{f \mid f : U' \longrightarrow U \text{ sürekli dönüşüm, } U, U' \subset X \text{ açık}\}.$$

3. Kompozisyon işlemi,

$$Mor(U', U) \times Mor(U'', U') \rightarrow Mor(U'', U)$$

$$(f, g) \mapsto gof.$$

4. Kaynak ve hedef dönüşümleri,

$$\alpha(f) = U', \quad \beta(f) = U.$$

5. Nesne dönüşümü ise

$$\epsilon(U) = I_U$$

şeklinde tanımlıdır [7].

Tanım 2.1.3. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olmak üzere; $\forall X \in Ob(\mathcal{D})$ için

- i. $Ob(\mathcal{D}) \subset Ob(\mathcal{C})$,
- ii. $Mor_{\mathcal{D}}(X, Y) \subset Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$,
- iii. $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{C}$ kategorilerinde tanımlı kompozisyon kuralları aynı,
- iv. $Mor_{\mathcal{D}}(X, X)$ ve $Mor_{\mathcal{C}}(X, X)$ in birim elemanları aynı

özelliklerini sağlayan $\mathcal{D}$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisinin bir **altkategorisi** denir [8].

Tanım 2.1.4. $\mathcal{D}$ kategorisi $\mathcal{C}$ kategorisinin **altkategorisi** olmak üzere;

1. $\mathcal{D}$ kategorisinden seçilen X, Y nesneleri için

$$Mor_{\mathcal{D}}(X, Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

ise $\mathcal{D}$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisinin **tam(full)altkategorisi** denir [8].

2. $\mathcal{D}$ kategorisinin nesneleriyle $\mathcal{C}$ kategorisinin nesneleri eşitse, yani

$$Ob(\mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C})$$

ise $\mathcal{D}$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisinin **geniş(wide) altkategorisi** denir [8].

2.2 Funktor

Tanım 2.2.1. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ iki kategori ve $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ olmak üzere; $\mathcal{C}$ kategorisinin bir X nesnesi ve bir f morfizmi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa; $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri arasındaki bu ϕ dönüşümüne bir **kovaryant funktor** denir [9].

- 1) $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ için $\phi(X) \in Ob(\mathcal{D})$.
- 2) $f : X \longrightarrow Y \in Mor(\mathcal{C})$ morfizmine karşılık $\phi(f) : \phi(X) \longrightarrow \phi(Y) \in Mor(\mathcal{D})$.
- 3) $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ için $1_{\phi(X)} = \phi(1_X)$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & \phi(X) \\ \downarrow 1_X & & \downarrow 1_{\phi(X)} \\ X & \xrightarrow{\phi} & \phi(X) \end{array}$$

4) $\forall f, g \in \text{Mor}(C)$ için $g \circ f$ işlemi $\mathcal{D}$ kategorisinde $\phi(g) \circ \phi(f) = \phi(g \circ f)$ sağlanıyorsa

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & \phi(X) \\ \downarrow f & & \downarrow \phi(f) \\ Y & \xrightarrow{\phi} & \phi(Y) \\ \downarrow g & & \downarrow \phi(g) \\ Z & \xrightarrow{\phi} & \phi(Z) \end{array}$$

diyagramı değişimlidir.

Tanım 2.2.2. C ve $\mathcal{D}$ iki kategori ve $\mathcal{D}^{op}$, $\mathcal{D}$ nin dual kategorisi olsun.

$$\phi : C \longrightarrow \mathcal{D}^{op}$$

tanımlı kovaryant funktora **kontravaryant fonktor** denir. Burada $\phi(g) \circ \phi(f) = \phi(g \circ f)$ işlemi korunmaz yani;

$$\phi(g) \circ \phi(f) = \phi(g \circ f) \text{ ise kovaryant,} \quad (2.1)$$

$$\phi(g) \circ \phi(f) = \phi(f \circ g) \text{ ise kontravaryanttır.} \quad (2.2)$$

şeklindedir [9].

Tanım 2.2.3. Bir C kategorisindeki her X nesnesi ve her f morfizmi için

$$1_C : C \longrightarrow C$$

$$1_C(X) = X,$$

$$1_C(f) = f$$

şeklinde tanımlı 1_C funktora **birim fonktor** denir [10].

Tanım 2.2.4. $\mathcal{D}$ kategorisi C kategorisinin **altkategorisi** olmak üzere;

$$i : \mathcal{D} \longrightarrow C$$

$$i(X) = X,$$

$$i(f) = f$$

şeklinde tanımlanan i funktora **dahil etme fonktoru** denir [10].

Örnek 2.2.1. $\phi : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ funktörüne unutkan funktor denir. Bu funktor $\mathbf{Grp}$ kategorisindeki grup yapısını unutarak $\mathbf{Set}$ kategorisine dönüştürür. Burada her G grubunu onun grup yapısının ihmal edildiği ϕG kümesine ve her $f : G \rightarrow H$ dönüşümünü $\phi f : \phi G \rightarrow \phi H$ dönüşümüne götürür [11].

Bu kısımda H.Brandt [12] tarafından oluşturulan, Brown[13, 14] ve İcen[15, 16] tarafından geliştirilen, kategori teorideki her morfizmin tersinin bulunduğunu bazı şartlar altında sağlayan bir kavram olan grupoid kavramından bahsedeceğiz..

2.3 Grupoid

Tanım 2.3.1. Nesnelerin kümesi $Ob(G)$, morfizmlerin kümesi $Mor(G) = G$ olmak üzere, morfizmlerin kompozisyon işlemi, $m = Mor(G)_\alpha \times_\beta Mor(G) = \{(f, g) \in Mor(G) \times Mor(G) \mid \alpha(g) = \beta(f)\}$, $m(f, g) = g \cdot f$ kaynak ve hedef dönüşümleri sırasıyla $\alpha, \beta : Mor(G) \rightarrow Ob(G)$ ve nesne dönüşümü $\varepsilon : Ob(G) \rightarrow Mor(G)$, $X \mapsto \varepsilon(X) = I_X$ olan $(G, Ob(G), \alpha, \beta, \varepsilon, m)$ kategorisinde her bir $f \in G$ morfizmi için $\alpha(f) = \beta(f^{-1})$, $\beta(f) = \alpha(f^{-1})$, $f^{-1} \circ f = 1_{\alpha(f)}$ ve $f \circ f^{-1} = 1_{\beta(f)}$ şartlarını sağlayan $f^{-1} \in G$ tersi varsa yani $i : Mor(G) \rightarrow Mor(G)$ ters dönüşümünde $i(f) = f^{-1}$ ise G ye $Ob(G)$ üzerinde bir **grupoid**dir denir [13].

Örnek 2.3.1. G birim elemanı e olan bir grup olsun. Bu durumda G , $\{e\}$ nesne kümesi ve grup işlemi ile bir grupoiddir. G nin morfizmleri grubun elemanlarından oluşur.

Tanım 2.3.2. G bir grupoid ve $H \subset G$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa H grupoidine G grupoidinin **altgrupoidi** denir [13].

AGRP1) α ve β , G grupoidinin kaynak ve hedef dönüşümleri olmak üzere;

$$\alpha(H) \subseteq Ob(H) \text{ ve } \beta(H) \subseteq Ob(H).$$

AGRP2) $\forall X \in Ob(G)$ için $1_X \in Mor(H)$.

AGRP3) H kısmi çarpım altında kapalıdır.

AGRP3) $\forall f \in Mor(H)$ için $f^{-1} \in Mor(H)$ dır.

Tanım 2.3.3. H, G grupoidinin altgrupoidi olsun.

1. Eğer $Ob(H) = Ob(G)$ ise H grupoidine G grupoidinin **geniş(wide) altgrupoidi** denir [17].
2. Eğer her bir $X, Y \in Ob(H)$ için

$$Mor_H(X, Y) = Mor_G(X, Y)$$

ise H grupoidine G grupoidinin **tam(full) altgrupoidi** denir [17].

3. Bir G grupoidinin $X \in Ob(G)$ ' deki starı $St_G X = \alpha^{-1}(X) = \{g \in G : \alpha(g) = X\}$ kümesi ve costarı da $CoSt_G X = \beta^{-1}(X) = \{g \in G : \beta(g) = X\}$ kümesidir. $Mor_G(X, X)$ kümesi G ' deki kompozisyon altında bir gruptur. Bu gruba X ' deki **verteks grubu** ya da **nesne grubu** denir ve kısaca $G\{X\}$ ile gösterilir. Sadece tek nesneden oluşan grupoidler gruptur [11, 17].
4. G grupoidinin bir N geniş altgrupoidi her bir $X, Y \in Ob(G), N\{X\} \in Mor_N(X, X)$ ve $f \in Mor_G(X, Y)$ için $N\{Y\} = fN\{X\}f^{-1} \in Mor_N(Y, Y)$ ise veya buna denk olarak $fN\{X\} = N\{Y\}f$ ise N grupoidine G grupoidinin **normal altgrupoidi** denir [17, 18].

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \nwarrow N\{X\} & \downarrow f^{-1} \\ & & X \end{array}$$

Örnek 2.3.2. X boştan farklı bir küme olsun. Nesneler kümesi X ve morfizmler kümesi $X \times X$ olacak şekilde bir grupoid elde edilebilir. Burada (x, y) ikilisi $x \rightarrow y$ morfizmini göstermek üzere kısmi çarpım işlemi $(x, y) \cdot (y, z) = (x, z)$ olarak verilir. Buna göre, R , $X \times X$ ' in altgrupoidi ve X üzerinde tam ise; $R \subset X \times X$ denklik bağıntısı X üzerinde bir grupoiddir. Gerçekten, R 'de kısmi çarpım işlemi ise $(x, y), (y, z) \in R \subset X \times X$ olup $(x, z) \in R$ dir. Bu grupoidi ele alarak bir R grupoidi:

- Nesneler kümesi $Ob(R) = X$,

• Morfizmlerin kümesi $Mor(R) = R = \{(x, y) \mid x, y \in X\}$,

• Hedef ve kaynak dönüşümleri

$$\begin{aligned} \alpha : R &\rightarrow X & \beta : R &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto \alpha(x, y) = x & (x, y) &\mapsto \beta(x, y) = y \end{aligned}$$

• Ters dönüşüm

$$\begin{aligned} i : R &\rightarrow R \\ (x, y) &\mapsto (x, y)^{-1} = (y, x), \end{aligned}$$

• Nesne dönüşümü

$$\begin{aligned} \varepsilon : X &\rightarrow R \\ x &\mapsto I_x, \end{aligned}$$

• Kısmi çarpım işlemi

$$\begin{aligned} m : R \times R &\rightarrow R \\ ((x, y), (y, z)) &\mapsto (x, z) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup her denklik bağıntısı bulunduğu küme üzerinde bir grupoiddir [9].

Örnek 2.3.3. Topolojik uzaylar ve bu uzaylar arasındaki homeomorfizmler kategorisi bir grupoid oluşturur[9].

Örnek 2.3.4. • Nesneler kümesi $Ob(G) = \{0, 1\}$,

• Morfizmlerin kümesi $Mor(G) = \{a \mid a : Ob(G) \rightarrow Ob(G), 0, 1 \in Ob(G)\}$,

• Hedef ve kaynak dönüşümleri

$$\begin{aligned} \alpha : Mor(G) &\rightarrow Ob(G) & \beta : Mor(G) &\rightarrow Ob(G) \\ (a, b) &\mapsto \alpha(a, b) = a & (a, b) &\mapsto \beta(a, b) = b \end{aligned}$$

ve

. Ters dönüşüm

$$i : Mor(G) \rightarrow Mor(G)$$

$$a \mapsto a^{-1} : 1 \rightarrow 0,$$

. Nesne dönüşümü

$$\varepsilon : Ob(G) \rightarrow Mor(G)$$

$$0 \rightarrow 1_0$$

$$1 \rightarrow 1_1$$

Kısmi çarpım işlemi ise $m = Mor(G)_\alpha \times_\beta Mor(G) = \{(a, b) \in Mor(G) \times Mor(G) \mid \alpha(b) = \beta(a)\}$, $m(a, b) = b.a$ olup G , $Ob(G)$ kümesi üzerinde bir grupoiddir.

Örnek 2.3.5. $G = \{1_0, a, a^{-1}, 1_1\}$, $Ob(G) = \{0, 1\}$ kümesi üzerinde bir groupoid olduğu verilmişti. Buna göre, $Ob(N) = Ob(G) = \{0, 1\}$ ile $N = \{1_0, 1_1\}$ normal altgroupoididir.

Örnek 2.3.6. $X = \{x, y, z\}$ kümesini gözönüne alalım. X kümesi ile $R = X \times X = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, x), (x, z), (z, x), (y, z), (z, y)\}$ groupoidi için $N = \{(x, x), (y, y), (z, z)\}$ normal altgroupoididir.

Tanım 2.3.4. G ve H iki grupoid olmak üzere; $\phi : G \rightarrow H$ dönüşümü,

- 1) G grupoidinin her bir X nesnesini H grupoidinin bir $\phi(X)$ nesnesine götürür.
- 2) Her bir $f \in Mor_G(X, Y)$ morfizmini $\phi(f) \in Mor_H(\phi(X), \phi(Y))$ morfizmine götürür.
- 3) $X \in G$ 'de $I_X \in G(X)$ özdeş morfizm ise $\phi(I_X) = I_{\phi(X)}$, $\phi(X) \in H$ 'da özdeş morfizmdir.
- 4) $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow Z$, G 'de morfizm ise $\phi(gf) = \phi(g) \cdot \phi(f)$ eşitliği geçerlidir.

Grupoidler arasında yukarıdaki şartları sağlayan morfizme **grupoid morfizmi** denir [9].

Örnek 2.3.7. N, G grupoidinin normal altgrupoidi olsun. $\phi : G \rightarrow N$ grupoid morfizmi G grupoidindeki tüm f morfizmlerini N normal altgrupoidinde ϕf morfizmlerine götürür. $\text{Ker}\phi = \{f \in G \mid \phi f = I_N\}$ olan ϕ grupoid morfizminin çekirdeği $\text{Ker}\phi$, G grupoidinin geniş altgrupoididir ve G grupoidindeki tüm f morfizmlerini N normal altgrupoidinde $\phi f = I_N$ birimine götüren G grupoidinin bir normal altgrupoididir.

Örnek 2.3.8. N, G grupoidinin normal altgrupoidi ve $\phi : G \rightarrow N$ grupoid morfizmi olsun. $\text{Im}\phi = \{\phi f \mid f \in G\}$ olan ϕ grupoid morfizminin görüntüsü $(N_{\phi y})(\phi f)N_{\phi x} = \phi(f) \in \text{Im}\phi$ sağlayan, N grupoidinin bir normal altgrupoididir.

Tanım 2.3.5. N, G 'nin tüm birim elemanlarını içeren bir normal altgrupoidi olmak üzere; G grupoidi üzerinde N altgrupoidine göre tanımlanan $f \equiv g(\text{mod } N) \Leftrightarrow f = xgy, x, y \in N$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. G/N bölüm grupoidi, $\pi : G \rightarrow G/N$ örten dönüşümü ile G 'deki grupoid yapısını G/N 'e aktarır. Burada $f \in \text{Mor}_G(x, y)$ morfizminin π dönüşümü altındaki görüntüsü;

$$\begin{aligned} \pi : G &\rightarrow G/N \\ f &\rightarrow \bar{f} \end{aligned}$$

$\bar{f} \in \text{Mor}_{G/N}(x, y)$ yani f morfizminin denklik sınıfıdır.

G/N 'de bölüm grupoidi şöyle tanımlanır;

1. Morfizmleri: $\bar{f} \in \text{Mor}_{G/N}(x, y)$,
2. Kısmi çarpım işlemi: $f_1 \in \bar{f}$ ve $g_1 \in \bar{g}$ için $f_1 g_1$, G grupoidinde bir morfizm olmak üzere; $\bar{f} \cdot \bar{g} = \overline{f_1 g_1}$ dir. İyi tanımlı olduğunu görebilmek için $f_2 \in \bar{f}$ ve $g_2 \in \bar{g}$ için $f_2 g_2$ tanımlı olup

$$f_2 = x f_1 y, \quad x, y \in \text{Ob}(N)$$

$$g_2 = y g_1 z, \quad y, z \in \text{Ob}(N)$$

dir. Buradan $f_2 g_2 = (x f_1 y)(y g_1 z)$ işlemi G grupoidinde tanımlıdır. $f_1 g_1$, G grupoidinde bir morfizm, y vertex grup olduğu için

$$u = g_1^{-1} y g_1 \in \text{Ob}(N)$$

dir. Böylece $f_2 g_2 = x f_1 g_1 u z \equiv f_1 g_1 \pmod{N}$, $x, u, z \in Ob(N)$ olur.

Burada G/N , N nin birleşenleri birimler olan bir kategoridir ve $\pi : G \rightarrow G/N$ örten bölüm dönüşümü ile G/N bir bölüm grupoiddir. G/G bir elemanlı bir grupoid değildir, G ' nin her bir bileşeni için bir vertex grup olan bir aşık grupoiddir. Dolayısıyla H, N normal altgrupoidini içeren G ' nin bir altgrupoidi ise H/N ' de G/N ' nin bir altgrupoididir

G bir grupoid ve N , G ' nin tüm birim elemanlarını içeren bir normal altgrupoidi olmak üzere G/N *bölüm grupoidi*; nesnelerin kümesi $Ob(G/N) = Ob(G)$, morfizmlerin kümesi $Mor_{G/N}(x, y) = \{f \circ N\{x\} : f \in Mor_G(x, y)\}$ ve $g \in Mor_G(y, z)$ için $(g \circ N\{y\}) \circ (f \circ N\{x\}) = g \circ f \circ N\{x\}$ kompozisyonu ile şeklinde de gösterilebilir [11, 13, 19].

2.4 Öndemetler

Tanım 2.4.1. X bir topolojik uzay, C bir kategori olsun. C 'deki değerleriyle X üzerinde F *öndemeti* aşağıdaki şartları sağlayan bir $\{F(U), F_{UV}, X\}$ sistemidir :

1. Her $U \subseteq X$ açık kümesine bir $F(U)$ kümesi karşılık gelir.
2. Her $U, V \subseteq X$ açık kümeler , $V \subseteq U$ olmak üzere; $F_{UV} : F(U) \rightarrow F(V)$ dönüşümü vardır.

i) $F_{UU} = I_{F(U)}$.

ii) $F_{VW} \circ F_{UV} = F_{UW}, (W \subseteq V \subseteq U)$.

Bu durumda $\{F(U), F_{UV}, X\}$, X üzerinde bir öndemettir denir[20].

Bu tanım kategori teyoride aşağıdaki gibi ifade edilebilir :

X bir topolojik uzay, $O(X)$; X in açık altkümelerinin ailesi ve i dahil etme dönüşümü olsun. X in açık altkümeleriyle bir kategori

$$Ob(O(X)) = \{U \mid U \subset X \text{ açık}\},$$

$$Mor(O(X)) = \{i \mid i : U \rightarrow U \subset V\}$$

ile tanımlanır. Aynı nesnelerle fakat tüm morfizmlerin yönünün değiştirilmesi ve kompozisyon işleminin sırasının değiştirilmesiyle $O(X)^{op}$ kategorisi elde edilir. X topolojik uzayı üzerinde F öndemeti, X in açık altkümelerinin ve onların dahil etme dönüşümlerinin $O(X)$ kategorisinin $O(X)^{op}$ dual kategorisinden kümelerin ve fonksiyonların Set kategorisine bir funktordur. Yani

$$F : O(X)^{op} \rightarrow Set$$

şeklinde. Bu taktirde $F = \{F(U), F_{UV}, X\}$ sistemine X üzerinde kümelerin bir öndemeti denir. X üzerinde Abel grupların öndemetinde $F(U)$ Abel grup özelliklerini sağlamalı ve F_{UV} kısıtlama dönüşümü bir grup homomorfizması olmalıdır.

Örnek 2.4.1. X topolojik uzay ve U, V kümeleri X' te açık, U üzerindeki tüm denklik bağıntılarının kümesi $E(U)$ ve

$$E_{UV} : E(U) \rightarrow E(V)$$

$$R \mapsto R|_V = R \cap (V \times V)$$

olmak üzere; $E = \{E(U), E_{UV}, X\}$ öndemeti tanımlar;

$$\bullet E_{UU}(R) = R|_U = R = I_{E(U)}$$

$$\bullet (E_{VW} \circ E_{UV})(R) = E_{VW}(R|_V) = (R|_V)|_W = R|_W$$

[20].

Tanım 2.4.2. F ve G , X üzerinde öndemetler olmak üzere bir $f : F \rightarrow G$ öndemet morfizmi $V \subset U \subset X$ için

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{f(U)} & G(U) \\ \downarrow F_{UV} & & \downarrow G_{UV} \\ F(V) & \xrightarrow{f(V)} & G(V) \end{array}$$

$$G_{UV}(f(U)) = f(V)(F_{UV})$$

şeklinde. Eğer $F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$ ise $(g \circ f)(U) = g(U) \circ f(U)$ morfizmlerin bileşkesidir. $f : F \rightarrow G$ abel grupların ya da kümelerin öndemetlerinin izomorfizmleri ise $g : G \rightarrow F$

morfizmi vardır. Dolayısıyla $f \circ g = id_G$ ve $g \circ f = id_F$ yazılır. Burada $id_F : F \rightarrow F$, X teki U açığı için $id_F(U) = id_{F(U)}$ ile verilir [20].

Tanım 2.4.3. X topolojik uzay olmak üzere $x \in X$ noktasını içeren iki açık küme U ve V olsun. F bir öndemet olmak üzere; $s \in F(U)$ ve $t \in F(V)$ için

$$M = \{(U, s) \mid U \subseteq X \text{ açık küme, } s \in F(U)\}$$

olarak alalım. M üzerinde bir denklik bağıntısı ya da X' te aynı hücreye sahip olma bağıntısı

$$s \sim_x t \iff \exists W \subseteq U \cap V \ni s|_W = t|_W \in F(W)$$

şeklinde tanımlansın. s' nin x noktasındaki denklik sınıfına s' **nin hücresi** denir ve $germ_x s$ yerine $[s]_x$ veya $(U, s)_x$ notasyonları da kullanılabilir.

$$\mathcal{F}_x = \{(U, s)_x = germ_x s \mid s \in F(U), x \in U \subseteq X \text{ açık küme}\}$$

kümesi, X uzayı üzerindeki bütün hücrelerin kümesidir. Bu $\mathcal{F}_x$ kümesine x **noktasındaki saplar kümesi** denir. [14].

Tanım 2.4.4. X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere X' teki her x noktasını içeren U açık kümesinin Y' deki görüntüsü $f(U)$ olsun. Eğer

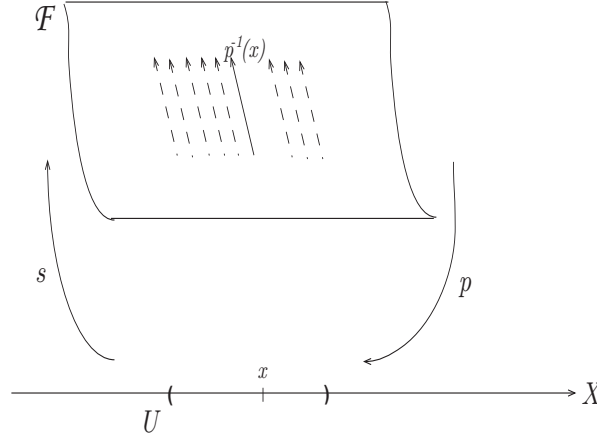
$$f|_U : U \rightarrow f(U)$$

homeomorfizm ise $f : X \rightarrow Y$ **lokal homeomorfizmdir**. Her lokal homeomorfizm sürekli ve açık dönüşümdür [20].

2.5 Demetler

Tanım 2.5.1. X topolojik uzayı üzerinde bir demet (sheaf)

1. $\mathcal{F}$ topolojik uzay,
2. $p : \mathcal{F} \rightarrow X$ lokal homeomorfizm



Şekil 2.1 $(\mathcal{F}, p)$ demeti

şartlarını sağlayan $(\mathcal{F}, p)$ çiftidir [17].

Hatırlatalım ki, X topolojik uzay olmak üzere $x \in X$ noktasını içeren bir açık küme U olsun. F bir öndemet olmak üzere; $s \in F(U)$ ve X' te aynı hücreye sahip olma bağıntısı ile s' nin x noktasındaki denklik sınıfı $(U, s)_x$ için

$$\mathcal{F}_x = \{(U, s)_x = germ_x s \mid s \in F(U), x \in U \subseteq X \text{ açık küme}\}$$

kümesi, X uzayı üzerindeki bütün hücrelerin kümesidir. Buna göre;

$$\mathcal{F} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

ile bir demet tanımlanabilir [14].

Tanım 2.5.2. $\mathcal{F}$, X topolojik uzayı üzerinde bir demet ve $p : \mathcal{F} \rightarrow X$ olsun. $Y \subseteq X$ ise $p^{-1}(Y) = \mathcal{F}|_Y$ de Y üzerinde bir demet olur. Bu demete $\mathcal{F}$ demetinin **alt demeti** denir [15].

Tanım 2.5.3. X topolojik uzayı üzerinde bir $\mathcal{F}$ demeti ve $x \in X$ olmak üzere x noktasını içeren X uzayında bir U açık kümesi alınsın. U kümesi üzerinde bir **lokal kesit(section)**, $p \circ s = I_U$ şartını sağlayan $s : U \rightarrow \mathcal{F}$ dönüşümdür [15].

$\mathcal{F}$ demetinin global kesitlerinin kümesi

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) = \{s \mid s : X \rightarrow \mathcal{F}, p \circ s = I_X\}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $U \subseteq X$ alınırsa, lokal kesitlerin kümesi

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \{s' \mid s' : U \rightarrow \mathcal{F}, p \circ s' = I_U\}$$

şeklindeir. Böylece $\Gamma(U, \mathcal{F})$ yardımıyla bir öndemet tanımlanır. Daha net bir şekilde $V \subseteq U$ açık kümeler olmak üzere

$$\Gamma_{UV} : \Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{F})$$

$$s' \mapsto \Gamma_{UV}(s') = s' \mid_V$$

dönüşümü ile birlikte Γ bir öndemettir. Γ dönüşümünün bir fonktor olduğu

$$\text{i) } \Gamma(s') = s' \mid_V = I_{\Gamma(U)}, V \subseteq U,$$

$$\text{ii) } (\Gamma_{VW} \circ \Gamma_{UV})(s') = \Gamma_{VW}(s' \mid_V) = (s' \mid_V) \mid_W = s' \mid_W$$

özellikleri ile kolayca görülür [15].

Böylece şu sonuç elde edilir:

Sonuç 2.5.1. Bir X topolojik uzayı üzerinde tanımlanan her demet bir öndemet belirler [15].

Tanım 2.5.4. X topolojik uzay ve F , X üzerinde bir öndemet olsun. U, X' te açık küme ve $U = \bigcup_{x \in X} U_x$, U' nun açık kümelerinin örtüsü olmak üzere; F öndemeti aşağıdaki şartları sağlarsa demettir denir.

1. $s, s' \in F(U)$, F' nin iki kesiti olsun. $\forall x \in X$ için

$$F_{UU_x}(s) = F_{UU_x}(s')$$

iken $s = s'$ durumunu sağlarsa F monodemet (parçalanmış öndemet) dir .

2. $\forall x \in X$ ve $s_x \in F(U_x)$ ile birlikte F' nin kesitlerinin $(s_x)_{x \in X}$ ailesi verilsin. $\forall x, y \in X$ olmak üzere

$$F_{(U_x)(U_x \cap U_y)}(s_x) = F_{(U_y)(U_x \cap U_y)}(s_y)$$

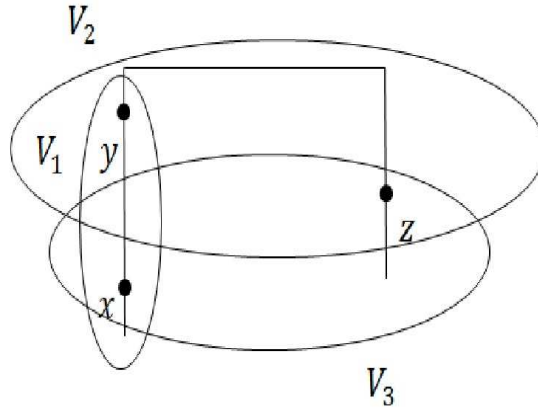
için $s \in F(U)$ vardır ki $F_{UU_x}(s) = s_x$ olur. Bu durum glueing (yapıştırma) durumudur [17].

Örnek 2.5.1. Şimdi demet olmayan bir öndemeti gösterelim. X reel sayılar kümesi, U , X' te açık küme ve $F(U)$, U üzerindeki sınırlı sürekli fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda, F demet değildir. Çünkü yapıştırılması mümkün değildir. U_i ' ler, her x için $|x| < i$ kümeleri olarak alındığında $f(x) = x$ birim fonksiyon U_i üzerinde sınırlıdır. Sonuç olarak U_i üzerinde s_i kesiti alınabilir. Fakat bu kesit yapıştırılamaz. Çünkü f fonksiyonu reel sayılarda sınırlı değildir. Sonuç olarak F öndemettir fakat demet değildir. Aslında F parçalanmıştır, çünkü sürekli fonksiyonların demetinin altdemetidir [21].

Örnek 2.5.2. $X \subseteq R^2$ ve $U_n = \{(\frac{1}{n}, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$ olmak üzere

$$X = \{(0, y) \mid 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 1) \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

verilsin. X' in her bir V_i örtüsü üzerinde yol bağlantılı denklik bağıntısı olsun. Böylece X , $(0, 1)$ aralığında aşağıdaki gibi bir lokal şekil oluşturur.



Şekil 2.2 X' in $(0, 1)$ aralığındaki lokal şekli

V_i örtüsü üzerindeki yol bağlantılık bağıntısına göre V_1 ' de $x \sim y$ ve V_2 ' de $y \sim z$ olur. Fakat, x ile z ' yi birleştirecek yol olmadığından V_3 'de $x \not\sim z$ dir. Eğer $E : O(X)^{op} \rightarrow Set$ fonktoru bir demet ise X üzerinde R denklik bağıntısı ve her bir V_i üzerinde $R \mid V_i$ yol bağlantılık bağıntısı bulunmalıdır. R bağıntısı $\prec x, z \succ \in R$ verir. Fakat $\prec x, z \succ \notin R \mid V_3$ olur. Dolayısıyla $E(-)$ demet değildir. Böylece, $\mathcal{E}_X$ ilgili demeti gösterir [22].

Tanım 2.5.5. $p_1 : \mathcal{F}_1 \longrightarrow X$ ve $p_2 : \mathcal{F}_2 \longrightarrow X$ iki demet olsun. Eğer $p_2 \circ \mu = p_1$ ise

$\mu : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ dönüşümüne **sapları koruyor** denir. Burada $\mathcal{F}_1 = \bigcup_{x \in X} (\mathcal{F}_1)_x$ ve $\mathcal{F}_2 = \bigcup_{x \in X} (\mathcal{F}_2)_x$ olmak üzere; $\mu((\mathcal{F}_1)_x) \subseteq (\mathcal{F}_2)_x$ şeklindedir [15].

Tanım 2.5.6. Sapları koruyan sürekli dönüşüme bir **demet morfizmi**, sapları koruyan homeomorfizme de bir **demet izomorfizmi** denir [15].

Tanım 2.5.7. X, Y topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşüm olsun. X uzayı üzerindeki $\mathcal{F}$ demeti, Y uzayı üzerinde bir $f_*\mathcal{F}$ demetini tanımlar ve $V \subseteq Y$ açık kümesi için

$$(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

olur. Bu demete $\mathcal{F}$ demetinin **direkt görüntü demeti** denir. Burada $f : X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu,

$$f_* : Sh(X) \rightarrow Sh(Y)$$

funktorunu tanımlar [15].

Tanım 2.5.8. $\mathcal{F}$ demeti Y uzayı üzerinde tanımlı bir demet olsun. $\mathcal{F}$ demetinin X uzayı üzerindeki $f^*\mathcal{F}$ **ters görüntü demeti**

$$f^*\mathcal{F} = \{(x, \sigma) \in X \times \mathcal{F} : f(x) = p(\sigma)\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $p : \mathcal{F} \rightarrow Y$ lokal homeomorfizmdir. $f^*\mathcal{F}$ üzerinde bir izdüşüm

$$p^* : f^*\mathcal{F} \rightarrow X$$

$$(x, \sigma) \rightarrow x$$

şeklinde verilir. Benzer şekilde, $f : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü

$$f^* : Sh(Y) \rightarrow Sh(X)$$

funktorunu verir. Y uzayı üzerinde bir $\mathcal{F}$ demeti için bu fonktörün $f^*\mathcal{F} \in Sh(X)$ değerine $\mathcal{F}$ demetinin f altındaki **ters görüntüsü** denir [15].

Tanım 2.5.9. F , X topolojik uzayı üzerinde bir öndemet olsun. F öndemetinde bir **atlas** (veya F öndemetine karşılık gelen $\mathcal{F}$ demetinin **global kesiti**)

$$\mathcal{U} = \{(U_i, s_i) \mid s_i \in F(U_i), i \in I\}$$

şeklinde tanımlanır öyle ki,

- i) $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_i \subseteq X$ açık,
- ii) Her $i, j \in I$, $U_i \cap U_j$ kümesinin her açık örtüsü için en az bir $W \subseteq (U_i \cap U_j)$ vardır öyle ki $s_i|_W = s_j|_W$

özellikleri sağlanır. $\mathcal{U}$ atlasındaki her bir (U_i, s_i) elemanına **harita** denir [15].

Lemma 2.5.1. F öndemetine karşılık gelen $\mathcal{F}$ demetinin her s -global kesiti bir atlas ile verilebilir. Tersine, F öndemetinde her atlas $\mathcal{F}$ demetinde bir global kesit tanımlar [16].

İspat. $F : O(X)^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ öndemetinin bir atlası

$$\mathcal{U} = \{(U_i, s_i) : i \in I, s_i \in F(U_i)\}$$

olsun. $\mathcal{U}$ atlasının yukarıdaki öndemetten elde edilen $\mathcal{F}$ demetinin bir global kesiti olduğunu göstereceğiz.

$\mathcal{U}$ atlası üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlayabiliriz. Bunun için bir $x \in X$ alalım. $x \in U_i \cap U_j$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ atlasının iki (U_i, s_i) ve (U_j, s_j) elemanı olsun. (U_i, s_i) ve (U_j, s_j) 'nin denk olması için gerek ve yeter şart $x \in W \subseteq U_i \cap U_j$ ve $s_i|_W = s_j|_W$ olacak şekilde bir W komşuluğunun olmasıdır. $(U_i, s_i)_x$ ile $(U_j, s_j)_x$ 'nin denklik sınıflarını gösterelim. Böylece bildiğimiz sapları ve demetleri elde ederiz:

$$\mathcal{F}_x = \{(U_i, s_i)_x : x \in U_i, s_i \in F(U_i)\}, \quad \mathcal{F} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

Böylece her $(U_i, s_i)_x$, sürekli bir $\dot{s}$ dönüşümü tanımlar.

$$\begin{aligned} \dot{s}_i & : U_i \rightarrow \mathcal{F} \\ x & \rightarrow (U_i, s_i)_x \end{aligned}$$

Burada $\mathcal{U}$ atlas olduğundan $x \in U_i$ için

$$\dot{s}(x) = \dot{s}_i(x)$$

formülü X topolojik uzayından $\mathcal{F}$ demetine bir $\dot{s}$ dönüşümü tanımlar. $\mathcal{F}$ demeti içinde açık olan keyfi bir U için

$$\dot{s}^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} \dot{s}_i^{-1}(U)$$

vardır. $\dot{s}_i^{-1}(U)$ kümesi, U_i ' de açıktır. Buradan $\dot{s}_i^{-1}(U)$ kümesinin X uzayı üzerinde de açık olduğunu elde ederiz. Böylece

$$\dot{s} : X \rightarrow \mathcal{F}$$

sürekli olur.

Şimdi; $p : \mathcal{F} \rightarrow X$ lokal homeomorfizm olduğundan $p \circ \dot{s} = I_x$ olduğunu göstermek zorundayız. Herhangi $x \in X$ için $x \in U_i$ açık kümesi vardır. Böylece

$$p \circ \dot{s}(x) = p \circ \dot{s}_i(x) = p((U_i, s_i)_x) = x$$

olur. Buradan $\dot{s}$, $\mathcal{F}$ demetinin global kesiti olur.

Tersine; bir demetin global kesiti bir atlas belirtir:

$\dot{s}$, F öndemetinden elde edilen $\mathcal{F}$ demetinin bir global kesiti olsun. Bu $p : \mathcal{F} \rightarrow X$ lokal homeomorfizm ve $p \circ \dot{s} = I_x$ olacak şekilde bir $\dot{s} : X \rightarrow \mathcal{F}$ sürekli dönüşümünün olduğu anlamına gelir. $\dot{s}$ sürekli olduğundan $x \in X$, $\dot{s}|_{U_i}$ olacak şekilde bir $x \in U_i$ açık komşuluğuna sahiptir. $\dot{s}|_{U_i} = \dot{s}_i$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \dot{s}_i & : U_i \rightarrow \mathcal{F} \\ x & \rightarrow (U_i, s_i)_x \end{aligned}$$

sürekli dönüşümü elde edilir. Her bir $x \in X$ için, bu şekildeki kümeler üzerinde bir denklik bağıntısı mevcuttur. Bunun anlamı her $x \in X$ noktasında $x \in U_i$ ile birlikte bir U_i açığı var ve U_i üzerindeki her $\dot{s}_i$ dönüşümü bir (U_i, s_i) verir demektir. Gerçekten bu (U_i, s_i) ' ler

$$\mathcal{U} = \{(U_i, s_i) | s_i \in F(U_i), i \in I\}$$

şeklinde bir atlas oluşturur [16]. □

Tanım 2.5.10. X topolojik uzayı üzerindeki demetlerin kategorisi $\mathbf{Sh}(X)$ olsun. $\mathbf{Sh}(X)$ kategorisinin $\mathbf{Sec}_X$ şeklinde gösterilen global kesitlerinin kategorisi aşağıdaki gibi elde edilir [20]:

Nesneler kümesi $Ob(\mathbf{Sec}_X)$, $\mathbf{Sh}(X)$ kategorisinin global kesitleridir. $\mathbf{Sec}_X$ kategorisindeki bir morfizm aşağıdaki diyagramı değişimli yapan $\phi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ şeklindeki bir demet morfizmidir.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{F}_2 \\ & \nwarrow s_1 \quad \nearrow s_2 & \\ & X & \end{array}$$

2.6 Lokal Denklik Bağıntısı

Bu kısımda Grothendieck ve Verdier[5] tarafından verilen, Brown[13, 14] ve İçen[15, 16] tarafından genişletilen lokal denklik bağıntısı kavramını vereceğiz.

Tanım 2.6.1. X bir topolojik uzay, X' in U açık altkümesi için $E(U) = \{R \mid R, U \text{ üzerinde tüm denklik bağıntıları}\}$ olsun. $E(U)$ nun öndemet olduğunu göstermiştik. Buna göre; $V \subseteq U$ ve aynı zamanda X' te açık ise

$$\begin{aligned} E_{UV} : E(U) &\rightarrow E(V) \\ R &\mapsto (R|_V) = \{R \cap (V \times V)\} \end{aligned}$$

şeklinde bir kısıtlama morfizmi bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} E : O(X)^{op} &\rightarrow Set \\ U_i &\mapsto E(U_i) = \{R \mid R, U_i \text{ üzerinde denklik bağıntısı}\} \end{aligned}$$

funktoru X üzerinde bir $E = \{E(U_i), E_{UV}, X\}$ öndemetini tanımlar. Her demete bir öndemet karşılık gelir [16]. E öndemetine karşı gelen bu demeti $\mathcal{E}$ ile gösterelim. $\mathcal{E}$ demetinin r -global kesitine X topolojik uzayı üzerinde bir **lokal denklik bağıntısı** denir [5].

Lokal denklik bağıntısının bir dönüşüm olmasının yanında yapısında $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olmak üzere

$$R_i \in E(U_i),$$

$$R_j \in E(U_j)$$

iken bir $z \in (U_i \cap U_j)$ vardır ve $z \in W \subseteq (U_i \cap U_j)$ dir öyle ki

$$R_i|_W = R_j|_W$$

olan **lokal bağdaşabilirlik şartı** vardır. Yani

$$r \rightarrow \mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid U_i \subseteq X \text{ açık kümeler}, R_i \in E(U_i)\}$$

şeklinde olup $\mathcal{U}$ bir atlasır [22].

X bir topolojik uzay olsun. X' deki U açığı için $E(U) = \{U \text{ üzerindeki tüm denklik bağıntıları}\}$, $V \subseteq U$ açığı için $E(U) \rightarrow E(V)$ kısıtlama morfizmi vardır ve böylece X üzerinde bir öndemet vardır, fakat demet değildir. Bunu örnek 2.5.2' de gördük.

$\mathcal{E}$ denklik bağıntılarının hücrelerinin demeti doğal sıralamaya sahiptir. $E = \{E(U_i), E_{UV}, X\}$ öndemetinde $E(U_i) = \{R_i \mid R_i \subseteq U_i \times U_i\}$ olmak üzere x' yi içeren U_i ve U_j açıkları için $x \in X$ in hücreleri $r_x = (U_i, R_i)_x$, $s_x = (U_j, R_j)_x$ dir. $R_i \in E(U_i)$, $R_j \in E(U_j)$ olup r_x , R_i' yi, s_x , R_j' i belirtir. Yani

$$(U_i, R_i) \sim_x (U_j, R_j) \Leftrightarrow \exists x \in W \subseteq U_i \cap U_j \text{ için } R_i|_W = R_j|_W$$

olup x' in W açığı için $W \subseteq U_i \cap U_j$, $R_i|_W \subseteq R_j|_W$ ise $r_x \leq s_x$ [22].

Tanım 2.6.2. r ve s , X üzerinde lokal denklik bağıntısı olsun. $r = (r_x)_{x \in X}$ ve $s = (s_x)_{x \in X}$ olmak üzere

$$r \leq s \Leftrightarrow r_x \leq s_x, \forall x \in X$$

lokal denklik bağıntıları doğal sıralamaya sahiptir [22].

Örnek 2.6.1. Bir X uzayı, U_i örtüsü ve gereken lokal bağdaşabilirlik şartı ile herhangi bir Y uzayı alınsın.

$$f_i : X \rightarrow Y$$

sürekli dönüşüm olmak üzere U_i üzerinde bir R_i denklik bağıntısı tanımlanabilir. Burada

$$f_i(x) = f_i(y) \iff xR_i y$$

şeklinde tanımlanır. R_i ve R_j sırasıyla U_i ve U_j üzerinde denklik bağıntısı olsunlar. $x \in (U_i \cap U_j)$ için $x \in U_k \subseteq (U_i \cap U_j)$ alınırsa lokal bağdaşabilirlik şartı

$$R_i|_{U_k} = R_j|_{U_k}$$

söylenir [22].

Tanım 2.6.3. X bir topolojik uzay olsun. X' deki U açığı için $E(U) = \{R \mid R, U \text{ üzerinde tüm denklik bağıntıları}\}$ ile $R \in E(X)$ olur. $loc(R) = \{(U_i, R|_{U_i}) \mid R \subseteq X \times X\}$, X üzerindeki tüm lokal denklik bağıntılarını gösterebilir. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ olmak üzere;

$$R_i \in E(U_i),$$

$$R_j \in E(U_j)$$

iken bir $z \in (U_i \cap U_j)$ vardır ve $z \in W \subseteq (U_i \cap U_j)$ dir öyle ki

$$R_i|_W = R_j|_W$$

sağlar. Buna göre; her atlas bir global kesit tanımladığından [16] $r \in \mathcal{E}_X$ için $glob(r) = \cap \{R \mid r \leq loc(R)\}$ şeklindedir [22].

Uyarı 2.6.1. r , X üzerinde bir lokal denklik bağıntısı olsun. r' ye r ' nin karakterinin bölgesel yansıması olan global denklik bağıntısı yardımıyla yaklaşılabılır. Yani $glob(-)$ şu şekilde tanımlanabilir: r lokal denklik bağıntısını içeren tüm lokal denklik bağıntılarının kesişimlerinde olan bir denklik bağıntısıdır [22].

Teorem 2.6.1. $\forall x \in X$ için $R_x \in E(U_x)$, $V = \{V_x\}_{x \in X}$ açık örtü, $\forall x \in X$ için $x \subset V_x \subseteq U_x$ ise $V \leq U$ ve R_V , $\{R_x \mid V_x\}_{x \in X}$ tarafından elde edilen denklik bağıntısı olsun. $r \in E_X$ ise $glob(r) = \cap \{R_v \mid V \leq U\}$ dir [22].

İspat. $r \leq \text{loc}(S)$ ile $S \in E(X)$ olsun. $x \in W_x \subseteq U_x$ olacak şekilde W_x açığı ve $R_x \mid W_x \subseteq S_x \mid W_x$ seçilsin. $W = \{W_x\}_{x \in X}$ olsun. $R_W \subseteq S$ ve böylece, $\cap\{R_V \mid V \leq U\} \subseteq \text{glob}(r)$ elde edilir. Tersine eğer $V \leq U$ ise R_V lokal olarak $\{R_x \mid V_x\}$ tarafından oluşturulduğundan $R_x \mid W_x \subseteq R_V \mid W_x$ olup, $r \leq \text{loc}(R_V)$ ve $\text{glob}(r) = \cap\{R_V \mid V \leq U\}$ bulunur. $\square$

2.7 Coherent Lokal Denklik Bağıntısı

Bir R denklik bağıntısı için $\text{glob}(\text{loc}(R)) \subseteq R$ geçerlidir. r lokal denklik bağıntısı $r \leq \text{loc}(\text{glob}(r))$ şartını sağlar. Denklik bağıntılarının kesişimi alındığında, lokal denklik bağıntılarının trivial(aşık) olması beklenmez. Buna rağmen, glob ve loc arasında funktoryal ilişki elde edebilmek için coherent bir r lokal denklik bağıntısı vardır. Yani, $r \leq \text{loc}(\text{glob}(r))$ olan r lokal denklik bağıntısı kullanılacaktır [23].

Tanım 2.7.1. r , X üzerinde lokal denklik bağıntısı ve $U \subset X$ açık olsun.

1. r coherenttir $\Leftrightarrow r \leq \text{loc}(\text{glob}(r))$.
2. r global coherenttir $\Leftrightarrow r = \text{loc}(\text{glob}(r))$.
3. r total coherenttir $\Leftrightarrow$ her U açığı için $r \mid U$ coherenttir [23].

Tanım 2.7.2. R , X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu taktirde,

1. R lokal olarak coherenttir $\Leftrightarrow \text{loc}(R)$ coherenttir.
2. R coherenttir $\Leftrightarrow R = \text{glob}(\text{loc}(R))$ [22].

R denklik bağıntısının coherent olması için $\{V_x\}_{x \in X}$ açık örtü olmak üzere $\{R \mid V_x\}_{x \in X}$ ’ den elde edilen denklik bağıntısı R_V için $R = R_V$ olmalıdır. Böylece coherentlik için gerekli durum inşa edilebilir [23].

Örnek 2.7.1. R' nin denklik sınıfları koni üzerindeki dairesel kesitler olarak alınsın ve koninin tabanı P ile gösterilsin. P' nin denklik sınıfları bağlantısızdır ve $\text{loc}(R')$ ’ ye bakıldığında P tabanında bağlantılılık bilgisi kaybolur. R lokal olarak coherent olsa bile

coherent değildir. Çünkü $glob(loc(R))$ ' de P ' nin denklik sınıfları $\{P\}$ olur ve bu yüzden $glob(loc(R)) \subsetneq R$ dir [23].

Örnek 2.7.2. R üzerinde $a \sim b \Leftrightarrow b = \pm a$ denklik bağıntısı tanımlansın. r bu şekilde tanımlanan lokal denklik bağıntısı olsun. Buradan $glob(r)$ tek denklik sınıfı ile aşıkâr denklik bağıntısıdır. Bunu görmek için reel eksen de orjinin $(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$ açık komşuluğu olan V_n örtüsü alınsın. $glob(r) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_{V_n}$ olur. 0 noktasındaki $glob(r) = \{0\}$ olup, $r \leq loc(glob(r))$ orjinin herhangi komşuluğunda olmadığından r aşıkâr denklik bağıntısı olmayıp, r coherent değildir [23].

Teorem 2.7.1. A coherent lokal denklik bağıntılarının kategorisi ve B lokal coherent global denklik bağıntılarının kategorisi olsun. Bu taktirde, $A \xrightarrow{glob} B, B \xrightarrow{loc} A$ $glob \vdash loc$ adjoint funktor çiftleri oluşur [23].

İspat. $r \in A$ ve $R \in B$ için unit ve counitlerin birleşimleri $r \leq loc(glob(r))$ ve $glob(loc(R)) \subseteq R$ dir. Bu birleşimler altında global olarak coherent r ve coherent R arasında bir denklik vardır. $\square$

Teorem 2.7.2. R, X üzerinde bir denklik bağıntısı, X ' in $\{V_x\}_{x \in X}$ örtüsü için $R_V \subseteq R$ ve $R_V, \{R|V_x\}_{x \in X}$ tarafından oluşturulmuş denklik bağıntısı olsun. R_V ' nin denklik sınıfları R nin denklik sınıflarında açık ve kapalıdır [23].

Teorem 2.7.3. r coherent lokal denklik bağıntısı olsun. $glob(r)$ ' nin denklik sınıfları X ' in bağlantılı bileşenleridir [23].

Teorem 2.7.4. $r = loc(R)$ lokal denklik bağıntısı, $R \in E(X)$ olsun. $\forall x \in X$ için bir N_x açık komşuluğu için $R|N_x$ bağlantılı denklik sınıfları olduğu kabul edilsin. Böylece r lokal denklik bağıntısı coherenttir.

İspat. r lokal denklik bağıntısı coherent olmazsa sadece bazı $a \in X$ elemanları için $r_a \leq loc(glob(r))_a$ olur. Yani a ' nın herhangi bir N açığı için $\{V_x\}_{x \in U}$ örtüsü var ve $y_1, y_2 \in N$ için $(y_1, y_2) \in R$ iken $(y_1, y_2) \notin R_V$ dir. Bu N_a için de doğrudur. $R|W_a$ ' da y_1 ' in denklik sınıfında, $R_V|N_a$ daki y_1 ' in denklik sınıfları kapalı olduğundan bağlantılıdır. Bu ise $(y_1, y_2) \in R$ olmasına ters düşer. $\square$

Teorem 2.7.5. r, X üzerinde lokal denklik bağıntısı olsun. $x \in X'$ in U_x komşuluğu için $R_x \in E(U_x)$ lokal denklik bağıntısı tanımlansın.

1. r global ve total coherent lokal denklik bağıntısı olsun. X' te U açıksa $R \mid U$ global coherenttir.
2. $x \in V_x \subseteq U_x, \forall x \in X$ için $r \mid V_x$ total ve global coherent lokal denklik bağıntısı olacak şekilde $\{V_x\}_{x \in X}$ açık örtüsü varsa r total coherent lokal denklik bağıntısıdır[22].

Teorem 2.7.6. $R \in E(X)$ ve R' nin bağlantılı denklik sınıfları olsun. Bu taktirde $R = \text{glob}(\text{loc}(R))$ dir. Tersine R kapalı denklik sınıflarına sahip ve $R = \text{glob}(\text{loc}(R))$ ise, R bağlantılı denklik sınıflarına sahiptir[22].

Teorem 2.7.7. Eğer r total coherent lokal denklik bağıntısı ise bağlantılı denklik sınıfları ile denklik bağıntıları tarafından lokal olarak tanımlanabilir [22].

İspat. $r \mid U_x = \text{loc}(\text{glob}(r \mid U_x))$ idi. r total coherent lokal denklik bağıntısı olması $r \mid U$ coherent lokal denklik bağıntısı olmasını sağlar. Böylece bağlantılı denklik sınıfları vardır. □

3. ROUGH KÜME VE ROUGH ALTGRUP

Rough küme teorisi, 1982’ de ilk olarak Pawlak [1] tarafından ortaya atılmıştır. Bu teori kesin olmayan bilginin belirsizliği ve anlaşılmalığı ile ilgili bir yöntem olarak tanıtıldı. Bu teoride nesnelerin sınıflandırmasının temeli bir denklik bağıntısıdır. Teorinin temeli olan rough (yaklaşım) küme kavramı, evrensel kümenin herhangi bir alt kümesi olup, evrensel küme üzerinde tanımlanan bir denklik bağıntısı ile oluşturulan alt ve üst yaklaşımlar ikilisi ile tanımlanır. Rough kümeler; belirsiz veya kesin olmayan bilginin tanımlanması, analizi, eksik bilgiye dayanan akıl yürütme gibi çeşitli problemlerin çözümünde bir araç oldu. Ayrıca kesin olmayan bilgiler için yeni bir matematiksel yöntemdir. Bu yöntemde; belirsizlik, bir kümenin sınır bölgesi ile açıklanır [1].

3.1 Rough Küme

Tanım 3.1.1. U nesnelerin boştan farklı sonlu bir kümesi ve $R \subseteq U \times U$ ikili işlemi verilsin. U ’ ya evrensel küme, R ’ ye ayırtedilemezlik bağıntısı denir. Bu bağıntı U ’ nun elemanları hakkındaki bilgi eksikliğini ortaya çıkaracak bir bağıntıdır. R, U üzerinde bir denklik bağıntısı olarak alındığında $S = (U, R)$ ikilisine rough(yaklaşım) uzayı denir [24].

Tanım 3.1.2. U nesnelerin boştan farklı sonlu bir kümesi ve R, U üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in U$ olsun. U üzerinde R bağıntısı yardımıyla x ’in denklik sınıfı

$$R(x) = [x]_R = \{x \text{ elemanı ile belirlenen } R \text{ bağıntısına göre } x \text{'in denklik sınıfı}\}$$

olarak tanımlanır. Bu denklik sınıfları, verilen bilgilerin tam olarak anlaşılması için bilgi parçalarını oluşturur [24].

Tanım 3.1.3. $S = (U, R)$ yaklaşım uzayı ve $\emptyset \neq X \subseteq U$ olsun.

$$\underline{R}(X) = \{x \mid [x]_R \subseteq X\} = \bigcup_{x \in U} \{[x]_R \mid [x]_R \subseteq X\}$$

kümesine S yaklaşım uzayında X kümesinin alt yaklaşımı denir. Burada $[x]_R, x$ ’ i içeren R denklik bağıntısının denklik sınıfıdır. Buna göre X ’ in alt yaklaşımı X tarafından tamamen

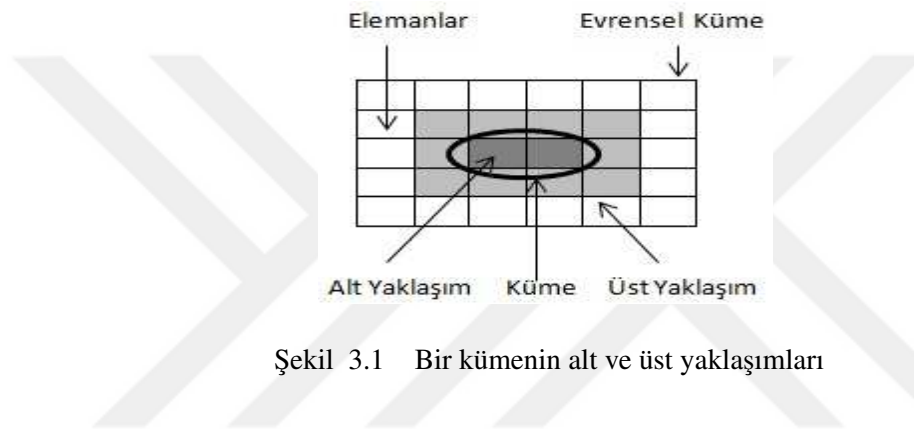
kapsanan denklik sınıflarının birleşiminden oluşur. Ya da denklik sınıfı X' in içinde olan elemanların oluşturduğu kümedir [25].

Tanım 3.1.4. $S = (U, R)$ yaklaşım uzayı ve $\emptyset \neq X \subseteq U$ olsun.

$$\bar{R}(X) = \{x \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in U} \{[x]_R \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\}$$

kümesine S yaklaşım uzayında X kümesinin üst yaklaşımı denir. X' in üst yaklaşımı, denklik sınıfı ile X' in arakesiti boştan farklı elemanlarının oluşturduğu kümedir [25].

Bir küme üzerindeki denklik bağıntısına göre belirlenen denklik sınıfları yardımıyla verilen kümenin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki şekilden daha kolay anlaşılır [26].



Şekil 3.1 Bir kümenin alt ve üst yaklaşımları

Tanım 3.1.5. U evrensel küme ve R , U üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $R(X) = (\underline{R}(X), \bar{R}(X))$ ikilisine de $S = (U, R)$ rough uzayının rough(yaklaşım) kümesi denir. $R(X) = (\underline{R}(X), \bar{R}(X))$ rough kümesi S' de X' in rough kümesidir. Herhangi bir $S = (U, R)$ yaklaşım uzayı ve U' nun bir X kümesi için $R(X)$ rough kümesi tektir [1].

Tanım 3.1.6. Her satır bir nesne ve her bir sütun da bir özelliği gösterecek şekilde bir bilgi tablosu oluşturulabilir. Nesnelerin sonlu kümesi U ile özelliklerin sonlu kümesi de A ile gösterilmek üzere bu şekilde oluşturulan tabloya $S = (U, A)$ bilgi sistemi denir. $\forall a \in A$ özelliği için

$$a : U \rightarrow V_a$$

$$x \rightarrow V_a(x)$$

olacak şekilde a' nın bir V_a değeri vardır [26].

Tanım 3.1.7. Bir kümenin alt ve üst yaklaşımları; sırasıyla, ayırtedilemezlik bağıntısı ile üretilen topoloji içinde bu kümenin içi ve kapanışıdır [1].

Tanım 3.1.8. X' in sınır bölgesi $BndR$, üst ve alt yaklaşımlar arasındaki farktır. Yani $BndR(X) = \overline{R(X)} - \underline{R(X)}$ dir. Buna göre X' in sınır bölgesi, X ve $-X = U - X'$ in elemanı olarak R bağıntısıyla sınıflandırılmayan elemanların oluşturduğu kümedir [1].

Tanım 3.1.9. X' in sınır bölgesi boş ise X kümesine R bağıntısı ile crisp (tam,kesin) küme denir. Tam küme klasik küme kavramımızı verir [1].

Tanım 3.1.10. X' in sınır bölgesi boştan farklı ise X kümesi R bağıntısı ile rough kümedir denir [1].

Örnek 3.1.1. $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ nesnelerinin kümesi, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ özelliklerin kümesi, $V_1 = \{1, 2, 3\}$, $V_2 = \{1, 2\}$, $V_3 = \{1, 2, 3, 4\}$ değer kümeleri ve U üzerindeki denklik bağıntısı

$$R(x_i) = \{x_j : x_j, x_i \text{ ' ler ile aynı ölçülere sahip, } 1 \leq i, j \leq 10\}$$

olmak üzere

U	a_1	a_2	a_3
x_1	2	1	3
x_2	3	2	1
x_3	2	1	3
x_4	2	2	3
x_5	1	1	4
x_6	1	1	2
x_7	3	2	1
x_8	1	1	4
x_9	2	1	3
x_{10}	3	2	1

bilgi tablosu veriliyor.

$$\begin{aligned}
 R(x_1) &= R(x_3) = R(x_9) = \{x_1, x_3, x_9\}, \\
 R(x_2) &= R(x_7) = R(x_{10}) = \{x_2, x_7, x_{10}\}, \\
 R(x_4) &= \{x_4\}, \\
 R(x_5) &= R(x_8) = \{x_5, x_8\}, \\
 R(x_6) &= \{x_6\}
 \end{aligned}$$

denklik sınıfları yardımıyla U ' nun bir $X = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_9\}$ kümesi için

$$\begin{aligned}
 \underline{R}(X) &= \{x_1, x_3, x_4, x_9\}, \\
 \overline{R}(X) &= \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}, \\
 BndR(X) &= \overline{R}(X) - \underline{R}(X) = \{x_5, x_8\}
 \end{aligned}$$

elde edilir [26].

Teorem 3.1.1. R, U üzerinde bir denklik bağıntısı, (U, R) yaklaşım uzayı ve $\emptyset \neq X, Y \subseteq U$ alt kümelerinin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki özellikleri sağlar [1].

1. $\underline{R}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}(X)$.
2. $\underline{R}(\emptyset) = \overline{R}(\emptyset) = \emptyset$.
3. $\underline{R}(U) = \overline{R}(U) = U$.
4. $\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y)$.
5. $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y)$.
6. $X \subseteq Y$ ise $\underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y)$.
7. $X \subseteq Y$ ise $\overline{R}(X) \subseteq \overline{R}(Y)$.
8. $\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y)$.

$$9. \bar{R}(X \cap Y) \subseteq \bar{R}(X) \cap \bar{R}(Y).$$

$$10. \underline{R}(-X) = -\bar{R}(X).$$

$$11. \bar{R}(-X) = -\underline{R}(X).$$

$$12. \underline{\underline{R}}(X) = \bar{\underline{R}}(X) = \underline{R}(X).$$

$$13. \bar{\bar{R}}(X) = \underline{\bar{R}}(X) = \bar{R}(X).$$

Tanım 3.1.11. $|X|$, $X \neq \emptyset$ kümesinin kardinalitesi olmak üzere (U, R) yaklaşım uzayındaki bir X rough kümesinde yaklaşımın kesinliği,

$$\alpha_R(X) = \frac{|\underline{R}(X)|}{|\bar{R}(X)|}$$

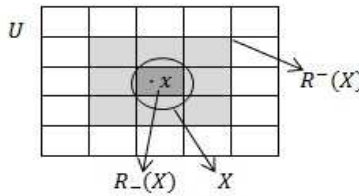
şeklindedir [1].

Tanım 3.1.12. Eğer $\alpha_R(X) = 1$ ise X kümesine R yardımıyla bir tam kümedir denir. Eğer $\alpha_R(X) < 1$ ise X kümesine R aracılığıyla bir rough kümedir denir [1].

Örnek 3.1.2. Örnek 3.1.1.' in verileri kullanılarak X kümesinde yaklaşımın kesinliği $\alpha_R(X) = \frac{4}{6} < 1$ olup X kümesi R aracılığıyla bir rough kümedir.

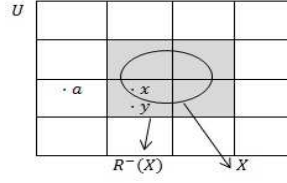
Tanım 3.1.13. Rough kümeler dört kategoride sınıflandırılabilir [1].

1. X kümesi rough R -tanımlanabilir $\Leftrightarrow \underline{R}(X) \neq \emptyset$ ve $\bar{R}(X) \neq U$. R aracılığıyla U ' nun bazı elemanlarının X ' e veya $-X$ ' e ait olduklarını söylenebilir.



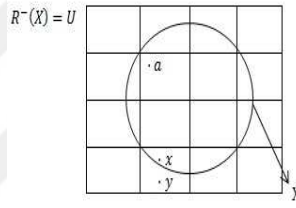
Şekil 3.2 Rough R -tanımlanabilir küme

2. X kümesi internal R -tanımlanamazdır $\Leftrightarrow \underline{R}(X) = \emptyset$ ve $\overline{R}(X) \neq U$. R aracılığıyla U 'nin bazı elemanlarının $a \in -X$ olduğu söylenebilir. Fakat $x, y \in R(X)$ iken $x \in X$ veya $y \in X$ olduğu kesin olarak söylenemez.



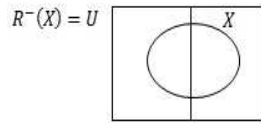
Şekil 3.3 Rough internal R -tanımlanamaz küme

3. X kümesi external R -tanımlanamazdır $\Leftrightarrow \underline{R}(X) \neq \emptyset$ ve $\overline{R}(X) = U$. R aracılığıyla U 'nin bazı elemanlarının $a \in X$ olduğu söylenebilir. Fakat $x, y \in R(X)$ iken $x \in -X$ veya $y \in -X$ olduğu kesin olarak söylenemez.



Şekil 3.4 Rough external R -tanımlanamaz küme

4. X kümesi total R -tanımlanamazdır $\Leftrightarrow \underline{R}(X) = \emptyset$ ve $\overline{R}(X) = U$. R aracılığıyla U 'nin bir elemanının X veya $-X$ 'e ait olduğu kesin olarak söylenemez.



Şekil 3.5 Rough total R -tanımlanamaz küme

Klasik (tam) küme teorisinde bir elemanın kümeye üyeliği 1 ve 0 değerini alırken rough kümelerde üyelik fonksiyonu notasyonu farklıdır. Rough kümeler, yaklaşımlar

yerine yaklaşım üyelik fonksiyonu $\mu_X^R : U \longrightarrow [0, 1]$ alınarak da tanımlanabilir. Yaklaşımli üyelik fonksiyonunda x in ait olduğu $R(x)$ denklik sınıfı ile X kümesinin birbiriyle örtüşme derecesi ölçülür.

Tanım 3.1.14. $|X|$, X kümesinin kardinalitesini göstermek üzere yaklaşımli üyelik fonksiyonu

$$\mu_X^R(x) = \frac{|X \cap R(x)|}{|R(x)|}$$

şeklinde tanımlanır [26].

Bu fonksiyon x' in X' e ait olmasının şartlı ihtimalini ve R tarafından x hakkında verilen bilgi göz önüne alınarak x' in X' e ait olma derecesini açıklar. Yaklaşımli üyelik fonksiyonu için

$$X \cap R(x) = \emptyset \quad \text{ise} \quad \mu_X^R(x) = 0,$$

$$X \cap R(x) \neq \emptyset \quad \text{ise} \quad 0 < \mu_X^R(x) < 1,$$

$$R(x) \subseteq X \quad \text{ise} \quad \mu_X^R(x) = 1$$

olur. Yaklaşımli üyelik fonksiyonu, yaklaşımları ve bir kümenin sınır bölgelerini tanımlamak için

$$\underline{R}(x) = \{x \in U \mid \mu_X^R(x) = 1\},$$

$$\bar{R}(x) = \{x \in U \mid \mu_X^R(x) > 0\},$$

$$BndR(x) = \bar{R}(X)(x) - \underline{R}(X)(x) = \{x \in U \mid 0 < \mu_X^R(x) < 1\}$$

şeklinde hesaplanır.

Üyelik fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar [26]:

1. $\mu_X^R(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \underline{R}(x)$.
2. $\mu_X^R(x) = 0 \Leftrightarrow x \in U - \bar{R}(x)$.
3. $0 < \mu_X^R(x) < 1 \Leftrightarrow x \in BndR(x)$.
4. $\mu_{U-X}^R(x) = 1 - \mu_X^R(x), x \in U$.

$$5. \mu_{X \cup Y}^R(x) \geq \max\{\mu_X^R(x), \mu_Y^R(x)\}, x \in U.$$

$$6. \mu_{X \cap Y}^R(x) \leq \min\{\mu_X^R(x), \mu_Y^R(x)\}, x \in U.$$

Rough kümelerde birleşim ve kesişim kümelerinin üyelikleri hesaplanamaz. Bu özelliği ile yaklaşımlı üyelik fuzzy üyeliğinin daha genel bir halidir. Çünkü yaklaşımlı üyelik fonksiyonunda bir ihtimal vardır [26].

Örnek 3.1.3. Örnek 3.1.1.' in verileri kullanılarak X kümesinin her bir elemanın üyelik değerleri

$$\mu_X^R(x_1) = \mu_X^R(x_3) = \mu_X^R(x_9) = 1,$$

$$\mu_X^R(x_2) = \mu_X^R(x_7) = \mu_X^R(x_{10}) = 0,$$

$$\mu_X^R(x_4) = 1,$$

$$\mu_X^R(x_5) = \mu_X^R(x_8) = \frac{1}{2},$$

$$\mu_X^R(x_6) = 0$$

şeklindedir. Buna göre üyelik fonksiyonu yardımıyla

$$\underline{R}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_9\},$$

$$\overline{R}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\},$$

$$BndR(X) = \{x_5, x_8\}$$

olduğu görülür [26].

3.2 Rough Topoloji

Tanım 3.2.1. U nesnelerin sonlu kümesi, $R \subseteq U \times U$, U üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $X \subseteq U$ için $\tau_R = \{U, \emptyset, \underline{R}(X), \overline{R}(X), Bnd(X)\}$ uzayı,

$$1. U, \emptyset \in \tau_R,$$

$$2. \tau_R \text{ uzayındaki elemanların sonlu kesişimleri } \tau_R \text{ uzayındadır,}$$

3. τ_R uzayındaki elemanların keyfi birleşimleri yine τ_R uzayındadır,

şartlarını sağlar böylece τ_R, U üzerinde X' e bağlı rough topoloji olarak adlandırılır. Buna göre, $\{U, \tau_R, X\}'$ e rough topolojik uzay denir [27].

Örnek 3.2.1. $U = \{a, b, c, d, e\}$ nesnelerin sonlu kümesi, $U/R = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}$ U' nun denklik sınıflarının kümesi ve $X = \{a, c, d\}$ olsun. Buna göre, $\underline{R}(X) = \{c, d\}$, $\bar{R}(X) = \{a, b, c, d\}$ ve $Bnd(X) = \{a, b\}$ olup

$$\tau_R = \{U, \emptyset, \{a, b, c, d\}, \{c, d\}, \{a, b\}\}$$

U üzerinde X' e bağlı rough topolojidir [27].

3.3 Rough Alt Gruplar

Rough kümeler, evrensel küme üzerinde tanımlanan denklik bağıntıları ile belirlenmektedir. Buna göre bir G grubu üzerinde N alt grubuna göre tanımlanan $x \equiv y(mod N) \Leftrightarrow xy^{-1} \in N$ bağıntısı bir denklik bağıntısı olup bu bağıntı kullanılarak grubun bir alt kümesinin alt ve üst yaklaşımları tanımlanmıştır [4].

Rough grup kavramı Biswas ve Nanda [2] tarafından sadece üst yaklaşım tanımı kullanılarak, Kuroki ve Wang [3] tarafından üst ve alt yaklaşım tanımı kullanılarak iki farklı şekilde tanımlanmıştır. Biz bu tez boyunca Kuroki ve Wang [3] tarafından verilen tanımı kullanacağız. Ama öncelikle bazı cebirsel kavramlardan bahsedeceğiz.

Tanım 3.3.1. Boştan farklı bir G kümesi üzerinde tanımlı " $\circ$ " ikili işlemi kapalılık, birleşim, birim ve ters eleman özelliklerini sağlıyorsa $(G, \circ)$ cebirsel yapısına bir grup denir.

Tanım 3.3.2. G bir grup, H, G' nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. H, G' deki işleme göre bir grup ise veya $\forall a, b \in H$ için $a.b^{-1} \in H$ ise H' ya G' nin bir alt grubu denir.

Tanım 3.3.3. G bir grup ve N, G grubunun bir alt grubu olsun. Her $a \in G$ için $aNa^{-1} \subseteq N$ ise N' ye G grubunun normal alt grubu denir.

Örnek 3.3.1. Aşık alt gruplar $\{e\}$ ve G kümeleri G grubunun normal alt gruplarıdır. Eğer G grubu değişmeli ise G' nin her alt grubu normal alt gruptur.

Teorem 3.3.1. N, G grubunun alt grubu olsun. Aşağıdakiler denktir.

1. N, G grubunun normal alt grubudur.
2. $\forall a \in G$ için $aNa^{-1} = N$ dir.
3. $\forall a \in G$ için $aN = Na$ dir.
4. $\forall a, b \in G$ için $(aN)(bN) = abN$ dir.

Tanım 3.3.4. G ve H iki grup olsun. Eğer $\forall a, b \in G$ için $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ oluyorsa $\phi : G \rightarrow H$ dönüşümüne bir homomorfizm denir.

Tanım 3.3.5. G ve H iki grup ve $\phi : G \rightarrow H$ bir homomorfizm olsun. e' elemanı H' nin birimi olmak üzere ϕ' nin çekirdeği $\text{Ker}\phi = \{a \in G \mid \phi(a) = e'\}$ dir. $\phi(e) = e'$ olduğundan $\text{Ker}\phi$ kümesi boştan farklıdır.

Teorem 3.3.2. $\phi : G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. $\text{Ker}\phi$ G grubunun, $\text{Im}\phi$ ise H grubunun alt grubudur.

İspat. $a, b \in \text{Ker}\phi$ için $\phi(ab^{-1}) = \phi(a)\phi(b)^{-1} = e'e' = e'$ dir. Dolayısıyla $ab^{-1} \in \text{Ker}\phi$ olur. Böylece $\text{Ker}\phi$ G' nin alt grubudur. $\kappa, \rho \in \text{Im}\phi$ alalım. $\phi(a) = \kappa, \phi(b) = \rho$ olacak şekilde $a, b \in G$ vardır. Dolayısıyla $\kappa\rho^{-1} = \phi(a)\phi(b)^{-1} = \phi(ab^{-1}) \in \text{Im}\phi$ dir. Bu ise $\text{Im}\phi'$ nin H grubunun alt grubu olduğunu verir. $\square$

3.3.1 N normal alt grubuna göre X kümesinin N(X) Rough Kümesi

Şimdi bu tez boyunca kullanacağımız Kuroki ve Wang [3] tarafından tanımlanan; bir G grubundaki N normal alt grubuna göre bir X kümesinin alt ve üst yaklaşımları ile elde edilen $N(X)$ rough kümesinin tanımını vereceğiz.

Tanım 3.3.6. N , G grubunun normal alt grubu ve X , G 'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. N normal alt grubuna göre X alt kümesinin alt ve üst yaklaşımları sırasıyla

$$\begin{aligned}\underline{N}(X) &= \{x \in G \mid xN \subseteq X\} = \bigcup_{x \in G} \{xN \mid xN \subseteq X\}, \\ \bar{N}(X) &= \{x \in G \mid xN \cap X \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in G} \{xN \mid xN \cap X \neq \emptyset \subseteq X\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre G 'de X 'in $N(X) = (\underline{N}(X), \bar{N}(X))$ rough kümesi vardır [3].

3.4 Alt ve Üst Yaklaşımlı Rough Alt Gruplar

Bu kısım, ileride grupoidler için vereceğimiz rough alt grupoid kavramının temelini oluşturacaktır.

Tanım 3.4.1. X , G 'nin boştan farklı bir alt kümesi ve N , G 'nin bir normal alt grubu olsun. G 'de X 'in $N(X) = (\underline{N}(X), \bar{N}(X))$ rough kümesi için,

1. $\bar{N}(X)$, G 'nin (normal) alt grubu ise X 'e G 'nin $\bar{N}$ rough (normal) alt grubu
2. $\underline{N}(X)$, G 'nin (normal) alt grubu ise X 'e G 'nin $\underline{N}$ rough (normal) alt grubu

denir [3].

Örnek 3.4.1. İşlem tablosu

.	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

olarak verilsin ve G değişmeli grup, $H = \{1, 2\}$ ve $N = \{1, 3\}$ olsun. O halde H ve N , G değişmeli grubunun normal alt gruplarıdır. $A = \{1, 4\}$ olmak üzere,

$$\bar{H}(A) = \{x \in G : xH \cap A \neq \emptyset\} = \{x \in G : x\{1, 2\} \cap \{1, 4\} \neq \emptyset\} = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$\bar{N}(A) = \{x \in G : xN \cap A \neq \emptyset\} = \{x \in G : x\{1, 3\} \cap \{1, 4\} \neq \emptyset\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

dir. Benzer şekilde,

$$\underline{H}(A) = \{x \in G : xH \subseteq A\} = \{x \in G : x\{1, 2\} \subseteq \{1, 4\}\} = \emptyset,$$

$$\underline{N}(A) = \{x \in G : xN \subseteq A\} = \{x \in G : x\{1, 3\} \subseteq \{1, 4\}\} = \emptyset$$

dir. Buna göre G' de A' nin $N(A) = (\underline{N}(A), \bar{N}(A))$ ve G' de A' nin $H(A) = (\underline{H}(A), \bar{H}(A))$ rough kümeleri vardır.

$\bar{N}(A)$, G' nin (normal) alt grubu olduğundan A' ya G' nin $\bar{N}$ rough normal alt grubu denir. Aynı şekilde $\bar{H}(A)$, G' nin (normal) alt grubu olup A' ya G' nin $\bar{H}$ rough normal alt grubu denir [28].

3.5 Alt ve Üst Yaklaşımlı Rough Alt Gruplar İçin Özellikler

Teorem 3.5.1. N , G' nin normal alt grubu ve (G, N) yaklaşım uzayı olmak üzere G' nin X ve Y alt kümelerinin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki özellikleri sağlar [3]:

1. $\underline{N}(X) \subseteq X \subseteq \bar{N}(X)$.
2. $\underline{N}(\emptyset) = \bar{N}(\emptyset) = \emptyset$.
3. $\underline{N}(X) = \bar{N}(X) = X$.
4. $\bar{N}(X \cup Y) = \bar{N}(X) \cup \bar{N}(Y)$.
5. $\underline{N}(X \cap Y) = \underline{N}(X) \cap \underline{N}(Y)$.
6. $X \subseteq Y$ ise $\underline{N}(X) \subseteq \underline{N}(Y)$.
7. $X \subseteq Y$ ise $\bar{N}(X) \subseteq \bar{N}(Y)$.
8. $\underline{N}(X \cup Y) \supseteq \underline{N}(X) \cup \underline{N}(Y)$.
9. $\bar{N}(X)(X \cap Y) \subseteq \bar{N}(X) \cap \bar{N}(Y)$.

$$10. \underline{\bar{N}}(-X) = -\bar{N}(X).$$

$$11. \bar{N}(-X) = -\underline{\bar{N}}(X).$$

$$12. \underline{\bar{N}}\underline{\bar{N}}(X) = \bar{N}\bar{N}(X) = \underline{\bar{N}}(X).$$

$$13. \bar{N}(X)\bar{N}(X) = \bar{N}\bar{N}(X) = \bar{N}(X).$$

Lemma 3.5.1. *G bir grup, N, G 'nin normal alt grubu ve X, G 'nin bir alt grubu olsun.*

$$N \subseteq X \Rightarrow \underline{\bar{N}}(X) = X$$

dir[3].

Lemma 3.5.2. *G bir grup, N, G 'nin normal alt grubu ve X, G 'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun.*

$$\bar{N}(X) = XN$$

dir[3].

Teorem 3.5.2. *N, G 'nin normal alt grubu, X ve Y, G 'nin boştan farklı alt kümeleri ise*

$$\bar{N}(X)\bar{N}(Y) = \bar{N}(XY)$$

olur [3].

İspat.

$$\begin{aligned} z \in \bar{N}(X)\bar{N}(Y) &\Rightarrow z = xy \in \bar{N}(X)\bar{N}(Y) \\ &\Rightarrow x \in \bar{N}(X) \text{ ve } y \in \bar{N}(Y) \\ &\Rightarrow xN \cap X \neq \emptyset \text{ ve } yN \cap Y \neq \emptyset \\ &\Rightarrow x \in xN \cap X \text{ ve } y \in yN \cap Y \\ &\Rightarrow xy = z \in XY \text{ ve } xy \in (xy)N = zN \\ &\Rightarrow z \in zN \cap XY \neq \emptyset \\ &\Rightarrow z \in \bar{N}(XY) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\bar{N}(X)\bar{N}(Y) \subseteq \bar{N}(XY)$ olduğu görülür. Tersine

$$\begin{aligned}
z \in \bar{N}(XY) &\Rightarrow z \in zN \cap XY \neq \emptyset \\
&\Rightarrow z = xy \in zN \text{ ve } z = xy \in XY \\
&\Rightarrow z \in (xy)N = (xN)(yN), \text{ ve } x \in X, y \in Y \\
&\Rightarrow x \in xN \cap X \text{ ve } y \in yN \cap Y \\
&\Rightarrow x \in \bar{N}(X) \text{ ve } y \in \bar{N}(Y) \\
&\Rightarrow z = xy \in \bar{N}(X)\bar{N}(Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\bar{N}(XY) \subseteq \bar{N}(X)\bar{N}(Y)$ olduğu görülür. Bu iki durumdan

$$\bar{N}(X)\bar{N}(Y) = \bar{N}(XY)$$

eşitliği bulunur. □

Teorem 3.5.3. N , G' nin normal alt grubu, X ve Y , G' nin boştan farklı alt kümeleri ise

$$\underline{N}(X)\underline{N}(Y) \subseteq \underline{N}(XY)$$

olur [3].

İspat. Teorem 3.5.2 ispatına benzer olarak elde edilir. □

Teorem 3.5.4. H ve N , G grubunun normal alt grubu ve X , G' nin boştan farklı alt kümesi olsun. Bu takdirde,

$$(H \cap N)(X) = \bar{H}(X) \cap \bar{N}(X)$$

olur [3].

İspat.

$$\begin{aligned}
\forall z \in (\overline{H \cap N})(X) &\Leftrightarrow z(H \cap N) \cap (X) \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \exists x \in z(H \cap N) \cap (X) \\
&\Leftrightarrow x \in z(H \cap N) \text{ ve } x \in X \\
&\Leftrightarrow x \in zH, x \in zN \text{ ve } x \in X \\
&\Leftrightarrow \exists x \in zH \cap X \neq \emptyset \text{ ve } \exists x \in zN \cap X \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow z \in \overline{H}(X) \text{ ve } z \in \overline{N}(X) \\
&\Leftrightarrow z \in \overline{H}(X) \cap \overline{N}(X)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $(\overline{H \cap N})(X) = \overline{H}(X) \cap \overline{N}(X)$ elde edilir. $\square$

Örnek 3.5.1. örnek 3.4.1’da G değişmeli grup, $H = \{1, 2\}$ ve $N = \{1, 3\}$, G değişmeli grubunun normal alt grupları ve $A = \{1, 4\}$ olmak üzere,

$$\overline{H}(A) \cap \overline{N}(A) = \{1, 2, 3, 4\}$$

ve

$$(\overline{H \cap N})(A) = \{x \in G : x(H \cap N) \cap A \neq \emptyset\} = \{x \in G : x\{1\} \cap \{1, 4\} \neq \emptyset\} = \{1, 4\}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\underline{H}(A) \cap \underline{N}(A) = \emptyset$$

ve

$$(\underline{H \cap N})(A) = \{x \in G : x(H \cap N) \subseteq A\} = \{x \in G : x\{1\} \subseteq \{1, 4\}\} = \{1, 4\}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\underline{H}(A) \cap \underline{N}(A) \subseteq (\underline{H \cap N})(A)$ dir [28].

Teorem 3.5.5. H ve N , G grubunun normal alt grubu ve X , G ’nin boştan farklı alt kümesi olsun. Bu taktirde,

$$(\underline{H \cap N})(X) \subseteq \underline{H}(X) \cap \underline{N}(X)$$

dir [3, 28].

İspat.

$$\begin{aligned}
\forall z \in (H \cap N)(X) &\Rightarrow z(H \cap N) \subseteq (X) \\
&\Rightarrow zH \subseteq X \text{ ve } zN \subseteq X \\
&\Rightarrow z \in \underline{H}(X) \text{ ve } z \in \underline{N}(X) \\
&\Rightarrow z \in \underline{H}(X) \cap \underline{N}(X)
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Böylece $(H \cap N)(X) \subseteq \underline{H}(X) \cap \underline{N}(X)$ elde edilir. Yukarıdaki örnekte elde edilen sonuçla birlikte $(H \cap N)(X) = \underline{H}(X) \cap \underline{N}(X)$ olduğu bulunur. $\square$

Teorem 3.5.6. N, G grubunun normal alt grubu olsun. X, G' nin alt grubu ise X, G' nin $\bar{N}$ rough alt grubudur [3].

İspat. e, G' nin birim elemanı olsun. N ve X, G' nin alt grubu olduğundan $e \in X$ ve $e = ee \in eN$ olur. Buradan $e \in eN \cap X$ ve $eN \cap X \neq \emptyset$ olduğundan $e \in \bar{N}(X)$ bulunur. $a, b \in \bar{N}(X)$ olsun. Bu taktirde $x \in aN \cap X$ ve $y \in bN \cap X$ olacak şekilde x ve y elemanları vardır. Buna göre $x \in aN, y \in bN$ ve $x \in X, y \in X$ olur. X, G' nin alt grubu olduğundan $xy \in X$ ve N, G' nin normal alt grubu olduğundan

$$xy \in (aN)(bN) = abN$$

yazılır. Böylece $xy \in abN \cap X$ ve bundan dolayı $ab \in \bar{N}(X)$ denilebilir. $a \in \bar{N}(X)$ olsun. Buradan $x \in aN \cap X$ olacak şekilde $x \in G$ vardır. Buna göre $x \in aN$ ve $x \in X$ olur. X, G' nin alt grubu olduğundan $x^{-1} \in X$ dir. Diğer taraftan $h \in N$ için $x = ah$ olarak yazılabilir. Ayrıca N, G nin normal alt grubu olduğundan $h^{-1} \in N$ dir. Böylece

$$x^{-1} = (ah)^{-1} = h^{-1}a^{-1} \in Na^{-1} = a^{-1}N$$

olarak bulunur. Buradan $x^{-1} = a^{-1}N \cap X$ olduğundan $a^{-1} \in \bar{N}(X)$ olur. Böylece $N(X), G'$ nin alt grubu olup X, G' nin $\bar{N}$ rough alt grubudur. $\square$

Teorem 3.5.7. N, G grubunun normal alt grubu olsun. X, G' nin normal alt grubu ise X, G' nin $\bar{N}$ rough normal alt grubudur [3].

İspat. $\bar{N}(X)$ rough alt grup olduğundan $\bar{N}(X)$ ' in normal olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $a \in \bar{N}(X)$ ve $x \in G$ olsun. Bu taktirde $y \in aN \cap X$ olacak şekilde $y \in G$ vardır. Buradan $y \in aN$ ve $y \in X$ yazılabilir. N normal olduğundan

$$xyx^{-1} = x(aN)x^{-1} = (xa)(Nx^{-1}) = (xa)(x^{-1}N) = (xax^{-1})N$$

ve X normal olduğundan

$$xyx^{-1} = xXx^{-1} \subseteq X$$

elde edilir. Böylece

$$xyx^{-1} \in (xax^{-1})N \cap X$$

olup $xax^{-1} \in \bar{N}(X)$ bulunur. O halde $\bar{N}(X)$ normaldir. $\square$

Teorem 3.5.8. N , G grubunun normal alt grubu olsun. $N \subseteq X$ olmak üzere X , G ' nin alt grubu ise X , G ' nin $\bar{N}$ rough alt grubudur [3].

İspat. $eN = N \subseteq X$ olduğundan $e \in \bar{N}(X)$ olur. $x, y \in \bar{N}(X)$ olsun. O halde $xN \subseteq X$ ve $yN \subseteq X$ dir. N normal alt grup ve X , G ' nin alt grubu olduğundan

$$xyN = (xN)(yN) \subseteq XX \subseteq X$$

elde edilir. Böylece $xy \in \bar{N}(X)$ dir. $x \in \bar{N}(X)$ olsun. Dolayısıyla $x = xe \in xN \subseteq X$ yazılabilir. X , G ' nin alt grubu olduğundan $x^{-1} \in X$ olup,

$$x^{-1}N \subseteq XX \subseteq X$$

ifadesi elde edilir. Bu ise $x^{-1} \in \bar{N}(X)$ olmasını gerektirir. Böylece $\bar{N}(X)$, G ' nin alt grubudur. $\square$

Teorem 3.5.9. N , G grubunun normal alt grubu olsun. $N \subseteq X$ olmak üzere X , G ' nin normal alt grubu ise X , G ' nin $\bar{N}$ rough normal alt grubudur [3].

İspat. $\bar{N}(X)$ rough alt grup olduğundan $\bar{N}(X)$ ' in normal olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $a \in \bar{N}(X)$ ve $x \in G$ olsun. Buradan $aN \subseteq X$ olur. N ve X normal olduğundan

$$(xax^{-1})N = x(aN)x^{-1} \subseteq xXx^{-1} \subseteq X$$

yazılabilir. Buradan

$$xax^{-1} \in \bar{N}(X)$$

olup, $\bar{N}(X)$ normaldir. □

Teorem 3.5.10. H ve N , G grubunun normal alt grupları olsun. X , G 'nin alt grubu ise

$$\bar{H}(X)\bar{N}(X) \subseteq (\bar{HN})(X)$$

dir [3].

İspat.

$$\begin{aligned} xy = z \in \bar{H}(X)\bar{N}(X) &\Rightarrow x \in \bar{H}(X) \text{ ve } y \in \bar{N}(X) \\ &\Rightarrow a \in xH \cap X \text{ ve } b \in yN \cap X \\ &\Rightarrow a \in xH, b \in yN, a \in X, b \in X \end{aligned}$$

yazılır. H normal olduğundan,

$$ab \in (xH)(yN) = x(Hy)N = (x(yH)N) = ((xy)H)N = (xy)HN = zHN$$

elde edilir. Buradan X , G 'nin alt grubu olduğundan $ab \in X$ olup, $zHN \cap X$ ve $z \in (\bar{HN})(X)$ dir. Böylece $\bar{H}(X)\bar{N}(X) \subseteq (\bar{HN})(X)$ bulunur. □

Teorem 3.5.11. H ve N , G grubunun normal alt grupları olsun. X , G 'nin alt grubu ise

$$(\bar{HN})(X) \subseteq \bar{H}(X)N \cap \bar{N}(X)H$$

dir [3].

İspat. $z \in (\bar{HN})(X)$ olsun. Bu taktirde, $\exists x \in G$ vardır öyleki $x \in z(HN) \cap X$ olur. Buradan $x \in z(HN)$ ve $x \in X$ bulunur. $x = zab$ için $a \in H$ ve $b \in N$ olacağından $a^{-1} \in H$ ve $b^{-1} \in N$ yazılır. H normal olduğundan

$$x = zab \in zHb \in zbH \cap X$$

dir. Bundan dolayı $zb \in \bar{H}(X)$ olup,

$$z \in \bar{H}(X)b^{-1} \subseteq \bar{H}(X)N$$

bulunur. Benzer olarak $z \in \bar{N}(X)H$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$z \in \bar{H}(X)N \cap \bar{N}(X)H$$

olduğundan $(\bar{H}\bar{N})(X) \subseteq \bar{H}(X)N \cap \bar{N}(X)H$ elde edilir. □

Teorem 3.5.12. H ve N , G grubunun normal alt grupları olsun. X , G 'nin alt grubu ise

$$\bar{H}(X)\bar{N}(X) \subseteq (\bar{H}\bar{N})(X)$$

dir [3].

İspat. $z \in \bar{H}(X)\bar{N}(X)$ olsun. Buradan $x = ab$ için $a \in \bar{H}(A)$ ve $b \in \bar{N}(A)$ olup $aH \subseteq X$ ve $bN \subseteq X$ elde edilir. X , G 'nin alt grubu ve H normal alt grup olduğundan

$$(ab)HN = \{a(bH)\}N = \{a(Hb)\}N = \{(aH)b\}N = (aH)(bN) \subseteq XX \subseteq X$$

dir. Buradan $z = ab \in (\bar{H}\bar{N})(X)$ olacağından $\bar{H}(X)\bar{N}(X) \subseteq (\bar{H}\bar{N})(X)$ olur. □

4. ROUGH ALTGRUPOİD

Bu bölümde, matematikte son yıllarda yaygın olarak kullanılan grupoid ve rough küme kavramlarını birlikte düşüneceğiz. Önce grupoidin normal alt grupoidi kavramını kullanarak rough normal alt grupoid kavramını daha sonra da rough alt groupoid kavramını vereceğiz. Ayrıca bu bölümde rough alt gruplarda verilen teoremleri rough altgroupoidler için de inceleyebileceğiz.

4.1 N normal alt grupoidine göre A kümesinin $N(A)$ Rough Kümesi

Tanım 4.1.1. $G, Ob(G)$ üzerinde bir grupoid, N de G grupoidinin normal altgrupoidi olsun. G 'nin boştan farklı bir A alt kümesi için,

$$\begin{aligned} \underline{N}_x(A) &= \{a \in G \mid a \circ N_x \subseteq A, x \in Ob(G)\}, \\ \underline{N}_-(A) &= \bigcup_{x \in Ob(G)} \underline{N}_x(A), \\ \bar{N}_x(A) &= \{a \in G \mid a \circ N_x \cap A \neq \emptyset, x \in Ob(G)\}, \\ \bar{N}(A) &= \bigcup_{x \in Ob(G)} \bar{N}_x(A) \end{aligned}$$

kümelerine sırasıyla G grupoidi üzerinde N normal altgrupoidine göre A kümesinin alt ve üst yaklaşımları denir. $N(A) = (\underline{N}(A), \bar{N}(A))$, G grupoidi üzerinde A kümesinin rough kümesidir.

Şimdi grupoidler için önemli olan bir teoremi hatırlatalım.

Teorem 4.1.1. $Ob(G)$ üzerindeki bir G grupoidi $\forall x, y, z \in Ob(G)$ için $a \in Mor(z, y)$, $b \in Mor(x, z)$ ve $\alpha(b) = \beta(a)$ için $a \circ b \in Mor(x, y)$ ile verilsin. N, G grupoidinin altgrupoidi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1. N, G grupoidinin normal altgrupoididir.
2. $\forall a \in G$ için $a \circ N_z \circ a^{-1} = N_y$ dir.
3. $\forall a \in G$ için $a \circ N_z = N_y \circ a$ dir.

4. $\forall a, b \in G$ için $(a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) = a \circ b \circ N_x$ dir.[17, 18]

4.2 Alt ve Üst Yaklaşımlı Rough Alt Grupoidler

Tanım 4.2.1. A , G grupoidinin boştan farklı bir alt kümesi ve N , G ' nin bir normal alt grupoidi olsun. G ' de A ' nın $N(A) = (\underline{N(A)}, \bar{N(A)})$ rough kümesi için,

1. $\bar{N(A)}$, G ' nin (normal) alt grupoidi ise A 'ya G ' nin $\bar{N}$ rough (normal) alt grupoidi
2. $\underline{N(A)}$, G ' nin (normal) alt grupoidi ise A 'ya G ' nin $\underline{N}$ rough (normal) alt grupoidi

denir.

Örnek 4.2.1. Her rough alt grup tek nesneli bir rough alt grupoiddir. Gerçekten A , G grubunun boştan farklı bir alt kümesi ve N , G grubunun bir normal alt grubu olsun. G grubunda A ' in $N(A) = (\underline{N(A)}, \bar{N(A)})$ rough kümesi için, $\bar{N(A)}$ ve $\underline{N(A)}$, G grubunun (normal) alt grubu olsun. Bu durumda A G grubunun $\bar{N}$ rough (normal) alt grubu ve $\underline{N}$ rough (normal) alt grubu olur. Her grup tek nesneli bir grupoid olduğundan $\bar{N}$ rough (normal) alt grubu ve $\underline{N}$ rough (normal) alt grubu tek nesneli bir rough (normal) alt grupoiddir denilebilir.

Örnek 4.2.2. Daha önce grupoid olduğunu verdiğimiz morfizmleri $a : 0 \rightarrow 1$, $a^{-1} : 1 \rightarrow 0$ olan $G = \{1_0, a, a^{-1}, 1_1\}$ groupoidinin nesneleri $Ob(N) = Ob(G)$ olan $N = \{1_0, 1_1\}$ normal altgrupoidi ve bir $A = \{a\} \subset G$ verilsin. $a \circ N_0 = \{a\} \subseteq A$ ve $a^{-1} \circ N_1 = \{a^{-1}\}$ olduğundan

$$\underline{N_0(A)} = \{a \in G \mid a \circ N_0 \subseteq A\} = A, \quad \underline{N_1(A)} = \emptyset,$$

$$\bar{N_1(A)} = \{a \in G \mid a^{-1} \circ N_1 \cap A \neq \emptyset\} = \emptyset, \quad \bar{N_0(A)} = \{a \in G \mid a \circ N_0 \cap A \neq \emptyset\} = A$$

elde edilir. O halde G grupoidi üzerinde N normal altgrupoidine göre A kümesinin alt ve üst yaklaşımları sırasıyla,

$$\underline{N(A)} = \bigcup_{X \in Ob(G)} \underline{N_X(A)} = A,$$

$$\bar{N}(A) = \bigcup_{X \in Ob(G)} \bar{N}_X(A) = A$$

olarak bulunur. $\bar{N}(A) = \bar{N}(A) = A$ olup A kümesi her elemanı birim dönüşüm olan bir grupoid olmasına rağmen sınır bölgesi boş kümeye eşit olduğundan A , G' nin rough alt grupoidi değildir.

Örnek 4.2.3. $X = \{x, y, z\}$ kümesini gözönüne alalım. X kümesi üzerinde $R = X \times X = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, x), (x, z), (z, x), (y, z), (z, y)\}$ denklik bağıntısı verilsin. Her denklik bağıntısı bulunduğu küme üzerinde bir grupoid olduğundan R , X kümesi üzerinde bir grupoiddir. $N = \{(x, x), (y, y), (z, z)\}$, R grupoidinin bir normal altgrupoidi ve $A = \{(x, x), (y, y), (y, x), (z, x), (y, z)\} \subset R$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} a \circ N_x &= \{(x, x), (x, y), (x, z)\}, \\ a \circ N_y &= \{(y, y), (y, x), (y, z)\}, \\ a \circ N_z &= \{(z, z), (z, x), (z, y)\} \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} \bar{N}_x(A) &= \emptyset, \\ \bar{N}_y(A) &= \{a \in R \mid a \circ N_y \subseteq A\} = \{(y, y), (y, x), (y, z)\}, \\ \bar{N}_z(A) &= \emptyset \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece R grupoidi üzerinde N normal altgrupoidine göre A kümesinin alt ve üst yaklaşımları

$$\begin{aligned} \bar{N}(A) &= \bar{N}_x(A) \cup \bar{N}_y(A) \cup \bar{N}_z(A) = \{(y, y), (y, x), (y, z)\}, \\ \bar{N}(A) &= \bar{N}_x(A) \cup \bar{N}_y(A) \cup \bar{N}_z(A) = A \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $\bar{N}(A)$, G' nin alt grupoidi olduğundan A 'ya G' nin $\bar{N}$ rough alt grupoidi denir. Fakat $\bar{N}(A)$, G' nin alt grupoidi olmadığı için A , G' nin $\bar{N}$ rough alt grupoidi değildir.

4.3 Alt ve Üst Yaklaşımlı Rough Alt Grupoidler İçin Özellikler

Teorem 4.3.1. $G, Ob(G)$ üzerinde bir grupoid, N ve H, G' nin normal altgrupoidi ve G' nin A ve B alt kümelerinin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $\underline{N}(A) \subseteq A \subseteq \bar{N}(A)$.
2. $\bar{N}(A \cup B) = \bar{N}(A) \cup \bar{N}(B)$.
3. $\underline{N}(A \cap B) = \underline{N}(A) \cap \underline{N}(B)$.
4. $A \subseteq B \Rightarrow \underline{N}(A) \subseteq \underline{N}(B)$.
5. $A \subseteq B \Rightarrow \bar{N}(A) \subseteq \bar{N}(B)$.
6. $\underline{N}(A \cup B) \supseteq \underline{N}(A) \cup \underline{N}(B)$.
7. $\bar{N}(A \cap B) \subseteq \bar{N}(A) \cap \bar{N}(B)$.
8. $N \subseteq H \Rightarrow \bar{N}(A) \subseteq \bar{H}(A)$.

İspat. 1. $\forall a \in \underline{N}(A)$ ise $\forall x \in Ob(G)$ için $a = a \circ 1_x \in a \circ N_x \subseteq A$ dir. Buradan $\underline{N}(A) \subseteq A$ bulunur. Eğer $\forall a \in A$ ise $a = a \circ 1_x \in a \circ N_x$ olacağından $a \in a \circ N_x \cap A$ ise $\forall x \in Ob(G)$ için $a \circ N_x \cap A \neq \emptyset$ yazılabilir. Buradan $a \in \bar{N}(A)$ olup $A \subseteq \bar{N}(A)$ elde edilir.

2. $a \in \bar{N}(A \cup B) \Leftrightarrow a \circ N_x \cap (A \cup B) \neq \emptyset, \forall x \in Ob(G)$

$$\Leftrightarrow (a \circ N_x \cap A) \cup (a \circ N_x \cap B) \neq \emptyset, \forall x \in Ob(G)$$

$$\Leftrightarrow (a \circ N_x \cap A) \neq \emptyset \text{ veya } (a \circ N_x \cap B) \neq \emptyset, \forall x \in Ob(G)$$

$$\Leftrightarrow a \in \bar{N}(A) \text{ veya } a \in \bar{N}(B)$$

$$\Leftrightarrow a \in \bar{N}(A) \cup \bar{N}(B)$$

yazılabilir. Buradan $\bar{N}(A \cup B) = \bar{N}(A) \cup \bar{N}(B)$ olur.

$$3. \ a \in \underline{N}(A \cap B) \Leftrightarrow a \circ N_x \subseteq A \cap B$$

$$\Leftrightarrow a \circ N_x \subseteq A \text{ ve } a \circ N_x \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow a \in \underline{N}(A) \text{ ve } a \in \underline{N}(B)$$

$$\Leftrightarrow a \in \underline{N}(A) \cap \underline{N}(B)$$

elde edilir. Buradan $\underline{N}(A \cap B) = \underline{N}(A) \cap \underline{N}(B)$ olur.

$$4. \ A \subseteq B \text{ olduğundan } A \cap B = A \text{ olur. (3)'den,}$$

$$\underline{N}(A) = \underline{N}(A \cap B) = \underline{N}(A) \cap \underline{N}(B)$$

olacağından $\underline{N}(A) \subseteq \underline{N}(B)$ bulunur.

$$5. \ A \subseteq B \text{ olduğundan } A \cup B = B \text{ olur. (2)'den,}$$

$$\bar{N}(B) = \bar{N}(A \cup B) = \bar{N}(A) \cup \bar{N}(B)$$

olacağından $\bar{N}(A) \subseteq \bar{N}(B)$ elde edilir.

$$6. \ A \subseteq A \cup B \text{ ve } B \subseteq A \cup B \text{ olduğundan (4)'den,}$$

$$\underline{N}(A) \subseteq \underline{N}(A \cup B) \text{ ve } \underline{N}(B) \subseteq \underline{N}(A \cup B)$$

bulunur. Buradan $\underline{N}(A) \cup \underline{N}(B) \subseteq \underline{N}(A \cup B)$ olur.

$$7. \ A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B \text{ ve (5)'den,}$$

$$\bar{N}(A \cap B) \subseteq \bar{N}(A) \text{ ve } \bar{N}(A \cap B) \subseteq \bar{N}(B)$$

bulunur. Buradan $\bar{N}(A \cap B) \subseteq \bar{N}(A) \cap \bar{N}(B)$ olur.

$$8. \ \text{Eğer } \forall c \in \bar{N}(A) \text{ ise } \exists x \in c \circ N_x \cap A \text{ olur ve böylece}$$

$$x \in c \circ N_x \subseteq c \circ H_x$$

bulunur. Bu yüzden $x \in c \circ H_x \cap A$ olup $c \in \bar{H}(A)$ sağlanır ve $\bar{N}(A) \subseteq \bar{H}(A)$ elde edilir.

□

Teorem 4.3.2. N , G grupoidinin normal altgrupoidi, A ve B , G 'nin boştan farklı alt kümeleri olsun. Bu takdirde,

$$\bar{N}(A) \circ \bar{N}(B) = \bar{N}(A \circ B)$$

dir.

İspat. $Ob(G)$ üzerindeki bir G grupoidi $\forall x, y, z \in Ob(G)$ için $a \in Mor(z, y)$, $b \in Mor(x, z)$, $a \circ b \in Mor(x, y)$ ile verilsin. N , G grupoidinin normal altgrupoidi olsun. G grupoidinde $(a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) = (a \circ b) \circ N_x$ sağlanır.

$c, \bar{N}(A \circ B)$ 'nin herhangi bir elemanı olsun. Buradan $\forall x \in Ob(G)$ için $c \circ N_x \cap A \circ B \neq \emptyset$ dir. Böylece G 'de bir m elemanı vardır öyleki $m \in c \circ N_x \cap A \circ B$ olup

$$m \in c \circ N_x \text{ ve } m \in A \circ B$$

bulunur. $m = a \circ b$, $a \in A$ ve $b \in B$ ile verilsin.

$$c \in m \circ N_x = (a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) = (a \circ b) \circ N_x$$

olduğundan $N = (a \circ N_z) \circ (b \circ N_x)$ elde edilir. $c = k \circ l$ ile $k \in a \circ N_z$ ve $l \in b \circ N_x$ bulunur. Buradan

$$a \in k \circ N_z \text{ ve } a \in k \circ N_z \cap A$$

şeklindedir. Yani $k \in \bar{N}(A)$ olur. Benzer olarak $l \in \bar{N}(B)$ bulunur. Buradan $c = k \circ l \in \bar{N}(A) \circ \bar{N}(B)$ olacağından

$$\bar{N}(A \circ B) \subseteq \bar{N}(A) \circ \bar{N}(B)$$

olur.

Tersine, $c, \bar{N}(A) \circ \bar{N}(B)$ 'nin herhangi bir elemanı olsun. Buradan $c = a \circ b$ olduğundan $a \in \bar{N}(A)$ ve $b \in \bar{N}(B)$ dir. Böylece G 'de r ve s elemanları vardır öyleki $\forall z \in Ob(G)$ için $r \in a \circ N_z \cap A$ ve $\forall x \in Ob(G)$ için $s \in b \circ N_x \cap B$ dir. Böylece $r \in a \circ N_z$, $r \in A$, $s \in b \circ N_x$ ve $s \in B$ dir. N normal olduğundan,

$$r \circ s \in (a \circ N_z)(b \circ N_x) = a \circ b \circ N_x,$$

$$r \circ s \in A \circ B$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} r \circ s &\in a \circ b \circ N_x \cap A \circ B, \\ c &= a \circ b \in \bar{N}(A)(A \circ B) \end{aligned}$$

sağlanır ve

$$\bar{N}(A) \circ \bar{N}(B) \subseteq \bar{N}(A \circ B)$$

olur. Böylece $\bar{N}(A) \circ \bar{N}(B) = \bar{N}(A \circ B)$ olarak elde edilir. $\square$

Teorem 4.3.3. N , G grupoidinin normal altgrupoidi, A ve B , G 'nin boştan farklı alt kümeleri olsun. Bu taktirde,

$$\underline{N}(A) \circ \underline{N}(B) \subseteq \underline{N}(A \circ B)$$

dir.

İspat. $Ob(G)$ üzerindeki bir G grupoidi $\forall x, y, z \in Ob(G)$ için $a \in Mor(z, y)$, $b \in Mor(x, z)$, $a \circ b \in Mor(x, y)$ ile verilsin. N , G grupoidinin normal altgrupoidi olsun. G grupoidinde $(a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) = (a \circ b) \circ N_x$ sağlanır. c , $\underline{N}(A) \circ \underline{N}(B)$ 'nin herhangi bir elemanı olsun. Buradan $c = a \circ b$ olduğundan $a \in \underline{N}(A)$ ve $b \in \underline{N}(B)$ dir. Yani

$$\forall z \in Ob(G), a \circ N_z \subseteq A \text{ ve } \forall x \in Ob(G), b \circ N_x \subseteq B$$

şeklindedir. N normal altgrupoid olduğundan,

$$c \circ N_x = a \circ b \circ N_x = (a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) \subseteq A \circ B$$

bulunur ve $c \in \underline{N}(A \circ B)$ olur. Böylece $\underline{N}(A) \circ \underline{N}(B) \subseteq \underline{N}(A \circ B)$ elde edilir. $\square$

Uyarı 4.3.1. H_1 ve H_2 , G grupoidinin iki alt grupoid olsun. $H_1 \cap H_2$ de G grupoidinin bir alt grupoididir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} f &\in Mor_{H_1 \cap H_2}(x, y) \text{ için } f \in Mor_{H_1}(x, y) \text{ ve } f \in Mor_{H_2}(x, y) \\ g &\in Mor_{H_1 \cap H_2}(y, z) \text{ için } g \in Mor_{H_1}(y, z) \text{ ve } g \in Mor_{H_2}(y, z) \end{aligned}$$

olsun. $g \circ f \in \text{Mor}_{H_1}(x, z)$ ve $g \circ f \in \text{Mor}_{H_2}(x, z)$ olduğu için $g \circ f \in \text{Mor}_{(H_1 \cap H_2)}(x, z)$ dir. Ayrıca

$$f \in \text{Mor}_{(H_1 \cap H_2)}(x, y) \text{ için } f \in \text{Mor}_{H_1}(x, y) \text{ ve } f \in \text{Mor}_{H_2}(x, y)$$

olur. Bu ise $f^{-1} \in \text{Mor}_{H_1}(y, x)$ ve $f^{-1} \in \text{Mor}_{H_2}(y, x)$ verir. Yani $f^{-1} \in \text{Mor}_{(H_1 \cap H_2)}(y, x)$ dir.

Teorem 4.3.4. H ve N , G grupoidinin normal altgrupoidleri ve A , G 'nin boştan farklı alt kümesi olsun. Bu taktirde,

$$H \bar{\cap} N(A) = \bar{H}(A) \cap \bar{N}(A)$$

dir.

$$\begin{aligned} \text{İspat. } \forall c \in H \bar{\cap} N(A) &\Leftrightarrow c \circ (H \cap N)_x \cap A \neq \emptyset, \forall x \in \text{Ob}(G) \\ &\Leftrightarrow \exists a \in c \circ (H \cap N)_x \cap A, \forall x \in \text{Ob}(G) \\ &\Leftrightarrow a \in c \circ (H \cap N)_x, \forall x \in \text{Ob}(G) \text{ ve } a \in A \\ &\Leftrightarrow a \in c \circ H_x, a \in A \text{ ve } a \in c \circ N_x, a \in A, \forall x \in \text{Ob}(G) \\ &\Leftrightarrow \exists a \in c \circ H_x \cap A \text{ ve } \exists a \in c \circ N_x \cap A, \forall x \in \text{Ob}(G) \\ &\Leftrightarrow c \in \bar{H}(A) \text{ ve } c \in \bar{N}(A) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $H \bar{\cap} N(A) = \bar{H}(A) \cap \bar{N}(A)$ olur. □

Teorem 4.3.5. H ve N , G grupoidinin normal altgrupoidleri ve A , G 'nin boştan farklı alt kümesi olsun. Bu taktirde,

$$H \cap N(A) = \underline{H}(A) \cap \underline{N}(A)$$

dir.

$$\begin{aligned} \text{İspat. } \forall c \in H \cap N(A) &\Leftrightarrow c \circ (H \cap N)_x \subseteq A, \forall x \in \text{Ob}(G) \\ &\Leftrightarrow c \circ H_x \subseteq A \text{ ve } c \circ N_x \subseteq A, \forall x \in \text{Ob}(G) \\ &\Leftrightarrow c \in \underline{H}(A) \text{ ve } c \in \underline{N}(A) \\ &\Leftrightarrow c \in \underline{H}(A) \cap \underline{N}(A) \text{ olacağından} \end{aligned}$$

$\underline{H} \cap \underline{N}(A) = \underline{H}(A) \cap \underline{N}(A)$ elde edilir. □

Teorem 4.3.6. N , G grupoidinin normal altgrupoidi ve A , G grupoidinin altgrupoidi olsun. Bu durumda A , G grupoidinin $\bar{N}$ rough altgrupoididir.

İspat. $Ob(G)$ üzerindeki bir G grupoidi $\forall x, y, z \in Ob(G)$ için $a \in Mor(z, y)$, $b \in Mor(x, z)$, $a \circ b \in Mor(x, y)$ ile verilsin. N , G grupoidinin normal altgrupoidi olduğundan G grupoidinde $(a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) = (a \circ b) \circ N_x$ sağlanır. $\forall x \in Ob(G)$ için $1_x \in G$ dir. N ve A , G grupoidinin altgrupoidleri olduğundan $1_x \in A$ ve $1_x \in N_x$ olur. Böylece

$$1_x = 1_x \circ 1_x \in 1_x \circ N_x$$

elde edilir. Buradan $1_x \in 1_x \circ N_x \cap A$ olur. O halde $1_x \circ N_x \cap A \neq \emptyset$ olup $\forall x \in Ob(G)$ için $1_x \in \bar{N}(A)$ sağlanır. a ve b , $\bar{N}(A)$ 'nın herhangi elemanları olsunlar. G 'de k ve l için $k \in a \circ N_z \cap A$ ve $l \in b \circ N_x \cap A$ olur. Böylece $\forall z \in Ob(G)$ için $k \in a \circ N_z$, $\forall x \in Ob(G)$ için $l \in b \circ N_x$ ve $k \in A$, $l \in A$ dir. A , G 'nin altgrupoidi olduğundan, $k \circ l \in A$ olur. N , G grupoidinin normal altgrupoidi olduğundan,

$$k \circ l \in (a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) = a \circ b \circ N_x$$

yazılabilir. Böylece

$$k \circ l \in a \circ b \circ N_x \cap A \text{ ve } a \circ b \in \bar{N}(A)$$

olur. a , $\bar{N}(A)$ 'nın herhangi bir elemanı olsun. Buradan bazı $k \in G$ ler için

$$k \in a \circ N_z \cap A$$

olup $\forall z \in Ob(G)$ için $k \in a \circ N_z$ ve $k \in A$ bulunur. A , G grupoidinin altgrupoidi olduğundan, $k^{-1} \in A$ elde edilir.

Diğer taraftan $h \in N$ elemanı için $k = a \circ h$ olacak şekilde $h \in N_z$ ve N , G grupoidinin normal altgrupoidi olduğundan $\forall z \in Ob(G)$ için $h^{-1} \in N_z$ yazılabilir. Böylece

$$k^{-1} = (a \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ a^{-1} \in N_z \circ a^{-1} = a^{-1} \circ N_y$$

elde edilir. Buradan

$$k^{-1} \in a^{-1} \circ N_y \cap A$$

olur. Sonuç olarak, $a^{-1} \in \bar{N}(A)$ olur. Bu ise $\bar{N}(A)$ 'nın G grupoidinin altgrupoidi olduğunu verir. Yani A , G grupoidinin $\bar{N}$ rough altgrupoididir. $\square$

Teorem 4.3.7. N , G grupoidinin normal altgrupoidi olsun. A , G grupoidinin normal altgrupoidi ise A , G grupoidinin $\bar{N}$ rough normal altgrupoididir.

İspat. Bir önceki teoremden $\bar{N}(A)$ 'nin altgrupoid olduğunu göstermiştik. Şimdi $\bar{N}(A)$ 'nin normal olduğunu göstereceğiz. $\forall x, y \in Ob(G)$ için $a \in Mor(x, y)$, $k \in Mor(x, y)$ sırasıyla $\bar{N}(A)$ altgrupoidinin ve G grupoidinin herhangi elemanları olsunlar. Bu takdirde $l \in a \circ N_x \cap A$ olacak şekilde G 'de $l \in Mor(x, y)$ vardır. Burada $l \in a \circ N_x$ ve $l \in A$ olur. N normal olduğundan

$$\begin{aligned} k \circ l \circ k^{-1} &\in k \circ (a \circ N_x) \circ k^{-1} = (k \circ a) \circ (N_x \circ k^{-1}) \\ &= (k \circ a) \circ (k^{-1} \circ N_y) \\ &= (k \circ a \circ k^{-1}) \circ N_y \end{aligned}$$

ve A normal olduğundan

$$k \circ l \circ k^{-1} \in kAk^{-1} \subseteq A$$

bulunur. Buradan

$$k \circ l \circ k^{-1} \in (k \circ a \circ k^{-1}) \circ N_y \cap A$$

olur ve böylece $k \circ a \circ k^{-1} \in \bar{N}(A)$ elde edilir. Bu ise $\bar{N}(A)$ 'nin normal olduğunu verir. $\square$

Teorem 4.3.8. N , G grupoidinin normal altgrupoidi olsun. A , G grupoidinin $N \subseteq A$ sağlayan altgrupoidi ise A , G grupoidinin $\bar{N}$ rough altgrupoididir.

İspat. $Ob(G)$ üzerindeki bir G grupoidi $\forall x, y, z \in Ob(G)$ için $a \in Mor(z, y)$, $b \in Mor(x, z)$, $a \circ b \in Mor(x, y)$ ile verilsin. $\forall x \in Ob(G)$ için $1_x \in G$ dir. N ve A , G grupoidinin altgrupoidleri olduğundan $1_x \in A$ ve $1_x \in N_x$ olur. $\forall z \in Ob(G)$ için $1_z \circ N_z = N_z \subseteq A$ olduğundan $1_z \in \bar{N}(A)$ ve $\forall x \in Ob(G)$ için $1_x \circ N_x = N_x \subseteq A$ olduğundan $1_x \in \bar{N}(A)$ elde edilir. a ve b $\bar{N}(A)$ 'nin herhangi elemanları olsunlar. Buradan

$$a \circ N_z \subseteq A \text{ ve } b \circ N_x \subseteq A$$

olur. N , G grupoidinin normal altgrupoidi ve A , G grupoidinin altgrupoidi olduğundan

$$a \circ b \circ N_x = (a \circ N_z) \circ (b \circ N_x) \subseteq A \circ A \subseteq A$$

olup bu, $a \circ b \in \underline{N}(A)$ olduğunu gösterir. $a, \underline{N}(A)$ 'nin herhangi bir elemanı olsun. Buradan

$$a = a \circ 1_z \in a \circ N_z \subseteq A, \forall z \in Ob(G)$$

olur. A, G grupoidinin altgrupoidi olduğundan $a^{-1} \in A$ bulunur. Böylece

$$a^{-1} \circ N_y \subseteq A \circ A \subseteq A, \forall y \in Ob(G)$$

elde edilir. Bu ise $a^{-1} \in \underline{N}(A)$ olması demektir. Böylece $\underline{N}(A), G$ 'nin altgrupoididir. Yani A, G grupoidinin $\underline{N}$ rough altgrupoididir. $\square$

Teorem 4.3.9. N, G grupoidinin normal altgrupoidi olsun. A, G grupoidinin $N \subseteq A$ bağıntısını sağlayan normal altgrupoidi ise A, G grupoidinin $\underline{N}$ rough normal altgrupoididir.

İspat. Bir önceki teoremden $\underline{N}(A)$ 'nin altgrupoid olduğunu göstermiştik. Şimdi $\underline{N}(A)$ 'nin normal olduğunu göstereceğiz. $\forall x, y \in Ob(G)$ için $a \in Mor(x, x), k \in Mor(x, y)$ sırasıyla $\underline{N}(A)$ altgrupoidinin ve G grupoidinin herhangi elemanları olsunlar. Buradan

$$a \circ N_x \subseteq A$$

olur. N ve A normal olduğundan,

$$(k \circ a \circ k^{-1}) \circ N_x = k \circ (a \circ N_x) \circ k^{-1} \subseteq k \circ A \circ k^{-1} \subseteq A$$

bulunur. Böylece $k \circ A \circ k^{-1} \in \underline{N}(A)$ olur. Bu $\underline{N}(A)$ 'nin normal olduğunu verir. Yani A, G grupoidinin $\underline{N}$ rough normal altgrupoididir. $\square$

Uyarı 4.3.2. H_1 ve H_2, G grupoidinin iki alt grupoidi olsun. $H_1 \circ H_2$ de G grupoidinin bir alt grupoiddir. Gerçekten,

$$f_1 \circ f_2 \in Mor_{H_1 \circ H_2}(x, z) \text{ için } f_1 \in Mor_{H_1}(y, z) \text{ ve } f_2 \in Mor_{H_2}(x, y)$$

$$g_1 \circ g_2 \in Mor_{H_1 \circ H_2}(z, k) \text{ için } g_1 \in Mor_{H_1}(t, k) \text{ ve } g_2 \in Mor_{H_2}(t, z)$$

olsun. $(g_1 \circ g_2) \circ (f_1 \circ f_2) \in Mor_{H_1 \circ H_2}(x, k)$ dır. Ayrıca

$$(f_1 \circ f_2) \in Mor_{H_1 \circ H_2}(x, k) \text{ için } f_1^{-1} \in Mor_{H_1}(z, y) \text{ ve } f_2^{-1} \in Mor_{H_2}(y, x)$$

olur. Buradan $(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1} \in (H_1 \circ H_2)(z, x)$ verir. Yani G grupoidinin H_1 ve H_2 altgroupoidlerinin bileşkesi $H_1 \circ H_2$, G grupoidinin altgroupoididir. Bu yüzden G 'nin boştan farklı A alt kümesi için $\underline{H} \circ \underline{N}(A)$ ve $\overline{H} \circ \underline{N}(A)$ bulunabilir.

Teorem 4.3.10. H ve N , G grupoidinin normal altgroupoidleri olsunlar. A , G grupoidinin altgrupoidi ise

$$\overline{H}(A) \circ \overline{N}(A) \subseteq \overline{H} \circ \underline{N}(A)$$

dir.

İspat. $Ob(G)$ üzerindeki bir G grupoidi $\forall x, y, z \in Ob(G)$ için $a \in Mor(z, y)$, $b \in Mor(x, z)$, $a \circ b \in Mor(x, y)$ ile verilsin. c , $\overline{H}(A) \circ \overline{N}(A)$ 'nin herhangi elemanı olsun. Buradan $a \in \overline{H}(A)$ ve $b \in \overline{N}(A)$ olduğundan $c = a \circ b$ bulunur. G 'de k ve l elemanları için $k \in a \circ H_z \cap A$ ve $l \in b \circ N_x \cap A$ vardır. Böylece $k \in a \circ H_z$, $l \in b \circ N_x$ olacak şekilde $k \in A$ ve $l \in A$ bulunur. Buradan H normal olduğundan

$$\begin{aligned} k \circ l \in (a \circ H_z) \circ (b \circ N_x) &= \{a \circ (H_z \circ b) \circ N_x\} \\ &= \{a \circ (b \circ H_x) \circ N_x\} \\ &= \{(a \circ b) \circ H_x\} \circ N_x \\ &= (a \circ b) \circ H_x \circ N_x \\ &= c \circ H_x \circ N_x \end{aligned}$$

olur. A , G grupoidinin altgrupoidi olduğundan $k \circ l \in A$ dir. Bu yüzden $\forall x \in Ob(G)$ için

$$k \circ l \in c \circ H_x \circ N_x \cap A$$

olup $c \in \overline{H} \circ \underline{N}(A)$ elde edilir. Böylece $\overline{H}(A) \circ \overline{N}(A) \subseteq \overline{H} \circ \underline{N}(A)$ olduğu görülür. $\square$

Teorem 4.3.11. H ve N , G grupoidinin normal altgroupoidleri olsunlar. A , G grupoidinin altgrupoidi ise

$$\underline{H}(A) \circ \underline{N}(A) \subseteq \underline{H} \circ \underline{N}(A)$$

dir.

İspat. $Ob(G)$ üzerindeki bir G grupoidi $\forall x, y, z \in Ob(G)$ için $a \in Mor(z, y), b \in Mor(x, z), a \circ b \in Mor(x, y)$ ile verilsin. $c, \underline{H}(A) \circ \underline{N}(A)$ ' nın herhangi bir elemanı olsun. $a \in \underline{H}(A)$ ve $b \in \underline{N}(A)$ olduğundan $c = a \circ b$ olur. Buradan $a \circ H_z \subseteq A$ ve $b \circ N_x \subseteq A$ bulunur. H, G grupoidinin normal altgrupoidi ve A da G grupoidinin altgrupoidi olduğundan

$$\begin{aligned} (a \circ b) \circ H_x \circ N_x &= \{a \circ (b \circ H_x)\} \circ N_x = \{a \circ (H_z \circ b)\} \circ N_x \\ &= \{(a \circ H_z) \circ b\} \circ N_x = (a \circ H_z) \circ (b \circ N_x) \subseteq A \circ A \subseteq A \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $c = a \circ b \in \underline{H} \circ \underline{N}(A)$ dir ve böylece $\underline{H}(A) \circ \underline{N}(A) \subseteq \underline{H} \circ \underline{N}(A)$ bulunur. $\square$



5. LOKAL ROUGH KÜMELER

Bu bölümde, Grothendieck ve Verdier[5] tarafından verilen, Brown[13, 14] ve İçen[15, 16] tarafından genişletilen lokal denklik bağıntısı kavramını rough teoriye aktaracağız. Bu kavramı kullanarak rough küme kavramının lokali olan "lokal rough küme" kavramını tanımlayacağız ve bu kavramla ilgili bazı teoremler vereceğiz.

5.1 Lokal Yaklaşım Uzayı

Tanım 5.1.1. U nesnelerin sonlu kümesi, $U_i \subseteq U$ alt kümesi olmak üzere $U = \cup U_i$ ile verilsin. $R_i \subseteq U_i \times U_i$ bağıntısı ile R_i, U_i üzerinde bir denklik bağıntısı olarak alındığında,

$$\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I, U_i \subseteq U \text{ nesnelerin sonlu kümesi}, R_i \subseteq (U_i \times U_i) \text{ denklik bağıntısı}\}$$

ailesine, eğer lokal yaklaşım uzayındaki (U_i, R_i) ve (U_j, R_j) ikililerinden seçilen bir $x \in W \subseteq (U_i \cap U_j)$ için

$$R_i|_W = R_j|_W$$

sağlanırsa **lokal yaklaşım uzayı** denir.

5.2 Lokal Rough Kümeler

Tanım 5.2.1. U nesnelerin sonlu kümesi, $U_i \subseteq U$ alt kümesi ve $U = \cup U_i$ verilsin. $R_i \subseteq U_i \times U_i$ denklik bağıntısı ile $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I, U_i \subseteq U \text{ nesnelerin sonlu kümesi}, R_i \subseteq U_i \times U_i \text{ denklik bağıntısı}\}$ lokal yaklaşım uzayı olsun. $[x]_i = \{R_i \text{ bağıntısına göre } x' \text{ in denklik sınıfı}\}$ ve $x \in U$ olmak üzere; herhangi bir $X \subseteq U$ kümesinden elde edilen

$$\underline{R_i}(X) = \{x \in U \mid [x]_i \subseteq X, \forall i \in I\} = \bigcup_{x \in U} \{[x]_i \mid [x]_i \subseteq X\},$$

$$\overline{R_i}(X) = \{x \in U \mid [x]_i \cap X \neq \emptyset, \forall i \in I\} = \bigcup_{x \in U} \{[x]_i \mid [x]_i \cap X \neq \emptyset, \forall i \in I\}$$

kümelerine sırasıyla X kümesinin **lokal alt yaklaşımı** ve **lokal üst yaklaşımı** denir. Eğer

$$\overline{R_i}(X) - \underline{R_i}(X) \neq \emptyset$$

şartı sağlanıyorsa X kümesine **lokal rough küme** denir.

Teorem 5.2.1. *Lokal rough küme $X, Y \subseteq U$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:*

1. $\underline{R_i}(X) \subseteq (X) \subseteq \underline{U}$.
2. $\underline{R_i}(X) \subseteq (X) \subseteq \bar{R_i}(X)$.
3. $\underline{R_i}(\emptyset) = \bar{R_i}(\emptyset) = \emptyset$.
4. $\underline{R_i}(U) = \bar{R_i}(U) = U$.
5. $\bar{R_i}(X \cup Y) = \bar{R_i}(X) \cup \bar{R_i}(Y)$.
6. $\underline{R_i}(X \cap Y) = \underline{R_i}(X) \cap \underline{R_i}(Y)$.
7. $X \subseteq Y$ ise $\underline{R_i}(X) \subseteq \underline{R_i}(Y)$.
8. $X \subseteq Y$ ise $\bar{R_i}(X) \subseteq \bar{R_i}(Y)$.
9. $\underline{R_i}(X \cup Y) \supseteq \underline{R_i}(X) \cup \underline{R_i}(Y)$.
10. $\bar{R_i}(X \cap Y) \subseteq \bar{R_i}(X) \cap \bar{R_i}(Y)$.
11. $\underline{R_i}(-X) = -\bar{R_i}(X)$.
12. $\bar{R_i}(X)(-X) = -\underline{R_i}(X)$.
13. $\underline{R_i}\underline{R_i}(X) = \bar{R_i}\bar{R_i}(X)(X) = \underline{R_i}(X)$.
14. $\bar{R_i}\bar{R_i}(X) = \underline{R_i}\underline{R_i}(X)(X) = \bar{R_i}(X)$.

İspat. 1. $\forall x \in \underline{R_i}(X)$ için $\underline{R_i}(X) = \bigcup_{x \in U} \{[x]_i \mid [x]_i \subseteq X\}$ olup $[x]_i \subseteq X \subseteq U, \forall i \in I$ olur.

Bu ise $\underline{R_i}(X) \subseteq (X) \subseteq U$ verir.

2. $U_i \subseteq U$ ve $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ olduğundan $[x]_i \subseteq X \subseteq [x]_i \cap X \neq \emptyset, \forall i \in I$ olur. Yani $\bar{R}_i(X) = \bigcup_{x \in U} \{[x]_i \mid [x]_i \cap X \neq \emptyset, \forall i \in I\}$ dir. Bu ise $R_i(X) \subseteq (X) \subseteq \bar{R}_i(X)$ verir.

Diğerleride benzer şekilde yapılabilir. $\square$

Örnek 5.2.1. Örnek 3.1.1'den $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ nesnelerinin kümesi, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ özelliklerin kümesi $D_1 = \{1, 2, 3\}$, $D_2 = \{1, 2\}$, $D_3 = \{1, 2, 3, 4\}$ değer kümeleri

$$R(x_i) = \{x_j : x_j, x'_i \text{ ler ile aynı değerlere sahip, } 1 \leq i, j \leq 10\}$$

olmak üzere

U	e_1	e_2	e_3
x_1	2	1	3
x_2	3	2	1
x_3	2	1	3
x_4	2	2	3
x_5	1	1	4
x_6	1	1	2
x_7	3	2	1
x_8	1	1	4
x_9	2	1	3
x_{10}	3	2	1

bilgi tablosu verilsin. U nesnelerin sonlu kümesi, $U_i \subseteq U$ alt kümesi için, $R_i \subseteq U_i \times U_i$ denklik bağıntısı ve $U = \bigcup U_i$ verilsin. $\{(U_i, R_i) \mid i \in I\}$ lokal yaklaşım uzayı olmak üzere, $U_1 = \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_8\}$ ve $U_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_7, x_9, x_{10}\}$ alt kümeleri ile (U_1, R_1) ve (U_2, R_2) lokal yaklaşım uzayları verilsin.

$$[x_1]_1 = \{x_1\},$$

$$[x_5]_1 = \{x_5, x_8\},$$

$$[x_4]_1 = \{x_4\},$$

$$[x_6]_1 = \{x_6\}$$

ve

$$[x_2]_2 = \{x_2, x_7, x_{10}\},$$

$$[x_3]_2 = \{x_3, x_9\},$$

$$[x_4]_2 = \{x_4\}$$

denklik sınıflarına sahiptir. $x_4 \in U_1 \cap U_2$ için $x_4 \in \{x_4\} = W \subseteq U_1 \cap U_2$ olup

$$R_1|_W = R_2|_W = (x_4, x_4)$$

lokal bağdaşabilirlik şartı sağlanır.

Buna göre, $X = \{x_1, x_5, x_6\}$ kümesinin $U_1 = \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_8\}$ kümesi ile elde edilen (U_1, R_1) lokal yaklaşım uzayı için

$$\underline{R_1}(X) = \{x \in U \mid [x]_i \subseteq X, \forall i \in I\} = \{x_1, x_6\},$$

$$\overline{R_1}(X) = \{x \in U \mid [x]_i \cap X \neq \emptyset, \forall i \in I\} = \{x_1, x_5, x_6, x_8\}$$

olur. X bir lokal rough kümedir.

Teorem 5.2.2. U nesnelerin sonlu kümesi üzerinde (U, R_1) , (U, R_2) lokal yaklaşım uzayları verilsin. $(U, R_1 \cap R_2)$ 'de lokal yaklaşım uzayıdır [30].

İspat. U nesnelerin sonlu kümesi üzerinde R_1 ve R_2 denklik bağıntıları verildiğinde $R_1 \cap R_2$ 'de U nesnelerin sonlu kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $\square$

Tanım 5.2.2. (U_i, R_i) lokal yaklaşım uzayındaki bir X lokal rough kümesinde yaklaşımın kesinliği; $|X|$, $X \neq \emptyset$ kümesinin eleman sayısı olmak üzere;

$$\mu_{R_i}(X) = \frac{|\underline{R_i}(X)|}{|\overline{R_i}(X)|}$$

şeklindedir.

Örnek 5.2.2. Örnek 3.1.1’de ki U kümesi üzerinde R denklik bağıntısı ile denklik sınıfları

$$R(x_1) = [x_1] = \{x_1, x_3, x_9\},$$

$$R(x_2) = [x_2] = \{x_2, x_7, x_{10}\},$$

$$R(x_4) = [x_4] = \{x_4\},$$

$$R(x_5) = [x_5] = \{x_5, x_8\},$$

$$R(x_6) = [x_6] = \{x_6\}$$

şeklindedir. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_9\}$ kümesi için

$$\underline{R}(X) = \{x_1, x_3, x_4, x_9\},$$

$$\overline{R}(X) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, x_{10}\},$$

$$\overline{R}(X) - \underline{R}(X) \neq \emptyset$$

olduğundan X bir rough kümedir. X rough kümesinin yaklaşımının kesinliği ise

$$\mu_R(X) = \frac{|\underline{R}(X)|}{|\overline{R}(X)|} = \frac{4}{9}$$

olarak elde edilir.

$U_i = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_9, x_{10}\} \subseteq U$ kümesi üzerinde R_i lokal denklik bağıntısı ile

U_i	e_1	e_2	e_3
x_1	2	1	3
x_2	3	2	1
x_3	2	1	3
x_4	2	2	3
x_5	1	1	4
x_9	2	1	3
x_{10}	3	2	1

tablosu verilsin. Bu tabloya göre elde edilecek denklik sınıfları

$$R_i(x_1) = [x_1]_i = \{x_1, x_3, x_9\},$$

$$R_i(x_2) = [x_2]_i = \{x_2, x_{10}\},$$

$$R_i(x_4) = [x_4]_i = \{x_4\},$$

$$R_i(x_5) = [x_5]_i = \{x_5\}$$

şeklindedir. Aynı X kümesi için

$$\begin{aligned} \underline{R}_i(X) &= \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_9\}, \\ \overline{R}_i(X) &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_9, x_{10}\}, \\ \overline{R}_i(X) - \underline{R}_i(X) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan X bir lokal rough kümedir. X lokal rough kümesinin yaklaşımının kesinliği

$$\mu_{R_i}(X) = \frac{|\underline{R}_i(X)|}{|\overline{R}_i(X)|} = \frac{5}{7}$$

olarak bulunur. Böylece

$$\mu_{R_i}(X) > \mu_R(X)$$

olduğu görülür. $U_j = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, x_{10}\} \subseteq U$ kümesi üzerinde R_j lokal denklik bağıntısı ile verilsin. X kümesi için

$$\begin{aligned} \underline{R}_j(X) &= \{x_1, x_3, x_4, x_9\}, \\ \overline{R}_j(X) &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}, \\ \overline{R}_j(X) - \underline{R}_j(X) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan X bir lokal rough kümedir. X lokal rough kümesinin yaklaşımının kesinliği

$$\mu_{R_j}(X) = \frac{|\underline{R}_j(X)|}{|\overline{R}_j(X)|} = \frac{4}{9}$$

olarak bulunur. Burada

$$\mu_{R_j}(X) = \mu_R(X)$$

olduğu görülür.

Sonuç 5.2.1. Lokal rough kümede yaklaşımın kesinliği, rough kümedeki yaklaşımın kesinliğinden büyük veya eşit olabilir.

5.3 Lokal Rough Kümeler İçin Özellikler

U nesnelerin sonlu kümesi üzerinde bir topoloji ile verilsin ve (U, R) yaklaşım uzayı olsun. $U = \cup U_i$ olmak üzere $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i = R \mid U_i) \mid i \in I, U_i \subseteq U, R_i \subseteq U_i \times U_i \text{ denklik bağıntısı}\}$ lokal yaklaşım uzayını gösterir.

Tanım 5.3.1. U nesnelerin sonlu kümesi üzerinde bir topoloji ile verilsin. $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I\}$ ve $\mathcal{V} = \{(V_i, S_i) \mid i \in I\}$, U üzerinde iki lokal yaklaşım uzayı ve $U_i, V_i \subseteq U$, $W \subseteq U_i \cap V_i$ için $R_i \mid W \subseteq S_i \mid W$ olduğunda

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \Leftrightarrow (U_i \mid R_i) \subseteq (V_i \mid S_i), U_i \subseteq V_i, \forall i \in I$$

dir. Buradan lokal yaklaşım uzayının doğal sıralamaya sahip olduğu görülür..

Tanım 5.3.2. U nesnelerin sonlu kümesi üzerinde bir topoloji ile verilsin. (U, R) yaklaşım uzayı ve $U = \cup U_i$ olmak üzere $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I\}$ lokal yaklaşım uzayı olsun.

1. $locR = \{(U_i, R \mid U_i) \mid R \subseteq U \times U\}$, $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I\}$ yaklaşım uzayı üzerindeki lokal denklik bağıntısıdır.
2. $glob(\mathcal{U}) = \cap \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \leq loc(R)\}$ dir.

Tanım 5.3.3. $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I\}$ lokal yaklaşım uzayı olsun. Eğer $\forall i \in I$ olmak üzere bir $W_i \subseteq U_i$ açık komşuluğu için $R \mid_{W_i} = W_i \times W_i$ ise $\mathcal{U}$ lokal yaklaşım uzayına coarsest lokal yaklaşım uzayı denir.

Tanım 5.3.4. $\mathcal{U} = \{(U_i, R_i) \mid i \in I\}$, $U_i \subseteq U$ üzerinde lokal yaklaşım uzayı olmak üzere

1. $\mathcal{U} \leq loc(glob(\mathcal{U}))$ ise $\mathcal{U}$ lokal yaklaşım uzayına coherent lokal yaklaşım uzayı denir.
2. $\mathcal{U} = loc(glob(\mathcal{U}))$ ise $\mathcal{U}$ lokal yaklaşım uzayına global olarak coherent lokal yaklaşım uzayı denir.
3. U' daki her W açığı için $R \mid W$ coherent ise $\mathcal{U}$ lokal yaklaşım uzayına total olarak coherent lokal yaklaşım uzayı denir.

Tanım 5.3.5. (U, R) , U üzerinde bir yaklaşım uzayı olsun.

1. $loc(R)$, coherent lokal yaklaşım uzayı ise (U, R) yaklaşım uzayına lokal olarak coherent yaklaşım uzayı denir.
2. $R = glob(loc(R))$ ise (U, R) yaklaşım uzayına coherent denir.

Örnek 5.3.1. Şimdi coherent olan ve coherent olmayan lokal yaklaşım uzaylarına örnek verelim. Örnek 3.1.1'den U nesnelerin kümesinde

$$[x_1]_U = \{x_1, x_3, x_9\},$$

$$[x_2]_U = \{x_2, x_7, x_{10}\},$$

$$[x_4]_U = \{x_4\},$$

$$[x_5]_U = \{x_5, x_8\},$$

$$[x_6]_U = \{x_6\}$$

denklik sınıfları vardır.

$U_1 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}$ kümesinin $\mathcal{U} = (U_1, R_1 = R \mid U_1)$ lokal yaklaşım uzayı için

$$glob(\mathcal{U}) = \cap \{ \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \leq loc(R) \} = \cap \{ \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \leq (U_1, R_1 = R \mid U_1) \}$$

dir. U kümesinin tüm denklik sınıflarının birer elemanını içeren U_1 kümesi için ele alındığında

$$glob(\mathcal{U}) = \mathcal{U} = (U_1, R_1 = R \mid U_1)$$

dir. Buradan $\mathcal{U} \leq loc(glob(\mathcal{U}))$ olup, $loc(glob(\mathcal{U}))$, $\mathcal{U}(U_1, R_1)$ kümesinin herhangi bir komşuluğundadır. Sonuç olarak, $\mathcal{U}$ coherenttir.

Diğer taraftan, $U_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$ kümesinin $\mathcal{U} = (U_2, R_2 = R \mid U_2)$ lokal yaklaşım uzayı için

$$glob(\mathcal{U}) = \cap \{ \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \leq loc(R) \} = \cap \{ \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \leq (U_2, R_2 = R \mid U_2) \}$$

dir. Böylece

$$glob(\mathcal{U}) = \mathcal{U} = ((x_1, x_2), (R \mid (x_1, x_2)))$$

dir. Burada $\mathcal{U} \not\subseteq \text{loc}(\text{glob}(\mathcal{U}))$ olur. Yani $\text{loc}(\text{glob}(\mathcal{U}))$, $\mathcal{U}(U_2, R_2)$ kümesinin herhangi bir komşuluğunda değildir. Sonuç olarak $\mathcal{U}$ coherent değildir.

Tanım 5.3.6. (U, R) yaklaşım uzayı verilsin. Eğer R 'nin denklik sınıfları U 'nun bağlantılı alt kümeleri ise yani

$$x \in U \text{ için } [x] \subseteq U \text{ bağlantılı}$$

ise (U, R) yaklaşım uzayına **bağlantılıdır** denir.

Benzer şekilde U 'nun U_i açık alt kümeleri için $R \upharpoonright U_i = R_i$ 'nin denklik sınıfları U 'nun bağlantılı alt kümeleri ise yani

$$x \in U \text{ için } [x]_i \subseteq U \text{ bağlantılı}$$

ise (U, R) yaklaşım uzayı **lokal bağlantılıdır** veya (U_i, R_i) **lokal yaklaşım uzayı bağlantılıdır** denir.

Örnek 5.3.2. $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ nesnelerin kümesi $U/R = \{\{b, d, e\}, \{a, c, f\}\}$ U üzerindeki R denklik bağıntısına göre U 'nun bölüm kümesi olsun. U üzerindeki topoloji $\tau = \{\emptyset, U, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$ ise (U, R) yaklaşım uzayının bağlantılılığını inceleyelim.

(U, R) yaklaşım uzayının bağlantılı olması için R 'nin denklik sınıfları U 'nun bağlantılı alt kümeleri olmalıdır. (U, τ) topolojisinde kapalıların kümesi $K = \{X, \emptyset, \{b, c, d, e, f\}, \{a, b, c, e, f\}, \{b, e, f\}, \{a, f\}, \{f\}\}$ olur. U nun denklik sınıflarından $A = \{b, d, e\}$ için

$$\tau_A = \{A \cap U \mid U \in \tau\} = \{\emptyset, A, \{d\}\}$$

$$\tau_A = \{A \cap V \mid V \in K\} = \{\emptyset, A, \{b, e\}\}$$

olup (A, τ_A) uzayı bağlantılıdır. U nun diğer denklik sınıfı $B = \{a, c, f\}$ için

$$\tau_B = \{B \cap U \mid U \in \tau\} = \{\emptyset, B, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$$

$$\tau_B = \{B \cap V \mid V \in K\} = \{\emptyset, B, \{c, f\}, \{a, f\}, \{f\}\}$$

olup (B, τ_B) uzayı bağlantılıdır. R 'nin denklik sınıfları olan A ve B kümeleri U 'nun bağlantılı alt kümeleri olduğu için (U, R) yaklaşım uzayı bağlantılıdır.

Örnek 5.3.3. $U = \{a, b, c, d, e\}$ nesnelerin sonlu kümesi, $U/R = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}$ U' nun denklik sınıflarının kümesi ve $X = \{a, c, d\}$ olsun. $R_-(X) = \{c, d\}$ alt yaklaşımı, $R^-(X) = \{a, b, c, d\}$ üst yaklaşımı ve $Bnd(X) = \{a, b\}$ sınır kümesi için X' e bağlı $\tau_R = \{U, \emptyset, \{a, b, c, d\}, \{c, d\}, \{a, b\}\}$ rough topolojisinde R' nin denklik sınıfları, U' nun bağlantılı altkümeleri olduğu için (U, R) yaklaşım uzayı bağlantılıdır.

Benzer şekilde bu yaklaşım uzayında $U_i = \{a, b, c, d\} \subseteq U$ açığı alınsın. $R \mid U_i = R_i = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ olur. Buna göre, $R_{i-}(X) = \{c, d\}$, $R_i^-(X) = \{a, b, c, d\}$, $Bnd(X) = \{a, b\}$ olup X' e bağlı $\tau_{R_i} = \{U_i, \emptyset, \{c, d\}, \{a, b\}\}$ rough topolojisi elde edilir. Burada R_i' nin denklik sınıfları, U_i' nin bağlantılı alt kümeleri olmadığı için (U_i, R_i) lokal yaklaşım uzayı bağlantılı değildir. Yani yaklaşım uzayı bağlantılı iken lokal yaklaşım uzayı bağlantılı olmayabilir.

Tanım 5.3.7. (U, R) yaklaşım uzayı verilsin. Eğer R' nin denklik sınıfları U' nun yol bağlantılı alt kümeleri ise yani

$$x \in U \text{ için } [x] \subseteq U \text{ yol bağlantılı}$$

ise (U, R) yaklaşım uzayına **yol bağlantılıdır** denir.

Benzer şekilde U' nun U_i açık alt kümeleri için $R \mid U_i = R_i'$ nin denklik sınıfları U' nun yol bağlantılı alt kümeleri ise yani

$$x \in U \text{ için } [x]_i \subseteq U \text{ yol bağlantılı}$$

ise (U, R) yaklaşım uzayı **lokal yol bağlantılıdır** veya (U_i, R_i) **lokal yaklaşım uzayı yol bağlantılıdır** denir.

Örnek 5.3.4. R kümesi üzerinde bağlantılılık veya yol bağlantılılık bağıntılarına göre oluşacak yaklaşım uzayı coherenttir.

Tanım 5.3.8. (U, R) yaklaşım uzayı ve $loc(R)$, (U, R) yaklaşım uzayı üzerindeki lokal denklik bağıntısı olsun. U' nun $\{V_x\}_{x \in U}$ örtüsü için $\{R \mid V_x\}_{x \in U}$ tarafından oluşturulmuş denklik bağıntısı $R_V \subseteq R$ dir.

Teorem 5.3.1. R_V ’nin lokal olan denklik sınıfları R ’nin global denklik sınıflarında alt uzay topolojisine göre hem açık hem kapalıdır.

İspat. $[x]_V$ ve $[x]$ sırasıyla R_V ’nin lokal olan denklik sınıfları ve R ’nin global olan denklik sınıfları olsun. $[x]_V \subseteq [x]$ olduğu açıktır. Burada U ’nun $w_1, w_2, \dots, w_n, a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ elemanları ile V_{a_1} örtüsü için $(V_{a_1}, R \mid V_{a_1})$ lokal yaklaşım uzayında $(y, w_1) \in R \mid V_{a_1}$ denklik bağıntısı, V_{a_2} örtüsü için $(V_{a_2}, R \mid V_{a_2})$ lokal yaklaşım uzayında $(w_1, w_2) \in R \mid V_{a_2}$ denklik bağıntısı, ..., $V_{a_{n+1}}$ örtüsü için $(V_{a_{n+1}}, R \mid V_{a_{n+1}})$ lokal yaklaşım uzayında $(w_n, x) \in R \mid V_{a_{n+1}}$ denklik bağıntıları vardır. $V_{a_1} \cap [x]$ için $z \in V_{a_1} \cap [x]$ alınsın. Buradan $(y, x) \in R$ ve $(y, z) \in R \mid V_{a_1}$ olduğundan $(z, x) \in R$ dir. Böylece $(y, z) \in R \mid V$ olup $z \in [x]_V$ dir. Buradan $y \in [x] \cap V_{a_1} \subseteq [x]_V$ olarak bulunur. Böylece $[x]_V, [x]'$ de açıktır.

Kapalılık için $z \in [x]_V$ olsun. x ’in her U açığı için $(U \cap [x]) \cap [x]_V \neq \emptyset$ dir. $y \in V_x \cap [x]_V$ olarak alınırsa $(x, y) \in R_V$ ve $(z, x) \in R$ olduğundan $(y, z) \in R$ dir. $y, z \in V_z$ olduğundan $(y, z) \in R_V$ dir. Böylece $(x, z) \in R_V$ yani $z \in [x]_V$ dir. Buradan $[x]_V = \overline{[x]_V}$ olur. Bu ise $[x]_V$ ’nin $[x]'$ de kapalılığını verir. $\square$

Teorem 5.3.2. (U, R) yaklaşım uzayı ile $loc(R)$, (U, R) yaklaşım uzayı üzerindeki denklik bağıntısı olsun. $\forall x \in U$ için bir N_x açık komşuluğu için $R \mid N_x$ bağlantılı denklik sınıfları olduğu kabul edilsin. Böylece $\mathcal{U}$ lokal yaklaşım uzayı coherenttir.

İspat. $\mathcal{U}$ lokal yaklaşım uzayı coherent olmazsa sadece bazı $a \in U$ elemanları için $\mathcal{U}_a \leq loc(glob(\mathcal{U}))_a$ olur. Yani a ’nın herhangi bir N açığı için $\{V_a\}_{a \in U}$ örtüsü var ve $y_1, y_2 \in N$ için $(y_1, y_2) \in R$ iken $(y_1, y_2) \notin R_V$ dir. Bu N_a için de doğrudur. $R \mid N_a$ ’da y_1 ’in denklik sınıfında, $R_V \mid N_a$ daki y_1 ’in denklik sınıfları kapalı olduğundan bağlantılıdır. Bu ise $(y_1, y_2) \in R$ olmasına ters düşer. $\square$

Teorem 5.3.3.

1. $\mathcal{U}$ global ve total coherent lokal yaklaşım uzayı olduğunu kabul edelim. V , $\mathcal{U}$ ’da açıksa $R \mid V$ global coherenttir.
2. $x \in V_x \subseteq U_x$, $\forall x \in X$ için $\mathcal{U} \mid V_x$ total ve global coherent lokal yaklaşım uzayı olacak şekilde $\{V_x\}_{x \in X}$ açık örtüsü varsa $\mathcal{U}$ total coherent lokal yaklaşım uzayıdır.

İspat. 1. $\mathcal{U} = \text{loc}(\text{glob}(\mathcal{U}))$ eşitliği mevcuttur. Tanımdan $\text{glob}(\mathcal{U} | V) \subseteq \text{glob}(\mathcal{U}) | V$ olur. Buradan

$$\text{loc}(\text{glob}(\mathcal{U} | V)) \leq \text{loc}(\text{glob}(\mathcal{U}) | V) = \text{loc}(\text{glob}(\mathcal{U})) | V = \mathcal{U} | V$$

bulunur. $\mathcal{U} | V$ coherent lokal yaklaşım uzayı olduğu için $\mathcal{U}$ lokal yaklaşım uzayı total coherent lokal yaklaşım uzayı tanımından $\mathcal{U} | V \leq \text{loc}(\text{glob}(\mathcal{U} | V))$ olur.

2. 1' den X' de U açık ve $\mathcal{U} | V_x, \forall x \in X$ için global coherent lokal yaklaşım uzayı ise $\mathcal{U} | U \cap V_x$ global coherent lokal yaklaşım uzayıdır. Böylece

$$\mathcal{U} | U \cap V_x = \text{loc}(\text{glob}(\mathcal{U} | U \cap V_x)) \leq \text{loc}(\text{glob}(\mathcal{U} | U)) | V_x$$

şeklindedir. Burada $\mathcal{U} | U \leq \text{loc}(\text{glob}(\mathcal{U} | U))$ olur. $\mathcal{U}$ total coherent lokal yaklaşım uzayıdır. $\square$

Teorem 5.3.4. (U, R) yaklaşım uzayı bağlantılı olsun. Bu takdirde $R = \text{glob}(\text{loc}(R))$ dir. Tersine R kapalı denklik sınıflarına sahip ve $R = \text{glob}(\text{loc}(R))$ ise, (U, R) bağlantılı yaklaşım uzayıdır.

İspat. $\{V_a\}_{a \in U}$, U' nun herhangi bir açık örtüsü olsun. R' de $\{R | V_a\}_{a \in U}$ tarafından oluşturulan R_V lokal denklik bağıntısı kapalı ve bağlantılıdır. Buradan $R_V = R$ dir. Böylece

$$R = \text{glob}(\text{loc}(R))$$

olarak bulunur.

Tersine eğer $R = \text{glob}(\text{loc}(R))$ ise her V örtüsü için $R_V = R$ dir. $[a]$ denklik sınıfı nda bağlantılı olmayan $a \in U$ elemanı ele alınsın. U ve V açıkları $[a]$ denklik sınıfını böler. $[a]$ kapalı olduğundan $U - [a]$ açıktır. U, V ve $U - [a]$ açıkları için $a_1 \in U \cap [a]$ ve $a_2 \in V \cap [a]$ olmak üzere $a_1, a_2 \in [a]$ elemanlarını seçelim. $(a_1, a_2) \in R$ olur. Fakat

$$(U \cap [a]) \cup (V \cap [a]) = [a]$$

olduğundan $(a_1, a_2) \notin R_V$ dir. Buradan $R_V \subsetneq R$ olup $\text{glob}(\text{loc}(R)) \subsetneq R$ elde edilir. Bu ise kabule ters düşer. $\square$

Teorem 5.3.5. *Eğer $\mathcal{U}$ total coherent lokal yaklaşım uzayı ise bağlantılı denklik sınıfları ile denklik bağıntıları tarafından lokal olarak tanımlanabilir.*

İspat. Eğer $\mathcal{U}$ total coherent lokal yaklaşım uzayı ise U_x örtüsü için $(U_x, \mathcal{U} \mid U_x)$ lokal yaklaşım uzayında $\mathcal{U} \mid U_x$ denklik bağıntısı vardır ve $\mathcal{U} \mid U_x = \text{loc}(\text{glob}(\mathcal{U} \mid U_x))$ dir. $\mathcal{U}$ total coherent lokal denklik bağıntısı olması $\mathcal{U} \mid U$ coherent lokal denklik bağıntısı olmasını sağlar. Böylece bağlantılı denklik sınıfları vardır. $\square$



6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, Kuroki ve Wang tarafından verilen rough altgrup kavramı ele alınarak, bir grupoid üzerindeki normal altgrupoidine göre rough (normal) altgrupoid tanımlandı. Ayrıca Pawlak tarafından verilen rough (yaklaşım) uzayı, Grothendieck ve Verdier tarafından verilen ve Rosenthal tarafından geliştirilen lokal denklik bağıntısı kavramları yardımıyla lokal yaklaşım uzayı, lokal rough küme ve lokal bağlantılılık kavramları elde edildi.

Bölüm 4' te, her rough alt grubun tek nesneli bir rough altgrupoid olduğu gösterildi. Bir grupoid üzerinde N normal altgrupoidine göre verilen bir kümenin alt ve üst yaklaşımları bulunarak grupoid üzerinde verilen kümenin rough kümesi elde edildi ve örneklerle gösterildi. Bu alt ve üst yaklaşımların sağladığı özellikler teoremlerle verildi. Oluşan rough küme için alt ve üst yaklaşımlar grupoidin (normal) altgrupoidi ise verilen kümeye grupoidin rough (normal) altgrupoidi denildi.

Bölüm 5' te, nesnelerin sonlu kümesi üzerinde denklik bağıntısı ile lokal yaklaşım uzayı tanımlandı. Herhangi bir kümeden, lokal yaklaşım uzayında lokal alt yaklaşım ve lokal üst yaklaşım elde edilerek, lokal rough küme kavramı oluşturuldu ve lokal rough kümenin sağladığı özellikler verildi. Lokal rough küme örnekle gösterilerek lokal rough kümede yaklaşımın kesinliğinin, rough kümedeki yaklaşımın kesinliğinden daha büyük olduğu görüldü. Bunlara ek olarak, coherent yaklaşım uzayı ve lokal bağlantılılık kavramları tanımlanarak bu kavramlarla ilgili teoremler verildi.

KAYNAKLAR

- [1] Pawlak, Z. (1982). Rough sets, *Int. J. Comput. Inform. Sci.*, **11**, 341-356.
- [2] Biswas, R., Nanda, S. (1994). Rough groups and rough subgroups, *Bull. Polish. Acad. Sci. Math.*, **42**, 251-254.
- [3] Kuroki, N., Wang, P.P. (1996). The lower and upper approximations in a fuzzy group, *Inform. Sci.*, **90**, 203-220.
- [4] Erdoğan, F. (2006). *The Relationship between fuzzy rough sets and rings*, M.Sc.Thesis, Gaziosmanpaşa University, Tokat, Turkey.
- [5] Grothendieck, A., Verdier, T.L. (1972). *Theorie des topos*, Lectures Notes Maths, Springer.
- [6] Blyth, T.S. (1986). *Categories*, University of st. Andrews, Scotland.
- [7] MacLane, S. (1971). *Categories for the working mathematicians*, graduate texts in mathematics, **5**, Springer, Verlag, Berlin.
- [8] Pontrjagin, L. (1946). *Topological Groups*, Princeton University Press.
- [9] Gürsoy, M.H. (2002). *Topolojik 2-Grupoidler*, M.Sc.Thesis, İnönü University, Malatya, Turkey.
- [10] Ertan, H.T. (2008). *Grupoidler ve Demetler*, M.Sc.Thesis, İnönü University, Malatya, Turkey.
- [11] Higgins, P.J. (1971). Categories and Groupoids, *Reprints in Theory and Applications of Categories*, No. **7**, pp. 1-195.
- [12] Brandt, H. (1927). Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, *Mathematische Annalen*, **96**, 360-366
- [13] Brown, R. (2006). *Topology and Groupoids*, Book surge LLC, U.K.

- [14] Brown, R. (1988). *Topology: A geometric account of general topology, homotopy types and the fundamental groupoid*, Ellis, Horwood Chichester.
- [15] İen, İ. (1989). *Demetler Üzerine*, M.Sc.Thesis, İnönü University, Malatya, Turkey.
- [16] İen, İ. (1996). *Sheaves, local subgroupoids and holonomy groupoids*, University of Wales report.
- [17] Bredon, G.E. (1976). *Sheaf Theory*, Mc Graw-Hill Book Company.
- [18] Mucuk, O. (1993). *Covering groups of non-connected topological groups and the monodromy groupoid of a topological groupoid*, PhD Thesis, University of Wales, England.
- [19] Baker, A. (2001). *Profinite groupoids and their cohomology*, Glasgow University Mathematics Department Preprint **99**, 33.
- [20] Tennison, B.R. (1975). *Sheaf Theory*, Cambridge University Press.
- [21] MacLane, S., Moerdijk, I. (1991). *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer Verlag.
- [22] Rosenthal, K. (1984). *Sheaves and Local Equivalence Relations*, *Cah. Geom. Diff. Cat.*.
- [23] Rosenthal, K. (1982). *Local Equivalence Relations*, *Top. and its App.*, **13**, 167-176.
- [24] Suraj, Z. (2004). *An Introduction to Rough Set Theory and Its Application*, Cairo, Egypt, *ICENCO'2004*, December, 27-30.
- [25] Liang, X., Li, D. (2009). *On Rough Subgroup of a Group*, *Formalized Mathematics*, **17**, 213-217.
- [26] Aktaş, H., Çağman, N. (2005). *Bulanık ve Yaklaşımlı Kümeler*, Çankaya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, *Journal of Arts and Sciences*, Mayıs, 13-25.

- [27] Thivagar, M.L., Richard, C., Paul, N.R. (2012). Mathematical Innovations of a modern topology in medical events, *International Journal of Information Science*, **2**, 33-36.
- [28] Cheng, W., Mo, Z.W., Wang, J. (2007). Notes on "the lower and upper approximations in a fuzzy group" and "rough ideals in semigroups", *Information Sciences*, **177**, 5134-5140.
- [29] Miao, D., Han, S., Li, D. and Sun, L. (2005). Rough group, rough subgroup and their properties, D. Slezak et al., *Springer-Verlag*, Berlin Heidelberg, 104-113.
- [30] Yıldız, C. (2005). *Genel Topoloji*, Gazi Kitabevi.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Hatice TAŞBOZAN

Doğum Yeri ve Tarihi: Bursa/ 22.07.1985

Adres: Mustafa Kemal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü HATAY

E-Posta: htasbozan@mku.edu.tr

Lisans: 2004-2008 İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans: 2008-2011 İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Topoloji Anabilim Dalı

Doktora: 2011-2017 İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Topoloji Anabilim Dalı

Mesleki Deneyim:

2009-2014 İnönü Üniversitesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi

2014-Halen Mustafa Kemal Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Görevlisi

Yayın Listesi

1. H. Taşbozan, İ. İçen, A.F. Özcan, N. Bağırılmaz, Near Soft Set and Near Soft Topology, Filomat(Kabul Edildi).

Ulusal Bildiriler:

1. H. Başbuğ, İ. İçen, Local Equivalence Relation, XIII. Geometri Sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 29 Nisan-2 Mayıs, 2010.

Uluslararası Bildiriler:

1. A.F. Özcan, H. Taşbozan, N. Bağırılmaz, İ. İçen, Near Soft Set and Near Soft Topology, Second International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, August 26-29, 2013.

2. A.F. Özcan, H. Taşbozan, N. Bağırılmaz, İ. İçen, Topologies and Approximation Operators Induced by Binary Relation, Second International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, August 26-29, 2013.