



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LOKAL T_0 VE T_1 SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra ÖZDEMİR

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

AKSARAY, 2022

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 182342401 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Kübra ÖZDEMİR tarafından hazırlanan “**LOKAL T_0 VE T_1 SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLAR**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Samed ÖZKAN

Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 10/01/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HİNİS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Lokal T_0 Ve T_1 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar konulu yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Kübra ÖZDEMİR

TEŞEKKÜR

Tez çalışmasının belirlenmesinde, araştırılmasında, geliştirilmesinde ve sonuçlarının değerlendirilmesinde değerli zamanını ayırarak, her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen, beni yönlendiren değerli hocam Doç. Dr. Ayhan ERCİYES'e, bu süreç zarfı içinde beni yönlendiren ve tecrübelerini benimle paylaşan Aksaray Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca bana verdikleri manevi destek, göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı aileme teşekkür ederim.

Kübra ÖZDEMİR

AKSARAY, 2022

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	İv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TANIM VE TEOREMLER	3
2.1 Kategori.....	3
2.2 Özel Obje Ve Morfizmler.....	6
2.3 Fanktor.....	8
2.4 Doğal Dönüşüm.....	9
2.5 Topolojik Fanktor Ve Örnekleri.....	11
3. SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLAR.....	16
3.1 Süzgeçler	16
3.2 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar	21
3.3 ConFCO Topolojik Kategorisi ve Özellikleri	23
4. LOKAL T_0 VE T_1 AYIRMA AKSİYOMLARI	27
4.1 Noktada Eksen Dönüşümleri.....	27
4.2 Lokal T_0 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar	30
4.3 Lokal T_0 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar İle İlgili Sonuçlar	41
4.4 Lokal T_1 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar	43
4.5 Lokal T_1 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar İle İlgili Sonuçlar	48
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	50
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ.....	53

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LOKAL T_0 VE T_1 SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLAR

Kübra ÖZDEMİR

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, literatür taraması yapılmıştır.

İkinci bölümde, kategori, fanktor, topolojik fanktor, başlangıç ve bitiş kaldırmaları, diskre objeler ile bazı gerekli teorem ve örnekler verildi.

Üçüncü bölümde, sabit süzgeç yakınsak uzaylar tanımlandı ve örnekler verildi. **ConFCO** (Objeleri sabit süzgeç yakınsak uzaylar ve morfizimleri sürekli dönüşümler) kategorisinin topolojik kategori olduğu gösterildi. Dahası, **ConFCO** kategorisindeki bazı özel obje ve morfizimler tanımlandı.

Dördüncü bölümde, **ConFCO** kategorisindeki $\bar{T}_0$, T'_0 ve T_1 objeler araştırıldı ve teoremlerin bir uygulaması olarak örnekler verildi. Lokal $\bar{T}_0$, T'_0 ve T_1 sabit yakınsak süzgeç uzaylardan oluşan ve sabit yakınsak süzgeç uzayların kategorisinin dolu alt kategorilerinin kalıtsal, çarpımsal ve co-çarpımsal oldukları gösterildi. Daha sonra **ConFCO** nun dolu alt kategorileri olan $\bar{T}_0\text{ConFCO}$ ve $T_1\text{ConFCO}$ ($T'_0\text{ConFCO}$ ve **ConFCO**) kategorilerinin izomorfik kategoriler oldukları gösterildi.

Beşinci bölümde, teoremlerden elde edilen sonuçlar bir araya getirilerek sonuç, değerlendirme ve önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Topolojik kategori, T_0 ve T_1 objeler, sabit süzgeç yakınsak uzaylar.

Ocak, 2022; 53 sayfa

M. Sc. THESIS

LOCAL T_0 AND T_1 CONSTANT FILTER CONVERGENCE SPACES

Kübra ÖZDEMİR

Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, there is a literature review.

In the second chapter, the concepts of category, functor, topological functor, initial-final lifts, discrete objects, and some necessary theorems and examples about them are given.

In the third chapter, constant filter convergence spaces are defined and examples are given. The relationships between constant filter convergence spaces and topological spaces is examined. The category **ConFCO** (Objects are constant filter convergence spaces and morphisms are continuous maps) is shown topological category. Furthermore, some special objects and morphisms in the **ConFCO** category are defined.

In the fourth chapter, the local $\bar{T}_0$, T'_0 , and T_1 objects in **ConFCO** are investigated and simple examples are given as an application of theorems. It is shown that the full subcategories of the category of constant filter convergence spaces consisting of local $\bar{T}_0$, T'_0 , and T_1 constant filter convergence spaces are hereditary, productive, and co-productive. Furthermore, it is shown the subcategories $\bar{T}_0\mathbf{ConFCO}$ and $T_1\mathbf{ConFCO}$ ($T'_0\mathbf{ConFCO}$ and **ConFCO**) of **ConFCO** are isomorphic categories

In the fifth chapter, the results obtained from the theorems are brought together, results, evaluations, and suggestions are given.

Keywords: Topological category, T_0 and T_1 objects, constant filter convergence spaces.

January, 2022; 53 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Doğal dönüşüm diyagramı.....	9
Şekil 3.1. ConFCO da süreklilik diyagramı	24
Şekil 4.1. B kümesinin p noktasında Wedge çarpımı	27
Şekil 4.2. p noktasındaki pushout diyagramı	27
Şekil 4.3. $p=0$ noktasındaki Temel Eksen Dönüşümü.....	29
Şekil 4.4. $p=0$ noktasındaki Skewed Eksen Dönüşümü.....	29
Şekil 4.5. $p=0$ noktasındaki Katlama Dönüşümü.	29
Şekil 4.6. $B=\{a, b\}$ için pushout diyagramı	32
Şekil 4.7. $\overline{T_0}$ için $\pi_i A_p$ diyagramı	34
Şekil 4.8. T_0' için diyagram	37
Şekil 4.9. T_1 için $\pi_i S_p$ diyagramı	43



SİMGELER VE KISALTMALAR

A_p	Lokal Temel Eksen Dönüşümü
AbGrp	Abel Grupların Kategorisi
Born	Bornolojik Uzaylar Kategorisi
C	Kategori
ConFCO	Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar Kategorisi
Diff	Diferansiyellenebilir Manifoldların Kategorisi
$F(X)$	X Kümesi Üzerindeki Tüm Süzgeçlerin Kümesi
Fam	Aile uzayları Kategorisi
K	Yakınsaklık Yapısı
Rel	Bağıntı Uzaylar Kategorisi
RRel	Yansıma Bağıntılı Uzaylar Kategorisi
FinSet	Sonlu Kümelerin Kategorisi
Grp	Grupların Kategorisi
Haus	Hausdorff Uzaylar Kategorisi
Met	Metrik Uzaylar Kategorisi
Mon	Monoidlerin Kategorisi
N_x	x Noktasının Komşuluklar Sınıfı
Mor(C)	C Kategorisinin Morfizimleri Kümesi
$P(X)$	X in Kuvvet Kümesi
Born	Bornolojik Uzaylar Kategorisi
Pborn	Pre-bornolojik Uzaylar Kategorisi
Prord	Ön Sıralama Bağıntılı Uzaylar Kategorisi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
Ring	Halkalar Kategorisi
Ring₁	Birimli Halkalar Kategorisi
Ob(C)	C Kategorisinin Objeleri Kümesi
Set	Kümeler Kategorisi
S_p	Lokal Skewed Eksen Dönüşümü
Top	Topolojik Uzaylar Kategorisi
$\bar{T}_0$ ConFCO	$\bar{T}_0$ Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar Kategorisi
T_0' ConFCO	T_0' Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar Kategorisi
T_1 ConFCO	T_1 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar Kategorisi
T_2 Top	Hausdorff Uzaylar Kategorisi
Vect	Vektör Uzaylar Kategorisi
∇_p	Lokal Katlama Dönüşüm
μ	Doğal Dönüşüm
τ	Topoloji

1. GİRİŞ

Süzgeç kavramı 1937 yılında Cartan [1] tarafından ortaya atıldı. Yakınsaklık kavramı süzgeç veya ağların yakınsaklığı kavramını temel alan topolojik uzayların bir genelleştirmesidir. Süzgeçler topolojik uzaylarda yakınsaklığı tanımlamak, kapalılık, süreklilik ve kompaktlık gibi kavramları karakterize etmek için kullanılırlar. Bu kavram yakınsaklık konusunda temel bir rol almakla birlikte topolojik uzaylar ile yakınsak uzaylar arasında ilişki kurar. Süreklilik, yakınsaklık ve ayırma aksiyomları gibi topolojik kavramlarda kullanılan komşuluk kavramı yerine yakınsama alınarak bu kavramları daha soyut bir şekilde tanımlamak mümkündür. Bu yaklaşımı Choquet [2], Hausdorff [3], Katetov [4], Kent [5] çalışmalarında kullanmışlardır.

Kategori teorisi, 1942-1945 li yıllarda, topolojideki ve özellikle cebirsel topolojideki çalışmalarının bir parçası olarak Eilenberg ve Mac Lane [6] tarafından ortaya atıldı. Kategorinin tanımı çalışanın seçtiği hedeflere göre matematiksel çerçeveye göre zaman içinde gelişti. Eilenberg ve Mac Lane ilk önce bir kategorinin tanımını bir grubun tanımını kullanarak verdiler. Onların çalışmaları geometrik homolojiden, homolojiye geçişin önemli bir parçasıydı ve asıl amaçları doğal dönüşüm kavramını tanımlamaktı. Bunun içinde fanktorları kullandılar. Fanktorları karakterize etmek topolojik yapıları cebirsel yapılar ile ilişkilendirmek ve fanktorları anlamlandırmak için kategori teorisine giriş yaptılar. Topolojik fanktor ve topolojik kategori kavramlarını ilk kez Herrlich [7] ve Wyler [8] çalışmalarında kullandılar. Onlar başlangıç ve bitiş topolojilerin bir genellemesi olarak başlangıç kaldırması ve bitiş kaldırması kavramlarını kullandılar.

Genel topolojik uzaylarda tek bir kavram topolojik kategori de birçok kavrama karşılık gelebilir. Örneğin topolojik uzayların kategorisinde hepsi T_0 aksiyomuna (sırasıyla bağlantılılık, kapalı morfizm, kompaktlık) denk olan farklı kategorik T_0 , $\bar{T}_0$, T_1 ve T'_0 (sırasıyla güçlü bağlantılık (strongly connectedness), D -bağlantılılık, kapalı fonksiyon, kompaktlık) kavramları mevcuttur [9-11]. Lokal T_0 ayırma aksiyomu topolojik kategorilerde lokal (pre)Hausdorff objeleri (KT_2 , LT_2 , MT_2 ve NT_2) tanımlamakta kullanılırlar. Dolayısıyla lokal pre-Hausdorff objeler ile ilişkili olan lokal T_3 objeler ve lokal T_4 objeleri tanımlamada ve karakterize etmede önemli bir rolü vardır.

Lokal T_1 ayırma aksiyomu ise küme tabanlı topolojik kategoride kapalılık ve güçlü kapalılık kavramlarını tanımlamakta kullanılır. Böylece içerisinde kapalılık kavramı geçen hemen hemen de tüm topolojik kavramlarda T_1 ayırma aksiyomu kullanılır. Örneğin Erciyes ve diğerleri [12-14] genel topolojideki Hausdorff, regüler ve normal uzayların sabit süzgeç yakınsak uzaylarındaki genelleştirmelerini verdiler. Weck-Schwarz [15] topolojik kategorilerde ayrılmış (separated) objeler ile T_0 objeleri arasındaki ilişkileri inceledi. Bunların dışında Schwarz. ve Hannover [16], 1978 yılında süzgeçlerin yakınsaklığının bir genellemesi olarak yığın yakınsak uzayların kategorisine giriş yaptılar ve yakınsaklık ile yakınlık (nearness) arasındaki ilişkiyi gösterdiler. Onlar yakınsaklığın, yakınlığı içerdiğini ispatladılar.

Bu çalışmanın amacı, topolojik uzaylarda bilinen T_0 ve T_1 ayırma aksiyomlarının 1991 yılında Baran [9] tarafından verilen genelleştirmeleri kullanılarak **ConFCO** kategorisindeki T_0 ve T_1 objeleri noktada karakterize etmektir. Ardından, lokal T_0 uzayının $\bar{T}_0$ ve T'_0 ile gösterilen formları arasında ki ilişkileri araştırmaktır. Daha sonra ise **ConFCO** kategorisinin dolu alt kategorisi olan **T'_0 ConFCO**, **$\bar{T}_0$ ConFCO** ve **T_1 ConFCO** şeklinde gösterilen kategorileri oluşturmaktır ve bu kategorilerin çarpımsal, co-çarpımsal, kalıtsallık gibi değişmeyen özelliklerine sahip olup olmadığını incelemektir. Son olarak da **ConFCO** nun dolu alt kategorileri olan **$\bar{T}_0$ ConFCO** ve **T_1 ConFCO** (**T'_0 ConFCO** ve **ConFCO**) kategorilerinin izomorfik kategoriler olduklarını göstermektir.

2. TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde kategori, fanktor, topolojik fanktor, başlangıç ve bitiş kaldırmaları, diskre objeler ile bazı gerekli teorem, önerme ve örnekler verilecektir.

2.1 Kategori

Kategori yapısal sistemlerin ve yapıların genel matematiksel teorisidir. Kategori Teorisi geliştirmekte olduğundan, onun işlevleri ve kullanım alanları da geliştirmekte ve çoğalmaktadır. Kategori Teorisi hem ilginç bir felsefi çalışma nesnesi hem de uzay, sistem gibi kavramların felsefi araştırmaları için potansiyel olarak güçlü bir araçtır. Bu haliyle matematiksel ontoloji ve epistemoloji hakkında birçok konuyu gündeme getirmektedir. Dolayısıyla kategori filozoflara ve mantıkçılara kullanmaları ve üzerinde düşünmeleri için pek çok fikir vermektedir.

Dikkat edelim ki bir kategori objelerinden ziyade morfizmleri ile karakterize edilir. Bu durumda, açık dönüşümlerden oluşan topolojik uzayların kategorisini, sürekli dönüşümlerden oluşan topolojik uzayların kategorisinden farklı kılar veya daha önemlisi, ikinci ifade edilen yapının kategorik özellikleri birincisinden farklıdır. Tüm kategorilerin dönüşümleri koruyan bir yapıya sahip olmadığı durumunu ifade etmek gerek. Örneğin ön sıralı kümelerden oluşan sınıf bir kategori olmasına rağmen her ön sıralı küme için morfizm tanımlı olmayabilir.

Tanım 2.1.1 ([17,18]) Bir $\mathbf{C}$ nin tüm nesnelerin (objeler) sınıfı $\text{Ob}(\mathbf{C})$, tüm morfizmlerin (dönüşüm) sınıfı $\text{Mor}(\mathbf{C})$ ve bu iki dönüşüm için bileşke işlemi tanımlandığında aşağıdaki şartların sağlanıyorsa $\mathbf{C}$ ye bir *kategori* denir.

(i) $\mathbf{C}$ deki her bir A ve B objesi için $1_A, 1_B$ birim morfizmleri vardır öyle ki her $f: A \rightarrow B$ morfizmi için

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

(ii) $\mathbf{C}$ de ki her $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$ morfizmi için birleşme özelliği sağlanmalıdır.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

$\mathbf{C}$ de herhangi iki obje arasındaki morfizmlerin kümesi $\mathbf{C}(A, B) = \text{Mor}(\mathbf{C}) = \{ f | f: A \rightarrow B \text{ morfizm} \}$ ile gösterilir. Ayrıca verilen iki morfizmin bileşkesi de aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$o: \mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}(B, C) \rightarrow \mathbf{C}(A, C)$$

$$(f, g) \rightarrow g \circ f$$

Aşağıda verilen örnekler Kategori Teorisinde sözü geçen yapı kavramını tekdüze bir şekilde nasıl ele aldığını güzel bir şekilde göstermektedir.

Örnek 2.1.2 (1) Objeleri kümeler, morfizmleri bilinen fonksiyonlar olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye tüm kümelerin kategorisi denir ve **Set** ile gösterilir. Burada fonksiyonlar yerine parçalı fonksiyonlar, birebir fonksiyonlar veya örten fonksiyonlar da düşünülebilir. Böylece, her durumda oluşan kategoriler farklılık gösterir.

(2) Objeleri tüm topolojik uzaylar, morfizmleri sürekli fonksiyonlar olan yapı bir kategoridir ve **Top** ile gösterilir. Burada morfizmler açık (kapalı) sürekli fonksiyonlar şeklinde de kısıtlanabilir. Dolayısıyla elde edilen kategoriler farklıdır.

(3) Objeleri tüm diferansiyellenebilir manifoldlar, morfizmleri smooth dönüşümler olan bu yapı bir kategoridir. Bu kategoriye diferansiyellenebilir manifoldların kategorisi denir ve **Diff** ile gösterilir.

(4) Objeleri tüm gruplar (değişmeli gruplar), morfizmleri grup homomorfizmi olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye grupların (abel grupların) kategorisi denir ve **Grp** (**AbGrp**) ile gösterilir.

(5) Objeleri tüm bağıntı uzayları (yansıma bağıntılı uzaylar), morfizmleri bağıntı koruyan morfizmler olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye tüm bağıntı (yansıma bağıntılı) uzayların kategorisi denir ve **Rel** (**RRel**) ile gösterilir.

(6) Objeleri tüm halkalar, morfizmleri halka homomorfizmi olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye tüm halkaların kategorisi denir ve **Ring** ile gösterilir.

(7) Objeleri tüm ön sıralama bağıntılı uzaylar, morfizmleri sıralama bağlantısı olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye ön sıralama bağıntılı uzayların kategorisi denir ve **Prord** ile gösterilir.

(8) Objeleri tüm aile uzayları, morfizmleri bu uzaylar üzerindeki fonksiyonlar olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye aile uzayları kategorisi denir ve **Fam** ile gösterilir.

(9) Objeleri tüm pre-bornolojik (bornolojik) uzaylar, morfizmleri bu uzay üzerindeki dönüşümler olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye pre-bornolojik (bornolojik) uzay kategorisi denir ve **PBorn (Born)** ile gösterilir.

(10) Objeleri tüm vektör uzaylar, morfizmleri lineer dönüşümler olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye vektör uzaylar kategorisi denir ve **Vect** ile gösterilir.

Tanım 2.1.3 ([17,18]) $\mathbf{C}$ bir kategori olsun. Verilen bir $\mathbf{D}$ kategorisi için eğer $\mathbf{D}$ nin obje ve morfizmleri $\mathbf{C}$ nin bazı obje ve morfizmlerinden oluşuyorsa ve $\mathbf{C}$ deki işlem $\mathbf{D}$ ye kısıtlandığında kategori olma şartlarını sağlıyorsa $\mathbf{D}$ kategorisine $\mathbf{C}$ nin *alt kategorisi* denir. Eğer objelerde kısıtlama olup morfizmlerde kısıtlama olmuyorsa $\mathbf{D}$ kategorisine $\mathbf{C}$ nin *dolgun (full) alt kategorisi* denir.

Örnek 2.1.4 (1) Her kategori kendisinin bir dolu alt kategorisidir.

(2) **Ring₁** birimli halkalar kategorisi **Ring** halkalar kategorisinin alt kategorisidir.

(3) **AbGrp** kategorisi **Grp** nin dolu alt kategorisidir.

Tanım 2.1.5 ([17,18]) $\mathbf{C}$ bir kategori olmak üzere,

(1) $I \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ olsun. Eğer herhangi bir $B \in \text{Ob}(\mathbf{C})$

$$\text{Mor}(I, B) = \{f \mid f: I \rightarrow B \text{ morfizm} \}$$

tek elemanlı ise I ya $\mathbf{C}$ kategorisinin *başlangıç (ilk, initial) objesi* denir.

(2) $T \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ olsun. Eğer $\mathbf{C}$ nin herhangi bir B objesi için

$$\text{Mor}(B, T) = \{f \mid f: B \rightarrow T \text{ morfizm} \}$$

tek elemanlı ise T ye $\mathbf{C}$ kategorisinin *bitiş (terminal, final, son) objesi* denir.

(3) $Z \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ olsun. Z hem başlangıç hem de bitiş objesi oluyorsa Z ye $\mathbf{C}$ nin *sıfır (zero) objesi* denir.

Örnek 2.1.6 Her kategorinin başlangıç, bitiş veya sıfır objesi olmak zorunda değildir. Eğer bu objeler varsa izomorfizme göre tektir. Bu düşünce altında bazı kategorilerdeki özel objeler şu şeklide verilebilir.

(1) **Set**, **Top**, **Fam** ve **Rel** kategorilerinde boş küme üzerindeki yapıyla birlikte başlangıç objesidir. Yani sırasıyla $\emptyset, (\emptyset, \{\emptyset, \{\}\})$, $(\emptyset, \emptyset)$, $(\emptyset, \emptyset^2)$ dir.

(2) **Grp** kategorisinin başlangıç objesi birim elemandan oluşan $\{e\}$ dir.

(3) **Ring** kategorisinde başlangıç objesi, tam sayılar kümesidir.

(4) **Set**, **Top**, **Fam**, **Grp**, **Met** kategorilerinde bitiş objesiler eşit olup üzerindeki yapı ile birlikte tek elemanlı kümeden ibarettir.

(5) **Grp** kategorisi bir sıfır objeye sahiptir ve birim elemandan oluşan $\{e\}$ dir.

2.2 Özel Obje ve Morfizmler

Bir kategorideki bazı özel morfizmleri tanımlamadan önce **Set** kategorisinde bilinen bir özelliği hatırlayalım.

Tanım 2.2.1 ([17]) Bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) f fonksiyonu birebirdir.

(2) Her f, g ve h fonksiyonu için $f \circ g = f \circ h$ ise $g = h$ dır, yani f fonksiyonların bileşkesine göre soldan sadeleştirir.

Tanım 2.2.2 ([17]) Bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) f fonksiyonu örtendir.

(2) Her f, g, h fonksiyonları için $g \circ f = h \circ f$ ise $g = h$ dır. f fonksiyonların bileşkesine göre sağdan sadeleştirir.

Önerme 2.2.3 $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(1) f birebir ve örten bir fonksiyon.

(2) $gof = 1_X$ ve $fog = 1_Y$ olacak şekilde $g: Y \rightarrow X$ fonksiyonu vardır.

Tanım 2.2.4 ([17]) (1) C bir kategori olsun. Bir $f: X \rightarrow Y$ morfizmi için $gof = 1_X$ ve $fog = 1_Y$ olacak şekilde bir $g: Y \rightarrow X$ morfizmi varsa f ye *izomorfizm* denir.

(2) $f: B \rightarrow C$ morfizmi için $fog = foh$ olacak şekilde C kategorisindeki her $g, h: A \rightarrow B$ morfizmleri için $g = h$ ise f ye bir *monomorfizm* (*monik*) denir.

(3) $f: A \rightarrow B$ morfizmi için $gof = hof$ olacak şekilde C kategorisindeki her $g, h: B \rightarrow C$ morfizmleri için $g = h$ ise f ye *epimorfizm* (*epik*) denir.

(4) f morfizmi hem monomorfizm hem de epimorfizm ise f ye *bimorfizm* denir.

Örnek 2.2.5 (1) Herhangi bir kategoride birim morfizm, izomorfizmdir.

(2) **Set** kategorisinde bir morfizm izomorfizmdir ancak ve ancak bu morfizm birebir ve örtendir.

(3) **Grp** kategorisinde bir morfizm izomorfizmdir ancak ve ancak bu morfizm grup izomorfizmasıdır.

(4) **Top** kategorisinde bir morfizm izomorfizmdir ancak ve ancak bu morfizm homeomorfizmdir

(5) **Set**, **Top** ve **Grp** kategorilerinde monomorfizmler birebir fonksiyonlardır.

(6) **Set**, **Top** ve **Grp** kategorilerinde epimorfizmler örten fonksiyonlardır.

(7) **Set** ve **Grp** kategorilerinde bimorfizm birebir ve örten fonksiyonlardır. Ancak **Top** kategorisinde bimorfizm izomorfizm olmak zorunda değildir.

2.3 Fanktor

Kabaca fanktorlar kategoriler arasındaki yapıyı koruyan dönüşümler olarak belirtilebilir. Genel olarak verilen iki kategori arasında birçok fanktor tanımlanabilir. Örneğin verilen bir $\mathbf{C}$ kategorisi için objeyi objeye ve morfizmi morfizme götüren $\mathbf{C}$ den $\mathbf{C}$ ye her zaman birim fanktor vardır. Aceba bu fanktorların birbirleriyle ilişkisi var mıdır? gibi sorular akla gelebilir.

Tanım 2.3.1 ([17,18]) $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ iki kategori ve $f: A \rightarrow B$ morfizm olsun. $\mathbf{C}$ nin her bir A objesini $\mathbf{D}$ nin bir $F(A)$ objesine, $\mathbf{C}$ nin her bir $f: A \rightarrow B$ morfizmini ise $\mathbf{D}$ nin $F(A) \rightarrow F(B)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ dönüşümüne bir fanktor denir.

(i) Her $f, g \in \text{Mor}(\mathbf{C})$ için,

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

(ii) Her $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ için $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dır.

$\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ iki kategori ve $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ bir fanktor olsun. Buna göre aşağıdaki tanımları verelim:

Tanım 2.3.2 ([17,18]) (1) Her $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ ve her $f \in \mathbf{C}(A, B)$ için $1_{\mathbf{C}}(A) = A$ ve $1_{\mathbf{C}}(f) = f$ şeklinde tanımlı $1_{\mathbf{C}}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ fanktoruna *birim fanktor* denir.

(2) Her $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ ve her $f: F(A) \rightarrow F(B)$ için $F(g) = f$ olacak şekilde en az bir $g: A \rightarrow B$ dönüşümü varsa F ye *dolgun (full) fanktor* denir.

(3) Eğer her $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ ve $f, g: A \rightarrow B$ dönüşümleri için $F(f) = F(g)$ olduğunda $f = g$ oluyor ise F ye *düzenli (faithfull) fanktor* denir.

(4) $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$, $U(X, \tau) = X$ dönüşümü bir fanktordur ve bu fanktora *unutkan fanktor* denir.

(5) A bir küme olmak üzere $F: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ dönüşümü A yı $(A, P(A))$ diskre topolojik uzayına götüren dönüşüm bir fanktordur ve bu fanktora *diskre fanktor* denir

(6) A bir küme olmak üzere $I: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ dönüşümü A yı $(A, \{\emptyset, A\})$ indiskre topolojik uzayına götüren dönüşüm bir faktordür ve bu fanktora *indiskre fanktor* denir.

(7) Eğer $GoF = I_C$ ve $FoG = I_D$ olacak şekilde bir $G: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ fonktoru varsa F ye bir *izomorfizm* denir. $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ kategorileri arasında bir izomorfizm varsa $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ ye *izomorfik kategoriler* denir ve $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$ ile gösterilir.

(8) Eğer $\mathbf{C}$ de ki her A objesi ve her $f: A \rightarrow A$ morfizmi için $F(f) = 1_{F(A)}$ ve f izomorfizm olduğunda $f = 1_A$ oluyorsa F ye *amnestik fanktor* denir.

(9) F hem düzenli hem de amnestik ise F ye *belirli (concrete) fanktor* denir.

(10) $\mathbf{D}$ kategorisinin her B nesnesi için $F^{-1}(B) = \{A \in Ob(\mathbf{C}) \mid F(A) = B\}$ bir küme ise F ye küçük demetlere sahip fanktor denir.

Örnek 2.3.3 $F: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ ve $G: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ unutkan fanktorları düzenli, amnestik ve belirli fanktordur.

2.4 Doğal Dönüşüm

Tanım 2.4.1 ([17]) $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ iki kategori ve $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ iki fanktor olsun. $\mathbf{C}$ nin her A objesini $\mathbf{D}$ nin bir $\mu_A: F(A) \rightarrow G(A)$ morfizmine dönüştüren $\mu: Ob(\mathbf{C}) \rightarrow Mor(\mathbf{D})$ dönüşümü verilsin. Eğer $\mathbf{C}$ nin her bir $f: A \rightarrow B$ morfizmi için

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\mu_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\mu_B} & G(B) \end{array}$$

Şekil 2.1. Doğal dönüşüm diyagramı.

diyagram değişmeli ise yani $G(f) \circ \mu_A = \mu_B \circ F(f)$ oluyorsa μ ye bir *doğal dönüşüm* denir ve $\mu: F \rightarrow G$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.2 ([17]) $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ iki kategori olsun.

(1) $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ fanktorları verilsin. Bir $\mu: F \rightarrow G$ doğal dönüşümünde her bir $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ için bir $\mu_A: F(A) \rightarrow G(A)$, $\mathbf{D}$ de bir izomorfizm ise μ ye bir *doğal izomorfizm*, F ve G ye *doğal olarak denktir* denir ve $F \cong G$ ile gösterilir.

(2) $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ fanktorları için $F \cong G$ ancak ve ancak $\varphi \circ \omega = 1_F$ ve $\omega \circ \varphi = 1_G$ olacak şekilde $\omega: F \rightarrow G$ ve $\varphi: G \rightarrow F$ doğal dönüşümleri vardır.

(3) $mF: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}, G: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ iki fanktor olsun. Eğer aşağıda ki şartlar sağlanırsa F ye G nin *sol adjointi* veya G ye F nin *sağ adjointi* denir.

(i) $\mu: I \rightarrow G \circ F$ ve $F \circ G \rightarrow I$ doğal dönüşümler olmalıdır.

(ii) $(\varepsilon G) \circ (G \mu) = I$ ve $(F \varepsilon) \circ (\mu F) = I$ eşitlikleri sağlanmalıdır.

Tanım 2.4.3 ([17]) (1) $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ topolojik fanktoru bir $G: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ sol adjointine sahiptir ki bu sol adjointe diskre fanktor denir. Yani $C = G(F(C))$ objesi $\mathbf{C}$ de diskre obje olarak adlandırılır.

(2) $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ topolojik fanktoru bir $G^*: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ sağ adjointine sahiptir. Bu sağ adjointe *indiskre fanktor* denir. Yani $C = G^*(F(C))$ objesi $\mathbf{C}$ de *indiskre obje* olarak adlandırılır.

Bir $\mathbf{C}$ kategorisindeki X ve Y şeklindeki iki objenin çarpımı X ve Y nin çarpımı demek değildir. Asıl olan evrensel özellik ile beraber çarpımın tek bir izomorfizm ile kaldırılabilir olmasıdır. Böylece kategori teorisinde bazı yapıları oluşturan elemanların özellikleri önemli değildir. Önemli olan bir objenin diğer objelerle, diğer yapılarla veya diğer dönüşümlerle olan bağlantısıdır.

Örnek 2.4.4 (1) $\mathbf{Top}$ ve $\mathbf{Set}$ kategorileri verilsin. $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ unutkan ve $D: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ diskre fanktorları için D ye U nun sol adjointi veya U ya da D nin sağ adjointi denir.

(2) $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ unutkan fanktoru $D: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ diskre fanktoru ve $ID: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ indiskre fanktoru olsun. U nun sağ adjointi ID , indiskre fanktoru ve sol adjointi D diskre fanktorudur.

(3) **T2Top** ve **Top** kategorileri verilsin. $U: \mathbf{T2Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ Hausdorffluk şartını unutan fanktor ve $F: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{T2Top}$ diskre fanktorlar için F ye U nun sol adjointi veya U ya da F nin sağ adjointi denir.

Tanım 2.4.5 ([17]) $\mathbf{C}$ bir kategori, I bir indis kümesi ve $\{A_i\}_{i \in I}$ de $\mathbf{C}$ nin objelerin sınıfı olsun. Bir $P \in Ob(\mathbf{C})$ objesi ve her $i \in I$ için $p_i: P \rightarrow A_i$ morfizmleri için $X \in Ob(\mathbf{C})$ objesi ve her $i \in I$ için $f_i: X \rightarrow A_i$ morfizmleri verildiğinde $p_i \circ \varphi = f_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi: X \rightarrow P$ varsa $(P, \{p_i\}_{i \in I})$ ikilisine $\{A_i\}_{i \in I}$ objelerinin *çarpımı* (*product*) denir.

Örnek 2.4.6 **Set** kategorisinde iki objenin çarpımı bilinen anlamda kartezyen çarpımdır. **Grp** kategorisinde iki objenin çarpımı direkt çarpımdır. **Top** kategorisinde iki objenin çarpımı çarpım uzaydır.

Tanım 2.4.7 ([17]) $\mathbf{C}$ bir kategori, I bir küme ve $\{A_i\}_{i \in I}$ ise $\mathbf{C}$ objelerin sınıfı olsun. Bir $C \in Ob(\mathbf{C})$ objesi ve her $i \in I$ için $c_i: A_i \rightarrow C$ morfizmleri için $X \in Ob(\mathbf{C})$ objesi ve her $i \in I$ için $f_i: A_i \rightarrow X$ morfizmleri verildiğinde $\varphi \circ c_i = f_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi: C \rightarrow X$ varsa $(C, \{c_i\}_{i \in I})$ ikilisine $\{A_i\}_{i \in I}$ objelerinin *dual çarpımı* (*coproduct*) denir.

2.5 Topolojik Fanktor ve Örnekler

Tanım 2.5.1 ([17]) $\mathbf{C}$ bir kategori ve $B, B_i \in Ob(\mathbf{C}), i \in I$ olsun.

$f_i: B \rightarrow B_i, i \in I$ dönüşümler ailesine *kaynak* (*source*) denir.

$f_i: B_i \rightarrow B, i \in I$ dönüşümler ailesine *kavşak* (*sink*) denir.

Tanım 2.5.2 ([17]) $\mathbf{C}$ kategorisinde $i \in I$ için $f_i: B \rightarrow B_i$ ailesi bir kaynak olsun.

Her $A \in Ob(\mathbf{C})$ ve her $g, h: A \rightarrow B$ morfizm çifti $i \in I$ için $f_i \circ g = f_i \circ h$ olduğundan $g = h$ ise $f_i: B \rightarrow B_i$ kaynağına *mono-kaynak* (*mono-source*) denir.

$\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ iki kategori $U: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ bir fanktor olsun.

Tanım 2.5.3 ([17]) $\{A_i, i \in I\}$ sınıfı $\mathbf{C}$ nin objeleri, $D \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ ve $i \in I$ için $f_i: D \rightarrow U(A_i)$ ailesi $\mathbf{D}$ de U -kaynağı olsun. $f_i: D \rightarrow U(A_i)$ ailesinin bir başlangıç kaldırması (*initial lift*) $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ objesi ve $U(g_i) = f_i$ ve $U(A) = D$ olacak şekilde $g_i: A \rightarrow A_i, i \in I$, $\mathbf{C}$ de dönüşümler ailesidir ve aşağıdaki şartı sağlamalıdır.

Eğer her $C \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ ve $\mathbf{C}$ de ki her $h_i: C \rightarrow A_i, i \in I$ dönüşümlerin bir ailesi ve her $i \in I$ için $f_i \circ h = U(h_i)$ olacak şekilde bir $h: U(C) \rightarrow D$ dönüşümü varsa her $i \in I$ için $g_i \circ h = h_i$ olacak şekilde en az bir $k: C \rightarrow A$ dönüşümü vardır ve $U(k) = h$ dir.

Tanım 2.5.4 ([17]) $\{A_i, i \in I\}$, $\mathbf{C}$ nin objeleri, $D \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ ve $f_i: U(A_i) \rightarrow D, i \in I$, ailesi $\mathbf{D}$ de U -kavşağı olsun. $i \in I$ için $f_i: U(A_i) \rightarrow D$ ailesinin bir *bitiş kaldırması* (*final lift*), $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ nesnesi $U(g_i) = f_i$ ve $U(A) = D$ olacak şekilde $g_i: A_i \rightarrow A, i \in I$, $\mathbf{C}$ de dönüşümler ailesidir ve aşağıdaki şartı sağlamalıdır.

Eğer her $C \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ ve $\mathbf{C}$ deki her $h_i: A_i \rightarrow C, i \in I$ dönüşümlerin bir ailesi ve her $i \in I$ için $h \circ f_i = U(h_i)$ olacak şekilde bir $h: D \rightarrow U(C)$ dönüşümü varsa her $i \in I$ için $h \circ g_i = h_i$ olacak şekilde en az bir $k: A \rightarrow C$ dönüşümü vardır ve $U(k) = h$ dir.

Örnek 2.5.5 Top da başlangıç kaldırma başlangıç topolojisini, *bitiş kaldırma* ise *bitiş topolojisini* verir.

Tanım 2.5.6 ([17]) $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ iki kategori ve $U: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ bir fanktor olsun. Eğer U fanktoru aşağıdaki şartları sağlıyorsa U ya topolojik fanktor veya $\mathbf{C}$ ye $\mathbf{D}$ üzerinde *topolojik kategori* denir.

(i) U belirlidir,

(ii) U küçük demetlere sahiptir, yani $\mathbf{D}$ kategorisinin her D objesi için $U^{-1}(D) = \{A \in \text{Ob}(\mathbf{C}) \mid U(A) = D\}$ bir kümedir,

(iii) $\{A_i, i \in I\}$, $\mathbf{C}$ nin objeleri ve $D \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ için $\mathbf{D}$ deki her $f_i: D \rightarrow U(A_i), i \in I$, U -kaynağı $\mathbf{C}$ de bir başlangıç kaldırmaya sahiptir veya bu ifadeye denk olarak $\mathbf{D}$ deki her $f_i: U(A_i) \rightarrow D, i \in I$ U -kavşağı $\mathbf{C}$ de bir *bitiş kaldırma*ya sahiptir.

Teorem 2.5.7 ([17]) $\mathbf{D}$ kategorisi keyfi çarpımlara ve $U: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ fanktoru belirli ve küçük demetlere sahip olsun. $\mathbf{C}$ kategorisi $\mathbf{D}$ üzerinde topolojik kategoridir ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanır.

- (i) $\mathbf{C}$ kategorisi keyfi çarpanlara ve alt uzaylara sahiptir,
- (ii) $\mathbf{C}$ kategorisi indiske objelere sahiptir.

Örnek 2.5.8 (1) $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ unutkan fanktoru topolojik kategoridir.

(2) $U: \mathbf{Met} \rightarrow \mathbf{Set}$ ve $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ unutkan fanktorları topolojik kategori değildirler çünkü $\mathbf{Met}$ de keyfi sayıda ki (sonsuz) metrik uzayların çarpımı metrik uzay değildir. $\mathbf{Grp}$ da ise bir grubun alt kümesi alt grup değildir.

Not: $U: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ topolojik fanktorunda her $B \in \mathbf{D}$ sabiti için $U^{-1}(B)$ tek bir yapıya sahip ise bu taktir de U ya *normalleştirilmiş* denir. B sabittir ancak ve ancak B bitiş objesinin bir alt objesidir.

Örneğin $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$, topolojik kategorisinde $\{x\}$ tek nokta kümesi $\mathbf{Set}$ de bitiş obje olduğundan $U^{-1}(\emptyset)$ ve $U^{-1}(\{x\})$ nin tek bir topolojiye sahip olması demek U nun normalleştirilmiş olduğunu gösterir.

Tanım 2.5.9 ([17]) $\mathbf{C}$ kategorisi $\mathbf{D}$ üzerinde topolojik kategori ve $A \in Ob(\mathbf{C})$ olsun.

(1) Her $X \in Ob(\mathbf{C})$ için $\mathbf{D}$ deki her $U(X) \rightarrow U(A)$ morfizmi $\mathbf{C}$ de $X \rightarrow A$ morfizmine kaldırılıyorsa A ya *indiske obje* denir.

(2) Eğer her $X \in Ob(\mathbf{C})$ için $\mathbf{D}$ deki her $U(A) \rightarrow U(X)$ morfizmi $\mathbf{C}$ kategorisinde $A \rightarrow X$ morfizmine kaldırılıyorsa A ya *diskre obje* denir.

Teorem 2.5.10 $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş topolojik fanktordur.

İspat : (i) U nun belirli olduğunu gösterelim.

$f, g: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ sürekli iki fonksiyon ve $U(f) = U(g)$ olsun. $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ unutkan fanktor olduğundan $U(f) = f$ ve $U(g) = g$ dir. Böylece $f = g$ olur. Dolayısıyla U fanktoru düzenlidir.

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ sürekli $U(f) = 1_X$ ve f homomorfizm olsun. $U(f) = f = 1_X$ olduğundan $X = Y$ dir. Dolayısıyla $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ olur. Bu durumda $\tau = \sigma$ olduğunu göstermeliyiz. f sürekli olduğundan $f^{-1}(\sigma) \subset \tau$ dur. $f \circ f^{-1}(\sigma) \subset f(\tau)$ dan $\sigma \subset f(\tau)$ olur. $f = I$ idi böylece $\sigma \subset \tau$ dur.

$g: (X, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ olsun. g sürekli olduğundan $g^{-1}(\tau) \subset \sigma$ dur. $g \circ g^{-1}(\tau) \subset g \sigma$ dan $\tau \subset g \sigma$ olur. $f^{-1} = g = I$ idi öyleyse $\tau \subset \sigma$ dır. Böylece $\tau = \sigma$ dır yani U amnestiktir. O halde U hem düzenli hem de amnestik olduğundan belirlidir.

(ii) $U^{-1}(X) = \{(X, \tau) | U(X, \tau) = X, \tau \subset P(X)\}$, $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_1)$ süreklidir ve $U(f) = 1_X: X \rightarrow X$ ise her $X \in \mathbf{Set}$ için $U^{-1}(X)$ in bir küme olduğunu göstereceğiz. $U^{-1}(X)$, **Top** un bir alt kategorisidir.

Öte yandan $\phi = \{\tau | \tau, X \text{ in bir topolojisi}\}$ olsun. $\theta: U^{-1}(X) \rightarrow \phi$ alalım. $\theta(X, \tau) = \tau$ şeklinde tanımlanırsa kolayca görülür ki θ birebir ve örtendir. Dolayısıyla $U^{-1}(X) \approx \phi \subset P^2(X)$ dir yani $U^{-1}(X)$ bir kümedir.

(iii) Eğer $\{f_i: X \rightarrow U(X_i, \tau_i) = X_i, i \in I\}$, **Set** de herhangi bir U -kaynağı ve τ_* üretilen topoloji olsun. $f_i: (X, \tau) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ sürekli fonksiyonlar ailesi olsun. $\tau = \tau_*$ olması için gerek ve yeter şart (Y, σ) topolojik uzayı ve sürekli $g_i: (Y, \sigma) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ fonksiyonlar ailesi için eğer $g_i = f_i \circ h$ olacak şekilde en az bir $h: Y \rightarrow X$ fonksiyonu varsa h süreklidir. Bu önermeden dolayı $f_i: (X, \tau_*) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ verilen kaynağın başlangıç kaldırmasıdır. Yine $\{f_i: U(X_i, \tau_i) = X_i \rightarrow X, i \in I\}$ sınıfı, **Set** de herhangi bir U kavşağı ve τ^* zayıf (coinduced) topoloji olsun. $f_i: (X_i, \tau_i) \rightarrow (X, \tau^*)$ verilen kavşağın bitiş kaldırmasıdır.

Set de son obje tek nokta kümesi olduğundan, **Set** üzerindeki **Top** kategorisinin normalleştirilmiş olup olmadığını anlamak için $U^{-1}(\{a\}) = (\{a\}, \{\{a\}, \emptyset\})$ uzayı ve $U^{-1}(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$ tek bir yapı oluşturduğundan $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş bir topolojik fanktordur, **Top** ise normalleştirilmiş bir topolojik kategoridir.

Örnek 2.5.11 A bir küme ve $B \subset A$ olsun. $f: (A_1, B_1) \rightarrow (A_2, B_2)$ dönüşümü $f: A_1 \rightarrow A_2$ fonksiyon olmak üzere $f(B_1) \subset B_2$ şeklinde tanımlanan (A, B) ye

çiftler uzayı denir. Objeleri çiftler uzayı ve morfizmleri yukarıdaki gibi tanımlanan fonksiyonlardan oluşan yapıya çiftler kategorisi denir ve **CP** ile gösterilir.

$U: \mathbf{CP} \rightarrow \mathbf{Set}$ fanktoru normalleştirilmiştir



3. SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLAR

3.1 Süzgeçler

Süzgeç kavramı ilk kez 1937 de Cartan [1] tarafından ve 1954 yılında Kowalsky [19] tarafından da süzgecin yakınsaklığı tanımı verilmiştir. Süzgeçler fonksiyonel analizde yakınsaklığı tanımlama da araştırmacılara önemli bir yol göstermiştir. Bilgisayar bilimleri ve mühendislik uygulamaları gibi alanların çalışılmasında da önemli bir rol oynamıştır.

Süzgeçler uzayda noktalara ya da yerlere yön veren cebirsel bir harita gibidir. Daha doğrusu kısmi sıralı bir kümenin alt kümesi olarak da düşünülebilir.

Tanım 3.1.1 X boş olmayan bir küme ve $P(X)$, X in kuvvet kümesi olsun. $F \subset P(X)$ olsun. Eğer F aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa F ye X üzerinde bir *süzgeçtir* denir.

(i) $\emptyset \notin F$,

(ii) Her $U, V \in F$ için $U \cap V \in F$,

(iii) Her $U \in F$ için $U \subseteq V$ ise $V \in F$.

(i) ve (ii) özelliklerinden F süzgecine ait sonlu sayıda kümelerin arakesitinin boş olamayacağı ve (iii) özelliğinden F süzgecine ait keyfi sayıdaki kümelerin birleşiminin yine F süzgecine ait olduğu anlaşılır.

Tanım 3.1.2 $X \neq \emptyset$ ve F , X kümesi üzerinde bir süzgeç olsun. O halde

(1) Eğer $\emptyset \in F$ ise $F = P(X)$ ye *öz olmayan (improper) süzgeç* denir.

(2) $\emptyset \notin F$ ise F ye *öz (proper) süzgeç* denir.

(3) $U \in F$ ve $U \subset X$ olduğundan $X \in F$ tir.

(4) $U_i \in F, i \in I$ olsun. $U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ ve $U_i \in F$ olduğundan $\bigcup_{i \in I} U_i \in F$ tir.

(5) $F = \{x\}$ ise F ye *aşıkaz süzgeç* denir.

(6) $F = \{U \subseteq X : U^c \text{ sonlu}\}$ ise F ye *Frechet süzgeci* denir. Eğer X sonsuz ise Frechet süzgeci öz süzgeçtir. X sonlu ise öz olmayan süzgeçtir.

Örnek 3.1.3 (1) $X = \{a\}$, $P(X) = \{\emptyset, \{a\}\}$ kümesi verilsin. $F \subset P(X)$ in bir süzgeç olup olmadığını araştıralım.

$F = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{X\}, P(X)\}$ tir ancak süzgeç tanımından dolayı $F = \emptyset$ olamaz.

$F = \{X\}$ ise F süzgeci bir öz süzgeç olur.

$F = P(X)$ ise F süzgeci öz olmayan süzgeç olur.

(2) $X = \{a, b\}$ olsun. X üzerindeki süzgeçleri bulalım. $P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ dir. $F \subset P(X)$ için F , $2^4 = 16$ tane farklı kümeden oluşabilir. Bu kümelerden sadece üç tanesi süzgeçtir. Bunlar $F_1 = \{X\}$, $F_2 = \{\{a\}, X\}$, $F_3 = \{\{b\}, X\}$ dir.

(3) $X = \{a, b, c\}$ kümesi verilsin. Bu durumda X üzerindeki bazı süzgeçler;

$$F_1 = \{X\} = [X]$$

$$F_2 = \{\{a, b\}, X\} = [\{a, b\}],$$

$$F_3 = \{\{a, c\}, X\} = [\{a, c\}],$$

$$F_4 = \{\{b, c\}, X\} = [\{b, c\}],$$

$$F_5 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a\}, X\} = [a],$$

$$F_6 = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, X\} = [b],$$

$$F_7 = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, X\} = [c],$$

$$F_8 = P(X) = [\emptyset] \text{ şeklindedir.}$$

Fakat X üzerindeki süzgeç olmayan yapılardan bazıları aşağıdadır.

$$F_9 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a\}, X\},$$

$$F_{10} = \{\{b, c\}, \{a, c\}, \{a\}, \{c\}, X\}.$$

Tanım 3.1.4 Bir X kümesi üzerinde F ve G süzgeçleri verilmiş olsun. $F \subseteq G$ ise F süzgeci G süzgecinden daha kabadır ya da G süzgeci F süzgecinden daha incedir denir.

Örnek 3.1.5 X boş olmayan bir küme ve A , X in boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$F = [A] = \{U \subseteq X \mid A \subseteq U\}$ kümesi X üzerinde bir süzgeçtir.

(i) $\emptyset \notin F$ tir.

(ii) Her $U, V \in F$ olsun.

$A \subseteq U$ ve $A \subseteq V$ ise $A \subseteq U \cap V$ dir. Buradan $U \cap V \in F$ dir.

(iii) $U \in F$ ve $U \subseteq V$ olsun.

$A \subseteq U \subseteq V$ ise $A \subseteq V$ dir. Buradan $V \in F$ tir.

Örnek 3.1.6 X boştan farklı bir küme olmak üzere $a \in X$ için N_a sınıfı süzgeçtir. Bu süzgece a nın komşuluklarının süzgeci denir. Fakat a nın açık komşuluklarının sınıfı süzgeç değildir. Burada

$$N_a = \{U \subseteq X \mid \text{en az bir } V \in \tau \text{ ve } a \in V \subset U\} \subset P(X)$$

Tanım 3.1.7 X boş olmayan bir küme ve $B_k = \{x_n \mid n \geq k\} = \{x_k, x_{k+1}, \dots\}$ X de bir dizi olsun. $F = \{U \mid \text{en az bir } k \in N \text{ için vardır öyle ki } B_k \subset U\}$ kümesi bir süzgeçtir. Bu süzgece (x_n) dizisi tarafından *doğrulan (üretilen) süzgeç* denir.

(i) (x_n) , X kümesinde bir dizi olduğundan en az bir $k \in N$ için $U = X$ dir. Böylece $\emptyset \notin F$ tir.

(ii) Her $U, V \in F$ için $U \cap V \in F$ olduğunu gösterelim. $U \in F$ ise en az bir $k \in N$ için $B_k \subset U$ vardır.

$V \in F$ ise en az bir $l \in N$ için $B_l \subset V$ vardır. $\text{Maks}\{k, l\} = t$ olsun. $B_t = U \cap V$ olup $U \cap V \in F$ tir.

(iii) $U \in F$ ise $U \subset V$ için $V \in F$ olduğunu gösterelim. $U \in F$ ise en az bir $k \in N$ için $B_k \subset U$ vardır. $U \subset V$ olduğundan dolayı $B_k \subset V$ olur. Böylece $V \in F$ tir.

Tanım 3.1.8 X boş olmayan bir küme, F ve G X üzerinde iki süzgeç ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun. Bu durumda süzgeçler için sonraki bölümlerde kullanılmak üzere aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz. Bu eşitlikte bulunan her bir ifade birer süzgeçtir.

- (1) $F \cap G = \{U \subset X: U \in F \text{ ve } U \in G\}$ dir.
- (2) $F \cup G = \{U: \text{en az } V \in F \text{ ve } \exists W \in G \ni U \supset V \cap W\}$ dir.
- (3) $f(F) = \{U: U \subset Y \text{ ve en az } V \in F \text{ ise } f(V) \subset U\}$ dir.
- (4) $f^{-1}(F) = \{V: \text{en az } V \in F \text{ ise } f(V) \subset U\}$ dir.

Tanım 3.1.9 (X, τ) topolojik uzay F , X üzerinde bir süzgeç, N_x komşuluklar süzgeci ve $x \in X$ olsun.

- (1) $F \supset N_x$ ise F , x noktasına *yakınsaktır* denir ve $F \rightarrow x$ şeklinde gösterilir.
- (2) $F \subset N_x$ öz süzgeç ise x noktasına F süzgecinin *kapanış noktası* denir.

Teorem 3.1.10 (1) (X, τ) uzayı Hausdorff tur ancak ve ancak (X, τ) da ki yakınsak her öz süzgecin limiti tektir.

(2) (X, τ) topolojik uzay $A \subseteq X$ olsun. $x \in \bar{A}$ ancak ve ancak A da x noktasında yakınsak F süzgeci vardır.

Teorem 3.1.11 X ve Y topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun $x \in X$ için f fonksiyonu x de süreklidir ancak ve ancak x noktasına yakınsayan her bir F süzgeci $F \rightarrow x$ ise $f(F) \rightarrow f(x)$ tir.

Tanım 3.1.12 X bir küme $\beta \subseteq P(X)$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlıyorsa β ya *süzgeç tabanı* denir.

- (i) $\emptyset \notin \beta$ ve $\beta \neq \emptyset$

(ii) Her $B_1, B_2 \in \beta$ için $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde $B_3 \in \beta$ vardır. Yani β ya ait herhangi iki kümenin kesişimi β ya ait bir kümeyi kapsar.

Tanım 3.1.13 X boş olmayan bir küme ve $\beta \neq \emptyset$ için $\beta \subset P(X)$ süzgeç bazı olsun. $F = \{U \subset X: \text{en az bir } B \in \beta \text{ vardır öyle ki } B \subset U\}$ bir süzgeçtir ve bu süzgece β tarafından üretilen süzgeç denir.

Tanım 3.1.14 F, X üzerinde en büyük öz süzgeç ise F ye *maksimum süzgeç (ultrafilter)* denir ve F aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

Eğer her $A \subset X$ için ya $A \in F$ ya da $A^c \in F$ tir.

3.2 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar

Tanım 3.2.1 ([16]) B bir küme $F(B)$ ise B üzerindeki tüm süzgeçlerin sınıfı ve $K: B \rightarrow P(F(B))$ dönüşümü, B in a noktasına yakınsayan ve boş kümeden farklı tüm süzgeçlerin kümesi K olacak şekilde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Eğer K aşağıdaki şartları sağlıyorsa (B, K) ya *yakınsak süzgeç uzay (filter convergence space)* denir.

(i) Her $a \in B$ için $[a] \in K(a)$ dir, burada $[a] = \{Y \subset B \mid a \in Y\}$ dir,

(ii) F, B kümesi üzerinde iki süzgeç ve $F \subset G$ olsun. Eğer $F \in K(a)$ ise $G \in K(a)$ dir.

Örnek 3.2.2 $B = \{a\}$ olsun. $P(B) = \{\{a\}, \emptyset\}$ dir. $[a] = \{\{a\}\}$, $[\emptyset] = \{\{a\}, \emptyset\}$ dir ve $F(B) = \{[a], [\emptyset]\}$ dir. Bu durumda B üzerinde 1 tane yakınsak süzgeç yapısı vardır. $K(a) = \{[a], [\emptyset]\}$ dir ve (i) ve (ii) şartları sağlanır (B, K) süzgeç yakınsak uzayıdır.

Örnek 3.2.3 $B = \{a, b\}$ ve $a \neq b$ olsun. $P(B) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$ dir.

$[a] = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, $[b] = \{\{b\}, \{a, b\}\}$, $[\{a, b\}] = \{\{a, b\}\}$, $[\emptyset] = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$

Buna göre B üzerindeki tüm süzgeçlerin kümesi, $F(B) = \{[a], [b], [\{a, b\}], [\emptyset]\}$ dir.

Aşağıdaki yapılar B üzerindeki yakınsak süzgeç yapılarıdır.

1. $L(a) = \{[a], [\emptyset]\}, L(b) = \{[b], [\emptyset]\}$ diskre yakınsak süzgeç yapısı,
2. $L(a) = \{[a], [\emptyset]\}, L(b) = F(B)$,
3. $L(a) = F(B), L(b) = \{[\emptyset], [b]\}$,
4. $L(a) = \{[a], [\emptyset], [b]\}, L(b) = \{[a], [\emptyset], [b]\}$,
5. $L(a) = \{[a], [\emptyset], [b]\}, L(b) = F(B)$,
6. $L(a) = \{[a], [\emptyset], [b]\}, L(b) = \{[\emptyset], [b]\}$,
7. $L(a) = F(B), L(b) = \{[\emptyset], [a], [b]\}$,
8. $L(a) = \{[a], [\emptyset]\}, L(b) = \{[a], [\emptyset], [b]\}$,
9. $L(a) = F(B), L(b) = F(B)$ indiskre yakınsak süzgeç yapısıdır.

(X, K) dan (Y, L) ye bir f dönüşümü $f: X \rightarrow Y$ fonksiyondur ve her $a \in X$ için $F \in K(a)$ ise $f(F) \in L(f(a))$ ise f süreklidir.

$[f(F)] = \{U: U \subset Y \text{ ve } \exists Z \in F \text{ için } U \supset f(Z)\}$ şeklinde tanımlanır.

Objeleri yakınsak süzgeç uzaylar ve morfizmleri yukarıda tanımlanan sınıfa *yakınsak süzgeç uzaylar kategorisi* denir ve **FCO** ile gösterilir.

Tanım 3.2.4 ([16]) **(1)** (X, K) yakınsak süzgeç uzay olsun. Eğer K sabit ise (X, K) ya *sabit süzgeç yakınsak uzay (constant filter convergence space)* denir. (X, K) ve (Y, L) sabit süzgeç yakınsak uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun. $F \in K$ olduğunda $f(F) \in L$ ise f dönüşümüne süreklidir denir. Objeleri sabit süzgeç yakınsak uzaylar, morfizmleri $[f(F)] = \{U: U \subset Y \text{ ve en az bir } Z \in F \text{ için } U \supset f(Z)\}$ şeklinde tanımlanan sınıfa *sabit yakınsak süzgeç uzaylar kategorisi* denir ve **ConFCO** ile gösterilir.

(2) B bir küme (B_i, K_i) sabit süzgeç yakınsak uzayların bir ailesi ve $\{f_i: B \rightarrow B_i: i \in I\}$ sınıfı **Set** de bir kaynak olsun. $\{f_i: B \rightarrow (B_i, K_i): i \in I\}$ sınıfı **ConFCO** da bir başlangıç kaldırmasıdır ancak ve ancak her $i \in I$ için $\alpha \in K$ olduğundan $f_i(\alpha) \in K_i$ dir.

(3) B bir küme (B_i, K_i) sabit süzgeç yakınsak uzayların bir ailesi ve $\{f_i: B_i \rightarrow B: i \in I\}$ sınıfı **Set** de bir kavşak olsun. $\{f_i: (B_i, K_i) \rightarrow B: i \in I\}$ sınıfı **ConFCO** da bir final kaldırmasıdır ancak ve ancak $\alpha \in K$ ise $f_i(\beta_i) = \alpha$ olacak şekilde en az bir $i \in I$ ve $\beta_i \in K_i$ vardır.

Tanım 3.2.5 (1) $\{(B, L): i \in I\}$ sabit yakınsak süzgeç uzayların bir sınıfı, $B = \prod_{i \in I} B_i$ B_i kümelerinin kartezyen çarpımı olsun. B üzerindeki çarpımsal sabit yakınsak süzgeç uzay yapı tüm $\pi_i: (\prod_{i \in I} B_i, L) \rightarrow (B_i, L_i)$ izdüşüm fonksiyonlarını sürekli yapan her $x \in B$ ve $L = \{\alpha \in F(B) : \text{her } i \in I \text{ için } \pi_i(\alpha) \in L_i\}$ şeklinde tanımlı yapıdır. (B, L) sabit yakınsak süzgeç uzayına ise çarpım uzayı denir.

(2) (B, L) bir sabit yakınsak süzgeç uzayı, $M \subset B$ ve $i: M \rightarrow B$ alt küme fonksiyonu olsun. M üzerindeki sabit yakınsak süzgeç uzay yapı $L_M = \{\alpha \in F(M): i(\alpha) \in L\}$ dır ve (M, L_M) ye (B, L) uzayının bir alt uzayı denir.

Teorem 3.2.5 Her topolojik uzay sabit süzgeç yakınsak uzayıdır.

İspat: Kabul edelim ki (B, τ) topolojik uzay ve $x \in B$ için $L = \{\alpha \in F(B) \mid \alpha \supset N_x\}$ olsun. Şimdi (B, L) nin sabit süzgeç yakınsak uzayı olduğunu gösterelim.

(i) Her $x \in B$ için $[x] \in L$ olduğunu, yani $[x] \supset N_x$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $U \in N_x$ olsun. Bu durumda en az bir $V \in \tau$ vardır öyle ki $x \in V \subset U$ olur. Buradan $x \in U$ olur ki $U \in [x]$ dir. Sonuç olarak $[x] \in L$ dir..

(ii) Kabul edelim ki $\alpha \in L$ ve $\alpha \subset \beta$ olsun. $\beta \in L$ olduğunu gösterelim. $\alpha \supset N_x$ ve $\beta \supset \alpha \supset N_x$ den $\beta \supset N_x$ ve $\beta \in L$ olur.

Teorem 3.2.6 Her metrik uzay sabit süzgeç yakınsak uzayıdır.

İspat: $B \neq \emptyset$ bir küme ve (B, d) de bir metrik uzay olsun. $D_\varepsilon = \{(x, y) \mid d(x, y) < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ ve $\delta = \{U \subset B \mid \text{en az bir } \varepsilon > 0 \text{ için } D_\varepsilon \subset U\}$ olsun. Bu takdirde $L^d = \{\beta \in F(B) \mid \beta \supset \delta\}$ sınıfı B üzerinde bir sabit süzgeç yakınsak uzayı yapısıdır.

(i) Kabul edelim ki $U \in \delta$ olsun. Bu takdirde en az bir $\varepsilon > 0$ için $D_\varepsilon \subset U$ dir. Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in B$ için $d(x, x) = 0 < \varepsilon$ olduğundan $(x, x) \in D_\varepsilon$ dir. $(x, x) \in D_\varepsilon$ ve $D_\varepsilon \subset U$ olduğundan $(x, x) \in U$ ve dolayısıyla $U \in [x]$ dir. Buradan her $x \in B$ için $\delta \subset [x]$ ve sonuç olarak $[x] \in L^d$ dir.

(ii) Kabul edelim ki $\alpha \in L^d$ ve $\alpha \subset \beta$ olsun. $\beta \in L^d$ olduğunu gösterelim $\alpha \in L^d$ ise $\delta \subset \alpha$ dır. $\alpha \subset \beta$ olduğundan $\delta \subset \alpha \subset \beta$ dır. Buradan $\delta \subset \beta$ ve $\beta \in L^d$ olduğu görülür.

3.3 ConFCO Topolojik Kategorisi ve Özellikleri

Teorem 3.3.1 $U: \mathbf{ConFCO} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş topolojik fanktordur.

İspat: Her $(B, K) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ConFCO})$ için $U((B, K)) = B$ ve her $f: (B, K) \rightarrow (C, L)$ için $U(f) = f$ dir. Burada f sürekli dönüşümdür. **ConFCO** nun topolojik kategori olduğunu göstermek için Teorem 2.5.7 nin şartlarını sağlattığını göstermek yeterlidir.

(i) $U: \mathbf{ConFCO} \rightarrow \mathbf{Set}$ belirli olduğunu göstereceğiz.

Kabul edelim ki $f, g: (B, K) \rightarrow (C, L)$ sürekli dönüşümler ve $U(f) = U(g)$ olsun.

$U(f) = f$ ve $U(g) = g$ olduğu için $f = g$ olur. Böylece U düzenli (faithfull) olur. Diğer taraftan $f: (B, K) \rightarrow (B, L)$ izomorfizm, $U(f) = 1_B$ birim dönüşüm ve $\alpha \in K$ olsun. f sürekli olduğundan

$$\alpha = 1_B(\alpha) = f(\alpha) \in L$$

ve böylece $K \subset L$ olur.

$\alpha \in L$ olsun. Bu durumda f^{-1} sürekli olduğu için

$$\alpha = 1_B(\alpha) = f^{-1}(\alpha) \in K$$

Ve böylece $L \subset K$ olur.

Dolayısıyla $K = L$ dir. Bu ise U nun amnestik olduğunu gösterir.

U hem düzenli hem amnestik olduğu için belirlidir.

(ii) U nun küçük demetlere sahip olduğunu gösterelim. Yani her B kümesinde $U^{-1}(B)$

küme olduğunu gösterelim.

Burada dikkat edelim ki

$$U^{-1}(B) = \{(B, K): U((B, K)) = B\}.$$

$\sigma = \{K: K, B \text{ üzerindeki sabit süzgeç yakınsak yapı} \} \subset P(P(B))$ olsun. Burada

$$f: U^{-1}(B) \rightarrow \sigma$$

$$(B, K) \rightarrow f((B, K)) = K$$

olacak şekilde bir fonksiyon tanımlayalım. Bu fonksiyon birebir ve örtendir. Dolayısıyla f bir izomorfizmdir. Bu ise $U^{-1}(B)$ nin küme olduğunu gösterir.

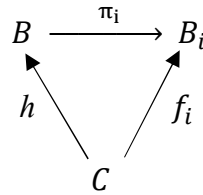
(iii) **ConFCO** nun keyfi çarpımlara sahip olduğunu gösterelim.

$\{(B_i, K_i) : i \in I\}$ sabit süzgeç yakınsak uzayların bir sınıfı, $B = \prod_{i \in I} B_i$ ve $K = \{\alpha \in F(B): \pi_i(\alpha) \in K_i, i \in I\}$ olsun.

$a \in B$ olsun. Her $a \in B$ için $\pi_i(a) = a_i \in B_i$ ve $\pi_i([a]) = [a_i] \in K_i$ olsun. Bu $[a] \in K$ olduğunu gösterir. Kabul edelim ki $\alpha \in K$ ve $\alpha \subset \beta$ olsun. $\alpha \in K$ den her $i \in I$ için $\pi_i(\alpha) \in K$ ve sonuç olarak her $i \in I$ için $\pi_i(\beta) \in K_i$ olur. Böylece $\beta \in K$ dir.

Kabul edelim ki (C, L) sabit süzgeç yakınsak uzay, $f_i: (C, L) \rightarrow (B_i, K_i)$ sürekli dönüşüm ve $h: C \rightarrow B$, $\pi_i \circ h = f_i$ sağlayan fonksiyon olsun. h nin sürekli olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $\alpha \in L$ olsun. her $i \in I$ için f_i ler sürekli olduğundan $f_i(\alpha) \in K_i$ dir.

Dikkat edelim ki $(\pi_i \circ h)(\alpha) = \pi_i(h(\alpha)) = f_i(\alpha) \in K_i$. Bu ise $h(\alpha) \in K$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak h süreklidir.



Şekil 3.1. ConFCO daki başlangıç kaldırması.

Yukarıda ki şekilden dolayı $\pi_i o h = f_i$ dir.

Dolayısıyla (B, K) çarpım sabit süzgeç yakınsak uzaylardır ve **ConFCO** keyfi çarpımlara sahiptir.

(iv) **ConFCO** keyfi alt uzaylara sahip bir kategori olduğunu göstereceğiz. (B, K) sabit süzgeç yakınsak uzay, $M \subset B$ ve $i: M \rightarrow B$, $i(a) = a$ içine fonksiyon olsun.

$$K_M = \{\alpha \in F(M): i(\alpha) \in K\}$$

oluşturalım.

Dikkat edelim ki (M, K_M) sabit süzgeç yakınsak uzay ve $i: (M, K_M) \rightarrow (B, K)$ süreklidir. Böylece **ConFCO** keyfi alt uzaylara sahiptir.

(v) **ConFCO** indiske sabit süzgeç yakınsak uzay olduğunu göstereceğiz.

$B \neq \emptyset$ bir küme ve $K = F(B)$ olsun. $(B, (F(B))) \in \mathbf{ConFCO}$ olduğunu biliyoruz.

(C, L) herhangi bir sabit süzgeç yakınsak uzay ve $f: C \rightarrow B$ fonksiyon olsun. f nin sürekli olduğunu göstereceğiz.

$\alpha \in L$ ise $f(\alpha) \in F(B) = K$ olur ki f süreklidir.

Eğer $B \neq \emptyset$ ise $K = \{[\emptyset]\}$ dir.

Eğer $B = \{x\}$ ise $K = \{[\emptyset], [x]\} = F(B)$ olur.

Yukarıdaki şartlar sağlandığından, Teorem 2.5.7 dolayı $U: \mathbf{ConFCO} \rightarrow \mathbf{Set}$ bir topolojik fanktordur. Şimdi ise U nun normalleştirilmiş olduğunu gösterelim.

Set de son obje tek nokta kümesi olduğundan, **Set** üzerindeki herhangi bir topolojik kategorinin normalleştirilmiş olup olmadığını anlamak için $U^{-1}(\{x\})$ ve $U^{-1}(\emptyset)$ un tek bir yapı oluşturup oluşturmadığına incelemek gerekir.

$U^{-1}(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset) = (\emptyset, K)$ yani $K = \emptyset$ dur. $U^{-1}(\{x\}) = (\{x\}, K)$, $K = \{[x], [\emptyset]\}$ dır. Dolayısıyla boş ve tek nokta kümesi üzerinde yalnız tek bir yapı vardır. Bundan dolayı $U: \mathbf{ConFCO} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiştir.

Teorem 3.3.2 (1) (X, K) , **ConFCO** nun bir objesi olsun. (X, K) nın bir diskre uzay olması için gerek ve yeter şart $x \in X$ için $K = \{[x], P(X) = [\emptyset] \mid x \in X\}$ olmalıdır.

(2) (X, K) nın indiskre uzay olması için gerek ve yeter şart $K = F(X)$ olmasıdır.

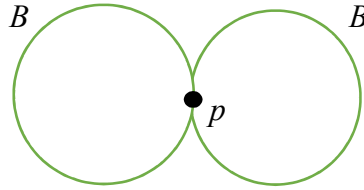
İspat: Tanım 2.5.9 den yapılabilir.



4. LOKAL T_0 VE T_1 AYIRMA AKSİYOMLARI

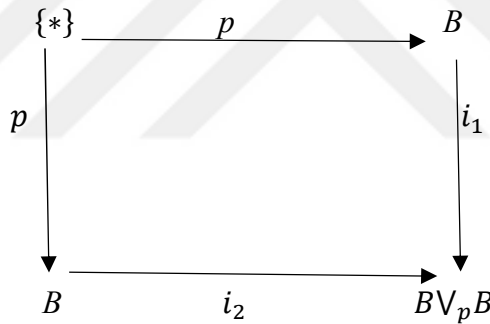
4.1 Noktada Eksen Dönüşümleri

Tanım 4.1.1 ([9]) B bir küme ve $p \in B$ olsun. $B \sqcup B$, B nin ayrık iki kopyası olsun. B nin p de Wedge çarpımı $B \sqcup B$ nin p de kesişimidir ve $B \vee_p B$ şeklinde gösterilir.



Şekil 4.1. B kümesinin p noktasındaki Wedge çarpımı.

$B \vee_p B$ de ki bir x noktası birinci bileşende ise x_1 olarak, ikinci bileşende ise x_2 ile gösterilecektir. $x = p$ ise $x_1 = x_2$ dir, yani $p_1 = p_2$ olur.



Şekil 4.2. p noktasındaki pushout diyagramı.

diyagramı pushout diyagramıdır. Dolayısıyla, $i_1 p = i_2 p$ eşitliği sağlanır. $B \vee_p B$ deki bir x noktası eğer birinci bileşende ise x_1 , ikinci bileşende ise x_2 olarak gösterilir. Burada $p_1 = p_2$ olduğuna dikkat edilmelidir ve daha anlaşılır olması için p ile gösterelim.

Burada $id: B \rightarrow B$ birim dönüşümdür ve $p: \{*\} \rightarrow B$, p de dönüşüm olmak üzere

$$A_p i_1 = (id, p): B \rightarrow B^2, \quad A_p i_2 = (p, id): B \rightarrow B^2, \quad S_p i_1 = (id, id): B \rightarrow B^2,$$

$$S_p i_2 = (p, id): B \rightarrow B^2$$

ve $j = 1, 2$ için $\nabla_p i_j = id$ yukarıdaki pushout diyagramına uygulandığında aşağıdaki A_p , S_p ve ∇_p eksen dönüşümleri elde edilir.

Tanım 4.1.2

(1) p de Temel Eksen Dönüşümü (Principle p Axis Map):

$$A_p: BV_p B \rightarrow B^2,$$

$$A_p(x_i) = \begin{cases} (x, p), & i = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

(2) p de Skewed Eksen Dönüşümü (Skewed p Axis Map):

$$S_p: BV_p B \rightarrow B^2,$$

$$S_p(x_i) = \begin{cases} (x, x), & i = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

(3) p de Katlama Dönüşümü (The Fold Map):

$$\nabla_p: BV_p B \rightarrow B, i = 1, 2 \text{ için } \nabla_p(x_i) = x$$

olarak tanımlanır.

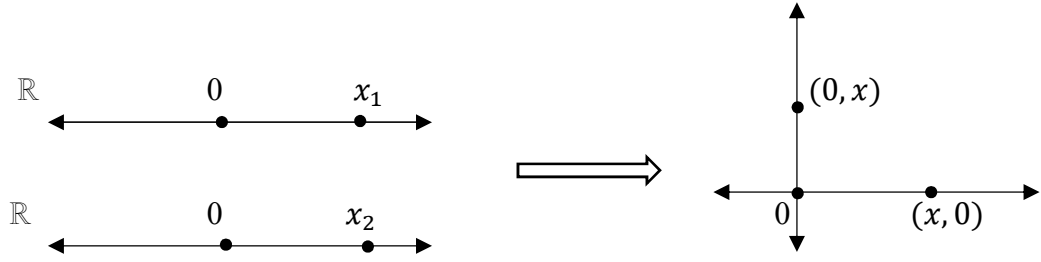
Örnek 3.4.3 $B = \mathbb{R}$ reel sayılar ve $p = 0$ alalım.

Temel eksen dönüşümü aşağıdaki şekilde olur.

$$A_0: \mathbb{R} \vee_0 \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x_1 \longrightarrow A_0(x_1) = (x, 0)$$

$$x_2 \longrightarrow A_0(x_2) = (0, x)$$



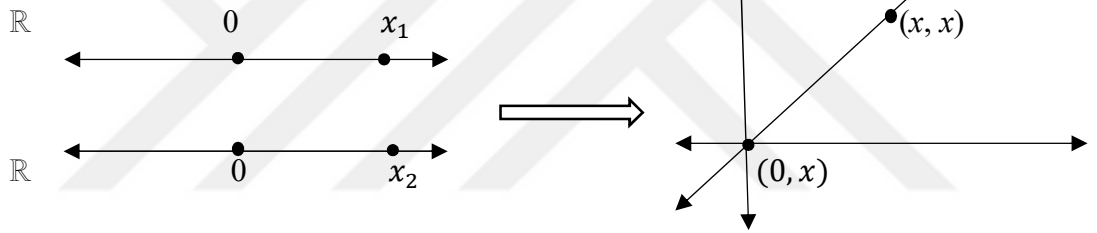
Şekil 4.3. $p=0$ noktasındaki temel eksen dönüşümü.

Skewed eksen dönüşümü aşağıdaki şekilde olur.

$$S_0: \mathbb{R} \vee_0 \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x_1 \longrightarrow S_0(x_1) = (x, x)$$

$$x_2 \longrightarrow S_0(x_2) = (0, x)$$



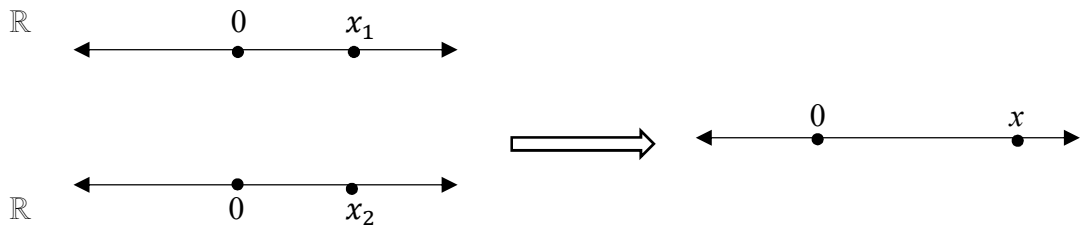
Şekil 4.4. $p = 0$ noktasındaki Skewed Eksen Dönüşümü.

Katlama Dönüşümü aşağıdaki şekilde olur.

$$\nabla_0: \mathbb{R} \vee_0 \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x_1 \longrightarrow \nabla_0(x_1) = x$$

$$x_2 \longrightarrow \nabla_0(x_2) = x$$



Şekil 4.5. $p = 0$ noktasındaki Katlama Dönüşümü.

4.2 Lokal T_0 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar

Tanım 4.2.1 ([9]) $U: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor $X \in Ob(\mathbf{E})$, $p \in U(X) = B$ ve D diskre fanktor olsun.

(1) X in p de $\overline{T_0}$ uzayı olması için gerek ve yeter şart

$$A_p: BV_p B \rightarrow U(X^2) = B^2 \text{ ve } \nabla_p: BV_p B \rightarrow UD(B) = B$$

U - kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır.

(2) X in p de T_0' olması için gerek ve yeter şart

$$id: BV_p B \rightarrow U(XV_p X) = BV_p B \text{ ve } \nabla_p: BV_p B \rightarrow UD(B) = B$$

U -kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır. Burada $XV_p X$ kümesi, $\{i_1, i_2: U(X) = B \rightarrow BV_p B\}$ U -kavşağının bitiş kaldırması ve id birim dönüşümdür.

(3) X in p de T_1 olması için gerek ve yeter şart

$$S_p: BV_p B \rightarrow U(X^2) = B^2 \text{ ve } \nabla_p: BV_p B \rightarrow UD(B) = B$$

U -kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır.

Tanım 4.2.2 ([9]) (B, τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun.

(1) Her $x \in B$ ve $x \neq p$ için $x \notin G_p$ olacak şekilde p nin bir G_p açık komşuluğu veya $p \notin G_x$ olacak şekilde x in bir G_x açık komşuluğu mevcutsa (B, τ) ya p de T_0 dir denir.

(2) Her $x, y \in B$ ve $x \neq y$ için $x \notin G_y$ olacak şekilde y nin bir G_y açık komşuluğu veya $y \notin G_x$ olacak şekilde x in G_x açık komşuluğu varsa (B, τ) ya T_0 dir denir.

(3) Her $x \in B$ ve $x \neq p$ için $x \notin G_p$ olacak şekilde p nin bir G_p açık komşuluğu ve $p \notin G_x$ olacak şekilde x in bir G_x açık komşuluğu mevcut ise (B, τ) ye p de T_1 dir denir.

(4) Her $x, y \in B$ ve $x \neq y$ için $x \notin G_y$ olacak şekilde y nin bir G_y açık komşuluğu ve $y \notin G_x$ olacak şekilde x in bir G_x açık komşuluğu mevcut ise (B, τ) ye T_1 dir denir.

Teorem 4.2.3 ([9]) **Top** kategorisi olsun. $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor için,

(1) X, p noktasında T_0 dir ancak ve ancak $BV_p B$ üzerinde

$$A_p: BV_p B \rightarrow (B^2, \tau_*) \text{ ve } \nabla_p: BV_p B \rightarrow (B, P(B))$$

fonksiyonları tarafından doğrulan başlangıç topolojisi diskredir.

(2) X, p noktasında T_1 dir ancak ve ancak $BV_p B$ üzerinde

$$S_p: BV_p B \rightarrow (B^2, \tau_*) \text{ ve } \nabla_p: BV_p B \rightarrow (B, P(B))$$

fonksiyonları tarafından doğrulan topoloji diskredir.

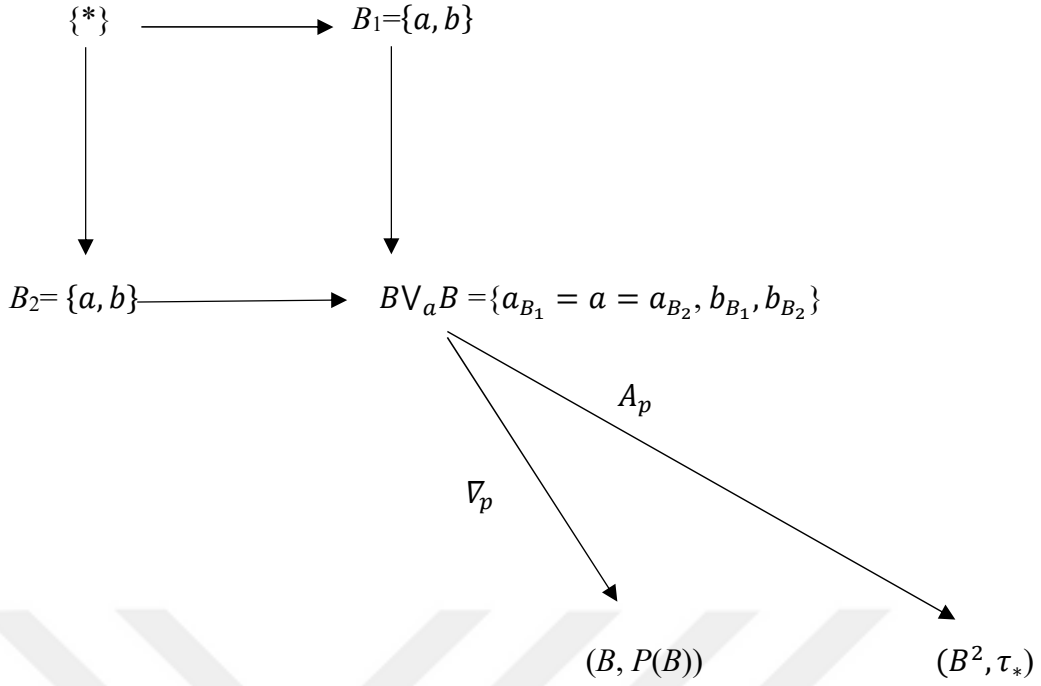
Burada τ_* , B^2 üzerinde çarpım topolojisi ve $P(B)$ ise B üzerinde diskre topolojidir.

Baran [9] 1991 yılında eksen dönüşümlerini kullanarak topolojik uzaylardaki bu ayırma aksiyomlarının herhangi bir topolojik kategoriye genelleştirebileceğini göstermiştir.

Not: Tanım 4.2.1 de adı geçen $\overline{T_0}$ ve T_0 ' objeleri **Top** da birbirine denktir.

Şimdi (B, τ) uzayının T_0 ve T_1 olması ile ilgili örnek verelim.

Örnek 4.2.4 $B = \{a, b\}$ kümesi üzerinde ve $\tau = \{\emptyset, B, \{b\}\}$ topolojisini düşünelim. (B, τ) , a noktasında T_0 uzayıdır. Bunu Tanım 4.2.1 kullanarak pushout diyagramı ile gösterelim:



Şekil 4.6. $B=\{a, b\}$ için pushout diyagramı.

$\tau_* = \{(B^2, \emptyset, \{(a, b), (b, b)\}, \{(b, a), (b, b)\}, \{(b, b)\}, \{(a, b), (b, a), (b, b)\})\}$ sınıfı B^2 üzerindeki çarpım topolojisi ve $P(B)=\{B, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ diskre topoloji olmak üzere,

$$\nabla_a^{-1}(B) = BV_a B$$

$$A_a^{-1}(B^2) = BV_a B$$

$$\nabla_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$A_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\nabla_a^{-1}(\{a\}) = \{a\}$$

$$A_a^{-1}(\{(b, b)\}) = \emptyset$$

$$\nabla_a^{-1}(\{b\}) = \{b_{B_1}, b_{B_2}\}$$

$$A_a^{-1}(\{(a, b), (b, b)\}) = \{b_{B_2}\}$$

$$A_a^{-1}(\{(b, a), (b, b)\}) = \{b_{B_1}\}$$

$$A_a^{-1}(\{(a, b), (b, a), (b, b)\}) = \{b_{B_1}, b_{B_2}\}$$

$$\delta = \{BV_a B, \emptyset, \{a\}, \{b_{B_1}\}, \{b_{B_2}\}, \{b_{B_1}, b_{B_2}\}\}$$

$$\beta = \{BV_a B, \emptyset, \{a\}, \{b_{B_1}\}, \{b_{B_2}\}, \{b_{B_1}, b_{B_2}\}\}$$

$$\tau = \{BV_a B, \emptyset, \{a\}, \{b_{B_1}\}, \{b_{B_2}\}, \{b_{B_1}, b_{B_2}\}, \{a, b_{B_1}\}, \{a, b_{B_2}\}\}$$

$$\tau = P(BV_a B)$$

Dolayısıyla A_a ve ∇_a tarafından doğrulan topoloji diskre olup (B, τ) uzayı a noktasında T_0 dır.

Örnek 4.2.5 $B = \{a, b\}$ kümesi üzerindeki $\tau = P(B)$ diskre topolojisini düşünelim. (B, τ) nun a noktasında T_1 uzayı olduğunu biliyoruz.

Bu gösterimi Tanım 4.2.1 yi kullanarak gösterelim.

$$S_a^{-1}(B^2) = BV_aB$$

$$\nabla_a^{-1}(B) = BV_aB$$

$$S_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\nabla_a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a)\}) = \{a\}$$

$$\nabla_a^{-1}(\{a\}) = \{a\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, b)\}) = \{b_{B_2}\}$$

$$\nabla_a^{-1}(\{b\}) = \{b_{B_1}, b_{B_2}\}$$

$$S_a^{-1}(\{(b, a)\}) = \emptyset$$

$$S_a^{-1}(\{(b, b)\}) = \{b_{B_1}\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a)\}, \{(a, b)\}) = \{a, b_{B_2}\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, a)\}, \{(b, a)\}) = \{a\}$$

$$S_a^{-1}(\{(a, b)\}, \{(b, b)\}) = \{b_{B_2}, b_{B_1}\}$$

$$S_a^{-1}(\{(b, a)\}, \{(b, b)\}) = \{b_{B_1}\}$$

$$\delta = \{BV_aB, \emptyset, \{a\}, \{b_{B_1}\}, \{b_{B_2}\}, \{b_{B_1}, b_{B_2}\}, \{a, b_{B_2}\}\}$$

$$\beta = \{BV_aB, \emptyset, \{a\}, \{b_{B_1}\}, \{b_{B_2}\}, \{b_{B_1}, b_{B_2}\}, \{a, b_{B_2}\}\}$$

$$\tau = \{BV_aB, \emptyset, \{a\}, \{b_{B_1}\}, \{b_{B_2}\}, \{b_{B_1}, b_{B_2}\}, \{a, b_{B_1}\}, \{a, b_{B_2}\}\}$$

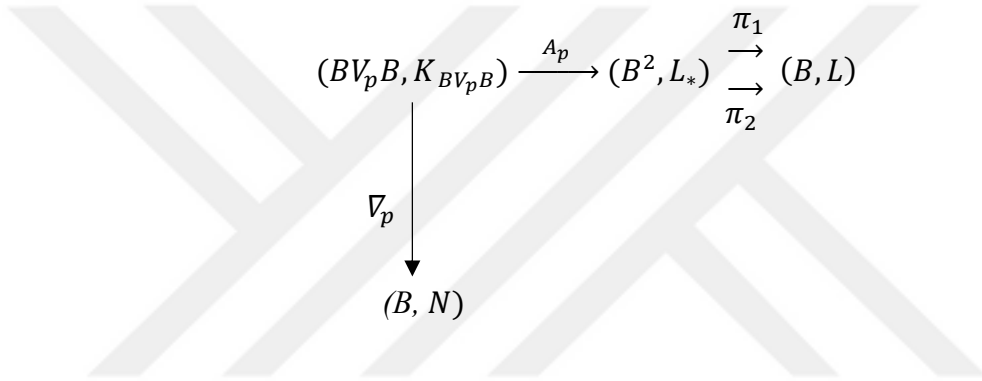
$$\tau = P(BV_aB)$$

olup S_a ve ∇_a tarafından doğrulan topoloji diskre olup (B, τ) uzayı a noktasında T_1 dir.

Şimdi ise **ConFCO** kategorisinde $\overline{T}_0$ objeyi karakterize edelim.

Teorem 4.2.6 (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzayı $p \in B$ noktasında $\overline{T}_0$ dır ancak ve ancak $x \neq p$ olacak şekildeki her $x \in B$ için $[x] \cap [p] \notin L$ dir.

İspat: Kabul edelim ki (B, L) sabit yakınsak süzgeç uzayı $p \in B$ noktasında $\overline{T}_0$ olsun. $[x] \cap [p] \notin L$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $x \neq p$ olmak üzere bazı $x \in B$ ler için $[x] \cap [p] \in L$ olsaydı Wedge çarpımı üzerindeki σ süzgeci $\sigma = [x_1] \cap [x_2]$ şeklinde olmak üzere



Şekil 4.7. $\overline{T}_0$ için $\pi_i A_p$ diyagramı.

$$\pi_1 A_p \sigma = \pi_1 A_p ([x_1] \cap [x_2])$$

$$= \pi_1 A_p (\{x_1, x_2\})$$

$$= \pi_1 (\{(x, p), (p, x)\})$$

$$= \{x, p\}$$

$$= [x] \cap [p] \in L$$

$$\pi_2 A_p \sigma = \pi_2 A_p ([x_1] \cap [x_2])$$

$$= \pi_2 A_p (\{x_1, x_2\})$$

$$= \pi_2 (\{(x, p), (p, x)\})$$

$$= [\{p, x\}]$$

$$= [p] \cap [x] \in L$$

ve

$$\nabla_p \sigma = \nabla_p ([x_1] \cap [x_2])$$

$$= \nabla_p ([\{x_1, x_2\}])$$

$$= [x] \in N$$

Burada $\pi_i: B^2 \rightarrow B$, $i=1,2$ için izdüşüm fonksiyonları, N ve L_* yapıları sırasıyla B ve B^2 üzerindeki diskre yapılarıdır. Ayrıca $K_{BV_p B}$ ise $BV_p B$ üzerindeki A_p ve ∇_p tarafından üretilen sabit süzgeç yakınsak yapıdır.

Bu ise (B, L) nin p noktasında $\overline{T_0}$ olmasıyla çelişir. Çünkü $BV_p B$ üzerindeki $K_{BV_p B} = \{[\emptyset], [p]\}$ diskre yapısı her $p \in B$ için $\{[\emptyset], [p]\}$ olması gerekirken $\sigma = [x_1] \cap [x_2] \in K_{BV_p B}$ bulundu.

Böylece $x \neq p$ olmak üzere her $x \in B$ için $[x] \cap [p] \notin L$ olmalıdır.

Tersine olarak kabul edelim ki $x \neq p$ olacak şekildeki her $x \in B$ için $[x] \cap [p] \notin L$ ve σ ise $BV_p B$ üzerinde $\pi_1 A_p \sigma \in L$, $\pi_2 A_p \sigma \in L$ ve $\nabla_p \sigma \in N$ şartını sağlayan bir süzgeç olsun. (B, L) sabit yakınsak süzgeç uzayının $p \in B$ noktasında $\overline{T_0}$ olduğunu göstereceğiz.

ConFCO kategorisindeki başlangıç kaldırma tanımından bazı $x \in B$ ler için

$$\nabla_p \sigma = [\emptyset] \text{ ve } \nabla_p \sigma = [x]$$

dir.

Kabul edelim ki $\nabla_p \sigma = [\emptyset]$ olsun. Bu taktirde $\sigma = [\emptyset]$ dir. Kabul edelim ki $\nabla_p \sigma = [x]$ olsun. Burada $x=p$ ise $\nabla_p \sigma = [p]$ olur ki bu ise $\sigma = [p_1] = [p_2]$ olması gerektiğini ifade eder.

$x \neq p$ ise bu durumda $\sigma = [x_1]$, $\sigma = [x_2]$ veya $\sigma \supset \{[x_1, x_2]\}$ olur. Şimdi bu durumları inceleyelim:

Eğer $\sigma = [x_1, x_2]$ ise bu durumda,

$$\begin{aligned}\pi_1 A_p \sigma &= \pi_1 A_p [x_1, x_2] \\ &= \pi_1 [\{(x, p), (p, x)\}] \\ &= [\{x, p\}] \\ &= [x] \cap [p] \in L\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\pi_2 A_p \sigma &= \pi_2 A_p [x_1, x_2] \\ &= \pi_2 [\{(x, p), (p, x)\}] \\ &= [\{p, x\}] \\ &= [p] \cap [x] \in L\end{aligned}$$

dir.

Bu ise $x \neq p$ için $[x] \cap [p] \notin L$ olması ile çelişir. Bu yüzden $\sigma \neq [x_1, x_2]$ dir.

Eğer $[\emptyset] \neq \sigma \neq [x_1, x_2]$ için $\sigma \supset [x_1, x_2]$ ise $U \neq \{x_1, x_2\}$ ve $U \neq \emptyset$ olacak şekilde az bir $U \in \sigma$ vardır.

Biz $\sigma = [x_1]$ veya $\sigma = [x_2]$ olduğunu göstermeliyiz. $\{x_1, x_2\} \in \sigma$ ve σ süzgeç olduğundan

$$U \cap \{x_1, x_2\} = \{x_1\} \text{ veya } U \cap \{x_1, x_2\} = \{x_2\}$$

dir.

Bunun anlamı $\sigma = [x_1]$ veya $\sigma = [x_2]$ olmasıdır. Sonuç olarak Tanım 3.2.4 ve Teorem 3.3.2 den ∇_p ve A_p nin başlangıç kaldırması diskredir. Tanım 4.2.1 den (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında $\overline{T_0}$ dır.

Teorem 4.2.7 Her sabit süzgeç yakınsak uzay p noktasında T_0' dır.

İspat: Kabul edelim ki (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzay, $p \in B$, σ ise $BV_p B$ üzerinde $k=1,2$ olmak üzere bazı $\beta \in L$ süzgeçleri için $\sigma \supset i_k(\beta)$ şartını sağlayan bir süzgeç olsun. Ayrıca $\nabla_p \sigma \in N$ olsun. Burada N , B üzerindeki diskre yapıdır.

Teorem 3.3.2 den bazı $x \in B$ için $\nabla_p \sigma = [\emptyset]$ veya $\nabla_p \sigma = [x]$ dir.

Eğer $\nabla_p \sigma = [\emptyset]$ ise bu taktirde $\sigma = [\emptyset]$ olur. Bazı $x \in B$ için $\nabla_p \sigma = [x]$ olsun.

$x = p$ olması durumunda $\nabla_p \sigma = [p]$ olur ki bu ise $\sigma = [p]$ olmasını gerektirir.

$x \neq p$ olması durumunda $\sigma = [x_1]$, $\sigma = [x_2]$ veya $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ olur.

Eğer $\sigma = [\{x_1, x_2\}]$ ise bu durumda $k=1,2$ ve bazı $\beta \in L$ ler için $\sigma \supset i_k(\beta)$ dir ki bu ise $\{x_1, x_2\}$ nin bir eksen üzerinde bulunduğunu gösterir. Bu ise $x \neq p$ olduğundan çelişkidir. O halde $\sigma \neq [\{x_1, x_2\}]$ olmak zorundadır.

Eğer $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ ise Teorem 4.2.6 nin ispatında kullanılan yöntemle benzer olarak $\sigma = [x_1]$ veya $\sigma = [x_2]$ olduğu görülür. Sonuç olarak, $\sigma = [x_1]$, $[x_2]$ veya $[\emptyset]$ olur ki bu ise Tanım 3.2.4 ve Tanım 4.2.1 den dolayı (B, L) uzayının p noktasında T_0' olduğunu gösterir.

$$\begin{array}{ccc}
 (BV_p B, K_{BV_p B}) & \xrightarrow{id} & (BV_p B, (BV_p B)') \\
 \nabla_p \downarrow & & \uparrow i_1 \quad \uparrow i_2 \\
 (B, N) & & (B, L)
 \end{array}$$

Şekil 4.8. T_0' için diyagram.

Teorem 4.2.8 (1) (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında $\overline{T_0}$ ve $M \subset B$ olmak üzere (M, L_M) alt uzayı da p noktasında $\overline{T_0}$ dir. Burada L_M , M üzerindeki alt uzay yapısıdır.

(2) Her $i \in I$ için (B_i, L_i) ler $p_i \in B_i$ noktasında $\overline{T_0}$ dir ancak ve ancak $(B = \prod_{i \in I} B_i, L)$ çarpım lokal sabit yakınsak uzayı da $p = (p_1, p_2, \dots)$ noktasında $\overline{T_0}$ dir. Burada L , B üzerindeki çarpım yapısıdır ve $p \in B$ dir.

(3) Her $i \in I$ için (B_i, L_i) ler $p_i \in B_i$ noktasında $\overline{T_0}$ ise $(B = \prod_{i \in I} B_i, L)$ co-çarpım uzayı da (i, p) noktasında $\overline{T_0}$ dir. Burada L , B üzerindeki co-çarpım yapısıdır ve $(i, p) \in B$ dir.

İspat: (1) Kabul edelim ki (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında $\overline{T_0}$ ve L_M yapısı M üzerinde ki $i: M \rightarrow B$ içine dönüşümü ile elde edilen başlangıç yapısı ve $x \in M$ olmak üzere $x \neq p$ için $[x] \cap [p] \in L_M$ olsun.

$$\begin{aligned} i([x] \cap [p]) &= i([x]) \cap i([p]) \\ &= [x] \cap [p] \in L \end{aligned}$$

olur ki bu ise (B, L) nin p noktasında $\overline{T_0}$ olması ile çelişir. Böylece $x \neq p$, $x \in M$ için $[x] \cap [p] \notin L_M$ dir. Sonuç olarak Teorem 4.2.6 dan (M, L_M) uzayı p noktasında $\overline{T_0}$ dir.

(2) Kabul edelim ki her $i \in I$, $p_i \in B_i$ için (B_i, L_i) sabit süzgeç yakınsak uzayları p_i noktasında $\overline{T_0}$ ve $x \neq p$ için $[x] \cap [p] \in L$ olsun. Burada $p = (p_1, p_2, \dots)$ ve $x = (x_1, x_2, \dots)$ dir. $x \neq p$ olduğundan en az bir $j \in J$ için $x_j \neq p_j$ dir.

$[x] \cap [p] \in L$ olduğundan aşağıdaki dönüşüm dikkate alındığında

$$\begin{aligned} \pi_j: \left(B = \prod_{i \in I} B_i, L \right) &\rightarrow (B_j, L_j) \\ \pi_j: ([x] \cap [p]) &= \pi_j([x]) \cap \pi_j([p]) \\ &= [x_j] \cap [p_j] \in L_j \end{aligned}$$

olur ki bu ise her $i \in I$ için (B_i, L_i) lerin $\overline{T_0}$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $[x] \cap [p] \notin L$ olur. Sonuç olarak Teorem 4.2.6 dan (B, L) nin p noktasında $\overline{T_0}$ dır.

Tersine olarak kabul edelim ki (B, L) çarpım sabit yakınsak uzayı da $p = (p_1, p_2, \dots)$ noktasında $\overline{T_0}$ olsun. Her $i \in I$ için (B_i, L_i) sabit yakınsak uzayları (B, L) uzayının bir alt uzayına izomorf olduğundan (1) den dolayı her $i \in I$ için (B_i, L_i) ler p_i noktasında $\overline{T_0}$ dır.

(3) Kabul edelim ki her $i \in I$, $p_i \in B_i$ olmak üzere (B_i, L_i) sabit süzgeç yakınsak uzayları p_i noktasında $\overline{T_0}$ olsun. $(B = \coprod_{i \in I} B_i, L)$ nin (i, p) de $\overline{T_0}$ olduğunu göstereceğiz.

Kabul edelim ki her $i \in I$, $p_i \in B_i$ için (B_i, L_i) , p_i de $\overline{T_0}$ olsun ve $(i, x) \neq (i, p)$ olmak üzere $(i, x) \in B$ için

$$[(i, x)] \cap [(i, p)] \in L$$

olsun. **ConFCO** da ki bitiş kaldırma tanımından

$$j_k: (B_k, L_k) \rightarrow \left(B = \coprod_{i \in I} B_i, L \right)$$

şeklindeki dönüşüm için $[(i, x)] \cap [(i, p)] \in L$ olduğundan

$$j_k(\beta_i) \subset [(i, x)] \cap [(i, p)]$$

olacak şekilde $\beta_i \in L_i$ vardır. Burada $j_k: (B_k, L_k) \rightarrow (B, L)$ kanonik dönüşümdür.

Her tarafa j_k^{-1} uygularsak

$$j_k^{-1}j_k(\beta_i) \subset j_k^{-1}([(i, x)] \cap [(i, p)])$$

$$\beta_i \subset j_k^{-1}[(i, x)] \cap j_k^{-1}[(i, p)]$$

$$\beta_i \subset [x_i] \cap [p_i]$$

olur ki $[x_i] \cap [p_i] \in L$ olur. $x_i \neq p_i$, $i \in I$ için (B_i, L_i) sabit süzgeç yakınsak uzaylar olması ile çelişkidir.

Bu yüzden $(i, x) \neq (i, p)$ olacak şekilde her $(i, x) \in B$ için

$$[(i, x)] \cap [(i, p)] \notin L$$

olmalıdır. Bu ise Teorem 4.2.6 dan dolayı (B, L) nin (i, p) noktasında $\overline{T_0}$ olduğunu gösterir.

Örnek 4.2.9 $B = \{x\}$ olsun. Bu durumda B üzerindeki sabit süzgeç yakınsak yapı $L = \{[x], [\emptyset]\}$ olur. (B, L) hem diskre hem de indiskre sabit süzgeç yakınsak uzaydır. $p \neq x$ olacak şekilde $p \in B$ mevcut olmadığından Teorem 4.2.6 den dolayı sabit süzgeç yakınsak uzayı p de $\overline{T_0}$ dır ve Teorem 4.2.7 den dolayı T_0' olur.

Örnek 4.2.10 $B = \{x, y\}$ olsun. Bu durumda B üzerindeki aşağıdaki gibi tanımlanan sabit süzgeç yakınsak uzayları yazalım.

$L_1 = \{[x], [y], [\emptyset]\}$ diskre yapı,

$L_2 = \{[x], [y], [x] \cap [y], [\emptyset]\}$ indiskre yapıdır.

$L_1 = \{[x], [y], [\emptyset]\}$ diskre sabit yakınsak süzgeç uzayı Teorem 4.2.6 den dolayı x, y noktalarında $\overline{T_0}$ uzayı ve Teorem 4.2.7 den dolayı x ve y noktalarında T_0' dır.

$L_2 = \{[x], [y], [x] \cap [y], [\emptyset]\}$ indiskre sabit süzgeç yakınsak uzayı Teorem 4.2.6 den dolayı x ve y noktalarında $\overline{T_0}$ uzayı değildir ve Teorem 4.2.7 den dolayı x ve y noktalarında T_0' dır.

Örnek 4.2.11 $B = \{x, y, z\}$ olsun. Bu durumda B üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan sabit süzgeç yakınsak uzayları düşünelim.

$L_1 = \{[x], [y], [z], [\emptyset]\}$ diskre yapı,

$L_2 = \{[x], [y], [z], [x] \cap [y], [\emptyset]\},$

$L_3 = \{[x], [y], [z], [x] \cap [z], [\emptyset]\},$

$L_4 = \{[x], [y], [z], [y] \cap [z], [\emptyset]\},$

$$L_5 = \{[x], [y], [z], [x] \cap [y], [y] \cap [z], [\emptyset]\},$$

$$L_6 = \{[x], [y], [z], [x] \cap [y], [x] \cap [z], [\emptyset]\},$$

$$L_7 = \{[x], [y], [z], [y] \cap [z], [x] \cap [z], [\emptyset]\},$$

$$L_8 = \{[x], [y], [z], [x] \cap [y], [x] \cap [z], [y] \cap [z], [B], [\emptyset]\} \text{ indiskre yapıdır.}$$

$L_2 = \{[x], [y], [z], [x] \cap [y], [\emptyset]\}$ için (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzayı, $[x] \cap [y] \in K$ olduğundan Teorem 4.2.6 dan dolayı x ve y noktalarında $\overline{T_0}$ uzayı değildir, fakat $[x] \cap [z] \notin K$, $[y] \cap [z] \notin K$ olduğunda z noktasında $\overline{T_0}$ dir. Teorem 4.2.7 den dolayı yukarıdaki B üzerindeki tüm sabit süzgeç yakınsak yapılar T_0' dir.

Teorem 4.2.12 ([9]) (1) (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzay $\overline{T_0}$ dir ancak ve ancak her $x, y \in B$, $x \neq y$ için $[x] \cap [y] \notin L$ dir.

(2) Her sabit süzgeç yakınsak uzay T_0' dir.

Teorem 4.2.13 (1) (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzay $\overline{T_0}$ dir ancak ve ancak her $p \in B$ için (B, L) , p noktasında $\overline{T_0}$ dir.

(2) Her sabit süzgeç yakınsak uzay T_0' dir ancak ve ancak p de $\overline{T_0}$ dir.

İspat: Teorem 4.2.6, 4.2.7 ve 4.2.12 den dolayı ispat açıktır.

4.3 Lokal T_0 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar ile İlgili Sonuçlar

(1) Objeleri $\overline{T_0}(T_0')$ sabit süzgeç yakınsak uzaylar, morfizmleri ise sabit süzgeç yakınsak uzaylar arasındaki dönüşümler olan bir sınıf bir kategoridir. Bu kategoriler $\overline{T_0}\mathbf{ConFCO}$ ve $T_0'\mathbf{ConFCO}$ şeklinde gösterilir ve $\mathbf{ConFCO}$ kategorisinin dolu alt kategorileridir.

(2) Teorem 4.2.7 den $T_0'\mathbf{ConFCO}$ ve $\mathbf{ConFCO}$ kategorileri izomorfiktir.

$$T_0'\mathbf{ConFCO} \cong \mathbf{ConFCO}$$

(3) $\overline{T_0}\mathbf{ConFCO}$ ve $T_0'\mathbf{ConFCO}$ topolojik kategorileri tüm limit (ilk obje, çarpım, equalizer, pullback) ve co-limitlere (son obje, co-çarpım, co-equalizer, pushout) sahiptir.

(4) Teorem 4.2.8 den, $\overline{T_0}\mathbf{ConFCO}$ ve $T_0'\mathbf{ConFCO}$ topolojik kategorileri alt uzaylar, çarpım, co-çarpım ve bölüm dönüşümleri altında kapalıdır.

(5) $\mathbf{ConFCO}$ kategorisinde Teorem 4.2.6 ve Teorem 4.2.7 den dolayı (B, L) objesi $p \in B$ noktasında $\overline{T_0}$ ise p noktasında T_0' dir. Fakat tersi genelde doğru değildir. Örneğin $B = \{x, y, z\}$ ve $L = \{[x], [y], [z], [x] \cap [y], [\emptyset]\}$ için (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzay Teorem 4.2.6 ve Teorem 4.2.7 den dolayı x noktasında T_0' dir fakat x noktasında $\overline{T_0}$ değildir.

Not: (1) $\mathbf{Top}$ kategorisinde Teorem 4.2.2 dolayı (X, τ) nun herhangi bir $p \in X$ noktasında $\overline{T_0}$ olması p noktasında T_0' olması demektir.

(2) $U: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş topolojik fanktor, $x \in Ob(\mathbf{E})$ ve $p \in U(X)$ olsun. Bu durumda

(i) [20] de ki Teorem 2.10 dan dolayı X objesi p noktasında $\overline{T_0}$ ise X, p noktasında T_0' dir.

(ii) [20] de ki Teorem 2.6 ve Sonuç 2.7 den X objesi $\overline{T_0}$ ise X, p noktasında $\overline{T_0}$ dir.

(3) Bir topolojik kategoride, Teorem 4.2.2 den X objesi p noktasında $\overline{T_0}$ olması ile p noktasında T_0' olması denk olabilir. Örneğin, $\mathbf{Top}$ kategorisinde T_0' , $\overline{T_0}$ ve T_1 sırasıyla bilinen T_0 ve T_1 ayırma aksiyomlarına indirgenir [9].

Dahası [21] deki gibi p noktası $\overline{T_0}$ olanlar yalnızca diskre obje olabilir. Örneğin $\mathbf{pqsMet}$ (objeleri pseudo-quasi-semi metrik uzaylar, morfizmleri ise $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$ sürekli $\Leftrightarrow$ her $x, y \in X$ için $e(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ dir.) kategorisinde p noktasında $\overline{T_0}$ objeler sadece diskre objelerdir. p noktasında T_0' objeler tüm objeler olabilir.

Bir topolojik kategori de, her obje p noktasında $\overline{T_0}$ ve T_0' olabilir. Örneğin, **ConLim** (sabit limit uzaylar kategorisi) kategorisinde her obje $\overline{T_0}$ ve T_0' dir. Bu çalışmada da Teorem 4.2.7 den dolayı **ConFCO** daki tüm objeler T_0' dir.

(4) Lokal $\overline{T_0}$ ve lokal T_0' kümeleri, küme tabanlı topolojik kategorilerde kapalı (closed), local pre T_2 , local T_2 objeleri tanımlama da kullanılır [12-14], yani

$$pre\overline{T_2} + \overline{T_0} = \overline{T_2} \quad \text{ve} \quad preT_2' + T_0' = T_2'$$

4.4 Lokal T_1 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar

Teorem 4.4.1 (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzayı T_1 dir ancak ve ancak $x \neq p$ olacak şekilde her $x \in B$ için $[x] \cap [p] \notin L$ dir.

İspat: Kabul edelim ki (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzayı $p \in B$ noktasında T_1 olsun ve $x \neq p$ için $[x] \cap [p] \in L$ olsun.

$$\begin{array}{ccc} BV_p B & \xrightarrow{S_p} & (B^2, \tau_*) \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} (B, L) \\ \downarrow \nabla_p & & \\ & & BV_p B \end{array}$$

Şekil 4.9. T_1 için $\pi_i S_p$ diyagramı.

dönüşümlerinde K^* çarpım topolojisi ve K_B, B üzerindeki diskre sabit süzgeç yakınsak uzay olsun. Ayrıca $\sigma = [x_1] \cap [x_2]$ Wedge çarpım kümesi üzerindeki yapının elemanları olsun.

$$\begin{aligned} \pi_1 S_p \sigma &= \pi_1 S_p([x_1] \cap [x_2]) \\ &= \pi_1(S_p[\{x_1, x_2\}]) \\ &= \pi_1[\{(x, x), (p, x)\}] \end{aligned}$$

$$= [\{x, p\}]$$

$$= [x] \cap [p] \in L$$

ve

$$\pi_2 S_p \sigma = \pi_2 S_p ([x_1] \cap [x_2])$$

$$= \pi_2 (S_p [\{x_1, x_2\}])$$

$$= \pi_2 [\{(x, x), (p, x)\}]$$

$$= [\{x\}]$$

$$= [x] \in L \text{ dir.}$$

Ayrıca

$$\nabla_p \sigma = \nabla_p ([x_1] \cap [x_2])$$

$$= \nabla_p ([\{x_1, x_2\}])$$

$$= [x] \in K_B$$

olur ki bu ise $[x_1] \cap [x_2] \in K_{BV_p B}$ olduğunu gösterir. Fakat bu ise (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzayının p noktasında T_1 olması tanımı ile çelişir. Böylece $x \neq p$ olacak şekilde her $x \in B$ için $[x] \cap [p] \notin L$ dir.

Tersine olarak kabul edilir ki $x \neq p$ olacak şekilde her $x \in B$ için $[x] \cap [p] \notin L$ ve σ ise $BV_p B$ üzerinde $\pi_1 S_p \sigma \in L$, $\pi_2 S_p \sigma \in L$ ve $\nabla_p \sigma \in N$ şartını sağlayan süzgeç olsun.

ConFCO kategorisindeki başlangıç kaldırma tanımından bazı $x \in B$ ler için

$$\nabla_p \sigma = [\emptyset] \text{ veya } \nabla_p \sigma = [x] \text{ dir.}$$

$$\nabla_p \sigma = [\emptyset] \text{ ise } \sigma = [\emptyset] \text{ tur.}$$

$$\nabla_p \sigma = [x] \text{ ise burada } x = p \text{ ve } x \neq p \text{ olması durumları vardır.}$$

$x = p$ olması durumunda $\sigma = [p_1] = [p_2]$ olur.

$x \neq p$ olması durumunda $\sigma = [x_1]$, $\sigma = [x_2]$ veya $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}] = [x_1] \cap [x_2]$ olabilir. Şimdi bu durumları inceleyelim.

Eğer $\sigma = [\{x_1, x_2\}]$ ise

$$\pi_1 S_p \sigma = \pi_1 S_p [\{x_1, x_2\}]$$

$$= \pi_1 [\{(x, x), (p, x)\}]$$

$$= [\{x, p\}]$$

$$= [x] \cap [p] \in L$$

ve

$$\pi_2 S_p \sigma = \pi_2 S_p [\{x_1, x_2\}]$$

$$= \pi_2 [\{(x, x), (p, x)\}]$$

$$= [\{x\}]$$

$$= [x] \in L$$

olur bu ise $[x] \cap [p] \notin L$ olması ile çelişir. Bu yüzden $\sigma = [\{x_1, x_2\}] = [x_1] \cap [x_2]$ olamaz.

Eğer $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ ise

$\sigma \neq [\emptyset]$ ve $\sigma \neq [\{x_1, x_2\}]$ olmak üzere $U \in \sigma$ ise $U \neq \emptyset$ ve $U \neq \{x_1, x_2\}$ dir. Biz $\sigma = [x_1]$ veya $\sigma = [x_2]$ olduğunu göstermeliyiz.

$\{x_1, x_2\} \in \sigma$ ve σ süzgeç olduğundan

$\{x_1, x_2\} \cap U = \{x_1\}$ veya $\{x_1, x_2\} \cap U = \{x_2\}$ dir. Bu ise $\sigma = [x_1]$ veya $\sigma = [x_2]$ olduğunu gösterir.

Sonuç olarak Tanım 3.2.4 ve Teorem 3.3.2 den S_p ve ∇_p nin başlangıç kaldırması diskredir. Yani Teorem 4.2.3 den (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzay T_1 dir.

Teorem 4.4.2 (1) (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında T_1 ve $M \subset B$ olmak üzere (M, L_M) alt uzayı da p noktasında T_1 dir. Burada L_M , M üzerindeki alt uzay yapısıdır.

(2) Her $i \in I$ için (B_i, L_i) ler $p_i \in B_i$ noktasında T_1 dir ancak ve ancak $(B = \prod_{i \in I} B_i, L)$ çarpım lokal sabit yakınsak uzayı da $p = (p_1, p_2, \dots)$ noktasında T_1 dir. Burada L, B üzerindeki çarpım yapısıdır ve $p \in B$ dir.

(3) Her $i \in I$ için (B_i, L_i) ler $p_i \in B_i$ noktasında T_1 ise $(B = \coprod_{i \in I} B_i, L)$ co-çarpım uzayı da (i, p) noktasında T_1 dir. Burada L, B üzerindeki co-çarpım yapısıdır ve $(i, p) \in B$ dir.

İspat: Teorem 4.2.8 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.4.3 (B_1, L_1) ve (B_2, L_2) sabit süzgeç yakınsak uzayları izomorf olsunlar. Bu durumda (B_1, L_1) uzayı p noktasında $\overline{T_0}$ (T_1) dir ancak ve ancak (B_2, L_2) de p noktasında $\overline{T_0}$ (T_1) dir.

İspat: Kabul edelim ki (B_1, L_1) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında $\overline{T_0}$ (T_1) ve $x \neq p$ ve $x, p \in B_2$ olsun. (B_1, L_1) ve (B_2, L_2) sabit süzgeç yakınsak uzayları izomorf olduklarından bir $f: (B_1, L_1) \rightarrow (B_2, L_2)$ izomorfizmi vardır ki $gf = 1_{(B_1, L_1)}$ ve $fg = 1_{(B_2, L_2)}$ olacak şekilde $g: (B_2, L_2) \rightarrow (B_1, L_1)$ morfizmi vardır. $x \neq p$ olduğundan $g(x) \neq g(p)$ dir. Eğer $g(x) = g(p)$ olsaydı $f(g(x)) = f(g(p))$ ve $(fg)(x) = (fg)(p)$ olurdu ve sonuç olarak $x=p$ olurdu.

Kabul edelim ki (B_2, L_2) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında $(\overline{T_0})T_1$ olmasın. Bu durum da Teorem 4.4.1 gereğince $[x] \cap [p] \in L_2$ dir. g sürekli olduğundan $[g(x)] \cap [g(p)] \in L_1$ olur. Bu ise (B_1, L_1) in p noktasında $\overline{T_0}$ (T_1) olmasıyla çelişir. Bu taktirde (B_2, L_2) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında $\overline{T_0}$ (T_1) olmak zorundadır.

Tersine olarak kabul edelim ki (B_2, L_2) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında $\overline{T_0}$ (T_1) olsun. g izomorfizm olduğundan ispatın ilk kısmı gereği (B_1, L_1) sabit süzgeç yakınsak uzayı p noktasında T_1 dir.

Örnek 4.4.4 $B = \{x\}$ olsun. Bu taktirde B üzerindeki sabit süzgeç yakınsak yapı $L = \{[x], [\emptyset]\}$ olur. (B, L) hem diskre hem de indiskre sabit süzgeç yakınsak uzaydır $p \neq x$ olacak şekilde $p \in B$ mevcut olmadığından Teorem 4.4.1 den dolayı sabit süzgeç yakınsak uzayı p de T_1 dir.

Örnek 4.4.5 $B = \{x, y\}$ olsun. Bu durumda B üzerindeki aşağıdaki gibi tanımlanan sabit süzgeç yakınsak uzayları yazalım.

$L_1 = \{[x], [y], [\emptyset]\}$ diskre yapı

$L_2 = \{[x], [y], [x] \cap [y], [\emptyset]\}$ indiskre yapı

(B, L_1) diskre sabit süzgeç yakınsak uzayı Teorem 4.4.1 den dolayı x ve y noktalarında T_1 uzayıdır, fakat (B, L_2) indiskre sabit süzgeç yakınsak uzayı x ve y noktalarında T_1 uzayı değildir.

Örnek 4.4.6 $B = \{x, y, z\}$ olsun. Bu taktirde B üzerindeki aşağıdaki gibi tanımlanan sabit süzgeç yakınsak uzayları düşünelim.

$L_1 = \{[x], [y], [z], [\emptyset]\}$ diskre yapı,

$L_2 = \{[x], [y], [z], [x] \cap [y], [\emptyset]\},$

$L_3 = \{[x], [y], [z], [x] \cap [z], [\emptyset]\},$

$L_4 = \{[x], [y], [z], [y] \cap [z], [\emptyset]\},$

$L_5 = \{[x], [y], [z], [x] \cap [y], [y] \cap [z], [\emptyset]\},$

$L_6 = \{[x], [y], [z], [x] \cap [y], [x] \cap [z], [\emptyset]\},$

$L_7 = \{[x], [y], [z], [y] \cap [z], [x] \cap [z], [\emptyset]\},$

$L_8 = \{[x], [y], [z], [x] \cap [y], [x] \cap [z], [y] \cap [z], [B], [\emptyset]\}$ indiskre yapıdır.

$L_2 = \{[x], [y], [z], [x] \cap [y], [\emptyset]\}$ için (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzayı, $[x] \cap [y] \in K$ olduğundan Teorem 4.4.2 den dolayı x ve y noktalarında T_1 uzayı değildir fakat $[x] \cap [z] \notin K$, $[y] \cap [z] \notin K$ olduğunda z noktasında T_1 dir.

4.5 Lokal T_1 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar ile İlgili Sonuçlar

(1) Objeleri T_1 sabit süzgeç yakınsak uzaylar, morfizmleri bu uzaylar arasındaki dönüşümler olan sınıf bir kategoridir. Hatta **Set** üzerinde **Top** bir topolojik kategoridir. Bu kategori **$T_1\text{ConFCO}$** şeklinde gösterilir. **$T_1\text{ConFCO}$** , **ConFCO** kategorisinin dolu alt kategorisidir.

(2) Teorem 4.2.6, 4.4.1 den **$T_1\text{ConFCO}$** ve **$\overline{T_0}\text{ConFCO}$** kategorileri izomorfiktir, yani

$$\mathbf{T_1ConFCO} \cong \overline{\mathbf{T_0ConFCO}}$$

(3) **$T_1\text{ConFCO}$** nun tüm limitlere (çarpım, alt uzay, equalizer, pullback) ve tüm co-limitlere (co-çarpım, bölüm, co-equalizer, pushout) sahiptir.

Not: (1) Dikkat edelim ki küme tabanlı topolojik kategorilerde tüm objeler lokal T_1 olabilir. Ayrıca lokal T_1 objeler yalnızca diskre objelerde olabilir.

(2) Lokal T_1 uzayları küme tabanlı bazı topolojik kategorilerde güçlü kapalılık (strongly closedness) kavramını ve topolojik kategorilerde lokal, regüler ve normal objeleri tanımlamakta kullanılır [12-14].

(3) Küme tabanlı bazı keyfi topolojik kategorilerin bütün objeleri p noktasında T_1 olabilir ayrıca p noktasında T_1 objeler yalnızca diskre objeler olabilir.

(4) T_1 uzayı, Stone uzaylarından sıfır boyutlu uzayların bir bazını elde etmek için cebirsel bir model olarak kullanılabilir. Ayrıca T_1 uzayı T_3 ve T_4 uzaylarını tanımlamada kullanılır.

(5) Bir topolojik kategori de p noktasında T_1 ve $\overline{T_0}$ objeler denk olabilir. p noktasında tüm T_1 , $\overline{T_0}$ ve T_0' objeler denk olabilir. p noktasında ki $\overline{T_0}$ objeler yalnızca diskre obje

olabilir ve p noktasında ki T_0' objeler tüm objeler olabilir. Örneğin **ConLim**, sabit limit uzaylar kategorisinde her obje p noktasında $\overline{T_0}$, T_0' ve T_1 dir.

(6) Bir topolojik kategoride tüm objeler p noktasında T_0' ve $\overline{T_0}$ olabilir. Örneğin **Born**, bornolojik uzayların kategorisinde her obje p noktasında T_0' ve $\overline{T_0}$ dir.

(7) B sonlu olmak üzere (B, L) diskre sabit süzgeç yakınsak uzayı her noktasında $\overline{T_0}$, T_0' ve T_1 dir.

(8) **RRel** yansımalı bağıntı uzaylar kategorisinde (objeleri yansıma bağıntılı uzaylar, morfizmleri ise $f: (X, R) \rightarrow (Y, S)$ dönüşümünde her $a, b \in X$ için aRb olduğunda $f(a)Sf(b)$), (X, R) yansımalı bağıntı uzayı p de T_1 ise p de $\overline{T_0}$ dir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında T_0' , $\overline{T_0}$ ve T_1 sabit süzgeç yakınsak uzaylar p noktasında karakterize edildi. Sabit süzgeç yakınsak uzayların tanımı verilerek sabit süzgeç yakınsak uzayların kategorisi olan **ConFCO** nun bir topolojik kategori olduğu gösterildi. Daha sonra bir p noktasında Wedge çarpımı, Temel Eksen, Skewed Eksen ve Katlama Dönüşümleri tanımlanarak p noktasında T_0' , $\overline{T_0}$ ve T_1 sabit süzgeç yakınsak uzaylar karakterize edildi, noktada ve genelde T_0' , $\overline{T_0}$ ve T_1 sabit süzgeç yakınsak uzaylar aralarındaki ilişkiler araştırıldı. Sabit süzgeç yakınsak uzayların kategorisinin, objeleri lokal T_0' , $\overline{T_0}$ ve T_1 sabit süzgeç yakınsak uzaylardan oluşan **T_0' ConFCO**, **$\overline{T_0}$ ConFCO** ve **T_1 ConFCO** dolu alt kategorileri oluşturuldu. Ardından bu dolu alt kategorilerin çarpımsallık, co-çarpımsallık ve kalıtsallık özellikleri incelendi.

Sabit süzgeç yakınsak uzayların kategorisinde elde edilen T_0 ayırma aksiyomu $KT_2(T_0' \text{ ve } pre\overline{T_2})$, $LT_2(\overline{T_0} \text{ ve } preT_2')$, $MT_2(T_0 \text{ ve } preT_2')$, $NT_2(T_0 \text{ ve } pre\overline{T_2})$, regüler ve normal objelerin karakterize edilmesinde kullanılabilir. T_1 ayırma aksiyomu topolojik kategorilerde bir noktanın kapalılığını tanımlamak için kullanılmaktadır. Dolayısıyla irtibatlılık, kompaktlık, soberlik, kapanış operatörleri gibi kavramlar **ConFCO** da veya başlangıç kaldırması **ConFCO** ile aynı olan diğer topolojik kategorilerde karakterize edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Cartan, H., 1937. Filters and ultrafilters, C. R. Acad. Sci. Paris, 777-779.
2. Choquet, G., 1947. Convergences, Annales de l'université de Grenoble, 23, 55-112.
3. Hausdorff, F., 1935. Gestufte Räume. Fund. Math., 25, 486-502.
4. Katětov, M., 1965. On continuity structures and spaces of mappings, Comm. Math. Univ. Carolinae, 6, 257-278.
5. Kent, D. C., 1964. Convergence functions and their related topologies, Fund. Math., 54, 125-133.
6. Eilenberg, S. ve MacLane, S., 1945. General theory of natural equivalences, Transactions of the American Mathematical Society.
7. Herrlich, H., 1974. Topological structures, In: Math., Centre tracts, 52, 59-122 Math., Centrum, Amsterdam.
8. Wyler, O., 1971. Top. Categories and categorical topology, Gen. Top. Appl., 11, 17-28.
9. Baran, M., 1991. Separation properties, Indian J. Pure. Appl. Math 23, 333-341.
10. Kula M. ve Baran M., 2006. A note on connectedness, Publ. Math. Debrecen, 68, 489-501.
11. Baran, M., 1997. A notion of compactness in topological categories, Publ. Math. Debrecen, 50, 221-234.
12. Erciyes, A. ve Baran, T.M., 2018. Local T_2 constant filter convergence spaces, Turk. J. Math. Comput. Sci. 10, 88-947
13. Erciyes, A. ve Baran, T.M., 2020. Local T_3 constant filter convergence spaces, Gazi University Journal of Science, 33, 2, 446-454.
14. Erciyes, A. ve Baran, T.M., 2021. T_4 , Urysohn's Lemma, and Tietze Extension Theorem for constant filter convergence space, Turk. J. Math., 45, 843-855.
15. Weck-Schwarz, S., 1991. T_0 objects and separated objects in topological categories, Quaestiones Mathematicae, 14, 315-325.
16. Schwarz, F. ve Hannover, T.U., 1978. Connections between convergence and nearness, Lecture Notes in Mathematics, 719, 345-425, Springer-Verlag.
17. Adamek, J., Herrlich, H. ve Strecker, G.E., 1990. Abstract and concrete categories, A Willey-Interscience Publication, New York, USA.

18. Herrlich, H. ve Strecker G.E., 1973. Category theory, Allyn and Bacon inc. Boston, 101, 236-242.
19. Kowalsky, H.J., 1954. Beiträge zur topologischen algebra, Maths., Nachrichten 11, 143-185.
20. Baran, M., 1994. Generalized local separation properties. Indian Journal Pure Applied Mathematics, 25, 615-620.
21. Kula, M. ve Baran, T.M., 2017. T_1 extended pseudo-quasi-semi metric spaces. Applied Mathematics E-Notes, 5, 1, 40-45.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Kübra ÖZDEMİR

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Ahi Evran Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013-2015

: Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015-2017

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2018-2022

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Aksaray Güneşli Ortaokulu, 2018-2019.

2. Aksaray Teknokent Koleji, 2019-

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Özdemir, K. ve Erciyes, A., 2021. Local T_0 and T_1 constant filter convergence spaces, 7th Int. Ifs and Contemporary Mathematics Conference (IFSCOM2021), 25.05.2021-28.05.2021.