



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LOKAL T_0 YARI DÜZGÜN LİMİT YAKINSAK UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nezahat İMZALI

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

AKSARAY, 2019

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342611 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Nezhat İMZALI** tarafından hazırlanan **LOKAL T_0 YARI DÜZGÜN LİMİT YAKINSAK UZAYLAR** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

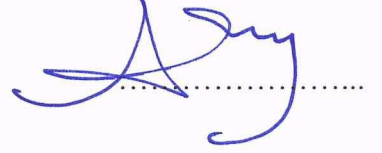
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Dr. Öğr. Üyesi Ali AYTEKİN

Pamukkale Üniversitesi

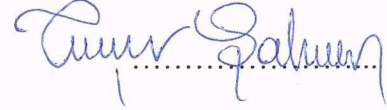
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Dr. Öğr. Üyesi Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Tez Savunma Tarihi: 26/04/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Lokal T_0 Yarı Düzgün Limit Yakınsak Uzaylar konulu yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.



Nezahat İMZALI

TEŞEKKÜR

Tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde değerli zamanını feda ederek, her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen, beni yönlendiren değerli hocam Doç. Dr. Ayhan ERCİYES'e, tezin hazırlanma aşamasında beni yönlendiren ve tecrübelerini benimle paylaşan Aksaray Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca bana verdikleri manevi destek, göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı aileme teşekkür ederim.

Nezahat İMZALI
AKSARAY, 2019

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER.....	6
2.1 Kategori	6
2.2 Fanktor.....	9
2.3 Topolojik Fanktor	11
2.4 Kartezyen Kapalı Kategoriler.....	15
3. DÜZGÜN UZAYLAR.....	16
3.1 Süzgeçler	16
3.2 Düzgün Uzaylar.....	21
4. YARI DÜZGÜN LİMİT YAKINSAK UZAYLAR.....	26
4.1 Yarı Düzgün Limit Yakınsak Uzaylar	26
4.2 SULim Topolojik Kategorisi.....	30
5. LOKAL T_0 YARI DÜZGÜN LİMİT YAKINSAK UZAYLAR	34
5.1 Topolojik Kategorilerde T_0 Objeler	34
5.2 Lokal T_0 Yarı Düzgün Limit Yakınsak Uzaylar.....	36
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	46
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ.....	50

YÜKSEK LİSANS TEZİ
LOKAL T_0 YARI DÜZGÜN LİMİT YAKINSAK UZAYLAR

Nezahat İMZALI

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

ÖZET

SULim, yarı düzgün limit yakınsak uzayların (ve düzgün sürekli fonksiyonlar) kategorisi kuvvetli evrensel topolojik kategoridir yani kartezyen kapalı ve kalıtsaldır. Ayrıca bu kategoride bölüm morfizmlerin çarpımı da bölüm morfizmidir. Bu çalışmanın amacı p noktasında lokal T_0 yarı düzgün limit yakınsak uzayları karakterize etmektir. Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, yarı düzgün limit yakınsak uzayların tarihçesi üzerinde durulmuş olup, literatür taraması mahiyetindedir.

İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan kategori, fanktor, doğal dönüşüm ve topolojik fanktor gibi bazı temel topolojik ve kategorik kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, süzgeç, düzgün uzay kavramları ile ilgili temel tanımlar, özellikler ve beşinci bölümde teoremlerde kullanacağımız bazı sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, **SULim**, yarı düzgün limit yakınsak uzaylar kategorisinin topolojik kategori olduğu gösterilmiştir. Sonrasında **SULim** kategorisindeki bazı özel objeler ve morfizmler karakterize edilmiştir.

Beşinci bölümde, **SULim** kategorisinde p noktasında yarı düzgün limit yakınsak uzay karakterize edilmiştir. Son olarak, $\bar{T}_0\text{SULim}$ kategorisi oluşturulmuş ve bazı önemli sonuçlar verilmiştir.

Son bölümde, sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Topolojik kategori, T_0 objeler, Düzgün uzaylar, Yarı düzgün limit yakınsak uzaylar.

Nisan, 2019; 50 sayfa

M.Sc. THESIS

LOCAL T_0 SEMI UNIFORM LIMIT CONVERGENCE SPACES

Nezahat İMZALI

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

ABSTRACT

The category **SULim** of semi uniform limit convergence spaces (and unifomly continuous maps) is a strong topological universe, i.e., a cartesian closed and hereditary topological category. Moreover, in topological category **SULim**, products of quotients are quotients. The aim of this paper is to characterize local T_0 semi uniform limit convergence spaces at a point p . This thesis is divided into six chapters. A brief description of the contents of each follows:

In the first chapter, the history of semi uniform limit convergence spaces is emphasized and it is a literature review.

In the second chapter, some basic definitions such as the category, functor, natural transformation and topological functor which will be needed later are given.

In the third chapter, basic definitions, properties related to filter and uniform space concepts and some results that we will use in the fifth chapter are given.

In the fourth chapter, the category of semi uniform limit convergence spaces **SULim** has been shown to be the topological category. Later, some special objects and morphisms in this category are characterized.

In the fifth chapter, in the category **SULim**, T_0 semi uniform limit convergence space at a point p is characterized. Finally, the category **$\bar{T}_0$ SULim** is created and some important results are given.

In the last chapter, results and recommendations were given.

Keywords: Topological category, T_0 objects, Uniform spaces, Semi uniform limit convergence spaces.

April, 2019; 50 pages

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kategori
F	Fanktor
$F(X)$	X üzerindeki Süzgeçlerin Kümesi
$\mathbf{Fil}$	Süzgeçler Kategorisi
$\mathbf{FinSets}$	Sonlu Kümeler Kategorisi
$\mathbf{Grp}$	Grupların Kategorisi
$\mathbf{Haus}$	Hausdorff Uzaylar Kategorisi
$\mathbf{Met}$	Metrik Uzaylar Kategorisi
$\mathbf{Mon}$	Monoidlerin Kategorisi
$\mathbf{P}(X)$	X in Kuvvet Kümesi
$\mathbf{Poset}$	Ön Sıralama Bağlantılı Uzaylar Kategorisi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar Kümesi
$\mathbf{Rel}$	Bağıntı Uzaylar Kategorisi
$\mathbf{Ring}$	Halkalar Kategorisi
$\mathbf{Set}$	Cümleler Kategorisi
$\mathbf{SGrp}$	Yarı Grupların Kategorisi
$\mathbf{SUConv}$	Yarı Düzgün Yakınsak Uzaylar Kategorisi
$\mathbf{SULim}$	Yarı Düzgün Limit Yakınsak Uzaylar Kategorisi
$\mathbf{Uconv}$	Düzgün Yakınsak Uzaylar Kategorisi
$\mathbf{Unif}$	Düzgün Uzaylar Kategorisi
$\mathbf{Top}$	Topolojik Uzaylar Kategorisi
$\mathbf{TopGrp}$	Topolojik Grup Uzaylar Kategorisi
$\mathbf{\bar{T}_0SULim}$	T_0 yarı düzgün limit yakınsak uzaylar kategorisi
$\mathbf{T_iTop}$	T_i Topolojik Uzaylar Kategorisi
$\mathbf{Vec}$	Tüm Vektör Uzaylar Kategorisi
η	Doğal Dönüşüm
τ	Topoloji

1. GİRİŞ

Bu bölümde düzgün yakınsak limit uzay kavramının tarihçesi üzerinde durulacaktır.

Metrik uzay kavramı, 1906 yılında Fréchet [1] tarafından ortaya atıldı fakat metrik uzaylar, noktasal yakınsaklığı fonksiyon uzaylarında tanımlamakta yetersiz kalmıştır. Bu yüzden noktasal yakınsaklığın tanımlanabildiği metrik uzaylardan daha geniş olan topolojik uzaylara ihtiyaç duyulmuştur. 1914'te Hausdorff [2] ve 1922 yılında Kuratowski'nin [3] çalışmalarında topolojik uzayları ilk kullanan matematikçilerdir. Objeleri metrik uzaylar ve morfizimleri büzülme dönüşümler olan sınıf olan tüm metrik uzaylar kategorisi **Met** de sonlu çarpımlar ve alt uzaylar mevcuttur. Objeleri topolojik uzaylar, morfizimleri sürekli fonksiyonlar olan **Top** kategorisinde sonlu çarpımlar, alt uzaylar, bölümler, dual çarpımlar gibi daha fazla özellik vardır. Fakat **Top** kategorisinin de eksik olduğu taraflar vardır. Örneğin **Top** kategorisi homotopi teorisinde sıkça kullanılan kartezyen kapalı (Doğal fonksiyon uzaylarının varlığı) bir kategori değildir, bölüm fonksiyonlarının çarpımları bölüm fonksiyonu olmayabilir ve **Top** kategorisinde bölüm dönüşümlerinin kalıtsal olması gerekmez. Bu durum uzayın bağlantılı olup olmaması ile yakından ilişkili bir durumdur. Topolojik uzaylarda, Cauchy süzgeci, tamlık, düzgün süreklilik, düzgün yakınsaklık gibi düzgün kavramlar da tanımlı değildir. Çünkü düzgün süreklilik ve düzgün yakınsaklık gibi kavramlarda uzayın farklı noktalarında komşulukların büyüklüklerine göre karşılaştırılabilir olması gerektiğinden, topolojik uzaylarda bu durum mümkün değildir. Bu durum topolojik uzayların düzgünlük anlamında yetersiz olduğunun bir göstergesidir. Bu sebeplerden dolayı düzgün uzay kavramına ihtiyaç duyulmuştur.

Düzgün uzaylar ilk kez 1937 yılında Weil [4] tarafından bir metrik uzayın genellemesi olarak, düzgün kavramları tanımlayabilmek için ortaya atıldı. Verilen bir küme üzerindeki düzgün yapı aynı küme üzerindeki topolojik yapıyı belirler. Fakat farklı düzgün yapılar aynı topolojik uzayı temsil edebilir. Weil, bir X kümesi üzerindeki düzgün yapıyı X^2 üzerindeki bazı şartları sağlayan bir süzgeç olarak ifade etti. Düzgün sürekli fonksiyonlar ile verilen düzgün uzaylar kategorisi olan **Unif** normalleştirilmiş bir topolojik kategori olmasına rağmen 1978'de Husek ve Rice [5]

Unif in kartezyen kapalı kategori olmadığını gösterdi. Ayrıca tek nokta genişlemesi bu kategoride yoktur.

1965'te Cook ve Fischer [6] düzgün uzayların bir genelleştirilmesi olarak düzgün yakınsak uzayları tanımladı ve objeleri düzgün yakınsak uzaylar, morfizmleri düzgün sürekli fonksiyonlar olan **UConv** nun kartezyen kapalı olduğunu 1976 yılında Lee [7] gösterdi.

UConv kategorisi kalıtsal, bölüm dönüşümleri kalıtsal, (keyfi) çarpımlarının bölüm dönüşümü olduğu bir topolojik kategoridir.

$X \neq \emptyset$ bir cümle ve $F(X \times X)$, $X \times X$ üzerindeki tüm süzgeçlerin sınıfı olsun. $\mathfrak{S} \subset F(X \times X)$ olsun.

(i) Her $x \in X$ için $[x] \times [x] \in \mathfrak{S}$ dir,

(ii) $\alpha \in \mathfrak{S}$ and $\alpha \subset \beta$ için $\beta \in \mathfrak{S}$ dir,

(iii) $\alpha \in \mathfrak{S}$ ve $\beta \in \mathfrak{S}$ ise $\alpha^{-1} \in \mathfrak{S}$ dir,

(iv) $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}$ için ve $\alpha \cap \beta \in \mathfrak{S}$ dir.

(v) $\beta \in \mathfrak{S}$ için ve $\alpha \circ \beta \in \mathfrak{S}$ dir, burada $\alpha \circ \beta = \{(x, y) \mid (x, z) \in \beta \text{ olacak şekilde } \exists z \in X \text{ vardır öyle ki } (z, y) \in \alpha \}$.

olmak üzere $\mathfrak{S}$ yukarıdaki ilk iki şartı sağlarsa $(X, \mathfrak{S})$ ya predüzgün yakınsak uzay denir. $\mathfrak{S}$ yukarıdaki ilk üç şartı sağlarsa $(X, \mathfrak{S})$ ya yarı düzgün yakınsak uzay denir. $\mathfrak{S}$ yukarıdaki ilk dört şartı sağlarsa $(X, \mathfrak{S})$ ya yarı düzgün limit yakınsak uzay denir. $\mathfrak{S}$ yukarıdaki şartların tamamını sağlarsa $(X, \mathfrak{S})$ ya düzgün limit uzay denir. $\mathfrak{S}$ nin elemanlarına ise (pre, yarı)düzgün süzgeçler denir [8], [9], [10], [11], [12].

$(X, \mathfrak{S}_1)$ ve $(Y, \mathfrak{S}_2)$ (pre, semi) düzgün yakınsak uzaylar $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun. $f: (X, \mathfrak{S}_1) \rightarrow (Y, \mathfrak{S}_2)$ düzgün sürekli ancak ve ancak $(f \times f)(\mathfrak{S}_1) \in \mathfrak{S}_2$ dir.

Objeleri predüzgün yakınsak uzaylar, morfizmleri yarı düzgün yakınsak uzaylar arasındaki düzgün sürekli fonksiyonlar olan sınıf bir kategoridir ve **PUConv** şeklinde gösterilir. Objeleri yarı düzgün yakınsak uzaylar, morfizmleri yarı düzgün yakınsak

uzaylar arasındaki düzgün sürekli fonksiyonlar olan sınıf bir kategoridir ve **SUConv** şeklinde gösterilir. Objeleri yarı düzgün limit yakınsak uzaylar, morfizmleri yarı düzgün yakınsak uzaylar arasındaki düzgün sürekli fonksiyonlar olan sınıf bir kategoridir ve **SULim** şeklinde gösterilir. Objeleri yarı düzgün yakınsak uzaylar, morfizmleri yarı düzgün yakınsak uzaylar arasındaki düzgün sürekli fonksiyonlar olan sınıf bir kategoridir ve **UConv** şeklinde gösterilir.

1992’de Behling [12] ve 1995’de Preuss [9] objeleri yarı düzgün yakınsak uzaylar ve morfizmleri düzgün sürekli fonksiyonlar olan **SUConv** kategorisini ortaya attı. Bu kategori simetrik limit uzayları, düzgün uzayları ve düzgün yakınsak uzayları içine alan kuvvetli topolojik evrensel bir kategoridir. ($\mathbb{C}$ kategorisi kartezyen kapalı, kalıtsal ve bölüm morfizmlerin çarpımı bölüm morfizmidir) [10].

SULim kartezyen kapalı, bölüm dönüşümlerinin kalıtsal ve bölüm dönüşümlerinin keyfi çarpımlarının da bölüm dönüşümü olduğu bir topolojik kategoridir. **SULim** kategorisinde topolojik ve düzgün kavramlar mevcut olduğundan süreklilik, Cauchy sürekliliği, düzgün süreklilik, düzgün yakınsaklık, tamlık, kompaktlık, bağlantılılık yapıları için uygun bir kategoridir. Aşağıda verilen kategorilerden herbiri bir önceki kategorinin izomorfizm kapalı dolu alt kategorisidir (her biri bir önceki kategoriye bireflectif olarak gömülebilir) [10].

$$\mathbf{SUConv} \supset \mathbf{SULim} \supset \mathbf{UConv} \supset \mathbf{Unif}$$

Topolojik uzaylar, Kent [13], Wyler [14], Herrlich [15], Schwarz [16], Adamek [17] gibi pek çok matematikçi tarafından topolojik kategoriye genelleştirilmiştir. Topolojide T_i , $i=0, 1, 2, 3, 4$ ayırma aksiyomları, Urysohn Lemması Urysohn, Metrikleştirme Teoremi, Tietze Genişleme Teoremi gibi teoremler ana kavramlardır. Bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genelleştirebilmek için bu kavramları başlangıç ve bitiş kaldırmaları, diskre ve indiskre yapılar ile tanımlamak gerekmektedir. Kompaktlık, bağlantılılık, kapalılık, ayırma aksiyomları gibi önemli topolojik kavramlar zaman içinde pekçok bilim insanı tarafından topolojik kategoriye genelleştirildi.

1990 yılında Baran başlangıç ve bitiş kaldırmaları, diskre ve indiskre objeler kullanarak, topolojik kategorilerde “kapalılık” ve “kuvvetli kapalılık” kavramlarını

direkt olarak tanımladı ve bu kavramların bazı iyi bilinen bazı topolojik kategorilerde kapanış operatörü oluşturduğunu gösterdi [18,19]. Genel topolojide sözü geçen T_i , $i=0, 1, 2, 3, 4$ ayırma aksiyomları Baran tarafından topolojik kategoriye genelleştirmek için çalışılmıştır [20-25]. Bu ayırma aksiyomlarından özellikle T_0 1977 yılında Harvey [26], 1990 yılında Baran [20] tez çalışmasında da sözü geçen T_0 objeyi topolojik kategoriye genişletti ve bu kavramı $\bar{T}_0$ şeklinde gösterdi. 1991 yılında Weck-Schwarz [27] tarafından çalışılmıştır. Baran [20], topolojik uzaylar kategorisindeki alışılmış T_0 aksiyomuna denk olan dört farklı kategorik tanım verdi. 2013 yılında Baran vd., yarı düzgün yakınsak uzayların kategorisinde hem noktada hem de genel olarak T_0 ve T_1 ayırma aksiyomlarını karakterize ettiler [28].

X boştan farklı bir cümle $p \in X$ ve $XV_p X$ ise X in p noktasındaki Wedge çarpımı olsun. Yani X in ayırık iki kopyasının p noktasında çakışması olsun.

(1) p de temel eksen dönüşümü, $A_p: XV_p X \rightarrow X^2$ olmak üzere $A_p(x_1) = (x, p)$ ve $A_p(x_2) = (p, x)$ şeklinde tanımlanır.

(2) p de Skewed eksen dönüşümü, $S_p: XV_p X \rightarrow X^2$ olmak üzere $S_p(x_1) = (x, x)$ ve $A_p(x_2) = (p, x)$ şeklinde tanımlanır.

(3) p de katlama dönüşümü ise $\nabla_p: XV_p X \rightarrow X$ olmak üzere $\nabla_p(x_i) = x$, $i = 1, 2$ şeklindedir.

Baran, yukarıda verilen eksen dönüşümlerini kullanarak topolojik uzaylardaki bu ayırma aksiyomlarının herhangi bir topolojik kategoriye genelleştirilebileceğini göstermiştir[22].

(X, τ) topolojik uzay ve $p \in X$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(1) Bu taktirde (X, τ) p de T_0 dır.

(2) $A_p: X V_p X \rightarrow (X^2, \tau^*)$ ve $\nabla_p: X V_p X \rightarrow (X, P(X))$ dönüşümlerinden elde edilen başlangıç topolojisi diskre dir. Burada τ^* topolojisi X^2 üzerindeki çarpım topolojisidir. $P(X)$ ise X üzerindeki diskre topolojidir [23].

(3) (X, τ) en az iki elemanlı hiçbir indiskre alt uzay ihtiva etmez [27].

(4) İki elemanlı bir indiske topolojik uzaydan (X, τ) topolojik uzayına tanımlı her morfizm sabittir [29].

(5) Tanım cümlesi (X, τ) olan her başlangıç kaynağı mono-kaynaktır [30].

(6) Tanım cümlesi (X, τ) olan her başlangıç morfizmi bir monomorfizmdir [31].

T_0 objeyi ilk kez 1971 yılında Brümmer [31], 1973 yılında Marny [29], 1974 yılında Hoffman [30] ve 1977 yılında ise Harvey [26] topolojik kategoride tanımladılar. 1991’de Weck-Schwarz [27] topolojik kategorilerde genelleştirilmeleri arasındaki ilişkiyi inceledi. 1990 yılında Baran T_0 objeyi topolojik kategoriye genişletti [20].

Bu tez çalışmamızda, $(X, \mathfrak{T})$ bir yarı düzgün limit yakınsak uzayların kategorisi olan **SULim** incelendi. Bitiş objesi, diskre obje, indisre obje, başlangıç kaldırması, final kaldırması gibi yapılar incelendi. Ayrıca ve $p \in X$ olmak üzere bu topolojik kategoride p noktasında T_0 yarı düzgün limit yakınsak obje karakterize edildi. Son olarak ise objeleri T_0 yarı düzgün limit yakınsak uzaylar morfizmleri düzgün sürekli fonksiyonlar olan ve **SULim** kategorisinin dolu alt kategorisi olan **$\bar{T}_0$ SULim** tanımlandı. **$\bar{T}_0$ SULim** kategorisinin **SULim** kategorisinin çarpım ve alt uzaylar altında kapalı olduğu gösterildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1 Kategori

Kategori teorisi, 1945 li yıllarda, Eilenberg ve MacLane tarafından birbirinden oldukça farklı görünen iki alan olan topoloji ve cebir arasında bir bağlantı kurmak için kategori teorisini ortaya attılar [32]. Onlar kendi ifadelerine göre, bu kuramı geliştirirken doğal dönüşümleri anlama çabasındaydılar. Bunu yapabilmek için fanktorları tanımlamak, fanktorları tanımlamak için ise kategoriler tanımlamak gerekiyordu. “General Theory of Natural Equivalences” isimli kitaplarında kategori kavramının tanımını verdiler. Kategori kullanarak, cebirsel topolojinin kavramsal gelişiminin kaçınılmaz olduğu fanktor, doğal dönüşüm gibi temel kavramları da tanımladılar.

Çağdaş matematik ve teorik bilgisayar bilimlerinde merkezi bir konuma sahip olan kategori teorisi, küme teorisine bir alternatif ortaya çıkmıştır. Kategori teorisi kabaca, yapıların ve yapı sistemlerinin genel bir matematik teorisidir. Kategori teorisi, hala gelişmekte olduğundan, ilgi alanları da buna bağlı olarak genişlemekte ve çoğalmaktadır. Kategori teorisi belirli bir yapı ailesinin evrensel bileşenlerini ve farklı türdeki yapıların birbiriyle nasıl ilişkili olduğunu görmemizi sağlayan güçlü bir dil ya da kavramsal bir çerçevedir. Teorik bilgisayar biliminde (programlama dili, programlama mantığı, tip sistemleri, biçimsel anlambilim vb.) önemli bir araç haline gelen cebirsel yapı çalışmalarına matematiksel bir yaklaşım olan kategori teorisi hem felsefi çalışmaların ilginç bir objesi hem de uzay, sistem ve hatta gerçek gibi kavramlardaki felsefi bakış için potansiyel bir araçtır. Bu nedenle, kategori teorisi, filozoflar ve mantıkçılar için önem arz etmektedir.

Tanım 2.1.1 Nesneler (objeler) ile bu nesneler arasındaki tüm dönüşümlerin (morfizimler) sınıfı ve iki dönüşüm için bileşke işleminin tanımlı olduğu ve ayrıca bileşke işleminin aşağıdaki şartları sağlandığı bir yapıya kategori denir.

(i) Her bir obje için $1_A : A \rightarrow A$ birim morfizm mevcut öyle ki her $f : A \rightarrow B$ morfizmi için

$$f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$$

dir,

(ii) Bileşke işlemi birleşme özelliğine sahiptir. Yani $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ ve $h: C \rightarrow D$ iken

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

dir.

Bir K kategorisinde objelerin sınıfı kısaca $Ob(\mathbb{C})$, her bir $A, B \in Ob(\mathbb{C})$ obje çifti için A dan B ye tüm morfizmlerin sınıfı $Mor(\mathbb{C}) = \mathbb{C}(A, B) = Hom_{\mathbb{C}}(A, B) = \{ f \mid f: A \rightarrow B \text{ morfizm} \}$ şeklinde ve verilen iki morfizmin bileşkesi de

$$o: \mathbb{C}(A, B) \times \mathbb{C}(B, C) \rightarrow \mathbb{C}(A, C)$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f$$

şeklinde gösterilebilir.

Örnek 2.1.1 (1) Objeleri kümeler, morfizmleri kümeler arasındaki fonksiyonlar ve bileşke ise fonksiyonların bileşkesi olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye tüm kümelerin kategorisi denir ve **Set** ile gösterilir.

(2) Objeleri topolojik uzaylar, morfizmleri sürekli fonksiyonlar ve bileşke ise sürekli fonksiyonların bileşkesi olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye tüm topolojik uzayların kategorisi denir ve **Top** ile gösterilir.

(3) Objeleri metrik uzaylar, dönüşümleri metrik uzaylar arasındaki büzülme fonksiyonları ve bileşke ise fonksiyonların bileşkesi olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye tüm metrik uzayların kategorisi denir **Met** ile gösterilir. Burada $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y \in X$ için $d(f(x), f(y)) \leq e(x, y)$ ise f ye büzülme fonksiyonu denir.

(4) Objeleri gruplar, dönüşümleri grup homomorfizmleri ve bileşke ise grup homomorfizmlerin bileşkesi olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye tüm grupların kategorisi denir ve **Grp** ile gösterilir.

(5) Objeleri halkalar, dönüşümleri ise halka homomorfizmleri olan ve bileşkesi halka homomorfizmlerin bileşkesi olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye tüm halkaların kategorisi denir ve **Ring** ile gösterilir.

(6) Objeleri (X, R) , (Y, S) bağıntı uzayları, morfizmleri $f : (X, R) \rightarrow (Y, S)$ bağıntı koruyan dönüşümleri ($f : X \rightarrow Y$ bağıntı koruyan dönüşümdür ancak ve ancak $x, y \in X$ olmak üzere xRy olduğunda $f(x)Sf(y)$ dir.) olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye tüm bağıntı uzayların kategorisi denir ve **Rel** ile gösterilir.

(7) Verilen bir $\mathbb{C}$ kategorisinin tüm morfizmleri birim morfizm ise, $\mathbb{C}$ kategorisine diskre kategori adı verilir.

Tanım 2.1.2 $\mathbb{C}$ bir kategori ve $I \in Ob(\mathbb{C})$ olsun. Eğer her $A \in Ob(\mathbb{C})$ için $Hom_{\mathbb{C}}(I, A) = \{f \mid f: I \rightarrow A \text{ morfizm}\}$ tek elemanlı ise I ye $\mathbb{C}$ nin ilk (başlangıç) objesi denir. Eğer her $T \in Ob(\mathbb{C})$ için $Hom_{\mathbb{C}}(T, X) = \{f \mid f: T \rightarrow X \text{ morfizm}\}$ tek elemanlı ise T ye $\mathbb{C}$ nin son (bitiş=terminal) objesi denir.

Set kategorisinde $I = \emptyset$ ilk obje ve $T = \{x\}$ tek elemanlı cümlesi son objedir. Yine benzer düşünce ile **Top** kategorisinde $I = (\emptyset, \tau = \{\emptyset\})$ ilk obje ve $T = (\{x\}, \tau = \{\emptyset, \{x\}\})$ nin son obje olduğu görülebilir.

Tanım 2.1.3 $\mathbb{C}$ bir kategori $Z \in Ob(\mathbb{C})$ olsun. Herhangi bir $X \in Ob(\mathbb{C})$ için en fazla bir $X \rightarrow Z$ morfizmi tanımlanıyorsa Z ye $\mathbb{C}$ kategorisinin alt son objesi (subterminal) denir. Başka bir deyişle her $X \in Ob(\mathbb{C})$ için en az bir $X \rightarrow Z$ morfizmi varsa Z ye zayıf terminal obje (weak terminal) denir. Bir obje terminaldir ancak ve ancak hem subterminal hem de weak terminal objedir [17].

Tanım 2.1.4 $\mathbb{C}$ bir kategori olsun. Verilen bir $\mathbb{D}$ kategorisi için, eğer $\mathbb{D}$ nin obje ve morfizmleri $\mathbb{C}$ nin bazı obje ve morfizmlerinden oluşuyorsa ve $\mathbb{C}$ da ki işlem $\mathbb{D}$ ye kısıtlandığında yani $Hom_{\mathbb{D}}(A, B) \subset Hom_{\mathbb{C}}(A, B)$ olduğunda kategori için gerekli şartlar sağlanıyorsa $\mathbb{D}$ ye $\mathbb{C}$ nin bir alt kategorisi denir [17]. Eğer objelerde kısıtlama

olup ta, morfizmlerinde kısıtlama olmuyorsa $\mathbb{D}$ ye $\mathbb{C}$ nin dolgun (full=dolu) alt kategorisi denir. Yani $Hom_{\mathbb{D}}(A, B) = Hom_{\mathbb{C}}(A, B)$ dir.

Örnek 2.1.2 (1) Her kategori, kendisinin bir full alt kategorisidir.

(2) FiniteSets, objeleri sonlu kümeler olan kategorisi, **Set** nin dolu alt kategorisidir.

(3) Objeleri kümeler, morfizmleri birebir fonksiyonlar ve bileşke ise bilinen fonksiyonlar arasındaki işlem olan yapı bir kategoridir ve **Set** nin bir alt kategorisidir fakat full alt kategorisi değildir.

(4) Grp kategorisi **Mon**, objeleri monoidler olan kategorinin full alt kategorisidir.

(5) Mon kategorisi **SGrp**, objeleri yarı gruplar olan kategorinin alt kategorisidir. Fakat full alt kategorisi değildir.

(6) T_i Top ($i=0,1,2,3,4$) T_i -topolojik uzaylar kategorisi **Top** nin full alt kategorisidir.

(7) Grp, Top kategorileri **Set** kategorisinin alt kategorileri değildir.

2.2 Fanktor

Fanktor, bir kategorinin her objesini başka bir kategorinin bir objesiyle ve bir kategorideki morfizmini diğer bir kategorinin morfizmine ilişkilendiren fonksiyonların genelleştirilmiş halidir. Fanktor kavramı, kısaca kategoriler arasındaki dönüşümler olarak tanımlanabilir. Fanktorlar ilk önceleri cebirsel objelerin (temel grup gibi) topolojik uzaylar ile ilişkili olduğu cebirsel topolojide ele alındı ve bu cebirsel objeler arasındaki morfizmler, uzaylar arasındaki sürekli morfizimler ile ilişkilendirildi. Bu yüzden, fanktorlar kategori teorisinin bulunduğu bilgisayar mühendisliği, fizik, malzeme mühendisliği, jeoloji, klimatoloji vb. matematik alanlarında önemlidir.

Tanım 2.2.1 $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ iki kategori olmak üzere $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ dönüşümü verilsin. $\mathbb{C}$ nin her A objesi için $F(A)$, $\mathbb{D}$ de bir obje ve $\mathbb{C}$ deki her $f: A \rightarrow B$ morfizmi için $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$, $\mathbb{D}$ de bir morfizm olup aşağıdaki şartları sağlayan F ye bir fanktor denir [17].

(i) Her $A \in Ob(\mathbb{C})$ için

$$F(1_A) = 1_{F(A)}$$

dır,

(ii) $g \circ f$ tanımlı olacak şekildeki $f, g \in Mor(\mathbb{C})$ için

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

dır.

Örnek 2.2.1 $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$, $U(X, \tau) = X$ dönüşümü bir fanktordur. Bu şekilde (obje üzerindeki yapı ihmal edilerek) tanımlanan fanktorlara unutkan fanktor denir. Benzer şekilde $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$, $U(G, *) = G$ dönüşümü de unutkan fanktordur.

Örnek 2.2.2 $U: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$, $U(X) = (X, P(X))$ dönüşümü bir fanktordur. Bu fanktora diskre fanktor denir. $U(X) = (X, \{\emptyset, X\})$ şeklinde tanımlanmış olsaydı U bir fanktor olurdu. Bu fanktora ise indiskre fanktor denir.

Örnek 2.2.3 $\mathbb{C}$ bir kategori olmak üzere her $A, B \in Ob(\mathbb{C})$ her $f \in \mathbb{C}(A, B)$ için $1_{\mathbb{C}}(A) = A$ ve $1_{\mathbb{C}}(f) = f$ şeklinde tanımlı $1_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fanktoruna birim fanktor denir.

Tanım 2.2.2 $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ fanktoru verilsin.

(1) Her $A, B \in Ob(\mathbb{C})$ için ve her $f: F(A) \rightarrow F(B)$ dönüşümü için en az bir $g \in \mathbb{C}(A, B)$ dönüşümü var öyle ki $F(g) = f$ ise F ye dolgun (full) fanktor denir [17].

(2) Her $A, B \in Ob(\mathbb{C})$ için ve her $f, g \in \mathbb{C}(A, B)$ dönüşümleri için $F(f) = F(g)$ iken $f=g$ ise F düzenli (faithful) fanktor denir [17].

(3) Her $A \in Ob(\mathbb{C})$ için her $f: A \rightarrow A$ dönüşümü izomorfizm ve $F(f) = 1_{U(A)}$ iken $f=1_A$ ise F ye amnestik fanktor denir [17].

(4) F düzenli ve amnestik ise F ye belirli (concrete) fanktor denir [17].

(5) Eğer $G \circ F = 1_{\mathbb{C}}$ ve $U \circ G = 1_{\mathbb{D}}$ olacak şekilde bir $G: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ fanktoru varsa F bir izomorfizmdir [17].

Tanım 2.2.3 $F, G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ iki fanktor olsun. Her $A, B \in Ob(\mathbb{C})$ ve her $f: A \rightarrow B$ dönüşümü için $\alpha_A: F(A) \rightarrow G(A)$ $\mathbb{D}$ de bir dönüşüm ve $G(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ F(f)$ ise $\alpha: F \rightarrow G$ ye bir doğal dönüşüm denir [17]. Fanktor kavramını, kategoriler arasındaki dönüşümler olarak düşünebildiği gibi doğal dönüşüm kavramı da fanktorlar arasındaki dönüşümler olarak düşünülebilir.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{C} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathbb{D} & & \\
\\
A & & F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A) & & \\
\\
f \downarrow & & F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
\\
B & & F(B) \xrightarrow{\alpha_B} G(B) & &
\end{array}$$

Tanım 2.2.4 $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ kategorileri için $R: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ ve $L: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ fanktorları verilsin. Aşağıdaki şartlar sağlayan L ye R nin sol adjointi veya R ye L nin sağ adjointi denir [17].

(i) $\eta: I \rightarrow R \circ L$ ve $\varepsilon: L \circ R \rightarrow I$ doğal dönüşüm,

(ii) $L \xrightarrow{Ln} LRL \xrightarrow{\varepsilon L} L$ için $(\varepsilon L) \circ (L\eta) = I$ dır,

(iii) $R \xrightarrow{nR} RLR \xrightarrow{R\varepsilon} R$ için $(R\varepsilon) \circ (\eta R) = I$ eşitlikleri sağlanmalıdır.

Örnek 2.2.5 $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ unutkan, $D: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ diskre fanktorlar olsun. $\mathbf{Top} \xrightleftharpoons[D]{U} \mathbf{Set}$

şeklinde tanımlanan fanktorlar için U fanktoru D nin sağ adjointidir.

2.3 Topolojik Fanktor

Topolojik problemler çözmek için sadece topolojik uzaylar değil, aynı zamanda düzgün uzaylar, süzgeç uzaylar, yakınsak uzaylar, vb. kullanılır. Bu uzayların belirttiği kategorilerdeki yapılar büyük bir benzerlik göstermektedir. Yapı, objeleri küme tabanlı olan kategoriler anlamına gelmektedir. Örneğin düzgün uzaylar, düzgün yakınsak uzaylar, süzgeç uzaylar, yakınsak uzaylar, aile uzayları, Cauchy

uzayları, çiftler uzayları, vb., uzayların hepsinin objeleri küme tabanlıdır. Bir topolojik yapı başlangıç kaldırmalara sahip, verilen X kümesi üzerindeki yapılar bir cümle ve tek elemanlı bir cümle üzerindeki yapı tek ise bu kategoriye topolojiktir denir. Bir topolojik kategoride alt uzaylar, bölüm uzayları, çarpım uzayları, toplam uzayları oluşturulabilir.

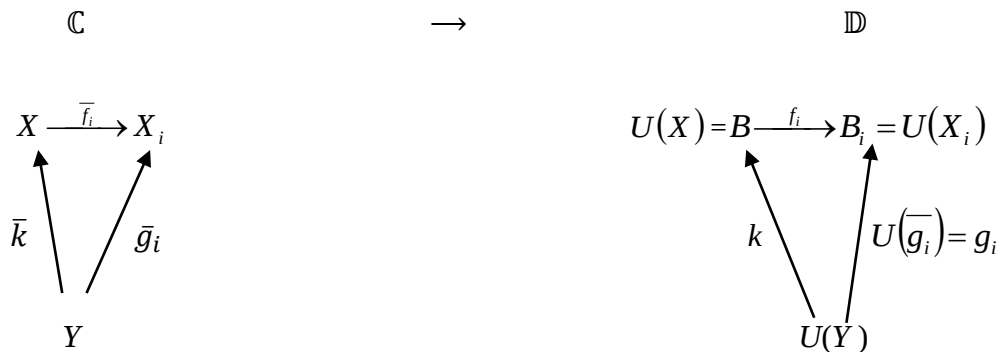
Tanım 2.3.1 $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ herhangi iki kategori, $U: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ bir fanktor olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa U ya topolojik fanktor veya U ya topolojik kategori denir [17].

(i) U belirlidir,

(ii) U küçük demetlere sahiptir. Yani her $A \in Ob(\mathbb{D})$ için $U^{-1}(A) = \{ X \in Ob(\mathbb{C}) | U(X) = A \}$ bir cümle olmalıdır. Burada $U^{-1}(A)$ ifadesi A üzerindeki demet olarak adlandırılır.

(iii) Her U kaynağı bir başlangıç kaldırmasına sahiptir. Yani $\mathbb{D}$ deki her $f_i: U(X) = A \rightarrow U(X_i)$ $i \in I$ ailesi için $(\bar{f}_i) = f_i$ olacak şekilde $\mathbb{C}$ de bir $f_i: X \rightarrow X_i$, $i \in I$ ailesi vardır ve $U(\bar{h}_i: Y \rightarrow X_i) = f_i \circ k: U(Y) \rightarrow U(X) = A \rightarrow U(X_i)$ iken $k: U(Y) \rightarrow U(X)$ dönüşümüne karşılık $\exists \bar{k}: Y \rightarrow X$ dönüşümü mevcuttur ve $U(\bar{k}) = k$, $\bar{f}_i \circ \bar{k} = \bar{g}_i$

Burada kaynak ifadesi şu şeklide belirtilmektedir. $\mathbb{C}$ bir kategori ve $B, B_i \in Ob(\mathbb{C})$ $i \in I$ olmak üzere $f_i: B \rightarrow B_i$, $i \in I$ ailesine kaynak denir.



Tanım 2.3.2 $U: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ topolojik fanktor olsun. Eğer $\mathbb{D}$ nin her X sabit nesnesi için $U^{-1}(B)$ tek bir yapıya sahipse U ya normalleştirilmiş topolojik fanktor denir. Burada sözü geçen sabit obje demek subterminal obje demektir [17].

Teorem 2.3.1 $U: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ fanktoru belirli ve küçük demetlere sahip, $\mathbb{D}$ ise keyfi çarpımlara sahip kategori olsun. $\mathbb{C}$ kategorisi $\mathbb{D}$ kategorisi üzerinde bir topolojik kategoridir ancak ve ancak $\mathbb{C}$ kategorisinde indiskre obje, keyfi çarpımlar ve alt uzaylara sahiptir [17], [26].

Teorem 2.3.2 $f_i: (X, \tau) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ sürekli fonksiyonlar ailesi olsun. $\tau = \tau_*$ olması için ancak ve ancak (Y, σ) topolojik uzayı ve her $g_i: (Y, \sigma) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ sürekli fonksiyonları için eğer $g_i = f_i \circ h$ olacak şekilde $\exists h: Y \rightarrow X$ fonksiyonu varsa h süreklidir.

Burada τ_* topolojisi f_i ler tarafından doğrulan topoloji $\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \{f_i^{-1}(U) : U \in \tau_i\}$ alt bazı tarafından doğrulan(induced) topolojidir. Ayrıca bu topoloji f_i fonksiyonlarını sürekli kılan en küçük topolojidir.

Örnek 2.3.1 $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$, $U(X, \tau) = X$ topolojik fanktordur.

(i) U unutkan fanktor yani $U(X, \tau) = X$ ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ için $U(f) = f: X \rightarrow Y$ şeklinde tanımlansın. $f, g: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ sürekli dönüşümleri için kabul edelim ki $U(f) = U(g)$ olsun. Buradan $f = g$ olur. Yani U düzenlidir. Diğer taraftan $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \varphi)$ sürekli $U(f) = 1_X$ ve f homeomorfizm olsun. Bu durumda $f = 1_{(X, \tau)}$ yani $\tau = \varphi$ olduğunu gösterelim. f ve f^{-1} sürekli ve $U(f) = f = I$ olduğundan $f^{-1}(\varphi) \subset \tau$ olduğundan $\varphi \subset \tau$ dir. $f^{-1}(\tau) \subset \varphi$ olduğundan $\tau \subset \varphi$ olup $\tau = \varphi$ dir. Yani U amnestik. Dolayısıyla U hem düzenli hem de amnestik olduğundan belirlidir.

(ii) $U^{-1}(X) = \{ (X, \tau) | U(X, \tau) = X \}$ ve $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_1)$ sürekli ve $U(f) = 1_X: X \rightarrow X$ olmak üzere cümle olduğunu gösterelim. $\Phi = \{ \tau | \tau, X \text{ üzerinde bir topoloji} \}$ olsun. $\theta: U^{-1}(X) \rightarrow \Phi$ ve $\theta(X, \tau) = \tau$ olarak alınırsa θ nin birebir ve örten olduğu açıktır. Dolayısıyla $U^{-1}(X)$ ile Φ denktir. Φ bir cümle olduğundan $U^{-1}(X)$ de bir cümledir. O halde U küçük demetlere sahiptir.

(iii) $\{ f_i: X \rightarrow U(X_i, \tau_i) = X_i, i \in I \}$ $\mathbf{Set}$ de bir U kaynağı ve τ_* üretilen topoloji olmak üzere $f_i: (A, \tau_*) \rightarrow (A_i, \tau_i)$ verilen kaynağın başlangıç kaldırmasıdır.

Yukarıdaki örnekte geçen **Top** yerine **Unif**, **Rel**, **Fil** kategorileri alındığında da bu kategorilerin topolojik kategori olduğunu görebilir.

Örnek 2.3.2 $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$, $U(G, *) = G$ şeklinde tanımlanan fanktor da **Grp** kategorisinde verilen b , grubun alt kümesi grup olmadığından U topolojik fanktor değildir. Benzer şekilde **Grp** yerine **Met** metrik uzaylar kategorisi, **Haus** tüm Hausdorff uzaylar kategorisi, **Vec** tüm reel vektör uzaylar kategorisi, **Poset** ön sıralama bağıntı uzayları kategorisi alındığında da U nun topolojik fanktor olmadığı görülebilir.

Örnek 2.3.3 **TopGrp** sürekli homomorfizmler ile verilen tüm topolojik grupların kategorisi için $U: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ topolojik kategoridir fakat $U: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Top}$ veya $U: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik kategori değildir.

Örnek 2.3.4 $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ unutkan, $D: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ diskre fanktorlar olsun. $\alpha: I \rightarrow UD$ ve $\beta: DU \rightarrow I$ olmak üzere ise $\alpha: U \rightarrow D$ doğal dönüşümdür. Burada I birim fanktordur, yani $I(A)=A$ dır.

Tanım 2.3.3 $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ kategorileri için $U: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ topolojik fanktoru $D: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ sol adjointine sahipse bu sol adjointe diskre fanktor, $D^*: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ sağ adjointe sahipse bu sağ adjointe indiskre fanktor denir. Yani $X \in Ob(\mathbb{C})$ için $X = D(U(X))$ objesine $\mathbb{C}$ de diskre obje ve $Y = D^*(U(Y))$ objesine ise $\mathbb{C}$ indiskre obje denir [17].

Teorem 2.3.3 $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ kategorileri için $U: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ topolojik fanktoru olsun.

$X \in Ob(\mathbb{C})$ diskredir ancak ve ancak $\mathbb{C}$ nin her Y objesi için $U(X) \rightarrow U(Y)$ dönüşümü $X \rightarrow Y$ kaldırılabilir.

$X \in Ob(\mathbb{C})$ indiskredir ancak ve ancak $\mathbb{C}$ nin her Y objesi için $U(Y) \rightarrow U(X)$ dönüşümü $Y \rightarrow X$ kaldırılabilir [17].

Örnek 2.3.5 **Top** kategorisinde diskre obje diskre topolojik uzaya karşılık gelir. **Grp** kategorisinde diskre obje yoktur. **Fam** aile uzayları kategorisinde boş aile diskre yapıdır. **Rel** tüm bağıntı uzaylarının kategorisinde boş bağıntı diskre yapıdır.

Örnek 2.3.6 **Top** kategorisinde indiske obje indiske topolojik uzaya karşılık gelir. **Grp** kategorisinde tek elemanlı cümle üzerindeki aşık gruplar indiske objedir. **Fam** aile uzayları kategorisinde $F=P(X)$ indiske yapıdır. **Rel** tüm bağıntı uzaylarının kategorisinde $R=X \times X$ bağıntısı diskre yapıdır.

Örnek 2.3.7 $U: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ topolojik fonktöründe **TopGrp** kategorisinin diskre objesi discrete topoloji ile verilen topolojik gruplardır. Fakat $U: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Top}$ fonktöründe **TopGrp** kategorisinin diskre objesi yoktur.

Örnek 2.3.8 $U: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ topolojik fonktöründe **TopGrp** kategorisinin diskre objesi discrete topoloji ile verilen topolojik gruplardır. Fakat $U: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Top}$ fonktöründe **TopGrp** kategorisinin diskre objesi yoktur.

2.4 Kartezyen Kapalı Kategoriler

Tanım 2.4.1 Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathbb{C}$ kategorisine kartezyen kapalı kategori adı verilir [10].

(i) $\mathbb{C}$ sonlu çarpımlara sahip olmalıdır veya buna denk olarak $\mathbb{C}$ bitiş objeye sahip ve her $X, Y \in Ob(\mathbb{C})$ için $X \times Y$ tanımlı olmalıdır.

(ii) $Y, Z \in Ob(\mathbb{C})$ için $\varepsilon_{Y,Z}: Z^Y \times Y \rightarrow Z$ morfizmi vardır öyle ki her $X \in Ob(\mathbb{C})$ objesi ve $f: X \times Y \rightarrow Z$ morfizmi için $(\bar{f} \times id_Y) \circ \varepsilon_{Y,Z} = f$ olacak şekilde tek bir $\bar{f}: X \rightarrow Z^Y$ morfizmi vardır.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\
 \\
 \begin{array}{c} Z^Y \\ \downarrow \exists! \bar{f} \\ X \end{array} & & \begin{array}{ccc} Z^Y \times Y & \xrightarrow{\varepsilon_{Y,Z}} & Z \\ \downarrow \bar{f} \times id_Y & \searrow f & \\ X \times Y & & \end{array}
 \end{array}$$

Örnek 2.4.1 **Top**, **Unif** kategorisi kartezyen kapalı değildir fakat **PUConv**, **SUConv**, **SULim**, **UConv** kategorileri kartezyen kapalıdır [5], [7], [9], [12], [18], [40], [41].

3. DÜZGÜN UZAYLAR

3.1 Süzgeçler

Dizilerin (sequences), ağların (nets) ve süzgeçlerin (filters) yakınsamasından hareketle bir topoloji belirlenebilir. 1914 yılında Hausdorff [2], birinci sayılabilir bir X uzayında, $A \subset X$ olmak üzere A da alınan bir dizinin yakınsadığı noktanın yine A kümesinde olmasının A kümesinin kapalı bir küme olmasını gerektirdiğini ispatladı. 1948 yılında Choquet [33], bir X topolojik uzayın $A \subset X$ olmak üzere A da alınan yakınsak bir süzgecin yakınsadığı noktanın yine A kümesinde olmasının A kümesinin kapalı bir küme olmasını gerektirdiğini ispatladı. Benzer şekilde ağlar ile kapalı küme arasındaki bağıntı ise 1958 yılında Mrowka [34] tarafından verildi.

Ağlar, 1922 yılında Moore ve Smith tarafından tanımlandı [35]. Topolojik uzayların bir genellemesi olan süzgeç uzaylar ilk kez 1937 yılında Fransız matematikçi Cartan tarafından tanımlandı [36]. 1940 yılında Bourbaki, süzgeç kavramını çalışmalarında kullanmıştır [37]. 1948 yılında G. Birkhoff tarafından bir latisteki yakınsaklığı tanımlamak için ağları kullandı [38]. 1954 yılında Kowalsky [39] tarafından bir süzgecin yakınsaklığı tanımı verilmiştir.

Süzgeç uzaylar, bilgisayar ve mühendislikte uygulama alanları olan fuzzy uzaylar konusunun gelişiminde önemli bir role sahip olmasının yanında fonksiyonel analizde, topolojik olmayan yakınsaklık kavramlarının tanımlanmasında kullanılan önemli bir araçtır. Süzgeçler süreklilik, başlangıç-final yapıları, kompaktlık vb. gibi önemli kavramları karakterize etmek için genel topolojide kullanılır.

Çalışmanın bu bölümünde, süzgeç, ultra süzgeç, süzgeç (alt)bazı, yakınsak süzgeç, komşuluklar süzgeci, bir süzgecin yakınsaklığı gibi kavramları tanımlanmıştır. Bu kavramlar ile ilgili teorem ve önermeler ifade ve ispat edilmiştir.

Tanım 3.1.1 $X \neq \emptyset$ bir cümle ve $\emptyset \neq F \subset P(X)$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlayan F sınıfına X üzerinde bir süzgeç ve (X, F) ikilisine ise bir süzgeç uzay denir [10], [16].

(i) $\emptyset \notin F$ dir,

(ii) Her $U, V \in F$ için $U \cap V \in F$ dir,

(iii) $U \in F$ ve $U \subset V$ ise $V \in F$ dir.

Örnek 3.1.1 $X \neq \emptyset$ bir cümle ve $x \in X$ olmak üzere, $[x] = \{ A \subset X \mid x \in A \}$ olsun. $[x]$ ailesi X üzerinde bir süzgeçtir. Bu süzgece x noktasındaki ayrık (diskre) süzgeç denir [10]. $F = \{X\}$ ise F, X üzerinde bir süzgeç olup bu süzgece ayrık olmayan (indiskre) süzgeç denir [10].

Örnek 3.1.2 $X = \{x, y, z\}$ cümlesi verilsin. Bu durumda X üzerindeki bazı süzgeçler;

$$F_1 = \{X\}, F_2 = \{\{x, y\}, X\}, F_3 = \{\{x, z\}, X\},$$

$$F_4 = \{\{y, z\}, X\}, F_5 = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{y\}, X\}, F_6 = \{\{x, z\}, \{x, y\}, \{x\}, X\},$$

$$F_7 = \{\{x, z\}, \{z, y\}, \{z\}, X\}, F_8 = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, X\} = [x],$$

$$F_9 = \{\{y\}, \{x, y\}, \{y, z\}, X\} = [y], F_{10} = \{\{z\}, \{x, z\}, \{y, z\}, X\} = [z]$$

şeklinde dir. Fakat X üzerindeki süzgeç olmayan yapılarda vardır bunlardan bazıları ise;

$$F_{11} = \{\{x\}, \{x, y\}, \{y, z\}, X\}$$

$$F_{12} = \{\{x\}, \{z\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$$

Örnek 3.1.3 $X \neq \emptyset$ bir cümle X üzerindeki tüm süzgeçlerin bir sınıfı $F(X)$ ve de $F_1, F_2 \in F(X)$ için F_1 ile F_2 süzgeçlerinin kesişimi $F_1 \cap F_2 = \{ U \mid U \in F_1 \text{ ve } U \in F_2 \}$ ve birleşimi $F_1 \cup F_2 = \{ U \subset X \mid \exists V \in F_1 \text{ ve } \exists W \in F_2 \text{ vardır öyle ki } V \cap W \subset U \}$ şeklinde tanımlanan sınıflar birer süzgeçtir. Burada süzgeçlerin bileşke işleminin cümlelerin bileşke işleminden farklı olduğu unutulmamalıdır. Çünkü normal bileşke işlemi alınsa idi iki süzgecin bileşkesi süzgeç olmayabilirdi. Örneğin, $F_1 = \{\{a\}, X\}$ ve $F_2 = \{\{b\}, X\}$, X üzerinde iki süzgeç olmak üzere $F_1 \cup F_2 = \{\{a\}, \{b\}, X\}$ olup bir süzgeç değildir.

Örnek 3.1.4 X sonsuz bir cümle ve $\alpha = \{ U \subset X \mid U^c \text{ sonlu} \}$ olmak üzere, α sınıfı X üzerinde bir süzgeç olup bu süzgece sonlu tümleyenler süzgeci (cofinite) denir. Ayrıca $X = \mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesi alınırsa α süzgecine Frechet süzgeci adı verilir.

Örnek 3.1.5 Bir X topolojik uzayında $x \in X$ noktasının tüm komşuluklarının sınıfı N_x bir süzgeçtir. Bu süzgece x in komşuluklar süzgeci denir. Fakat x in açık komşuluklarının sınıfı bir süzgeç değildir. Çünkü açık bir komşuluğu içeren bir kümenin açık olması gerekmez. $\mathbb{R}$ nin alışılmış topolojisine göre $[0,1]$ kapalı aralığı örneğin $\frac{1}{2}$ nin bir komşuluğudur, fakat açık komşuluğu değildir.

Bir (X, τ) topolojik uzayında bir $x \in X$ noktasının tüm komşuluklarının sınıfı N_x ile gösterilsin. x in tüm komşuluklarının sınıfı N_x olacak şekilde X üzerinde $\tau = \{ A \subseteq X \mid \text{her } x \in A \text{ için } A \in N_x \}$ topolojisi vardır. Bu topoloji komşuluklar sisteminden elde edilen topoloji veya kısaca komşuluklar topolojisi olarak adlandırılır. [10].

Teorem 3.1.1 X kümesi ile $x \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $F(x)$ süzgeci verilsin. Bu takdirde $x \in X$ noktasının komşuluklar süzgeci $F(x)$ olacak şekilde X üzerinde bir tek topoloji vardır.

(1) Her bir $A \in F(x)$ için $x \in A$ dır.

(2) Her bir $A \in F(x)$ için $y \in A$ olduğundan $A \in F(y)$ olacak şekilde bir $B \in F(x)$ vardır [10].

Yukarıda verilen teoreme bir örnek vermek gerekirse; $X = \{x, y, z\}$ kümesi ile birlikte

$$F(x) = \{ \{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, X \}, F(y) = \{ \{y\}, \{x, y\}, \{y, z\}, X \}, F(z) = \{ \{z\}, \{y, z\}, X \}$$
 süzgeçleri verilsin.

Bu süzgeçlerin sınıfı komşuluk aksiyomlarını sağladığından yukarıda sözü geçen X üzerinde $\tau = \{ A \subseteq X \mid \text{her } x \in A \text{ için } A \in F(x) \}$ şeklinde tek bir topoloji tanımlanır. Bu topoloji $\tau = \{ \{x\}, \{y\}, \{y, z\}, \{x, y\}, X, \emptyset \}$ şeklindedir. Bu sınıfı yazarken her kümenin kendisini oluşturan elemanların komşuluğunda olanlardan seçildiğine dikkat edilmelidir. Örneğin $\mathcal{T}$ nun içinde $\{x, z\}$ yoktur. Çünkü $\{x, z\}$ kümesi x in komşuluğundadır fakat z nin komşuluğunda değildir.

Tanım 3.1.2 $X \neq \emptyset$ bir cümle ve $\emptyset \neq F \subset P(X)$ olsun. $\beta \neq \emptyset$ bir sınıf olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan β ya X üzerinde bir süzgeç bazı denir.

(i) $\emptyset \notin \beta$

(ii) Her $A, B \in \beta$ için $C \subseteq A \cap B$ olacak şekilde en az bir $C \in \beta$ vardır.

Tanım 3.1.3 X kümesi üzerinde bir F süzgeci verilsin. Her $U \subset X$ için $U \in F$ veya $U^c \in F$ ise veya kendisinden ince bir süzgeç yok ise F ye X üzerinde ultra süzgeç denir. Örneğin, $X = \{x, y, z\}$ olmak üzere $[x] = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, X\}$ bir ultra süzgeçtir fakat $F = \{X\}$ için $A = \{x, y\} \in X$ için $A \notin F$ veya $A^c \notin F$ olduğundan F ultra süzgeç değildir.

Örnek 3.1.6 X ve Y iki cümle ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

(1) β, X için bir süzgeç bazı ise $f(\beta) = \{f(B): B \in \beta\}$ sınıfı da Y için bir süzgeç bazıdır.

(2) α, X için bir süzgeç ise $f(\alpha) = \{f(U): U \in \alpha\}$ sınıfı da Y için bir süzgeç bazıdır.

(3) Eğer $f: X \rightarrow Y$ örten ise α, X üzerinde bir süzgeç ise $f(\alpha) = \{f(U): U \in \alpha\}$ görüntüsü de Y için bir süzgeçtir.

(4) γ, Y için bir süzgeç bazı ise $f^{-1}(\gamma) = \{f^{-1}(U): U \in \gamma\}$ sınıf da X için bir süzgeç bazıdır.

(5) γ, Y için bir süzgeç ise $f^{-1}(\gamma) = \{f^{-1}(U): U \in \gamma\}$ sınıf da X için bir süzgeçtir.

(6) α, X için bir ultra süzgeç ise $f(\alpha)$ görüntüsü Y üzerinde ultra süzgeçtir.

Tanım 3.1.4 (X, τ) topolojik uzay ve F ailesi, X cümlesi üzerinde bir süzgeç olsun. Eğer F süzgeci, bir $x \in X$ noktasının N_x komşuluklar süzgecinden daha ince yani $F \supset \mathcal{N}_x$ ise F süzgeci x noktasına yakınsıyor denir. Bu durumda x noktasına F süzgecinin bir limitidir, ya da limit noktasıdır denir ve $F \rightarrow x$ şeklinde gösterilir [10].

F süzgeci bir x noktasına yakınsıyorsa F den daha ince olan her süzgeç de x noktasına yakınsar. Benzer düşünüşle, eğer daha kaba topoloji alırsak, komşuluklar

süzgeci daha kaba olacağından F süzgecinin yakınsaklığı bozulmaz. Başka bir deyişle, topolojik yapı inceldikçe yakınsak süzgeçler azalır; topolojik yapı kabalaştıkça yakınsak süzgeçler çoğalır. Bir süzgeç birden çok noktaya yakınsayabilir.

Tanım 3.1.5 (X, τ) topolojik uzayında $x \in X$ noktası için $\mathcal{N}_x$ komşuluklar süzgeci olmak üzere $F \cup \mathcal{N}_x$ öz-süzgeç ise x noktasına F nin kapanış noktasıdır denir [10].

Örnek 3.1.7 $X = \{x, y, z, t\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}, \{x, z\}, \{x, z, t\}\}$ ve X üzerinde $F = [x]$ süzgeci tanımlansın. Bu takdirde F süzgeci x, y, z, t noktalarına yakınsar ve bu noktalar aynı zamanda F nin kapanış noktalarıdır.

Örnek 3.1.8 $(X, P(X))$ diskre topolojik uzay, $x \in X$ ve F sınıfı X de bir süzgeç olsun, $F \cup \mathcal{N}_x = F \cup [x] = P(X)$ ise x noktası F nin kapanış noktası değildir. $F \cup [x] = [x]$ ise x noktası F nin kapanış noktasıdır.

Örnek 3.1.9 $X \neq \emptyset$ bir cümle ve $\tau = \{\emptyset, X\}$ olmak üzere (X, τ) indiskre topolojik uzay, F bir öz-süzgeç olsun. $\mathcal{N}_x = \{U \subset X \mid x \in X \subset U\} = \{X\}$ dir. F süzgeç olduğundan her zaman $X \in F$ dir. Dolayısıyla $F \supset \mathcal{N}_x$ dir. Bu ise F süzgecinin her zaman x noktasına yakınsadığını gösterir. $F \cup \mathcal{N}_x = F \cup \{X\} = F$ öz-süzgeç olduğundan her x noktası F nin kapanış noktasıdır

Teorem 3.1.2 X ve Y topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $x \in X$ için f fonksiyonu x de süreklidir ancak ve ancak x noktasına yakınsayan her bir F süzgeci için yani $F \rightarrow x$ ise $f(F) \rightarrow f(x)$ dir [10].

Tanım 3.1.6 ([10]) $X \neq \emptyset$ bir cümle olmak üzere α ve β , X üzerindeki iki süzgeç, $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun.

(1) $\alpha \cap \beta = \{U \subset X \mid U \in \alpha \text{ ve } U \in \beta\}$ dir.

(2) $\alpha \cup \beta = \{U \subset X \mid \exists V \in \alpha \text{ ve } \exists W \in \beta \text{ öyle ki } U \supset V \cap W\}$ dir.

(3) $f(\alpha) = \{V \subset Y \mid \exists U \in \alpha \text{ öyle ki } V \supset f(U)\}$ dir.

(4) $\alpha \times \beta = \{U \subset X \times X \mid \exists V \in \alpha \text{ ve } \exists W \in \beta \text{ öyle ki } U \supset V \times W\}$ dir.

Tanım 3.1.7 ([10]) $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $A, B, C, D \subset X$ için,

(1) $A \subset B$ ve $C \subset D$ olmak üzere $[C] \times [D] \subset [A] \times [B]$ dir.

(2) $[A] \times [B] = [A \times B]$ dir.

(3) $[A] \cap [B] = [A \cup B]$ dir.

Teorem 3.1.3 ([10], [40], [41]) $X \neq \emptyset$ bir küme, α ve β , $X \times X$ üzerindeki iki süzgeç ve $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ fonksiyonlar olsun. $f \times f: X^2 \rightarrow Y^2$ olmak üzere,

(1) $(f \times f)(\alpha \cap \beta) = (f \times f)(\alpha) \cap (f \times f)(\beta)$ dir.

(2) Eğer $\alpha \subset \beta$ ise $(f \times f)(\alpha) \subset (f \times f)(\beta)$ dir.

(3) $((g \times g) \circ (f \times f))(\alpha \times \beta) = (g \circ f)(\alpha) \times (g \circ f)(\beta)$ dir.

(4) $(f \times f)(\alpha) \cup (f \times f)(\beta) \subset (f \times f)(\alpha \cup \beta)$ dir.

(5) α ve β , X üzerindeki iki süzgeç olmak üzere, $(f \times f)(\alpha \times \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$ ve $f \times f: X \times X \rightarrow Y \times Y$ için $(f \times f)(x, y) = f(x) \times f(y)$ dir.

3.2 Düzgün Uzay

Çalışmanın bu bölümünde düzgün uzaylar ve düzgün uzayların diğer uzaylar ile arasındaki ilişkiyi açıklayan teoremler verilecektir. Ardından objeleri düzgün uzaylar, morfizimleri düzgün sürekli fonksiyonlar olan **Unif** kategorisinin topolojik kategori olduğu gösterilecektir.

Tanım 3.2.1 A ve B boştan farklı iki cümle ve $U \subseteq A \times B$ cümlesine A dan B ye bir bağıntı denir. $U, V \subseteq A \times B$ iki bağıntı olmak üzere,

(1) $U \circ V = \{ (x, z) \mid \exists y \text{ için } (x, y) \in V \text{ ve } (y, z) \in U \}$ dir.

(2) $U^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in U \}$ dir.

(3) $\Delta = \{ (x, x) \mid x \in A \}$ dir.

şeklinde tanımlanır. Bundan başka $U, V, W \subseteq A \times A$ bağıntılar olmak üzere,

(1) $U \subset V$ ise $U^{-1} \subset V^{-1}$ dir.

(2) $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$ dir.

(3) $(U \circ V) \circ W = U \circ (V \circ W)$ dir.

Verilen bir X cümlesi üzerindeki tüm süzgeçlerin cümlesi $F(X)$ ile gösterilir. $U \subset X$ olmak üzere $[U] = \{V \subset X \mid U \subset V\}$ ve $[\{x\}] = [x] = \{V \subset X \mid \{x\} \subset V\}$ şeklinde tanımlanır. Eğer $\emptyset \in \alpha$ ise yani $\alpha = P(X) = [\emptyset]$ ise α ya X üzerinde bir öz olmayan süzgeç (improper) denir.

Örnek 3.2.1 $X \neq \emptyset$ bir cümle ve $U \subset X$ olmak üzere $\alpha = \{X\}$, $\alpha = [x]$ ve $\alpha = [U]$ sınıfları X üzerinde birer süzgeçtir.

Tanım 3.2.2 $X \neq \emptyset$ bir cümle ve $\varphi \subset P(X \times X)$ bir süzgeç olmak üzere aşağıdaki sağlayan φ ye X üzerinde düzgün yapı ve (X, φ) ikilisine ise düzgün uzay denir [10].

(i) Her $U \in \varphi$ için $\Delta \subset U$ dır,

(ii) Her $U \in \varphi$ için $U^{-1} \in \varphi$ dir,

(iii) Her $U \in \varphi$ için en az bir $V \in \varphi$ vardır öyle ki $W \circ V \subset U$ dur.

Örnek 3.2.4 $X = \{a, b\}$ olsun.

$\varphi_1 = \{\Delta, \{(a, a), (b, b), (a, b)\}, \{(a, a), (b, b), (b, a)\}, X^2\}$ ailesi X üzerinde düzgün bir yapıdır.

$\varphi_2 = \{\Delta, \{(a, a), (a, b)\}, X^2\}$ ailesi X üzerinde düzgün bir yapı değildir.

$\varphi_3 = \{\Delta, \{(a, a), (b, b), (a, b)\}, X^2\}$ ailesi X üzerinde düzgün bir yapı değildir.

Örnek 3.2.5 $X \neq \emptyset$ bir cümle olmak üzere $\varphi = \{U \subset X \times X \mid \Delta \subset U\}$ ailesi için (X, φ) diskre (ayrık) düzgün uzaydır. Diskre düzgünlük X üzerindeki en güçlü düzgünlüktür.

$\varphi = \{ X \times X \}$ ailesi için (X, φ) indiskre (ayrık olmayan) düzgün uzaydır. İndiskre düzgünlük X üzerindeki en zayıf düzgünlüktür

Tanım 3.2.3 ([42]) $X \neq \emptyset$ bir cümle ve $\emptyset \neq \mathfrak{B} \subset P(X^2)$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathfrak{B}$ sınıfına X için bir düzgün baz denir.

(i) $U \in \mathfrak{B}$ ise $\Delta \subset U$ dir,,

(ii) $U \in \mathfrak{B}$ ise en az bir $V \in \mathfrak{B}$ vardır öyle ki $V \subset U^{-1}$ dir,

(iii) $U \in \mathfrak{B}$ ise en az bir $V \in \mathfrak{B}$ vardır öyle ki $V \circ V \subset U$ dir,

(iv) $U, V \in \mathfrak{B}$ ise en az bir $W \in \mathfrak{B}$ vardır öyle ki $W \subset U \cap V$ dir.

Teorem 3.2.1 $X \neq \emptyset$ bir cümle ve $\mathfrak{B}$ sınıfı X üzerinde düzgün bir baz olsun. Bu takdirde $\varphi = \{ U \subset B \times B \mid \exists V \in \mathfrak{B} \text{ öyle ki } U \supset V \}$ ailesi X üzerinde düzgün bir yapıdır.

Örnek 3.2.6 $\varepsilon > 0$ ve $D_\varepsilon = \{ (x, y) \mid |x - y| < \varepsilon \} \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathfrak{B} = \{ D_\varepsilon \mid \varepsilon > 0 \}$ ailesi $\mathbb{R}$ üzerindeki düzgün bir yapı için bazdır. Bu düzgünlüğe $\mathbb{R}$ üzerindeki doğal düzgünlük denir.

Teorem 3.2.2 Her metrik uzay düzgün uzaydır.

İspat. (X, d) metrik uzay ve $S_\varepsilon = \{ (x, y) : d(x, y) < \varepsilon \}$ olmak üzere $\mathfrak{B}_d = \{ S_\varepsilon \mid \varepsilon > 0 \}$ ailesi bir düzgün bazdır. Teorem 3.1.1 den dolayı $\varphi_d = \{ U \mid \exists V \in \mathfrak{B}_d \text{ öyle ki } V \subset U \}$ X için bir düzgünlüktür. Dolayısıyla (X, φ_d) bir düzgün uzaydır.

Şimdi bu teoremin tersinin doğru olmadığını gösterelim.

Her metrik uzaya üzerinde verilen metriğe uygun bir düzgün yapı karşılık gelir. Fakat her düzgün uzay bir metrik uzay değildir. $X \neq \emptyset$ bir cümle olmak üzere X üzerindeki $\varphi = \{ X \times X \}$ indiskre düzgün yapı olsun. Eğer bu φ düzgün yapısı bir metrik tarafından elde edilseydi üzerindeki her nokta $X \times X$ in elemanı olurdu. Dolayısıyla bu noktalar için $d(x, y) < \varepsilon$ olmak üzere $(x, y) \in S_\varepsilon$ olmasına rağmen

$(x, y) \notin S_{\varepsilon/2}$ olur. Fakat gerek S_ε gerekse $S_{\varepsilon/2}$ sınıfları $X \times X$ den oluşmaktadır. Bu ise çelişki meydana getirir.

Teorem 3.2.3 Her düzgün uzay topolojik uzaydır.

İspat. Kabul edelim ki (X, φ) düzgün uzay, her $x \in X$ ve her $U \in \varphi$ için $U(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in U\}$ olsun. $N_x = \{U(x) \mid U \in \varphi\}$ ailesi x noktasındaki komşuluklar ailesidir. Bu aileden elde edilen $\tau_\varphi = \{U \subseteq X \mid \exists V \in N_x \text{ vardır öyle ki } V \subseteq U\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir.

Her düzgün uzaya üzerindeki yapıya uygun bir topolojik karşılık gelir. Fakat her topolojik uzay bir düzgün uzay değildir.

Bunun dışında diskre düzgün uzaydan oluşan topoloji diskre topoloji, indiskre düzgün uzaydan oluşan topoloji indiskre topolojidir.

Teorem 3.2.4 Her düzgün uzay süzgeç uzaydır.

İspat. (X, φ) düzgün uzay olmak üzere, $F_\varphi = \{\alpha \in F(X) \mid \forall V \in \varphi \text{ için } \exists U \in \alpha \text{ vardır öyle ki } U \times U \subset V\}$ ailesi X üzerinde bir süzgeçtir. Fakat bu teoremin tersi genelde doğru değildir.

Tanım 3.2.4 (X, φ) ve (Y, ρ) iki düzgün uzay ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun. Aşağıda birbirine denk olan şartlardan herhangi biri sağlanırsa $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonuna düzgün süreklidir denir.

(i) Her $U \in \rho$ için en az bir $V \in \varphi$ vardır öyle ki $(f \times f)(V) \subset U$ dir,

(ii) Her $U \in \rho$ için $(f \times f)^{-1}(U) \in \varphi$ dir.

Teorem 3.2.5 Düzgün sürekli fonksiyonların bileşkesi düzgün süreklidir.

Tanım 3.2.5 Objeleri düzgün uzaylar, dönüşümleri düzgün sürekli fonksiyonlar ve bileşkesi ise düzgün sürekli fonksiyonlar arasındaki bileşke olarak tanımlanan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye tüm düzgün uzaylar kategorisi denir ve **Unif** şeklinde gösterilir. **Unif** kategorisi **SULim** in kategorisinin dolu alt kategorisidir.

Teorem 3.1.6 $U:\mathbf{Unif}\rightarrow\mathbf{Set}$, unutkan fanktoru topolojik fanktordur.



4. YARI DÜZGÜN LİMİT YAKINSAK UZAYLAR

1965 te Cook ve Fischer [6] düzgün uzayların bir genelleştirilmesi olarak kartezyen kapalı bir kategori oluşturan düzgün yakınsak uzayları (düzgün limit uzayları) geliştirdi. Uniform uzayların kategorisi, düzgün yakınsak uzayların kategorisine gömülebilir. 1976 yılında Lee [7] düzgün yakınsak uzayların kategorisinin kartezyen kapalı olduğunu gösterdi. 1992 yılında Behling [12] düzgün yakınsak uzayların ve yarı düzgün yakınsak uzayların bir genellemesi olan yarı düzgün limit yakınsak uzay kavramını tanımladı. Yarı düzgün limit yakınsak uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonların) kategorisi olan **SULim** kartezyen kapalı, bölüm dönüşümlerinin kalıtsal ve bölüm dönüşümlerinin keyfi çarpımlarının da bölüm dönüşümü olduğu bir topolojik kategoridir. **SULim** kategorisinde topolojik ve düzgün kavramlar mevcut olduğundan süreklilik, Cauchy sürekliliği, düzgün süreklilik, düzgün yakınsaklık, tamlık, kompaktlık, bağlantılılık yapıları için uygun bir kategoridir.

Çalışmanın bu bölümünde yarı düzgün limit yakınsak uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonların) kategorisi olan **SULim** incelenmiştir.

4.1 Yarı Düzgün Limit Yakınsak Uzaylar

Tanım 4.1.1 (1) $X \neq \emptyset$ bir cümle ve $F(X \times X)$, $X \times X$ üzerindeki tüm süzgeçlerin sınıfı olsun. $\mathfrak{S} \subset F(X \times X)$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $\mathfrak{S}$ ailesine yarı düzgün limit yakınsak yapı ve $(B, \mathfrak{S})$ ikilisine ise yarı düzgün limit yakınsak uzay adı verilir [10].

(i) Her $x \in X$ için $[x] \times [x] \in \mathfrak{S}$ dir,

(ii) $\alpha \in \mathfrak{S}$ and $\alpha \subset \beta$ için $\beta \in \mathfrak{S}$ dir,

(iii) $\alpha \in \mathfrak{S}$ ve $\beta \in \mathfrak{S}$ ise $\alpha^{-1} \in \mathfrak{S}$ dir,

(iv) $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}$ için ve $\alpha \cap \beta \in \mathfrak{S}$ dir.

Yukarıda belirtilen ilk şartlara ilave olarak $\alpha \in \mathfrak{S}$ ve $\beta \in \mathfrak{S}$ olmak üzere $\alpha \circ \beta \in \mathfrak{S}$ olması durumunda $\mathfrak{S}$ ailesine yarı düzgün yakınsak yapı ve $(X, \mathfrak{S})$ ikilisine ise yarı düzgün yakınsak uzay adı verilir. Objeleri yarı düzgün yakınsak uzaylar, morfizmleri yarı düzgün

yakınsak uzaylar arasındaki düzgün sürekli fonksiyonlardan oluşan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye yarı düzgün limit yakınsak uzaylar kategorisi denir ve **SUConv** şeklinde gösterilir. **SUConv** kategorisi **SULim** in kategorisinin dolu alt kategorisidir.

(2) $(X, \mathfrak{S}_1)$ ve $(Y, \mathfrak{S}_2)$ düzgün limit yakınsak uzaylar $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun. $f: (X, \mathfrak{S}_1) \rightarrow (Y, \mathfrak{S}_2)$ düzgün süreklidir ancak ve ancak $(f \times f)(\alpha) \in \mathfrak{S}_2$ dir [10].

(3) Objeleri yarı düzgün limit yakınsak uzaylar, morfizmleri yarı düzgün limit yakınsak uzaylar arasındaki düzgün sürekli fonksiyonlardan oluşan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye yarı düzgün limit yakınsak uzaylar kategorisi denir ve **SULim** şeklinde gösterilir [10].

(4) **SULim** kategorisinde $\{f: (X, \mathfrak{S}) \rightarrow (X_i, \mathfrak{S}_i), i \in I\}$ kaynağı bir başlangıç kaldırmasıdır ancak ve ancak her $i \in I$ için $(f_i \times f_i)(\alpha) \in \mathfrak{S}_i$ dir [10].

Teorem 4.1.1 **SULim** kategorisinde,

(1) $X = \emptyset$ olmak üzere $(\emptyset, \mathfrak{S})$ ilk objesidir.

(2) $X = \{x\}$ olsun. Bu taktirde tek elemanlı cümle içerisindeki yarı düzgün limit yakınsak yapı $\mathfrak{S} = \{[\emptyset], [x] \times [x]\}$ dir. $(X, \mathfrak{S})$ son objesidir.

İspat. **SULim** kategorisinde $I =$ İlk obje, $T =$ Son objeyi temsil etmek üzere,

(1) $I = \emptyset$ olarak seçersek X üzerindeki yarı düzgün yakınsak limit yapı tek olup $\mathfrak{S} = \{[\emptyset]\}$ şeklindedir. $(X, \mathfrak{S}')$ herhangi bir yarı düzgün limit yakınsak uzay olmak üzere $f: (I, \mathfrak{S}) \rightarrow (X, \mathfrak{S}')$ fonksiyonu sadece boş fonksiyondur. Dolayısıyla $(I, \mathfrak{S})$ ikilisi **SULim** kategorisinde ilk objesidir.

(2) $T = \{x\}$ olsun. T üzerindeki tek yarı düzgün limit yakınsak yapı $\mathfrak{S} = \{[\emptyset], [x] \times [x]\}$ dir. $(X, \mathfrak{S}')$ herhangi bir yarı düzgün limit yakınsak uzayı için $f: (X, \mathfrak{S}') \rightarrow (T, \mathfrak{S})$ fonksiyonu sabit fonksiyon olacağından $(f \times f)([\emptyset]) = [\emptyset] \in \mathfrak{S}'$ ve $(f \times f)([x] \times [x]) = [c] \times [c] \in \mathfrak{S}'$ olur. Dolayısıyla $(T, \mathfrak{S})$ ikilisi **SULim** kategorisinde bitiş objesidir.

Teorem 4.1.2 SULim kategorisinde,

(1) X üzerindeki $\mathfrak{S}_d$ diskre yarı düzgün limit yakınsak yapı,

$$\mathfrak{S}_d = \{ [\emptyset], [x] \times [x], \bigcap_{x \in A} [x] \times [x] \mid A, X \text{ in sonlu alt cümlesidir} \}$$

şeklindedir.

(2) X üzerindeki $\mathfrak{S}_i$ indiskre yarı düzgün limit yakınsak yapı,

$$\mathfrak{S}_i = F(X \times X)$$

şeklindedir.

İspat. (1) $X \neq \emptyset$ bir cümle olmak üzere, $(X, \mathfrak{S}_d)$ yarı düzgün limit yakınsak uzaydır. Her $(Y, \mathfrak{S})$ yarı düzgün limit yakınsak uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu için $f: (X, \mathfrak{S}_d) \rightarrow (Y, \mathfrak{S})$ nin düzgün sürekli olduğunu gösterelim. $\alpha \in \mathfrak{S}_d$ için

$$\alpha = [\emptyset] \text{ ise } (f \times f)([\emptyset]) = [\emptyset] \in \mathfrak{S}$$

$$\alpha = [x] \times [x] \text{ ise } (f \times f)([x] \times [x]) = [f(x)] \times [f(x)] \in \mathfrak{S}$$

$$\alpha = \bigcap_{x \in A} [x] \times [x] \text{ ise bu durumda,}$$

$(f \times f)(\bigcap_{x \in A} [x] \times [x]) = \bigcap_{x \in A} (f \times f)([x] \times [x]) = \bigcap_{x \in A} [f(x)] \times [f(x)] \in \mathfrak{S}$ dir. Burada A, X in sonlu alt cümlesidir. Dolayısıyla $(X, \mathfrak{S}_d)$ diskre yarı düzgün limit yakınsak uzaydır.

(2) $\mathfrak{S}_i = F(X \times X)$ olsun. Bu taktirde $(Y, \mathfrak{S})$ yarı düzgün limit yakınsak uzay olmak üzere $f: Y \rightarrow X$ fonksiyonu için $f: (Y, \mathfrak{S}) \rightarrow (X, \mathfrak{S}_i)$ nin düzgün sürekli olduğunu gösterelim. $\alpha \in \mathfrak{S}$ ise $(f \times f)(\alpha) \in \mathfrak{S}_i$ olup f fonksiyonu süreklidir.

Örnek 4.1.3 $X = \{x\}$ olsun. Bu takdirde X üzerindeki yarı düzgün limit yakınsak yapı $\mathfrak{S}_d = \mathfrak{S}_i = \{[\emptyset], [x] \times [x]\} = F(X \times X)$ şeklinde olup tektir.

Örnek 4.1.4 $X = \{x, y\}$ olsun. Bu takdirde X üzerindeki yarı düzgün limit yakınsak yapılar iki tane olup aşağıdaki gibidir.

$\mathfrak{I}_d = \{[\emptyset], [x] \times [x], [y] \times [y], ([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y])\}$ diskre yapı.

$\mathfrak{I}_i = \{[\emptyset], [x] \times [x], [y] \times [y], [x] \times [X], [X] \times [x], [X] \times [y], [y] \times [X], [x] \times [y], [y] \times [x], ([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]), ([y] \times [y]) \cap ([x] \times [X]), ([y] \times [y]) \cap ([X] \times [x]), ([x] \times [X]) \cap ([X] \times [x]), ([x] \times [X]) \cap ([y] \times [x]), ([x] \times [y]) \cap ([y] \times [x]), [X] \times [X]\} = F(X \times X)$ indiskre yapı.

Örnek 4.1.5 $X = \{x, y, z\}$ olsun. Bu takdirde X üzerindeki diskre ve indiskre yarı düzgün limit yakınsak yapı aşağıdaki gibidir.

$\mathfrak{I}_d = \{[\emptyset], [x] \times [x], [y] \times [y], [z] \times [z], ([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]), ([x] \times [x]) \cap ([z] \times [z]), ([y] \times [y]) \cap ([z] \times [z]), ([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]) \cap ([z] \times [z])\}$ diskre yapı.

$\mathfrak{I}_i = F(X \times X)$

Örnek 4.1.7 $X \neq \emptyset$ bir cümle olmak üzere $\delta = \{U \subset X \times X \mid \Delta \subset U\}$ için $\mathfrak{I} = \{\alpha \in F(X \times X) \mid \delta \subset \alpha\}$ olsun. $(X, \mathfrak{I})$ yarı düzgün limit yakınsak uzaydır.

$a \in X$ ve $U \in \delta$ olsun. $\Delta \subset U$ olduğundan $(a, a) \in U$ ve dolayısıyla $U \in [a] \times [a]$ olur. Bu ise $[a] \times [a] \in \mathfrak{I}$ olduğunu gösterir.

$\alpha \in \mathfrak{I}$ ve $\alpha \subset \beta$ olsun. $\alpha \in \mathfrak{I}$ ve $\delta \subset \alpha$ olduğundan $\delta \subset \alpha \subset \beta$ dir. Dolayısıyla $\beta \in \mathfrak{I}$ dir.

$\alpha \in \mathfrak{I}$ olsun. $\delta \subset \alpha$ olur. Buradan $\delta = \delta^{-1} \subset \alpha^{-1}$ yazılabilir. Bu ise $\alpha^{-1} \in \mathfrak{I}$ olduğunu gösterir.

$\alpha, \beta \in \mathfrak{I}$ olmak üzere $\alpha \cap \beta \in \mathfrak{I}$ olduğunu gösterelim. $\alpha, \beta \in \mathfrak{I}$ olduğundan $\delta \subset \alpha$ ve $\delta \subset \beta$ dir. Buradan $\delta \subset \alpha \cap \beta$ olur ki bu ise $\alpha \cap \beta \in \mathfrak{I}$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $(X, \mathfrak{I})$ yarı düzgün limit yakınsak uzaydır.

Teorem 4.1.3 Her düzgün uzay yarı düzgün limit yakınsak uzaydır.

İspat: (X, φ) düzgün uzay olsun. $\mathfrak{I}_\varphi = \{\alpha \in F(X^2) \mid \varphi \subset \alpha\}$ ailesi için $(X, \mathfrak{I})$ ikilisinin yarı düzgün limit yakınsak uzay olduğunu gösterelim.

(i) $x \in X$ ve $U \in \varphi$ olsun. $\Delta \subset U$ olduğundan $(x, x) \in U$ dur. Bu durumda $U \in [x] \times [x]$ ve dolayısıyla $[x] \times [x] \in \mathfrak{S}_\varphi$ olur.

(ii) $\alpha \in \mathfrak{S}_\varphi$ ve $\alpha \subset \beta$ olsun. $\varphi \subset \alpha \subset \beta$ olduğundan $\beta \in \mathfrak{S}_\varphi$ dır.

(iii) $\alpha \in \mathfrak{S}_\varphi$ olsun. Buradan $\varphi \subset \alpha$ olur. $U \in \varphi$ iken $U^{-1} \in \varphi$ dolayısıyla $U^{-1} \in \alpha$ olur. Buradan $\varphi \subset \alpha^{-1} \in \mathfrak{S}_\varphi$ olur.

(iv) $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}_\varphi$ olmak üzere $\alpha \cap \beta \in \mathfrak{S}_\varphi$ olduğunu gösterelim. $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}_\varphi$ olduğundan $\varphi \subset \alpha$ ve $\varphi \subset \beta$ dir. Buradan $\varphi \subset \alpha \cap \beta$ olur ki bu ise $\alpha \cap \beta \in \mathfrak{S}_\varphi$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $(X, \mathfrak{S})$ yarı düzgün limit yakınsak uzaydır.

4.2 SULim Topolojik Kategorisi

Teorem 4.2.1 $U: \text{SULim} \rightarrow \text{Set}$ her $(X, \mathfrak{S}) \in \text{Ob}(\text{SULim})$ için $U((X, \mathfrak{S})) = X$ ve her $f: (X, \mathfrak{S}) \rightarrow (Y, \mathfrak{S}')$ düzgün sürekli fonksiyonunu $f: X \rightarrow Y$ fonksiyona götüren, unutkan fanktoru topolojik fanktordur.

İspat. Topolojik kategori şartlarını sağlatalım.

(i) İlk önce U nun belirli olduğunu, yani düzenli ve amnestik olduğunu gösterelim. $f, g: (X, \mathfrak{S}) \rightarrow (Y, \mathfrak{S}')$ düzgün sürekli fonksiyonlar ve $U(f) = U(g)$ olsun. U unutkan fanktor olduğundan $U(f) = f = g = U(g)$ olur ki bu da $f = g$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla U düzenlidir. $f: (X, \mathfrak{S}) \rightarrow (X, \mathfrak{S}')$ izomorfizm ve $U(f) = f = id_X$ olsun. $f = id_{(X, \mathfrak{S})}$ olduğunu gösterelim. $\alpha \in \mathfrak{S}$ olmak üzere f izomorfizm olduğundan f birebir örten sürekli ve tersi de sürekli dir. $(f \times f)(\alpha) = (id_X \times id_X)(\alpha) = \alpha \in \mathfrak{S}'$ olur. Dolayısıyla $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$ dır. Diğer taraftan $\alpha \in \mathfrak{S}'$ olsun. f^{-1} sürekli olduğundan $(f^{-1} \times f^{-1})(\alpha) = (id_X^{-1} \times id_X^{-1})(\alpha) = (id_X \times id_X)(\alpha) = \alpha \in \mathfrak{S}$ dır. Dolayısıyla $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ dır. O halde $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$ olur ve U amnestiktir.

(ii) U nun küçük demetlere sahip olduğunu gösterelim.

$$U^{-1}(X) = \{ (X, \mathfrak{S}) \mid U((X, \mathfrak{S})) = X \}$$

ve

$$\Phi = \{ \mathfrak{J} \mid \mathfrak{J}, X \text{ üzerindeki yarı düzgün limit yakınsak yapı} \} \subset P(P(X \times X))$$

olsun. Bu taktirde, $f: U^{-1}(X) \rightarrow \Phi$, $f((X, \mathfrak{J})) = \mathfrak{J}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon birebir ve örten olduğundan dolayı $U^{-1}(X)$ ve Φ denktir. Φ bir cümle olduğundan $U^{-1}(X)$ de bir cümledir.

(iii) SULim kategorisinin keyfi çarpımlara sahip olduğunu gösterelim. Bunun için $\{(X_i, \mathfrak{J}_i)\}_{i \in I}$ yarı düzgün limit yakınsak uzaylar ailesi olmak üzere $X = \prod_{i \in I} X_i$ ve $\mathfrak{J} = \{ \alpha \in F(X \times X) \mid (\pi_i \times \pi_i)(\alpha) \in \mathfrak{J}_i, i \in I \}$ olsun. $(X, \mathfrak{J})$ nun yarı düzgün limit yakınsak uzay şartlarını sağladığını gösterelim.

(1) Her $x \in X$ için $\pi_i(x) = x_i \in X_i$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (\pi_i \times \pi_i)([x] \times [x]) &= \pi_i([x]) \times \pi_i([x]) \\ &= [x_i] \times [x_i] \in \mathfrak{J}_i \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $[x] \times [x] \in \mathfrak{J}$ dir.

(2) $\alpha \in \mathfrak{J}$ ve $\alpha \subset \beta$ olmak üzere $\beta \in \mathfrak{J}$ olduğunu gösterelim. $\alpha \in \mathfrak{J}$ olduğundan $(\pi_i \times \pi_i)(\alpha) \in \mathfrak{J}_i$ olur. $\alpha \subset \beta$ ise $(\pi_i \times \pi_i)(\alpha) \subset (\pi_i \times \pi_i)(\beta)$ olduğundan ve her $i \in I$ için $\mathfrak{J}_i$ ler X_i ler üzerinde yarı düzgün limit yakınsak uzaylar olduğundan $(\pi_i \times \pi_i)(\beta) \in \mathfrak{J}_i$ olur. Bu ise $\beta \in \mathfrak{J}$ olması demektir.

(3) $\alpha \in \mathfrak{J}$ ise $\alpha^{-1} \in \mathfrak{J}$ olduğunu gösterelim. $\alpha \in \mathfrak{J}$ olduğundan $(\pi_i \times \pi_i)(\alpha) \in \mathfrak{J}_i$ olur. Her $i \in I$ için $\mathfrak{J}_i$ ler X_i ler üzerinde yarı düzgün limit yakınsak uzaylar olduğundan $((\pi_i \times \pi_i)(\alpha))^{-1} = (\pi_i \times \pi_i)(\alpha^{-1}) \in \mathfrak{J}_i$ olur. Bu ise $\alpha^{-1} \in \mathfrak{J}$ olduğunu gösterir.

(4) $\alpha, \beta \in \mathfrak{J}$ ise $\alpha \cap \beta \in \mathfrak{J}$ olduğunu gösterelim. $\alpha, \beta \in \mathfrak{J}$ olduğundan $(\pi_i \times \pi_i)(\alpha) \in \mathfrak{J}_i$ ve $(\pi_i \times \pi_i)(\beta) \in \mathfrak{J}_i$ olur. Her $i \in I$ için $\mathfrak{J}_i$ ler X_i ler üzerinde yarı düzgün limit yakınsak uzaylar olduğundan $(\pi_i \times \pi_i)(\alpha) \cap (\pi_i \times \pi_i)(\beta) = (\pi_i \times \pi_i)(\alpha \cap \beta) \in \mathfrak{J}_i$ olur. Bu ise $\alpha \cap \beta \in \mathfrak{J}$ olduğunu gösterir.

Dolayısıyla $(X = \prod_{i \in I} X_i, \mathfrak{F})$ yarı düzgün limit yakınsak uzaydır ve $\alpha \in \mathfrak{F}$ için $((\pi_i \times \pi_i)(\alpha) \in \mathfrak{F}_i$ olduğundan $i: (X = \prod_{i \in I} X_i, \mathfrak{F}) \rightarrow (X_i, \mathfrak{F}_i)$ izdüşüm fonksiyonları düzgün süreklidir

Şimdi ise $(X, \mathfrak{F})$ nin çarpım uzay olduğunu gösterelim. $(Y, \mathfrak{F}')$ herhangi bir yarı düzgün limit yakınsak uzay olmak üzere her $i \in I$ için $f_i: (Y, \mathfrak{F}') \rightarrow (X_i, \mathfrak{F}_i)$ düzgün sürekli fonksiyonlar ve $\pi_i \circ h = f_i$ olacak şekilde bir $h: Y \rightarrow X$ fonksiyonu mevcut olsun. Bu durumda $h: (Y, \mathfrak{F}') \rightarrow (X, \mathfrak{F})$ nin sürekli olduğunu gösterelim. $\alpha \in \mathfrak{F}'$ olsun. Her $i \in I$ için $f_i: (Y, \mathfrak{F}') \rightarrow (X_i, \mathfrak{F}_i)$ düzgün sürekli olduğundan $(f_i \times f_i)(\alpha) \in \mathfrak{F}_i$ dır. Buradan,

$$\begin{aligned} (f_i \times f_i)(\alpha) &= (\pi_i \circ h \times \pi_i \circ h)(\alpha) = (\pi_i \times \pi_i)(h \times h)(\alpha) \\ &= (\pi_i \times \pi_i)((h \times h)(\alpha)) \in \mathfrak{F}_i \end{aligned}$$

olur ki bu ise $(h \times h)(\alpha) \in \mathfrak{F}$ olması demektir. Bu ise $h: (Y, \mathfrak{F}') \rightarrow (X, \mathfrak{F})$ nin düzgün sürekli olduğunu gösterir.

(iv) SULim kategorisinin keyfi alt uzaylara sahip olduğunu gösterelim.

$(X, \mathfrak{F})$ yarı düzgün limit yakınsak uzay ve $A \subset X$ olsun. $i: A \rightarrow X, i(x) = x$ altküme fonksiyonu olsun. Bu durumda $\mathfrak{F}_A = \{ \alpha \in \mathfrak{F}(A \times A) \mid (i \times i)(\alpha) \in \mathfrak{F} \}$ olsun. $(A, \mathfrak{F}_A)$ nin yarı düzgün limit yakınsak uzay olduğunu ve daha sonra $i: (A, \mathfrak{F}_A) \rightarrow (X, \mathfrak{F})$ nin düzgün sürekli fonksiyon olduğunu gösterelim.

(1) Her $x \in A$ için $i(x) = x \in X$ ve $(i \times i)([x] \times [x]) = i([x]) \times i([x]) = [x] \times [x] \in \mathfrak{F}$ olduğundan dolayı $[x] \times [x] \in \mathfrak{F}_A$ dır.

(2) $\alpha \in \mathfrak{F}_A$ ve $\alpha \subset \beta$ olmak üzere $\beta \in \mathfrak{F}_A$ olduğunu gösterelim. $\alpha \in \mathfrak{F}_A$ olduğundan $(i \times i)(\alpha) \in \mathfrak{F}$ dir. $\alpha \subset \beta$ ise $(i \times i)(\alpha) \subset (i \times i)(\beta)$ olduğundan ve $(X, \mathfrak{F})$ yarı düzgün limit yakınsak uzaylar olduğundan $(i \times i)(\beta) \in \mathfrak{F}$ olur. Bu ise $\beta \in \mathfrak{F}_A$ olması demektir.

(3) $\alpha \in \mathfrak{F}_A$ ise $\alpha^{-1} \in \mathfrak{F}_A$ olduğunu gösterelim. $\alpha \in \mathfrak{F}_A$ olduğundan $(i \times i)(\alpha) \in \mathfrak{F}$ olur. $(X, \mathfrak{F})$ yarı düzgün limit yakınsak uzaylar olduğundan $((i \times i)(\alpha))^{-1} = (i \times i)(\alpha^{-1}) \in \mathfrak{F}$ olur. Bu ise $\alpha^{-1} \in \mathfrak{F}_A$ olduğunu gösterir.

(4) $\alpha, \beta \in \mathfrak{I}_A$ ise $\alpha \cap \beta \in \mathfrak{I}_A$ olduğunu gösterelim. $\alpha, \beta \in \mathfrak{I}_A$ olduğundan $(i \times i)(\alpha) \in \mathfrak{I}$ ve $(i \times i)(\beta) \in \mathfrak{I}$ olur. $(X, \mathfrak{I})$ yarı düzgün limit yakınsak uzaylar olduğundan $(i \times i)(\alpha) \cap (i \times i)(\beta) = (i \times i)(\alpha \cap \beta) \in \mathfrak{I}$ olur. Bu ise $\alpha \cap \beta \in \mathfrak{I}_A$ olduğunu gösterir.

Dolayısıyla $(A, \mathfrak{I}_A)$ yarı düzgün limit yakınsak uzaydır ve $\alpha \in \mathfrak{I}_A$ için $(i \times i)(\alpha) \in \mathfrak{I}$ olduğundan $i: (A, \mathfrak{I}_A) \rightarrow (X, \mathfrak{I})$ altküme fonksiyonu düzgün süreklidir.

(v) Son olarak **SULim** kategorisinin indiskre objelere sahip olduğunu gösterelim. $X \neq \emptyset$ cümlesi üzerindeki indiskre yarı düzgün limit yakınsak yapı $\mathfrak{I} = F(X \times X)$ dir. Burada herhangi bir $(Y, \mathfrak{I}')$ yarı düzgün limit yakınsak uzay olmak üzere $f: (Y, \mathfrak{I}') \rightarrow (X, \mathfrak{I})$ fonksiyonu $\alpha \in \mathfrak{I}'$ için $(f \times f)(\alpha) \in \mathfrak{I}$ olduğundan düzgün süreklidir. Yani **SULim** kategorisinin indiskre objelere sahiptir.

Dolayısıyla $U: \mathbf{SULim} \rightarrow \mathbf{Set}$ unutkan fanktoru topolojik fanktordur, yani **SULim**, **Set** üzerinde topolojik kategoridir.

Son olarak U nun normalleştirilmiş olup olmadığına bakalım. $U: \mathbf{SULim} \rightarrow \mathbf{Set}$ olduğundan, **Set** üzerindeki herhangi bir topolojik kategorinin normalleştirilmiş olup olmadığını anlamak için $U^{-1}(\{x\})$ ve $U^{-1}(\emptyset)$ un tek bir yapı oluşturup oluşturmadığına bakılır. **SULim** de son obje $T = \{x\}$ tek nokta cümlesi üzerinde olduğundan bunun alt objeleri $\{x\}$ ve $\emptyset$ dir. $\{x\}$ üzerindeki tek yarı düzgün limit yakınsak yapı $\mathfrak{I} = \{[\emptyset], [x] \times [x]\}$ dir ve $\emptyset$ üzerindeki tek yarı düzgün limit yakınsak yapı $\mathfrak{I} = \{[\emptyset]\}$ dir. Dolayısıyla **SULim** normalleştirilmiş bir topolojik kategoridir.

5. LOKAL T_0 YARI DÜZGÜN LİMİT YAKINSAK UZAYLAR

Bu bölümde, T_0 yarı düzgün limit yakınsak uzayının bir p noktasındaki karakterizasyonu verilecektir.

5.1 Topolojik Kategorilerde T_0 Objeler

Tanım 5.1.1 X bir küme ve $p \in X$ olsun. X in p de wedge çarpımı demek X in farklı iki kopyası olan $X \amalg X$ nin p noktasında çakışması demektir. Diğer bir ifadeyle, $\{x\}$ tek nokta cümlesi **Set** kategorisinin bitiş objesi ve $p : \{x\} \rightarrow X$, $i_1, i_2 : X \rightarrow X \vee_p X$ dönüşümleri sırasıyla X deki birinci ve ikinci içerme dönüşümleri olarak ifade edilirse, pushout diyagramından dolayı $i_1 p = i_2 p$ eşitliği sağlanır. Daha açık bir şekilde, eğer $X \vee_p X$ de bir x noktası eğer $X \vee_p X$ nin ilk bileşeninde ise x_1 ikinci bileşeninde ise x_2 ile gösterilir. Burada $p_1 = p_2$ dir.

Şimdi bu bölümde kullanacağımız eksen dönüşümleri adı verilen A_p, S_p, ∇_p şeklinde gösterilen dönüşümlerini tanımlayalım.

Tanım 5.1.2 ([5], [43]) $X^2 = X \times X$, X in kartezyen çarpımı olsun.

(1) p de temel eksen dönüşümü, $A_p : X \vee_p X \rightarrow X^2$ olmak üzere $A_p(x_1) = (x, p)$ ve $A_p(x_2) = (p, x)$ şeklinde tanımlanır.

(2) p de Skewed eksen dönüşümü, $S_p : X \vee_p X \rightarrow X^2$ olmak üzere $S_p(x_1) = (x, x)$ ve $A_p(x_2) = (p, x)$ şeklinde tanımlanır.

(3) p de katlama dönüşümü ise $\nabla_p : X \vee_p X \rightarrow X$ olmak üzere $\nabla_p(x_i) = x$, $i = 1, 2$ şeklindedir.

Baran, yukarıda verilen eksen dönüşümlerini kullanarak topolojik uzaylardaki bu ayırma aksiyomlarının herhangi bir topolojik kategoriye genelleştirilebileceğini göstermiştir.

Tanım 5.1.3 (X, τ) topolojik uzay ve $p \in X$ olsun. p den farklı her bir x noktası için p nin x noktasını içermeyen bir komşuluğu veya x in p noktasını içermeyen bir komşuluğu varsa (X, τ) uzayına p de T_0 dır denir.

Teorem 5.1.1 (X, τ) bir topolojik uzay ve $p \in X$ olsun. (X, τ) uzayının p noktasında T_0 olması için gerek ve yeter şart $X \times V_p X$ üzerinde $A_p: X \times V_p X \rightarrow (X^2, \tau^*)$ ve $\nabla_p: X \times V_p X \rightarrow (X, P(X))$ fonksiyonları tarafından doğrulan(induced) topolojinin diskre olmasıdır. Burada τ^* , X^2 üzerindeki çarpım topolojisi ve $P(X)$ ise X üzerindeki diskre topolojidir.

İspat. (X, τ) uzayı p noktasında T_0 olsun. $X \times V_p X$ üzerindeki başlangıç topolojisinin diskre olduğunu gösterelim. Bunun için $X \times V_p X$ de alınan her tek nokta cümlesinin açık olduğunu göstermemiz yeterlidir. (X, τ) uzayı p noktasında T_0 olduğundan eğer $x \neq p$ ise p nin x yi içermeyen N_p komşuluğu veya x in p yi içermeyen bir N_x komşuluğu vardır.

Kabul edelim $x \notin N_p$ olsun. Eğer $U = \{x\}$ ve $W = N_p \times X$ alınırsa ki bunlar $P(X)$ ve X^2 de açık cümlelerdir. Buradan $\{x\} = A_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(U)$ olacaktır. Çünkü $x \in A_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(U)$ ise $\nabla_p(x) = x \in U = \{x\} \Rightarrow A_p(x) = (x, p)$ veya $A_p(x) = (p, x)$ dir. $x \notin N_p$ olduğundan $A_p(x) = (p, x) \notin W$ olacaktır. Buradan $\{x_2\} = \nabla_p^{-1}(U) \cap A_p^{-1}(W)$ dir.

Şimdi kabul edelim ki $p \notin N_x$ olsun. $U = \{x\}$ ve $W = N_x \times X$ sırasıyla $P(X)$ ve X^2 de açık cümlelerdir. $A_p(x) = (x, p) \in W$ veya $A_p(x) = (p, x) \in W$ dir. $(p, x) \notin W$ olduğundan $\{x_1\} = A_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(U)$ dir. Eğer $p = x$ ise $U = \{x\}$ kümesi $P(X)$ de ve $W = X^2$ kümesi de X^2 de açık olduğundan $A_p(x) = (p, x) \in W$ ve $p \in U$ dir. Buradan $\{p\} = \nabla_p^{-1}(U) \cap A_p^{-1}(W)$ sağlanır. Böylece $X \times V_p X$ üzerindeki ∇_p ve A_p nin doğurduğu uzay diskredir.

Tersine olarak kabul edelim ki $X \times V_p X$ üzerindeki ∇_p ve A_p nin doğurduğu uzay (başlangıç topolojisi) diskre olsun. X in p noktasında T_0 uzayı olduğunu gösterelim. Yani her $x \neq p$ için p yi kapsayan, x nin her N_x komşuluğu için p nin en az bir N_p komşuluğu vardır öyle ki $x \notin N_p$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$x \neq p$ ve $X \times V_p X$ diskre olduğundan $\{x_1\} = \nabla_p^{-1}\{x\} \cap A_p^{-1}(W)$ olacak şekilde X^2 de W açık cümlesi vardır. W , X^2 de açık olduğundan X de N_x ve V açıkları vardır öyle ki $A_p(x) = (x, p) \in N_x \times V \subset W$ dir. Eğer $x \notin V \Rightarrow N_p = V$ olsun. Eğer $x \in$

V ise $(p, x) \in N_x \times V \subset W$ dir. Çünkü x nin her N_x komşuluğu p yi içerir. Fakat $\{x_1, x_2\} = A_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(\{x\})$ dir. $x_1 \neq x_2$ olduğundan bu uzayın diskre olması ile çelişir. Dolayısıyla $x \notin V$ dir.

Tanım 5.1.4 ([43]) (X, τ) topolojik uzay ve $p \in X$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(1) (X, τ) p de T_0 dir.

(2) $A_p: X \nabla_p X \rightarrow (X^2, \tau^*)$ ve $\nabla_p: X \nabla_p X \rightarrow (X, P(X))$ dönüşümlerinden elde edilen başlangıç topolojisi diskredir.

(3) $id: X \nabla_p X \rightarrow (X \nabla_p X, \tau^*)$ ve $\nabla_p: X \nabla_p X \rightarrow (X, P(X))$ dönüşümlerinden elde edilen başlangıç topolojisi diskredir. Burada $\tau^*, X \nabla_p X$ üzerinde $i_1, i_2: (X, \tau) \rightarrow X \nabla_p X$ kanonik dönüşümleri tarafından doğrulan bitiş topolojisidir. Ayrıca $id: X \nabla_p X \rightarrow X \nabla_p X$ birim dönüşümdür.

Tanım 5.1.5 ([43]) $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ herhangi iki kategori, $U: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ bir fanktor $U(X) = B$ olmak üzere $B, \mathbb{D}$ de bir nesne ve p de herhangi bir nokta olsun.

(1) X objesi p de $\bar{T}_0$ dır ancak ve ancak $\{A_p: X \nabla_p X \rightarrow U(B^2) = X^2$ ve $\nabla_p: X \nabla_p X \rightarrow UD(X) = X\}$ U -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada D, U nun sol adjointi olan diskre fanktordur.

(2) X objesi p de T_0' dır ancak ve ancak $\{id: X \nabla_p X \rightarrow U(X \nabla_p X)' = X \nabla_p X$ ve $\nabla_p: X \nabla_p X \rightarrow UD(X) = X\}$ başlangıç kaldırması diskredir. Burada $(X \nabla_p X)'$ ifadesi $i_1(x) = x_1$ ve $i_2(x) = x_2$ olmak üzere $\{i_1, i_2: U(B) = X \rightarrow X \nabla_p X\}$ U -kavşağının bitiş kaldırması ve olmak üzere kanonik dönüşümlerdir.

5.2 Lokal T_0 Yarı Düzgün Limit Yakınsak Uzaylar

Teorem 5.2.1 $(X, \mathfrak{S})$ yarı düzgün limit yakınsak uzay ve $p \in X$ olsun. $(X, \mathfrak{S})$ p de $\bar{T}_0$ dır ancak ve ancak X deki her bir $x \neq p$ noktası için $[x] \times [p] \notin \mathfrak{S}$ dir.

İspat: $(X, \mathfrak{S})$ yarı düzgün limit yakınsak uzayının her bir $x \in X, x \neq p$ için p de $\bar{T}_0$ olduğunu kabul edelim. Tanım 5.1.5, Tanım 4.1.1 ve Teorem 4.1.2 den, $i=1,2$ için

$\pi_i: X^2 \rightarrow X$ izdüşüm fonksiyonları olmak üzere A_p ve ∇_p dönüşümleri tarafından $X \nabla_p X$ üzerinde üretilen yarı düzgün limit yakınsak yapı $\mathfrak{S}_W$ olsun. Teorem 4.1.2 ve Teorem 3.1.3 den eğer $[x] \times [p] \in \mathfrak{S}_p$ ise $\alpha = [x_1] \times [x_2]$ için,

$$\begin{aligned} (\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)(\alpha) &= (\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)([x_1] \times [x_2]) \\ &= [\pi_1 A_p(x_1)] \times [\pi_1 A_p(x_2)] \\ &= [x] \times [p] \in \mathfrak{S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\pi_2 A_p \times \pi_2 A_p)(\alpha) &= (\pi_2 A_p \times \pi_2 A_p)([x_1] \times [x_2]) \\ &= [\pi_2 A_p(x_1)] \times [\pi_2 A_p(x_2)] \\ &= [p] \times [x] \in \mathfrak{S} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\nabla_p \times \nabla_p)(\alpha) &= (\nabla_p \times \nabla_p)([x_1] \times [x_2]) \\ &= [x] \times [x] \in \mathfrak{S}_d \end{aligned}$$

olur. Burada $\mathfrak{S}_W$ yapısı $X \nabla_p X$ üzerindeki diskre yarı düzgün limit yakınsak yapı olduğundan $[x] \times [p] \in \mathfrak{S}_W$ olur. Bu ise $(X, \mathfrak{S})$ nin A_p ve ∇_p dönüşümleri tarafından üretilen yarı düzgün limit yakınsak uzayın diskre, yani $(X, \mathfrak{S})$ nin p de $\bar{T}_0$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla X de ki her bir $x \neq p$ için $[x] \times [p] \notin \mathfrak{S}$ olmalıdır.

Şimdi teoremin diğer tarafını ispatlayalım. Tersine olarak her bir $x \neq p$ için, $[x] \times [p] \notin \mathfrak{S}$ olduğunu kabul edelim. $(X, \mathfrak{S})$ nin p de $\bar{T}_0$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathfrak{S}_W$, $X \nabla_p X$ üzerinde

$$A_p: X \nabla_p X \rightarrow U((X^2, \mathfrak{S}^2)) = X^2$$

ve

$$\nabla_p: X \nabla_p X \rightarrow U((X, \mathfrak{S}_d)) = X$$

ile oluşturulan yarı düzgün limit yakınsak yapı olsun. Burada $\mathfrak{S}^2$, X^2 üzerinde yarı düzgün limit yakınsak yapıların çarpımı ve $\mathfrak{S}_d$ ise X üzerindeki diskre yarı düzgün limit yakınsak yapıdır. Şimdi $\mathfrak{S}_W$ nin diskre olduğunu göstermeliyiz. Yani $\mathfrak{S}_W$, $X \times V_p \times X$ nin sonlu alt cümlesi üzerindeki tek elemanlı süzgeçlerin kendisi ile kesişimleri üzerindeki yapı, yani

- i. $\alpha = [\emptyset]$
- ii. $\alpha = [p] \times [p]$,
- iii. $\alpha = ([x_1] \times [x_1]) \cap ([x_2] \times [x_2])$,
- iv. $\alpha = [x_i] \times [x_i]$, $i=1,2$ için,

eşitliklerinden birisi olduğunu göstermek yeterlidir.

α , $\mathfrak{S}_W$ de herhangi bir süzgeç olsun, Teorem 4.1.2 den $i=1,2$ için $(\pi_i A_p \times \pi_i A_p)(\alpha) \in \mathfrak{S}$ ve $(V_p \times V_p)(\alpha) \in \mathfrak{S}_d$ dır.

- i. Eğer $(V_p \times V_p)(\alpha) = [\emptyset]$ ise $(\alpha) = [\emptyset]$ dir.
- ii. Eğer $(V_p \times V_p)(\alpha) = [p] \times [p]$ ise $(V_p)^{-1}\{p\} = \{p_i = (p, p)\}$ olduğundan $\alpha = [p_i] \times [p_i]$ dir, $i=1, 2$ için.
- iii. Eğer $\alpha = ([x_1] \times [x_1]) \cap ([x_2] \times [x_2])$ ise

$$\begin{aligned} (\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)(\alpha) &= (\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)(([x_1] \times [x_1]) \cap ([x_2] \times [x_2])) \\ &= ([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \in \mathfrak{S} \end{aligned}$$

olur ve sonuç olarak $\mathfrak{S}_W$ diskre yapı olduğundan

$$\alpha = ([x_1] \times [x_1]) \cap ([x_2] \times [x_2])$$

olur.

iv. Eğer p den farklı bazı $x \in X$ için $(V_p \times V_p)(\alpha) = [x] \times [x]$ ise bu takdirde kolaylıkla şu sonuçları yazabiliriz.

- a) $\alpha = [x_i] \times [x_j]$, $i, j=1, 2$ için

veya

b) $\alpha \supset [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$, $i, j=1, 2$ ve $i \neq j$ için

veya

c) $\alpha \supset [\{x_i, x_j\}] \times [x_i]$, $i, j=1, 2$ ve $i \neq j$ için

veya

d) $\alpha \supset [\{x_1, x_2\}] \times [\{x_1, x_2\}]$

Şimdi yukarıda belirttiğimiz tüm alternatifleri inceleyelim.

a) Eğer $i \neq j$ için, $i=1, j=2$ veya $i=2$ ve $j=1$ için, $\alpha = [x_i] \times [x_j]$ olması durumunu inceleyelim:

$$(\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)(\alpha) = [x] \times [p] \in \mathfrak{F}$$

veya

$$(\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)(\alpha) = [p] \times [x] \in \mathfrak{F}$$

olur. Bu ise $\mathfrak{F}_W$ nin seçimine bir çelişki oluşturur. O halde $i \neq j$ için $\alpha \neq [x_i] \times [x_j]$ olmak zorundadır.

b) $\alpha \supset [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$, $i, j=1, 2$ ve $i \neq j$ için, olması durumunu inceleyelim:

Eğer $\alpha = [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$, $i \neq j$ ve $i=1, j=2$ için,

$$(\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)([x_1] \times [\{x_1, x_2\}]) = [x] \times [\{x, p\}] \subset [x] \times [p] \in \mathfrak{F}$$

ve

$\alpha = [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$, $i \neq j$ ve $i = 2, j = 1$ için,

$$(\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)([x_2] \times [\{x_2, x_1\}]) = [p] \times [\{p, x\}] \subset [p] \times [x] \in \mathfrak{F}$$

olur. Sonuç olarak $[x] \times [p] \in \mathfrak{F}$ ve $[p] \times [x] \in \mathfrak{F}$ olur. Bu ise $\mathfrak{F}_W$ nin seçimine bir çelişki oluşturur çelişkidir. O halde $i \neq j$ için $\alpha \neq [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$ olmak zorundadır.

Diğer taraftan eğer $i \neq j$ için

$[\emptyset] \neq \alpha \neq [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$ ise $\alpha \supset [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$ dir

ancak ve ancak

$\alpha = [x_i] \times [x_j]$ veya $[x_i] \times [x_i]$

olduğunu göstereceğiz.

Eğer $\alpha = [x_i] \times [x_j]$ veya $[x_i] \times [x_i]$ ise $\alpha \supset [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$ dir.

Eğer $\alpha \supset [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$ ve $[\emptyset] \neq \alpha \neq [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$ ise $U \in \alpha$ vardır öyle ki $U \neq \emptyset$, $U \neq \{x_i\} \times \{x_i, x_j\}$ olacak şekilde $U \in \alpha$ vardır. $U \in \alpha$, $\{x_i\} \times \{x_i, x_j\} \in \alpha$ ve α süzgeç olduğundan $U \cap (\{x_i\} \times \{x_i, x_j\}) = \{x_i\} \times \{x_i\}$ veya $\{x_i\} \times \{x_j\}$ olur, yani $\alpha = [x_i] \times [x_i]$ veya $[x_i] \times [x_j]$ olmak zorundadır.

$i \neq j$ için $\alpha = [x_i] \times [x_j]$ olduğu yukarıda a) kısmında gösterildi. Dolayısıyla $i=1,2$ için $\alpha = [x_i] \times [x_i]$ olmak zorundadır.

c) $\alpha \supset [\{x_i, x_j\}] \times [x_i]$ $i \neq j$ ve $i, j = 1, 2$ için olması durumunu inceleyelim:

Eğer $\alpha = [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$ $i \neq j$ ve $i=1, j=2$ için,

$$(\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)([\{x_1, x_2\}] \times [x_1]) = [\{x, p\}] \times [x] \subset [x] \times [p] \in \mathfrak{S}$$

ve

$\alpha = [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$, $i \neq j$ ve $i = 2, j = 1$ için,

$$(\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)([\{x_2, x_1\}] \times [x_1]) = [p] \times [\{p, x\}] \subset [p] \times [x] \in \mathfrak{S}$$

olur. Sonuç olarak $[x] \times [p] \in \mathfrak{S}$ ve $[p] \times [x] \in \mathfrak{S}$ olur. Bu ise $\mathfrak{S}_W$ nin seçimine bir çelişki oluşturur çelişkidir. O halde $i \neq j$ için $\alpha \neq [x_i] \times [\{x_i, x_j\}]$ olmak zorundadır.

Eğer $\alpha \supset [\{x_i, x_j\}] \times [x_i]$, $i \neq j$ ve $i, j = 1, 2$ için ise $[\emptyset] \neq \alpha \neq [\{x_i, x_j\}] \times [x_i]$ olacak şekilde $U \in \alpha$ vardır öyle ki $U \neq \emptyset$, $U \neq \{x_i, x_j\} \times \{x_i\}$ dir.

$U \in \alpha$, $\{x_i, x_j\} \times \{x_i\} \in \alpha$ ve α bir süzgeç olduğundan,

$U \cap (\{x_i, x_j\} \times \{x_i\}) = \{x_i\} \times \{x_i\}$ veya $\{x_i\} \times \{x_j\}$ dir, yani $\alpha = [x_i] \times [x_i]$ veya $[x_i] \times [x_j]$ olmak zorundadır.

$i \neq j$ için $\alpha = [x_i] \times [x_j]$ olduğu yukarıda a) kısmında gösterildi. Yani $i=1,2$ için $\alpha = [x_i] \times [x_i]$ olmalıdır.

d) Eğer $\alpha = [\{x_1, x_2\}] \times [\{x_1, x_2\}]$ olması durumunu inceleyelim:

$$(\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)(\alpha) = [\{x, p\}] \times [\{x, p\}] \subset [x] \times [p] \in \mathfrak{I}$$

olur ve bu durum $[x] \times [p] \in \mathfrak{I}$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\alpha \neq [\{x_1, x_2\}] \times [\{x_1, x_2\}]$ olmak zorundadır.

Eğer $\alpha \supset [\{x_1, x_2\}] \times [\{x_1, x_2\}]$ ise bu durumda $[\emptyset] \neq \alpha \neq [\{x_1, x_2\}] \times [\{x_1, x_2\}]$ ise $U \in \alpha$ vardır öyle ki $U \neq \emptyset$ ve $U \neq \{x_1, x_2\}$

$\times \{x_1, x_2\}$ dir. $U \in \alpha$, $\{x_1, x_2\} \times \{x_1, x_2\} \in \alpha$ dır ve α süzgeç olduğundan $U \cap (\{x_1, x_2\} \times \{x_1, x_2\}) \in \alpha$ olur.

Dikkat edelim ki burada

$$U \cap (\{x_1, x_2\} \times \{x_1, x_2\}) = \{(x_i, x_j)\}$$

veya

$$\{x_i\} \times \{(x_i, x_j)\}$$

veya

$$\{(x_i, x_j)\} \times \{x_i\}$$

veya

$$\{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$$

veya

$$\{(x_1, x_1), (x_2, x_2)\}$$

veya

$$(\{x_1\} \times \{x_1, x_2\}) \cup (\{(x_2, x_1)\})$$

veya

$$(\{x_1\} \times \{x_1, x_2\}) \cup (\{(x_2, x_2)\})$$

veya

$$(\{x_1, x_2\} \times \{x_1\}) \cup (\{(x_2, x_2)\})$$

veya

$$(\{x_1, x_2\} \times \{x_2\}) \cup (\{(x_2, x_1)\})$$

ifadelerinden biri olabilir.

Eğer $\alpha = ([x_1] \times [x_2]) \cap ([x_2] \times [x_1])$ ise

$$(\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)(\alpha) = (\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)([x_1] \times [x_2]) \cap ([x_2] \times [x_1])$$

$$= [\{[x, p] \cap [x, p] \subset [x] \times [p] \in \mathfrak{F}$$

olur ve sonuç olarak $[x] \times [p] \in \mathfrak{F}$ olup çelişkidir. Dolayısıyla

$$\alpha \neq ([x_1] \times [x_2]) \cap ([x_2] \times [x_1])$$

olmalıdır.

Eğer $\alpha = (\{x_1\} \times \{x_1, x_2\}) \cap ([x_2] \times [x_1])$ ise

$$(\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)(\alpha) = (\pi_1 A_p \times \pi_1 A_p)(\{x_1\} \times \{x_1, x_2\}) \cap ([x_2] \times [x_1])$$

$$= ([x] \times [\{x, p\}]) \cap ([p] \times [x]) \subset [x] \times [p] \in \mathfrak{F}$$

ve sonuç olarak, $[x] \times [p] \in \mathfrak{F}$ bu bir çelişkidir. Dolayısıyla

$$\alpha \neq (\{x_1\} \times \{x_1, x_2\}) \cap ([x_2] \times [x_1])$$

olmalıdır.

α nın diğer durumları da benzer düşünce verilen iadeler olamayacağı gösterilebilir.

O halde $\mathfrak{S}_W, (X \vee_p X)^2$ üzerinde diskre yarı düzgün limit yakınsak yapıdır. Bu ise $(X, \mathfrak{S})$ nun p de $\bar{T}_0$ olduğunu gösterir.

Örnek 5.2.1 $X=\{x\}$ olsun. Bu takdirde X üzerindeki yapı $\mathfrak{S}_d=\mathfrak{S}_i = \{[\emptyset], [x] \times [x]\}$ olup x noktasında $\bar{T}_0$ yarı düzgün limit yakınsak yapıdır.

Örnek 5.2.2 $X=\{x, y\}$ olsun. Bu takdirde X üzerindeki yapılardan diskre olan $\mathfrak{S}_d$ hem x hem de y noktasında $\bar{T}_0$ yarı düzgün limit yakınsak yapıdır. İndiskre olan $\mathfrak{S}_i$ ise hiçbir noktada $\bar{T}_0$ yarı düzgün limit yakınsak yapı değildir.

$\mathfrak{S}_d=\{[\emptyset], [x] \times [x], [y] \times [y], ([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y])\}$ diskre yapı.

$\mathfrak{S}_i=\{[\emptyset], [x] \times [x], [y] \times [y], [x] \times [X], [X] \times [x], [X] \times [y], [y] \times [X], [x] \times [y], [y] \times [x], ([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]), ([y] \times [y]) \cap ([x] \times [X]), ([y] \times [y]) \cap ([X] \times [x]), ([x] \times [X]) \cap ([X] \times [x]), ([x] \times [X]) \cap ([y] \times [x]), ([x] \times [y]) \cap ([y] \times [x]), [X] \times [X]\} = F(X \times X)$ indiskre yapı.

Örnek 5.2.3 $X=\{x, y, z\}$ olsun. Bu takdirde X üzerindeki yarı düzgün limit yakınsak beş yapı aşağıdaki gibidir;

$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_d = \{ [\emptyset], [x] \times [x], [y] \times [y], [z] \times [z], ([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]), ([x] \times [x]) \cap ([z] \times [z]), ([y] \times [y]) \cap ([z] \times [z]) \}$

$\mathfrak{S}_2 = \{ [\emptyset], [x] \times [x], [y] \times [y], [z] \times [z], [x] \times [y], [y] \times [x], ([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]), ([x] \times [x]) \cap ([z] \times [z]), ([x] \times [x]) \cap ([x] \times [y]), ([x] \times [x]) \cap ([y] \times [x]), ([y] \times [y]) \cap ([z] \times [z]), ([y] \times [y]) \cap ([x] \times [y]), ([y] \times [y]) \cap ([y] \times [x]), ([z] \times [z]) \cap ([x] \times [y]), ([z] \times [z]) \cap ([y] \times [x]), ([x] \times [y]) \cap ([y] \times [x]), (([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]) \cap ([z] \times [z])), (([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]) \cap ([x] \times [y])), (([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]) \cap ([y] \times [x])), (([x] \times [x]) \cap ([z] \times [z]) \cap ([x] \times [y])), (([x] \times [x]) \cap ([z] \times [z]) \cap ([y] \times [x])), (([x] \times [x]) \cap ([x] \times [y]) \cap ([y] \times [x])) \}$

$$\begin{aligned}
& [y] \times [x]), \quad ([y] \times [y]) \cap ([z] \times [z] \cap [x] \times [y]), \quad ([y] \times [y]) \cap ([z] \times [z] \cap \\
& [y] \times [x]), \quad ([y] \times [y]) \cap ([x] \times [y] \cap [y] \times [x]), \quad ([z] \times [z]) \cap ([x] \times [y] \cap \\
& [y] \times [x]), \quad ([x] \times [x] \cap [y] \times [y]) \cap ([z] \times [z] \cap [x] \times [y]), \quad ([x] \times [x] \cap [y] \times \\
& [y]) \cap ([z] \times [z] \cap [y] \times [x]), ([x] \times [x] \cap [y] \times [y]) \cap ([x] \times [y] \cap [y] \times [x]), \\
& ([x] \times [x] \cap [z] \times [z]) \cap ([x] \times [y] \cap [y] \times [x]), \quad ([y] \times [y] \cap [z] \times [z]) \cap \\
& ([x] \times [y] \cap [y] \times [x]), \quad ([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]) \cap ([z] \times [z]) \cap ([x] \times [y]) \cap \\
& ([y] \times [x]) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_3 = \{ & [\emptyset], [x] \times [x], [y] \times [y], [z] \times [z], [x] \times [z], [z] \times [x], ([x] \times [x]) \cap ([y] \times \\
& [y]), ([x] \times [x]) \cap ([z] \times [z]), ([x] \times [x]) \cap ([x] \times [z]), ([x] \times [x]) \cap ([z] \times [x]), \\
& ([y] \times [y]) \cap ([z] \times [z]), ([y] \times [y]) \cap ([x] \times [z]), ([y] \times [y]) \cap ([z] \times [x]), \\
& ([z] \times [z]) \cap ([x] \times [z]), ([z] \times [z]) \cap ([z] \times [x]), ([x] \times [z] \cap [z] \times [x]), \\
& (([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y] \cap [z] \times [z])), \quad (([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y] \cap [x] \times [z])), \\
& (([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y] \cap [z] \times [x])), (([x] \times [x]) \cap ([z] \times [z] \cap [x] \times [z])), \\
& (([x] \times [x]) \cap ([z] \times [z] \cap [z] \times [x])), \quad (([x] \times [x]) \cap ([x] \times [z] \cap [z] \times [x])), \\
& (([y] \times [y]) \cap ([z] \times [z] \cap [x] \times [z])), \quad (([y] \times [y]) \cap ([z] \times [z] \cap [z] \times [x])), \\
& (([y] \times [y]) \cap ([x] \times [z] \cap [z] \times [x])), \quad (([z] \times [z]) \cap ([x] \times [z] \cap [z] \times [x])), \\
& (([x] \times [x] \cap [y] \times [y]) \cap ([z] \times [z] \cap [x] \times [z])), \quad (([x] \times [x] \cap [y] \times [y]) \cap \\
& ([z] \times [z] \cap [z] \times [x])), \quad (([x] \times [x] \cap [y] \times [y]) \cap ([x] \times [z] \cap [z] \times [x])), \\
& (([x] \times [x] \cap [z] \times [z]) \cap ([x] \times [z] \cap [z] \times [x])), (([y] \times [y] \cap [z] \times [z]) \cap ([x] \times \\
& [z] \cap [z] \times [x])), ([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y] \cap [z] \times [z] \cap [x] \times [z] \cap [z] \times [x]) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_4 = \{ & [\emptyset], [x] \times [x], [y] \times [y], [z] \times [z], [y] \times [z], [z] \times [y], ([x] \times [x]) \cap ([y] \times \\
& [y]), ([x] \times [x]) \cap ([z] \times [z]), ([x] \times [x]) \cap ([y] \times [z]), ([x] \times [x]) \cap ([z] \times [y]), \\
& ([y] \times [y]) \cap ([z] \times [z]), ([y] \times [y]) \cap ([y] \times [z]), ([y] \times [y]) \cap ([z] \times [y]), \\
& ([z] \times [z]) \cap ([y] \times [z]), ([z] \times [z]) \cap ([z] \times [y]), ([y] \times [z] \cap [z] \times [y]), (([x] \times \\
& [x]) \cap ([y] \times [y] \cap [z] \times [z])), \quad (([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y] \cap [y] \times [z])), \quad (([x] \times \\
& [x]) \cap ([y] \times [y] \cap [z] \times [y])), \quad (([x] \times [x]) \cap ([z] \times [z] \cap [y] \times [z])), \quad (([x] \times \\
& [x]) \cap ([z] \times [z] \cap [z] \times [y])), \quad (([x] \times [x]) \cap ([y] \times [z] \cap [z] \times [y])), \quad (([y] \times \\
& [y]) \cap ([z] \times [z] \cap [y] \times [z])), \quad (([y] \times [y]) \cap ([z] \times [z] \cap [z] \times [y])), \quad (([y] \times \\
& [y]) \cap ([y] \times [z] \cap [z] \times [y])), \quad (([z] \times [z]) \cap ([y] \times [z] \cap [z] \times [y])), \quad (([x] \times \\
& [x] \cap [y] \times [y]) \cap ([z] \times [z] \cap [y] \times [z])), \quad (([x] \times [x] \cap [y] \times [y]) \cap ([z] \times [z] \cap \\
& [z] \times [y])), \quad (([x] \times [x] \cap [y] \times [y]) \cap ([y] \times [z] \cap [z] \times [y])), \quad (([x] \times [x] \cap [z] \times \\
& [z] \cap [y] \times [z])) \}
\end{aligned}$$

$$[z]) \cap ([y] \times [z] \cap [z] \times [y])), \quad (([y] \times [y] \cap [z] \times [z]) \cap ([y] \times [z] \cap [z] \times [y])), \\ (([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y] \cap [z] \times [z] \cap [y] \times [z] \cap [z] \times [y])) \}$$

$$\mathfrak{S}_5 = \mathfrak{S}_i = F(X \times X)$$

Yukarıdaki bu beş yapıdan diskre olan $\mathfrak{S}_d$ hem x, y, z noktalarında $\bar{T}_0$ yarı düzgün limit yakınsak yapıdır. İndiskre olan $F(X \times X)$ ise hiçbir noktada $\bar{T}_0$ yarı düzgün limit yakınsak yapı değildir. İçerisinde $[x] \times [y]$ bulunduran yapı sadece z noktasında, içerisinde $[x] \times [z]$ bulunduran yapı sadece y noktasında, içerisinde $[y] \times [z]$ bulunduran yapı sadece x noktasında, $\bar{T}_0$ yarı düzgün limit yakınsak yapıdır.

Örnek 5.2.4 SULim yarı düzgün limit yakınsak uzayların dolu alt kategorisi $\bar{T}_0\text{SULim}$ kategorisi alt uzaylar ve çarpımlar altında kapalı bir kategoridir.

Örnek 5.2.5 $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere, $\mathfrak{S} = F(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ cümlesi herhangi bir $p \in \mathbb{R}$ noktasında $\bar{T}_0$ yarı düzgün limit yakınsak yapı değildir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında yarı düzgün limit yakınsak uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonlar) kategorisi olan **SULim** incelenmiştir ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. **SULim** kategorisi **Set** üzerinde topolojik bir kategori olduğu gösterilmiştir.
2. **SULim** kategorisindeki diskre ve indiskre objeler örneklendirildikten sonra genel olarak karakterize edilmiştir.
3. **SULim** kategorisinde ilk ve son (final) objeler belirlenmiştir.
4. **SULim** kategorisinin başlangıç ve bitiş kaldırmaları karakterize edilmiştir.
5. **SULim** kategorisinin kartezyen kapalı bir kategori olduğu belirtilmiştir.
6. **SULim** kategorisinde verilen bir p noktasında $\bar{T}_0$ yarı düzgün limit yakınsak uzaylar karakterize edildi. Verilen teoremin uygulaması olarak sayısal örnekler verildi.
7. $\bar{T}_0$ yarı düzgün limit yakınsak uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonların) kategorisi olan $\bar{T}_0\mathbf{SULim}$ kategorisi elde edildi. Ve bu kategorinin **SULim** kategorisinin dolu alt kategorisi olduğu gösterildi.

İlerleyen zamanlarda **SULim** kategorisi ile alakalı olan çalışmalarda aşağıdaki öneriler dikkate alınacaktır.

1. **SULim** kategorisinde p noktasında T_0' objeler nasıl karakterize edilebilir?
2. **SULim** kategorisinde noktadan bağımsız olarak $\bar{T}_0$ ve T_0' objeler nasıl karakterize edilebilir?
3. **SULim** kategorisinde gerek noktada gerekse noktadan bağımsız olarak Tanım 5.1.5 kullanarak $T_1, T_0', \text{pre}T_2, \text{pre}T_2', T_3, T_4$ objeler nasıl karakterize edilebilir?
4. Kompakt ve bağlantılı yarı düzgün limit yakınsak uzaylar karakterize edilebilir mi?
5. $\bar{T}_0\mathbf{SULim}$ kategorisi alt uzaylar ve çarpımlar altında kapalı bir kategori olduğu gösterilebilir mi?

KAYNAKLAR

1. Fréchet M., 1906. Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rend. Palermo, 22, 1- 74
2. Hausdorff, F., 1914. Grundzuge der Mengenlehre. Veit, Leipzig, Chelsea, New York, USA.
3. Kuratowski, K., 1922. Sur operation A de Analysis Situs, Fund. Math., 3, 182-199.
4. Weil, A., 1937. Sur les Espaces á structures et sur la topologie générale, Hermann, Paris.
5. Husek, M., ve Rice, M. D., 1978. Productivity of coreflective subcategories of uniform spaces. Gen. Top. Appl., 9: 295-306.
6. Cook, C. H., ve Fischer, H. R., 1965. On equicontinuity and continuous convergence. Math. Ann., 159, 94-101.
7. R.S. Lee, 1976. The category of uniform convergence spaces is cartesian closed, Bull. Austral. Math. Soc., 15, 461- 465.
8. G. Preuss, 1993. Cauchy spaces and generalizations, Math. Japonica, 38, 5, 803-812.
9. Preuss, G., 1995. Semiuniform convergence spaces, Math. Japonica, 41, 465–491.
10. Preuss, G., 2002. Foundations of topology, An approach to Convenient topology, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Hollanda.
11. Preuss, G., 2005. Non-symmetric convenient topology and its relations to convenient topology, Topology Proc., 29, 595-611.
12. Behling, A., 1992. Einbettung uniformer ráume in topologische universen, Thesis, Freie Universität Berlin, Almanya.
13. Kent, D. C., 1969. Convergence quotient maps, Fund. Math. 165, 197-205.
14. Wyler, O., 1971. Topological categories and categorical topology, Gen. Top. Appl., 11, 17-28.
15. Herrlich, H., 1974. Topological functors, Gen. Top. Appl., 4, 125-142.
16. Schwarz, F., 1978. Connections between convergence and nearness, Lecture Notes in Mathematics, 719, 345-425, Springer-Verlag.
17. Adamek, J., Herrlich, ve H., Strecker, G. E., 1990. Abstract and concrete categories, A Willey-Interscience Publication , New York, USA.

18. Baran, M., 1997. A Notion of compactness in topological categories, Publ. Math. Debrecen, 50, 221-234.
19. Baran, M., 2002. Compactness, perfectness, separation, minimality and closedness with respect to closure operators, Applied Categorical Structures, 10, 403-415.
20. Baran, M., 1990. Separation Properties in Topological Categories, University of Miami, Ph. D., Dissertation.
21. Baran, M., Altındış, 1995, H., T_0 objects in topological categories, J. Univ. Kuwait (Sci.) 22: 123-127.
22. Baran, M., 1996. Separation properties in topological categories, Math. Balkanica 10, 39-48.
23. Baran, M., 1993. Ayrılma Aksiyomları, Erc. Üniv. Fen Bil. Derg., 10 (1-2): 47-54.
24. Baran, M. and Altindis, H., T_2 -objects in topological categories, Acta Math. Hungar., 71, 41-48, 1996.
25. Baran, M., 1998. T_3 and T_4 - objects in topological categories, Indian J. Pure Appl Math., 29, 59-69.
26. Harvey, J. M., 1977. T_0 -Separation in topological categories, Quaestiones Math., 2, 177-190.
27. Weck-Schwarz, S., 1991. T_0 -objects and separated objects in topological categories, Quaestiones Math., 14: 315-325.
28. M. Baran, S.Kula, and Ayhan Erciyes, T_0 and T_1 semiuniform convergence spaces Filomat 27,4 (2013), 537–546
29. Marny, T. H., 1973. Rechts-bikategoriestrukturen in topologischen kategorien, Dissertation, Freie Univ., Berlin.
30. Hoffman, R-E., 1974. Universal topological functors, Habilitationsschrift, Universität Dusseldorf, Almany.
31. Brümmer, G. C. L., 1971. A categorical study of initiality in uniform topology, Univ. Of Cape Town, Ph.D. Thesis.
32. Eilenberg S., ve MacLane S., 1945. Transactions of the American Mathematical Society 58, 2, pp. 231-294.
33. Choquet, G., 1948. Convergences, Ann. Univ. Grenoble, Sect. Math. Phys. 23, 57-112
34. Mrowka, S., 1958. On the convergence of nets of sets, Fund. Math. 45, 237-246.

35. Moore, E. M., ve Smith, H. L. 1922. On general theory of limits. Amer. Math. J, 44, 102-121.
36. Cartan H., 1937. Theorie des filtres, Compt. Rend. 205, 595-598.
37. Bourbaki, N., 1940. Topologie generale, Chapitre 1 et 2.Actualities Sci. Ind.,858.
38. Birkhoff, G., 1940. Lattice theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence.
39. Kowalsky, H.J., 1954. Beiträge zur topologischen algebra, Math. Nachrichten 11, 143-185.
40. Kula, S., 2014. Predüzgün yakınsak uzaylar kategorisinde kapalılık ve T_0 , T_1 nesneler, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.
41. Baran, T.M., 2014. Yarı düzgün yakınsak uzaylar, Yüksek lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.
42. Bourbaki, N., 1966. Elements of mathematics general topology, Addison-Wesley Publishing Company, İngiltere.
43. Baran, M., 1992. Separation properties, Indian J. Pure Appl. Math. 23, 333-341.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Nezahat İMZALI
Adres : Anadolu Mah. 487. Sokak No:1
Yenimahalle/ANKARA
E-posta adresi : imzali.nezahat@gmail.com
EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)
Lisans : Aksaray Üniversitesi, 2013-2017

