



**LORENTZ ÇOKGENLERİ ÜZERİNE**

DOKTORA TEZİ

Abdulaziz AÇIKGÖZ

Danışman

Prof. Dr. Nilgün SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2023

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**LORENTZ ÇOKGENLERİ ÜZERİNE**

**Abdulaziz AÇIKGÖZ**

**Danışman**

**Prof. Dr. Nilgün SÖNMEZ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Temmuz 2023**

**BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI**  
**Afyon Kocatepe Üniversitesi**

**Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;**

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

**13 / 07 / 2023**

**Abdulaziz AÇIKGÖZ**

# ÖZET

Doktora Tezi

## LORENTZ ÇOKGENLERİ ÜZERİNE

Abdulaziz AÇIKGÖZ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

**Danışman:** Prof. Dr. Nilgün SÖNMEZ

Bu tez çalışmasının amacı, afin düzlemde tanımlanabilen iki geometrik sistem olan Öklid geometrisi ile Lorentz(Minkowski) geometrisinin karşılaştırılmalı bir incelemesini yapmaktır.

Yedi bölümden oluşan çalışmamızda birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde tezdeki konuların tarihsel gelişimi hakkında literatür özeti verilmiştir.

Üçüncü bölümde çalışmamıza temel oluşturan tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde Öklid düzleminde uzaklık kavramını içeren konuların Lorentz benzerleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde Lorentz(Minkowski) düzlemindeki açılar, üçgenler, çevrel, iç ve dış teğet çemberler ile çokgenler araştırılmıştır.

Altıncı ve yedinci bölümlerde tezde elde edilen bulgular ve sonuçlar kısaca özetlenmiş ve gelecekte yapılabilecek çalışmalar için öneriler sunulmuştur.

**2023, vii + 103 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Lorentz düzlemi, Lorentz uzaklık fonksiyonu, Lorentz çokgeni, Lorentz çemberi.

# **ABSTRACT**

Ph.D. Thesis

ON LORENTZ POLYGON

Abdulaziz AÇIKGÖZ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

**Supervisor:** Prof. Nilgün SÖNMEZ

The aim of this thesis is to comparative study of the geometric systems that can be introduced in the affine plane, namely Euclidean geometry and Lorentzian geometry.

This thesis consist of seven chapters. The first chapter is reserved for introduction.

In the second chapter, a literature summary about the historical development of the handle subjects is given.

In the third chapter, the definitions and the theorems that form the basis of our study are given.

In the fourth chapter, the Lorentz analogues of the subjects including the concept of distance in the Euclidean plane are examined.

In the fifth chapter, the angles, the triangles, circumcircle, incircle, excircle and the polygons are investigated in the Lorentz(Minkowski) plane.

In the sixth and seventh chapters, the findings and results obtained in the thesis are summarized briefly and suggestions for possible future studies are presented.

**2023, vii + 103 pages**

**Keywords:** Lorentz plane, Lorentz distance function, Lorentz polygon, Lorentz circle.

## TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, deneysel çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Nilgün SÖNMEZ'e, araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Abdulaziz AÇIKGÖZ

Afyonkarahisar 2023

## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

|                                                                                                    | Sayfa |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| ÖZET .....                                                                                         | i     |
| ABSTRACT .....                                                                                     | ii    |
| TEŞEKKÜR .....                                                                                     | iii   |
| İÇİNDEKİLER DİZİNİ .....                                                                           | iv    |
| SİMGELER DİZİNİ.....                                                                               | v     |
| ŞEKİLLER DİZİNİ.....                                                                               | vi    |
| 1. GİRİŞ .....                                                                                     | 1     |
| 2. LİTERATÜR BİLGİLERİ .....                                                                       | 3     |
| 3. TEMEL KAVRAMLAR.....                                                                            | 4     |
| 3.1 Lorentz(Minkowski) Uzayı .....                                                                 | 4     |
| 3.2 Lorentz(Minkowski) Düzlemi .....                                                               | 7     |
| 4. ÖKLİD VE LORENTZ UZAKLIKLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ .....                                            | 11    |
| 4.1 Lorentz Uzaklığının Geometrik Yorumu .....                                                     | 11    |
| 4.2 Öklid ve Lorentz Uzaklıkları Arasındaki Fonksiyonel İlişki .....                               | 16    |
| 4.3 Öklid Düzlemindeki Bazı Bağlantı ve Teoremlerin Lorentz Benzerleri.....                        | 25    |
| 4.4 Lorentz(Minkowski) Düzleminde Çember.....                                                      | 33    |
| 4.5 Analitik Düzlemde Öklid ve Lorentz Eşit Uzunluklu Doğru Parçalarının<br>Geometrik Yerleri..... | 43    |
| 4.6 Analitik Düzlemde Öklid Düzgün Çokgenlerinin Lorentz Düzgünlüğü.....                           | 48    |
| 5. LORENTZ(MİNKOWSKİ) DÜZLEMİNDE ÇOKGENLER.....                                                    | 50    |
| 5.1 Lorentz(Minkowski) Düzleminde Açılar ve Üçgenler .....                                         | 50    |
| 5.2 Lorentz(Minkowski) Düzleminde Çevrel, İç ve Dış Teğet Çemberler .....                          | 57    |
| 5.3 Lorentz(Minkowski) Düzleminde Düzgün Çokgenler .....                                           | 82    |
| 6. BULGULAR .....                                                                                  | 100   |
| 7. TARTIŞMA ve SONUÇ .....                                                                         | 101   |
| 8. KAYNAKLAR.....                                                                                  | 102   |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                                     | 103   |

## SİMGELER DİZİNİ

### Simgeler

|                                  |                                    |
|----------------------------------|------------------------------------|
| $\mathbb{R}$                     | Reel sayılar cismi                 |
| $\mathbb{R}^n$                   | n-boyutlu vektör uzayı             |
| $L^n$                            | n-boyutlu Lorentz(Minkowski) uzayı |
| $\mathbb{R}^2$                   | Öklid düzlemi                      |
| $L^2$                            | Lorentz(Minkowski) düzlemi         |
| $\ \cdot\ _L$                    | Lorentz norm fonksiyonu            |
| $\ \cdot\ _E$                    | Öklid norm fonksiyonu              |
| $d_L$                            | Lorentz uzaklık fonksiyonu         |
| $d_E$                            | Öklid uzaklık fonksiyonu           |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ | Öklid iç çarpımı                   |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ | Lorentz iç çarpımı                 |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa

|                                                                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 3.1 $L^2$ de doğrular...                                                                                                              | 9  |
| Şekil 3.2 Pseudo-ortogonal iki doğru...                                                                                                     | 9  |
| Şekil 4.1 $L^2$ de çember...                                                                                                                | 33 |
| Şekil 4.2 $L^2$ de hiperbolik radyan...                                                                                                     | 34 |
| Şekil 4.3 $L^2$ de timelike Lorentz çemberi...                                                                                              | 36 |
| Şekil 4.4 $L^2$ de spacelike Lorentz çemberi...                                                                                             | 37 |
| Şekil 4.5 $L^2$ de çemberin çap ve kirişleri...                                                                                             | 38 |
| Şekil 4.6 $L^2$ de merkez ve çevre açısı...                                                                                                 | 39 |
| Şekil 4.7 $L^2$ de teğet doğruların kirişle arasındaki açılar...                                                                            | 40 |
| Şekil 4.8 $m = 0$ ve $m \rightarrow \infty$ için analitik düzlemde Öklid ve Lorentz eşit uzunluklu doğru parçalarının geometrik yerleri...  | 46 |
| Şekil 4.9 $m \notin \{-1, 0, 1, \infty\}$ için analitik düzlemde Öklid ve Lorentz eşit uzunluklu doğru parçalarının geometrik yerleri...    | 47 |
| Şekil 5.1 $L^2$ de ikizkenar üçgen...                                                                                                       | 56 |
| Şekil 5.2 $L^2$ de dik üçgen...                                                                                                             | 56 |
| Şekil 5.3 $L^2$ de köşeleri $P_1 = (0,0)$ , $P_2 = (2,1)$ , $P_3 = (5,-1)$ noktaları olan üçgenin çevrel çemberi...                         | 61 |
| Şekil 5.4 $L^2$ de köşeleri $P_1 = (0,0)$ , $P_2 = (1,2)$ , $P_3 = (-2,6)$ noktaları olan üçgenin çevrel çemberi...                         | 63 |
| Şekil 5.5 $L^2$ de köşeleri $P = (3,1)$ , $Q = (0,0)$ , $R = (6,-1)$ noktaları olan üçgenin iç teğet çemberi...                             | 68 |
| Şekil 5.6 $L^2$ de köşeleri $P = (1,3)$ , $Q = (0,0)$ , $R = (-2,7)$ noktaları olan üçgenin iç teğet çemberi...                             | 71 |
| Şekil 5.7 $L^2$ de köşeleri $P = (3,1)$ , $Q = (0,0)$ , $R = (6,-1)$ noktaları olan üçgenin $[PR]$ kenarına teğet olan dış teğet çemberi... | 80 |
| Şekil 5.8 $L^2$ de köşeleri $P = (3,1)$ , $Q = (0,0)$ , $R = (6,-1)$ noktaları olan üçgenin $[QR]$ kenarına teğet olan dış teğet çemberi... | 80 |
| Şekil 5.9 $L^2$ de köşeleri $P = (3,1)$ , $Q = (0,0)$ , $R = (6,-1)$ noktaları olan üçgenin $[QP]$ kenarına teğet olan dış teğet çemberi... | 81 |
| Şekil 5.10 $L^2$ de köşeleri $P = (3,1)$ , $Q = (0,0)$ , $R = (6,-1)$ noktaları olan üçgenin dış teğet çemberleri...                        | 81 |

|                                                                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 5.11</b> Öklid ve Lorentz(Minkowski) düzlemlerinde çemberin merkezinden geçen doğrunun çemberi kestiği noktadaki teğete paralel olan doğru... | 82 |
| <b>Şekil 5.12</b> $L^2$ de spacelike çemberin teğeti ve teğetin paralel doğrusu...                                                                     | 85 |
| <b>Şekil 5.13</b> $L^2$ de timelike çemberin teğeti ve teğetin paralel doğrusu...                                                                      | 85 |
| <b>Şekil 5.14</b> $\mathbb{R}^2$ de yarı-düzlemler...                                                                                                  | 86 |
| <b>Şekil 5.15</b> $L^2$ de timelike future-pointing (pozitif) bölgesinde bulunan düzgün konveks çokgen...                                              | 94 |
| <b>Şekil 5.16</b> $L^2$ de spacelike pozitif bölgesinde bulunan düzgün konveks çokgen...                                                               | 99 |



## 1. GİRİŞ

Geometri zamanla değişen dinamik bir konudur. Kendi zamanlarının ve yerlerinin ürünleri olan insanlar tarafından yaratılan ve geliştirilen insan kültürünün bir parçasıdır. Geometrinin kökleri binlerce yıllar öncesine dayanır ve hemen hemen her insan kültüründe şu ya da bu türden geometrik fikirler bulunur. Bildiğimiz şekliyle geometri çalışması 4000 yıldan daha uzun bir süre önce Mezopotamya, Mısır, Hindistan ve Çin’de ortaya çıktı. Nil nehri her yıl geniş arazileri sular altında bıraktığı ve mülk sınırlarını yok ettiği için, sınırların yeniden oluşturulmasında gökyüzünde gözlemlenen üçgen, dörtgen vb. şekillerden yararlanılmıştır. Bu ilgi, onları geometri çalışmalarına motive etmiş olabilir. Mısır geometrisi çoğunlukla deney, gözlem ve deneme yanılma yoluyla ulaşılan pek çok pratik prosedürden oluşuyordu. Formüller işe yarayan yaklaşık formüllerdi ya da en azından pratik amaçlar için yeterince yakın cevaplar veriyordu. Yaklaşık 2500 yıl önce geometrinin uygulanma biçiminde derin bir değişiklik oldu: Yunan matematikçiler geometriyi soyutlamayı, mantıksal tümdengelim ve ispatı getirdiler. Ayrıca geometriyi günlük deneyim alanından çıkardılar ve onu soyut varlıkları inceleyen bir konu haline getirdiler. Mantığı geometriye sokma süreci görünüşe göre MÖ 600 yılları civarında Thales ile başladı ve yaklaşık MÖ 300 yılında İskenderiyeli Öklid’in çalışmasıyla doruğa ulaştı. Öklid, Yunan geometricilerinin en ünlüsüdür ve adı evrensel olarak bugün okullarda incelenen geometri ile ilişkilendirilmektedir. “Öklid Geometrisi” dediğimiz geometrinin içerdiği fikirlerin çoğu, muhtemelen Öklid’in kendisinden kaynaklanmadı; daha ziyade Öklid’in katkısı Yunan geometrisinin sonuçlarını mantıklı ve tutarlı bir şekilde organize etmek ve sunmaktı. Elde ettiği sonuçları “Elements” olarak bilinen on üç kitaplık bir seride yayınladı. Daha sonraki yıllarda Descartes tarafından kartezyen koordinatların ve Fréchet tarafından metriğin tanımlanmasıyla (Fréchet 1906), Öklid uzayı en iyi bilinen metrik uzay halini almıştır.

Öklid geometrisinde yapılan bu ölçme şekli birçok problemin çözümünde eksik kalması ilerleyen yıllarda farklı metrikler kullanılarak farklı geometriler oluşturulmasıyla sonuçlanmıştır. Bunlardan biride Lorentz ve Poincaré’nin önceki çalışmalarına dayanan Einstein’ın özel görelilik kuramıyla ilişkili 1908 yılında ünlü Alman matematikçi ve fizikçi H.Minkowski (1864-1909) tarafından Lorentz(Minkowski) geometrisinde tanımlanan Lorentz metriğidir. Böylece uzaklık ölçme yöntemindeki değişiklik, Öklid

geometrisindeki uzaklık içeren kavramlarda değişikliğe neden olabilmektedir. Bu nedenle afin düzlemde tanımlanabilen iki geometrik sistem Öklid geometrisi ve Lorentz(Minkowski) geometrisinin karşılaştırılmalı bir incelemesi ilginç olabilir. Bu fikirden yola çıkarak bu tez çalışmasında;

- i) Lorentz uzaklığının geometrik yorumu nasıl yapılabilir?
- ii) Öklid ve Lorentz metrikleri arasında fonksiyonel ilişki nasıl ifade edilebilir?
- iii) Lorentz uzaklığını koruyan Öklid düzleminin izometrilere hangileridir?
- iv) Öklid düzlemindeki Thales bağıntısı, Menelaus ve Ceva teoremleri ile İç ve Dış açıortay teoremlerinin Lorentz benzerleri nasıl ifade edilebilir?
- v) Öklid çemberlerinin hangi özellikleri Lorentz çemberlerinde vardır?
- vi) Öklid düzgün çokgenlerinin Lorentz düzgünlüğü nasıl incelenebilir?
- vii) Öklid düzlemindeki üçgenlerin çevrel, iç ve dış teğet çemberlerin Lorentz(Minkowski) düzlemindeki benzerleri var olma koşulları ve grafikleri nasıl ifade edilebilir?
- viii) Lorentz(Minkowski) düzleminde düzgün çokgenler nasıl oluşturulabilir?

sorularına cevap aranmıştır. Lorentz metriği Öklid metriği gibi pozitif tanımlı olmaması vektör çeşitliliği oluşturmuştur. Bu nedenle Lorentz (Minkowski) uzayında vektörler timelike, spacelike ve lightlike (null) olarak sınıflandırılmıştır. Vektörler arasındaki bu çeşitlilik metrik anlamındaki kavramlarda çeşitliliğe sebep olmuştur. Böylece yukarıdaki soruların cevapları, bu çeşitlilik dikkate alınarak aranacaktır. Ayrıca tez bütünlüğü için tezin orijinal bölümleri tezin sıra dizini içinde verilecektir.

## 2. LİTERATÜR BİLGİLERİ

Lorentz(Minkowski) uzayının temel yapısı (O’neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996 ve Ratchliffe 1994) referanslarında verilmiştir. Lorentz uzaklığının geometrik yorumu (Yaglom 1979) tarafından verilmiştir. Bu çalışmada; Öklid ve Lorentz metrikleri arasındaki fonksiyonel ilişki doğru parçasının eğimine göre ifade edildi. Bu fonksiyonel ilişki kullanılarak Öklid düzlemindeki Thales bağıntısı, Menelaus ve Ceva teoremleri ile iç ve dış açıortay teoremlerinin Lorentz benzerleri elde edildi. Lorentz uzaklığını koruyan Öklid düzleminin izometrilерinin hangileri olduğunu belirlendi. Ayrıca Öklid ve Lorentz eşit uzunluklu doğru parçalarının geometrik yerleri ve bu geometrik yerlerden faydalanarak Öklid düzgün çokgenlerinin Lorentz düzgünlüğünü incelenmesi için bir yol elde edildi.

Lorentz(Minkowski) düzlemindeki doğruların eğimlerine göre sınıflandırılması (Catoni vd. 2008 ve Shonoda 2016) referanslarında ve doğruların dikliği (pseudo-ortogonallık) ile bir noktanın bir doğruya uzaklığı (Catoni vd. 2008) referansında verilmiştir. Lorentz(Minkowski) düzlemindeki çemberlere (Yaglom 1979, Birman ve Nomizu 1983 ve Catoni vd. 2008) referanslarında değinilmiştir. Lorentz(Minkowski) düzlemindeki üçgenler genel olarak (Yaglom 1979) tarafından çalışılmıştır. Daha sonra kenarları future-pointing timelike vektörlerden oluşan pure üçgenler için alan ve Lorentz trigonometrik bağıntılar (Birman ve Nomizu 1984) tarafından incelenmiştir. Devamında daha kapsamlı olarak kenarları non-null vektörler (yani spacelike ve timelike) oluşan üçgenler için açı, alan ve Lorentz trigonometrik bağıntılar (Nešović ve Petrović-Torgašev 2003) verilmiştir. Bu tezde, Öklid düzlemindeki üçgenlerin çevrel, iç ve dış teğet çemberlerin Lorentz(Minkowski) düzlemindeki benzerleri ve var olma koşulları incelendi.

Lorentz(Minkowski) düzlemindeki konveks çokgenler (Fillastre 2014) referansında incelenmiştir. Bu tezde, (Fillastre 2014) referansındaki konveks çokgenin nasıl oluşturulduğu açıklanmış ve örnekler verilerek matlab programı kullanılarak şekilleri oluşturulmuştur.

### 3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin geri kalan kısmında ele alınacak olan Lorentz(Minkowski) geometrisinin temel tanım, teorem ve özellikleri (O’neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996, Birman ve Nomizu 1984, Ratchliffe 1994, Catoni vd. 2008 ve Shonoda 2016) referanslarına göre özetlenerek verilecektir. Öncelikle Lorentz(Minkowski) uzayının temel yapısı ve devamında Lorentz(Minkowski) düzlemindeki temel kavramlar verilecektir.

#### 3.1 Lorentz(Minkowski) Uzayı

**Tanım 3.1.1 (Simetrik Bilineer Formlar)**  $V$  bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  ve  $\forall u, v, w \in V$  için,

- (i)  $g(u, v) = g(v, u)$
- (ii)  $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$
- (iii)  $g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

özelliklerine sahipse bu durumda  $g$  dönüşümüne  $V$  vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear formdur denir (O’neill 1983).

**Tanım 3.1.2**  $V$  reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form  $g$  olsun. O zaman

- (i)  $\forall v \in V$  ve  $v \neq 0$  için  $g(v, v) > 0$  ise  $g$  ye pozitif tanımlı,
- (ii)  $\forall v \in V$  ve  $v \neq 0$  için  $g(v, v) < 0$  ise  $g$  ye negatif tanımlı,
- (iii)  $\forall v \in V$  ve  $v \neq 0$  için  $g(v, v) \geq 0$  ise  $g$  ye yarı pozitif tanımlı,
- (iv)  $\forall v \in V$  ve  $v \neq 0$  için  $g(v, v) \leq 0$  ise  $g$  ye yarı negatif tanımlı denir (O’neill 1983).

**Tanım 3.1.3**  $V$  bir reel vektör uzayı ve  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümü  $V$  üzerinde simetrik bilinear form olsun. O zaman

- (i)  $g$  non – dejenere  $\Leftrightarrow g(u, v) = 0$  ve  $\forall v \in V$  için  $u = 0$  dır.
- (ii)  $g$  dejenere  $\Leftrightarrow g(w, v) = 0$  ve  $\forall v \in V$  için  $w \neq 0$  dır.

$V$  reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form  $g$  ise  $V$  nin herhangi bir  $W$  altuzayı için  $g|_W$  kısıtlaması da yine bir simetrik bilinear formdur (O’neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

**Tanım 3.1.4**  $V$  bir reel vektör uzayı ve  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümü  $V$  üzerinde simetrik bilinear form olsun.  $g|_W$  negatif tanımlı olacak şekilde  $V$  nin en büyük boyutlu  $W$  altuzayının boyutuna  $g$  simetrik bilinear formunun indeksi denir ve  $\text{ind}V = v$  ile gösterilir (Duggal ve Bejancu 1996).

**Tanım 3.1.5 (Skaler Çarpım Uzayı)**  $V$  bir reel vektör uzayı olmak üzere,  $V$  üzerinde tanımlı,

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü bilinear, simetrik ve non-dejenere ise  $g$  ye  $V$  üzerinde bir skaler çarpım, bu durumda  $V$  vektör uzayına da bir skaler çarpım uzayı denir. Bir iç çarpım, pozitif tanımlı bir skaler çarpımdır. Örneğin,  $\mathbb{R}^n$  uzayındaki  $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n)$  olmak üzere,  $\langle v, w \rangle_E = \sum_{i=1}^n v_i w_i$  iç çarpımıdır. İç çarpımın birçok özelliği skaler çarpıma taşınır. Ancak skaler çarpım tanımsız olduğunda bazı farklar çıkar. Örneğin,  $g = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  için,

$$g(v, w) = v_1 w_1 - v_2 w_2$$

dönüşümünün simetrik ve bilinear olduğu açıktır. Burada,  $v, w$  yerine  $(1,0)$  ve  $(0,1)$  vektörleri alınarak  $g$  dönüşümünün non-dejenere olduğu gösterilebilir. Böylece  $g$  bir skaler çarpımdır. Bir  $v \in V$  vektörü,  $g(v) = v_1^2 - v_2^2, v \neq 0$  olduğunda,  $g$  skaler çarpımı tanımsızdır (O’neill 1983).

**Tanım 3.1.6**  $v, w \in V, v \neq 0, w \neq 0$  için  $g(v, w) = 0$  ise  $v$  ve  $w$  vektörlerine ortogonal (diktir) denir ve  $v \perp w$  ile gösterilir (O’neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

**Teorem 3.1.1** Eğer  $W, V$  skaler çarpım uzayının bir altuzayı ise o zaman,

- (i)  $\dim W + \dim W^\perp = n = \dim V$
- (ii)  $(W^\perp)^\perp = W$

dır (O’neill 1983).

**Tanım 3.1.7**  $V$  bir reel vektör uzayı,  $g, V$  üzerinde skaler çarpım ve  $W, V$  nin bir altuzayı olsun. Eğer  $g|_W$  non-dejenere ise,  $W$  altuzayı non-dejenere olarak adlandırılır (O’neill 1983).

**Teorem 3.1.2**  $V$  bir skaler çarpım uzayı ve  $W, V$  nin bir altuzayı olsun.  $W$  nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart  $V$  nin  $W$  ve  $W^\perp$  nin direkt toplamı yani  $V = W \oplus W^\perp$  olmasıdır (O’neill 1983).

**Tanım 3.1.8** Bir  $V$  vektör uzayı üzerinde skaler çarpım  $g$  olsun. Bir  $v \in V$  vektörünün normu

$$\|v\| = |g(v, v)|^{1/2}$$

olarak tanımlanır. Normu 1 birim olan vektöre birim vektör ve ortogonal birim vektör kümesine ortonormal sistem denir.  $n = \dim V$  için,  $V$  deki herhangi bir  $n$ -boyutlu ortonormal vektör kümesi,  $V$  için bir tabandır (O’neill 1983).

**Teorem 3.1.3** Bir  $V \neq \{0\}$  skaler çarpım uzayı bir ortonormal sisteme sahiptir (O’neill 1983).

**Teorem 3.1.4** Bir  $V$  reel vektör uzayı için ortonormal taban  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ve  $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$  olsun. O zaman  $\forall v \in V$  vektörü

$$v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(v, e_i) e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O’neill 1983).

**Teorem 3.1.5** Bir  $V$  reel vektör uzayının bir  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ortonormal tabanı için  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$  işaretlerindeki negatif terimlerinin sayısı  $\text{ind}V = v$  dir (O’neill 1983).

**Tanım 3.1.9**  $V$  vektör uzayı üzerinde tanımlanan  $g$  skaler çarpımı özel olarak pozitif tanımlı ise Öklid metriği adını alır,  $V$  ye de Öklid uzayı denir. Eğer  $g$  nin indeksi  $v = 1$  ise,  $g$  skaler çarpımı Lorentz(Minkowski) metriği olup,  $V$  ye de Lorentz(Minkowski) uzayı denir ve  $n = \dim V$  için,  $\mathbb{R}_1^n$  veya  $L^n$  ile gösterilir (O’neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

### 3.2 Lorentz(Minkowski) Düzlemi

**Tanım 3.2.1** Lorentz iç çarpımı  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  için,

$$\langle x, y \rangle_L = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

biçiminde tanımlanır. Bu iç çarpımla birlikte  $\mathbb{R}^2$  afin düzlemine Lorentz(Minkowski) düzlemi denir ve  $L^2$  veya  $\mathbb{R}_1^2$  ile gösterilir. Herhangi bir  $x \in L^2$  vektörünün normu  $\|x\|_L = \sqrt{|\langle x, x \rangle_L|}$  şeklinde tanımlanır (Birman ve Nomizu 1984).

Böylece  $\|x\|_L$  nin anlamı  $x$  noktasından orijine uzaklıktır. O zaman iki nokta arasındaki uzaklık fonksiyonu,

$$d_L(x, y) = \|x - y\|_L = \sqrt{|(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2|}$$

şeklindedir.

**Tanım 3.2.2 (Lorentz(Minkowski) Düzleminde Vektör Sınıflandırma)** Bir  $x = (x_1, x_2) \in L^2$  vektörü,

- i)  $\langle x, x \rangle_L < 0$  ise  $x$  timelike vektör,
- ii)  $\langle x, x \rangle_L > 0$  veya  $x = 0$  ise  $x$  spacelike vektör,
- iii)  $\langle x, x \rangle_L = 0$  ve  $x \neq 0$  ise  $x$  lightlike (null) vektör

şeklinde tanımlanır (O'Neill 1983).

**Tanım 3.2.3**  $e = (0,1)$  olsun. Bir  $x = (x_1, x_2)$  timelike vektörü,

- i)  $\langle x, e \rangle_L < 0$  için future-pointing (pozitif) timelike vektör,
- ii)  $\langle x, e \rangle_L > 0$  için past-pointing (negatif) timelike vektör

olarak adlandırılır. Buradan bir  $x = (x_1, x_2)$  vektörünün;

future-pointing vektör olması için gerek ve yeter şart  $x_1^2 - x_2^2 < 0$  ve  $x_2 > 0$  olmasıdır,

past-pointing vektör olması için gerek ve yeter şart  $x_1^2 - x_2^2 < 0$  ve  $x_2 < 0$  olmasıdır (Birman ve Nomizu 1984).

**Tanım 3.2.4 (Lorentz(Minkowski) Düzleminde Doğrular)**  $L^2$  de iki nokta  $P = (x, y)$ ,  $P_0 = (x_0, y_0)$  olsun. Bu noktalardan geçen doğrunun eğimi,

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

olmak üzere,

- i)  $|m| < 1$  doğrusuna spacelike doğru (1.çeşit),
- ii)  $|m| > 1$  doğrusuna timelike doğru (2.çeşit),
- iii)  $|m| = 1$  doğrusuna lightlike (null) doğru

denir (Shonoda 2016).

**Tanım 3.2.5**  $L^2$  de bir  $P = (x_0, y_0)$  noktasından geçen doğru denklemleri, hiperbolik trigonometrik fonksiyonlarla ifade edilebilir:

- i)  $|m| < 1$  ise bu doğru (1.çeşit) denklemi,

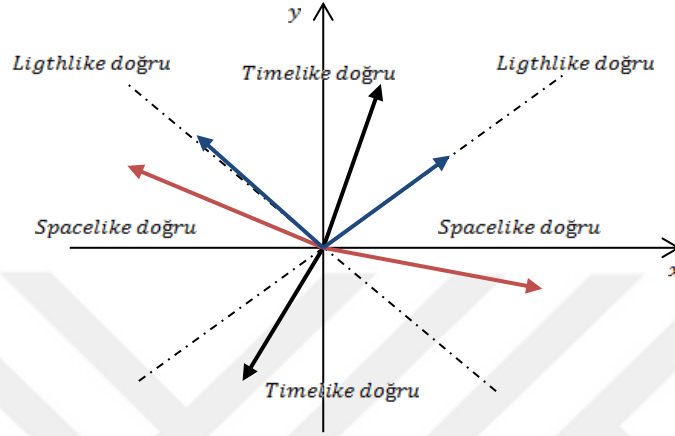
$$(x - x_0)\sinh\theta - (y - y_0)\cosh\theta = 0$$

dir ( $\theta$  açısı  $x$  eksenine yapılan açı olarak alınmıştır).

ii)  $|m| > 1$  ise bu doğru (2.çeşit) denklemi,

$$(x - x_0)\cosh\theta' - (y - y_0)\sinh\theta' = 0$$

dir ( $\theta'$  açısı  $y$  eksenine yapılan açı olarak alınmıştır, Catoni vd. 2008).

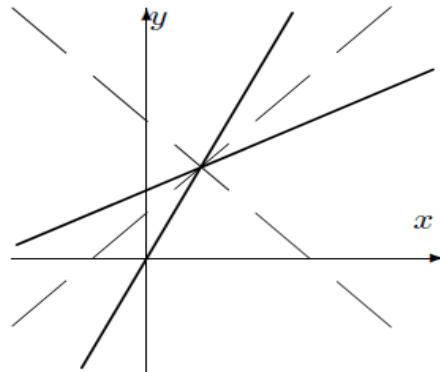


Şekil 3.1  $L^2$  de doğrular.

**Tanım 3.2.6** Lorentz(Minkowski) düzleminde  $x$  ve  $y$  vektörlerinin Lorentz ortogonal olması için gerek ve yeter şart  $\langle x, y \rangle_L = 0$  olmasıdır (Ratchliffe 1994).

**Teorem 3.2.1**  $L^2$  de sıfırdan farklı  $x$  ve  $y$  vektörleri Lorentz ortogonal olsunlar. O zaman  $x$  timelike vektör ise  $y$  spacelike vektördür (Ratchliffe 1994).

**Teorem 3.2.2 (Pseudo-ortogonal)** Lorentz(Minkowski) düzlemindeki iki doğru, lighthlike doğrularına paralel bir çift doğruya göre simetrik ise pseudo-ortogonaldır (Catoni vd. 2008).



Şekil 3.2 Pseudo-ortogonal iki doğru.

**Teorem 3.2.3**  $L^2$  deki her doğru parçası, bir tek orta dikmeye sahiptir (Catoni vd. 2008).

**İspat :**  $P_1 = (p_1, q_1)$  ve  $P_2 = (p_2, q_2)$  Lorentz(Minkowski) düzleminde iki nokta olsun.

Bu noktalardan eşit uzaklıkta olan nokta  $Q = (x, y)$  ise,

$$d_L(P_1, Q) = d_L(P_2, Q)$$

yazılabilir.

Eğer  $\overline{P_1 P_2}$  lighthlike ise aşıkardır.

Eğer  $\overline{P_1 P_2}$  spacelike ise, yukarıda ifade edilen eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} (x - p_1)^2 - (y - q_1)^2 &= (x - p_2)^2 - (y - q_2)^2, \\ \Rightarrow (p_1 - p_2)(2x - p_1 - p_2) &= (q_1 - q_2)(2y - q_1 - q_2), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= \frac{(p_1 - p_2)}{(q_1 - q_2)}x + \frac{(q_1^2 - q_2^2) - (p_1^2 - p_2^2)}{2(q_1 - q_2)}, \\ \Rightarrow l: y &= \frac{1}{m}x + \frac{(q_1^2 - q_2^2) - (p_1^2 - p_2^2)}{2(q_1 - q_2)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

bulunur. Böylece (3.2) denklemindeki  $l$  doğrusu,  $\overline{P_1 P_2}$  ye pseudo-ortogonal ve (3.1)

denkleminde  $l$  doğrusu,  $\overline{P_1 P_2}$  orta noktası olan  $P_M = \left( (p_1 + p_2)/2, (q_1 + q_2)/2 \right)$  den

geçer.

Eğer  $\overline{P_1 P_2}$  timelike ise benzer sonuç elde edilir.

Not olarak Teorem 3.2.3 ün ispatı bu düzlemde köşe koordinatları verilen herhangi bir üçgenin kenarlarının orta dikmelerinin denklemlerinin elde edilmesinde kullanılacaktır.

**Teorem 3.2.4**  $L^2$  de bir  $P_1 = (x_1, y_1)$  noktasının  $\gamma : y - mx - q = 0$  doğrusuna uzaklığı  $|m| \neq 1$  olmak üzere,

$$d_L(P_1, \gamma) = \frac{|y_1 - mx_1 - q|}{\sqrt{|m^2 - 1|}}$$

dir (Catoni vd. 2008).

## 4. ÖKLİD VE LORENTZ UZAKLIKLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ

### 4.1 Lorentz Uzaklığının Geometrik Yorumu

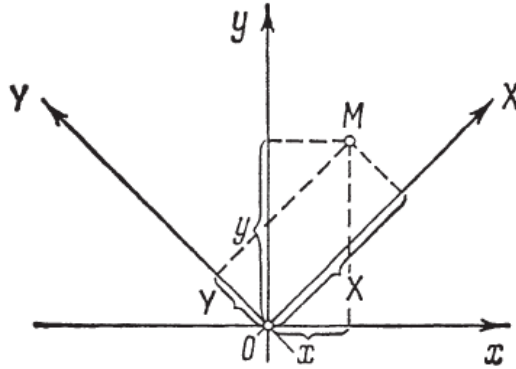
Lorentz uzaklığının geometrik yorumu (Yaglom 1979) referansı temel alınarak verilecektir. Lorentz(Minkowski) geometrisinde,  $P = (x, y)$ ,  $P' = (x', y')$  olmak üzere,  $T : P \rightarrow P'$  bir katı hareket olsun.  $v, a, b$  katı hareketin keyfî parametreleri olmak üzere,

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}x - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}y + a, \quad y' = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}x + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}y + b \quad (4.1)$$

dır. Lorentz(Minkowski) geometrisinde  $\{x, y\}$  ve  $\{X, Y\}$  koordinat sistemleri arasındaki bağıntı,

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) \quad veya \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y), y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \quad (4.2)$$

şeklindedir.



(4.2) denklemleri, Lorentz(Minkowski) geometrisinin hareketlerini  $X$  ve  $Y$  koordinatları cinsinden ifade edilmesini sağlar.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-v^2},$$
$$A = \frac{a+b}{\sqrt{2}}, \quad B = \frac{-a+b}{\sqrt{2}}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}\sqrt{2}X' &= \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{X-Y}{\sqrt{2}} + \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{X+Y}{\sqrt{2}} + (a+b) \\ \sqrt{2}Y' &= -\frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{X-Y}{\sqrt{2}} + \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{X+Y}{\sqrt{2}} + (-a+b)\end{aligned}$$

veya

$$X' = \gamma X + A, \quad Y' = \frac{1}{\gamma} Y + B \quad (4.3)$$

yazılabilir. (4.3) denkleminde, bu düzlemdeki dönme,

$$X_1 = \gamma X, \quad Y_1 = \frac{1}{\gamma} Y \quad (4.4)$$

olduğundan

$$X' = X_1 + A, \quad Y' = Y_1 + B \quad (4.5)$$

ötelemesi ile bulunur.

Diğer taraftan,

$$\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1, \quad \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right)^2 - \left( -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right)^2 = 1$$

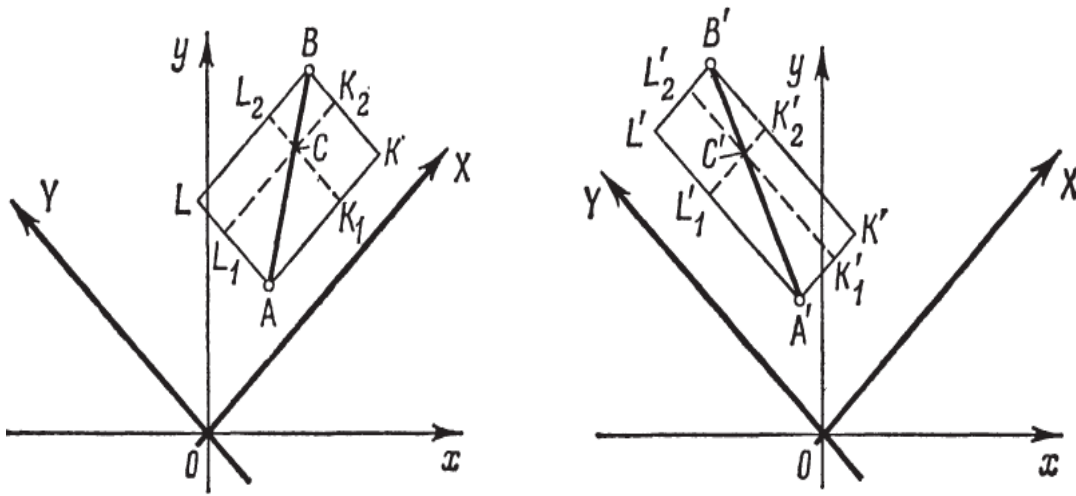
olduğundan (4.4) denklemi  $\{x, y\}$  koordinatları cinsinden,

$$\begin{aligned}x' &= \cosh \varphi x + \sinh \varphi y \\ y' &= \sinh \varphi x + \cosh \varphi y\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Bu dönme, hiperbolik dönme olarak adlandırılır. (4.3) dönüşümü paralel doğruları paralel doğrulara dönüştürür ve paralel doğru parçalarının oranını korur. Bu nedenle herhangi bir hareket altında  $OX$  ve  $OY$  eksenlerine paralel bir

doğrunun görüntüsü yine bu eksenlere paraleldir. Bu, Lorentz(Minkowski) geometrisinde iki “null doğru” ailesine sahip olduğumuz anlamına gelir.

Şimdi ilk önce  $OX$  ve  $OY$  eksenlerinden birine paralel olmayan bir doğru parçası ele alınsın.  $AKBL$ , kenarları  $OX$  ve  $OY$  eksenlerine paralel ve köşegeni  $AB$  olan aşağıdaki şekildeki gibi bir dikdörtgen olsun. (4.1) veya (4.3) hareketi, bu dikdörtgeni kenarları  $OX$  ve  $OY$  eksenine paralel olan ve alanı  $AKBL$  ile aynı olan  $A'K'B'L'$  dikdörtgenine eşler.



Eğer  $A$  ve  $B$  birbirine yakın ise  $AKBL$  dikdörtgeninin alanı küçülür. Bu nedenle  $A$  noktasını  $B$  ye çok yaklaştırdığımızda  $s(AKBL)$  sıfıra yaklaşır. Bu alanı,  $A$  ile  $B$  veya  $A'$  ile  $B'$  noktalarının ayrılma ölçüsü olarak kabul ederiz. O halde  $A$  dan  $B$  ye Lorentz uzaklığını  $s(AKBL)$  ile belirtebiliriz.

$d_{LAB}$  uzaklığı,  $AKBL$  dikdörtgenin alanının kareköküyle orantılıdır yani,

$$d_{LAB} = k\sqrt{s(AKBL)}$$

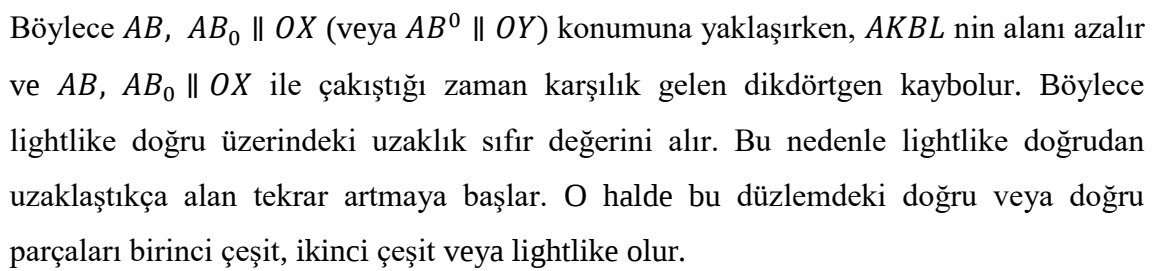
dir.  $k$  katsayısını uzunluk ve alan birimlerini dikkate alarak seçilirse yukarıdaki eşitlik,

$$d_{LAB} = \sqrt{2s(AKBL)}$$

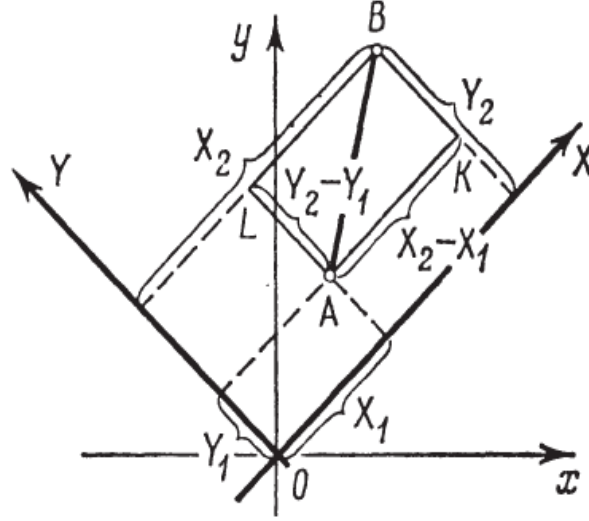
biçiminde yazılabilir.

$$d_{LAB} = d_{LAC} + d_{LCB}$$

olur. Yukarıdaki şekildeki  $AKBL$ ,  $AK_1CL_1$ ,  $CK_2BL_2$  dikdörtgenlerin alanları, bu dikdörtgenlerin  $AB, AC$  ve  $CB$  köşegenlerinin kareleriyle orantılıdır.



Şimdi  $A$  ve  $B$  noktalarının aşağıdaki şekildeki gibi  $\{X, Y\}$  koordinat sistemindeki koordinatları sırasıyla  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  ve  $\{x, y\}$  koordinat sistemindeki koordinatları  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  olsun.



O zaman  $AKBL$  dikdörtgeninin kenar uzunlukları  $|X_1 - X_2|$  ve  $|Y_1 - Y_2|$  dir. Buradan,  $s(AKBL) = |(X_1 - X_2) \cdot (Y_1 - Y_2)|$  ve

$$d_{LAB} = \sqrt{2s(AKBL)} = \sqrt{2|(X_1 - X_2) \cdot (Y_1 - Y_2)|}$$

elde edilir. (4.2) denkleminde,  $(X, Y)$  koordinatları,  $(x, y)$  koordinatları cinsinden yazılırsa,  $A = (x_1, y_1)$  ve  $B = (x_2, y_2)$  noktaları arasındaki uzaklık,

$$\begin{aligned} d_{LAB} &= \sqrt{2 \left| \frac{1}{2} [(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)] \cdot [(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)] \right|} \\ &= \sqrt{|(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2|} \end{aligned} \quad (4.6)$$

bulunur.  $AB$  birinci çeşit ise (4.6) pozitif,  $AB$  ikinci çeşit ise (4.6) negatiftir. O halde birinci ve ikinci çeşit doğru parçalarının uzunluklarının farklı şekilde ölçüldüğü söylenebilir.

#### 4.2 Öklid ve Lorentz Uzaklıkları Arasındaki Fonksiyonel İlişki

Lorentz(Minkowski) düzlemdeki noktalar, doğrular Öklid düzlemindekiyle aynı, açı ölçümü de Öklid düzlemindekine benzer yolla yapılır. Ancak uzaklık fonksiyonu Öklid düzleminde farklıdır. Analitik düzlemde alınan herhangi bir  $P_1 = (x_1, y_1)$  ve  $P_2 = (x_2, y_2)$  noktaları arasındaki Öklid uzaklığı,

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iken, Lorentz uzaklığı,

$$d_L(P_1, P_2) = \sqrt{|(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2|}$$

biçimindedir.

Aşağıdaki önerme Lorentz metriği ile Öklid metriği arasındaki fonksiyonel ilişkiyi ifade etmektedir.

**Önerme 4.2.1** Analitik düzlemde  $P = (x_1, x_2)$ ,  $Q = (y_1, y_2)$  iki nokta ve  $\overrightarrow{PQ}$  doğrusunun eğimi  $m$  olmak üzere,

$$\text{i) } d_E(P, Q) = \sqrt{\frac{1+m^2}{|1-m^2|}} \cdot d_L(P, Q), \quad |m| \neq 1 \text{ ve } m \in \mathbb{R} \text{ ise,}$$

$$\text{ii) } d_E(P, Q) = d_L(P, Q), \quad m = 0 \text{ veya } m \rightarrow \infty \text{ ise}$$

dır.

**İspat :**

i) Analitik düzlemde  $P = (x_1, x_2)$ ,  $Q = (y_1, y_2)$  iki nokta ve  $\overrightarrow{PQ}$  doğrusunun eğimi

$m$ , ( $|m| \neq 1$ ) olsun. O zaman  $p(m) = \sqrt{\frac{1+m^2}{|1-m^2|}}$  için,

$$d_E(P, Q) = p(m) \cdot d_L(P, Q)$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilsin.

$$d_E(P, Q) = |x_1 - y_1| \sqrt{1 + m^2}$$

ve

$$d_L(P, Q) = |x_1 - y_1| \sqrt{|1 - m^2|}$$

olduğundan, bu eşitliklerden faydalananarak,

$$\begin{aligned} \frac{d_E(P, Q)}{d_L(P, Q)} &= \frac{|x_1 - y_1| \sqrt{1 + m^2}}{|x_1 - y_1| \sqrt{|1 - m^2|}} \\ \Rightarrow d_E(P, Q) &= \sqrt{\frac{1 + m^2}{|1 - m^2|}} \cdot d_L(P, Q) \\ \Rightarrow d_E(P, Q) &= p(m) \cdot d_L(P, Q) \end{aligned}$$

bulunur. Burada  $p(m)$  değeri için,  
 $m$  nin  $|m| < 1$  (spacelike) durumunda,

$$d_E(P, Q) = \sqrt{\frac{1 + m^2}{1 - m^2}} \cdot d_L(P, Q)$$

ve  $|m| > 1$  (timelike) durumunda,

$$d_E(P, Q) = \sqrt{\frac{1 + m^2}{m^2 - 1}} \cdot d_L(P, Q)$$

olacaktır.

**ii)**  $m = 0$  ise,  $x_2 = y_2$  ve  $m \rightarrow \infty$  ise,  $x_1 = y_1$  olacağından,

$$d_E(P, Q) = d_L(P, Q)$$

elde edilir.

Bu önermeden anlaşıldığı üzere dikey ve yatay doğrultudaki iki nokta arasındaki Öklid ve Lorentz uzaklıkları eşit fakat diğer doğrultularda birbirinden farklıdır.

**Sonuç 4.2.1**  $P, Q$  ve  $R$  analitik düzlemde birbirinden farklı doğrudaş üç nokta olsun. O zaman

$$d_E(P, R) = d_E(Q, R) \Leftrightarrow d_L(P, R) = d_L(Q, R)$$

dır.

**İspat :**  $(\Rightarrow) d_E(P, R) = d_E(Q, R)$  olsun.  $P, Q$  ve  $R$  doğrudaş noktalar olduğundan aynı doğru üzerindedirler. Bu doğrunun eğimi  $m$  olsun. O zaman Önerme 4.2.1 den,

$$d_E(P, R) = \sqrt{\frac{1+m^2}{|1-m^2|}} \cdot d_L(P, R)$$

$$d_E(Q, R) = \sqrt{\frac{1+m^2}{|1-m^2|}} \cdot d_L(Q, R)$$

yazılabilir. Böylece  $d_E(P, R) = d_E(Q, R)$  olduğundan,

$$\sqrt{\frac{1+m^2}{|1-m^2|}} \cdot d_L(P, R) = \sqrt{\frac{1+m^2}{|1-m^2|}} \cdot d_L(Q, R)$$

$$\Rightarrow d_L(P, R) = d_L(Q, R)$$

bulunur.

$(\Leftarrow) d_L(P, R) = d_L(Q, R)$  olsun.  $P, Q$  ve  $R$  doğrudaş noktalar olduğundan aynı doğru üzerindedirler. O halde doğrunun eğimi  $m$  olsun. O zaman Önerme 4.2.1 den,

$$d_L(P, R) = \sqrt{\frac{|1-m^2|}{1+m^2}} \cdot d_E(P, R)$$

$$d_L(Q, R) = \sqrt{\frac{|1 - m^2|}{1 + m^2}} \cdot d_E(Q, R)$$

yazılabilir.  $d_L(P, R) = d_L(Q, R)$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{|1 - m^2|}{1 + m^2}} \cdot d_E(P, R) &= \sqrt{\frac{|1 - m^2|}{1 + m^2}} \cdot d_E(Q, R) \\ \Rightarrow d_E(P, R) &= d_E(Q, R) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi Öklid düzlemindeki yönlendirilmiş uzunluk tanımına benzer aşağıdaki tanım verilsin.

**Tanım 4.2.1:**  $L^2$  de,  $K$  ve  $L$  yönlendirilmiş bir  $l$  doğrusu üzerinde herhangi iki nokta olsun.  $[KL]$  doğru parçasının yönlendirilmiş Lorentz uzunluğu,

$$d_L[KL] = \begin{cases} d_L(KL) & \text{eğer } \overrightarrow{KL} \text{ ve } l \text{ aynı yönde,} \\ -d_L(KL) & \text{eğer } \overrightarrow{KL} \text{ ve } l \text{ zıt yönde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada spacelike için yönlendirme pozitif ve negatif bölgeler, timelike için future-pointing (pozitif) ve past-pointing (negatif) bölgelerdir. Eğer  $K, L, M$  aynı yönlendirilmiş doğru üzerindeki noktalar ve  $M$  noktası,  $K$  ve  $L$  arasında ise  $KML$  şeklinde gösterilir. Eğer  $KML$  ise o zaman  $M$  noktası  $[KL]$  doğru parçasını içten böler ve  $d_L[KM]/d_L[KL] = \rho > 0$  olur. Eğer  $KLM$  ve  $MKL$  ise o zaman  $M$  noktası  $[KL]$  doğru parçasını dıştan böler ve  $d_L[KM]/d_L[KL] = \rho < 0$  olur.



Burada birinci durumda  $[KM]$  ve  $[ML]$  zıt yönlü, ikinci durumda  $[KM]$  ve  $[ML]$  aynı yönlüdür.

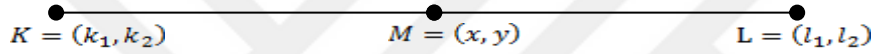
Aşağıdaki teoremden, Öklid yönlendirilmiş uzunlukları oranı ile Lorentz yönlendirilmiş uzunlukları oranının değişmediği gösterilmiştir.

**Teorem 4.2.1**  $K = (k_1, k_2)$  ve  $L = (l_1, l_2)$  analitik düzlemde birbirinden farklı iki nokta olsun. Eğer  $M = (x, y)$  noktası,  $\overrightarrow{KL}$  doğrusu üzerinde bir nokta ise,

$$\frac{d_L(K, M)}{d_L(M, L)} = \frac{d_E(K, M)}{d_E(M, L)}$$

olur.

**İspat :**



$K = M$  ise o zaman her iki oranda sıfır olur ve eşitlik sağlanır.  $K \neq M \neq L$  olsun. O zaman

$$\frac{|(k_1 - x)^2 - (k_2 - y)^2|}{|(x - l_1)^2 - (y - l_2)^2|} = \frac{(k_1 - x)^2 + (k_2 - y)^2}{(x - l_1)^2 + (y - l_2)^2}$$

dır. Burada  $\overrightarrow{KL}$  doğrusunun spacelike, timelike, lightlike olması durumları ayrı ayrı incelenir.

**Durum 1:**  $\overrightarrow{KL}$  doğrusu spacelike ise  $|k_1 - x| > |k_2 - y|$  ve  $|x - l_1| > |y - l_2|$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{(k_1 - x)^2 - (k_2 - y)^2}{(x - l_1)^2 - (y - l_2)^2} &= \frac{(k_1 - x)^2 + (k_2 - y)^2}{(x - l_1)^2 + (y - l_2)^2} \\ \Rightarrow (k_1 - x)^2(x - l_1)^2 + (k_1 - x)^2(y - l_2)^2 - (k_2 - y)^2(x - l_1)^2 - (k_2 - y)^2(y - l_2)^2 \\ &= (k_1 - x)^2(x - l_1)^2 - (k_1 - x)^2(y - l_2)^2 + (k_2 - y)^2(x - l_1)^2 - (k_2 - y)^2(y - l_2)^2 \\ &\Rightarrow (k_1 - x)(y - l_2) = (k_2 - y)(x - l_1) \\ &\Rightarrow (k_1 - x)(y - l_2) - (k_2 - y)(x - l_1) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow k_1 y - k_1 l_2 - x y + x l_2 - k_2 x + k_2 l_1 + y x - y l_1 = 0$$

$$\Rightarrow (k_1 - l_1)y = (k_2 - l_2)x + k_1 l_2 - k_2 l_1$$

$$\Rightarrow y = \frac{k_2 - l_2}{k_1 - l_1} x + \frac{k_1 l_2 - k_2 l_1}{k_1 - l_1} \quad (4.8)$$

bulunur. Böylece  $M$  noktası  $\overleftrightarrow{KL}$  doğrusu üzerindedir. (4.8) denklemini (4.7) de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
& (k_1 - x) \left( \frac{k_2 x - l_2 x + k_1 l_2 - k_2 l_1}{k_1 - l_1} - l_2 \right) - \left( k_2 - \frac{k_2 x - l_2 x + k_1 l_2 - k_2 l_1}{k_1 - l_1} \right) (x - l_1) = 0 \\
& (k_1 - x) \left[ \frac{k_2 x - l_2 x + k_1 l_2 - k_2 l_1 - l_2 k_1 + l_2 l_1}{k_1 - l_1} \right] - \left[ \frac{k_2 k_1 - k_2 l_1 - k_2 x + l_2 x - k_1 l_2 + k_2 l_1}{k_1 - l_1} \right] (x - l_1) = 0 \\
& (k_1 - x) \left[ \frac{x(k_2 - l_2) - l_1(k_2 - l_2)}{k_1 - l_1} \right] - (x - l_1) \left[ \frac{k_1(k_2 - l_2) - x(k_2 - l_2)}{k_1 - l_1} \right] = 0 \\
& \frac{1}{k_1 - l_1} [(k_1 - x)(x - l_1)(k_2 - l_2) - (x - l_1)(k_1 - x)(k_2 - l_2)] = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.7) denklemi sağlanır. Yani Öklid ve Lorentz uzunlukları oranı aynıdır.

**Durum 2:**  $\overleftrightarrow{KL}$  doğrusu timelike ise  $|k_1 - x| < |k_2 - y|$  ve  $|x - l_1| < |y - l_2|$  olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \frac{(k_2 - y)^2 - (k_1 - x)^2}{(y - l_2)^2 - (x - l_1)^2} = \frac{(k_1 - x)^2 + (k_2 - y)^2}{(x - l_1)^2 + (y - l_2)^2} \\
& \Rightarrow (k_2 - y)^2(x - l_1)^2 + (k_2 - y)^2(y - l_2)^2 - (k_1 - x)^2(x - l_1)^2 - (k_1 - x)^2(y - l_2)^2 \\
& = (k_1 - x)^2(y - l_2)^2 - (k_1 - x)^2(x - l_1)^2 + (k_2 - y)^2(y - l_2)^2 - (k_2 - y)^2(x - l_1)^2 \\
& \Rightarrow (k_2 - y)(x - l_1) = (k_1 - x)(y - l_2) \\
& \Rightarrow (k_2 - y)(x - l_1) - (k_1 - x)(y - l_2) = 0 \tag{4.9} \\
& \Rightarrow k_2 x - k_2 l_1 - y x + y l_1 - k_1 y + k_1 l_2 + x y - x l_2 = 0 \\
& \Rightarrow y(l_1 - k_1) = x(l_2 - k_2) + k_2 l_1 - k_1 l_2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = \frac{l_2 - k_2}{l_1 - k_1} x + \frac{k_2 l_1 - k_1 l_2}{l_1 - k_1} \tag{4.10}$$

bulunur. Böylece  $M$  noktası  $\overleftrightarrow{KL}$  doğrusu üzerindedir. (4.10) denklemini (4.9) de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
& (x - l_1) \left( k_2 - \frac{l_2 x - k_2 x + k_2 l_1 - k_1 l_2}{l_1 - k_1} \right) - (k_1 - x) \left( \frac{l_2 x - k_2 x + k_2 l_1 - k_1 l_2}{l_1 - k_1} - l_2 \right) = 0 \\
& (x - l_1) \left[ \frac{k_2 l_1 - k_2 k_1 - l_2 x + k_2 x - k_2 l_1 + k_1 l_2}{l_1 - k_1} \right] - (k_1 - x) \left[ \frac{l_2 x - k_2 x + k_2 l_1 - k_1 l_2 - l_1 l_2 + k_1 l_2}{l_1 - k_1} \right] = 0 \\
& (x - l_1) \left[ \frac{k_1(l_2 - k_2) - x(l_2 - k_2)}{l_1 - k_1} \right] - (k_1 - x) \left[ \frac{x(l_2 - k_2) - l_1(l_2 - k_2)}{l_1 - k_1} \right] = 0 \\
& \frac{1}{l_1 - k_1} [(x - l_1)(k_1 - x)(l_2 - k_2) - (k_1 - x)(x - l_1)(l_2 - k_2)] = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.9) denklemi sağlanır. Yani Öklid ve Lorentz uzunlukları oranı aynıdır.

**Durum 3:**  $\overleftrightarrow{KL}$  doğrusu lightlike ise  $|k_1 - x| = |k_2 - y|$  ve  $|x - l_1| = |y - l_2|$  olduğundan eşitlik aşikârdır.

Eğer  $KLM$  ve  $MKL$  ise o zaman  $M$  noktası  $[KL]$  doğru parçasını dıştan bölerse ispat aynı şekildedir.

**Önerme 4.2.2** Analitik düzlemde  $A, B, C$  ve  $D$  dört farklı nokta,  $d_E(A, B) = d_E(C, D)$  ve  $m_1$  ile  $m_2$  sırasıyla  $\overleftrightarrow{AB}$  ve  $\overleftrightarrow{CD}$  doğrularının eğimleri olmak üzere,

- i) Eğer  $m_1 \neq |1| \neq m_2$  ise,  $d_L(A, B) = d_L(C, D)$  olması için gerek ve yeter şart  $|m_1| = |m_2|$  veya  $|m_1 m_2| = 1$  dir.
- ii) Eğer  $i \in \{1, 2\}$  için  $m_i = 0$  veya  $m_i \rightarrow \infty$  olması için gerek ve yeter şart  $d_L(A, B) = d_L(C, D)$  dir.

**İspat :**

$P = (x_1, x_2)$ ,  $Q = (y_1, y_2)$  analitik düzlemde iki nokta ve  $\overleftrightarrow{PQ}$  doğrusunun eğimi  $m$ , ( $|m| \neq 1$ ) olsun. O zaman  $p(m) = \sqrt{\frac{1+m^2}{|1-m^2|}}$  için,

$$d_E(P, Q) = p(m) \cdot d_L(P, Q)$$

eşitliğinin sağlandığı Önerme 4.2.1 de gösterilmişti.

- i) Böylece  $d_E(A, B) = d_E(C, D)$  ve  $m_1$  ile  $m_2$  sırasıyla  $\overleftrightarrow{AB}$  ve  $\overleftrightarrow{CD}$  doğrularının eğimleri olsun. O zaman Önerme 4.2.1 den  $p(m_1)d_L(A, B) = p(m_2)d_L(C, D)$  elde edilir.

Buradan,  $p(m_1) = p(m_2)$  olur öyleki,

$$\left| \frac{1 + m_1^2}{1 - m_1^2} \right| = \left| \frac{1 + m_2^2}{1 - m_2^2} \right|$$

bulunur. Burada mutlak değerden dolayı oluşan iki durumu inceleyelim.

**Durum 1:**

$$\begin{aligned}\frac{1+m_1^2}{1-m_1^2} &= \frac{1+m_2^2}{1-m_2^2} \\ \Rightarrow 1+m_1^2-m_2^2-(m_1m_2)^2 &= 1+m_2^2-m_1^2-(m_1m_2)^2 \\ \Rightarrow 2m_1^2 &= 2m_2^2 \\ \Rightarrow |m_1| &= |m_2|\end{aligned}$$

elde edilir.

**Durum 2:**

$$\begin{aligned}\frac{1+m_1^2}{1-m_1^2} &= \frac{-1-m_2^2}{1-m_2^2} \\ \Rightarrow 1+m_1^2-m_2^2-(m_1m_2)^2 &= -1-m_2^2+m_1^2+(m_1m_2)^2 \\ \Rightarrow 2 &= 2(m_1m_2)^2 \\ \Rightarrow |m_1m_2| &= 1\end{aligned}$$

bulunur.

Tersine  $|m_1| = |m_2|$  veya  $|m_1m_2| = 1$  ise,

$$p(m_1) = \left| \frac{1+m_1^2}{1-m_1^2} \right| = \left| \frac{1+m_2^2}{1-m_2^2} \right| = p(m_2)$$

eşitliği kolayca görülür. Böylece  $d_L(A, B) = d_L(C, D)$  elde edilir.

- ii)  $i \in \{1, 2\}$  için  $m_i = 0$  veya  $m_i \rightarrow \infty$  olsun. O zaman  $p(m_i) = \sqrt{\frac{1+m^2}{|1-m^2|}} = 1$  olduğundan,  $d_L(A, B) = d_L(C, D)$  elde edilir. Tersine,  $d_L(A, B) = d_L(C, D)$  olsun. Bu durumda  $p(m_i) = \sqrt{\frac{1+m^2}{|1-m^2|}} = 1$  olduğundan,  $i \in \{1, 2\}$  için  $m_i = 0$  veya  $m_i \rightarrow \infty$  dır.

**Sonuç 4.2.2** Analitik düzlemde  $A, B$  ve  $C$ ,  $d_E(A, B) = d_E(B, C)$  olacak şekilde doğrusal olmayan farklı üç nokta olsun. O zaman  $d_L(A, B) = d_L(B, C)$  ise  $\angle ABC$

açısının ölçüsü  $\frac{\pi}{2}$  ve  $\frac{3\pi}{2}$  veya  $A$  ve  $C$ ,  $B$  den geçen doğruya ve  $y = x$ ,  $y = -x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  doğrularına paralel olan doğrulara göre simetriktir.

Önerme 4.2.2 ve Sonuç 4.2.2 analitik düzlemdeki herhangi iki nokta arasındaki Lorentz uzaklığını koruyan Öklid düzleminin izometrilerini göstermektedir. Bu izometrilere; tüm ötelemeler, bir nokta etrafındaki  $\frac{\pi}{2}$  ve  $\frac{3\pi}{2}$  radyan dönmeler,  $y = x$ ,  $y = -x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  doğrularına paralel olan doğrulara göre yansımalar ve bunların birleşimleridir.

**Örnek 4.2.1** Analitik düzlemde  $P = (2,1)$  noktasının orijine olan Lorentz uzaklığını koruyan Öklid düzleminin izometrilerini bulunuz.

**Çözüm:**  $P = (2,1)$  noktasının orijine olan Lorentz uzaklığı,

$$d_L(O, P) = \sqrt{|2^2 - 1^2|} = \sqrt{3}$$

dür. Sonuç 4.2.2 den,  $\frac{\pi}{2}$  radyanlık dönmeyeyle  $P = (2,1)$  noktasının görüntüsü,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = P'$$

ve

$$d_L(O, P') = \sqrt{|1^2 - 2^2|} = \sqrt{3}$$

olur. Aynı şekilde  $\frac{3\pi}{2}$  radyanlık dönmeyeyle  $P = (2,1)$  noktasının görüntüsü,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = P'$$

ve

$$d_L(O, P') = \sqrt{|1^2 - 2^2|} = \sqrt{3}$$

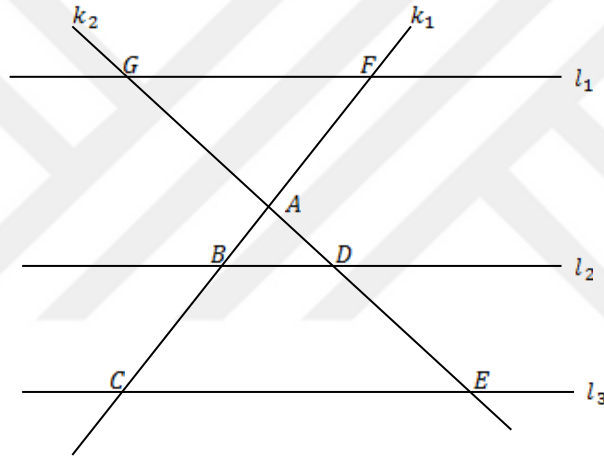
dür.  $P = (2,1)$  noktasının;  $y = x$  doğrusuna göre yansıması  $P' = (1,2)$  noktası,  $y = -x$  doğrusuna göre yansıması  $P' = (-1, -2)$  noktası,  $x = 0$  doğrusuna göre yansıması  $P' = (-2,1)$  noktası,  $y = 0$  doğrusuna göre yansıması  $P' = (2, -1)$  noktası olup, bu noktaların orijine olan Lorentz uzaklığı,  $P = (2,1)$  noktasının orijine olan uzaklığıyla aynıdır.

#### 4.3 Öklid Düzlemindeki Bazı Bağntı ve Teoremlerin Lorentz Benzerleri

Bu bölümde Öklid düzleminde üçgenlere ait iyi bilinen bazı formüllerin Lorentz benzerleri elde edilecektir. Lorentz(Minkowski) düzleminde aynı çeşit doğrular aynı çeşit doğrulara paralel olduğu için, paralel doğru terimiyle aynı çeşit doğruların kastedildiğini kabul edeceğiz.

**Teorem 4.3.1 (Öklid Düzleminde Thales Bağntıları)** Öklid düzleminde birbirine paralel olan üç veya daha fazla doğru, kendilerini kesen doğrular üzerinde, uzunlukları karşılıklı orantılı doğru parçalarına ayırırlar (Balcı, 2020).

Yani  $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$  ve  $k_1 \nparallel k_2$  doğruları için,



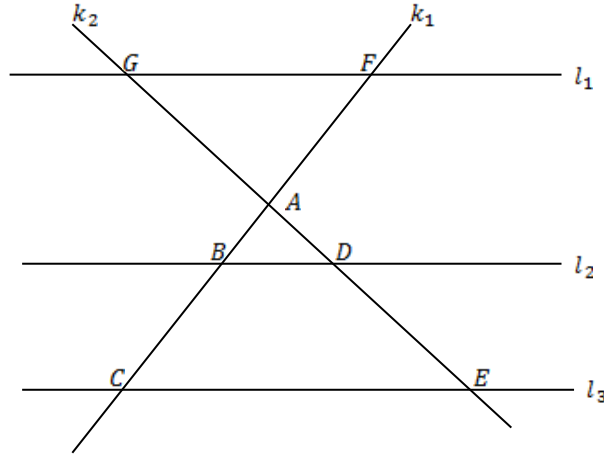
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|BD|}{|CE|}$$

ve

$$\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|AD|}{|AG|} = \frac{|BD|}{|GF|}$$

dir.

**Teorem 4.3.2 (Thales Bağntısının Lorentz Benzeri)**  $L^2$  de birbirine paralel olan üç veya daha fazla doğru, kendilerini kesen doğrular üzerinde, uzunlukları karşılıklı orantılı doğru parçalarına ayırırlar. Yani  $l_1, l_2, l_3, k_1, k_2$  doğrularının eğimleri -1 ve 1 den farklı olmak üzere  $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$  ve  $k_1 \nparallel k_2$  olsun. O halde,



$$\frac{d_L(A, B)}{d_L(A, C)} = \frac{d_L(A, D)}{d_L(A, E)} = \frac{d_L(B, D)}{d_L(C, E)}$$

ve

$$\frac{d_L(A, B)}{d_L(A, F)} = \frac{d_L(A, D)}{d_L(A, G)} = \frac{d_L(B, D)}{d_L(G, F)}$$

dir.

**İspat :**

$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$  doğruları paralel olduğu için eğimleri eşittir. O halde  $l_1, l_2, l_3$  doğrularının eğimleri  $m_1$ ,  $k_1$  doğrusunun eğimi  $m_2$  ve  $k_2$  doğrusunun eğimi  $m_3$  ve  $m_1, m_2, m_3 \neq \pm 1$  olsun. Önerme 4.2.1 den,

$$\begin{aligned} \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} &= \frac{\sqrt{\frac{1+m_2^2}{|1-m_2^2|}} \cdot d_L(A, B)}{\sqrt{\frac{1+m_2^2}{|1-m_2^2|}} \cdot d_L(A, C)} = \frac{d_L(A, B)}{d_L(A, C)} \\ \frac{d_E(A, D)}{d_E(A, E)} &= \frac{\sqrt{\frac{1+m_3^2}{|1-m_3^2|}} \cdot d_L(A, D)}{\sqrt{\frac{1+m_3^2}{|1-m_3^2|}} \cdot d_L(A, E)} = \frac{d_L(A, D)}{d_L(A, E)} \\ \frac{d_E(B, D)}{d_E(C, E)} &= \frac{\sqrt{\frac{1+m_1^2}{|1-m_1^2|}} \cdot d_L(B, D)}{\sqrt{\frac{1+m_1^2}{|1-m_1^2|}} \cdot d_L(C, E)} = \frac{d_L(B, D)}{d_L(C, E)} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak Teorem 4.3.1 gereğince,

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{d_E(A, D)}{d_E(A, E)} = \frac{d_E(B, D)}{d_E(C, E)}$$

olduğundan,

$$\frac{d_L(A, B)}{d_L(A, C)} = \frac{d_L(A, D)}{d_L(A, E)} = \frac{d_L(B, D)}{d_L(C, E)}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

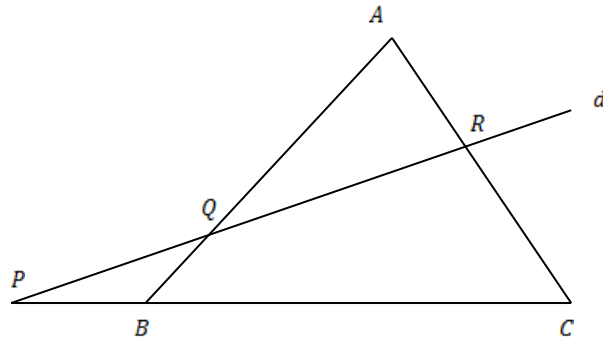
$$\frac{d_L(A, B)}{d_L(A, F)} = \frac{d_L(A, D)}{d_L(A, G)} = \frac{d_L(B, D)}{d_L(G, F)}$$

eşitliği bulunur.

**Teorem 4.3.3 (Öklid Düzleminde Menelaus Teoremi)** Öklid düzleminde  $d$  doğrusu  $\Delta ABC$  üçgeninin kenarlarını  $P, Q, R$  noktalarında kestiğinde,

$$\frac{|QA|}{|QB|} \cdot \frac{|PB|}{|PC|} \cdot \frac{|RC|}{|RA|} = -1$$

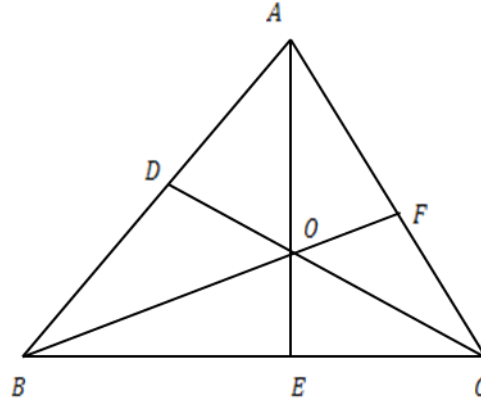
olur (Balcı, 2020).



**Teorem 4.3.4 (Öklid Düzleminde Ceva Teoremi)** Öklid düzleminde herhangi bir  $\Delta ABC$  üçgeninde  $[AE], [BF], [CD]$  bir  $O$  noktasında kesişmektedir.

$$\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = 1$$

dir (Balcı, 2020).

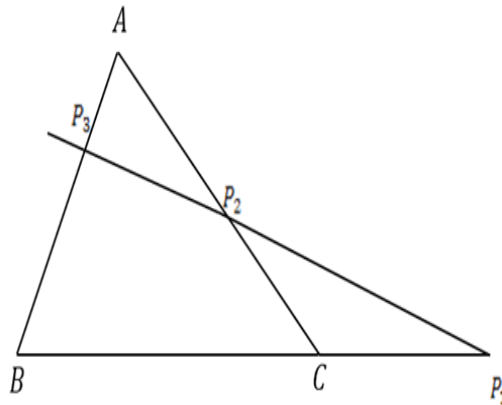


**Teorem 4.3.5 (Menelaus Teoreminin Lorentz Benzeri)**  $L^2$  de  $\Delta ABC$  bir üçgen ve  $P_1, P_2, P_3$  noktaları sırasıyla  $[BC], [CA], [AB]$  kenarları üzerinde birer nokta olsunlar.  $P_1, P_2, P_3$  noktaları doğrudan ise,

$$\frac{d_L(B, P_1)}{d_L(P_1, C)} \cdot \frac{d_L(C, P_2)}{d_L(P_2, A)} \cdot \frac{d_L(A, P_3)}{d_L(P_3, B)} = -1$$

dır. Burada  $P_1, P_2, P_3$  noktaları  $A, B, C$  noktalarından farklı ve  $\Delta ABC$  üçgeninin üç kenarında ya spacelike veya timelike doğrular üzerinde olmalıdır.

**İspat :**



$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$  doğrularının eğimleri sırasıyla  $m_1, m_2, m_3$  ve  $m_1, m_2, m_3 \neq \pm 1$  olsun.

Teorem 4.3.3 den Öklid düzleminde,

$$\frac{d_E(B, P_1)}{d_E(P_1, C)} \cdot \frac{d_E(C, P_2)}{d_E(P_2, A)} \cdot \frac{d_E(A, P_3)}{d_E(P_3, B)} = -1$$

eşitliği sağlanır. Önerme 4.2.1 den,

$$\begin{aligned} d_E(B, P_1) &= \sqrt{\frac{1+m_2^2}{|1-m_2^2|}} \cdot d_L(B, P_1), & d_E(P_1, C) &= \sqrt{\frac{1+m_2^2}{|1-m_2^2|}} \cdot d_L(P_1, C) \\ d_E(C, P_2) &= \sqrt{\frac{1+m_3^2}{|1-m_3^2|}} \cdot d_L(C, P_2), & d_E(P_2, A) &= \sqrt{\frac{1+m_3^2}{|1-m_3^2|}} \cdot d_L(P_2, A) \\ d_E(A, P_3) &= \sqrt{\frac{1+m_1^2}{|1-m_1^2|}} \cdot d_L(A, P_3), & d_E(P_3, B) &= \sqrt{\frac{1+m_1^2}{|1-m_1^2|}} \cdot d_L(P_3, B), \end{aligned}$$

dir. Tanım 4.2.1 den dolayı,  $|BP_1|$  and  $|P_1C|$  zıt yönlüdür. Böylece,

$$\begin{aligned} &\frac{d_E(B, P_1)}{d_E(P_1, C)} \cdot \frac{d_E(C, P_2)}{d_E(P_2, A)} \cdot \frac{d_E(A, P_3)}{d_E(P_3, B)} \\ &= - \frac{\sqrt{\frac{1+m_2^2}{|1-m_2^2|}} \cdot d_L(B, P_1)}{\sqrt{\frac{1+m_2^2}{|1-m_2^2|}} \cdot d_L(P_1, C)} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1+m_3^2}{|1-m_3^2|}} \cdot d_L(C, P_2)}{\sqrt{\frac{1+m_3^2}{|1-m_3^2|}} \cdot d_L(P_2, A)} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1+m_1^2}{|1-m_1^2|}} \cdot d_L(A, P_3)}{\sqrt{\frac{1+m_1^2}{|1-m_1^2|}} \cdot d_L(P_3, B)} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{d_L(B, P_1)}{d_L(P_1, C)} \cdot \frac{d_L(C, P_2)}{d_L(P_2, A)} \cdot \frac{d_L(A, P_3)}{d_L(P_3, B)} = -1 \end{aligned}$$

bulunur.

**Teorem 4.3.6 (Ceva Teoremi Lorentz Benzeri)**  $L^2$  de  $\triangle ABC$  bir üçgeni ve  $A, B, C$  köşelerinden geçen ve karşılarındaki kenarları sırasıyla  $P_1, P_2, P_3$  noktalarında kesen  $l_1, l_2, l_3$  doğruları verilsin.  $l_1, l_2, l_3$  doğrularının aynı noktada kesişmesi için gerek ve yeter şart

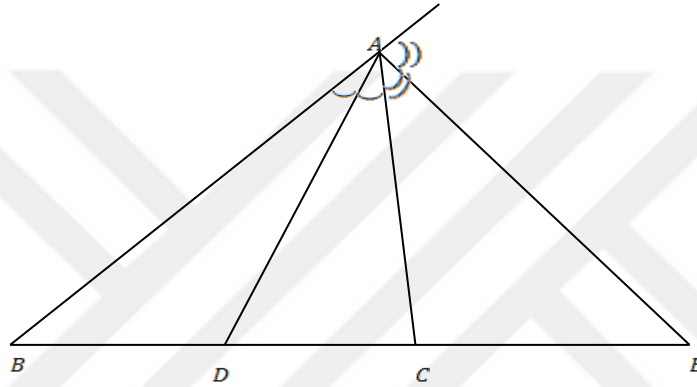
$$\frac{d_L(B, P_1)}{d_L(P_1, C)} \cdot \frac{d_L(C, P_2)}{d_L(P_2, A)} \cdot \frac{d_L(A, P_3)}{d_L(P_3, B)} = 1$$

olmasıdır. Burada  $P_1, P_2, P_3$  noktaları  $A, B, C$  noktalarından farklı ve  $\Delta ABC$  üçgeninin üç kenarında ya spacelike veya timelike doğrular üzerinde olmalıdır.

**Teorem 4.3.7 (Öklid Düzleminde İç ve Dış Açortay Teoremi)** Öklid düzleminde herhangi bir  $\Delta ABC$  üçgeni için,  $A$  açısının iç açortayı  $[AD]$ , dış açortayı  $[AE]$  ise,

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|EB|}{|EC|}$$

dir (Balcı, 2020).



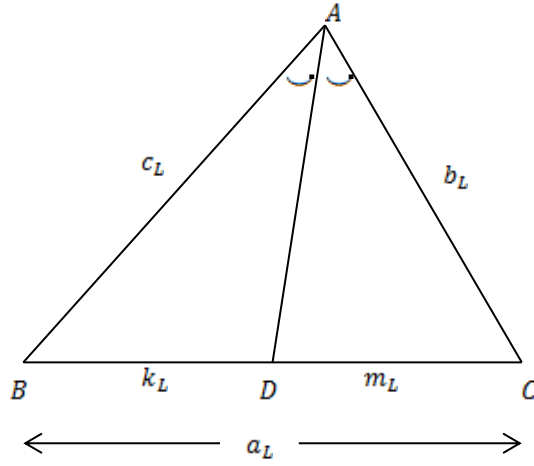
Şimdi iç ve dış açortay teoremlerinin Lorentz benzerini verelim.

**Teorem 4.3.8 (İç Açortay Teoreminin Lorentz Benzeri)**  $L^2$  de herhangi bir  $\Delta ABC$  üçgeninin  $A$  köşesine ait iç açortayının  $[BC]$  kenarı ile kesişimi  $D$  noktası,  $a_L = d_L(B, C)$ ,  $b_L = d_L(A, C)$ ,  $c_L = d_L(A, B)$ ,  $k_L = d_L(B, D)$ ,  $m_L = d_L(D, C)$  olsun.  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[AC]$  kenarlarının eğimleri sırasıyla  $m_c$ ,  $m_a$ ,  $m_b$  ve  $m_c, m_a, m_b \neq \pm 1$  olmak üzere,

- i)  $\frac{k_L}{m_L} = \frac{c_L}{b_L} \cdot \left[ \frac{1+m_c^2}{1-m_c^2} \cdot \frac{|1-m_b^2|}{1+m_b^2} \right]$
- ii)  $m_b = 0$  veya  $m_b \rightarrow \infty$  için,  $\frac{k_L}{m_L} = \frac{c_L}{b_L} \cdot \left[ \frac{1+m_c^2}{1-m_c^2} \right]$
- iii)  $m_c = 0$  veya  $m_c \rightarrow \infty$  için,  $\frac{k_L}{m_L} = \frac{c_L}{b_L} \cdot \left[ \frac{|1-m_b^2|}{1+m_b^2} \right]$

dir. Burada  $\Delta ABC$  üçgeninin üç kenarında ya spacelike veya timelike doğrular üzerinde olmalıdır.

**İspat :**



Önerme 4.2.1 den dolayı,

i)

$$\begin{aligned} d_E(A, B) &= \sqrt{\frac{1 + m_c^2}{|1 - m_c^2|}} \cdot c_L, & d_E(A, C) &= \sqrt{\frac{1 + m_b^2}{|1 - m_b^2|}} \cdot b_L \\ d_E(B, D) &= \sqrt{\frac{1 + m_a^2}{|1 - m_a^2|}} \cdot k_L, & d_E(D, C) &= \sqrt{\frac{1 + m_a^2}{|1 - m_a^2|}} \cdot m_L \end{aligned}$$

yazılabilir. Teorem 4.3.7 den,

$$\frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)} = \frac{d_E(B, D)}{d_E(D, C)}$$

olduğu bilinmektedir. Burada Öklid uzaklıkları yerine Lorentz uzaklıklarını yazarsak,

$$\frac{\sqrt{\frac{1+m_c^2}{|1-m_c^2|}} \cdot c_L}{\sqrt{\frac{1+m_b^2}{|1-m_b^2|}} \cdot b_L} = \frac{\sqrt{\frac{1+m_a^2}{|1-m_a^2|}} \cdot k_L}{\sqrt{\frac{1+m_a^2}{|1-m_a^2|}} \cdot m_L} \quad (4.11)$$

bulunur ve (4.11) denkleminde,

$$\frac{k_L}{m_L} = \frac{c_L}{b_L} \cdot \left[ \frac{1 + m_c^2}{|1 - m_c^2|} \cdot \frac{|1 - m_b^2|}{1 + m_b^2} \right] \quad (4.12)$$

elde edilir.

ii) (4.12) denkleminde  $m_b = 0$  veya  $m_b \rightarrow \infty$  için,

$$\frac{k_L}{m_L} = \frac{c_L}{b_L} \cdot \left[ \frac{1 + m_c^2}{|1 - m_c^2|} \right]$$

bulunur.

iii) (4.12) denkleminde  $m_c = 0$  veya  $m_c \rightarrow \infty$  için,

$$\frac{k_L}{m_L} = \frac{c_L}{b_L} \cdot \left[ \frac{|1 - m_b^2|}{1 + m_b^2} \right]$$

elde edilir.

**Teorem 4.3.9 (Dış Açortay Teoreminin Lorentz Benzeri)**  $L^2$  de herhangi bir  $\Delta ABC$  üçgeninin  $A$  köşesine ait dış açortayının  $\overleftrightarrow{BC}$  doğrusunu kestiği nokta  $D$  noktası,  $a_L = d_L(B, C)$ ,  $b_L = d_L(A, C)$ ,  $c_L = d_L(A, B)$ ,  $k_L = d_L(B, D)$ ,  $m_L = d_L(C, D)$  olsun ve  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[AC]$  kenarlarının eğimleri sırasıyla  $m_c$ ,  $m_a$ ,  $m_b$  ve  $m_c, m_a, m_b \neq \pm 1$  olmak üzere,

- i)  $\frac{k_L}{m_L} = \frac{c_L}{b_L} \cdot \left[ \frac{1+m_c^2}{|1-m_c^2|} \cdot \frac{|1-m_b^2|}{1+m_b^2} \right]$
- ii)  $m_b = 0$  veya  $m_b \rightarrow \infty$  için,  $\frac{k_L}{m_L} = \frac{c_L}{b_L} \cdot \left[ \frac{1+m_c^2}{|1-m_c^2|} \right]$
- iii)  $m_c = 0$  veya  $m_c \rightarrow \infty$  için,  $\frac{k_L}{m_L} = \frac{c_L}{b_L} \cdot \left[ \frac{|1-m_b^2|}{1+m_b^2} \right]$

dir. Burada  $\Delta ABC$  üçgeninin üç kenarında ya spacelike veya timelike doğrular üzerinde olmalıdır.

**İspat :** İç açortay teoreminin ispatına benzer şekildedir.

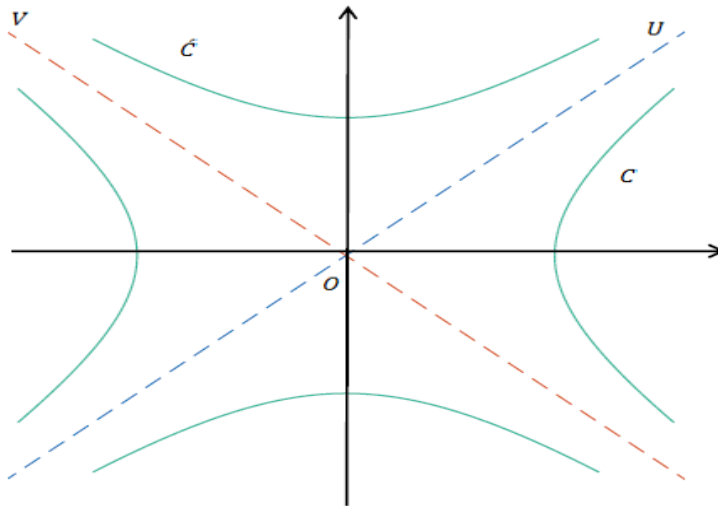
#### 4.4 Lorentz(Minkowski) Düzleminde Çember

Çemberler geometride her zaman önemli bir rol oynar. Sonraki bölümlere temel olması için bu bölümde Lorentz(Minkowski) düzlemindeki çemberler (Yaglom 1979, Birman ve Nomizu 1984, Catoni vd. 2008) referansları temel alınarak bahsedilecektir.

**Tanım 4.4.1** Analitik düzlemde merkezi  $Q(a, b)$  ve yarıçapı  $r$  olan Lorentz çemberi,

$$C_L = \{(x, y) : |(x - a)^2 - (y - b)^2| = r^2, \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

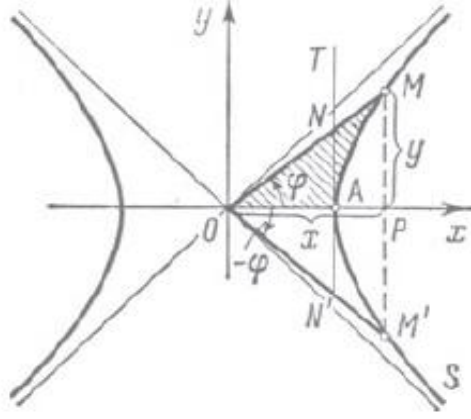
biçiminde tanımlanır. Öklid geometrisinde Lorentz çemberinin, asimptotları merkezden geçen hiperbolü temsil ettiği aşıkardır.



**Şekil 4.1**  $L^2$  de çember.

Yukarıdaki şekilde ortak merkezleri  $O$  noktası olan  $C$  ve  $\bar{C}$  çemberleri eşleniktir.  $\overrightarrow{OU}$  ve  $\overrightarrow{OV}$  lightlike doğrulardan oluşan “çapraz”  $O$  dan sıfır birim uzaklıkta olan noktaların geometrik yeridir. Bu noktalar kümesine bazen yarıçapı sıfır olan bir çember (veya boş çember) denir.

$L^2$  de merkezi  $O(0,0)$  olan  $S: x^2 - y^2 = 1$  birim çemberi üzerindeki  $M(x, y)$  noktasının parametresi  $\angle AOM$  yönlü açısının radyan olarak ölçüsü olan  $\varphi$  sayısına eşittir (Şekil 4.2).



Şekil 4.2  $L^2$  de hiperbolik radyan.

Bu açı, Öklid anlamında  $S$  hiperbolünün  $AOM$  gölgeli alanının iki katına eşittir. Bu eşitliği göstermek için yay uzunluğundan yararlanalım. Bir  $y = f(x)$  eğrisinin  $x = a$  ve

$x = b$  arasındaki Öklid yay uzunluğu,  $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \left[ 1 + \left( \Delta y / \Delta x \right)^2 \right] \Delta x^2$  için,

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

dır. O halde bir  $y = f(x)$  eğrisinin  $x = a$  ve  $x = b$  arasındaki Lorentz yay uzunluğu,

$\Delta s^2 = |\Delta x^2 - \Delta y^2| = \left[ 1 - \left( \Delta y / \Delta x \right)^2 \right] \Delta x^2$  için,

$$\int_a^b \sqrt{|1 - (y')^2|} dx$$

olur. Buradan  $S$  hiperbolünün  $AM$  yayının Lorentz uzunluğu,

$$L_{AM} = \int_1^x \sqrt{\left( \frac{x^2}{x^2 - 1} \right) - 1} dx = \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \log \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

bulunur. Öklid anlamında  $S$  hiperbolünün  $AOM$  gölgeli alanını,

$$2E_{AOM} = 2 \left( \frac{xy}{2} - \int_1^x y dx \right) = 2 \left( \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \int_1^x \sqrt{x^2-1} dx \right) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$$

dır. O halde  $L_{AM} = 2E_{AOM}$  dır.

Burada  $M(x, y)$  noktasının  $x = OP > 0$  ve  $y = PM$  koordinatları sırasıyla,  $\varphi$  açısının hiperbolik cosinüsü ve hiperbolik sinüsü olarak adlandırılır ve  $\cosh\varphi$  ve  $\sinh\varphi$  olarak gösterilir.  $PM/OP = \sinh\varphi / \cosh\varphi$  oranı  $\varphi$  açısının hiperbolik tanjantı olarak adlandırılır ve  $\tanh\varphi$  ile gösterilir (Yaglom 1979).

Böylece merkezi  $O(0,0)$  ve yarıçapı  $r$  olan Lorentz çemberi,

i) spacelike ( $|x| > |y|$ ) pozitif ve negatif bölgeleri için,

pozitif bölge

$$x = r \cosh\varphi$$

$$y = r \sinh\varphi$$

negatif bölge

$$x = -r \cosh\varphi$$

$$y = -r \sinh\varphi$$

ii) timelike ( $|x| < |y|$ ) future-pointing (pozitif) ve past-pointing (negatif) bölgeleri için,

future-pointing (pozitif) bölge

$$x = r \sinh\varphi$$

$$y = r \cosh\varphi$$

past-pointing (negatif) bölge

$$x = -r \sinh\varphi$$

$$y = -r \cosh\varphi$$

biçimlerinde yazılabilir (Catoni vd. 2008).

Bu düzlemdeki  $C$  ve  $\hat{C}$  çemberleri diferansiyel geometri açısından, teğet vektörlerine göre adlandırılırlar. Yani denklemi,

$$(x - a)^2 - (y - b)^2 = r^2$$

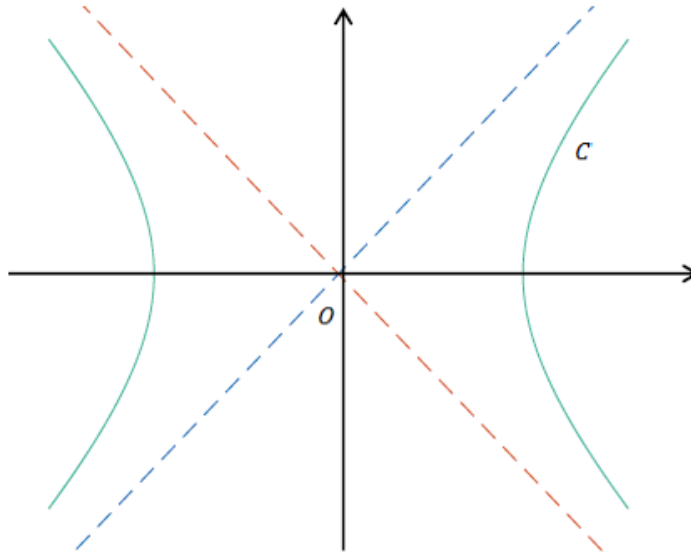
olan  $C$  çemberinin bir kolu  $x(t) = (rcosh\varphi + a, rsinh\varphi + b)$  olarak parametrelendirilirse, bu çemberin teğet vektörü,

$$\frac{dx}{dt} = (rsinh\varphi, rcosh\varphi)$$

olacaktır. Buradan

$$\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \right\rangle_L = r^2(sinh^2\varphi - cosh^2\varphi) = -r^2$$

olur. O halde teğet vektör timelike vektör olduğundan  $C$  çemberi timelike Lorentz çemberi olarak adlandırılır (Şekil 4.3).



Şekil 4.3  $L^2$  de timelike Lorentz çemberi.

Denklemini,

$$(x - a)^2 - (y - b)^2 = -r^2$$

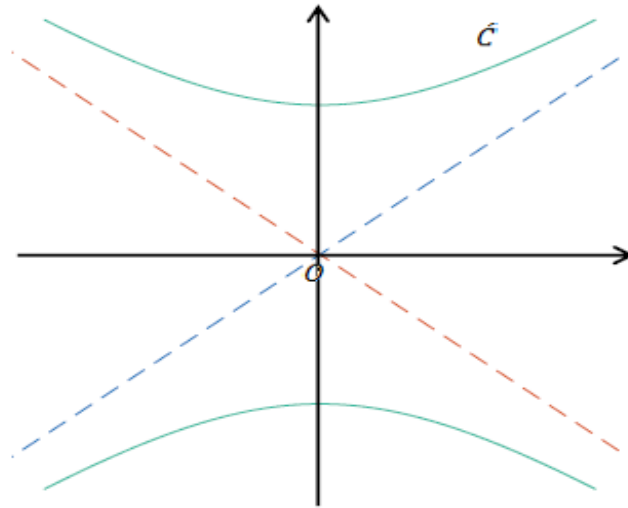
olan  $\hat{C}$  çemberinin bir kolu  $x(t) = (r \sinh \varphi + a, r \cosh \varphi + b)$  olarak parametrelendirilirse, bu çemberin teğet vektörü,

$$\frac{dx}{dt} = (r \cosh \varphi, r \sinh \varphi)$$

olacaktır. Buradan

$$\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \right\rangle_L = r^2 (\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi) = r^2$$

olur. O halde teğet vektör spacelike vektör olduğundan  $\hat{C}$  çemberi spacelike Lorentz çemberi olarak adlandırılır (Şekil 4.4) (Birman ve Nomizu 1984).

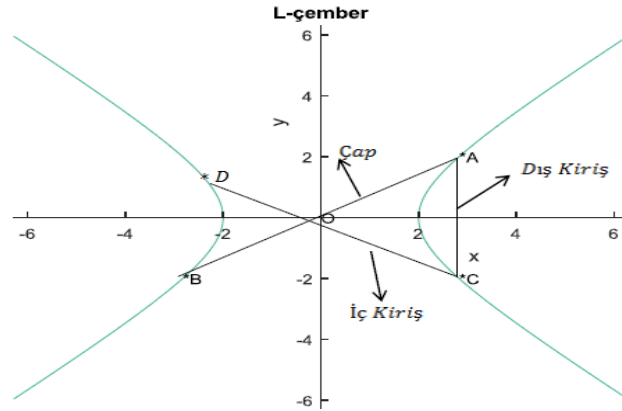


Şekil 4.4  $L^2$  de spacelike Lorentz çemberi.

Aşağıda Öklid çemberi ile timelike Lorentz çemberinin bazı özellikleri karşılaştırılmıştır.

**Tanım 4.4.2** Öklid düzleminde uç noktaları çember üzerinde bulunan doğru parçasına kiriş denir. Bu kirişi içine alan doğruya kesen denir. Merkezden geçen kirişe çap denir. Bir ucu merkezde ve öteki ucu çember üzerinde olan bir doğru parçasına yarıçap denir (Hızarcı vd. 2003).

**Tanım 4.4.3** Eğer  $A$  ve  $B$  Lorentz çemberi üzerinde iki nokta ise,  $[AB]$  doğru parçası çemberin kirişi olarak adlandırılır. Eğer  $A$  ve  $B$  çemberin aynı kolları üzerinde ise “dış kiriş” farklı kollarında ise “iç kiriş” olarak adlandırılır ve  $[AB]$  doğru parçası merkezden geçerse çap olarak adlandırılır (Şekil 4.5) (Catoni vd. 2008).



Şekil 4.5  $L^2$  de çemberin çap ve kirişleri.

**Teorem 4.4.1** Öklid düzleminde çemberin merkezinden kirişe indirilen dikme, kirişi ortalar (Hızarcı vd. 2003).

**Teorem 4.4.2** Öklid düzleminde çemberin merkezini kirişin ortasına birleştiren doğru parçası, kirişe diktir (Hızarcı vd. 2003).

**Teorem 4.4.3** Lorentz çemberinin merkezini kirişin orta noktasına birleştiren doğru o kirişe diktir (Catoni vd. 2008).

**Tanım 4.4.4** Öklid düzleminde çemberi yalnız bir noktada kesen çember düzlemine ait doğruya teğet doğrusu veya teğeti denir. Teğetin çembere değdiği noktaya değme noktası ve doğruya da çemberin bu noktadaki teğeti denir (Hızarcı vd. 2003).

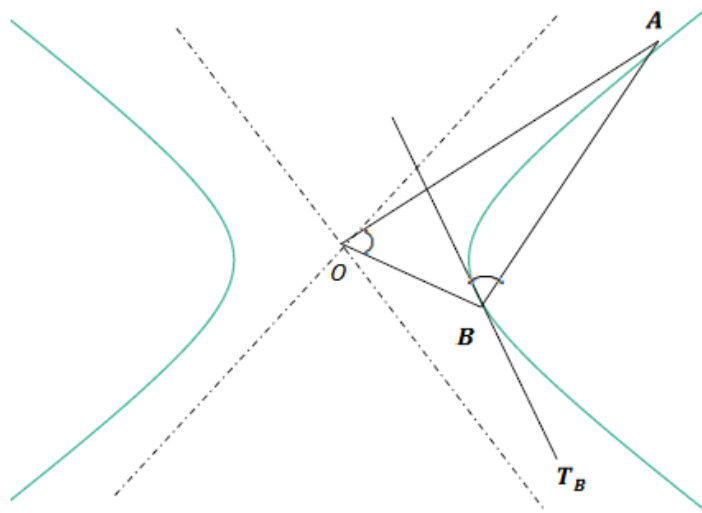
**Teorem 4.4.4** Öklid düzleminde bir çemberin her teğeti değme noktasından geçen yarıçapa diktir (Hızarcı vd. 2003).

**Teorem 4.4.5** Lorentz çemberi üzerindeki herhangi bir nokta  $M$  olsun.  $M$  üzerindeki teğet doğrusu, yarıçapa diktir (Catoni vd. 2008).

**Tanım 4.4.5** Öklid düzleminde tepesi çemberin merkezinde olan açıya merkez açı denir. Tepe noktası çember üzerinde ve kolları çember yayını kesen açıya çevre açı denir (Hızarcı vd. 2003).

**Teorem 4.4.6** Öklid düzleminde bir çevre açının ölçüsü ayırdığı yayın ölçüsünün yarısına eşittir (Hızarcı vd. 2003). Yani o yayı gören merkez açının yarısına eşittir

**Teorem 4.4.7**  $A$  ve  $B$  noktaları Lorentz çemberi üzerinde iki nokta olsun. O zaman  $[AB]$  kirişi ile  $T_B$  teğet doğrusu arasındaki açı,  $[AB]$  kirişini gören merkez açının yarısına eşittir (Şekil 4.6).



**Şekil 4.6**  $L^2$  de merkez ve çevre açı.

**İspat :** Denklemi  $x^2 - y^2 = r^2$ ,  $x > 0$  olan Lorentz çemberi üzerindeki iki nokta  $A = r(\cosh\varphi, \sinh\varphi)$  ve  $B = (r, 0)$  olsun.  $B$  noktasındaki teğet  $\vec{x} = (0, r)$  vektörüne paralel olduğundan, özel olarak  $B = (1, 0)$  ve  $\vec{x} = (0, 1)$  alınır,  $\overrightarrow{AB} = (\cosh\varphi - 1, \sinh\varphi)$  olur. Böylece  $T_B$  ve  $\overrightarrow{AB}$  timelike olduğundan, ikisi arasındaki açı,

$$\cosh\varphi = -\frac{\langle \vec{x}, \overrightarrow{AB} \rangle_L}{\|\overrightarrow{AB}\|_L}$$

dır. O halde

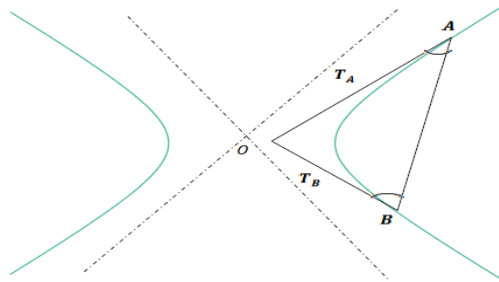
$$\begin{aligned} \cosh\varphi &= \frac{\sinh\varphi}{\sqrt{\sinh^2\varphi - (\cosh\varphi - 1)^2}} \\ &= \frac{\sinh\varphi}{\sqrt{2(\cosh\varphi - 1)}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

bulunur. Böylece  $\cosh\varphi - 1 = 2\sinh^2(\varphi/2)$  ve  $\sinh\varphi = 2\sinh(\varphi/2)\cosh(\varphi/2)$  değerleri (4.13) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\cosh\varphi = \cosh(\varphi/2) \quad (4.14)$$

elde edilir. Sonuç olarak  $\varphi = |\varphi|/2$  olur (Birman ve Nomizu 1984). Yani çevre açısı merkez açının yarısıdır.

**Sonuç 4.4.1**  $A$  ve  $B$  noktaları Lorentz çemberi üzerinde iki nokta olsun. O halde  $[AB]$  kirişinin  $T_A$  ve  $T_B$  teğetleriyle yaptıkları açılar birbirine eşittir (Şekil 4.7) (Birman ve Nomizu 1984).



**Şekil 4.7**  $L^2$  de teğet doğruların kirişle arasındaki açılar.

**Tanım 4.4.6** Öklid düzleminde  $\beta$  bir çember ve  $O$ ,  $\beta$  üzerinde olmayan bir nokta olsun.  $O$  dan geçen ve  $\beta$  çemberini kesen herhangi bir  $l$  doğrusu verilsin. Eğer  $l$ ,  $\beta$  çemberini  $Q$  ve  $R$  noktalarında keserse  $O$  noktasının kuvveti  $|OQ|_E \cdot |OR|_E$  çarpımıdır. Özel olarak  $l$ ,  $\beta$  çemberine  $P$  noktasında teğet ise o zaman  $O$  noktasının kuvveti  $(|OP|_E)^2$  olarak tanımlanır. (Venema 2012).

**Tanım 4.4.7**  $S$  bir Lorentz çemberi ve  $M$ ,  $S$  üzerinde olmayan bir nokta olsun.  $M$  den geçen ve  $S$  çemberini kesen herhangi bir  $l$  doğrusu verilsin. Eğer  $l$ ,  $S$  çemberini  $A$  ve  $B$  noktalarında keserse  $M$  noktasının kuvveti  $|MA|_L \cdot |MB|_L$  çarpımıdır. Özel olarak  $l$ ,  $S$  çemberine  $P$  noktasında teğet ise o zaman  $M$  noktasının kuvveti  $(|MP|_L)^2$  olarak tanımlanır. Burada kuvvetin pozitif olması için,

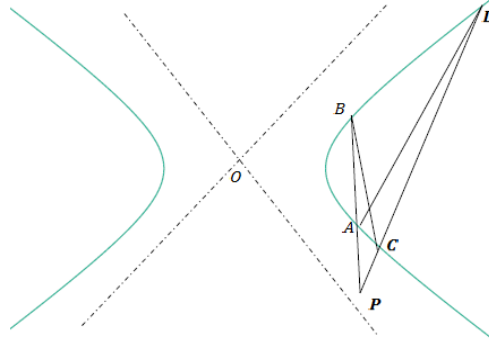
- a)  $[MA]$  ve  $[MB]$  doğru parçalarının yönleri aynı ve  $l$  spacelike ,
- b)  $[MA]$  ve  $[MB]$  doğru parçalarının yönleri zıt ve  $l$  timelike

olması gerekir. Diğer tüm durumlarda kuvvet negatiftir. Burada yön ile kastedilen spacelike bölgesinin pozitif ve negatif bölgeleri, timelike bölgesinin future-pointing (pozitif) ve past-pointing (negatif) bölgeleridir (Yaglom 1979).

**Teorem 4.4.8** Eğer iki hiperbolik üçgen aynı hiperbolik açılara sahipse kenarları orantılıdır. (Catoni vd. 2008).

**Teorem 4.4.9** Lorentz çemberinin dışında bir nokta  $P$  olsun.  $P$  noktasından geçen  $l_1$  doğrusu çemberi  $A$  ve  $B$  noktalarında ve  $P$  noktasından geçen  $l_2$  doğrusu çemberi  $C$  ve  $D$  noktalarında kessin. Bu durumda kuvvet  $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$  olur. Özel olarak;  $P$  noktasından çizilen doğru çembere  $T$  noktasında teğetse kuvvet  $|PT|^2 = |PA| |PB|$  olur.

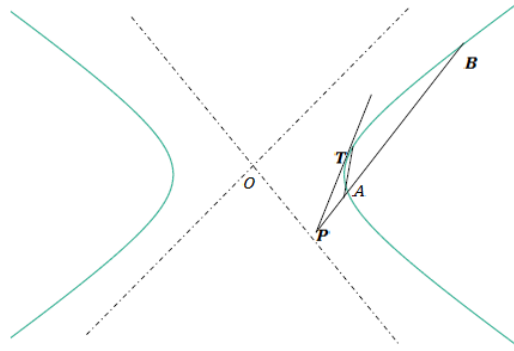
**İspat :**



$\Delta PAD$  ve  $\Delta PBC$  üçgenlerini göz önüne alalım. Bu üçgenlerde  $\hat{P}$  ortaktır ve aynı yayı gören açılar eş olduğu için  $\hat{B} = \hat{D}$  olur. O halde  $\hat{A} = \hat{C}$  dir. Böylece Teorem 4.4.8 den,  $\Delta PAD \sim \Delta PBC$  olur. Benzer üçgenlerin karşılıklı kenarları orantılı olduğundan,

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|} \quad (4.15)$$

bulunur. O zaman (4.15) den  $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$  elde edilir.



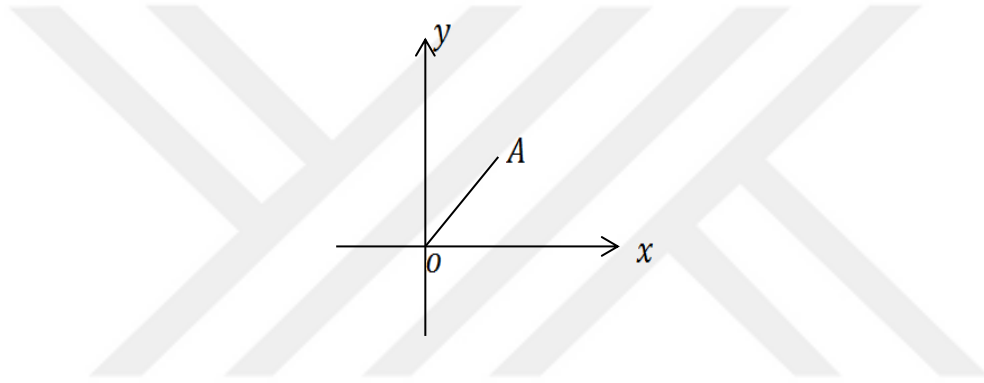
$\Delta TPA$  ve  $\Delta BPT$  üçgenlerini göz önüne alalım. Bu üçgenlerde  $\hat{P}$  ortaktır ve aynı yayı gören açılar eş olduğu için  $\angle ATP = \angle BTP$  dir. Böylece Teorem 4.4.8 den,  $\Delta ATP \sim \Delta BTP$  olur. Benzer üçgenlerin karşılıklı kenarları orantılı olduğundan,

$$\frac{|PA|}{|PT|} = \frac{|PT|}{|PB|} \quad (4.16)$$

bulunur. O zaman (4.16) den  $|PT|^2 = |PA||PB|$  bulunur.

#### 4.5 Analitik Düzlemde Öklid ve Lorentz Eşit Uzunluklu Doğru Parçalarının Geometrik Yerleri

Düzgün çokgenlerinin hepsi bir çemberin içinde olduğu için, Öklid düzgün çokgenlerinin Lorentz düzgünlüğü çemberler kullanılarak bulunabilir. Bu nedenle bu bölümde Analitik düzlemde verilmiş olan  $[OA]$  doğru parçası için bu doğru parçasına Öklid ve Lorentz uzunlukları eşit olacak şekilde  $[OB]$  doğru parçaları tespit edilecektir. Yani  $d_E(O, A) = d_E(O, B)$  ve  $d_L(O, A) = d_L(O, B)$  koşulunu sağlayan  $B$  noktalarının geometrik yerleri bulunacaktır. Bunu gerçekleştirmek için  $O$  merkezli  $d_E(O, A)$  yarıçaplı Öklid ve  $d_L(O, A)$  yarıçaplı Lorentz çemberlerinden yararlanılacaktır.



$d_E(O, A) = r$  ise  $\overrightarrow{OA}$  doğrusunun eğimi  $m$  olmak üzere, Önerme 4.2.1 gereğince,

$$d_L(O, A) = \sqrt{\frac{|1 - m^2|}{1 + m^2}} \cdot r$$

yazılabilir. Buradan  $O$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı Öklid çember denklemi,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

dir.  $O$  merkezli ve  $\sqrt{\frac{|1 - m^2|}{1 + m^2}} \cdot r$  yarıçaplı Lorentz çember denklemi,

$$|x^2 - y^2| = \frac{|1 - m^2|}{1 + m^2} r^2$$

bulunur. Burada Lorentz çemberinin spacelike, timelike olması ve yarıçapının eğimine göre iki denklem ortak çözülürse,

**Durum 1 :**

Çember spacelike ve  $|m| > 1$  için,

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2, \\ y^2 - x^2 &= \frac{(m^2 - 1)}{1 + m^2} r^2\end{aligned}$$

denklemleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}2y^2 &= \frac{m^2 r^2 - r^2 + r^2 + m^2 r^2}{1 + m^2}, \\ 2y^2 &= \frac{2m^2 r^2}{1 + m^2}, \\ |y| &= \frac{mr}{\sqrt{1 + m^2}}\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}x^2 &= r^2 - y^2, \\ x^2 &= r^2 - \frac{m^2 r^2}{1 + m^2}, \\ x^2 &= \frac{r^2 + m^2 r^2 - m^2 r^2}{1 + m^2}, \\ |x| &= \frac{r}{\sqrt{1 + m^2}}\end{aligned}$$

elde edilir.

## Durum 2:

Çember timelike ve  $|m| < 1$  için,

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2, \\x^2 - y^2 &= \frac{(1 - m^2)}{1 + m^2} r^2,\end{aligned}$$

denklemleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}2x^2 &= \frac{r^2 - m^2 r^2 + r^2 + m^2 r^2}{1 + m^2}, \\2x^2 &= \frac{2r^2}{1 + m^2}, \\|x| &= \frac{r}{\sqrt{1 + m^2}}\end{aligned}$$

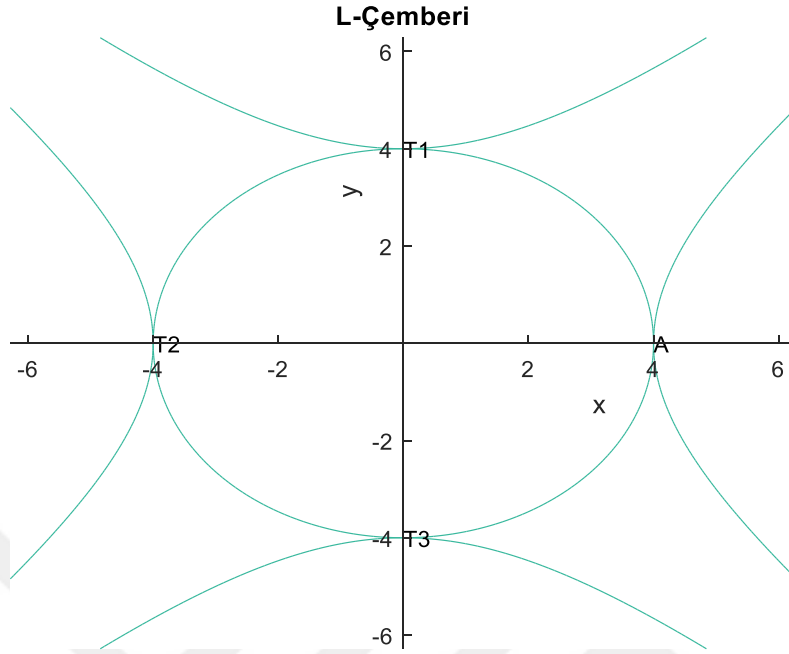
bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}y^2 &= r^2 - x^2, \\y^2 &= r^2 - \frac{r^2}{1 + m^2}, \\y^2 &= \frac{r^2 + m^2 r^2 - r^2}{1 + m^2}, \\|y| &= \frac{mr}{\sqrt{1 + m^2}}\end{aligned}$$

elde edilir.

Buna göre  $m = 0$  veya  $m \rightarrow \infty$  için iki çemberin 4 ortak noktası vardır ve çemberler birbirine teğet olurlar.  $m$  nin diğer durumları için 8 ortak nokta bulunur. Bu haller iki durumda incelenebilir.

**Durum 1 :**  $m = 0$  veya  $m \rightarrow \infty$  olsun (Şekil 4.8).



**Şekil 4.8**  $m = 0$  veya  $m \rightarrow \infty$  için analitik düzlemde Öklid ve Lorentz eşit uzunluklu doğru parçalarının geometrik yerleri.

$$d_E(O, A) = d_E(O, T_j) \text{ ve } d_L(O, A) = d_L(O, T_j), \quad j = 1, 2, 3$$

olur ve bu şartı sağlayan başka nokta yoktur. Buradan  $B$  noktalarının geometrik yerleri  $T_j$  noktalarıdır.

Dolayısıyla,

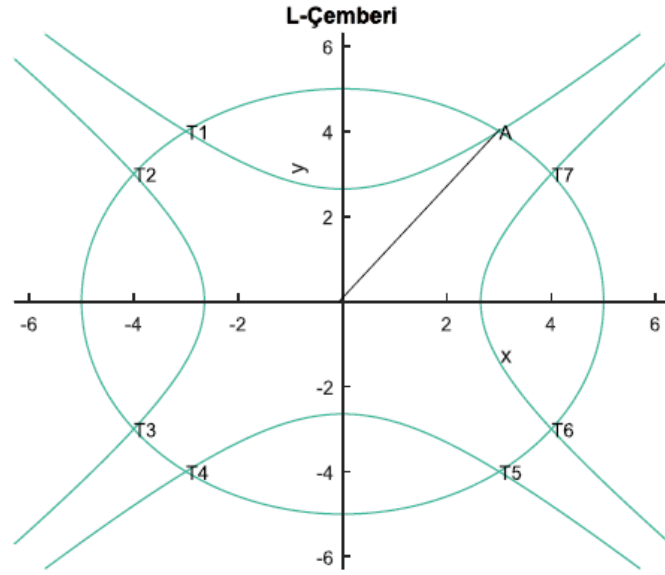
$A$  noktasının  $y = x$  doğrusuna göre simetriği  $T_1$  noktasıdır.

$A$  noktasının  $x = 0$  doğrusuna göre simetriği  $T_2$  noktasıdır.

$A$  noktasının  $y = -x$  doğrusuna göre simetriği  $T_3$  noktasıdır.

$T_4$  noktası da  $A$  noktasının kendisidir.

**Durum 2 :**  $m \notin \{-1, 0, 1, \infty\}$  olsun (Şekil 4.9).



**Şekil 4.9**  $m \notin \{-1, 0, 1, \infty\}$  için analitik düzlemde Öklid ve Lorentz eşit uzunluklu doğru parçalarının geometrik yerleri.

$$d_E(O, A) = d_E(O, T_j) \text{ ve } d_L(O, A) = d_L(O, T_j), \quad 1 \leq j \leq 7$$

olur ve bu şartı sağlayan başka nokta yoktur. Buradan  $B$  noktalarının geometrik yerleri  $T_j$  noktalarıdır.

Dolayısıyla,

$A$  noktasının  $x = 0$  doğrusuna göre simetriği  $T_1$  noktasıdır.

$A$  noktasının önce  $x = 0$  sonra da  $y = -x$  doğrusuna göre doğrusuna göre simetriği  $T_2$  noktasıdır.

$A$  noktasının  $y = -x$  doğrusuna göre simetriği  $T_3$  noktasıdır.

$A$  noktasının önce  $y = -x$  doğrusuna sonra  $y = x$  doğrusuna göre simetriği  $T_4$  noktasıdır.

$A$  noktasının  $y = 0$  doğrusuna göre simetriği  $T_5$  noktasıdır.

$A$  noktasının önce  $y = 0$  doğrusuna sonrada  $y = -x$  doğrusuna göre simetriği  $T_6$  noktasıdır.

$A$  noktasının  $y = x$  doğrusuna göre simetriği  $T_7$  noktasıdır.

$T_8$  noktası da  $A$  noktasının kendisidir.

**Sonuç 4.5.1** Analitik düzlemde  $O = (0,0)$  olmak üzere  $[OA]$  doğru parçası için,

$$d_E(O, A) = d_E(O, B) \text{ ve } d_L(O, A) = d_L(O, B)$$

olacak şekilde  $B(b_1, b_2)$  noktalarının geometrik yerleri,  $A$  noktasının  $x = 0, y = 0, y = x, y = -x$  doğrularının biriyle veya birkaçına göre art arda simetrileri alınarak bulunabilir. Sonuç olarak  $B(x, y)$  noktalarının geometrik yeri,

$$\{(x, y) | x, y \in (\pm b_1, \pm b_2), |b_1| \neq |b_2| \text{ iken } x \neq y\}$$

dir.

#### 4.6 Analitik Düzlemde Öklid Düzgün Çokgenlerinin Lorentz Düzgünlüğü

Analitik düzlemde Öklid ve Lorentz eşit uzunluklu doğru parçalarının geometrik yerleri önceki bölümde belirlenmişti. Böylece analitik düzlemdeki Öklid ve Lorentz düzgün çokgenlerinin düzgünlüğünü incelemek için bir yol bulunmuştur. Bu yol Öklid ve Lorentz düzgün çokgenlere farklı bir bakış açısı kazandırmış olacaktır.

**Teorem 4.6.1** Analitik düzlemde  $n \geq 3$  ve  $P_i = (p_i, q_i)$  için  $n$ -kenarlı Öklid düzgün çokgen  $P_1P_2 \dots P_n$  olsun.  $P_1P_2 \dots P_n$  nin aynı zamanda Lorentz düzgün çokgen olması için,

$$[P_1P_2], [P_2P_3], \dots [P_nP_1] \in \{x, y | x, y \in (\pm(p_j - p_i), \pm(q_j - q_i)), |p_j - p_i| \neq |q_j - q_i|, |i - j| = 1 \text{ veya } |i - j| = n - 1 \text{ iken } x \neq y\}$$

olmalıdır.

**İspat :**

Analitik düzlemde  $P_1P_2 \dots P_n$   $n$ -kenarlı Öklid düzgün çokgenin Lorentz düzgün çokgen olması için Lorentz eşkenarlı olması gerekir. O halde Sonuç 4.5.1 gereğince, analitik düzlemde  $P = (0,0)$ ,  $Q = (q_1, q_2)$  noktaları için  $d_E(P, Q) = d_E(P, R)$  ve  $d_L(P, Q) = d_L(P, R)$  olacak şekilde  $R = (x, y)$  noktalarının geometrik yeri,

$$\{(x, y) | x, y \in (\pm q_1, \pm q_2), |q_1| \neq |q_2| \text{ iken } x \neq y\}$$

kümesidir. Buradan  $P_i = (p_i, q_i)$ ,  $P_j = (p_j, q_j)$ ,  $|i - j| = 1$  veya  $|i - j| = n - 1$  için  $P_i P_j = (p_j - p_i, q_j - q_i)$  olduğundan  $q_1 = p_j - p_i$ ,  $q_2 = q_j - q_i$  için  $[P_i P_j]$  doğru parçasına eşit uzunluktaki Lorentz doğru parçalarının kümesi,

$$\{x, y | x, y \in (\pm(p_j - p_i), \pm(q_j - q_i)), \quad |p_j - p_i| \neq |q_j - q_i|, \\ |i - j| = 1 \text{ veya } |i - j| = n - 1 \text{ iken } x \neq y\}$$

bulunur. Bu küme  $P_1 P_2 \dots P_n$  Lorentz  $n$ -kenarlı düzgün çokgenin kenarlarını oluşturan doğru parçalarının kümesidir.

**Teorem 4.6.2** Analitik düzlemde  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $n$ -kenarlı Öklid düzgün çokgenlerden  $n > 8$  olacak şekilde Lorentz düzgün çokgen yoktur.

**İspat :** Sonuç 4.5.1 gereğince, analitik düzlemde  $P = (0,0)$ ,  $Q = (q_1, q_2)$  noktaları için  $d_E(P, Q) = d_E(P, R)$  ve  $d_L(P, Q) = d_L(P, R)$  olacak şekilde  $R = (x, y)$  noktalarının geometrik yeri,

$$\{(x, y) | x, y \in (\pm q_1, \pm q_2), \quad |q_1| \neq |q_2| \text{ iken } x \neq y\}$$

kümesidir. Bu kümenin eleman sayısı 8 olduğundan dolayı Öklid düzgün çokgenlerden kenar sayısı 8 den fazla olanlar Lorentz düzgün çokgen değildir.

Böylece analitik düzlemde  $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$  için  $n$ -kenarlı Öklid düzgün çokgenlerinin Lorentz düzgünlüğü incelenmelidir. Örneğin; Öklid düzlemdeki herhangi bir eşkenar üçgenin kenarlarını oluşturan vektörlerin, konum vektörleri arasındaki açı  $120^\circ$  dir. O halde Öklid düzgün üçgenin Lorentz düzgün üçgen olması için, kenarları oluşturan konum vektörlerinin uç noktaları hem Öklid hemde Lorentz çember üzerinde olmalıdır. Öklid ve Lorentz çemberlerin Şekil 4.8 ve Şekil 4.9 de olduğu gibi farklı durumu vardır. Şekil 4.8 deki durum için vektörlerin arasındaki açı  $90^\circ$  olduğundan herhangi bir eşkenar üçgenin konum vektörü olmazlar. Şekil 4.9 deki durum için ise, üç vektör arasındaki açının  $120^\circ$  olduğu herhangi bir eşkenar üçgenin konum vektörü bulunamaz. O halde hem Öklid hemde Lorentz düzgün üçgeni yoktur. Diğer Öklid düzgün çokgenlerin Lorentz düzgünlüğü benzer şekilde incelenir.

## 5. LORENTZ(MINKOWSKI) DÜZLEMİNDE ÇOKGENLER

### 5.1 Lorentz(Minkowski) Düzleminde Açılar ve Üçgenler

Lorentz(Minkowski) düzlemindeki üçgenler genel olarak (Yaglom 1979) tarafından çalışılmıştır. Kenarları future-pointing timelike vektörlerden oluşan pure üçgenler için alan ve Lorentz trigonometrik bağıntılar (Birman ve Nomizu 1984) tarafından incelenmiştir. Devamında daha kapsamlı olarak kenarları non-null vektörler (yani spacelike ve timelike) oluşan üçgenler için açı, alan ve Lorentz trigonometrik bağıntılar (Nešović ve Petrović-Torgašev 2003) verilmiştir. Burada bu referanslar temel alınarak bu düzlemdeki açılar ve üçgenler incelenecektir.

**Tanım 5.1.1** Lorentz(Minkowski) düzleminde  $u \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$A(u) = \begin{bmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{bmatrix}$$

matrisi alınsın ve  $\vec{x}$  ve  $\vec{y}$  iki birim future-pointing timelike vektörler olsun. Eğer  $A(u)\vec{x} = \vec{y}$  ise,  $u$  açısına  $\vec{x}$  den  $\vec{y}$  ye yönlendirilmiş hiperbolik açı denir.

Bu durumda  $\vec{y}$  den  $\vec{x}$  e yönlendirilmiş hiperbolik açı  $-u$  olur. İç çarpımdan,

$$\cosh u = -\frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L}{\|\vec{x}\|_L \|\vec{y}\|_L}$$

olur (Birman ve Nomizu 1984).

$\mathbb{R}^2$  nin birinci köşegenine  $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = x\}$  göre Öklid yansımasının matrisi,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. O zaman  $B(u) = A(u)D$  için,

$$B(u) = \begin{bmatrix} \sinh u & \cosh u \\ \cosh u & \sinh u \end{bmatrix}, u \in \mathbb{R}$$

olur. Şimdi non-null vektörler (yani spacelike ve timelike) için açı tanımları verilsin.

1.  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  ve  $\vec{y} = (y_1, y_2)$  iki birim spacelike vektör ise,  
 $sgnx_1 = sgny_1$  olmak üzere,  $u \in \mathbb{R}$  için,  $A(u)\vec{x} = \vec{y}$  olup, o zaman  $\vec{x}$  den  $\vec{y}$  ye yönlendirilmiş hiperbolik açı,

$$\cosh u = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L, \quad \sinh u = \langle \vec{x}, D\vec{y} \rangle_L$$

dır.

$sgnx_1 \neq sgny_1$  olmak üzere,  $u \in \mathbb{R}$  için,  $-A(u)\vec{x} = \vec{y}$  olup, o zaman  $\vec{x}$  den  $\vec{y}$  ye yönlendirilmiş hiperbolik açı,

$$\cosh u = -\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L, \quad \sinh u = -\langle \vec{x}, D\vec{y} \rangle_L$$

dır.

2.  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  birim spacelike vektör ve  $\vec{y} = (y_1, y_2)$  birim timelike vektör ise,  
 $sgnx_1 = sgny_2$  olmak üzere,  $u \in \mathbb{R}$  için,  $B(u)\vec{x} = \vec{y}$  olup, o zaman  $\vec{x}$  den  $\vec{y}$  ye yönlendirilmiş hiperbolik açı,

$$\cosh u = \langle \vec{x}, D\vec{y} \rangle_L, \quad \sinh u = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L$$

dır.

$sgnx_1 \neq sgny_2$  olmak üzere,  $u \in \mathbb{R}$  için,  $-B(u)\vec{x} = \vec{y}$  olup, o zaman  $\vec{x}$  den  $\vec{y}$  ye yönlendirilmiş hiperbolik açı,

$$\cosh u = -\langle \vec{x}, D\vec{y} \rangle_L, \quad \sinh u = -\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L$$

dır.

3.  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  ve  $\vec{y} = (y_1, y_2)$  iki birim timelike vektör ise,

$sgnx_1 = sgny_1$  olmak üzere,  $u \in \mathbb{R}$  için,  $A(u)\vec{x} = \vec{y}$  olup, o zaman  $\vec{x}$  den  $\vec{y}$  ye yönlendirilmiş hiperbolik açı,

$$\cosh u = -\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L, \quad \sinh u = -\langle \vec{x}, D\vec{y} \rangle_L$$

dır.

$sgnx_1 \neq sgny_1$  olmak üzere,  $u \in \mathbb{R}$  için,  $-A(-u)\vec{x} = -\vec{y}$  olup, o zaman  $\vec{x}$  den  $\vec{y}$  ye yönlendirilmiş hiperbolik açı,

$$\cosh u = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L, \quad \sinh u = \langle \vec{x}, D\vec{y} \rangle_L$$

dır (Nešović ve Petrović-Torgašev 2003).

Şimdi Lorentz(Minkowski) düzleminde üçgenler ele alınsın.

$L^2$  de köşeleri doğrudan olmayan  $A, B$  ve  $C$  noktaları üzerinde ve kenar uzunlukları  $\|AB\|_L = c, \|BC\|_L = a$  ve  $\|CA\|_L = b$  olan  $\Delta ABC$  üçgeni düşünelim.

**Teorem 5.1.1**  $\Delta ABC$  pure üçgeninin alanı,

$$A(\Delta ABC) = \frac{1}{2} bcsinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

dır (Birman ve Nomizu 1984).

**Teorem 5.1.2** Eğer  $\overrightarrow{AB}$  spacelike vektör ve  $\overrightarrow{AC}$  timelike vektör ise  $\Delta ABC$  üçgeninin alanı,

$$A(\Delta ABC) = \frac{1}{2} bccosh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

dır (Nešović ve Petrović-Torgašev 2003).

**Teorem 5.1.3** Eğer  $\overrightarrow{AB}$  ve  $\overrightarrow{AC}$  doğrudan olmayan spacelike vektörler ise,  $\Delta ABC$  üçgeninin alanı,

$$A(\Delta ABC) = \frac{1}{2} bcsinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

dır (Nešović ve Petrović-Torgašev 2003).

**Teorem 5.1.4 (Hiperbolik Sinüs Kuralı)**  $\Delta ABC$  üçgeninde  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  ve  $\overrightarrow{BC}$  doğrudan olmayan spacelike vektörler ve  $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ,  $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ ,  $\gamma = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$  ise,

$$\frac{b}{|sinh\beta|} = \frac{a}{|sinh\alpha|} = \frac{c}{|sinh\gamma|}$$

dır (Nešović ve Petrović-Torgašev 2003).

**Teorem 5.1.5 (Hiperbolik Sinüs Kuralı)**  $\Delta ABC$  pure üçgen ve  $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ,  $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ ,  $\gamma = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$  ise,

$$\frac{b}{|sinh\beta|} = \frac{a}{|sinh\alpha|} = \frac{c}{|sinh\gamma|}$$

dır (Birman ve Nomizu 1984).

**Teorem 5.1.6 (Hiperbolik Sinüs Kuralı)**  $\Delta ABC$  üçgeninde  $\overrightarrow{AB}$  ve  $\overrightarrow{AC}$  doğrudan olmayan spacelike (timelike) vektörler,  $\overrightarrow{BC}$  timelike (spacelike) vektör ve  $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ,  $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ ,  $\gamma = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$  ise,

$$\frac{b}{cosh\beta} = \frac{a}{|sinh\alpha|} = \frac{c}{cosh\gamma}$$

dır (Nešović ve Petrović-Torgašev 2003).

**Teorem 5.1.7 (Hiperbolik Sinüs Kuralı)**  $\Delta ABC$  üçgeninde  $\overrightarrow{AB}$  ve  $\overrightarrow{BC}$  doğrudan olmayan spacelike (timelike) vektörler,  $\overrightarrow{AC}$  timelike (spacelike) vektör ve  $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ,  $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ ,  $\gamma = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$  ise,

$$\frac{b}{|\sinh\beta|} = \frac{a}{\cosh\alpha} = \frac{c}{\cosh\gamma}$$

dır (Nešović ve Petrović-Torgašev 2003).

**Teorem 5.1.8 (Hiperbolik Sinüs Kuralı)**  $\Delta ABC$  üçgeninde  $\overrightarrow{AC}$  ve  $\overrightarrow{BC}$  doğrudan olmayan spacelike (timelike) vektörler,  $\overrightarrow{AB}$  timelike (spacelike) vektör ve  $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ,  $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ ,  $\gamma = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$  ise,

$$\frac{b}{\cosh\beta} = \frac{a}{\cosh\alpha} = \frac{c}{|\sinh\gamma|}$$

dır (Nešović ve Petrović-Torgašev 2003).

**Teorem 5.1.9 (Hiperbolik Kosinüs Kuralı)**  $\Delta ABC$  üçgeninde  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  ve  $\overrightarrow{BC}$  doğrudan olmayan spacelike vektörler ve  $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ,  $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ ,  $\gamma = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$  ise,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 \mp 2bccosh\alpha + c^2, \\ b^2 &= a^2 \mp 2accosh\beta + c^2, \\ c^2 &= a^2 \mp 2abcosh\gamma + b^2 \end{aligned}$$

dır (Nešović ve Petrović-Torgašev 2003).

**Teorem 5.1.10 (Hiperbolik Kosinüs Kuralı)**  $\Delta ABC$  üçgeninde  $\overrightarrow{AB}$  ve  $\overrightarrow{AC}$  doğrudan olmayan spacelike vektörler,  $\overrightarrow{BC}$  timelike vektör ve  $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ,  $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ ,  $\gamma = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$  ise,

$$\begin{aligned}
a^2 &= -b^2 \mp 2bccosh\alpha - c^2, \\
b^2 &= c^2 \mp 2acsinh\beta - a^2, \\
c^2 &= b^2 \mp 2absinh\gamma - a^2
\end{aligned}$$

dır (Nešović ve Petrović-Torgašev 2003).

**Teorem 5.1.11 (Hiperbolik Kosinüs Kuralı)**  $\Delta ABC$  pure üçgen ve  $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ,  $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ ,  $\gamma = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$  ise,

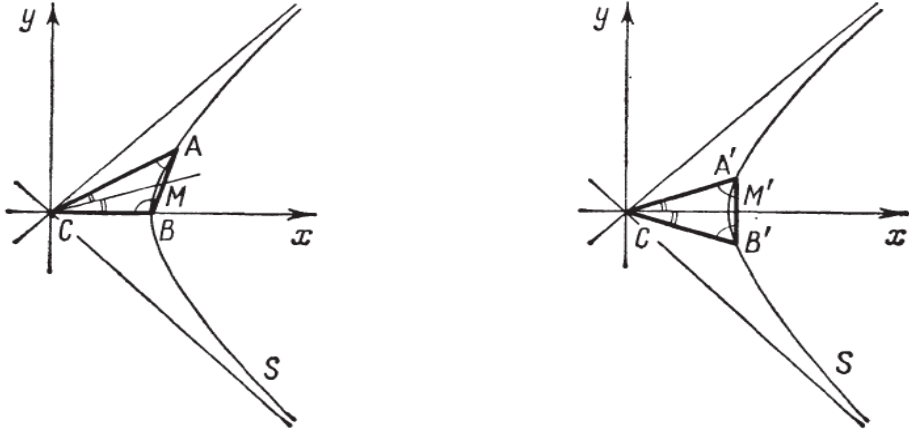
$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 - 2bccosh\alpha + c^2, \\
b^2 &= a^2 + 2accosh\beta + c^2, \\
c^2 &= a^2 - 2abcosh\gamma + b^2
\end{aligned}$$

dır (Birman ve Nomizu 1984).

**Teorem 5.1.12**  $\Delta ABC$  üçgeninin en uzun kenarı diğer iki kenarın toplamından daha büyüktür. Yani en uzun kenar  $\|AB\|_L = c$  ise,  $c > a + b$  dir (Yaglom 1979).

**Sonuç 5.1.1** Lorentz(Minkowski) düzleminde ikizkenar ve dik üçgenler var olup eşkenar üçgenler yoktur.

$\Delta ABC$  üçgeninin  $[CA]$  ve  $[CB]$  kenarları eşit (öyleki  $[CA]$  ve  $[CB]$  aynı çeşit doğru üzerinde) ise o zaman  $A$  ve  $B$  köşeleri merkezi  $C$  ve yarıçapı  $\|CA\|_L = \|CB\|_L$  olan bir çember üzerindedir (Şekil 5.1). Böylece  $\Delta ABC$  üçgeninin kenarortayı  $[CM]$  yi ( $M$ ,  $[AB]$  kenarının orta noktası)  $x - \text{ekseni}$  üzerindeki bir noktaya taşıyan bir hiperbolik dönme vardır.  $\Delta ABC$  üçgeninin bu dönme altındaki görüntüsü  $\Delta A'B'C$  (Şekil 5.1) ise, bu üçgeninin  $[CA']$  ve  $[CB']$  kenarları  $x - \text{eksenine}$  göre simetriktr. Bu  $[CM]$  nin aynı zamanda açıortay ve yükseklik olduğunu gösterir.  $[CM] \perp [AB]$  olduğundan bir ikizkenar üçgenin tabanı kenarlarından zıt türde (çeşit) bir doğru üzerinde olur. Yani bir ikizkenar üçgenin kenarları spacelike doğrular üzerinde ise tabanı timelike doğru üzerindedir. Bunun tersi de doğrudur.



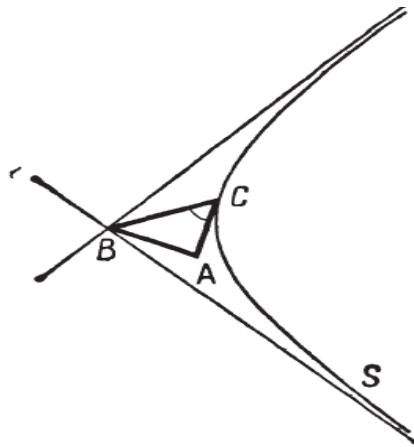
Şekil 5.1  $L^2$  de ikizkenar üçgen.

$\Delta ABC$  üçgeni bir dik üçgen ve  $[AC] \perp [BC]$  olsun (bkz şekil 5.2). O zaman  $[AC]$  ve  $[BC]$  kenarları farklı çeşit doğrular olmak zorundadır. Kabul edelim ki hipotenüs  $[AB]$  ve  $[BC]$  kenarları aynı çeşit doğrular olsun. O halde,

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \cosh\beta, & \frac{b}{c} &= \sinh\beta, & \frac{b}{a} &= \tanh\beta \\ \frac{a^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} &= 1, \\ a^2 - b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

bulunur (Yaglom 1979).

Son eşitlik Pisagor teoreminin Lorentz benzeridir.



Şekil 5.2  $L^2$  de dik üçgen.

## 5.2 Lorentz(Minkowski) Düzleminde Çevrel, İç ve Dış Teğet Çemberler

Bu bölümde Lorentz(Minkowski) düzlemindeki üçgenlerin çevrel ve iç teğet çemberlerinin var olma şartları incelenecektir. Ayrıca bu düzlemdeki dış teğet çemberlerde araştırılacaktır.

**Teorem 5.2.1** Lorentz(Minkowski) düzleminde bir üçgenin kenarlarının orta dikmeleri üçgenin çevrel çemberinin merkezinde kesişir (Yaglom 1979).

**Sonuç 5.2.1** Lorentz(Minkowski) düzleminde bir üçgenin çevrel çemberinin var olması için üçgenin tüm kenarları aynı tür (çeşit) doğrular üzerinde olmalıdır. Çünkü kenarları farklı çeşit doğrular üzerinde olan bir üçgenin kenar orta dikmeleri de farklı çeşit doğrular üzerinde olur.

**Teorem 5.2.2** Lorentz(Minkowski) düzleminde bir üçgenin tüm kenarları aynı çeşit doğrulardan oluşursa üç açığortaya sahiptir. (Yaglom 1979).

**Sonuç 5.2.2** Lorentz(Minkowski) düzlemindeki bir üçgenin üç açığortayı varsa o zaman bu üçgen ikizkenar ve dik üçgen değildir.

**İspat :**  $L^2$  de ikizkenar üçgenin tabanı ve kenarları farklı çeşit doğrular olmak zorundadır. Dik üçgenin de dik kenarları farklı çeşit doğrular olmak zorundadır. Bu nedenle bir üçgenin üç açığortayı varsa bu üçgen ikizkenar ve dik üçgen olamaz.

**Teorem 5.2.3** Lorentz(Minkowski) düzleminde bir üçgenin açığortay doğruları üçgenin iç teğet çemberinin merkezinde kesişir (Yaglom 1979).

**Sonuç 5.2.3** Lorentz(Minkowski) düzleminde bir üçgenin çevrel ve iç teğet çemberinin var olması için gerek ve yeter şart tüm kenarları aynı çeşit doğrular üzerinde olmalıdır.

**Teorem 5.2.4**  $L^2$  de bir  $\Delta PQR$  üçgeninin köşeleri  $P = (p_1, p_2)$ ,  $Q = (q_1, q_2)$ ,  $R = (r_1, r_2)$  ve  $[PQ]$ ,  $[QR]$ ,  $[RP]$  kenarlarının eğimleri sırasıyla  $m_r$ ,  $m_p$ ,  $m_q$  olsun. O zaman bu üçgenin çevrel çemberinin merkezinin koordinatları,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(q_2^2 - p_2^2) - (q_1^2 - p_1^2)}{2(q_2 - p_2)}, \\ c_2 &= \frac{(r_2^2 - q_2^2) - (r_1^2 - q_1^2)}{2(r_2 - q_2)}, \\ c_3 &= \frac{(p_2^2 - r_2^2) - (p_1^2 - r_1^2)}{2(p_2 - r_2)}, \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$M_L = \left( \frac{m_p m_r (c_2 - c_1)}{m_p - m_r}, \frac{m_p m_r (c_2 - c_1) + m_q (m_p - m_r) c_3}{m_q (m_p - m_r)} \right)$$

dır.

**İspat :** Teorem 3.2.3 den,  $\Delta PQR$  üçgeninin kenar orta dikmelerinin denklemleri,

$$\begin{aligned} h_{[PQ]}: y &= \frac{1}{m_r} x + \frac{(q_2^2 - p_2^2) - (q_1^2 - p_1^2)}{2(q_2 - p_2)}, \\ h_{[QR]}: y &= \frac{1}{m_p} x + \frac{(r_2^2 - q_2^2) - (r_1^2 - q_1^2)}{2(r_2 - q_2)}, \\ h_{[RP]}: y &= \frac{1}{m_q} x + \frac{(p_2^2 - r_2^2) - (p_1^2 - r_1^2)}{2(p_2 - r_2)} \end{aligned}$$

şeklindedir. O halde,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(q_2^2 - p_2^2) - (q_1^2 - p_1^2)}{2(q_2 - p_2)}, \\ c_2 &= \frac{(r_2^2 - q_2^2) - (r_1^2 - q_1^2)}{2(r_2 - q_2)}, \\ c_3 &= \frac{(p_2^2 - r_2^2) - (p_1^2 - r_1^2)}{2(p_2 - r_2)} \end{aligned}$$

iken,

$$h_{[PQ]}: y = \frac{1}{m_r}x + c_1,$$

$$h_{[QR]}: y = \frac{1}{m_p}x + c_2,$$

$$h_{[PQ]}: y = \frac{1}{m_q}x + c_3$$

yazılır. Teorem 5.2.1 den dolayı,  $\Delta PQR$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin koordinatları bu doğruların kesim noktası olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_r}x + c_1 &= \frac{1}{m_p}x + c_2, \\ \frac{1}{m_r}x - \frac{1}{m_p}x &= c_2 - c_1, \\ \frac{(m_p - m_r)}{m_p m_r}x &= c_2 - c_1, \\ x &= \frac{m_p m_r (c_2 - c_1)}{m_p - m_r}, \\ y &= \frac{1}{m_q} \cdot \frac{m_p m_r (c_2 - c_1)}{m_p - m_r} + c_3, \\ y &= \frac{m_p m_r (c_2 - c_1) + m_q (m_p - m_r) c_3}{m_q (m_p - m_r)} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(q_2^2 - p_2^2) - (q_1^2 - p_1^2)}{2(q_2 - p_2)}, \\ c_2 &= \frac{(r_2^2 - q_2^2) - (r_1^2 - q_1^2)}{2(r_2 - q_2)}, \\ c_3 &= \frac{(p_2^2 - r_2^2) - (p_1^2 - r_1^2)}{2(p_2 - r_2)} \end{aligned}$$

iken,

$$M_L = \left( \frac{m_p m_r (c_2 - c_1)}{m_p - m_r}, \frac{m_p m_r (c_2 - c_1) + m_q (m_p - m_r) c_3}{m_q (m_p - m_r)} \right)$$

bulunur.

**Örnek 5.2.1** Köşeleri  $P_1 = (0,0)$ ,  $P_2 = (2,1)$ ,  $P_3 = (5,-1)$  olan üçgenin Lorentz çevrel çemberini bulunuz.

**Çözüm :** Köşe noktaları  $P_1 = (0,0)$ ,  $P_2 = (2,1)$ ,  $P_3 = (5,-1)$  olduğundan üçgen spacelike bölgesindedir. Bu üçgenin  $[P_1P_2]$ ,  $[P_2P_3]$ ,  $[P_3P_1]$  kenarlarının eğimleri sırasıyla,  $m_3, m_1, m_2$  olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{-1 - 1}{5 - 2} = -\frac{2}{3}, \\ m_2 &= \frac{-1 - 0}{5 - 0} = -\frac{1}{5}, \\ m_3 &= \frac{1 - 0}{2 - 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $[P_1P_2]$ ,  $[P_2P_3]$ ,  $[P_3P_1]$  kenarlarının orta dikmelerinin denklemleri,

$$\begin{aligned} h_{[P_1P_2]}: y &= \frac{1}{m_3}x + c_3, \\ h_{[P_2P_3]}: y &= \frac{1}{m_1}x + c_1, \\ h_{[P_3P_1]}: y &= \frac{1}{m_2}x + c_2 \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(1 - 1) - (4 - 25)}{2(1 + 1)} = \frac{0 + 21}{4} = \frac{21}{4}, \\ c_2 &= \frac{(0 - 1) - (0 - 25)}{2(0 + 1)} = \frac{-1 + 25}{2} = 12, \\ c_3 &= \frac{(0 - 1) - (0 - 4)}{2(0 - 1)} = \frac{-1 + 4}{-2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} h_{[P_1P_2]}: y &= 2x - \frac{3}{2}, \\ h_{[P_2P_3]}: y &= -\frac{3}{2}x + \frac{21}{4}, \\ h_{[P_3P_1]}: y &= -5x + 12 \end{aligned}$$

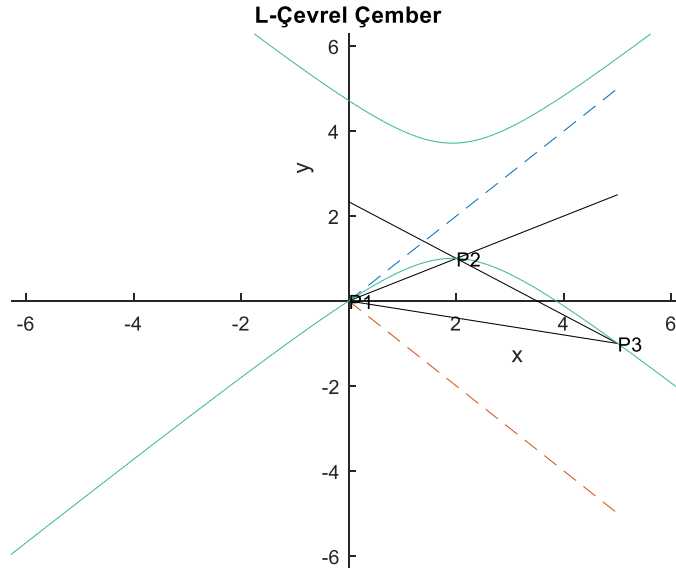
yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}
 -\frac{3}{2}x + \frac{21}{4} &= -5x + 12, \\
 \left(-\frac{3}{2} + 5\right)x &= 12 - \frac{21}{4}, \\
 \frac{7}{2}x &= \frac{27}{4}, \\
 x &= \frac{27}{14}, \\
 y &= 2 \cdot \frac{27}{14} - \frac{3}{2} = \frac{54 - 21}{14} = \frac{33}{14}
 \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak  $\Delta P_1 P_2 P_3$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezi  $M\left(\frac{27}{14}, \frac{33}{14}\right)$  noktasıdır. Merkez noktası üçgenin köşelerine eşit uzaklıkta olup çevrel çemberin yarıçapı,

$$d_L(M_L, P_1) = R_L = \sqrt{\left|\frac{729}{196} - \frac{1089}{196}\right|} = \sqrt{\frac{90}{49}} = \frac{3\sqrt{10}}{7}$$

dır (Şekil 5.3).



**Şekil 5.3**  $L^2$  de köşeleri  $P_1 = (0,0)$ ,  $P_2 = (2,1)$ ,  $P_3 = (5,-1)$  noktaları olan üçgenin çevrel çemberi.

**Örnek 5.2.2** Köşeleri  $P_1 = (0,0)$ ,  $P_2 = (1,2)$ ,  $P_3 = (-2,6)$  olan üçgenin Lorentz çevrel çemberini bulunuz.

**Çözüm:** Köşe noktaları  $P_1 = (0,0)$ ,  $P_2 = (1,2)$ ,  $P_3 = (-2,6)$  olduğundan üçgen timelike bölgesindedir. Bu üçgenin  $[P_1P_2]$ ,  $[P_2P_3]$ ,  $[P_3P_1]$  kenarlarının eğimleri sırasıyla,  $m_3, m_1, m_2$  olsun. Buradan,

$$m_1 = \frac{6 - 2}{-2 - 1} = -\frac{4}{3},$$

$$m_2 = \frac{6 - 0}{-2 - 0} = -3,$$

$$m_3 = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

elde edilir. O halde  $[P_1P_2]$ ,  $[P_2P_3]$ ,  $[P_3P_1]$  kenarlarının orta dikmelerinin denklemleri,

$$h_{[P_1P_2]}: y = \frac{1}{m_3}x + c_3,$$

$$h_{[P_2P_3]}: y = \frac{1}{m_1}x + c_1,$$

$$h_{[P_3P_1]}: y = \frac{1}{m_2}x + c_2$$

olur.

$$c_1 = \frac{(4 - 36) - (1 - 4)}{2(2 - 6)} = \frac{-32 + 3}{-8} = \frac{29}{8},$$

$$c_2 = \frac{(0 - 36) - (0 - 4)}{2(0 - 6)} = \frac{-36 + 4}{-12} = \frac{8}{3},$$

$$c_3 = \frac{(0 - 4) - (0 - 1)}{2(0 - 2)} = \frac{-4 + 1}{-4} = \frac{3}{4}$$

olduğundan

$$h_{[P_1P_2]}: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4},$$

$$h_{[P_2P_3]}: y = -\frac{3}{4}x + \frac{29}{8},$$

$$h_{[P_3P_1]}: y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$

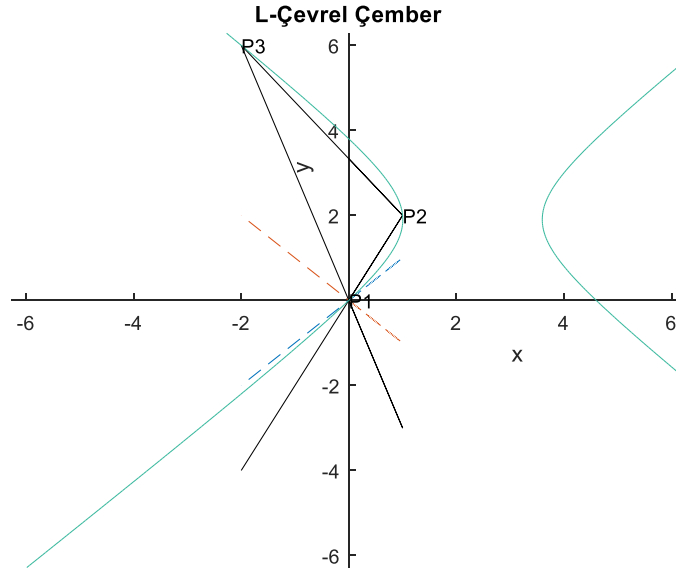
yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}
 -\frac{3}{4}x + \frac{29}{8} &= -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}, \\
 \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right)x &= \frac{8}{3} - \frac{29}{8}, \\
 -\frac{5}{12}x &= -\frac{23}{24}, \\
 x &= \frac{23}{10}, \\
 y &= \frac{1}{2} \cdot \frac{23}{10} + \frac{3}{4} = \frac{23 + 15}{20} = \frac{38}{20} = \frac{19}{10}
 \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak  $\Delta P_1 P_2 P_3$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezi  $M\left(\frac{23}{10}, \frac{19}{10}\right)$  noktasıdır. Merkez noktası üçgenin köşelerine eşit uzaklıkta olup çevrel çemberin yarıçapı,

$$d_L(M_L, P_1) = R_L = \sqrt{\left|\frac{529}{100} - \frac{361}{100}\right|} = \sqrt{\frac{168}{100}} = \frac{2\sqrt{42}}{10}$$

dır (Şekil 5.4).



**Şekil 5.4**  $L^2$  de köşeleri  $P_1 = (0,0)$ ,  $P_2 = (1,2)$ ,  $P_3 = (-2,6)$  noktaları olan üçgenin çevrel çemberi.

Ötelemeler  $L^2$  de bir izometri olduğu için koordinat eksenlerinin ötelenmesi ile herhangi bir üçgenin bir köşesi orijine taşınabilir. O halde aşağıdaki teoremi verilsin.

**Teorem 5.2.5**  $L^2$  de bir  $\Delta PQR$  üçgeninin köşeleri  $P = (p_1, p_2)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (r_1, r_2)$  ve  $[PQ]$ ,  $[QR]$ ,  $[RP]$  kenarlarının eğimleri sırasıyla  $m_r$ ,  $m_p$ ,  $m_q$  olsun. O zaman bu üçgenin iç teğet çemberinin merkezinin koordinatları,

$$k = \sqrt{|m_r^2 - 1|},$$

$$t = \sqrt{|m_p^2 - 1|},$$

$$z = \sqrt{|m_q^2 - 1|},$$

$$c = p_2 - m_q p_1$$

olmak üzere,

$$I_L = \left( \frac{c(k-t)}{m_p(k-z) + m_q(t-k) + m_r(z-t)}, -\frac{c(tm_r - km_p)}{m_p(k-z) + m_q(t-k) + m_r(z-t)} \right)$$

dır.

**İspat :**

$\Delta PQR$  üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi  $I_L = (x_m, y_m)$  olsun. Bu merkezin, üçgenin kenarlarına olan en kısa Lorentz uzaklığı iç teğet çemberin yarıçapıdır. O halde Teorem 3.2.4 den dolayı  $I_L = (x_m, y_m)$  noktası

$$\overrightarrow{PQ} : y = m_r x,$$

$$\overrightarrow{QR} : y = m_p x,$$

$$\overrightarrow{RP} : y = m_q x + c \quad (c = p_2 - m_q p_1)$$

doğrularına uzaklıkları eşit olacaktır. Böylece,

$$\frac{|y_m - m_r x_m|}{\sqrt{|m_r^2 - 1|}} = \frac{|y_m - m_p x_m|}{\sqrt{|m_p^2 - 1|}} = \frac{|y_m - m_q x_m - c|}{\sqrt{|m_q^2 - 1|}},$$

dır.

$k = \sqrt{|m_r^2 - 1|}$ ,  $t = \sqrt{|m_p^2 - 1|}$ ,  $z = \sqrt{|m_q^2 - 1|}$  olsun.  $\Delta PQR$  üçgeninin kenarları spacelike doğrular yada timelike doğrular üzerinde olmasına göre iki durum vardır:

**Durum 1:**  $\Delta PQR$  üçgeninin kenarları spacelike doğrular üzerinde ise,

$$\begin{aligned} \frac{|y_m - m_r x_m|}{\sqrt{1 - m_r^2}} &= \frac{|y_m - m_p x_m|}{\sqrt{1 - m_p^2}} = \frac{|y_m - m_q x_m - c|}{\sqrt{1 - m_q^2}}, \\ \frac{|y_m - m_r x_m|}{k} &= \frac{|y_m - m_p x_m|}{t} = \frac{|y_m - m_q x_m - c|}{z}, \\ t y_m - t m_r x_m &= k y_m - k m_p x_m, \\ (t - k) y_m &= (t m_r - k m_p) x_m, \\ y_m &= \frac{(t m_r - k m_p)}{t - k} x_m \end{aligned} \quad (5.1)$$

diğer taraftan,

$$\begin{aligned} z y_m - z m_r x_m &= k y_m - k m_q x_m - k c, \\ (z - k) y_m &= (z m_r - k m_q) x_m - k c, \\ y_m &= \frac{(z m_r - k m_q)}{z - k} x_m - \frac{k c}{z - k} \end{aligned} \quad (5.2)$$

bulunur. (5.1) ve (5.2) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} \frac{(t m_r - k m_p)}{t - k} x_m &= \frac{(z m_r - k m_q) x_m - k c}{z - k}, \\ (z t m_r - z k m_p - k t m_r + k^2 m_p) x_m &= (t z m_r - t k m_q - k z m_r + k^2 m_q) x_m - t k c + k^2 c, \end{aligned}$$

$$[m_p(k-z) + m_q(t-k) + m_r(z-t)]x_m = c(k-t),$$

$$x_m = \frac{c(k-t)}{m_p(k-z) + m_q(t-k) + m_r(z-t)} \quad (5.3)$$

elde edilir. O zaman (5.3) değeri (5.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_m = -\frac{c(tm_r - km_p)}{m_p(k-z) + m_q(t-k) + m_r(z-t)}$$

bulunur. Elde edilen bu sonuç üçgenin üç kenarına da eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeridir. Bu nedenle elde edilen  $(x_m, y_m)$  ifadesi üçgenin iç teğet çemberinin merkez noktası olup, Lorentz iç açıortaylarının kesim noktasıdır. Böylece Lorentz(Minkowski) düzleminde kenarları spacelike doğrular üzerinde olan üçgenlerin iç teğet çemberi vardır. Ayrıca bu merkez noktasının herhangi bir kenara uzaklığından, iç teğet çemberin yarıçapı bulunabilir.

**Durum 2 :**  $\Delta PQR$  üçgeninin kenarları timelike doğrular üzerinde için Durum 1'e benzer sonuç elde edilir.

**Örnek 5.2.3** Köşeleri  $P = (3,1)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (6,-1)$  noktaları olan üçgenin Lorentz iç teğet çemberini bulunuz.

**Çözüm :** Köşeleri  $P = (3,1)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (6,-1)$  olan üçgen spacelike bölgesindedir. Bu üçgenin  $[PQ]$ ,  $[QR]$ ,  $[RP]$  kenarlarının eğimleri sırasıyla  $m_r$ ,  $m_p$ ,  $m_q$  olsun.

$$m_p = \frac{-1-0}{6-0} = -\frac{1}{6},$$

$$m_q = \frac{-1-1}{6-3} = -\frac{2}{3},$$

$$m_r = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

ve  $[PQ]$ ,  $[QR]$ ,  $[RP]$  kenarlarının denklemleri,

$$\overrightarrow{PQ}: y = \frac{1}{3}x,$$

$$\overrightarrow{QR}: y = -\frac{1}{6}x,$$

$$\overrightarrow{RP}: y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 3),$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 3$$

olur.

$$k = \sqrt{1 - m_r^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$t = \sqrt{1 - m_p^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6},$$

$$z = \sqrt{1 - m_q^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$c = 3$$

değerleri

$$I_L = \left( \frac{c(k - t)}{m_p(k - z) + m_r(t - k) + m_q(z - t)}, -\frac{c(tm_r - km_p)}{m_p(k - z) + m_r(t - k) + m_q(z - t)} \right)$$

denkleminde yerine yazılırsa,

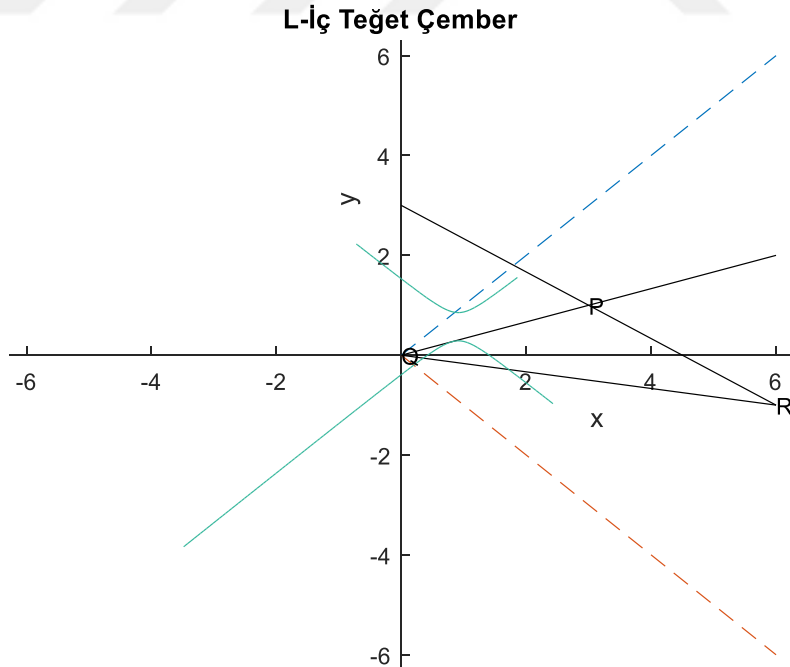
$$\begin{aligned} x_M &= \frac{3 \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{35}}{6} \right)}{-\frac{1}{6} \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3} \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{\sqrt{35}}{6} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{\sqrt{35}}{6} \right)}, \\ &= \frac{3 \left( \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{35}}{6} \right)}{-\frac{1}{6} \left( \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{5}}{3} \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{\sqrt{35} - 4\sqrt{2}}{6} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{35}}{6} \right)}, \\ &= \frac{\frac{12\sqrt{2} - 3\sqrt{35}}{6}}{\frac{-2\sqrt{2} + \sqrt{5} - 2\sqrt{35} + 8\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \sqrt{35}}{18}}, \\ &= \frac{36\sqrt{2} - 9\sqrt{35}}{3\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{35}} = \frac{-2.33302980247}{-2.55475404256} = 0.91328748572, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_M &= \frac{\left[ \frac{\sqrt{35}}{6} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \right] \cdot (-3)}{3\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{35}}, \\
&= -\frac{\sqrt{35} + 2\sqrt{2}}{18\sqrt{5} + 36\sqrt{2} - 18\sqrt{35}}, \\
&= \frac{-8.74450690785}{-15.32852442554} = 0.57047284298
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece iç teğet çemberin merkezi  $I_L = (0.91328748572, 0.57047284298)$  elde edilir. Yarıçapı ise,

$$\begin{aligned}
r_L = d_L(I, \overrightarrow{PQ}) &= \frac{\left| 0.57047284298 - \frac{1}{3} \cdot (0.91328748572) \right|}{2\sqrt{2}/3}, \\
&= \frac{0.26604368107}{0.94280904158} = 0.28218193646
\end{aligned}$$

dır (Şekil 5.5).



**Şekil 5.5**  $L^2$  de köşeleri  $P = (3,1)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (6,-1)$  noktaları olan üçgenin iç teğet çemberi.

**Örnek 5.2.4** Köşeleri  $P = (1,3)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (-2,7)$  noktaları olan üçgenin Lorentz iç teğet çemberini bulunuz.

**Çözüm :** Köşeleri  $P = (1,3)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (-2,7)$  noktaları olan üçgen timelike bölgesindedir. Bu üçgenin  $[PQ]$ ,  $[QR]$ ,  $[RP]$  kenarlarının eğimleri sırasıyla  $m_r$ ,  $m_p$ ,  $m_q$  olsun.

$$m_p = \frac{7-0}{-2-0} = -\frac{7}{2},$$

$$m_q = \frac{7-3}{-2-1} = -\frac{4}{3},$$

$$m_r = \frac{3-0}{1-0} = 3$$

ve  $[PQ]$ ,  $[QR]$ ,  $[RP]$  kenarlarının denklemleri,

$$\overleftrightarrow{PQ}: y = 3x,$$

$$\overleftrightarrow{QR}: y = -\frac{7}{2}x,$$

$$\overleftrightarrow{RP}: y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 1),$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{13}{3}$$

olur.

$$k = \sqrt{m_r^2 - 1} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2},$$

$$t = \sqrt{m_p^2 - 1} = \sqrt{\frac{49}{4} - 1} = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$z = \sqrt{m_q^2 - 1} = \sqrt{\frac{16}{9} - 1} = \frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$c = \frac{13}{3}$$

değerleri

$$I_L = \left( \frac{c(k-t)}{m_p(k-z) + m_r(t-k) + m_q(z-t)}, -\frac{c(tm_r - km_p)}{m_p(k-z) + m_r(t-k) + m_q(z-t)} \right)$$

denkleminde yerine yazılırsa,

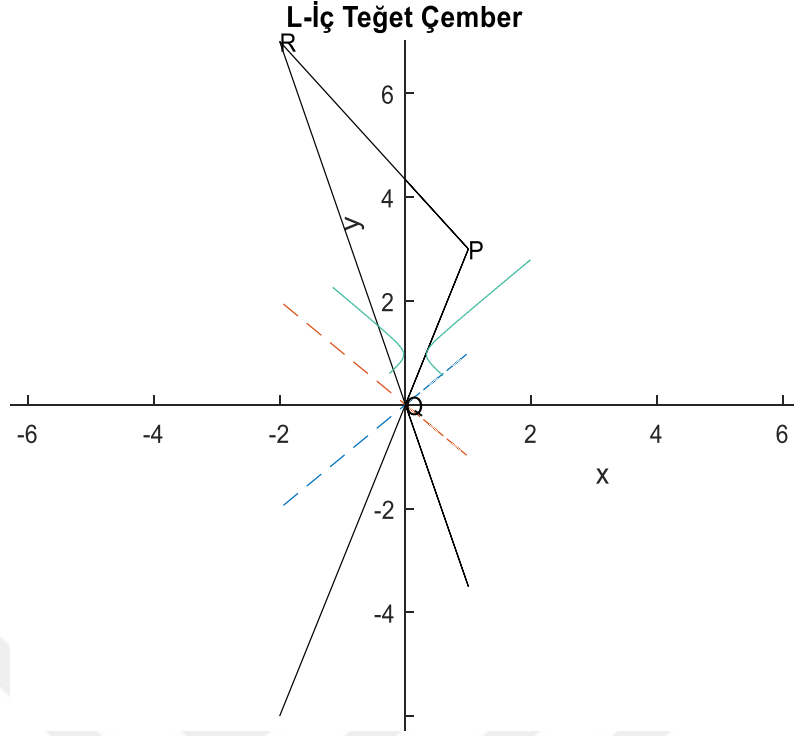
$$\begin{aligned} x_M &= \frac{\frac{13}{3} \left( 2\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2} \right)}{-\frac{7}{2} \left( 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{7}}{3} \right) - \frac{4}{3} \left( \frac{3\sqrt{5}}{2} - 2\sqrt{2} \right) + 3 \left( \frac{\sqrt{7}}{3} - \frac{3\sqrt{5}}{2} \right)}, \\ &= \frac{\frac{13}{3} \left( \frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{2} \right)}{-\frac{7}{2} \left( \frac{6\sqrt{2}-\sqrt{7}}{3} \right) - \frac{4}{3} \left( \frac{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{2} \right) + 3 \left( \frac{2\sqrt{7}-9\sqrt{5}}{6} \right)}, \\ &= \frac{\frac{52\sqrt{2}-39\sqrt{5}}{6}}{\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{5}-2\sqrt{35}+8\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\sqrt{35}}{6}}, \\ &= \frac{52\sqrt{2} - 39\sqrt{35}}{-26\sqrt{2} - 39\sqrt{5} + 13\sqrt{7}} = \frac{-13.6675458791}{-89.5814367004} \\ &= 0.15257118419, \\ y_M &= \frac{\left[ \frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot 3 - 2\sqrt{2} \cdot \left( -\frac{7}{2} \right) \right] \cdot \left( -\frac{13}{3} \right)}{-26\sqrt{2} - 39\sqrt{5} + 13\sqrt{7}}, \\ &= -\frac{13 \cdot (9\sqrt{5} + 14\sqrt{2})}{-156\sqrt{2} - 2345 + 78\sqrt{7}} \\ &= \frac{-519.006821719}{-537.488620202} = 0.96561453063 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece iç teğet çemberin merkezi  $I_L = (0.91328748572, 0.57047284298)$

elde edilir. Yarıçapı ise,

$$\begin{aligned} r_L &= d_L(I, \overrightarrow{PQ}) = \frac{|0.96561453063 - 3 \cdot (0.15257118419)|}{2\sqrt{2}/3}, \\ &= \frac{0.507190097806}{2.82842712475} = 0.17931877875 \end{aligned}$$

dır (Şekil 5.6).



**Şekil 5.6**  $L^2$  de köşeleri  $P = (1,3)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (-2,7)$  noktaları olan üçgenin iç teğet çemberi.

**Teorem 5.2.6**  $L^2$  de bir  $\Delta PQR$  üçgeninin köşeleri  $P = (p_1, p_2)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (r_1, r_2)$  ve  $[PQ]$ ,  $[QR]$ ,  $[RP]$  kenarlarının eğimleri sırasıyla  $m_r$ ,  $m_p$ ,  $m_q$  olsun. O zaman

$$k = \sqrt{|m_r^2 - 1|},$$

$$t = \sqrt{|m_p^2 - 1|},$$

$$z = \sqrt{|m_q^2 - 1|},$$

$$c = p_2 - m_q p_1$$

olmak üzere,

- i)**  $(z + t)[m_q(k - t) + m_r(t + z) - m_p(z + k)] \neq 0$  şartı sağlanıyorsa  $\Delta PQR$  üçgeninin  $[RP]$  kenarına teğet olan dış teğet çemberi vardır.

- ii)  $(z + t)[m_p(z - k) + m_q(t + k) - m_r(t + z)] \neq 0$  şartı sağlanıyorsa  $\Delta PQR$  üçgeninin  $[QR]$  kenarına teğet olan dış teğet çemberi vardır.
- iii)  $(z - t)[m_p(z + k) + m_r(t - z) - m_q(t + k)] \neq 0$  şartı sağlanıyorsa  $\Delta PQR$  üçgeninin  $[PQ]$  kenarına teğet olan dış teğet çemberi vardır.

Burada  $\Delta PQR$  üçgeninin kenarları aynı çeşit doğrular üzerinde olmalıdır. Yani,  $\Delta PQR$  üçgeninin üç kenarı ya spacelike veya timelike doğrular üzerinde olmalıdır.

### İspat :

$\Delta PQR$ , köşeleri  $P = (p_1, p_2)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (r_1, r_2)$  ve  $[PQ]$ ,  $[QR]$ ,  $[RP]$  kenarlarının eğimleri sırasıyla  $m_r$ ,  $m_p$ ,  $m_q$  olmak üzere Lorentz(Minkowski) düzleminde bir üçgen olsun. O halde  $\Delta PQR$  üçgeninin kenarlarının üzerinde bulunduğu doğru denklemleri,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &: y = m_r x, \\ \overrightarrow{QR} &: y = m_p x, \\ \overrightarrow{RP} &: y = m_q x + c \quad (c = p_2 - m_q p_1)\end{aligned}$$

dir.  $\Delta PQR$  üçgeninin kenarları spacelike doğrular üzerinde olsun. Böylece Lorentz(Minkowski) düzlemindeki bir noktanın bir doğruya uzaklığı ve açıortay doğrularının yönlendirilmesi dikkate alınarak,  $k = \sqrt{|m_r^2 - 1|}$ ,  $t = \sqrt{|m_p^2 - 1|}$ ,  $z = \sqrt{|m_q^2 - 1|}$  olmak üzere,

- i)  $\Delta PQR$  üçgeninin,  $Q$  köşesindeki iç açıortayı ile  $P$  ve  $R$  köşelerindeki dış açıortaylarının kesim noktası mevcut ise  $[RP]$  kenarına teğet olan dış teğet çember bulunabilir.  $Q$  köşesindeki iç açıortay,

$$\begin{aligned}\frac{|y - m_r x|}{\sqrt{1 - m_r^2}} &= \frac{|y - m_p x|}{\sqrt{1 - m_p^2}}, \\ \frac{|y - m_r x|}{k} &= \frac{|y - m_p x|}{t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ty - tm_r x &= ky - km_p x, \\
(t - k)y &= (tm_r - km_p)x, \\
y &= \frac{(tm_r - km_p)}{t - k}x,
\end{aligned}$$

olur,  $P$  köşesindeki dış açıortay,

$$\begin{aligned}
\frac{|y - m_r x|}{\sqrt{1 - m_r^2}} &= \frac{|y - m_q x - c|}{\sqrt{1 - m_q^2}}, \\
\frac{|y - m_r x|}{k} &= \frac{|y - m_q x - c|}{z}, \\
zy - zm_r x &= -ky + km_q x + kc, \\
(z + k)y &= (zm_r + km_q)x + kc, \\
y &= \frac{(zm_r + km_q)x + kc}{z + k},
\end{aligned}$$

bulunur,  $R$  köşesindeki dış açıortay,

$$\begin{aligned}
\frac{|y - m_p x|}{\sqrt{1 - m_p^2}} &= \frac{|y - m_q x - c|}{\sqrt{1 - m_q^2}}, \\
\frac{|y - m_p x|}{t} &= \frac{|y - m_q x - c|}{z}, \\
zy - zm_p x &= -ty + tm_q x + tc, \\
(z + t)y &= (zm_p + tm_q)x + tc, \\
y &= \frac{(zm_p + tm_q)x + tc}{z + t}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece bu açıortay doğrularının kesim noktasının koordinatları gerekli hesaplamalar yapılarak,

$$x = \frac{c(t - k)}{m_q(k - t) + m_r(t + z) - m_p(z + k)},$$

$$y = \frac{c \left[ (zm_p + tm_q)(t - k) + t(m_q(k - t) + m_r(t + z) - m_p(z + k)) \right]}{(z + t)[m_q(k - t) + m_r(t + z) - m_p(z + k)]}$$

şeklinde bulunur. Bu dış teğet çemberin yarıçapı,

$$r_L = \frac{|c| \sqrt{\left| (t - k)^2(z + t)^2 - \left[ (zm_p + tm_q)(t - k) + t(m_q(k - t) + m_r(t + z) - m_p(z + k)) \right]^2 \right|}}{|(z + t)[m_q(k - t) + m_r(t + z) - m_p(z + k)]|}$$

olur. Böylece  $(z + t)[m_q(k - t) + m_r(t + z) - m_p(z + k)] = 0$  için merkez ve yarıçap bulunamaz. Bu nedenle bu koşul altında dış teğet çember yoktur.

- ii)  $\Delta PQR$  üçgeninin,  $P$  köşesindeki iç açıortayı ile  $Q$  ve  $R$  köşelerindeki dış açıortaylarının kesim noktası mevcut ise  $[QR]$  kenarına teğet olan dış teğet çember bulunabilir.  $P$  köşesindeki iç açıortay,

$$\begin{aligned} \frac{|y - m_r x|}{\sqrt{1 - m_r^2}} &= \frac{|y - m_q x - c|}{\sqrt{1 - m_q^2}}, \\ \frac{|y - m_r x|}{k} &= \frac{|y - m_q x - c|}{z}, \\ zy - zm_r x &= ky - km_q x - kc, \\ (z - k)y &= (zm_r - km_q)x - kc, \\ y &= \frac{(zm_r - km_q)x - kc}{z - k}, \end{aligned}$$

olur,  $Q$  köşesindeki dış açıortay,

$$\begin{aligned} \frac{|y - m_r x|}{\sqrt{1 - m_r^2}} &= \frac{|y - m_p x|}{\sqrt{1 - m_p^2}}, \\ \frac{|y - m_r x|}{k} &= \frac{|y - m_p x|}{t}, \\ ty - tm_r x &= -ky + km_p x, \\ (t + k)y &= (tm_r + km_p)x, \end{aligned}$$

$$y = \frac{(tm_r + km_p)}{t + k}x,$$

bulunur,  $R$  köşesindeki dış açıortay,

$$\begin{aligned} \frac{|y - m_p x|}{\sqrt{1 - m_p^2}} &= \frac{|y - m_q x - c|}{\sqrt{1 - m_q^2}}, \\ \frac{|y - m_p x|}{t} &= \frac{|y - m_q x - c|}{z}, \\ zy - zm_p x &= -ty + tm_q x + tc, \\ (z + t)y &= (zm_p + tm_q)x + tc, \\ y &= \frac{(zm_p + tm_q)x + tc}{z + t} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece bu açıortay doğrularının kesim noktasının koordinatları gerekli hesaplamalar yapılarak,

$$\begin{aligned} x &= -\frac{c(t + k)}{m_p(z - k) + m_q(k + t) - m_r(t + z)}, \\ y &= \frac{c \left[ t(m_p(z - k) + m_q(k + t) - m_r(t + z)) - (zm_p + tm_q)(t + k) \right]}{(z + t)[m_p(z - k) + m_q(k + t) - m_r(t + z)]} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu dış teğet çemberin yarıçapı,

$$r_L = \frac{|c| \sqrt{\left| (t + k)^2(z + t)^2 - \left[ t(m_p(z - k) + m_q(k + t) - m_r(t + z)) - (zm_p + tm_q)(t + k) \right]^2 \right|}}{|(z + t)[m_p(z - k) + m_q(k + t) - m_r(t + z)]|}$$

olur. Böylece  $(z + t)[m_p(z - k) + m_q(k + t) - m_r(t + z)] = 0$  için merkez ve yarıçap bulunamaz. Bu nedenle bu koşul altında dış teğet çember yoktur.

- iii)  $\Delta PQR$  üçgeninin,  $R$  köşesindeki iç açıortayı ile  $P$  ve  $Q$  köşelerindeki dış açıortayların kesim noktası mevcut ise  $[PQ]$  kenarına teğet olan dış teğet çember bulunabilir.  $R$  köşesindeki iç açıortay,

$$\begin{aligned}\frac{|y - m_p x|}{\sqrt{1 - m_p^2}} &= \frac{|y - m_q x - c|}{\sqrt{1 - m_q^2}}, \\ \frac{|y - m_p x|}{t} &= \frac{|y - m_q x - c|}{z}, \\ zy - zm_p x &= ty - tm_q x - tc, \\ (z - t)y &= (zm_p - tm_q)x - tc, \\ y &= \frac{(zm_p - tm_q)x - tc}{z - t}\end{aligned}$$

olur,  $Q$  köşesindeki dış açıortay,

$$\begin{aligned}\frac{|y - m_r x|}{\sqrt{1 - m_r^2}} &= \frac{|y - m_p x|}{\sqrt{1 - m_p^2}}, \\ \frac{|y - m_r x|}{k} &= \frac{|y - m_p x|}{t}, \\ ty - tm_r x &= -ky + km_p x, \\ (t + k)y &= (tm_r + km_p)x, \\ y &= \frac{(tm_r + km_p)}{t + k}x,\end{aligned}$$

bulunur,  $P$  köşesindeki dış açıortay,

$$\begin{aligned}\frac{|y - m_r x|}{\sqrt{1 - m_r^2}} &= \frac{|y - m_q x - c|}{\sqrt{1 - m_q^2}}, \\ \frac{|y - m_r x|}{k} &= \frac{|y - m_q x - c|}{z}, \\ zy - zm_r x &= -ky + km_q x + kc,\end{aligned}$$

$$(z + k)y = (zm_r + km_q)x + kc,$$

$$y = \frac{(zm_r + km_q)x + kc}{z + k},$$

elde edilir. Böylece bu açıortay doğrularının kesim noktasının koordinatları gerekli hesaplamalar yapılarak,

$$x = \frac{c(t + k)}{m_p(z + k) + m_r(t - z) - m_q(k + t)},$$

$$y = \frac{c \left[ (zm_p - tm_q)(t + k) - t(m_p(z + k) + m_r(t - z) - m_q(k + t)) \right]}{(z - t)[m_p(z + k) + m_r(t - z) - m_q(k + t)]}$$

şeklinde bulunur. Bu dış teğet çemberin yarıçapı,

$$r_L = \frac{|c| \sqrt{\left| (t + k)^2(z - t)^2 - \left[ (zm_p - tm_q)(t + k) - t(m_p(z + k) + m_r(t - z) - m_q(k + t)) \right]^2 \right|}}{|(z - t)[m_p(z + k) + m_r(t - z) - m_q(k + t)]|}$$

olur. Böylece  $(z - t)[m_p(z + k) + m_r(t - z) - m_q(k + t)] = 0$  için merkez ve yarıçap bulunamaz. Bu nedenle bu koşul altında dış teğet çember yoktur.

$\Delta PQR$  üçgeninin kenarları timelike doğrular üzerinde olması durumu da benzer şekilde incelenebilir.

**Örnek 5.2.5** Köşeleri  $P = (3,1)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (6,-1)$  noktaları olan üçgenin Lorentz dış teğet çemberlerini bulunuz.

**Çözüm** : Köşeleri  $P = (3,1)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (6,-1)$  olan üçgen spacelike bölgesindedir. Bu üçgenin  $[PQ]$ ,  $[QR]$ ,  $[RP]$  kenarlarının eğimleri sırasıyla  $m_r$ ,  $m_p$ ,  $m_q$  olsun. O halde,

$$m_p = \frac{-1 - 0}{6 - 0} = -\frac{1}{6},$$

$$m_q = \frac{-1-1}{6-3} = -\frac{2}{3},$$

$$m_r = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

ve  $[PQ]$ ,  $[QR]$ ,  $[RP]$  kenarlarının denklemleri,

$$\overrightarrow{PQ}: y = \frac{1}{3}x,$$

$$\overrightarrow{QR}: y = -\frac{1}{6}x,$$

$$\overrightarrow{RP}: y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 3),$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 3$$

şeklindedir.

$$k = \sqrt{1 - m_r^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$t = \sqrt{1 - m_p^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6},$$

$$z = \sqrt{1 - m_q^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$c = 3$$

olmak üzere;

$[RP]$  kenarına teğet olan dış teğet çemberin merkezinin koordinatları,

$$x = \frac{c(t - k)}{m_q(k - t) + m_r(t + z) - m_p(z + k)},$$

$$x = \frac{3\left(\frac{\sqrt{35}}{6} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}{\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{35}}{6} + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{35}}{6}\right)},$$

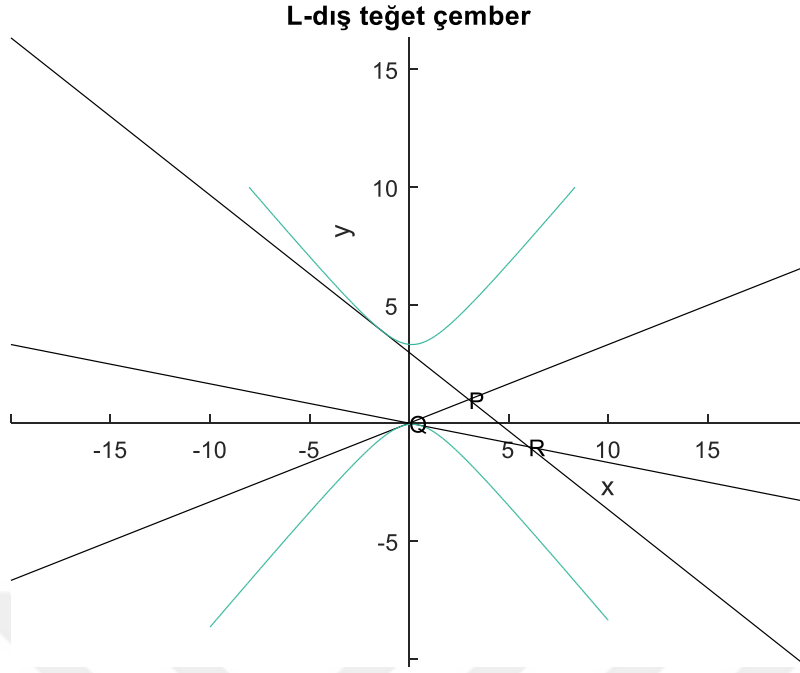
$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{3\sqrt{35}-12\sqrt{2}}{6}}{\frac{\sqrt{35}+2\sqrt{5}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+2\sqrt{35}-8\sqrt{2}}{18}} \\
&= \frac{9\sqrt{35} - 36\sqrt{2}}{3\sqrt{35} + 3\sqrt{5} - 6\sqrt{2}} = \frac{2.333029980247}{15.9711619076}, \\
&= 0.1460776502,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{\sqrt{35}}{6} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{35}}{6}} \cdot x + \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{35}}{6}}{\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{35}}{6}}, \\
&= -\frac{\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{35}}{18}}{\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{35}}{6}} \cdot x + \frac{\frac{3\sqrt{35}}{6}}{\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{35}}{6}}, \\
&= -\frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{35}}{6\sqrt{5} + 3\sqrt{35}} \cdot x + \frac{3\sqrt{35}}{2\sqrt{5} + \sqrt{35}}, \\
&= -\frac{14.0682275437}{31.1646472143} \cdot 0.1460776502 + \frac{17.7482393493}{10.3882157381}, \\
&= -0.06594182208 + 1.70849737787 = 1.64255555579
\end{aligned}$$

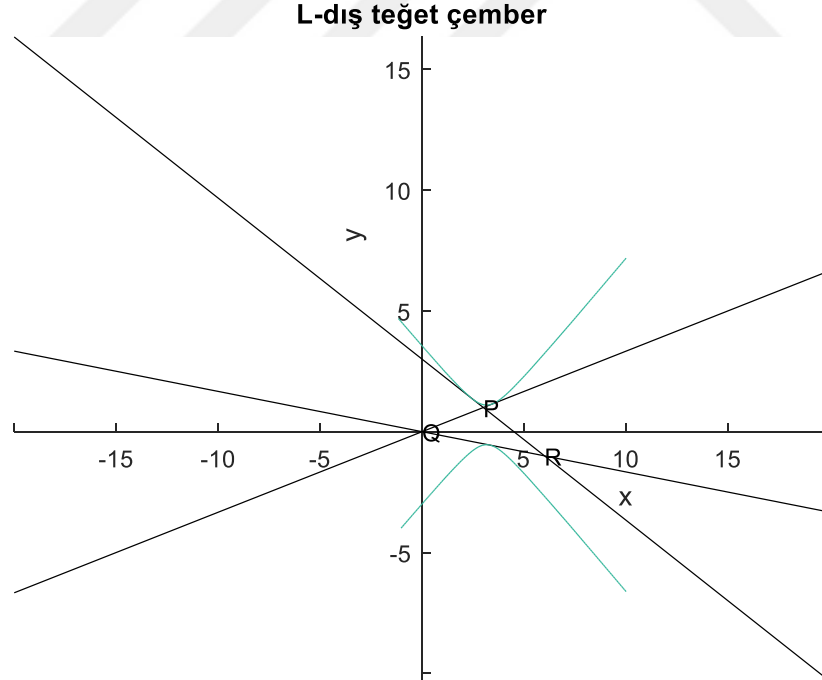
bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
r_L = d_L(I, \overrightarrow{PQ}) &= \frac{\left| 1.64255555579 - \frac{1}{3} \cdot (0.1460776502) \right|}{2\sqrt{2}/3}, \\
&= \frac{1.59386300572}{0.94280904158} = 1.69054700945
\end{aligned}$$

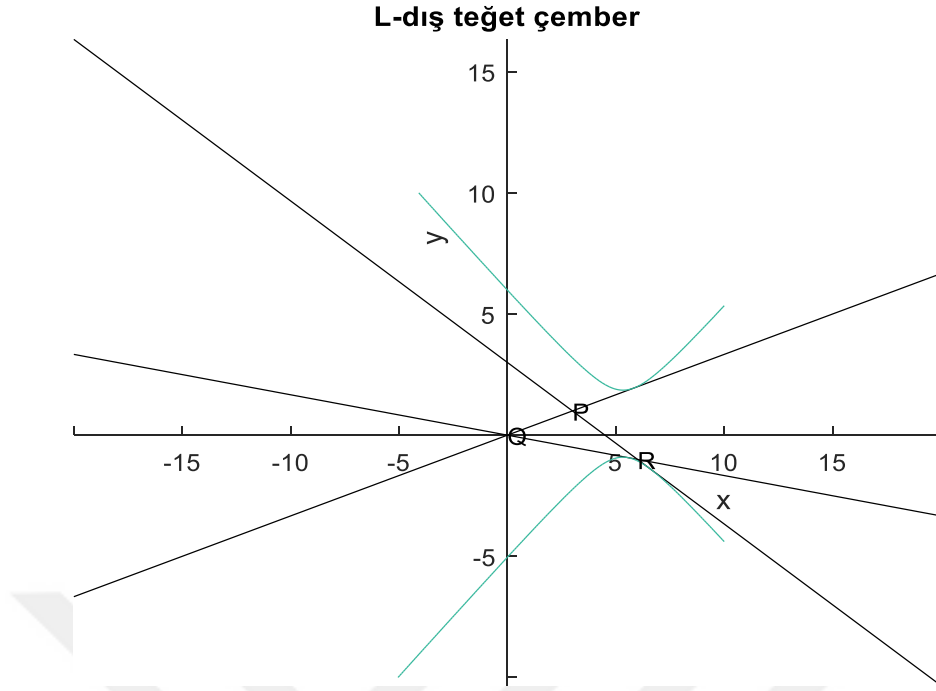
dır.  $[PQ]$  ve  $[QR]$  kenarlarına teğet olan dış teğet çemberlerde benzer şekilde bulunabilir. Aşağıdaki şekillerde bu dış teğet çemberler gösterilmektedir.



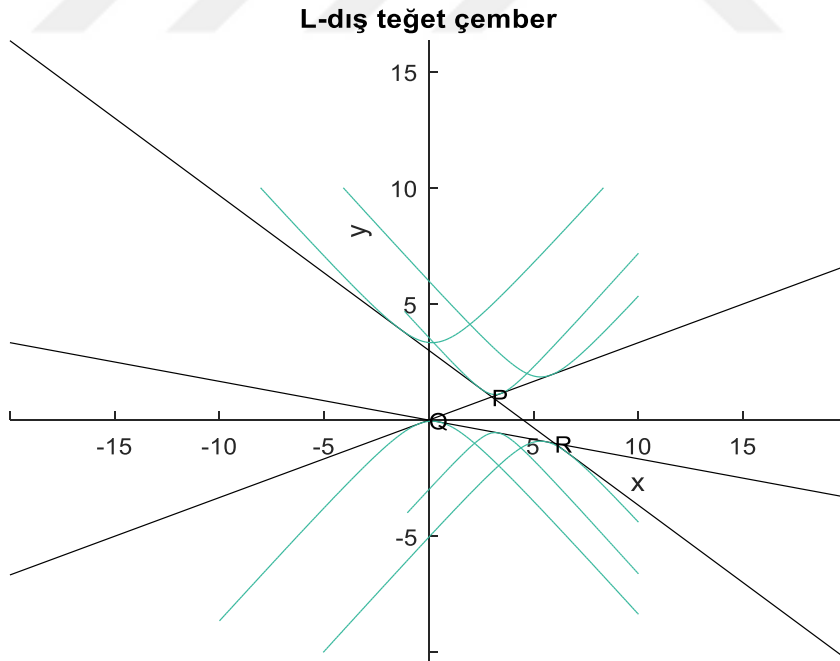
**Şekil 5.7**  $L^2$  de köşeleri  $P = (3,1)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (6,-1)$  noktaları olan üçgenin  $[PR]$  kenarına teğet olan dış teğet çemberi.



**Şekil 5.8**  $L^2$  de köşeleri  $P = (3,1)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (6,-1)$  noktaları olan üçgenin  $[QR]$  kenarına teğet olan dış teğet çemberi.



**Şekil 5.9**  $L^2$  de köşeleri  $P = (3,1)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (6,-1)$  noktaları olan üçgenin  $[QP]$  kenarına teğet olan dış teğet çemberi.



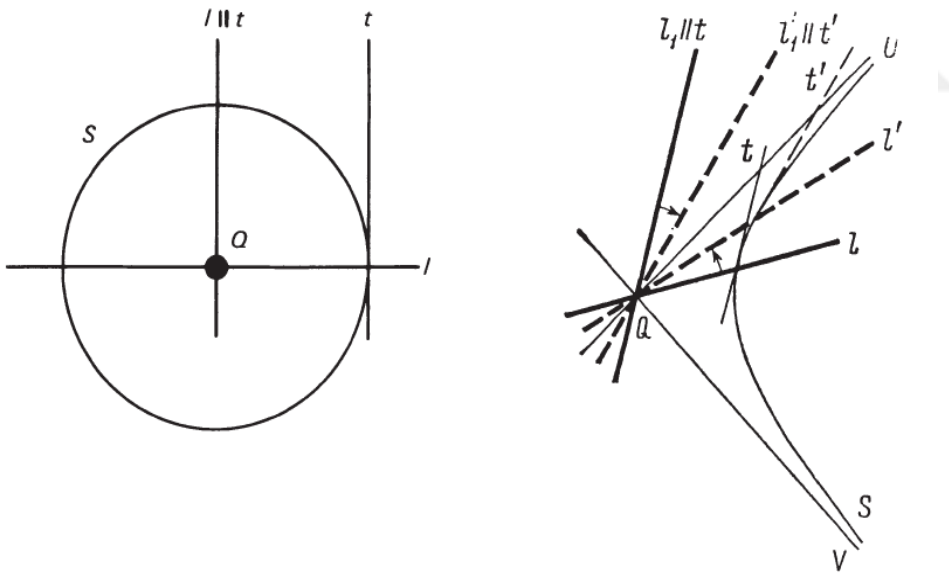
**Şekil 5.10**  $L^2$  de köşeleri  $P = (3,1)$ ,  $Q = (0,0)$ ,  $R = (6,-1)$  noktaları olan üçgenin dış teğet çemberleri.

### 5.3 Lorentz(Minkowski) Düzleminde Düzgün Çokgenler

Lorentz(Minkowski) düzlemindeki düzgün çokgenler (Fillastre 2014) referansında çalışılmıştır. Bu bölümde bu referans temel alınarak bu düzlemdeki düzgün çokgenlerin nasıl oluşturulabileceği incelenecektir.

Düzgün çokgenlerin köşeleri çember üzerinde olduğundan, köşeleri birleştiren doğru parçaları yani düzgün çokgenlerin kenarları çemberin kirişleridir ve kirişlerde teğet doğrulara paraleldir. Bu nedenle öncelikle Lorentz(Minkowski) düzlemindeki teğet doğru ve diklik kavramını (Yaglom 1979) referansını temel alarak araştırılmalıdır.

Öklid düzlemindekine benzer olarak, Lorentz çemberinin merkezinden geçen bir  $l$  doğrusunun çemberi kestiği noktadaki teğete paralel olan  $l_1$  doğrusu vardır (Şekil 5.11). Burada teğet doğruyla spacelike veya timelike doğruyu kastediyoruz.



**Şekil 5.11** Öklid ve Lorentz(Minkowski) düzlemlerinde çemberin merkezinden geçen doğrunun çemberi kestiği noktadaki teğete paralel olan doğru.

Böylece spacelike bir doğruya dik olan bir doğrunun timelike olduğunu söylemek kolaydır ve terside doğrudur. Eğer bir  $l$  doğrusu  $Q$  noktasının etrafında döndürülür ve  $\overrightarrow{QU}$  doğrusuna yaklaşırsa,  $Q$  noktasından geçen  $l$  doğrusuna dik  $l_1$  doğrusu Öklid geometrisinden farklı olarak aynı anda  $\overrightarrow{QU}$  doğrusuna yaklaşır (Şekil 5.11). Yani

Lorentz anlamında dik olan  $l$  ve  $l_1$  doğruları lightlike doğrularına göre simetriktir. Bu nedenle Lorentz(Minkowski) düzleminde lightlike doğruların kendilerine dik olduğunu söylemek doğaldır (Yaglom 1979).

Burada dikkat etmemiz gereken şey örneğin,  $y^2 - x^2 = 1$  birim Lorentz çemberinin üzerindeki timelike  $\vec{u} = (0,1)$  vektörünün ortogonalı spacelike  $\vec{v} = (1,0)$  vektörüdür. O halde Lorentz düzgün çokgenlerini bulmak için bu spacelike  $\vec{v} = (1,0)$  vektörünün, timelike bölgesine taşınması gerekir. Bu taşıma ötelemeler yardımıyla yapılabilir.

**Teorem 5.3.1** Ötelemelerde;

- a) Sabit nokta yoktur.
- b) Öteleme vektörüne paralel olan doğrular kendilerine ve diğer doğrular da kendilerine paralel doğrulara dönüşürler (Hacısalıhoğlu 2010).

**İspat :**

- a)  $x' = x + a$ ,  $y' = y + b$  denklemlerinde  $x' = x$  ve  $y' = y$  alınırsa çözüm bulunamaz yani  $x = x + a$ ,  $y = y + b$  denklem sisteminin çözümü yoktur. O halde hiçbir nokta kendisinin resmi değildir.

- b)  $m$  ve  $n$  ikisi birden sıfır olmamak üzere denklemi,

$$g: mx + ny + r = 0$$

olan bir  $g$  doğrusu alalım.  $x' = x + a$ ,  $y' = y + b$  ifadesinde  $x$  ve  $y$  çekilip burada yerlerine yazılarak,

$$m(x' - a) + n(y' - b) + r = 0$$

veya

$$g': mx' + ny' - ma - nb + r = 0$$

bulunur. Buradan görülüyor ki  $g$  doğrusu  $g'$  gibi yine bir doğruya dönüşüyor ve  $g$  ile  $g'$  nün eğimleri aynıdır. O halde bu iki doğru paraleldir ve özel olarak  $ma + nb = 0$  olması halinde  $g$  ve  $g'$  doğruları çakışıktır.

Bu da

$$-\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$$

olmasını gerektirir. O halde eğimi  $b/a$  olan doğru kendisine dönüşür. Eğimi  $b/a$  dan farklı olan doğrularda kendilerine paralel doğrulara dönüşürler.

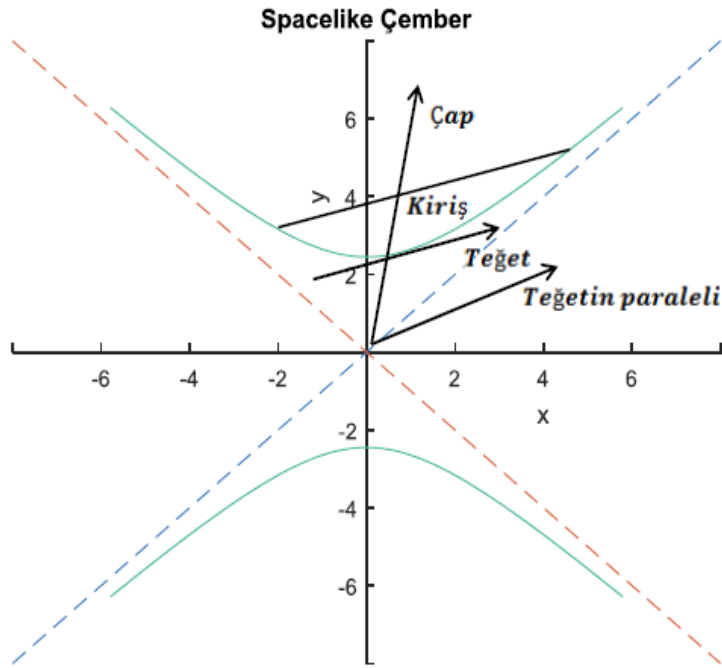
O zaman Teorem 5.3.1 den aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 5.3.1**  $y \in L^2$  olsun. O zaman

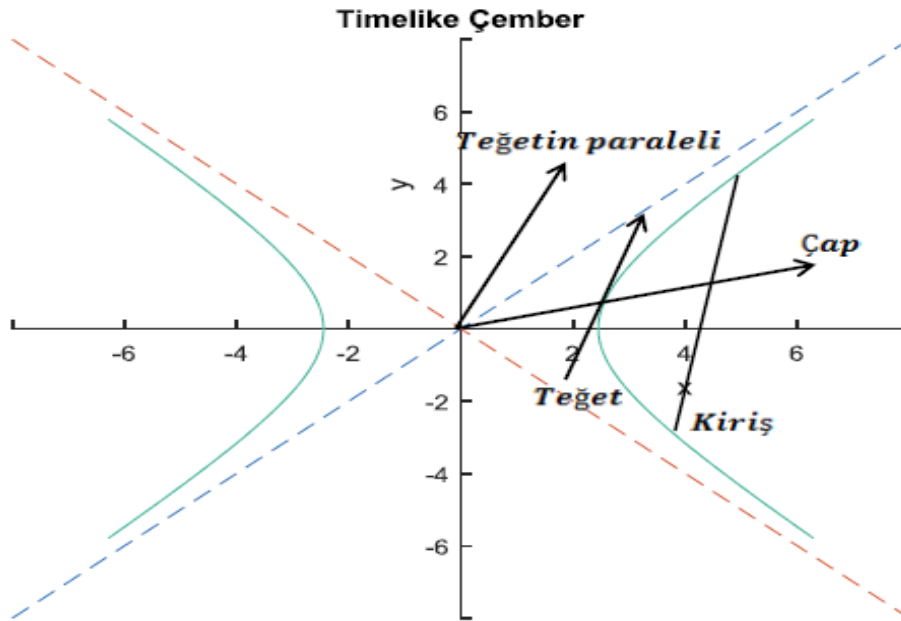
$$y^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, y \rangle_L = \langle y, y \rangle_L\}$$

kümesi  $y$  den geçen ve Lorentz iç çarpımı altında  $y$  ye dik 1-boyutlu alt uzaya paralel olan doğru denklemdir (Fillastre 2014).

Buna göre, bir çemberin yarıçapı çemberin kirişine dik olduğu için, yarıçapı spacelike olan bir çember içine çizilmiş bir çokgenin tüm kenar doğruları timelike doğru parçaları olduğuna dikkat etmeliyiz ve bunun terside doğrudur (Şekil 5.12) (Şekil 5.13).



Şekil 5.12  $L^2$  de spacelike çemberin teğeti ve teğetin paralel doğrusu.



Şekil 5.13  $L^2$  de timelike çemberin teğeti ve teğetin paralel doğrusu.

Şimdi konveks küme ve yarı-düzlem tanımlarını (Stephen ve Vanderberghe 2004) referansını temel alarak verelim.

**Tanım 5.3.2 (Konveks Küme)**  $C$  kümesindeki herhangi iki nokta arasındaki doğru parçası  $C$  kümesinde bulunuyorsa, bu kümeye konveks küme denir.

Yani  $x_1, x_2 \in C$  ve  $0 \leq \theta \leq 1$  için,

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C$$

dir.

**Tanım 5.3.3 (Hiperdüzlem)**  $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$  ve  $b \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$\{x \mid a^T x = b\}$$

kümesine  $\mathbb{R}^n$  de bir hiperdüzlem denir.

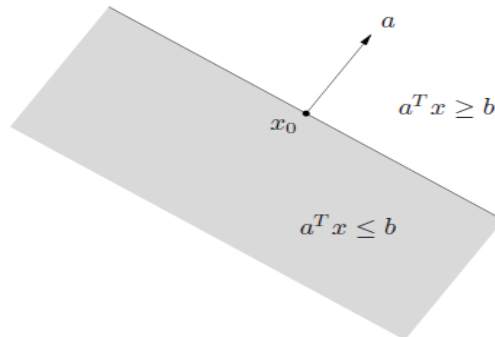
Hiperdüzlem  $\mathbb{R}^n$  i iki yarı uzaya ayırır.

**Tanım 5.3.4 (Yarı-Uzay)**  $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$  ve  $b \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$\{x \mid a^T x \leq b\}$$

kümesine  $\mathbb{R}^n$  de bir yarı-uzay denir.

Yarı-uzaylar konvektir.



**Şekil 5.14**  $\mathbb{R}^2$  de yarı-düzlemler.

Bu yarı-düzlemler konveks olduğundan, bunların kesişimleri de konvektir.

**Tanım 5.4.5 (Zarf Eğrisi)** Bir  $C_\alpha$  eğrisi üzerinde karakteristik noktalar, ayrık noktalardır. Ayrık karakteristik noktaların geometrik yerine  $C_\alpha$  eğri ailesinin zarfı,  $C_\alpha$  eğrilerinin her birine de zarflı eğri adı verilir.

$F(x, y, C) = 0$  eğri ailesinin zarfının denklemi,

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0 \end{cases}$$

sisteminde  $C$  nin yok edilmesiyle elde edilir. Burada aileye ait doğrular eğrinin teğetleridirler. Bu doğruların karakteristik noktaları, genel olarak değme noktalarıdır.

**Örnek 5.4.1**  $y = mx - \frac{1}{4}m^2$ ,  $m \in \mathbb{R}$  doğru ailesini ele alalım. Bu doğru ailesi (eğer  $y$  ve  $y'$  arasındaki  $m$  yok edilirse)

$$y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$$

diferansiyel denkleminin integral eğrilerinin ailesidir. Bu doğru ailesi  $y = x^2$  parabol eğrisiyle ilgilidir. Şöyle ki doğru ailesinin her bir doğrusu bu parabole teğettir. Tersine parabolün herhangi bir noktasındaki teğeti doğru ailesinin bir üyesidir. Bunun içindir ki  $y = x^2$  parabolüne  $y = mx - \frac{1}{4}m^2$ ,  $m \in \mathbb{R}$  doğru ailesinin zarfıdır denir. (Hacısalıhoğlu 2010).

$L^2$  deki timelike ve spacelike doğrularının zarfını araştıralım.

$L^2$  de  $L_t$  (timelike doğrular) ve  $L_s$  (spacelike doğrular),  $v \in \mathbb{R}$  ve  $\rho$  doğruların orijinden uzaklığı olmak üzere,

$$L_t \equiv xcoshv - ysinhv - \rho = 0 \quad (5.4)$$

$$L_s \equiv xsinhv - ycoshv - \rho = 0 \quad (5.5)$$

şeklindedir (Birman 2001).

O halde (5.4) denkleminde,

$$L_t' \equiv x \sinh v - y \cosh v = 0,$$

$$x \sinh v = y \cosh v,$$

$$\frac{\sinh v}{\cosh v} = \frac{y}{x},$$

$$\tanh v = \frac{y}{x},$$

$$\frac{e^{2v} - 1}{e^{2v} + 1} = \frac{y}{x},$$

$$e^{2v}(x - y) = x + y,$$

$$e^{2v} = \frac{x + y}{x - y}$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} \cosh v &= \frac{e^{2v} + 1}{2e^v} = \frac{\frac{x+y}{x-y} + 1}{2\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}} \\ &= \frac{\frac{2x}{x-y}}{2\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}} = \frac{2x}{x-y} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x-y} \cdot \sqrt{x+y}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\sinh v = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}} \quad (5.7)$$

olur. (5.6) ve (5.7) denklemleri (5.4) de yerine yazılırsa,

$$x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \rho$$

$$\sqrt{x^2 - y^2} = \rho$$

bulunur ki bu da timelike Lorentz çemberinin denklemidir. Benzer şekilde spacelike doğrunun zarfının da spacelike Lorentz çemberi olduğu bulunabilir.

Böylece  $L^2$  de bir eğrinin teğetlerinin kesişimlerinden geçen bir konveks küme ve bu kümenin sınırı bir konveks eğri bulunabilir.

Bu ön hazırlıktan sonra Lorentz(Minkowski) düzlemindeki yarı-düzlemlerin kesişimi olan konveks çokgenlerinin tanımı verilebilir. Aşağıdaki tanım bu düzlemdeki timelike future-pointing (pozitif) bölgesinde olan konveks çokgeni tanımlamaktadır. Bu düzleminin diğer bölgeleri içinde benzer tanımlar yapılabilir.

**Tanım 5.3.6**  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $n \geq 1$  Lorentz(Minkowski) düzleminde farklı birim future-pointing timelike vektörler ve  $h_1, h_2, \dots, h_n$  pozitif sayılar olsun. Bir  $t - konveks$  çokgeni,

$$\left( H_t^k(h_i u_i) \right)^\perp, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

doğrularıyla sınırlanan yarı-düzlemlerin kesişimidir (Fillastre 2014).

Buradan  $L^2$  deki konveks çokgen yarı-düzlemlerin normalleri arasındaki açıya göre adlandırılmaktadır. Örneğin, Tanım 5.3.6 daki çokgen açısı  $t$  olduğu için  $t - konveks$  çokgen olarak adlandırılmaktadır.

Şimdi bir başlangıç noktası olarak timelike future-pointing (pozitif) bölgesinde ve spacelike pozitif bölgesinde bulunan konveks çokgenleri ve bunların düzgünlüğünü araştıralım.

**Örnek 5.3.2**  $\sinh^{-1}(1) = v$  olsun.

$$\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$$

$$\cosh^2 v = 2$$

$$\cosh v = \mp\sqrt{2}$$

olduğundan

$$H_v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

yazılır. Keyfi olarak  $\vec{u} = (0,1)$  ve  $h = 1$  için  $v$  – *konveks* çokgen oluşturalım.

Buradan, Tanım 5.3.1’ den,

$$u^\perp : y = 1$$

bulunur.  $\vec{u}$  vektörünü  $v$  açısı kadar döndürerek,

$$H_v^{-1}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\left(H_v^{-1}(u)\right)^\perp : x - \sqrt{2}y = -1$$

elde edilir. O halde

$$P_1 = (u^\perp) \cap \left(H_v^{-1}(u)\right)^\perp$$

$$y = 1$$

$$x - \sqrt{2}y = -1$$

$y = 1$  değeri  $x - \sqrt{2}y = -1$  denkleminde yerine yazılırsa,

$$x - \sqrt{2}.1 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{2} - 1$$

bulunur. Böylece  $P_1 = (\sqrt{2} - 1, 1)$  dır.

$$H_v^2(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\left(H_v^2(u)\right)^\perp : 2\sqrt{2}x - 3y = -1$$

elde edilir. O halde

$$P_2 = \left(H_v^1(u)\right)^\perp \cap \left(H_v^2(u)\right)^\perp$$

$$\begin{cases} x - \sqrt{2}y = -1 \\ 2\sqrt{2}x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 3\sqrt{2}y = 3 \\ 4x - 3\sqrt{2}y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$x = 3 - \sqrt{2}$$

$x = 3 - \sqrt{2}$  değeri  $x - \sqrt{2}y = -1$  denkleminde yerine yazılırsa,

$$3 - \sqrt{2} - \sqrt{2}y = -1 \Rightarrow y = \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{2} - 2}{2} = 2\sqrt{2} - 1$$

bulunur. Böylece  $P_2 = (3 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 1)$  dir.

$$H_v^3(u) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\left(H_v^3(u)\right)^\perp : 7x - 5\sqrt{2}y = -1$$

elde edilir. O halde

$$P_3 = \left(H_v^2(u)\right)^\perp \cap \left(H_v^3(u)\right)^\perp$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}x - 3y = -1 \\ 7x - 5\sqrt{2}y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20x + 15\sqrt{2}y = 5\sqrt{2} \\ 21x - 15\sqrt{2}y = -3 \end{cases}$$

$$x = 5\sqrt{2} - 3$$

$x = 5\sqrt{2} - 3$  değeri  $7x - 5\sqrt{2}y = -1$  denkleminde yerine yazılırsa,

$$35\sqrt{2} - 21 - 5\sqrt{2}y = -1 \Rightarrow y = \frac{35\sqrt{2} - 20}{5\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{7\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}} = 7 - 2\sqrt{2}$$

bulunur. Böylece  $P_3 = (5\sqrt{2} - 3, 7 - 2\sqrt{2})$  dir.

$$H_v^4(u) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\sqrt{2} \\ 17 \end{pmatrix},$$

$$(H_v^4(u))^\perp : 12\sqrt{2}x - 17y = -1$$

elde edilir. O halde

$$P_4 = (H_v^3(u))^\perp \cap (H_v^4(u))^\perp$$

$$\begin{cases} 7x - 5\sqrt{2}y = -1 \\ 12\sqrt{2}x - 17y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -119x + 85\sqrt{2}y = 17 \\ 120x - 85\sqrt{2}y = -5\sqrt{2} \end{cases}$$

$$x = 17 - 5\sqrt{2}$$

$x = 17 - 5\sqrt{2}$  değeri  $7x - 5\sqrt{2}y = -1$  denkleminde yerine yazılırsa,

$$119 - 35\sqrt{2} - 5\sqrt{2}y = -1 \Rightarrow y = \frac{120 - 35\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{24 - 7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} - 7$$

bulunur. Böylece  $P_4 = (17 - 5\sqrt{2}, 12\sqrt{2} - 7)$  dir.

Şimdi bu  $v$  - *konveks* çokgeninin düzgünlüğüne bakalım.

$v$  - *konveks* çokgenin köşeleri  $P_1 = (\sqrt{2} - 1, 1)$ ,  $P_2 = (3 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 1)$ ,  $P_3 = (5\sqrt{2} - 3, 7 - 2\sqrt{2})$  ve  $P_4 = (17 - 5\sqrt{2}, 12\sqrt{2} - 7)$  olmak üzere, kenarları

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= (4 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2), & \overrightarrow{P_2P_3} &= (6\sqrt{2} - 6, 8 - 4\sqrt{2}) & \text{ve} \\ \overrightarrow{P_3P_4} &= (20 - 10\sqrt{2}, 14\sqrt{2} - 14) \text{ olur. O halde}\end{aligned}$$

$$\|P_1P_2\|_L = \sqrt{|(4 - 2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2} - 2)^2|} = \sqrt{|16 - 16\sqrt{2} + 8 - 8 + 8\sqrt{2} - 4|} = \sqrt{|12 - 8\sqrt{2}|}$$

$$\|P_2P_3\|_L = \sqrt{|(6\sqrt{2} - 6)^2 - (8 - 4\sqrt{2})^2|} = \sqrt{|72 - 72\sqrt{2} + 36 - 64 + 64\sqrt{2} - 32|} = \sqrt{|12 - 8\sqrt{2}|}$$

$$\|P_3P_4\|_L = \sqrt{|(20 - 10\sqrt{2})^2 - (14\sqrt{2} - 14)^2|} = \sqrt{|400 - 400\sqrt{2} + 200 - 392 + 392\sqrt{2} - 196|} = \sqrt{|12 - 8\sqrt{2}|}$$

bulunur. Böylece kenar uzunlukları eşittir. Buradan,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= (4 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2) = (1,1715 \dots, 0,82 \dots) \\ \overrightarrow{P_2P_3} &= (6\sqrt{2} - 6, 8 - 4\sqrt{2}) = (2,4852 \dots, 2,3431 \dots) \\ \overrightarrow{P_3P_4} &= (20 - 10\sqrt{2}, 14\sqrt{2} - 14) = (5,8578 \dots, 5,7989 \dots)\end{aligned}$$

olup, spacelike vektörlerdir. Tanım 5.1.1 den,  $\overrightarrow{P_1P_2}$  ve  $\overrightarrow{P_2P_3}$  spacelike vektörler ve birinci bileşenleri aynı işaretli yani pozitif olduğundan,  $\angle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3} = \varphi_1$  için,

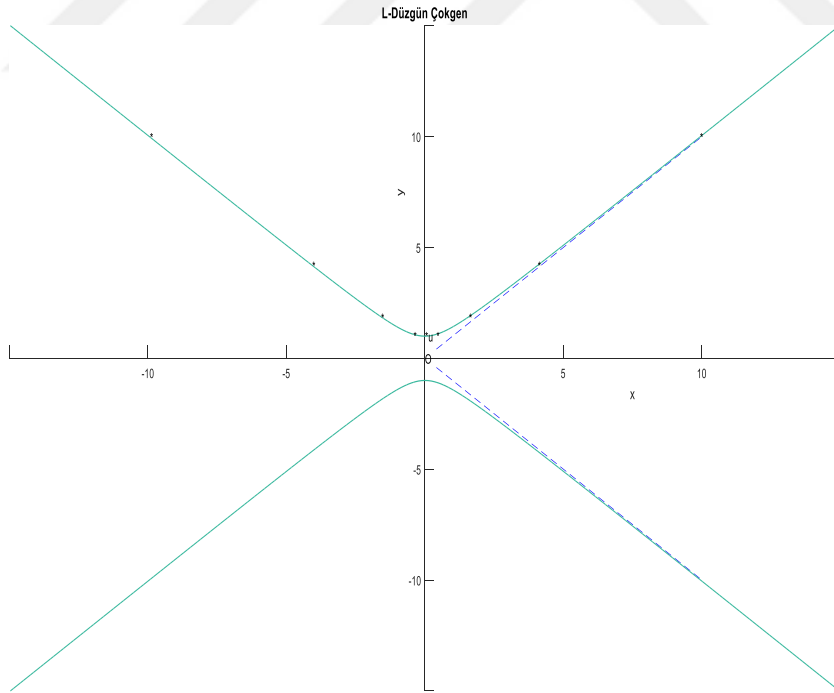
$$\begin{aligned}\cosh \varphi_1 &= \frac{\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3} \rangle_L}{\|P_1P_2\|_L \cdot \|P_2P_3\|_L} \\ &= \frac{\langle (4 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2), (6\sqrt{2} - 6, 8 - 4\sqrt{2}) \rangle_L}{12 - 8\sqrt{2}} \\ &= \frac{(4 - 2\sqrt{2}) \cdot (6\sqrt{2} - 6) - (2\sqrt{2} - 2) \cdot (8 - 4\sqrt{2})}{12 - 8\sqrt{2}} \\ &= \frac{[24\sqrt{2} - 24 - 24 + 12\sqrt{2}] - [16\sqrt{2} - 16 - 16 + 8\sqrt{2}]}{12 - 8\sqrt{2}} \\ &= \frac{36\sqrt{2} - 48 - 24\sqrt{2} + 32}{12 - 8\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2} - 16}{12 - 8\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{3 - 2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

bulunur.

$$\angle \overrightarrow{P_2 P_3}, \overrightarrow{P_3 P_4} = \varphi_2 \text{ için,}$$

$$\begin{aligned} \cosh \varphi_2 &= \frac{\langle \overrightarrow{P_2 P_3}, \overrightarrow{P_3 P_4} \rangle_L}{\|P_2 P_3\|_L \cdot \|P_3 P_4\|_L} \\ &= \frac{\langle (6\sqrt{2} - 6, 8 - 4\sqrt{2}), (20 - 10\sqrt{2}, 14\sqrt{2} - 14) \rangle_L}{12 - 8\sqrt{2}} \\ &= \frac{(6\sqrt{2} - 6) \cdot (20 - 10\sqrt{2}) - (8 - 4\sqrt{2}) \cdot (14\sqrt{2} - 14)}{12 - 8\sqrt{2}} \\ &= \frac{[120\sqrt{2} - 120 - 120 + 60\sqrt{2}] - [112\sqrt{2} - 112 - 112 + 56\sqrt{2}]}{12 - 8\sqrt{2}} \\ &= \frac{180\sqrt{2} - 240 - 168\sqrt{2} + 224}{12 - 8\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2} - 16}{12 - 8\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{3 - 2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $v$  – *konveks* çokgenin kenarları ve açıları eşit olduğundan Lorentz düzgündür (Şekil 5.15).



Şekil 5.15  $L^2$  de timelike future-pointing (pozitif) bölgesinde bulunan düzgün konveks çokgen.

**Örnek 5.3.3**  $\sinh^{-1}(1) = v$  olsun.

$$\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$$

$$\cosh^2 v = 2$$

$$\cosh v = \mp\sqrt{2}$$

dır. O halde

$$H_v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

olur. Keyfi olarak  $\vec{u} = (1,0)$  ve  $h = 1$  için  $v$  – *konveks* çokgenini oluşturalım.

Tanım 5.3.1’ den,

$$(H_v^0(u))^\perp : x = 1$$

bulunur.  $\vec{u}$  vektörünü  $v$  açısı kadar döndürerek,

$$H_v^1(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(H_v^1(u))^\perp : \sqrt{2}x - y = 1$$

elde edilir. O halde

$$P_1 = (H_v^0(u))^\perp \cap (H_v^1(u))^\perp$$

$$x = 1$$

$$\sqrt{2}x - y = 1$$

$x = 1$  değeri  $\sqrt{2}x - y = 1$  denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sqrt{2} \cdot 1 - y = 1 \Rightarrow y = \sqrt{2} - 1$$

bulunur. Böylece  $P_1 = (1, \sqrt{2} - 1)$  dır.

$$H_v^2(u) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\left(H_v^2(u)\right)^\perp : 3x - 2\sqrt{2}y = 1$$

elde edilir. O halde

$$P_2 = \left(H_v^1(u)\right)^\perp \cap \left(H_v^2(u)\right)^\perp$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x - y = 1 \\ 3x - 2\sqrt{2}y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2\sqrt{2}y = 2\sqrt{2} \\ -3x + 2\sqrt{2}y = -1 \end{cases}$$

$$x = 2\sqrt{2} - 1$$

$x = 2\sqrt{2} - 1$  değeri  $\sqrt{2}x - y = 1$  denkleminde yerine yazılırsa,

$$4 - \sqrt{2} - y = -1 \Rightarrow y = 3 - \sqrt{2}$$

bulunur. Böylece  $P_2 = (2\sqrt{2} - 1, 3 - \sqrt{2})$  dir.

$$H_v^3(u) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$\left(H_v^3(u)\right)^\perp : 5\sqrt{2}x - 7y = 1$$

elde edilir. O halde

$$P_3 = \left(H_v^2(u)\right)^\perp \cap \left(H_v^3(u)\right)^\perp$$

$$\begin{cases} 3x - 2\sqrt{2}y = 1 \\ 5\sqrt{2}x - 7y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21x - 14\sqrt{2}y = 7 \\ -20x + 14\sqrt{2}y = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$x = 7 - 2\sqrt{2}$$

$x = 7 - 2\sqrt{2}$  değeri  $3x - 2\sqrt{2}y = -1$  denkleminde yerine yazılırsa,

$$21 - 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}y = 1 \Rightarrow y = \frac{20 - 6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{10 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} - 3$$

bulunur. Böylece  $P_3 = (7 - 2\sqrt{2}, 5\sqrt{2} - 3)$  dır.

$$H_v^4(u) = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$(H_v^4(u))^\perp : 17x - 12\sqrt{2}y = 1$$

elde edilir. O halde

$$P_4 = (H_v^3(u))^\perp \cap (H_v^4(u))^\perp$$

$$\begin{cases} 5\sqrt{2}x - 7y = 1 \\ 17x - 12\sqrt{2}y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 120x - 84\sqrt{2}y = 12\sqrt{2} \\ -119x + 84\sqrt{2}y = -7 \end{cases}$$

$$x = 12\sqrt{2} - 7$$

$x = 12\sqrt{2} - 7$  değeri  $5\sqrt{2}x - 7y = 1$  denkleminde yerine yazılırsa,

$$120 - 35\sqrt{2} - 7y = 1 \Rightarrow y = \frac{119 - 35\sqrt{2}}{7} \Rightarrow y = 17 - 5\sqrt{2}$$

bulunur. Böylece  $P_4 = (12\sqrt{2} - 7, 17 - 5\sqrt{2})$  dır.

Şimdi bu  $v$  - konveks çokgeninin düzgünlüğüne bakalım.

$v$  - konveks çokgenin köşeleri  $P_1 = (1, \sqrt{2} - 1)$ ,  $P_2 = (2\sqrt{2} - 1, 3 - \sqrt{2})$ ,  $P_3 = (7 - 2\sqrt{2}, 5\sqrt{2} - 3)$  ve  $P_4 = (12\sqrt{2} - 7, 17 - 5\sqrt{2})$  olmak üzere, kenarları

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= (2\sqrt{2} - 2, 4 - 2\sqrt{2}), & \overrightarrow{P_2P_3} &= (8 - 4\sqrt{2}, 6\sqrt{2} - 6) & \text{ve} \\ \overrightarrow{P_3P_4} &= (14\sqrt{2} - 14, 20 - 10\sqrt{2}) \text{ olur. O halde}\end{aligned}$$

$$\|P_1P_2\|_L = \sqrt{|(2\sqrt{2} - 2)^2 - (4 - 2\sqrt{2})^2|} = \sqrt{|8 - 8\sqrt{2} + 4 - 16 + 16\sqrt{2} - 8|} = \sqrt{|8\sqrt{2} - 12|}$$

$$\|P_2P_3\|_L = \sqrt{|(8 - 4\sqrt{2})^2 - (6\sqrt{2} - 6)^2|} = \sqrt{|64 - 64\sqrt{2} + 32 - 72 + 72\sqrt{2} - 36|} = \sqrt{|8\sqrt{2} - 12|}$$

$$\|P_3P_4\|_L = \sqrt{|(14\sqrt{2} - 14)^2 - (20 - 10\sqrt{2})^2|} = \sqrt{|392 - 392\sqrt{2} + 196 - 400 + 400\sqrt{2} - 200|} = \sqrt{|8\sqrt{2} - 12|}$$

bulunur. O halde kenar uzunlukları eşittir. Buradan,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= (2\sqrt{2} - 2, 4 - 2\sqrt{2}) = (0,82 \dots, 1,1715 \dots,) \\ \overrightarrow{P_2P_3} &= (8 - 4\sqrt{2}, 6\sqrt{2} - 6,) = (2,3431 \dots, 2,4852 \dots,) \\ \overrightarrow{P_3P_4} &= (14\sqrt{2} - 14, 20 - 10\sqrt{2}) = (5,7989 \dots, 5,8578 \dots,)\end{aligned}$$

olup, timelike vektörlerdir. Tanım 5.1.1 den,  $\overrightarrow{P_1P_2}$  ve  $\overrightarrow{P_2P_3}$  timelike vektörler ve birinci bileşenleri aynı işaretli yani pozitif olduğundan,  $\angle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3} = \varphi_1$  için,

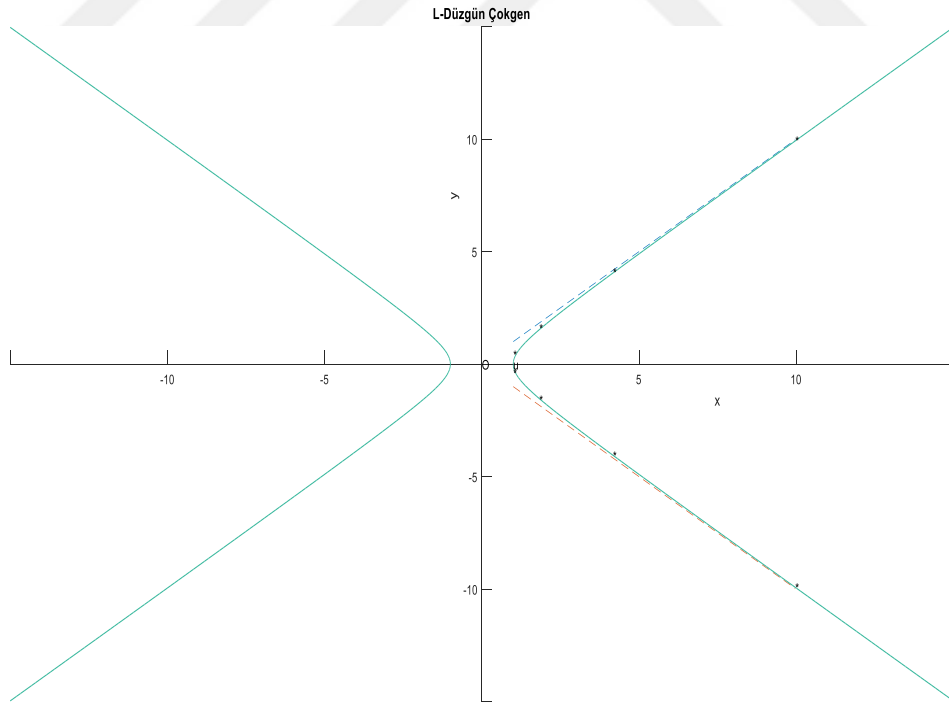
$$\begin{aligned}\cosh \varphi_1 &= -\frac{\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3} \rangle_L}{\|P_1P_2\|_L \cdot \|P_2P_3\|_L} \\ &= -\frac{\langle (2\sqrt{2} - 2, 4 - 2\sqrt{2}), (8 - 4\sqrt{2}, 6\sqrt{2} - 6) \rangle_L}{12 - 8\sqrt{2}} \\ &= -\frac{(2\sqrt{2} - 2) \cdot (8 - 4\sqrt{2}) - (4 - 2\sqrt{2}) \cdot (6\sqrt{2} - 6)}{12 - 8\sqrt{2}} \\ &= -\frac{[16\sqrt{2} - 16 - 16 + 8\sqrt{2}] - [24\sqrt{2} - 24 - 24 + 12\sqrt{2}]}{12 - 8\sqrt{2}} \\ &= -\frac{24\sqrt{2} - 32 - 36\sqrt{2} + 48}{12 - 8\sqrt{2}} = -\frac{16 - 12\sqrt{2}}{12 - 8\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{3 - 2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

bulunur.

$\angle \overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_4} = \varphi_2$  için,

$$\begin{aligned}
 \cosh \varphi_2 &= -\frac{\langle \overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_4} \rangle_L}{\|\overrightarrow{P_2P_3}\|_L \cdot \|\overrightarrow{P_3P_4}\|_L} \\
 &= -\frac{\langle (8 - 4\sqrt{2}, 6\sqrt{2} - 6), (14\sqrt{2} - 14, 20 - 10\sqrt{2}) \rangle_L}{12 - 8\sqrt{2}} \\
 &= -\frac{(8 - 4\sqrt{2}) \cdot (14\sqrt{2} - 14) - (6\sqrt{2} - 6) \cdot (20 - 10\sqrt{2})}{12 - 8\sqrt{2}} \\
 &= -\frac{[112\sqrt{2} - 112 - 112 + 56\sqrt{2}] - [120\sqrt{2} - 120 - 120 + 60\sqrt{2}]}{12 - 8\sqrt{2}} \\
 &= \frac{168\sqrt{2} - 224 - 180\sqrt{2} + 240}{12 - 8\sqrt{2}} = -\frac{16 - 12\sqrt{2}}{12 - 8\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{3 - 2\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $v$  – *konveks* çokgenin kenarları ve açıları eşit olduğundan Lorentz düzgündür (Şekil 5.16).



**Şekil 5.16**  $L^2$  de spacelike pozitif bölgesinde bulunan düzgün konveks çokgen.

## 6. BULGULAR

Öklid geometrisi en iyi bilinen metrik geometri olmasına rağmen birçok problemin çözümünde eksik kalması nedeniyle ilerleyen yıllarda farklı metrikler kullanılarak farklı geometriler oluşturulmuştur. Bunlardan biride Einstein'ın özel görelilik ilkesiyle ilişkili geometri olan Lorentz(Minkowski) geometrisidir.

Lorentz(Minkowski) düzlemindeki noktalar, doğrular Öklid düzlemindekiyle aynı ve açı ölçümü Öklid düzlemindekiyle aynı yolla yapılır. Fakat uzaklık fonksiyonu Öklid düzlemindekinden farklıdır. Bu nedenle uzaklık kavramını içeren konular Öklid ve Lorentz(Minkowski) geometrisinde farklı sonuçların ortaya çıkmasına neden olmaktadır.

Bu bağlamda bu tez çalışmasında;

Öklid ve Lorentz metrikleri arasındaki fonksiyonel ilişki doğru parçasının eğimine göre ifade edildi. Bu fonksiyonel ilişki kullanılarak Öklid düzlemindeki Thales bağıntısı, Menelaus ve Ceva teoremleri ile iç ve dış açıortay teoremlerinin Lorentz benzerleri elde edildi.

Lorentz uzaklığını koruyan Öklid düzleminin izometrilere hangileri olduğu ifade edildi.

Öklid düzlemindeki çemberlerin bazı özellikleri Lorentz(Minkowski) düzlemindeki çemberler için elde edildi.

Öklid düzgün çokgenlerinin Lorentz düzgünlüğünün nasıl bulunabileceği elde edildi.

Öklid düzlemindeki üçgenlerin çevrel, iç ve dış teğet çemberlerinin Lorentz(Minkowski) düzlemindeki benzerleri ve var olma koşulları oluşturuldu.

Lorentz(Minkowski) düzleminde düzgün çokgenlerin nasıl oluşturulabileceği ifade edildi.

## 7. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışması esas olarak, afin düzlemde tanıtılabilen iki geometrik sistemin, okuyucunun karşısına çıkan tanıtık Öklid geometrisi ve Einstein'ın özel görelilik ilkesiyle ilişkili geometri olan Lorentz(Minkowski) geometrisi karşılaştırmalı bir çalışmasına ayrılmıştır.

Bu tez çalışmasında; Öklid ve Lorentz metrikleri arasındaki fonksiyonel ilişki doğru parçasının eğimine göre ifade edildi. Bu fonksiyonel ilişki kullanılarak Öklid düzlemindeki Thales bağıntısı, Menelaus ve Ceva teoremleri ile iç ve dış açıortay teoremlerinin Lorentz benzerleri elde edildi. Lorentz uzaklığını koruyan Öklid düzleminin izometrilere hangileri olduğu ifade edildi. Öklid düzgün çokgenlerinin Lorentz düzgünlüğünün nasıl bulunabileceği elde edildi. Öklid düzlemindeki çemberin bazı özellikleri Lorentz(Minkowski) düzlemindeki çemberler için elde edildi. Öklid düzlemindeki üçgenlerin çevrel, iç ve dış teğet çemberlerinin benzerlerinin Lorentz(Minkowski) düzlemindeki var olma koşulları oluşturuldu. En son olarak Lorentz(Minkowski) düzleminde düzgün çokgenlerin nasıl oluşturulabileceği ifade edildi.

Bu çalışmanın sonrasında bu düzlemde bir üçgen için elde edilen çevrel çember, mimarlıkta kemerlerin yapılması hesaplamalarında kullanılabilir. Ayrıca Lorentz(Minkowski) uzayında, bu düzlemde düzgün çokgenlerin elde edilmesinden yola çıkarak düzgün çokyüzlüler araştırılabilir.

## 8. KAYNAKLAR

- Balcı M, 2020, Öklid Geometrisi, Palme Yayınevi, 442s, Ankara.
- Birman G S, Nomizu K, 1984, Trigonometry in lorentzian geometry, The American Mathematical Monthly, 91(9), 543–549.
- Birman G S, 2001, Support functions and integral formulas in the Lorentz plane, Journal of Geometry, 72, 11-17.
- Catoni F, Boccaletti D, Cannata R, Catoni V, Nichelatti E, Zampetti P, 2008, The Mathematics of Minkowski Space-Time, Birkhäuser Verlag AG, 267p, Basel.
- Duggal K L, Bejancu A, 1996, Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Springer Science + Business Media, 311p, Amsterdam.
- Fillastre F, 2014, Polygons of the Lorentzian plane and spherical simplexes, Elemente der Mathematik 69(3), 144–155.
- Fréchet M M, 1906, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 22, 1–74.
- Hacısalıhoğlu H H, 2010, Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler, Bilecik Üniversitesi Yayınları, 252s, Ankara.
- Hızarcı S, Kaplan A, İpek A S, Işık C, 2003, Euclid Geometri ve Özel Öğretimi, Aktif Yayınevi, 406s, Erzurum.
- Nešović E, Petrović-Torgašev M, 2003, Some trigonometric relations in the lorentzian plane, Kragujevac Journal of Mathematics, 33, 219– 225.
- O’neill B, 1983, Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity, Academic Press, 483p, London.
- Ratchliffe J G, 1994, Foundations of hyperbolic manifolds, Springer Verlag, 793p, Berlin.
- Shonoda E N, 2016, Classification of conics and Cassini curves in Minkowski space-time plane, Journal of Egyptian Mathematical Society, 24, 270-278.
- Stephen B, Vandenberghe L, 2004, Convex Optimization, Cambridge University Press, 730p, New York.
- Venema G A, 2012, The Foundations of Geometry 2nd Edition, Pearson Education, 407p, Boston.
- Yaglom I M, 1979, A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis, Springer-Verlag, 326p, New York.