

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

LORENTZ MATRİS ÇARPIMI VE DUAL MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ

ALİ DAĞDEVİREN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. SALİM YÜCE**

İSTANBUL, 2013

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ MATRİS ÇARPIMI VE DUAL MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ

Ali DAĞDEVİREN tarafından hazırlanan tez çalışması 04.02.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Bahçeşehir Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Yasemin ALAGÖZ

Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında sayı sistemleri hakkında temel bilgiler verilmiş ve Dual Uzaylar ve Dual Matrisler incelenmiş olup Lorentz Matris Çarpımı ile birlikte Dual Matrisler araştırılmıştır.

Bu çalışmam esnasında benden desteklerini esirgemeyen değerli hocam Sayın **Prof. Dr. Salim YÜCE** 'ye ve hocamız başkanlığında çalışmalarını sürdüren Geometri seminer grubuna sonsuz teşekkürlerimi bildiririm.

Ocak, 2013

Ali DAĞDEVİREN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
BÖLÜM 1	1
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	3
$\mathbb{R}_n^m$ UZAYINDA LORENTZ MATRİS ÇARPIMI	3
2.1 Reel Katsayılı Matrislerin Lorentz Çarpımı.....	3
BÖLÜM 3	7
DUAL UZAYLAR.....	7
3.1 Dual Sayılar.....	7
3.1.1 Dual Sayılar sistemi.....	7
3.1.2 Dual Vektör Uzayının Bazı.....	12
3.1.3 Dual Eşlenik.....	13
3.1.4 Norm	14
3.1.5 Çember	14
3.1.6 Dual Sayılarda Bölme	15
3.1.7 Dual Sayıların Kutupsal Gösterimi	16
3.1.8 Dual Sayıların Matris Gösterimi	16
3.1.9 Dual Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi	17

3.2	$\mathcal{D}^3$ Dual Uzayı	21
3.2.1	$\mathcal{D}^3$ Üzerinde Metrik	22
3.2.2	Dual Açık	28
3.2.3	$\mathbb{R}^3$ deki Yönlü Doğruların Dual Açığa Bağlı Olarak Durumları.....	31
3.2.4	$\mathcal{D}^3$ de Karma Çarpım	32
3.2.5	$\mathcal{D}^3$ de Vektörlerin Lineer Bağımsızlığı.....	32
3.3	$\mathcal{D}^n$ Dual Uzayı.....	33
3.4	$\mathcal{D}_I^3$ Uzayı.....	36
3.4.1	$\mathcal{D}_I^3$ de Açık	40
BÖLÜM 4		43
$\mathcal{D}_n^m$ DUAL MATRİS UZAYI.....		43
4.1	Dual Matrisler	43
4.2	Dual Matrislerde İşlemler	45
4.3	Özel Dual Matrisler	57
4.4	Dual Matrislerde Elemanter Satır (Sütun) İşlemleri	70
4.5	Dual Matrislerin Determinantı	72
4.6	Dual Determinantların Özellikleri	73
4.7	Dual Matrislerin Özdeğer ve Özvektörleri	87
BÖLÜM 5		88
$\mathbb{R}_n^m$ UZAYINDA LORENTZ MATRİS ÇARPIMININ ÖZELLİKLERİ		88
BÖLÜM 6		93
$\mathcal{D}_I^n$ n –BOYUTLU DUAL LORENTZ UZAYI		93
6.1	$\mathcal{D}_I^n$ Uzayı	93
BÖLÜM 7		96
DUAL LORENTZ MATRİS ÇARPIMI		96
7.1	Dual Katsayılı Matrislerin Lorentz Çarpımı	96
BÖLÜM 8		110
SONUÇ VE ÖNERİLER		110
KAYNAKLAR.....		111
EK-A		113
LİNEER CEBİR ve KOMPLEKS SAYILAR		113
A-2 Kompleks Sayılar.....		117
A-2-1 Sıradan Kompleks Sayılar		117

A-2-2 Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar	118
A-2-3 En Genel Kompleks Sayılar	119
EK-B	123
$\mathbb{R}_1^3$ ve $\mathbb{R}_1^n$ LORENTZ UZAYLARI	123
B-1 $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz Uzayı	123
B-2 $\mathbb{R}_1^n$ Lorentz Uzayı	127
B-3 $\mathbb{R}_1^n$ Lorentz Uzayında Matrisler	128
EK-C	129
ÜSTEL MATRİS FORMLARININ ÖZELLİKLERİ	129
C-1 Matrislerin Üstel Formlarının Özellikleri.....	129
ÖZGEÇMİŞ.....	134

SİMGE LİSTESİ

$\mathcal{D}$	Dual Sayılar Kümesi
$\mathcal{D}^3$	$\mathcal{D}$ -Modül
$\mathcal{D}_1^3$	Dual Lorentz Uzayı
$\mathcal{D}_n^m$	$m \times n$ -tipindeki Dual Matrislerin Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n -boyutlu Reel Vektörlerin Kümesi
$\mathbb{R}_n^m$	$m \times n$ -tipindeki Reel matrislerin Kümesi
L_n^m	Lorentz matris çarpımı ile $\mathbb{R}_n^m$ kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\langle, \rangle$	Öklid İç Çarpımı
$\langle, \rangle_L$	Lorentz İç Çarpımı
S^2	$\mathbb{R}^3$ de Birim Küre
S_1^2	$\mathbb{R}_1^3$ de Lorentzian Birim Küre
$S_{\mathcal{D}}^2$	$\mathcal{D}$ modülde Birim Küre
H_0^2	$\mathbb{R}_1^3$ de Hiperbolik Küre
$\ \parallel$	Norm
Λ	Null koni
I_n	$\mathbb{R}_n^n$ matris kümesinde birim matris
$\hat{I}_n$	$\mathcal{D}_n^n$ matris kümesinde birim dual matris
I_n^n	L_n^n matris kümesinde birim matris
$\hat{I}_n^n$	$\mathcal{D}L_n^n$ matris kümesinde birim dual matris

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3. 1 Dual Düzlem.....	11
Şekil 3. 2 Norm.....	14
Şekil 3. 3 Dual Çember.....	15
Şekil 3. 4 Doğrunun Vektörel Denklemleri.....	26
Şekil 3. 5 Moment Vektörü.....	28
Şekil 3. 6 Dual açının $\mathbb{R}^3$ uzayındaki geometrisi.....	29
Şekil B. 1 $\mathbb{R}_1^3$ de Lorentz ve Hiperbolik çember.....	124

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3. 1 Bazı Dual Fonksiyonlar.....	20

LORENTZ MATRİS ÇARPIMI VE DUAL MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ

Ali DAĞDEVİREN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu çalışma sekiz bölüm ve üç ek bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde literatür özeti ve tezin amacı belirtilmiştir. İkinci bölümde, $\mathbb{R}_n^m$ matris uzayında Lorentz matris çarpımı, üçüncü bölümde Dual uzaylar, dördüncü bölümde ise $\mathcal{D}_n^m$ Dual Matris Uzayı incelenmiştir.

Tezin orijinal kısımları olan beşinci, altıncı ve yedinci bölümlerinde ise sırasıyla; $\mathbb{R}_n^m$ matris uzayında Lorentz matris çarpımının özellikleri, $\mathcal{D}_1^n$ dual Lorentz uzayı, $\mathcal{D}_n^m$ matris uzayında Lorentz Matris çarpımı incelenmiştir.

Bununla birlikte, Ek-A, Ek-B, Ek-C ile verilen kısımlarda ise Genelleştirilmiş kompleks sayılar, Lorentz Uzayı ve Üstel Matrisler ile ilgili temel bilgiler ayrıntılı olarak verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dual Sayılar, Dual Uzaylar, Özel Dual Matrisler, Lorentz Matris Çarpımı

**PROPERTIES OF LORENTZ MATRIX MULTIPLICATION AND DUAL
MATRICES**

Ali DAĞDEVİREN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

This thesis are consisted of eight chapters and three appendix:

In first chapter, review of the literature and the aim of thesis are explained. In the second chapter, Lorentz matrix multiplication is given on $\mathbb{R}_n^m$ matrix space. In the third chapter, Dual Spaces are given. In the forth chapter, $\mathcal{D}_n^m$ Dual Matrix space is given.

In the fifth chapter, sixth chapter and seventh chapter chapter that are the original chapters of this thesis; the extras properties of Lorentz matrix multiplication on $\mathbb{R}_n^m$, Lorentz matrix multiplication on $\mathcal{D}_n^m$ are given, respectively.

Moreover ; More fundamental information are introduced about generalized complex numbers, Lorentz space, exponential matrices, respectively, in Appendix A, Appendix B, Appendix C.

Keywords: Dual Numbers, Dual Vectors, Dual Matrices, Dual matrices with Lorentz Matrix Multiplication

1.1 Literatür Özeti

Dual sayılar ilk olarak Clifford W.K. (1849-1879) tarafından geometrik araştırmalarda kullanılmıştır. Clifford'dan sonra E.Study (1860-1930) dual sayıları ve dual vektörleri doğrular geometrisinde ve kinematikte kullanmıştır. Ayrıca kendi adıyla bilinen bir dönüşüm tanımlamıştır. Bu dönüşüm, birim dual kürenin noktaları ile 3 boyutlu Öklid uzayındaki yönlü doğrular arasında birebir eşleme olduğunu göstermektedir, [1]. Bu çalışmanın ardından Dual sayılar ve Dual vektörler çok geniş bir çalışma alanına sahip olmuştur.

1996 yılında Uğurlu H.H. ve Çalışkan A. [2] tarafından yapılan çalışmada ise $\mathbb{R}^3$ yerine $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayı alınarak E.Study dönüşümü, " $\mathcal{D}_1^3$ de dual hiperbolik ve dual Lorentzian birim kürelerinin, dual timelike ve dual spacelike birim vektörleri ile $\mathbb{R}_1^3$ deki yönlü timelike ve spacelike birim vektörlerinin birebir eşleşir" şeklinde ifade edilmiştir, [2].

2010 yılında Kürüz F. [3] tarafından Prof. Dr. Salim Yüce danışmanlığında hazırlanan Lisans bitirme tezinde ise Özel dual matrisler incelenmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Tezin amacı, öncelikle Dual uzayı, Lorentz uzayı ve Lorentz matris çarpımı konularında temel bir kaynak oluşturmaktır. Ayrıca, dual matrislerde de Lorentz matris çarpımının

reel matrislerde olduğu gibi kullanılabilceğini göstererek literatürdeki bir eksikliği gidermektedir.

1.3 Hipotez

Lorentz uzayında matrislerin çarpımında, klid arpımı kullanıldığında özel matrisleri tanımlamada ε işaret matrisine gerek duyulmuştur (Bakınız Ek-B). Ancak [4] nolu çalışmada Lorentz matris çarpımı tanımlanarak, ε işaret matrisine gerek duyulmadan özel matrisler tanımlanabilmiştir. Böylece matris çarpımında kullanılan çarpım ile uzayın vektörleri için kullanılan i çarpımın uygunluğu sağlanmıştır.

Benzer olarak, dual katsayılı matrislerde, Dual-Lorentz uzayında matris işlemlerinde ε işaret matrisine ihtiyaç duyulmadan özel matrislerin tanımlanabileceği hedeflenmektedir.

BÖLÜM 2

$\mathbb{R}_n^m$ UZAYINDA LORENTZ MATRİS ÇARPIMI

Bu bölümde, [4] de verilen, $\mathbb{R}_n^m$ uzayında Lorentz matris çarpımı tanımlanacak ve bu çarpımla ilgili bazı özellikler incelenecektir. Bu bölümde geçen Lorentz iç çarpım ile ilgili temel kavramlara Ek-B bölümünde yer verilmiştir.

2.1 Reel Katsayılı Matrislerin Lorentz Çarpımı

$\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $X = (x_i)$, $Y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle, \rangle_L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle_L = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon $\mathbb{R}^n$ üzerinde pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyon ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Lorentz uzayı veya Minkowski uzayı denir ve genellikle L^n veya $\mathbb{R}_1^n$ ile gösterilir.

Şimdi bu iç çarpımını kullanarak satırlarını (sütunlarını) birer $\mathbb{R}_1^n$ Lorentz uzayında birer vektör olarak aldığımız matrislerde aşağıdaki Lorentz matris çarpımını verelim, [4] :

Tanım 2.1 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}_n^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}_p^n$ matrislerinin “ $\cdot_L$ ” ile gösterilen matris çarpımı,

$$A \cdot_L B = \left[\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} b_{jk} - a_{in} b_{nk} \right]_{m \times p}$$

şeklinde tanımlanır. Bu çarpma işlemine, A ve B matrislerinin **Lorentz matris çarpımı** veya kısaca **L - çarpımı** denir. Elde edilen $A \cdot_L B$ matrisi $m \times p$ -tipinde bir matristir.

A matrisinin i . satırı A_i ve B matrisinin j . satırı B^j olmak üzere, bu matris

$$A \cdot_L B = \begin{bmatrix} \langle A_1, B^1 \rangle_L & \langle A_1, B^2 \rangle_L & \cdots & \langle A_1, B^p \rangle_L \\ \langle A_2, B^1 \rangle_L & \langle A_2, B^2 \rangle_L & \cdots & \langle A_2, B^p \rangle_L \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle A_m, B^1 \rangle_L & \cdots & & \langle A_m, B^p \rangle_L \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca $\mathbb{R}_n^m$ uzayı üzerinde L - çarpımı ile L_n^m şeklinde göstereceğiz, [4].

Teorem 2.2

- 1) $\forall A \in L_n^m, B \in L_p^n, C \in L_r^p$ için $A \cdot_L (B \cdot_L C) = (A \cdot_L B) \cdot_L C$
- 2) $\forall A \in L_n^m, B, C \in L_p^n$ için $A \cdot_L (B + C) = (A \cdot_L B) + (A \cdot_L C)$
- 3) $\forall A, B \in L_n^m, C \in L_p^n$ için $(A + B) \cdot_L C = (A \cdot_L C) + (B \cdot_L C)$
- 4) $\forall k \in \mathbb{R}, A \in L_n^m, B \in L_p^n$ için $k(A \cdot_L B) = (kA) \cdot_L B = A \cdot_L (kB)$

özellikleri sağlanmaktadır, [4].

Tanım 2.3 L - çarpımına göre $n \times n$ -tipindeki L - **birim matrisi** I_n gösterilir ve

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & -1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

ile tanımlanır. Bu matriste köşegen üzerinde bulunan elemanlardan sadece sonuncusu -1 dir.

$\forall A \in L_n^m$ için $I_m \cdot_L A = A \cdot_L I_n = A$ olur.

Tanım 2.4 A $n \times n$ -tipinde bir matris olsun. $A_{\cdot L} B = B_{\cdot L} A = I_n$ olacak şekilde $n \times n$ - tipinde bir B matrisi varsa A matrisine L - **terslenebilir** matris adı verilir. Burada B matrisine A matrisinin L - **tersi (inversi)** denir ve A^{-1} ile ifade edilir, [4].

Tanım 2.5 $A = [a_{ij}] \in L_n^m$ matrisinin **transpozu** A^T ile gösterilir ve $A^T = [a_{ji}] \in L_m^n$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.6 Bir $A \in L_n^n$ matrisi verilsin. $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine L - **ortogonal matris** adı verilir.

Tanım 2.7 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}_n^n$ matrisinin L - **determinantı** $\det A$ ile gösterilir ve

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

ile tanımlanır. Burada S_n , $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin bütün permütasyonlarının kümesi ve $s(\sigma)$ da σ permütasyonlarının işaretidir, [4].

Teorem 2.8 $\forall A, B \in L_n^n$ için $\det(A_{\cdot L} B) = -\det A \cdot \det B$ dir.

İspat $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ ve $A_{\cdot L} B = C$ olsun. A matrisinin i . sütun matrisi A^i ve C matrisinin k . sütun matrisini C^k ile gösterelim. O halde,

$$C^k = b_{1k} A^1 + b_{2k} A^2 + \cdots - b_{nk} A^n, \quad 1 \leq k \leq n$$

yazılabilir. Buradan,

$$\det(A_{\cdot L} B) = \det \begin{bmatrix} b_{11} A^1 + b_{21} A^2 + \cdots - b_{n1} A^n, \\ b_{12} A^1 + b_{22} A^2 + \cdots - b_{n2} A^n, \\ \vdots \\ b_{1n} A^1 + b_{2n} A^2 + \cdots - b_{nn} A^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_n} -b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} \det \left[A^{\sigma(1)}, A^{\sigma(2)}, \dots, A^{\sigma(n)} \right] \\
&= - \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} \det \left[A^1, A^2, \dots, A^n \right] \\
&= - \det A \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} \\
&= - \det A \cdot \det B
\end{aligned}$$

bulunur, [4].

BÖLÜM 3

DUAL UZAYLAR

Bu bölümde, $\mathcal{D}$ Dual Sayılar, $\mathcal{D}^3$ dual uzayı, $\mathcal{D}^n$ dual uzayı ve $\mathcal{D}_1^3$ dual Lorentz uzayı incelenecektir.

3.1 Dual Sayılar

Bu kesimde dual sayılar ile ilgili temel kavramlar incelenecektir.

3.1.1 Dual Sayılar sistemi

Tanım 3.1 $\forall a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(a, a^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sıralı ikililerin kümesi $\mathcal{D}$ ile gösterilsin.

$\mathcal{D} = \{(a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R}\}$ kümesi üzerinde tanımlı olan,

Toplama: $(a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$

Çarpma: $(a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$

Eşitlik : $(a, a^*) = (b, b^*) \Leftrightarrow a = b, a^* = b^*$

" $\oplus$ ", " $\odot$ ", " $=$ " işlemleri ile birlikte $\mathcal{D}$ kümesine **dual sayılar sistemi**, $\forall (a, a^*) \in \mathcal{D}$ ikilisine de **dual sayı** denir, [5].

Teorem 3.2 $(\mathcal{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir birimli ve değişmeli halkadır.

İspat Öncelikle $(\mathcal{D}, \oplus)$ ikilisinin grup olduğu daha sonra da halka özelliklerinin sağlandığı gösterilmelidir.

i) $(\mathcal{D}, \oplus)$ ikilisi bir Abel grubudur.

$H_1: \oplus: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ şeklinde tanımlandığında $\mathcal{D}$ kümesi $\oplus$ işlemine göre kapalıdır.

$H_2: \oplus$ işleminin birleşme özelliği vardır. $\forall d_1, d_2, d_3 \in \mathcal{D}$ için

$$\begin{aligned}
 (d_1 \oplus d_2) \oplus d_3 &= ((a, a^*) \oplus (b, b^*)) \oplus (c, c^*) \\
 &= ((a+b), (a^*+b^*)) \oplus (c, c^*) \\
 &= ((a+b)+c, (a^*+b^*)+c^*) \\
 &= (a+b+c, a^*+b^*+c^*) \\
 d_1 \oplus (d_2 \oplus d_3) &= (a, a^*) \oplus ((b, b^*) \oplus (c, c^*)) \\
 &= (a, a^*) \oplus ((b+c), (b^*+c^*)) \\
 &= (a+(b+c), a^*+(b^*+c^*)) \\
 &= (a+b+c, a^*+b^*+c^*)
 \end{aligned}$$

olduğundan $(d_1 \oplus d_2) \oplus d_3 = d_1 \oplus (d_2 \oplus d_3)$ dir.

$H_3: \oplus$ işlemine göre $\mathcal{D}$ de bir 0 etkisiz elemanı vardır. $\forall d \in \mathcal{D}$ için $d \oplus 0 = 0 \oplus d = d$ olacak şekilde bir 0 etkisiz elemanı, $0 = (x, x^*)$ şeklinde ifade edilirse $d \oplus 0 = d$ ve $0 \oplus d = d$ için $0 = (x, x^*) = (0, 0) \in \mathcal{D}$ etkisiz elemanı elde edilir.

H_4 : $\oplus$ işlemine göre $\forall d \in \mathcal{D}$ için,

$d + d' = d' + d = 0$ olacak şekilde bir tek $d' = (x, x^*) \in \mathcal{D}$ ters elemanı vardır.

$d = (a, a^*) \in \mathcal{D}$ için $d' = (-a, -a^*) \in \mathcal{D}$ dir.

H_5 : $\oplus$ işleminin değişme özelliği vardır. $\forall d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ için

$$\begin{aligned} (d_1 \oplus d_2) &= ((a, a^*) \oplus (b, b^*)) \\ &= ((a+b, a^*+b^*)) = ((b+a, b^*+a^*)) \\ &= ((b, b^*) \oplus (a, a^*)) \\ &= (d_2 \oplus d_1) \end{aligned}$$

dir. Böylece $(\mathcal{D}, \oplus)$ ikilisi bir Abel grubudur.

ii) $\odot: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ iç işlemi için,

H_6 : $\odot: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ işlemi $\mathcal{D}$ de kapalıdır.

H_7 : $\odot$ işleminin birleşme özelliği $(d_1 \odot d_2) \odot d_3 = d_1 \odot (d_2 \odot d_3)$ şeklindedir.

H_8 : $\forall d_1, d_2, d_3 \in \mathcal{D}$ olmak üzere, $\odot$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği,

$$(A \oplus B) \odot C = (A \odot C) \oplus (B \odot C)$$

$$C \odot (A \oplus B) = (C \odot A) \oplus (C \odot B)$$

şeklindedir.

Bu özellikler ile $(\mathcal{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir halkadır, [5].

$H_9 : \forall d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ için $(d_1 \odot d_2) = (d_2 \odot d_1)$ olduğundan $(\mathcal{D}, \oplus, \odot)$ halkası bir **değişmeli** halkadır.

$H_{10} : \odot$ işleminde $\forall d \in \mathcal{D}$ için $(1,0) \odot d = d \odot (1,0) = d$ işlemiyle $(1,0)$ elemanı **etkisiz elemandır**.

Bu özellikler ile $(\mathcal{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir **birimli değişmeli halkadır**.

Teorem 3.3 $(\mathcal{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir.

İspat $\mathcal{D}^* = \mathcal{D} - \{0\}$ alınırsa $(\mathcal{D}^*, \odot)$ ikilisi grup aksiyomlarını sağlamadığı için $(\mathcal{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir. $(\mathcal{D}^*, \odot)$ ikilisinde her elemanın tersi yoktur. Örneğin $(0,1)$ elemanının tersi yoktur.

Teorem 3.4 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reel sayılar cismi $(\mathcal{D}, \oplus, \odot)$ dual sayılar halkasının bir alt kümesine izomorftur.

İspat $\mathcal{D}_I = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{D}$ kümesi olmak üzere $f : \mathcal{D}_I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu $(a,0) \rightarrow a$ olarak tanımladığımızda f lineerdir :

$d_1 = (a,0), d_2 = (b,0) \in \mathcal{D}$ olmak üzere,

$$f(d_1 \oplus d_2) = f(a+b,0)$$

$$= a+b$$

$$= f(a,0) + f(b,0)$$

$$= f(d_1) + f(d_2)$$

$$f(d_1 \odot d_2) = f(ab,0)$$

$$= ab$$

$$= f(a,0).f(b,0)$$

$$= f(d_1).f(d_2)$$

f birebirdir : $d_1=(a,0) \neq d_2=(b,0)$ ise $f(d_1) \neq f(d_2)$ dir.

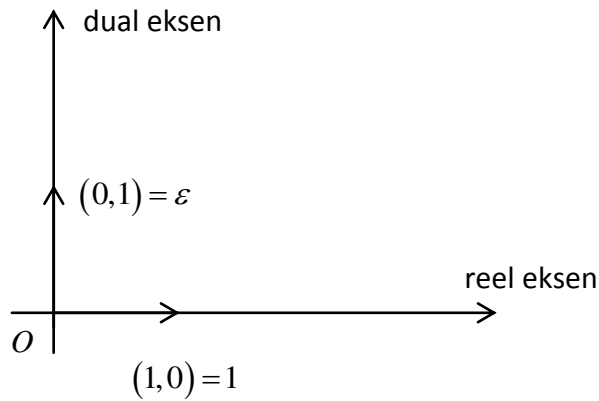
f örtendir : $\forall x \in \mathbb{R}$ reel sayısı için $f(x,0)=(x,0) \in \mathcal{D}$ dual sayısı bulunabilir.

O halde f lineer izomorfizmdir, [5].

Sonuç 3.5 f fonksiyonu bir izomorfizm olduğundan $(a,0) \in \mathcal{D}$ dual sayısı, izomorfu olan " a " reel sayısı ile gösterilebilir.

Tanım 3.6 $d=(a,a^*) \in \mathcal{D}$ dual sayısında $\text{Re}(d)=a$ ve $\text{Du}(d)=a^*$ dir. $\forall d \in \mathcal{D}$ sayılarının sistemine **Dual düzlem** denir. $(1,0)=1$ dual sayısına $\mathcal{D}$ nin **reel birimi** denir. $(0,1)=\varepsilon$ dual sayısına da $\mathcal{D}$ nin **dual birimi** denir.

Not 3.7 $(0,1) \odot (0,1) = \varepsilon \odot \varepsilon = \varepsilon^2 = (0,0)$ elde edilir. Ayrıca $\varepsilon \neq 0$ olmak üzere $\varepsilon^2 = \varepsilon^3 = \dots = \varepsilon^n = \dots = 0$ olduğu açıktır.



Şekil 3. 1 Dual Düzlem

Teorem 3.8 $\forall d \in \mathcal{D}$ dual sayısı $d = a + \varepsilon a^*$ formunda yazılabilir.

İspat $\forall d = (a, a^*) \in \mathcal{D}$ için $d = (a, 0) \oplus (0, a^*)$ yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} d &= (a, 0) \oplus ((0, 1) \odot (a^*, 0)) \\ &= a + \varepsilon a^* \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

O halde $\mathcal{D}$ dual sayılar kümesi, $\mathcal{D} = \{d = a + \varepsilon a^* \mid a, a^* \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$ şeklinde tanımlanabilir. $d_1 = a + \varepsilon a^*, d_2 = b + \varepsilon b^* \in \mathcal{D}$ için toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri,

$$d_1 + d_2 = (a + b) + \varepsilon(a^* + b^*)$$

$$d_1 \cdot d_2 = (a \cdot b) + \varepsilon(a \cdot b^* + a^* \cdot b)$$

$$d_1 = d_2 \Leftrightarrow a = b, a^* = b^*$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 3.9 Dual sayılar kümesi reel sayılar cisim üzerinde bir vektör uzayıdır.

İspat $(\mathcal{D}, \oplus)$ ikilisi bir abel grubudur. Ayrıca $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ cisim olduğundan $\{\mathcal{D}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı

$$\begin{aligned} \odot: \mathbb{R} \times \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ (\lambda, a + \varepsilon a^*) &\rightarrow (\lambda a) + \varepsilon(\lambda a^*) \end{aligned}$$

dış işlemiyle birlikte bir vektör uzayıdır, [5].

3.1.2 Dual Vektör Uzayının Bazı

Her $d = (a, a^*) \in \mathcal{D}$ için $d = a \cdot 1 + a^* \cdot \varepsilon$ olduğundan, $\mathcal{D} = sp\{1, \varepsilon\} = sp\{(1, 0), (0, 1)\}$ yazılabilir. Ayrıca $\{(1, 0), (0, 1)\}$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan $\{1, \varepsilon\}$ sistemi $\mathcal{D}$ için bir bazdır. O halde, $boy \mathcal{D} = 2$ dir, [5].

3.1.3 Dual Eşlenik

Tanım 3.10 $d = a + \varepsilon a^* \in \mathcal{D}$ dual sayısının eşleniği $\bar{d}$ ile gösterilir ve $\bar{d} = a - \varepsilon a^*$ ile tanımlanır.

Özellikler

- i) $d \in \mathcal{D}$ ise $\bar{d}$ nin dual eşleniği d dir. Yani $\overline{(\bar{d})} = d$ dir.
- ii) $\forall d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ için $\overline{d_1 + d_2} = \bar{d}_1 + \bar{d}_2$ dir.
- iii) $\forall d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ için $\overline{d_1 d_2} = \bar{d}_1 \bar{d}_2$ ve $d_2 \neq (0, x^*)$ olmak üzere $\overline{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)} = \frac{\bar{d}_1}{\bar{d}_2}$ dir.
- iv) $\forall d \in \mathcal{D}$ için $d \bar{d} = \|d\|^2$ dir.
- v) $d + \bar{d} = 2 \cdot \text{Re}(d)$, $d - \bar{d} = 2 \cdot \varepsilon \cdot \text{Du}(d)$ ve $d = \bar{d}$ ise $d \in \mathbb{R}$ dir.

Teorem 3.11 $\mathcal{D}$ üzerinde tanımlanan,

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : \mathcal{D} \times \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ (d_1, d_2) &\rightarrow d_1 \bar{d}_2 \end{aligned}$$

fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur. (Pozitif tanımlı değildir.)

İspat $d_1 = x_1 + \varepsilon x_1^*$ ve $d_2 = x_2 + \varepsilon x_2^*$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \langle d_1, d_2 \rangle &= d_1 \bar{d}_2 = (x_1 + \varepsilon x_1^*) \cdot (x_2 - \varepsilon x_2^*) \\ &= x_1 x_2 + \varepsilon (-x_1 x_2^* + x_1^* x_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Eşlenik-simetri özelliği : } \langle d_1, d_2 \rangle = \overline{\langle d_2, d_1 \rangle}$$

$$\text{Bilineerlik aksiyomu : } \langle d_1 + d_2, d_3 \rangle = \langle d_1, d_3 \rangle + \langle d_2, d_3 \rangle$$

$$\langle \lambda d_1, d_2 \rangle = \lambda \langle d_1, d_2 \rangle$$

$$\langle d_1, \lambda d_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle d_1, d_2 \rangle$$

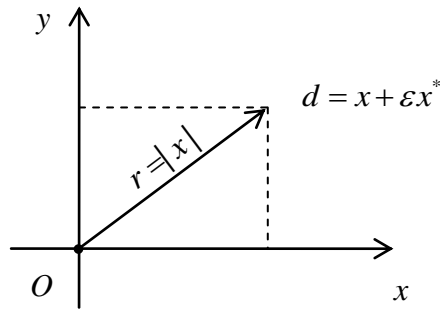
Pozitif tanımlılık : $d = x + \varepsilon x^*$ için $\langle d, d \rangle = d \cdot \bar{d} = x^2 > 0$ bulunur. $\langle d, d \rangle = 0$ iken $x = 0$ olduğu açıktır. Fakat x^* sıfır olmak zorunda değildir. Yani $d \neq 0$ olabilir.

3.1.4 Norm

Tanım 3.12 $d = x + \varepsilon x^*$ dual sayısının **normu** (O orijin noktasına olan uzaklığı)

$$\|d\| = \sqrt{\langle d, d \rangle} = \sqrt{d \cdot \bar{d}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

şeklinde tanımlanır, [6].



Şekil 3. 2 Norm

Normun özellikleri:

- 1) $\|d_1 \cdot d_2\| = \|d_1\| \cdot \|d_2\|$ dir.
- 2) $\|d_1 + d_2\| \leq \|d_1\| + \|d_2\|$ (Üçgen eşitsizliği) dir.

3.1.5 Çember

$\mathcal{D}$ Dual uzayda çember,

$$\mathcal{C} = \{d = x + \varepsilon x^* \in \mathcal{D} \mid \|d\| = 1\}$$

şeklinde tanımlanır. O halde,

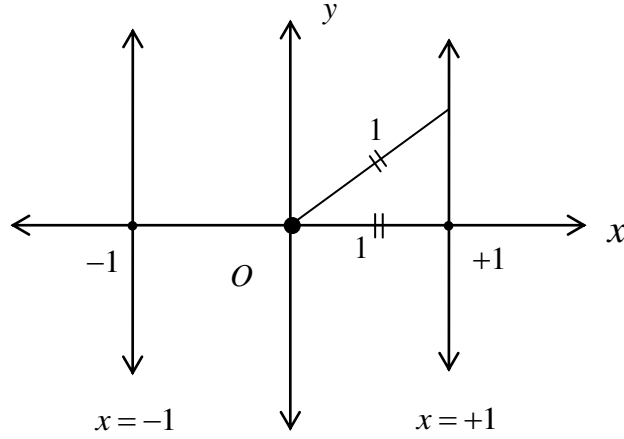
$d = x + \varepsilon x^*$ için $\|d\| = 1$ olmak üzere $\mathcal{D}$ üzerinde çember denklemi,

$$\mathcal{C} \dots |x| = 1$$

veya

$$\zeta \dots x = \pm 1$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 3. 3 Dual Çember

3.1.6 Dual Sayılarda Bölme

$d_1 = x + \varepsilon x^*$, $d_2 = y + \varepsilon y^* \in \mathcal{D}$ olmak üzere, dual sayılarda bölme işlemi, $y \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{d_2} &= \frac{x + \varepsilon x^*}{y + \varepsilon y^*} \\ &= \frac{(x + \varepsilon x^*) \cdot (y - \varepsilon y^*)}{(y + \varepsilon y^*) \cdot (y - \varepsilon y^*)} \\ &= \frac{xy + \varepsilon(-xy^* + x^*y)}{y^2} \\ &= \frac{x}{y} + \varepsilon \frac{-xy^* + x^*y}{y^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

3.1.7 Dual Sayıların Kutupsal Gösterimi

e^x in Maclourin açılımı $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ şeklindedir. Buradan,

$$e^{\varepsilon\varphi} = 1 + \varepsilon\varphi + \frac{(\varepsilon\varphi)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon\varphi)^3}{3!} + \dots$$

olmak üzere, $\varepsilon^2 = \varepsilon^3 = \dots = \varepsilon^n = \dots = 0$ için $e^{\varepsilon\varphi} = 1 + \varepsilon\varphi$ elde edilir.

elde edilir. Ayrıca, $d = x + \varepsilon y = x \left(1 + \varepsilon \frac{y}{x} \right)$ yazılabilir.

Burada $\|d\| = x$ ve $\varphi = \frac{y}{x}$ dir. (d dual sayısının normu x ve argümenti φ dir.)

Sonuç olarak ; $d = x + \varepsilon y = x \left(1 + \varepsilon \frac{y}{x} \right) = x(1 + \varepsilon\varphi)$ olup buradan $d = x.e^{\varepsilon\varphi}$ elde edilir.

3.1.8 Dual Sayıların Matris Gösterimi

$\mathcal{D} = \{d = a + \varepsilon a^* \mid a, a^* \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$ dual sayılar kümesinin, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ cismi üzerinde vektör uzayıdır. Ayrıca $\{1, \varepsilon\}$ standart bazına sahiptir.

$$\begin{aligned} f_d : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ w &\rightarrow d.w \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon

$$f_d(w_1 + w_2) = f_d(w_1) + f_d(w_2)$$

$$f_d(\lambda w) = \lambda f_d(w)$$

özelliklerini sağladığından lineerdir.

Her lineer dönüşüme bir matris karşılık geldiğinden ve Dual vektör uzayının bir bazı $\{1, \varepsilon\}$ olduğundan ;

$$f_d(1) = d.1 = a + \varepsilon.a^* = a.1 + a^*.\varepsilon$$

$$f_d(\varepsilon) = d \cdot \varepsilon = a \cdot \varepsilon + 0 = 0.1 + a \cdot \varepsilon$$

yazılabilir. O halde, f lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $f_d \leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix}$ şeklinde bulunur.

Özel durumlar

$$\text{i)} \quad d=1 = 1 + \varepsilon \cdot 0 \Rightarrow f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii)} \quad d = \varepsilon = 0 + \varepsilon \cdot 1 \Rightarrow f_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\text{iii)} \quad d=0 = \varepsilon = 0 + \varepsilon \cdot 0 \Rightarrow f_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Not 3.13 $\varepsilon^2 = 0$ eşitliğini ε a karşılık gelen matris yardımıyla da bulabiliriz.

$$\varepsilon^2 = \varepsilon \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

olduğu görülür.

3.1.9 Dual Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi

$$f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$$

$$d = x + \varepsilon x^* \rightarrow f(d) = w$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara dual değişkenli fonksiyonlar denir.

Burada, $\text{Re}(w) = u(x, x^*)$, $Du(w) = u^*(x, x^*)$ şeklinde tanımlı $u, u^*: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları alınırsa,

$$\begin{aligned}
f(d) = w &= u(x, x^*) + \varepsilon u^*(x, x^*) \\
&= u + \varepsilon u^*
\end{aligned}$$

yazılır.

Teorem 3.14 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere , $d^n = (x + \varepsilon x^*)^n = x^n + \varepsilon n x^* x^{n-1}$ dir.

İspat Tümevarım yöntemiyle ispatı yapabiliriz:

- $n=1$ için $d^1 = (x + \varepsilon x^*)^1 = x + \varepsilon 1 x^* x^{1-1}$ doğrudur.
- $n=k$ için $d^k = (x + \varepsilon x^*)^k = x^k + \varepsilon k x^* x^{k-1}$ kabul edelim.
- $n=k+1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
d^{k+1} &= d.d^k = (x + \varepsilon x^*). (x^k + \varepsilon k x^* x^{k-1}) \\
&= x^{k+1} + \varepsilon k x x^{k-1} x^* + \varepsilon x^* x^k + \varepsilon^2 x^n x^{k-1} x^* \\
&= x^{k+1} + \varepsilon (k x^k x^* + x^k x^*) \\
&= x^{k+1} + \varepsilon (k+1) x^k x^*
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak ; $(x + \varepsilon x^*)^n = x^n + \varepsilon n x^* x^{n-1}$ dir, [5].

Teorem 3.15 (Taylor Açılımı) $f(d)$ bir dual değişkenli fonksiyon olsun. $f(d)$ fonksiyonunun d_0 noktasındaki Taylor açılımı,

$$f(d) = f(d_0) + \frac{f'(d_0)}{1!} (d - d_0) + \frac{f''(d_0)}{2!} (d - d_0)^2 + \dots$$

şeklindedir.

$d_0 = 0$ alınırsa ,

$$f(d) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(d) + \frac{f''(0)}{2!}(d)^2 + \dots$$

bulunur.

$d = x + \varepsilon x^*$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f(x + \varepsilon x^*) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x + \varepsilon x^*) + \frac{f''(0)}{2!}(x + \varepsilon x^*)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x + \varepsilon x^*)^3 + \dots \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x + \varepsilon x^*) + \frac{f''(0)}{2!}(x^2 + 2\varepsilon x x^*) + \dots \\ &= \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots \right) + \varepsilon x^* \left(f'(0) + \frac{f''(0)}{1!}x + \dots \right) \end{aligned}$$

elde edilir, [5].

Sonuç 3.16 Dual değişkenli fonksiyonlar $f(x + \varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon x^* f'(x)$ şeklinde yazılabilir, [5].

Örnek 3.17 Bir dual sayının mutlak değeri;

$$|x + \varepsilon x^*| = |x| + \varepsilon x^* \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x + \varepsilon x^* & , \quad x \geq 0 \\ -(x + \varepsilon x^*) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

olduğundan, d bir dual sayı olmak üzere,

$$|d| = \begin{cases} d & , \quad \operatorname{Re}(d) > 0 \\ -d & , \quad \operatorname{Re}(d) < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

yazılabilir.

Sonuç 3.16 yardımıyla bazı dual fonksiyonlar, aşağıdaki tabloda verildiği şekilde ifade edilebilir.

Çizelge 3. 1 Bazı Dual Fonksiyonlar

Dual sin	$\sin \hat{\theta} = \sin \theta + \varepsilon \theta^* \sin \theta$
Dual cos	$\cos \hat{\theta} = \cos \theta - \varepsilon \theta^* \sin \theta$
Dual tan	$\tan \hat{\theta} = \tan \theta + \varepsilon \frac{\theta^*}{\cos^2 \theta}$
Dual cot	$\cot \hat{\theta} = \cot \theta - \varepsilon \frac{\theta^*}{\sin^2 \theta}$
Dual arcsin	$\arcsin \hat{\theta} = \arcsin \theta + \varepsilon \frac{\theta^*}{\sqrt{1-\theta^2}}$
Dual arccos	$\arccos \hat{\theta} = \arccos \theta - \varepsilon \frac{\theta^*}{\sqrt{1-\theta^2}}$
Dual arctan	$\arctan \hat{\theta} = \arctan \theta - \varepsilon \frac{\theta^*}{1+\theta^2}$
Dual kök fonksiyonu	$\sqrt{x + \varepsilon x^*} = \sqrt{x} + \varepsilon x^* \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3.2 $\mathcal{D}^3$ Dual Uzayı

$\mathcal{D}^3 = \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D} = \left\{ \vec{A} = (A_1, A_2, A_3) \mid A_i \in \mathcal{D} \ i=1,2,3 \right\}$ kümesini tanımlayalım. Bu küme üzerinde eşitlik, toplama ve dış işlem aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.18 (Eşitlik) $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3) \in \mathcal{D}^3$ olmak üzere iki vektörün eşitliği $\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow A_i = B_i \ (i=1,2,3)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.19 (Toplama) $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3) \in \mathcal{D}^3$ vektörlerinin toplamı $\vec{A} \oplus \vec{B} = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3) \in \mathcal{D}^3$ şeklinde tanımlanır ve $(\mathcal{D}^3, \oplus)$ ikilisi Abel grubudur. $\vec{0} = (0, 0, 0) \in \mathcal{D}^3$ birim elemandır, [5].

Tanım 3.20 (Dış işlem) $\forall \lambda \in \mathcal{D}$, $\forall \vec{A} = (A_i) \in \mathcal{D}^3$ için $\lambda \odot \vec{A} = (\lambda A_1, \lambda A_2, \lambda A_3) \in \mathcal{D}^3$ işlemini tanımlayalım. O halde,

$$\begin{aligned} \odot : \mathcal{D} \times \mathcal{D}^3 &\rightarrow \mathcal{D}^3 \\ (\lambda, \vec{A}) &\rightarrow \lambda \vec{A} \end{aligned}$$

bir dış işlemidir. Bu dış işlem ile birlikte $(\mathcal{D}^3, \oplus, \mathcal{D}, +, ., \odot) \equiv \mathcal{D}^3$ altılısı bir $\mathcal{D}$ -modüldür.

Tanım 3.21 $\mathcal{D}^3$ ün her bir elemanına bir **dual vektör** adı verilir.

Teorem 3.22 $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{D}^3$ dual vektörü, $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ şeklinde ifade edilir.

Burada $\vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ ve $\varepsilon \in \mathcal{D}$ dir.

İspat $\forall \vec{A} = (A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{D}^3$ için $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{D}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \vec{A} = (A_1, A_2, A_3) &= (a_1 + \varepsilon a_1^*, a_2 + \varepsilon a_2^*, a_3 + \varepsilon a_3^*) \\ &= (a_1, a_2, a_3) + (\varepsilon a_1^*, \varepsilon a_2^*, \varepsilon a_3^*) \\ &= (a_1, a_2, a_3) + \varepsilon (a_1^*, a_2^*, a_3^*) \\ &= \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \end{aligned}$$

elde edilir.

Not 3.23 $\forall \vec{A} \in \mathcal{D}^3$ vektörü $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ şeklinde yazılabilir.

$\mathcal{D}^3 = \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D} \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ olduğundan $\mathcal{D}^3$, 6 boyutludur. Bu yapı 3 reel kısımdan ve 3 dual kısımdan oluşmaktadır.

Sonuç 3.24 $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* = (\vec{a}, \vec{a}^*)$, $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* = (\vec{b}, \vec{b}^*) \in \mathcal{D}^3$ olsun. Böylece $\mathcal{D}$

üzerinde aşağıdaki işlemler,

$$\text{Eşitlik : } \vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \text{ ve } \vec{a}^* = \vec{b}^*$$

$$\begin{aligned} \text{Toplama : } \vec{A} + \vec{B} &= (\vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*) + (\vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*) \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) + \varepsilon (\vec{a}^* + \vec{b}^*) \end{aligned}$$

$$\text{Dış işlem : } \lambda \vec{A} = \lambda \vec{a} + \varepsilon \lambda \vec{a}^*, \lambda \in \mathcal{D}$$

şeklinde ifade edilebilir, [6].

Teorem 3.25 $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı, $\mathcal{D}$ -Modülün $(\vec{a}, \vec{0})$ elemanına sahip bir alt kümesine izomorftur.

İspat $M = \{(\vec{a}, \vec{0}) : \vec{a}, \vec{0} \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{a}, \vec{0}) &\rightarrow \vec{a} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu bir lineer izomorfizmdir. O halde $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı, $\mathcal{D}$ Modülün M şeklindeki bir alt kümesine izomorftur.

3.2.1 $\mathcal{D}^3$ Üzerinde Metrik

Tanım 3.26 (İç çarpım) $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ ve $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathcal{D}^3$ vektörleri için

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle (A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^3 A_i \cdot B_i \\
&= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \\
&= (a_1 + \varepsilon a_1^*)(b_1 + \varepsilon b_1^*) + (a_2 + \varepsilon a_2^*)(b_2 + \varepsilon b_2^*) + (a_3 + \varepsilon a_3^*)(b_3 + \varepsilon b_3^*) \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \varepsilon (a_1 b_1^* + a_2 b_2^* + a_3 b_3^*) + \varepsilon (a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + a_3^* b_3) \\
&= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle)$ şeklinde tanımlanan iç çarpım fonksiyonuna $\mathcal{D}^3$ üzerinde bir **iç çarpım fonksiyonu** denir. Burada $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ifadesi $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin Öklid iç çarpımıdır.

$\vec{A} \in \mathcal{D}^3$ vektörünün kendisiyle iç çarpımı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{a} \rangle) \\
&= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle
\end{aligned}$$

Eğer $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0$ ise $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ olmalıdır. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ eşitliğinden $\vec{a} = \vec{0}$ olduğu görülür. Ayrıca $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ eşitliğinde ise $\vec{a}^* = \vec{0}$ olmayabilir. O halde,

$\vec{A} = \vec{0}$ için $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0$ iken

$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0$ için $\vec{A} = \vec{0}$ olmayabilir. Bundan dolayı, $\mathcal{D}^3$ üzerinde tanımlı iç çarpım fonksiyonu pozitif tanımlı değildir.

Tanım 3.27 ($\mathcal{D}^3$ de Vektörel Çarpım) $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3) \in \mathcal{D}^3$ vektörlerinin vektörel çarpımı,

$$\wedge : \mathcal{D}^3 \times \mathcal{D}^3 \rightarrow \mathcal{D}^3 \quad \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ (\vec{A}, \vec{B}) \rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} \end{array} \right|$$

şeklinde tanımlanır. Buradan,

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1 - A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

bulunur. Ayrıca,

$A_i = a_i + \varepsilon a_i^*$, $B_i = b_i + \varepsilon b_i^* \in \mathcal{D}$ olmak üzere, iki dual vektörün vektörel çarpımı,

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon (\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b})$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada $\vec{a} \wedge \vec{b}$, $\mathbb{R}^3$ de $\vec{a}, \vec{b}$ vektörlerinin vektörel çarpımıdır, [7].

Tanım 3.28 ($\mathcal{D}^3$ de norm) $\vec{A} = \vec{a} + \vec{a}^* \in \mathcal{D}^3$ dual vektörünün normu $\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle}$

şeklinde tanımlanır. $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle$ olduğundan $\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}$

olur. Burada $\sqrt{x + \varepsilon x} = \sqrt{x} + \varepsilon x^* \frac{1}{2\sqrt{x}}$ eşitliği kullanılarak,

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}}$$

veya

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}$$

yazılabilir, [5].

Tanım 3.29 $\|\vec{A}\| = 1 + \varepsilon \cdot 0 = (1, 0) \in \mathcal{D}$ eşitliğini sağlayan dual vektöre **birim dual vektör**

(b.d.v) denir. $\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}} = 1 + \varepsilon \cdot 0$ ise $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ elde edilir.

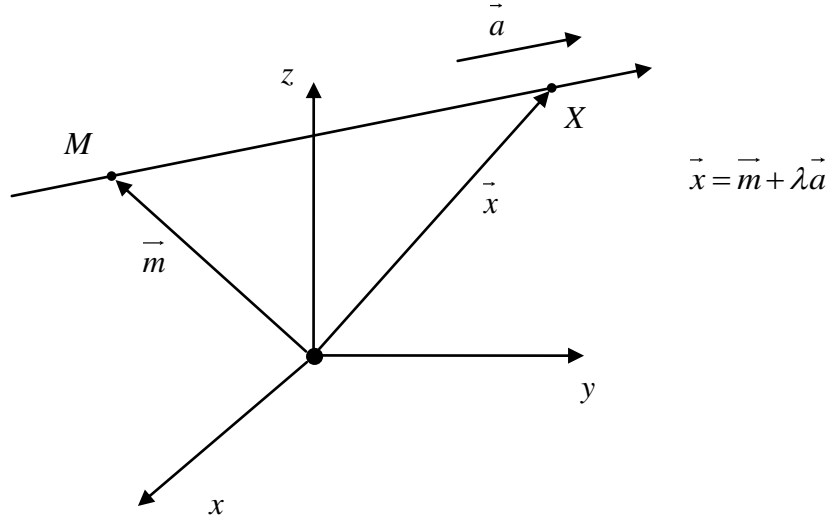
Sonuç 3.30 $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathcal{D}^3$ olmak üzere, $\|\vec{A}\| = (1, 0)$ olması için gerek ve yeter koşul $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ olmasıdır.

Tanım 3.31 $S^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ kümesine $\mathbb{R}^3$ de **birim küre** denir. Dual uzayda, $S_{\mathcal{D}}^2 = \{\vec{A} \in \mathcal{D}^3 : \|\vec{A}\| = (1, 0)\}$ kümesine $\mathcal{D}^3$ de **birim dual küre** denir, [5].

Not 3.32 $\mathbb{R}^3$ deki birim dual küre $\mathcal{D}^3$ deki birim dual kürenin bir alt kümesidir.

Teorem 3.33 (E.Study Dönüşümü) Birim dual kürenin noktaları ile $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrular birebir eşlenir. Yani $(\vec{a}, \vec{a}) = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ özelliğini sağlayan her $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual vektörüne, $\mathbb{R}^3$ de bir yönlü doğru; tersine $\mathbb{R}^3$ deki her yönlü doğruya da bir birim dual vektör karşılık gelir.

İspat $\mathbb{R}^3$ de bir doğru uzayın O orijin başlangıç noktasına göre üzerindeki bir M noktası ve doğrunun yönünü belirleyen $\vec{a}$ (birim vektör) doğrultman vektörü yardımıyla tanımlandığını biliyoruz. Doğrunun vektörel denklemi, $\vec{x} = \vec{m} + \lambda \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ yazılabilir. Sonuç olarak $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{m} \wedge \vec{a} = \vec{a}^*$ olup $\vec{a}^*$ vektörüne $\vec{a}$ vektörünün O orijin noktasına göre **vektörel momenti** denir.



Şekil 3.4 Doğrunun Vektörel Denklemi

$\vec{a}^*$ **Vektörünün Özellikleri:**

i) $\vec{a}^*$ vektörü doğru üzerindeki X noktasının seçilişinden bağımsızdır:

X noktasının yerine Y noktası alırsak,

$$\vec{y} = \vec{m} + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. Buradan

$$(\vec{y} - \vec{m}) \wedge \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} \wedge \vec{a} = \vec{m} \wedge \vec{a} = \vec{a}^*$$

bulunur. Böylece

$$\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{y} \wedge \vec{a} = \vec{m} \wedge \vec{a} = \vec{a}^*$$

yazılabilir.

ii) $\vec{a}$ ve $\vec{a}^*$ vektörleri ortogondir ($\vec{a} \perp \vec{a}^*$):

$$\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = \langle \vec{a}, \vec{m} \wedge \vec{a} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{m}, \vec{a}) = 0.$$

iii) $\vec{z} = \vec{a} \wedge \vec{a}^*$:

$$\vec{a} \wedge \vec{a}^* = \vec{a} \wedge (\vec{z} \wedge \vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \vec{z} - \langle \vec{a}, \vec{z} \rangle \vec{a} = \vec{z} \quad \text{elde edilir.}$$

iv) $\vec{a}^*$ vektörünün boyu O noktasının doğruya olan uzaklığına eşittir:

$\vec{a}^*$ vektörü doğru üzerinde seçilen bir X noktasından bağımsız olduğundan dolayı Z noktası O orijin noktasından doğruya inilen dikmenin ayağı olmak üzere,

$$\vec{z} \wedge \vec{a} = \vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{y} \wedge \vec{a} = \vec{m} \wedge \vec{a} = \vec{a}^*$$

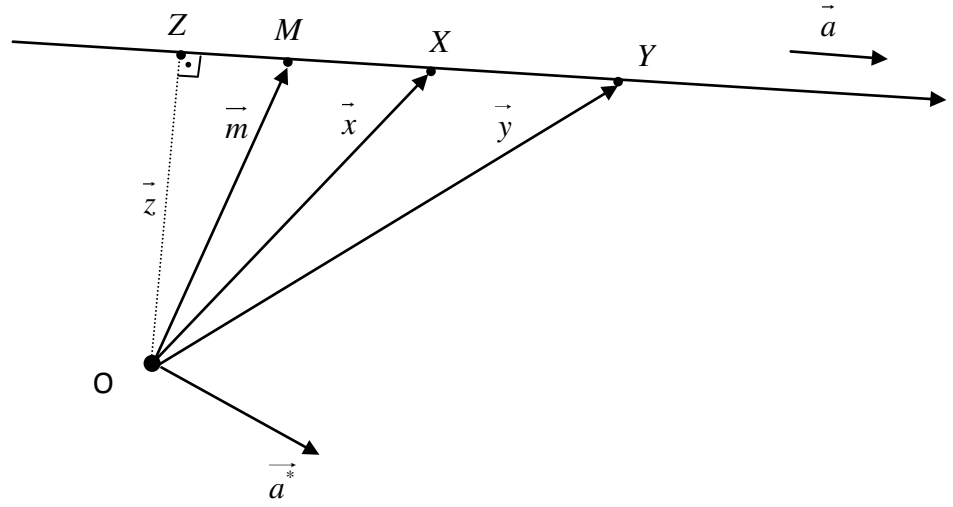
yazılabilir. Ayrıca $\vec{z} = \vec{a} \wedge \vec{a}^*$ olduğundan $\vec{z} \perp \vec{a}$ dır. O halde

$$\|\vec{z} \wedge \vec{a}\| = \|\vec{z}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \|\vec{a}^*\| \quad \text{olmak üzere } \|\vec{z}\| = \|\vec{a}^*\| = \delta \quad \text{elde edilir.}$$

Sonuç Olarak:

1) M noktasında geçen ve $\vec{a}$ doğrultman vektörlü d doğrusu verilmiş ise $\vec{a}^* = \vec{m} \wedge \vec{a}$ yardımıyla $\vec{a}^*$ vektörü bulunabilir.

2) $\vec{a}$ birim vektörü ve $\vec{a}$ nın O orijin noktasına göre vektörel momenti olan $\vec{a}^*$ vektörü verilsin. Yani $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ olsun. $\vec{a}$ birim vektörünü doğrunun doğrultman vektörü olarak seçersek ve $\vec{z} = \vec{a} \wedge \vec{a}^*$ yardımıyla doğru üzerindeki bir Z noktasının O orijin noktasına göre $\vec{z}$ konum vektörü bulunmuş olur. Böylece Z noktasından geçen ve $\vec{a}$ doğrultman vektörlü doğru elde edilir.



Şekil 3.5 Moment Vektörü

O halde, $\vec{x} = \vec{m} + \lambda \vec{a}$ doğrusu verilirse $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ olduğundan $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual vektörü bulunur. Tersine, $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual vektörü verilirse, yani $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ ise $\vec{A}$ birim dual vektörüne karşılık gelen $\mathbb{R}^3$ deki doğru $\vec{a}$ vektörünü doğrultman kabul eden ve $\vec{OZ} = \vec{z} = \vec{a} \times \vec{a}^*$ noktasından geçen doğrudur, [5].

3.2.2 Dual Açı

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ ve $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathcal{D}^3$ birim dual vektörlerini göz önüne alalım. E.Study dönüşümüne göre $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerine $\mathbb{R}^3$ de, sırasıyla, d_1 ve d_2 yönlü doğruları karşılık gelir.

d_1 doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{a}$, vektörel momenti $\vec{a}^*$ ve d_2 doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{b}$, vektörel momenti $\vec{b}^*$ olsun.

O halde, $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$, $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ ve $\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 1$, $\langle \vec{b}, \vec{b}^* \rangle = 0$ dır.

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \varphi = \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\varphi \in \mathbb{R}$ yazılır. Burada φ açısı $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki açıdır.

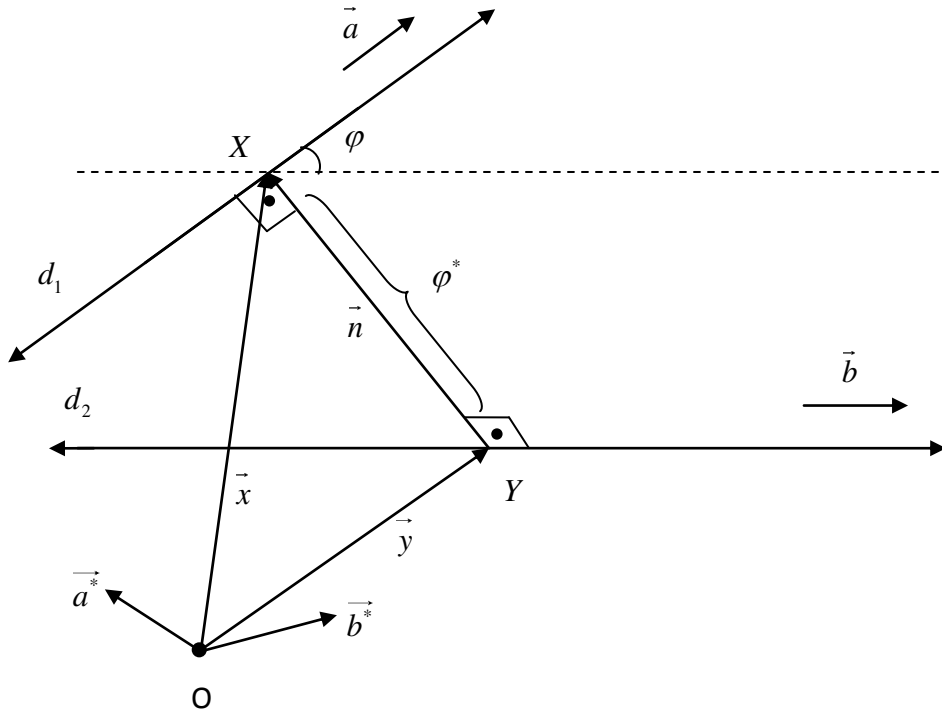
Ayrıca $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon \left(\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle \right)$ eşitliğinden,

(i) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ dual sayısının reel kısmı $\cos \varphi$ dir.

(ii) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ dual sayısının dual kısmı olan $\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle$ ifadesinin geometrik yorumu aşağıdaki gibidir;

$\vec{a}^*, \vec{b}^*$ moment vektörleri, sırasıyla, d_1 ve d_2 doğruları üzerindeki noktalardan bağımsız olduğundan, özel olarak d_1 ve d_2 doğrularının orta dikmesinin doğruları kestiği noktalar olan x ve y noktaları alınabilir. Yani , $\vec{a}^* = \vec{x} \times \vec{a}$ ve $\vec{b}^* = \vec{y} \times \vec{b}$ yazılabilir. d_1 ve d_2 doğrularının orta dikmesi üzerindeki birim vektör $\vec{n}$ olmak üzere ,

$\vec{n} = \pm \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$ yazılabilir.



Şekil 3.6 Dual açının $\mathbb{R}^3$ uzayındaki geometrisi

Ayrıca x ve y noktaları arasındaki uzaklık φ^* olmak üzere ;

$$\vec{x} - \vec{y} = \pm \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} \cdot \varphi^* \text{ yazılabilir. Ayrıca,}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{y} \times \vec{b} \rangle = -\langle \vec{y}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle$$

ve

$$\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle = \langle \vec{x} \times \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle - \langle \vec{y}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle$$

elde edilir. Buradan, iç çarpımın bilineerlik özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle &= \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle \\ &= \left\langle \pm \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} \cdot \varphi^*, \vec{a} \times \vec{b} \right\rangle \\ &= \pm \frac{\varphi^*}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle \\ &= \pm \varphi^* \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \varphi \\ &= \pm \varphi^* \sin \varphi \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \varphi \pm \varepsilon \varphi^* \sin \varphi$ elde edilir.

Yorum 3.34 $f(x + \varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon x^* f'(x)$ eşitliği yardımıyla,

$$\begin{aligned} \cos(x + \varepsilon x^*) &= \cos x + \varepsilon x^* (-\sin x) \\ &= \cos x - \varepsilon x^* \sin x \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle &= \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi \\
&= \cos(\varphi + \varepsilon \varphi^*) \\
&= \cos \Phi
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradaki Φ dual açısına $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki **dual açı** denir. $\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$, burada Φ nin reel kısmı φ olup $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ reel vektörleri arasındaki açıyı ; Φ nin dual kısmı da φ^* olup $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerine karşılık gelen $\mathbb{R}^3$ deki doğruların ortak dikme uzunluğunu belirtir, [5].

3.2.3 $\mathbb{R}^3$ deki Yönlü Doğruların Dual Açıya Bağlı Olarak Durumları

1) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos(\varphi + \varepsilon \varphi^*) = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi$ eşitliğinden $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ pure dual ise $\cos \varphi = 0$ dir. O halde $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bulunur. Ayrıca $\varphi^* \neq 0$ ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları birbirlerine dik olan aykırı doğrulardır.

2) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos(\varphi + \varepsilon \varphi^*) = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi$ eşitliğinden $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ sırf reel ise $\varphi^* \cdot \sin \varphi = 0$ olmalıdır. O halde,

- i. $\varphi^* = 0$ ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları düzlemsel ve kesişen doğrulardır.
- ii. $\sin \varphi = 0$ ise $\varphi = 0$ olur.

3) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 0$ ise $\cos \varphi = 0$ ve $\varphi^* \sin \varphi = 0$ olmalıdır.

$\cos \varphi = 0$ ifadesinden $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ve $\varphi^* \sin \varphi = 0$ ifadesinden de $\varphi^* = 0$ elde edilir.

Böylece $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğrularının aynı düzlemde birbirine dik olduğu görülür.

4) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 1 + \varepsilon \cdot 0$ ise $\cos \varphi = 1$ ve $\varphi^* \sin \varphi = 0$ dir.

$\cos \varphi = 1$ ifadesinden $\varphi = 0$ ve $\varphi^* \sin \varphi = 0$ ifadesinden de $\varphi^* = 0$ veya $\sin \varphi = 0$ elde edilir. Böylece $\varphi^* = 0$ ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları çakışık, aksi takdirde birbirlerine paraleldir, [5].

3.2.4 $\mathcal{D}^3$ de Karma Çarpım

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathcal{D}^3$ vektörlerinin karma çarpımı,

$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle = ((A_2 B_3 - A_3 B_2) C_1, (A_3 B_1 - A_1 B_3) C_2, (A_1 B_2 - A_2 B_1) C_3)$$

şeklinde tanımlıdır.

$A_i = a_i + \varepsilon a_i^*, B_i = b_i + \varepsilon b_i^*, C_i = c_i + \varepsilon c_i^* \in \mathcal{D}$ olmak üzere,

$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \varepsilon \left(\det(\vec{a}^*, \vec{b}, \vec{c}) + \det(\vec{a}, \vec{b}^*, \vec{c}) + \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}^*) \right)$$

eşitliği elde edilir, [7].

3.2.5 $\mathcal{D}^3$ de Vektörlerin Lineer Bağımsızlığı

Tanım 3.35 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathcal{D}^3$ ve $\lambda_i \in \mathcal{D}$ için

$$\lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B} + \lambda_3 \vec{C} = \vec{0}$$

iken $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ise $\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\}$ sistemi **lineer bağımsızdır** denir.

Not 3.36 V bir vektör uzayı olmak üzere $\vec{0} \neq \vec{\alpha} \in V$ için $\{\vec{\alpha}\}$ sistemi lineer

bağımsızdır. Fakat, $\vec{X} = \vec{0} + \varepsilon \vec{x}^* \in \mathcal{D}^3$ olmak üzere $\{\vec{X}\}$ sistemi $0 \neq \lambda = \varepsilon \in \mathcal{D}^3$ için

$$\lambda \vec{X} = \lambda \vec{0} + \lambda \varepsilon \vec{x}^* = 0 + \varepsilon^2 \vec{x}^* = \vec{0}$$

olduğundan $\{\vec{X}\}$ sistemi lineer bağımlıdır, [5].

Tanım 3.37 (Ortonormal Sistem) $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ birim dual vektörlerine, $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen doğrular bir noktada dik kesişiyorlarsa $\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\}$ sistemine **dual-ortonormal vektör sistemi** denir.

Teorem 3.38 $\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\}$ sistemi bir dual-ortogonal sistem ise lineer bağımsızdır.

İspat $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathcal{D}$ için

$$\lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B} + \lambda_3 \vec{C} = \vec{0} \quad (3.2)$$

iken $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ mıdır?

(3.2) eşitliğini $\vec{A}$ ile iç çarparsak $\langle \lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B} + \lambda_3 \vec{C}, \vec{A} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{A} \rangle$ bulunur. İç çarpımın bilineerlik özelliğinden ve $\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\}$ sistemi dual ortogonal sistem olduğundan $\lambda_1 = 0$ elde edilir. Benzer şekilde (3.2) eşitliğini $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ ile iç çarparsak $\lambda_2 = 0$ ve $\lambda_3 = 0$ bulunur, [5].

Tanım 3.39 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathcal{D}^3$ vektörleri,

i. Lineer bağımsız,

ii. $\mathcal{D}^3 = Sp\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\}$

özelliklerini sağlıyorsa, $\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\}$ sistemine $\mathcal{D}^3$ ün bir **bazı** denir.

3.3 $\mathcal{D}^n$ Dual Uzayı

$\mathcal{D}^n = \{\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n) \mid A_i \in \mathcal{D} \ i=1, 2, \dots, n\}$ kümesini tanımlayalım.

Tanım 3.40 (Toplama) $\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, \dots, B_n) \in \mathcal{D}^n$ vektörlerinin toplamı $\vec{A} \oplus \vec{B} = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, \dots, A_n + B_n) \in \mathcal{D}^n$ şeklinde tanımlanır ve $(\mathcal{D}^n, \oplus)$ ikilisi Abel grubudur. $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathcal{D}^n$ birim elemandır, [5].

Tanım 3.41 (Dış işlem) $\forall \lambda \in \mathcal{D}$, $\forall \vec{A} = (A_i) \in \mathcal{D}^n$ için

$\lambda \odot \vec{A} = (\lambda A_1, \lambda A_2, \dots, \lambda A_n) \in \mathcal{D}^n$ işlemini tanımlayalım.

$$\odot: \mathcal{D} \times \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^n$$

$$(\lambda, \vec{A}) \rightarrow \lambda \vec{A}$$

bir dış işlemdir.

Bir $\vec{A} \in \mathcal{D}^n$ dual vektörü iki reel vektörün dual kombinasyonu olarak, $\vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\vec{A} = (a_1 + \varepsilon a_1^*, a_2 + \varepsilon a_2^*, \dots, a_n + \varepsilon a_n^*)$$

$$= (a_1, a_2, \dots, a_n) + \varepsilon (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$$

$$= \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$$

şeklinde ifade edilir. O halde bu vektörlerin kümesi,

$$\mathcal{D}^n = \left\{ \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{a}^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

olarak yazılabilir. Dual vektörlerin bazı özelliklerini aşağıda sıralayalım:

- **Eşitlik:** $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$, $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathcal{D}^n$ olmak üzere $\vec{A} = \vec{B}$ ise $\vec{a} = \vec{b}$ ve $\vec{a}^* = \vec{b}^*$ elde edilir.

- **Dual Skaler ile Çarpma:** $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathcal{D}^n$ ve $\lambda \in \mathcal{D}$ olmak üzere,

$$\lambda \vec{A} = (\lambda A_1, \lambda A_2, \lambda A_3)$$

$$= \lambda a + \varepsilon (\lambda a^* + \lambda^* a)$$

yazılabilir.

- $\mathcal{D}^n$ de iç Çarpım: $\vec{A}, \vec{B} \in \mathcal{D}^n$ olmak üzere,

$$\langle, \rangle: \mathcal{D}^n \times \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$$

$$\begin{aligned} (\vec{A}, \vec{B}) &\rightarrow \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \sum_{i=1}^n A_i B_i \\ &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_n B_n \\ &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ iç çarpımı $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ vektörlerinin Öklid iç çarpımıdır.

- $\mathcal{D}^n$ de norm: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathcal{D}^n$ vektörünün normu,

$$\begin{aligned} \|\vec{A}\| &= \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle} \\ &= \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}, \quad \|\vec{a}\| \neq 0. \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

- **Birim Dual Vektör:** $\vec{A} \in \mathcal{D}^n$ olsun. $\|\vec{A}\| = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} = 1 + \varepsilon 0$ olması için

$$\|\vec{a}\| = 1 \text{ ve } \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0 \text{ olmalıdır.}$$

Bu özelliği sağlayan $\vec{A}$ vektörüne **birim dual vektör** denir.

- $\mathcal{D}^n$ 'de Lineer Bağımsızlık: $\vec{A}_i \in \mathcal{D}^n$ olmak üzere $\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n\}$ sistemi verilsin.

Eğer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathcal{D}$ için,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{A}_i = 0 + \varepsilon 0 = \vec{0}$$

iken $\lambda_i = 0$ ise $\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n\}$ sistemi **lineer bağımsızdır** denir, [7].

3.4 $\mathcal{D}_1^3$ Uzayı

$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3) = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathcal{D}^3$ vektörleri verilsin. $\vec{A}, \vec{B}$ dual vektörlerinin Lorentz iç çarpımı :

$$\begin{aligned} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L &= \langle (A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3) \rangle_L \\ &= A_1 B_1 + A_2 B_2 - A_3 B_3 \\ &= (a_1 + \varepsilon a_1^*)(b_1 + \varepsilon b_1^*) + (a_2 + \varepsilon a_2^*)(b_2 + \varepsilon b_2^*) - (a_3 + \varepsilon a_3^*)(b_3 + \varepsilon b_3^*) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3) + \varepsilon (a_1 b_1^* + a_2 b_2^* - a_3 b_3^* + a_1^* b_1 + a_2^* b_2 - a_3^* b_3) \\ &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L + \varepsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle_L + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle_L) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\vec{a}, \vec{a}^*, \vec{b}, \vec{b}^* \in \mathbb{R}_1^3$ olup $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L$ çarpımı $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz uzayında $\vec{a}, \vec{b}$ vektörlerinin Lorentz iç çarpımıdır. $\mathcal{D}^3$ dual uzayına Lorentz iç çarpımı ile birlikte dual Lorentz uzayı denir ve $\mathcal{D}_1^3$ ile gösterilir. $\mathcal{D}_1^3$ dual Lorentz vektörlerin kümesi, $\mathcal{D}_1^3 = \{ \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}_1^3 \}$ ile gösterilir.

Tanım 3.42 Bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektörünün normu $\|\vec{A}\| = \|\vec{a}\|_L + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle_L}{\|\vec{a}\|_L}$ şeklinde tanımlanır.

Not 3.43 $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathcal{D}_1^3$ vektörünün kendisiyle iç çarpımı,

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_L = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle_L \text{ dır.}$$

$$d \in \mathcal{D} \text{ için } |d| = \begin{cases} d & , \operatorname{Re}(d) > 0 \\ -d & , \operatorname{Re}(d) < 0 \end{cases}$$

olduğundan

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L > 0 \Leftrightarrow \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_L > 0 \text{ ve } \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L < 0 \Leftrightarrow \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_L < 0$$

yazılabilir.

O halde, $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathcal{D}_1^3$ vektörünün kendisiyle iç çarpımının pozitif mi yoksa negatif mi olduğu $\vec{A}$ vektörünün reel kısmı olan $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörüne bağlıdır.

Tanım 3.44 $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathcal{D}_1^3$ vektörü için,

- $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörü spacelike ise $\vec{A}$ **spacelike**,
- $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^3$ timelike ise $\vec{A}$ **timelike**
- $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^3$ lightlike ise $\vec{A}$ da **lightlike** vektörüdür.

Ayrıca zaman yönlendirmesi de, $\vec{A}$ timelike vektörü için $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^3$ future pointing ise $\vec{A}$ da future pointing ve $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^3$ past pointing ise $\vec{A}$ da past pointingdir denir, [2].

Tanım 3.45 $\mathcal{D}_1^3$ de bütün lightlike vektörlerin kümesi dual lightlike koni olarak ifade edilir.

Tanım 3.46 $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3) = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathcal{D}_1^3$ olsun.

Bu vektörlerin Lorentzian vektörel çarpımı ;

$$\vec{A} \wedge_L \vec{B} = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & -E_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \wedge_L \vec{b} + \varepsilon (\vec{a} \wedge_L \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge_L \vec{b})$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\vec{a} \wedge_L \vec{b}$, $\vec{a} \wedge_L \vec{b}^*$, $\vec{a}^* \wedge_L \vec{b}$ vektörel çarpımları $\mathbb{R}_1^3$ deki vektörel çarpımlardır. Ayrıca $E_1 \wedge_L E_2 = E_3$, $E_2 \wedge_L E_3 = -E_1$, $E_3 \wedge_L E_1 = -E_2$ dir, [2].

Teorem 3.47 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathcal{D}_1^3$ verilsin. O halde,

i) $\vec{A} \wedge_L \vec{B} = -\vec{B} \wedge_L \vec{A}$

ii) $\langle \vec{A} \wedge_L \vec{B}, \vec{C} \rangle_L = -\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$

$$\text{iii)} \quad (\vec{A} \wedge_L \vec{B}) \wedge_L \vec{C} = -\langle \vec{A}, \vec{C} \rangle_L \vec{B} + \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle_L \vec{A}$$

$$\text{iv)} \quad \langle \vec{A} \wedge_L \vec{B}, \vec{A} \rangle_L = 0 \quad \text{ve} \quad \langle \vec{A} \wedge_L \vec{B}, \vec{B} \rangle_L = 0 \quad \text{dır.}$$

$$\text{v)} \quad \langle \vec{A} \wedge_L \vec{B}, \vec{C} \wedge_L \vec{D} \rangle_L = -\langle \vec{A}, \vec{C} \rangle_L \cdot \langle \vec{B}, \vec{D} \rangle_L + \langle \vec{A}, \vec{D} \rangle_L \cdot \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle_L$$

$$\text{vi)} \quad \langle \vec{A} \wedge_L \vec{B}, \vec{A} \wedge_L \vec{B} \rangle_L = \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_L \cdot \langle \vec{B}, \vec{B} \rangle_L - \left(\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L \right)^2$$

$$\text{vii)} \quad (\vec{A} \wedge_L \vec{B}) \wedge_L \vec{C} + (\vec{B} \wedge_L \vec{C}) \wedge_L \vec{A} - (\vec{C} \wedge_L \vec{A}) \wedge_L \vec{B} = 0$$

İspat: Bu teoremdeki maddelerin ispatı, Lorentz iç çarpımı ve Lorentz vektörel çarpımı yardımıyla Ek-B de bulunan Teorem B.5 in ispatı gibi yapılabilir.

Tanım 3.48 $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathcal{D}_l^3$ verilsin.

i) $S_1^2 = \left\{ \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \|A\| = (1, 0); \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}_1^3; \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L > 0 \right\}$ ifadesine $\mathcal{D}_l^3$ de **dual Lorentz birim küre** adı verilir.

ii) $H_0^2 = \left\{ \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \|A\| = (1, 0); \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}_1^3; \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L < 0 \right\}$ ifadesine de $\mathcal{D}_l^3$ de **dual hiperbolik birim küre** adı verilir.

Dual hiperbolik birim kürenin iki bileşeni vardır. H_0^2 nin $(0, 0, 1)$ bileşeni future dual hiperbolik küre olup H_0^{+2} olarak ifade edilir. H_0^2 nin $(0, 0, -1)$ bileşeni ise past dual hiperbolik küre olarak ifade edilir ve H_0^{-2} ile gösterilir, [2].

Bu durumda H_0^{+2} ve H_0^{-2} ,

$$H_0^{+2} = \left\{ \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \|A\| = (1, 0); \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}_1^3 \text{ ve } \vec{a} \text{ f.p.t.l} \right\}$$

ve

$$H_0^{-2} = \left\{ \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \|A\| = (1, 0); \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}_1^3 \text{ ve } \vec{a} \text{ p.p.t.l} \right\}$$

yazılabilir.

Teorem 3.49 $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 1$ ($\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = -1$) ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle_L = 0$ olmak üzere, $\mathbb{R}_1^3$ uzayının spacelike(timelike) doğruları ile $(\vec{a}, \vec{a}^*)$ sıralı ikilisi arasında birebir eşleme vardır, [2].

İspat

i) $\mathbb{R}_1^3$ de bir spacelike doğru $\vec{x} = \vec{m} + \lambda \vec{a}$ ile verilebilir. Burada $\vec{a}$ doğrultman vektör olup bu doğru X noktasından geçmektedir. O halde $(\vec{x} - \vec{m}) \wedge_L \vec{a} = 0$ ifadesi $\vec{a}$ birim vektörü için de doğrudur. $\vec{x} \wedge_L \vec{a} = \vec{m} \wedge_L \vec{a} = \vec{a}^*$ olsun. $\vec{a}^*$ vektörüne $\vec{a}$ vektörünün O başlangıç noktasına göre “vektörel momenti” denir. Ayrıca bu vektör noktanın seçiminden bağımsızdır. $\vec{a}$ birim vektör olduğundan $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 1$ dir. Bununla beraber,

$$\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle_L = \langle \vec{a}, \vec{m} \wedge_L \vec{a} \rangle_L = \det(\vec{a}, \vec{m}, \vec{a}) = 0$$

İfadesinden $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle_L = 0$ olduğu görülür. Böylece bir spacelike doğrusu $(\vec{a}, \vec{a}^*)$ vektör ikilisi yardımıyla $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 1$, $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle_L = 0$ koşulları altında belirlenir.

$\mathcal{D}_1^3$ de $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual spacelike birim vektörünü göz önüne alalım. $\vec{A}$ birim spacelike vektör olduğundan $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_L = 1 + \varepsilon 0$ dir.

$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_L$ iç çarpımı kullanılırsa

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_L = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + \varepsilon (2 \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle_L) = 1 + \varepsilon 0$$

olup $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle_L = 0$ elde edilir. Böylece $\vec{a}$ doğrultman vektörlü ve $\vec{a} \wedge \vec{a}^*$ noktasından geçen spacelike doğrusunu belirlenmiş olur. $(\vec{a}, \vec{a}^*)$ vektör ikilisinin koordinatları, $\mathbb{R}_1^3$ de $\vec{A}$ spacelike doğrusunun plücker doğru koordinatları olarak ifade edilir.

ii) Yönlü doğrumuz timelike olsun. İspatın (i) seçeneğinde izlenen yolun burada da takip edilmesi durumunda; $\vec{a}$ nın $\vec{a}^*$ moment vektörü spacelike vektör olup $(\vec{a}, \vec{a}^*)$ vektör ikilisi yardımıyla timelike doğru tek olarak belirlenir.

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual spacelike vektörünün kendisiyle iç çarpımı,

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_L = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + \varepsilon \left(2 \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle_L \right) = -1$$

şeklindedir. Burada $\vec{A}$ dual timelike birim vektörü timelike bir doğru belirtir. Yani, timelike doğrumuz dual hiperbolik kürenin bir noktası ile eşleşir. $(\vec{a}, \vec{a}^*)$ vektör ikilisinin koordinatları, $\mathbb{R}_1^3$ de $\vec{A}$ timelike doğrusunun plücker doğru koordinatları olarak ifade edilir, [2].

3.4.1 $\mathcal{D}_l^3$ de Açı

Durum 1) $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ ve $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*$ dual spacelike birim vektörleri $\mathbb{R}_1^3$ uzayında, sırasıyla d_1 ve d_2 gibi iki tane spacelike doğru belirtirler. Lorentz iç çarpımı ile iki dual vektörün iç çarpımı,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L + \varepsilon \left(\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle_L + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle_L \right)$$

olarak verilmişti. Bu iç çarpımın reel kısmı

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L = \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi, \varphi \in \mathbb{R})$$

şeklinde olup dual kısmı ise

$$\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle_L + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle_L = -\varphi^* \cdot \sin \varphi$$

şeklindedir. Sonuç olarak,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \cdot \sin \varphi = \cos(\varphi + \varepsilon \varphi^*) = \cos \Phi$$

olur. Burada Φ açısının reel kısmı olan φ , iki doğru arasındaki açıyı ve φ^* ise bu iki doğru arasındaki uzaklığı verir.

Tanım 3.50 $\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ dual sayısına $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ dual spacelike birim vektörleri arasındaki **dual merkez açı** adı verilir. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ dual spacelike vektörlerinin uç noktaları

Lorentz birim küresi üzerinde A ve B noktalarını gösterebilir. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ dual spacelike birim vektörleri arasındaki $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açı S_1^2 üzerinde A ve B noktalarını birleştiren AB dual eğrisi olarak ifade edilebilir, [2].

Durum 2) $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ dual timelike birim vektörleri için,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L + \varepsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle_L + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle_L)$$

çarpımının reel kısmı

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\cosh \theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

ve dual kısmı ise

$$\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle_L + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle_L = -\theta^* \cdot \sinh \theta$$

şeklindedir. Sonuç olarak $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ nin Lorentz iç çarpımı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L = -\cosh \theta - \varepsilon\theta^* \cdot \sinh \theta = -\cosh(\theta + \varepsilon\theta^*) = -\cos \Theta$$

şeklindedir.

Tanım 3.51 $\Theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual sayısına, future pointing timelike olan $\vec{A}, \vec{B}$ vektörleri arasındaki **dual hiperbolik açı** adı verilir. Bu açının reel kısmı $\mathbb{R}_1^3$ de timelike iki doğru arasındaki açıyı ve dual kısmı ise bu iki doğru arasındaki uzaklığı ifade eder.

$\vec{A}, \vec{B}$ future pointing timelike vektörlerinin uç noktaları yani H_0^{+2} (veya H_0^{-2}) üzerine düşen noktaları A ve B dual noktaları olsun. $\Theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ açısı, H_0^{+2} (veya H_0^{-2}) üzerindeki bu A ve B noktalarının birleştirilmesiyle oluşan AB dual eğrisinin uzunluğu ile ilişkilidir, [2].

Tanım 3.52 $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ $\mathcal{D}_I^3$ de dual timelike vektörler olsunlar. Bu iki vektör arasındaki açı ;

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L = -\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cosh \Theta$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Theta = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual sayısına **dual hiperbolik açı** denir.

Tanım 3.53 $\vec{A}, \vec{B}$ dual vektörleri $\mathcal{D}_I^3$ de spacelike vektörler olsun. Ayrıca bu vektörler dual timelike alt uzayını gersinler. O halde $\vec{A}, \vec{B}$ vektörleri arasındaki açı ;

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cosh \Theta$$

şeklinde tanımlanır. Burada Θ dual sayısına **dual merkez açı** adı verilir.

Tanım 3.54 $\vec{A}, \vec{B}$ dual vektörleri $\mathcal{D}_I^3$ de spacelike vektörler olsunlar. Ayrıca bu vektörler dual spacelike alt uzayını gersinler. O halde $\vec{A}, \vec{B}$ vektörleri arasındaki açı ;

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \Theta$$

şeklinde tanımlanır. Burada Θ dual sayısına **dual spacelike açı** adı verilir.

Tanım 3.55 $\mathcal{D}_I^3$ de $\vec{A}$ bir dual spacelike ve $\vec{B}$ bir dual timelike vektörler olsunlar. Bu $\vec{A}, \vec{B}$ vektörleri arasındaki açı ;

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin \Theta$$

şeklinde tanımlanır. Burada Θ dual sayısına **dual Lorentzian timelike açı** adı verilir, [8].

BÖLÜM 4

$\mathcal{D}_n^m$ DUAL MATRİS UZAYI

Bu bölümde $m \times n$ -tipindeki dual matrisler ve özellikleri incelenecektir. Bu bölümün hazırlanmasında [3] ve [7] nolu kaynaklar referans alınmıştır.

4.1 Dual Matrisler

Tanım 4.1 Elemanları dual sayılar olan

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathcal{D} \quad \left(A_{ij} = a_{ij} + \varepsilon a_{ij}^* : a_{ij} \text{ ve } a_{ij}^* \in \mathbb{R} \right)$$

şeklindeki düzenli tabloya **m satırlı n sütunlu bir dual matris** veya kısaca $m \times n$ -tipinden **dual matris** denir. Bir $\hat{A}$ dual matrisi,

$$\begin{aligned} \hat{A} = [A_{ij}]_{m \times n} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + \varepsilon a_{11}^* & a_{12} + \varepsilon a_{12}^* & \cdots & a_{1n} + \varepsilon a_{1n}^* \\ a_{21} + \varepsilon a_{21}^* & a_{22} + \varepsilon a_{22}^* & \cdots & a_{2n} + \varepsilon a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + \varepsilon a_{m1}^* & a_{m2} + \varepsilon a_{m2}^* & \cdots & a_{mn} + \varepsilon a_{mn}^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix} \\
&= A + \varepsilon A^* \in \mathcal{D}_n^m, \quad A = [a_{ij}] \quad , \quad A^* = [a_{ij}^*] \in \mathbb{R}_n^m
\end{aligned}$$

şeklinde iki reel matrisin dual kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

Örnek 4.2 $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon.3 & 5-\varepsilon \\ 3 & \varepsilon.7 \\ -5-\varepsilon.2 & 2+\varepsilon.3 \end{bmatrix}$ matrisi 3×2 -tipinde bir dual matristir. Ayrıca bu

matris $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ şeklinde de gösterilebilir.

Tanım 4.3

- i) Bir tek satırdan oluşan dual matrise **satır dual matris** denir. $1 \times n$ -tipindedir.
- ii) Bir tek sütundan oluşan dual matrise **sütun dual matris** denir. $m \times 1$ -tipindedir.
- iii) Her elemanı $0 + \varepsilon 0$ olan dual matrise **sıfır dual matris** denir ve $0_{\mathcal{D}}$ ya da kısaca 0 ile gösterilir.

Örnek 4.4

- i) $[2-\varepsilon \quad 3 \quad 1+\varepsilon]$ matrisi 1×3 -tipinde bir satır dual matristir.
- ii) $\begin{bmatrix} 3+\varepsilon \\ 2-\varepsilon.4 \end{bmatrix}$ matrisi 2×1 -tipinde bir sütun dual matristir.
- iii) $\begin{bmatrix} 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 \\ 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 \end{bmatrix}$ matrisi 2×3 -tipinde bir sıfır dual matristir.

Tanım 4.5 Satır sayısı sütun sayısına eşit olan dual matrise **kare dual matris** denir. $n \times n$ -tipindedir.

Örnek 4.6 $\begin{bmatrix} 4-\varepsilon & 3+\varepsilon.7 \\ 5-\varepsilon.7 & \varepsilon.2 \end{bmatrix}$ matrisi 2×2 -tipinde bir kare dual matrisidir.

Tanım 4.7 $\hat{A} = [A_{ij}]$, $n \times n$ -tipinde bir kare dual matris ise $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$ elemanlarına $\hat{A}$ dual matrisinin **esas köşegen elemanları** denir.

Örnek 4.8 $\begin{bmatrix} 4-\varepsilon & 3+\varepsilon.7 \\ 5-\varepsilon.7 & \varepsilon.2 \end{bmatrix}$ matrisindeki $4-\varepsilon$ ile $\varepsilon.2$ elemanları bu matrisin esas köşegen elemanlarıdır.

Tanım 4.9 Bir kare dual matriste esas köşegen üzerindeki elemanlar $1+\varepsilon.0$ ve diğer elemanlar da $0+\varepsilon.0$ ise bu dual matrise **birim dual matris** denir. $n \times n$ -tipinde birim dual matris $\hat{I}_n$ ile gösterilir.

$$\hat{I}_n = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & \cdots & 0+\varepsilon.0 \\ 0+\varepsilon.0 & 1+\varepsilon.0 & \cdots & 0+\varepsilon.0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & \cdots & 1+\varepsilon.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

4.2 Dual Matrislerde İşlemler

Tanım 4.10 Karşılıklı elemanları eşit olan aynı mertebeden dual matrislere **eşit dual matrisler** denir.

$$\hat{A} = [A_{ij}] \text{ ve } \hat{B} = [B_{ij}] \in \mathcal{D}_n^m$$

$$\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow A_{ij} = B_{ij}$$

$$\Leftrightarrow a_{ij} + \varepsilon a_{ij}^* = b_{ij} + \varepsilon b_{ij}^*$$

$$\Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ ve } a_{ij}^* = b_{ij}^* \text{ elde edilir.}$$

Burada $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$, $\hat{B} = B + \varepsilon B^*$ olarak alınırsa $\hat{A} = \hat{B}$ ise $A = B$ ve $A^* = B^*$ elde edilir.

Tanım 4.11 Aynı mertebeden iki dual matrisin toplamı karşılıklı elemanların toplamıyla elde edilen aynı mertebeden bir dual matristir. Yani **iki dual matrisin toplamı**;

$$\hat{A} = [A_{ij}] = A + \varepsilon A^*, \quad \hat{B} = [B_{ij}] = B + \varepsilon B^* \in \mathcal{D}_n^m \text{ matrisleri için}$$

$$\hat{A} + \hat{B} = [A_{ij}] + [B_{ij}]$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} a_{11} + \varepsilon a_{11}^* & a_{12} + \varepsilon a_{12}^* & \cdots & a_{1n} + \varepsilon a_{1n}^* \\ a_{21} + \varepsilon a_{21}^* & a_{22} + \varepsilon a_{22}^* & \cdots & a_{2n} + \varepsilon a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + \varepsilon a_{m1}^* & a_{m2} + \varepsilon a_{m2}^* & \cdots & a_{mn} + \varepsilon a_{mn}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} + \varepsilon b_{11}^* & b_{12} + \varepsilon b_{12}^* & \cdots & b_{1n} + \varepsilon b_{1n}^* \\ b_{21} + \varepsilon b_{21}^* & b_{22} + \varepsilon b_{22}^* & \cdots & b_{2n} + \varepsilon b_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} + \varepsilon b_{m1}^* & b_{m2} + \varepsilon b_{m2}^* & \cdots & b_{mn} + \varepsilon b_{mn}^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} + \varepsilon a_{11}^* + \varepsilon b_{11}^* & a_{12} + b_{12} + \varepsilon a_{12}^* + \varepsilon b_{12}^* & \cdots & a_{1n} + b_{1n} + \varepsilon a_{1n}^* + \varepsilon b_{1n}^* \\ a_{21} + b_{21} + \varepsilon a_{21}^* + \varepsilon b_{21}^* & a_{22} + b_{22} + \varepsilon a_{22}^* + \varepsilon b_{22}^* & \cdots & a_{2n} + b_{2n} + \varepsilon a_{2n}^* + \varepsilon b_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} + \varepsilon a_{m1}^* + \varepsilon b_{m1}^* & a_{m2} + b_{m2} + \varepsilon a_{m2}^* + \varepsilon b_{m2}^* & \cdots & a_{mn} + b_{mn} + \varepsilon a_{mn}^* + \varepsilon b_{mn}^* \end{bmatrix} \\ &= \left[(a_{ij} + b_{ij}) + \varepsilon (a_{ij}^* + b_{ij}^*) \right] \\ &= (A + B) + \varepsilon (A^* + B^*). \end{aligned}$$

Tanım 4.12 $\hat{A}$ bir dual matris ve λ bir skaler olmak üzere $\lambda \hat{A}$ **skaler çarpımı**, $\hat{A}$ matrisinin her elemanının λ ile çarpılmasıyla oluşan bir matristir.

$$\lambda \in \mathcal{D}, \quad \hat{A} = [A_{ij}] = A + \varepsilon A^* \in \mathcal{D}_n^m \text{ olmak üzere,}$$

$$\lambda \cdot \hat{A} = \lambda [A_{ij}] = [\lambda \cdot A_{ij}] = [\lambda (a_{ij} + \varepsilon a_{ij}^*)] = [\lambda a_{ij}] + \varepsilon [\lambda a_{ij}^*] = \lambda A + \varepsilon \lambda A^*$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.13 Aynı mertebeden **iki dual matrisin farkı** karşılıklı elemanların farkıyla elde edilen, aynı mertebeden bir dual matristir.

$$\hat{A} = [A_{ij}] = A + \varepsilon A^*, \quad \hat{B} = [B_{ij}] = B + \varepsilon B^* \in \mathcal{D}_n^m \quad \text{matrislerinin farkı}$$

$$\begin{aligned} \hat{A} - \hat{B} &= [A_{ij}] - [B_{ij}] \\ &= [A_{ij}] + (-1)[B_{ij}] = [A_{ij} - B_{ij}] \end{aligned}$$

veya

$$\hat{A} - \hat{B} = (A - B) + \varepsilon (A^* - B^*)$$

şeklindedir.

Teorem 4.14 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ aynı mertebeden dual matrisler ve d_1, d_2 birer dual sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

- i) $\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$ (değişme özelliği)
- ii) $\hat{A} + (\hat{B} + \hat{C}) = (\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C}$ (birleşme özelliği)
- iii) $\hat{A} + 0 = \hat{A}$
- iv) $\hat{A} - \hat{A} = 0$
- v) $d_1(\hat{A} + \hat{B}) = d_1\hat{A} + d_1\hat{B}$
- vi) $(d_1 + d_2)\hat{A} = d_1\hat{A} + d_2\hat{A}$
- vii) $(d_1d_2)\hat{A} = d_1(d_2\hat{A})$

Tanım 4.15 $\hat{A} = [A_{ij}]$, $n \times p$ -tipinde bir dual matris ve $\hat{B} = [B_{ij}]$ $p \times m$ -tipinde bir dual matris olsun. O halde,

$$\hat{A} = [A_{ij}] = A + \varepsilon A^* \in \mathcal{D}_p^n, \quad \hat{B} = [B_{jk}] = B + \varepsilon B^* \in \mathcal{D}_m^p \quad \text{ve}$$

$$A_{ij} = a_{ij} + \varepsilon a_{ij}^*, \quad B_{jk} = b_{jk} + \varepsilon b_{jk}^*; \quad a_{ij}, a_{ij}^* \in \mathbb{R}_p^n, \quad b_{jk}, b_{jk}^* \in \mathbb{R}_m^p$$

$$A = [a_{ij}], \quad A^* = [a_{ij}^*], \quad B = [b_{jk}], \quad B^* = [b_{jk}^*]$$

olmak üzere,

$$\hat{A}.\hat{B} = [A_{ij}][B_{jk}] = \left[\sum_{j=1}^p A_{ij} B_{jk} \right]_{n \times m} = \left[\sum_{j=1}^p ((a_{ij} + \varepsilon a_{ij}^*)(b_{jk} + \varepsilon b_{jk}^*)) \right]_{n \times m}$$

ifadesine $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ matrislerinin **arpımı** denir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \hat{A}.\hat{B} &= \left[\sum_{j=1}^p (a_{ij} b_{jk} + \varepsilon (a_{ij} b_{jk}^* + a_{ij}^* b_{jk})) \right]_{n \times m} \\ &= \left[\sum_{j=1}^p a_{ij} b_{jk} \right]_{n \times m} + \varepsilon \left[\sum_{j=1}^p (a_{ij} b_{jk}^* + a_{ij}^* b_{jk}) \right]_{n \times m} \\ &= A.B + \varepsilon (AB^* + A^*B) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.16 $\hat{A} \in \mathcal{D}_n^m$, $\hat{B}, \hat{C} \in \mathcal{D}_r^n$, $\hat{D} \in \mathcal{D}_t^r$ ve $\lambda \in \mathcal{D}$ için

- i) $\hat{A}(\hat{B}.\hat{D}) = (\hat{A}.\hat{B}).\hat{D}$
- ii) $\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}.\hat{B} + \hat{A}.\hat{C}$
- iii) $(\hat{B} + \hat{C}).\hat{D} = \hat{B}.\hat{D} + \hat{C}.\hat{D}$
- iv) $\lambda(\hat{A}.\hat{B}) = (\lambda\hat{A}).\hat{B} = \hat{A}(\lambda\hat{B})$
- v) $\hat{A}.0 = 0$
- vi) Genellikle $\hat{A}.\hat{B} \neq \hat{B}.\hat{A}$ dir.

özellikleri sağlanır.

İspat

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \hat{A} \cdot (BD + \varepsilon(BD^* + B^*D)) &= ABD + \varepsilon A(BD^* + B^*D) + A^*BD \\ &= ABD + \varepsilon(ABD^* + AB^*D + A^*BD) \end{aligned} \quad (4.1)$$

ve

$$\begin{aligned} (AB + \varepsilon(AB^* + A^*B)) \cdot \hat{D} &= ABD + \varepsilon(ABD^* + (AB^* + A^*B)D) \\ &= ABD + \varepsilon(ABD^* + AB^*D + A^*BD) \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. Buradan (4.1) ve (4.2) denklemlerinin eşit olduğu görülür.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \hat{A} \cdot ((B+C) + \varepsilon(B^* + C^*)) &= A(B+C) + \varepsilon(A(B^* + C^*) + A^*(B+C)) \\ &= (AB + AC) + \varepsilon(AB^* + AC^*) + (A^*B + A^*C) \end{aligned} \quad (4.3)$$

ve

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C} &= AB + \varepsilon(AB^* + A^*B) + AC + \varepsilon(AC^* + A^*C) \\ &= (AB + AC) + \varepsilon(AB^* + A^*B + AC^* + A^*C) \end{aligned} \quad (4.4)$$

olmak üzere (4.3) ve (4.4) denklemlerinin eşit olduğu görülür.

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad (\hat{B} + \hat{C}) \hat{D} &= ((B+C) + \varepsilon(B^* + C^*)) \hat{D} \\ &= (B+C)D + \varepsilon((B+C)D^* + (B^* + C^*)D) \\ &= (BD + CD) + \varepsilon(BD^* + CD^* + B^*D + C^*D) \end{aligned} \quad (4.5)$$

ve

$$\begin{aligned} \hat{B}\hat{D} + \hat{C}\hat{D} &= BD + \varepsilon(BD^* + B^*D) + CD + \varepsilon(CD^* + C^*D) \\ &= BD + CD + \varepsilon(BD^* + B^*D + CD^* + C^*D) \end{aligned} \quad (4.6)$$

olmak üzere (4.5) ve (4.6) denklemlerinin eşit olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
 \text{iv)} \quad \lambda(\hat{A}\hat{B}) &= \lambda(AB + \varepsilon(AB^* + A^*B)) \\
 &= \lambda AB + \varepsilon\lambda(AB^* + A^*B)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

ve

$$\begin{aligned}
 (\lambda\hat{A})\hat{B} &= (\lambda A + \varepsilon\lambda A^*)\hat{B} \\
 &= \lambda AB + \varepsilon(\lambda AB^* + \lambda A^*B) \\
 &= \lambda AB + \varepsilon\lambda(AB^* + A^*B)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \hat{A}(\lambda\hat{B}) &= \hat{A}(\lambda B + \varepsilon\lambda B^*) \\
 &= \lambda AB + \varepsilon(A\lambda B^* + A^*\lambda B) \\
 &= \lambda AB + \varepsilon\lambda(AB^* + A^*B)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

bulunur. O halde (4.7), (4.8) ve (4.9) denklemlerinin birbirlerine eşit oldukları görülür.

$$\text{v)} \quad (A + \varepsilon A^*)(0 + \varepsilon 0) = A.0 + \varepsilon(A.0 + A^*.0) = 0 + \varepsilon 0 = 0$$

Teorem 4.17 Dual matrisler kümesi, matrislerde toplama işlemine göre bir değişmeli gruptur.

İspat

i) Tanım 4.11 den dolayı Dual matrisler, matrislerde toplama işlemine göre **kapalıdır**.

ii) $\hat{A} = A + \varepsilon.A^*, \hat{B} = B + \varepsilon.B^* \in \mathcal{D}_n^m$ için;

$$\begin{aligned}
\hat{A} + \hat{B} &= (A + \varepsilon.A^*) + (B + \varepsilon.B^*) \\
&= A + \varepsilon.A^* + B + \varepsilon.B^* \\
&= (A + B) + \varepsilon.(A^* + B^*) \\
&= (B + A) + \varepsilon.(B^* + A^*) \\
&= B + \varepsilon.B^* + A + \varepsilon.A^* \\
&= \hat{B} + \hat{A}
\end{aligned}$$

bulunur. O halde, dual matrislerde toplama işlemine göre **değişme özelliği** vardır.

iii) $\hat{A} = A + \varepsilon.A^*$, $\hat{B} = B + \varepsilon.B^*$ ve $\hat{C} = C + \varepsilon.C^* \in \mathcal{D}_n^m$ için;

$$\begin{aligned}
(\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C} &= (A + \varepsilon.A^* + B + \varepsilon.B^*) + (C + \varepsilon.C^*) \\
&= A + \varepsilon.A^* + B + \varepsilon.B^* + C + \varepsilon.C^* \\
&= (A + \varepsilon.A^*) + (B + \varepsilon.B^* + C + \varepsilon.C^*) \\
&= \hat{A} + (\hat{B} + \hat{C})
\end{aligned}$$

bulunur. O halde, dual matrislerde toplama işlemine göre **birleşme özelliği** vardır.

iv) $\hat{A} = A + \varepsilon.A^*$, $\hat{E} = E + \varepsilon.E^* \in \mathcal{D}_n^m$ için;

$\hat{A} + \hat{E} = \hat{E} + \hat{A} = \hat{A}$ olacak şekilde bir $\hat{E} = E + \varepsilon.E^* \in \mathcal{D}_n^m$ matrisinin varlığını inceleyelim:

- $\hat{A} = \hat{A} + \hat{E}$ eşitliğinden,

$$A + \varepsilon.A^* = A + \varepsilon.A^* + E + \varepsilon.E^*$$

$$A + \varepsilon.A^* = (A + E) + \varepsilon.(A^* + E^*)$$

yazılabilir. Buradan $A + E = A$ ve $A^* + E^* = A^*$ elde edilir. O halde, $E = 0$ $E^* = 0$
 $\in \mathbb{R}_n^m$ bulunur.

- $\hat{A} = \hat{E} + \hat{A}$ eşitliğin diğer tarafı da benzer şekilde gösterilir.

O halde dual matrisler kümesinin, matrislerde toplama işlemine göre **etkisiz elemanı**

$\hat{E} = [0]_{n \times m} \in \mathcal{D}_n^m$ matrisidir.

- v) $\hat{A} + \hat{B} = \hat{E}$ olacak şekilde bir $\hat{B} \in \mathcal{D}_n^m$ matrisinin varlığını araştıralım,

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} &= A + \varepsilon.A^* + B + \varepsilon.B^* = 0 + \varepsilon.0 \\ &= (A + B) + \varepsilon.(A^* + B^*) = 0 + \varepsilon.0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $A + B = 0$ ve $A^* + B^* = 0$ olduğundan $B = -A$ ve $B^* = -A^*$ elde edilir. O halde,

$$\hat{B} = (-A) + \varepsilon.(-A^*) = -\hat{A}$$

matrisi Dual matrisler kümesindeki herhangi bir $\hat{A}$ matrisinin matrislerde toplama işlemine göre **tersidir**.

O halde, dual matrisler kümesi matrislerde toplama işlemine göre **değişmeli bir gruptur**.

Teorem 4.18 Dual matrisler kümesi, matrislerde toplama ve çarpma işlemlerine göre birimli bir halkadır.

İspat Dual matrislerin değişmeli grup olduğu ve matrislerde çarpma işlemine göre birleşme özelliğinin varlığı gösterilmelidir. Ayrıca, matrislerde çarpma işleminin matrislerde toplama işlemi üzerine dağılma özelliği ve çarpma işlemine göre birim elemanının varlığı gösterilirse dual matrislerin birimli bir halka olduğu söylenir.

- i) Teorem 4.17 den **değişmeli grup** olduğunu biliyoruz.

- ii) Teorem 4.14 nin (i) şikkından dual matrislerde, matrislerde çarpma işlemine göre **birleşme özelliğinin** sağlandığı görülür.
- iii) Teorem 4.16 nin (ii) şikkından dual matrislerde, matrislerde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine **dağılma özelliği** sağlandığı görülür.
- iv) $\hat{I}_n = I_n + \varepsilon 0$ matrisi dual matrisler için birim matristir.

O halde dual matrisler kümesi, matrislerde toplama ve çarpma işlemine göre **halkadır**.

Tanım 4.19 $n \times n$ -tipindeki matrislere kare dual matris adı verilir. $A, A^* \in \mathbb{R}_n^n$ olmak üzere, $\hat{A} = [A_{ij}]_{n \times n} = A + \varepsilon A^*$ kare matrisinin esas köşegen üzerindeki elemanlarının toplamına $\hat{A}$ matrisinin **izi** denir ve $iz(\hat{A})$ ile gösterilir.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 iz(\hat{A}) &= \sum_{i=1}^n (A_{ii}) \\
 &= \sum_{i=1}^n (a_{ii} + \varepsilon a_{ii}^*) \\
 &= \sum_{i=1}^n (a_{ii}) + \varepsilon \sum_{i=1}^n (a_{ii}^*) \\
 &= izA + \varepsilon izA^*
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Özellikler:

- i) $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ $n \times n$ -dual kare matrisleri için $iz(\hat{A} + \hat{B}) = iz(\hat{A}) + iz(\hat{B})$
- ii) k bir dual skaler olmak üzere $iz(k\hat{A}) = k.iz(\hat{A})$
- iii) $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ $n \times n$ -dual kare matrisleri için $iz(\hat{A}.\hat{B}) = iz(\hat{B}.\hat{A})$

Tanım 4.20 Bir $\hat{A}$ matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen matrise $\hat{A}$ matrisinin **transpozu** denir ve $\hat{A}^T$ ile gösterilir.

$$\hat{A} = [A_{ij}]_{m \times n} = A + \varepsilon.A^* \in \mathcal{D}_n^m$$

matrisi için

$$\hat{A}^T = [A_{ji}]_{n \times m} = A^T + \varepsilon A^{*T}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.21 $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon.3 & 5-\varepsilon & -4+\varepsilon.7 \\ 3 & \varepsilon.7 & 0 \\ -5-\varepsilon.2 & 2+\varepsilon.3 & 7 \\ 8+\varepsilon & 2-\varepsilon.5 & \varepsilon.2 \end{bmatrix}$ matrisinin transpozu

$$\hat{A}^T = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon.3 & 3 & -5-\varepsilon.2 & 8+\varepsilon \\ 5-\varepsilon & \varepsilon.7 & 2+\varepsilon.3 & 2-\varepsilon.5 \\ -4+\varepsilon.7 & 0 & 7 & \varepsilon.2 \end{bmatrix} \text{ matrisidir.}$$

Teorem 4.22 $\hat{A} = A + \varepsilon.A^*$ ve $\hat{B} = B + \varepsilon.B^*$ aynı mertebeden iki matris ve λ bir dual sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $(\hat{A} + \hat{B})^T = \hat{A}^T + \hat{B}^T$

ii) $(\hat{A}^T)^T = \hat{A}$

iii) $(\lambda \hat{A})^T = \lambda \hat{A}^T$

iv) $\hat{A} = A + \varepsilon.A^* \in \mathcal{D}_n^m$ ve $\hat{D} = D + \varepsilon.D^* \in \mathcal{D}_p^n$ ise $(\hat{A}.\hat{D})^T = \hat{D}^T.\hat{A}^T$.

ispat

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad (\hat{A} + \hat{B})^T &= ((A+B) + \varepsilon.(A^* + B^*))^T \\
&= (A+B)^T + \varepsilon.(A^* + B^*)^T \\
&= (A^T + B^T) + \varepsilon.(A^{*T} + B^{*T}) \\
&= A^T + \varepsilon.A^{*T} + B^T + \varepsilon.B^{*T} \\
&= \hat{A}^T + \hat{B}^T \\
\text{ii)} \quad \left((\hat{A})^T \right)^T &= \left((A + \varepsilon.A^*)^T \right)^T = (A^T + \varepsilon.A^{*T})^T = (A^T)^T + \varepsilon.(A^{*T})^T = A + \varepsilon.A^* = \hat{A} \\
\text{iii)} \quad (\lambda \hat{A})^T &= (\lambda A + \varepsilon \lambda A^*)^T \\
&= (\lambda A)^T + \varepsilon(\lambda A^*)^T \\
&= \lambda A^T + \varepsilon \lambda A^{*T} \\
&= \lambda (A^T + \varepsilon A^{*T}) \\
&= \lambda \hat{A}^T \\
\text{iv)} \quad (\hat{A}.\hat{D})^T &= (AD + \varepsilon.(AD^* + A^*D))^T \\
&= (AD)^T + \varepsilon(AD^* + A^*D)^T \\
&= D^T A^T + \varepsilon((AD^*)^T + (A^*D)^T) \\
&= D^T A^T + \varepsilon(D^{*T} A^T + D^T A^{*T}) \tag{4.10}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\hat{D}^T.\hat{A}^T &= (D^T + \varepsilon.D^{*T})(A^T + \varepsilon.A^{*T}) \\
&= D^T A^T + \varepsilon(D^T A^{*T} + D^{*T} A^T) \\
&= D^T A^T + \varepsilon(D^{*T} A^T + D^T A^{*T}) \tag{4.11}
\end{aligned}$$

bulunur. O halde (4.10) ve (4.11) denklemlerinin birbirine eşit olduğu görülür.

Tanım 4.23 $\hat{A}$, $n \times n$ -tipinde bir dual matris olmak üzere $\hat{A}.\hat{B} = \hat{B}.\hat{A} = \hat{I}_n$ eşitliğini sağlayan $\hat{B}$ $n \times n$ -tipindeki dual matrise, $\hat{A}$ dual matrisinin **tersi (inversi)** denir ve $\hat{A}^{-1}$ ile gösterilir. Tersi olan dual matrislere **terslenebilir dual matrisler** denir.

Örnek 4.24 $\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 5 \\ \varepsilon.3 & 2-\varepsilon \end{pmatrix}$ matrisinin tersi $\begin{pmatrix} \frac{4+\varepsilon.26}{4} & \frac{-10-\varepsilon.70}{4} \\ \frac{-\varepsilon.6}{4} & \frac{2+\varepsilon.16}{4} \end{pmatrix}$ matrisidir.

Teorem 4.25 $\hat{A} = A + \varepsilon.A^*$ dual matrisinin tersi $\hat{A}^{-1} = A^{-1} + \varepsilon.(-A^{-1}A^*A^{-1})$ dir.

İspat $\hat{A}.\hat{B} = \hat{B}.\hat{A} = \hat{I}_n$ olmak üzere,

$$(A + \varepsilon.A^*). (B + \varepsilon.B^*) = AB + \varepsilon.(AB^* + A^*B) = I_n + \varepsilon 0$$

$$(B + \varepsilon.B^*)(A + \varepsilon.A^*) = BA + \varepsilon.(BA^* + B^*A) = I_n + \varepsilon 0$$

elde edilir. Buradan,

$AB = BA = I_n$ eşitliğinden $B = A^{-1}$ ve $AB^* + A^*B = 0$ eşitliğinden de $B^* = -A^{-1}A^*A^{-1}$ elde edilir.

O halde, bir $\hat{A}$ matrisinin tersi $\hat{A}^{-1} = \hat{B} = A^{-1} + \varepsilon.(-A^{-1}A^*A^{-1})$ şeklinde bulunur, [7].

Not 4.26 Burada $\hat{A}$ dual matrisi pure dual matris (yani $\hat{A}$ dual matrisinin reel kısmı olan $A=0$) ise $\hat{A}$ dual matrisinin tersinin olmayacağı açıktır. Bu nedenle dual matrisler kümesi cisim değildir.

Tanım 4.27 $\hat{A}$, $n \times n$ -tipindeki bir dual matrisin tersi yoksa $\hat{A}$ matrisine **tekil (singüler) matris** denir.

Örnek 4.28 $\begin{bmatrix} 2+\varepsilon.2 & 1+\varepsilon \\ 6+\varepsilon.4 & 3+\varepsilon.2 \end{bmatrix}$ matrisi bir tekil matristir.

Teorem 4.29 $n \times n$ - tipindeki bir $\hat{A}$ dual matrisinin tersi varsa tektir.

İspat Kabul edelim ki, $\hat{A}$ matrisinin $\hat{B}$ ve $\hat{D}$ gibi iki tane tersi olsun. ($\hat{B}, \hat{D} \in \mathcal{D}_n^n$)

$$\hat{B} = \hat{B}.I_n = \hat{B}(\hat{A}.\hat{D}) = (\hat{B}.\hat{A}).\hat{D} = \hat{I}_n.\hat{D} = \hat{D}$$

olup burada $\hat{B} = \hat{D}$ elde edilir.

Teorem 4.30 $\forall \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{D}_n^n$ terslenebilir matrisleri için $(\hat{A}.\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}.\hat{A}^{-1}$ dir.

İspat

$(\hat{A}.\hat{B}).\hat{X} = \hat{X}.\hat{A}.\hat{B} = \hat{I}_n$ eşitliğini sağlayan X matrisine $\hat{A}.\hat{B}$ nin tersi denir.

$$(\hat{A}.\hat{B}).\hat{X} = \hat{I}_n$$

olmak üzere,

$$\hat{A}.\hat{B}.\hat{X} = \hat{I}_n$$

veya

$$\hat{B}.\hat{X} = \hat{A}^{-1}$$

bulunur. Buradan, $\hat{X} = \hat{B}^{-1}.\hat{A}^{-1}$ elde edilir.

4.3 Özel Dual Matrisler

Tanım 4.31 Bir dual kare matrisin esas köşegen üzerindeki elemanlar haricindeki tüm elemanları $0 + \varepsilon 0$ ise bu kare dual matrise **dual diagonal (köşegen) matris** denir.

Yani, $\hat{A} = [A_{ij}]_{n \times n}$ matrisi bir diagonal dual matris ise $\forall i \neq j$ için $A_{ij} = 0 + \varepsilon 0$ dir.

Örnek 4.32 $\begin{bmatrix} 2-\varepsilon & 0+\varepsilon 0 & 0+\varepsilon 0 \\ 0+\varepsilon 0 & 5+\varepsilon 3 & 0+\varepsilon 0 \\ 0+\varepsilon 0 & 0+\varepsilon 0 & 4 \end{bmatrix}$ bir diagonal dual matristir.

Tanım 4.33 Bir diagonal dual matriste esas köşegen elemanları birbirine eşitse yani $A_{11} = A_{22} = \dots = A_{nn} = k + \varepsilon k^*$ ise bu dual matrise **skaler dual matris** denir. Yani bir skaler dual matris,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k + \varepsilon k^* & 0 + \varepsilon 0 & \cdots & 0 + \varepsilon 0 \\ 0 + \varepsilon 0 & k + \varepsilon k^* & \cdots & 0 + \varepsilon 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 + \varepsilon 0 & 0 + \varepsilon 0 & \cdots & k + \varepsilon k^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} k^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k^* \end{bmatrix} \\ &= kI_n + \varepsilon k^* I_n \\ &= (k + \varepsilon k^*) I_n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.34 Bir skaler dual matrisin esas köşegeninin altında (üstünde) kalan elemanları $0 + \varepsilon 0$ ise bu dual kare matrise **üst(alt) üçgensel dual matris** denir.

Yani, $\hat{A} = [A_{ij}]_{n \times n}$ bir üst üçgen dual matrisi ise $\forall i > j$ için $A_{ij} = 0 + \varepsilon 0$

$(\hat{A} = [A_{ij}]_{n \times n}$ ise $A_{ij} = 0 + \varepsilon 0$ ($i < j$)) dir.

Örnek 4.35 $\begin{bmatrix} 2-\varepsilon & \varepsilon 4 & 1+\varepsilon \\ 0+\varepsilon 0 & 5+\varepsilon 3 & -6+\varepsilon 7 \\ 0+\varepsilon 0 & 0+\varepsilon 0 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi bir üst üçgensel dual matrisidir.

Tanım 4.36 $\hat{A}$ bir kare dual matris olsun. $\hat{A}$ matrisinin n defa kendisiyle çarpımının sonucuna, $\hat{A}$ dual matrisinin **n. kuvveti** denir ve $\hat{A}^n$ ile gösterilir. Özel olarak $\hat{A}^2 = \hat{A}$ ise $\hat{A}$ matrisine **idempotent dual matris** denir.

$$\hat{A}^1 = A + \varepsilon A^*$$

$$\hat{A}^2 = A^2 + \varepsilon (AA^* + A^*A)$$

$$\hat{A}^3 = A^3 + \varepsilon (A(AA^* + A^*A) + A^*A^2)$$

$$= A^3 + \varepsilon (AAA^* + AA^*A + A^*AA)$$

$$\hat{A}^4 = A^4 + \varepsilon (A(AAA^* + AA^*A + A^*AA) + A^*(A^3))$$

$$= A^4 + \varepsilon (AAAA^* + AAA^*A + AA^*AA + A^*AAA)$$

$\vdots$

$$\hat{A}^n = A^n + \varepsilon (\underbrace{AA \dots AA^*}_{n-1} + \underbrace{AA \dots AA^*}_{n-2} \underbrace{A}_1 + \underbrace{AA \dots AA^*}_{n-3} \underbrace{AA}_2 + \dots + A^* \underbrace{AA \dots A}_{n-1})$$

Not 4.37 Dual matrisin n . kuvvetinin dual kısmındaki toplamda n tane terim vardır.

Örnek 4.38 $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \varepsilon.3 & \frac{1}{9} + \varepsilon \\ 2 - \varepsilon.9 & \frac{2}{3} - \varepsilon.3 \end{bmatrix}$ bir idempotent dual matristir.

Teorem 4.39 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ matrisinin idempotent dual matris olması için gerek ve yeter koşul A reel matrisinin idempotent olması ve $AA^* + A^*A = A^*$ olmasıdır.

İspat

$(\Rightarrow)$ $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ matrisi idempotent dual matris yani $\hat{A}^2 = A^2 + \varepsilon(AA^* + A^*A) = \hat{A}$ olsun. Bu durumda, $A = A^2$ ve $AA^* + A^*A = A^*$ dir. Yani A reel matrisi idempotenttir ve $AA^* + A^*A = A^*$ dir.

$(\Leftarrow)$ A reel matrisi idempotent yani $A^2 = A$ ve $AA^* + A^*A = A^*$ olsun. O halde, $A + \varepsilon A^* = A^2 + \varepsilon(AA^* + A^*A)$ elde edilir. Yani, $\hat{A}$ bir idempotent dual matristir.

Tanım 4.40 Bir $\hat{A}$ kare dual matrisi için $\hat{A}^{p+1} = \hat{A}$ eşitliğini sağlayan bir pozitif p tamsayısı varsa $\hat{A}$ kare dual matrisine **periyodik dual matris** denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif p tamsayısına da $\hat{A}$ dual matrisinin **periyodu** denir.

Teorem 4.41 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ periyodu p olan bir periyodik dual matris ise A reel matrisi de periyodik matristir ve periyodu p dir.

İspat

$$\hat{A}^{p+1} = \hat{A} \text{ ise}$$

$$A^{p+1} + \varepsilon(AA \dots AA^* + AAA \dots A^*A + \dots + A^*AA \dots A) = A + \varepsilon A^*$$

olup buradan,

$$A^{p+1} = A$$

elde edilir. Yani A reel periyodik matristir.

Tanım 4.42 Bir $\hat{A}$ kare dual matrisi için $\hat{A}^q = 0 + \varepsilon.0$ olacak şekilde bir pozitif q tamsayısı varsa $\hat{A}$ dual matrisine **nilpotent dual matris** denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif q tamsayısına da bu matrisin **indeksi (derecesi)** denir.

Teorem 4.43 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$, nilpotent dual matris ise A reel nilpotent matristir.

İspat $\hat{A}^q = 0 + \varepsilon \cdot 0$ ise

$$A^q + \varepsilon(AAA \dots AA^* + AAA \dots A^*A + \dots + A^*AA \dots A) = 0 + \varepsilon \cdot 0$$

bulunur. O halde, $A^q = 0$ ise A bir reel nilpotent matristir.

Tanım 4.44 $\hat{A}^T = \hat{A}$ eşitliğini sağlayan $\hat{A}$ kare dual matrisine **simetrik dual matris**

denir. Eğer $\hat{A} = [A_{ij}]$ bir simetrik dual matris ise her i, j için $A_{ij} = A_{ji}$ dir.

Örnek 4.45 $\begin{bmatrix} 1-\varepsilon & 3 & 5+\varepsilon.3 \\ 3 & 4+\varepsilon & -2+\varepsilon.5 \\ 5+\varepsilon.3 & -2+\varepsilon.5 & 3+\varepsilon.7 \end{bmatrix}$ bir simetrik dual matristir.

Teorem 4.46 $\hat{A} = A + \varepsilon.A^*$ matrisinin bir simetrik dual matris olması için gerek ve yeter koşul A ve A^* matrislerinin reel simetrik matrisler olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\hat{A} = A + \varepsilon.A^*$ simetrik dual matris olsun. O halde $\hat{A}^T = \hat{A}$ için

$$\begin{aligned} A + \varepsilon.A^* &= (A + \varepsilon.A^*)^T \\ &= A^T + \varepsilon.A^{*T} \end{aligned}$$

olup buradan,

$$A^T = A \text{ ve } A^{*T} = A^*$$

elde edilir. Dolayısıyla A ve A^* reel simetrik matrislerdir.

($\Leftarrow$) Diğer taraftan , A ve A^* reel simetrik matris olsun. O halde, $A^{*T} = A^*$ eşitliğini sağlar. O halde, $A^T + \varepsilon.A^{*T} = A + \varepsilon.A^*$ elde edilir. Bundan dolayı $\hat{A}$ simetrik dual matristir.

Tanım 4.47 $\hat{A}^T = -\hat{A}$ olacak şekilde $\hat{A}$ kare dual matrisine **ters simetrik dual matris** denir. Eğer $\hat{A} = [A_{ij}]$ bir ters simetrik dual matris ise her i, j için $A_{ij} = -A_{ji}$ dir.

Örnek 4.48
$$\begin{bmatrix} 0+\varepsilon 0 & -3 & 5+\varepsilon.3 \\ 3 & 0+\varepsilon 0 & -2+\varepsilon.5 \\ -5-\varepsilon.3 & 2-\varepsilon.5 & 0+\varepsilon 0 \end{bmatrix}$$
 bir ters simetrik dual matristir.

Teorem 4.49 $\hat{A} = A + \varepsilon.A^*$ matrisinin bir ters simetrik dual matris olması için gerek ve yeter koşul A ve A^* matrislerinin reel ters simetrik matrisler olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$) $\hat{A} = A + \varepsilon.A^*$ matrisi ters simetrik dual matris olsun. O halde,

$$(A + \varepsilon.A^*)^T = -(A + \varepsilon.A^*) \quad \text{veya} \quad A^T + \varepsilon.A^{*T} = -A - \varepsilon.A^*$$

yazılır. Buradan,

$$A^T = -A \quad \text{ve} \quad A^{*T} = -A^*$$

elde edilir. O halde, A ve A^* reel ters simetrik matrislerdir.

($\Leftarrow$) A ve A^* reel ters simetrik matris olsun. O halde, $A^T = -A$ ve $A^{*T} = -A^*$ şartları sağlanır. Buradan $A^T + \varepsilon.A^{*T} = -A - \varepsilon.A^*$ bulunur. O halde, $\hat{A}^T = -\hat{A}$ elde edilir. Yani $\hat{A}$ matrisi dual ters simetrik matristir.

Not 4.50 $\hat{A} = [A_{ij}] \in \mathcal{D}_n^n$ matrisi dual ters simetrik olsun. O halde $\hat{A}^T = -\hat{A}$ olup $A_{ij} = -A_{ji}$ $A_{ij} \in \mathcal{D}$ yazılabilir.

$$i = j \text{ için } A_{ii} = 0 \in \mathcal{D}$$

ve

$$i \neq j \text{ için } A_{ij} = -A_{ji}$$

elde edilir. Yani anti simetrik dual matrislerde esas köşegen üzerindeki elemanlar 0 ve esas köşegene göre simetrik olan elemanlar ise zıt işaretlidir.

Tanım 4.51 Bir $\hat{A}$ dual matrisinin herbir elemanının eşleniklerinin alınmasıyla oluşan matrise $\hat{A}$ dual matrisinin **eşleniği** denir. $\bar{\hat{A}}$ ile gösterilir ve $\hat{A} = A + \varepsilon.A^*$ için $\bar{\hat{A}} = [\bar{A}_{ij}]$

veya

$$\bar{\hat{A}} = A - \varepsilon.A^*$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.52 $\begin{bmatrix} 1-\varepsilon & -3+\varepsilon.2 \\ 4 & \varepsilon.5 \end{bmatrix}$ matrisinin eşleniği $\begin{bmatrix} 1+\varepsilon & -3-\varepsilon.2 \\ 4 & -\varepsilon.5 \end{bmatrix}$ matrisidir.

Teorem 4.53 $\hat{A} = A + \varepsilon.A^*$ ve $\hat{B} = B + \varepsilon.B^*$ iki kare dual matris ve $K = k + \varepsilon.k^*$ herhangi bir dual sayı olsun.

i) $\overline{(\bar{\hat{A}})} = \hat{A}$

ii) $\overline{(K.\hat{A})} = \bar{K}.\bar{\hat{A}}$

iii) $\overline{(\hat{A} + \hat{B})} = \bar{\hat{A}} + \bar{\hat{B}}$

iv) $\overline{(\hat{A}.\hat{B})} = \bar{\hat{A}}.\bar{\hat{B}}$

İspat

$$\text{i) } \hat{A} = A + \varepsilon.A^* \text{ için } \overline{(A + \varepsilon.A^*)} = \overline{(A - \varepsilon.A^*)} = A - (-\varepsilon.A^*) = A + \varepsilon.A^* = \hat{A} \quad .$$

$$\text{ii) } \overline{(k + \varepsilon.k^*)} \overline{(A + \varepsilon.A^*)} = \overline{(kA + \varepsilon.(kA^* + k^*A))} = \overline{(kA - \varepsilon.(kA^* + k^*A))} \quad (4.12)$$

ve

$$\overline{(k + \varepsilon.k^*)} \cdot \overline{(A + \varepsilon.A^*)} = \overline{(k - \varepsilon.k^*)} \cdot \overline{(A - \varepsilon.A^*)} = \overline{(kA - \varepsilon.(kA^* + k^*A))} \quad (4.13)$$

bulunur. O halde (4.12) ile (4.13) denklemlerinin eşit olduğu görülür.

$$\text{iii) } \hat{A} = A + \varepsilon.A^* \text{ ve } \hat{B} = B + \varepsilon.B^* \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \overline{(\hat{A} + \hat{B})} &= \overline{(A + \varepsilon.A^* + B + \varepsilon.B^*)} \\ &= \overline{((A + B) + \varepsilon.(A^*B^*))} \\ &= \overline{(A + B) - \varepsilon.(A^*B^*)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \overline{\hat{A}} + \overline{\hat{B}} &= \overline{A - \varepsilon.A^*} + \overline{B - \varepsilon.B^*} \\ &= \overline{(A + B) - \varepsilon.(A^* + B^*)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. O halde (4.14) ve (4.15) denklemlerinin eşit olduğu görülür.

$$\text{iv) } \overline{(\hat{A}.\hat{B})} = \overline{(AB + \varepsilon.(AB^* + A^*B))} = \overline{(AB - \varepsilon.(AB^* + A^*B))} \quad (4.16)$$

ve

$$\overline{\hat{A}}.\overline{\hat{B}} = \overline{(A - \varepsilon.A^*)} \overline{(B - \varepsilon.B^*)} = \overline{(A.B) - \varepsilon.(AB^* + A^*B)} \quad (4.17)$$

elde edilir. O halde (4.16) ile (4.17) denklemlerinin eşit olduğu görülür.

Tanım 4.54 $\overline{(\hat{A})^T} = \hat{A}$ eşitliğini sağlayan $\hat{A}$ kare dual matrisine **Hermityen dual matris** denir. Eğer $\hat{A} = [A_{ij}]$ kare dual matrisi Hermitian dual matris ise $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ eşitliğini sağlar.

Örnek 4.55 $\begin{bmatrix} 5 & 2-\varepsilon.7 & 3+\varepsilon.5 \\ 2+\varepsilon.7 & 3 & 1-\varepsilon \\ 3-\varepsilon.5 & 1+\varepsilon & 7 \end{bmatrix}$ bir Hermityen dual matristir.

Teorem 4.56 Bir dual Hermityen matrisin köşegen elemanları reel sayılardır.

İspat $\hat{A} = [A_{ij}] = A + \varepsilon A^*$ dual hermityen matris olsun. Yani $\overline{(\hat{A})^T} = \hat{A}$, $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ olsun. O halde $A_{ii} = a_{ii} + \varepsilon a_{ii}^*$ ($i=1, 2, n$) olmak üzere $a_{ii} + \varepsilon a_{ii}^* = a_{ii} - \varepsilon a_{ii}^*$ yazılır. Buradan $a_{ii}^* = -a_{ii}^*$ olup $2a_{ii}^* = 0$ eşitliğinden $a_{ii}^* = 0$ elde edilir. Yani, A_{ii} elemanları reel sayılardır.

Teorem 4.57 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ Hermityen dual matris olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin reel simetrik matris ve A^* matrisinin ters simetrik matris olmasıdır.

İspat:

$(\Rightarrow)$ $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ Hermityen dual matris olsun. O halde $\overline{(\hat{A})^T} = \hat{A}$ için

$$\begin{aligned} A + \varepsilon.A^* &= (A - \varepsilon.A^*)^T \\ &= A^T - \varepsilon.A^{*T} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $A^T = A$ ve $A^* = -A^{*T}$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $A^T = A$ ve $A^* = -A^{*T}$ olsun. Buradan $A + \varepsilon.A^* = A^T - \varepsilon.A^{*T}$ olduğundan $\overline{(\hat{A})^T} = \hat{A}$ elde edilir.

Tanım 4.58 $\overline{(\hat{A})^T} = -\hat{A}$ olacak şekilde $\hat{A}$ dual kare matrisine **ters Hermityen dual matris** denir. Eğer $\hat{A} = (A_{ij})$ dual kare matrisi ters dual Hermitian matris ise $A_{ij} = -\overline{A_{ji}}$ dir.

Örnek 4.59 $\begin{bmatrix} \varepsilon & 2-\varepsilon.7 & 3+\varepsilon.5 \\ -2-\varepsilon.7 & \varepsilon.3 & -1+\varepsilon \\ -3+\varepsilon.5 & 1+\varepsilon & \varepsilon.7 \end{bmatrix}$ matrisi ters hermityen dual matristir.

Teorem 4.60 Bir ters Hermityen dual matrisin köşegen elemanları 0 veya pure dual sayılardır.

İspat $\hat{A} = [A_{ij}] = A + \varepsilon A^*$ ters Hermityen dual matris olsun. Yani $\overline{(\hat{A})^T} = -\hat{A}$ ve $A_{ij} = -\overline{A_{ji}}$ olsun halde, $A_{ii} = a_{ii} + \varepsilon a_{ii}^* \in \hat{A}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere $a_{ii} + \varepsilon a_{ii}^* = -(a_{ii} - \varepsilon a_{ii}^*)$ yazılabilir. Buradan $a_{ii} = -a_{ii}$ eşitliğinden $a_{ii} = 0$ elde edilir. Yani A_{ii} pure dual sayıdır. Bu durumda $\hat{A}$ matrisinin köşegen elemanları 0 ($a_{ii}^* = 0$) veya pure dual sayılardır.

Teorem 4.61 $\hat{A}$ ters Hermityen dual matris olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin ters simetrik matris ve A^* matrisinin simetrik matris olmasıdır.

İspat $(\Rightarrow) \hat{A} = [A_{ij}] = A + \varepsilon A^*$ ters Hermityen dual matris olsun. $\overline{(\hat{A})^T} = -\hat{A}$ olsun.

O halde,

$$-A - \varepsilon.A^* = (A - \varepsilon.A^*)^T = A^T - \varepsilon.A^{*T}$$

olmak üzere $A^T = -A$ ve $A^* = A^{*T}$ elde edilir.

$(\Leftarrow) A^T = -A$, $A^* = A^{*T}$ olsun. O halde $\overline{(\hat{A})^T} = -\hat{A}$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tanım 4.62 $\hat{A}^2 = \hat{I}_n$ eşitliğini sağlayan $\hat{A}$ kare dual matrisine **dual involut matris** denir.

Örnek 4.63 $\begin{bmatrix} 1 + \varepsilon.0 & 0 + \varepsilon.0 \\ 0 + \varepsilon.0 & 1 + \varepsilon.0 \end{bmatrix}$ bir dual involut matristir.

Teorem 4.64 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ dual matrisi involut dual matris ise A matrisi bir reel involut matristir.

İspat $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ dual matrisi involut dual matris olsun. O halde, $\hat{A}^2 = \hat{I}_n$ olmak üzere, $A^2 + \varepsilon.(AA^* + A^*A) = I_n + \varepsilon 0$ için $A^2 = I_n$ yani A reel involut matristir.

Tanım 4.65 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ ve $\hat{B} = B + \varepsilon B^*$ $n \times n$ -tipindeki kare dual matrisleri için; $\hat{A}.\hat{B} = \hat{B}.\hat{A}$ ise $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ matrislerine **değişmeli dual matrisler** denir.

Teorem 4.66 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ ve $\hat{B} = B + \varepsilon B^*$ değişmeli dual matrisler ise A ve B değişmeli matrislerdir.

İspat $\hat{A}.\hat{B} = \hat{B}.\hat{A}$ olsun.

$$AB + \varepsilon.(AB^* + A^*B) = BA + \varepsilon(BA^* + B^*A)$$

eşitliğinden $AB = BA$ elde edilir. O halde, A ve B değişmeli matrislerdir.

Tanım 4.67 $\overline{(\hat{A})}^T \cdot \hat{A} = \hat{A} \cdot \overline{(\hat{A})}^T = \hat{I}_n$ eşitliğini sağlayan $\hat{A}$ kare dual matrisine **üniter dual matris** denir.

Teorem 4.68 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ dual üniter matris ise A reel ortogonal matris, $A^* \cdot A^T$ ve $A^{*T} \cdot A$ de reel simetrik matristir.

İspat

$$\begin{aligned} (A + \varepsilon A^*)^T (A + \varepsilon A^*) &= (A^T - \varepsilon A^{*T}) (A + \varepsilon A^*) \\ &= A^T A + \varepsilon (A^T A^* - A^{*T} A) = I_n + \varepsilon 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (A + \varepsilon A^*) (A - \varepsilon A^*)^T &= (A + \varepsilon A^*) (A^T - \varepsilon A^{*T}) \\ &= AA^T + \varepsilon (-AA^{*T} + A^* A^T) = I_n + \varepsilon 0 \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$A^T A = AA^T = I_n ,$$

$$A^T A^* - A^{*T} A = 0 ,$$

$$-AA^{*T} + A^* A^T = 0$$

eşitlikleri elde edilir. O halde, A reel ortogonal matristir. $A^{*T} A$ ve $A^* A^T$ matrisleri ise simetrik matrislerdir.

Tanım 4.69 $(\hat{A})^T \cdot \hat{A} = \hat{A} \cdot (\hat{A})^T = \hat{I}_n$ eşitliğini sağlayan $\hat{A}$ dual matrisine **ortogonal dual matris** denir.

Teorem 4.70 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ ortogonal dual matris ise A reel ortogonal matris, $A^T A^*$ ve AA^{*T} de reel ters simetrik matristir.

$$\begin{aligned} \text{İspat} \quad (A + \varepsilon A^*)^T (A + \varepsilon A^*) &= (A^T + \varepsilon A^{*T})(A + \varepsilon A^*) \\ &= A^T A + \varepsilon (A^T A^* + A^{*T} A) = I_n + \varepsilon 0 \\ (A + \varepsilon A^*)(A + \varepsilon A^*)^T &= (A + \varepsilon A^*)(A^T + \varepsilon A^{*T}) \\ &= AA^T + \varepsilon (AA^{*T} + A^* A^T) = I_n + \varepsilon 0 \end{aligned}$$

olmak üzere ,

$$A^T A = AA^T = I_n ,$$

$$A^T A^* + A^{*T} A = 0 ,$$

$$AA^{*T} + A^* A^T = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan A reel ortogonal matris, $A^{*T} A$ ve $A^* A^T$ matrislerinin ise reel ters simetrik matris olduğu bulunur.

Teorem 4.71 Bir dual ortogonal matrisin satır (sütun) vektörleri ortogonal birim (ortonormal) dual vektörlerdir.

İspat

$$\hat{A} = [A_{ij}]_{n \times n} = [a_{ij} + \varepsilon a_{ij}^*] = A + \varepsilon A^* \in \mathcal{D}_n^n \quad \text{ortogonal dual matris olsun. O halde,}$$

$$\hat{A}(\hat{A})^T = \hat{I}_n \quad \text{dir. } \hat{A} \text{ matrisinin satır dual vektörleri } \alpha_i, \text{ sütun dual vektörleri } \beta_i \text{ olsun.}$$

$$\hat{A} \cdot \hat{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} + \varepsilon a_{11}^* & a_{12} + \varepsilon a_{12}^* & \cdots & a_{1n} + \varepsilon a_{1n}^* \\ a_{21} + \varepsilon a_{21}^* & a_{22} + \varepsilon a_{22}^* & \cdots & a_{2n} + \varepsilon a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + \varepsilon a_{n1}^* & a_{n2} + \varepsilon a_{n2}^* & \cdots & a_{nn} + \varepsilon a_{nn}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} + \varepsilon a_{11}^* & a_{21} + \varepsilon a_{21}^* & \cdots & a_{n1} + \varepsilon a_{n1}^* \\ a_{12} + \varepsilon a_{12}^* & a_{22} + \varepsilon a_{22}^* & \cdots & a_{n2} + \varepsilon a_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} + \varepsilon a_{1n}^* & a_{2n} + \varepsilon a_{2n}^* & \cdots & a_{nn} + \varepsilon a_{nn}^* \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\hat{A} \cdot \hat{A}^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \cdot [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n] = \hat{I}_n$$

eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle & \langle \alpha_1, \beta_2 \rangle & \cdots & \langle \alpha_1, \beta_n \rangle \\ \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle & \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle & \cdots & \langle \alpha_2, \beta_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \alpha_n, \beta_1 \rangle & \langle \alpha_n, \beta_2 \rangle & \cdots & \langle \alpha_n, \beta_n \rangle \end{bmatrix} = \hat{I}_n$$

elde edilir. İki matrisin eşitliğinden,

$$\langle \alpha_i, \beta_j \rangle = \begin{cases} 1 + \varepsilon.0, & i = j \\ 0 + \varepsilon.0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{yazılabilir. } \alpha_i = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ olduğundan}$$

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 1 + \varepsilon.0, & i = j \\ 0 + \varepsilon.0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{bulunur. Bu durumda } \alpha_i \text{ vektörlerinin ortonormal}$$

oldukları görülür.

4.4 Dual Matrislerde Elemanter Satır (Sütun) İşlemleri

Tanım 4.72 Bir matrisin satırları ve sütunları üzerinde yapılan işlemlere **elemanter satır** veya **elemanter sütun işlemleri** denir.

Tanım 4.73 Bir $\hat{A}$ dual matrisine ardarda elemanter satır (sütun) işlemleri uygulayarak dual $\hat{B}$ matrisi elde edilirse $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ dual matrislerine **satırca(sütunca) denk matrisler** denir.

Tanım 4.74 Bir matris aşağıdaki şekilde ise **satırca indirgenmiş formdadır** denir.

- i) İlk k tane satır sıfırdan farklı ve $(k+1)$. satır ile bundan sonraki satırların tüm elemanları sıfırdır.

- ii) Her bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman $1+\varepsilon.0$ veya $0+\varepsilon.1$ olup bu $1+\varepsilon.0$ ve $0+\varepsilon.1$ elemanları $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ olacak şekilde s_j . sütunda bulunurlar.
- iii) Bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman $a_{ij} = 1+\varepsilon.0$ veya $0+\varepsilon.1$ ise j . sütundaki a_{ij} elemanın altında bulunan tüm elemanlar sıfırdır.

Yukarıdaki (iii) koşulu " $a_{ij} = 1+\varepsilon.0$ olduğunda j sütunundaki diğer elemanlar $0+\varepsilon.0$, $a_{ij} = 0+\varepsilon.1$ olduğunda j . sütundaki a_{ij} elemanının altındaki elemanlar $0+\varepsilon.0$ dir." şeklinde alınırsa (i), (ii) koşullarını sağlayan matrise **satırca indirgenmiş eşolon formdadır** denir.

Tanım 4.75 Satırca indirgenmiş formdaki bir dual matrisin sıfırdan farklı satırlarının sayısına o **dual matrisin rankı** denir. $rank \hat{A}$ veya $r(\hat{A})$ ile gösterilir.

Ayrıca satırca indirgenmiş eşolon formdaki bir $\hat{A}$ dual matrisinin köşegeni üzerindeki $1+\varepsilon.0$ elemanlarının sayısı x olmak üzere $0+\varepsilon.1$ elemanlarının sayısı sıfırdan büyükse; $rank \hat{A} = x+1$ ve $0+\varepsilon.1$ elemanlarının sayısı sıfır ise $rank \hat{A} = x$ dir.

Örnek 4.76
$$\begin{bmatrix} 1+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 \\ 0+\varepsilon.0 & 1+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 \\ 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 \\ 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 \end{bmatrix}$$
 matrisinin rankı 2 dir.

Örnek 4.77
$$\begin{bmatrix} 1+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 \\ 0+\varepsilon.0 & \varepsilon & 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 \\ 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & \varepsilon & 0+\varepsilon.0 \\ 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & 0+\varepsilon.0 & 1+\varepsilon.0 \end{bmatrix}$$
 matrisinin rankı 3 tür.

Teorem 4.78 Bir kare dual matrisinin inversinin bulunabilmesi için gerek ve yeter koşul birim matrise satırca denk olmasıdır. n . mertebeden bir regüler $\hat{A}$ matrisi için $(\hat{A} : \hat{I}_n) \sim (\hat{I}_n : \hat{A}^{-1})$ olacak şekilde bulunan $\hat{A}^{-1}$ matrisi $\hat{A}$ matrisinin tersidir.

4.5 Dual Matrislerin Determinantı

Tanım 4.79 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ artan sırada düzenlenmiş 1 den n e kadar olan tamsayıların kümesi olsun. S kümesinin elemanlarının $j_1 j_2 \dots j_n$ şeklinde yeniden düzenlenmesine S kümesinin bir **permütasyonu** denir. Görüleceği üzere n elemanlı S kümesinin $n!$ permütasyonu vardır. Bunların kümesini S_n ile gösterelim.

Tanım 4.80 Bir permütasyonda daha büyük bir j_r , daha küçük bir j_s den önce geliyorsa bu permütasyon bir **inversiyona** sahiptir denir. Bir permütasyondaki inversiyon sayısı tek ise bu permütasyona **tek permütasyon**; çift ise **çift permütasyon** denir.

$n \geq 2$ için S_n kümesinde $n!/2$ tane tek, $n!/2$ tane çift permütasyon vardır.

Örnek 4.81 37619 sayısının inversiyon sayısı 4 olup çift permütasyondur.

Tanım 4.82 $\hat{A} = [A_{ij}]$ $n \times n$ -tipinde bir dual matris olsun. Determinant fonksiyonu $\det$ ile gösterilir.

$$\det(\hat{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)}$$

ile tanımlanır. Bu toplamda permütasyon tek ise işareti $-$; çift ise işareti $+$ dır. Ayrıca bu toplam $n!$ terime sahiptir.

$n = 1$ için ; $\hat{A} = [A_{ij}]$ ise $\det(\hat{A}) = A_{11}$ dır.

$$n = 2 \text{ için ; } \hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$\hat{A}$ dual matrisinin determinantını hesaplamak için $A_{1_}A_{2_}$ terimindeki boşluklara S_2 nin elemanları yerleştirilir.

$$\det(\hat{A}) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

elde edilir.

$$n=3 \text{ için ; } \hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$\hat{A}$ dual matrisinin determinantını hesaplamak için $A_{1_}A_{2_}A_{3_}$ terimindeki boşluklara S_3 ün elemanlarını yerleştirilir. $(123(+), 132(-), 213(-), 231(+), 312(+), 321(-))$

$$\det(\hat{A}) = A_{11}A_{22}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31}$$

elde edilir.

Tanım 4.83 $\hat{A} = [A_{ij}]$ $n \times n$ -tipinde bir matris olsun. $\hat{M}_{ij}$, $\hat{A}$ matrisinin i . satır j . sütun elemanlarının silinmesiyle elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ tipinde bir matris olmak üzere $|\hat{M}_{ij}|$ ifadesine $\hat{A}$ matrisinin A_{ij} elemanına ait minör, $(-1)^{i+j}|\hat{M}_{ij}|$ ifadesine ise A_{ij} elemanına ait kofaktör denir.

Tanım 4.84 $\hat{A} = [A_{ij}]$, $n \times n$ -tipinde bir matris olsun. $\hat{A}$ matrisinin transpozunda elemanların yerine kofaktörlerinin yazılmasıyla elde edilen matrise $\hat{A}$ nın **ek matrisi** denir. $ek[\hat{A}]$ ile gösterilir.

4.6 Dual Determinantların Özellikleri

$$1) \det(\hat{A}) = \det(\hat{A}^T)$$

İspat

$\hat{A} = [A_{ij}]$ ve $\hat{A}^T = [B_{ij}]$ olsun. O halde $B_{ij} = A_{ij}$ dir.

$$\det(\hat{A}^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) B_{1\sigma(1)} B_{2\sigma(2)} \dots B_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} \dots A_{\sigma(n)n}$$

yazılır. Böylece

$$B_{1\sigma(1)} B_{2\sigma(2)} \dots B_{n\sigma(n)} = A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} \dots A_{\sigma(n)n} = A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)}$$

elde edilir.

En son terim $\det(\hat{A})$ nın bir terimidir. Yani $\det(\hat{A}^T)$ ile $\det(\hat{A})$ nın terimleri özdeştir.

Şimdi işaretlerini kontrol edelim. $A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)}$ terimindeki permütasyonun inversiyon sayısı ile $B_{1\sigma(1)} B_{2\sigma(2)} \dots B_{n\sigma(n)}$ terimindeki permütasyonun inversiyon sayısı birbirine eşit olduğu görülebilir. Örneğin;

$$B_{13} B_{24} B_{35} B_{41} B_{52} = A_{31} A_{42} A_{53} A_{14} A_{25} = A_{14} A_{25} A_{31} A_{42} A_{53}$$

34512 nin inversiyon sayısı 6, 45123 ün inversiyon sayısı 6 dır.

Karşılıklı terimler eşit ise $\det(\hat{A}) = \det(\hat{A}^T)$ dır.

2) $\hat{A}$ dual kare matrisinin 2 satırının (sütununun) yer değiştirmesiyle elde edilen matris $\hat{B}$ olsun. Bu durumda $\det(\hat{B}) = -\det(\hat{A})$ olur.

İspat

$\hat{B}$ dual matrisi, $\hat{A}$ dual matrisinin r . ve s . satırlarının yerlerinin değiştirilmesiyle elde edilmiş olsun. $r < s$ alalım. Bu takdirde $i \neq r, i \neq s$ için $B_{ij} = A_{ij}$, $B_{sj} = A_{rj}$ ve $B_{rj} = A_{sj}$ elde edilir.

$$\det(\hat{B}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) B_{1\sigma(1)} B_{2\sigma(2)} \dots B_{r\sigma(r)} \dots B_{s\sigma(s)} \dots B_{n\sigma(n)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{s\sigma(r)} \dots A_{r\sigma(s)} \dots A_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{r\sigma(s)} \dots A_{s\sigma(r)} \dots A_{n\sigma(n)}
\end{aligned}$$

İki sayının yer değiştirmesiyle $\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(s)\dots\sigma(r)\dots\sigma(n)$ permütasyonu $\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(r)\dots\sigma(s)\dots\sigma(n)$ permütasyonundan elde edilir. Bu permütasyondaki inversiyon sayısı bir öncekinden tek sayı farklıdır. Buradan $\det(\hat{B})$ deki her bir terimin $\det(\hat{A})$ nın terimlerinin ters işaretlisi olduğu görülür. O halde,

$$\det(\hat{B}) = -\det(\hat{A})$$

elde edilir. Sütunlarının yer değiştirme durumu da bu yolla gösterilebilir.

3) $\hat{A}$ dual kare matrisinin iki satırı (sütunu) eşitse $\det(\hat{A}) = 0 + \varepsilon 0$ dır.

İspat

$\hat{A}$ matrisinin $r.$ ve $s.$ satırları eşit olsun. $\hat{B}$, $\hat{A}$ nın $r.$ ve $s.$ satırlarının yerlerinin değiştirilmesiyle elde edilmiş olsun. Bu durumda $\det(\hat{B}) = -\det(\hat{A})$ olur.

Diğer taraftan $\hat{B} = \hat{A}$ dır. Buradan $\det(\hat{B}) = \det(\hat{A})$ olur.

$$\det(\hat{A}) = -\det(\hat{B})$$

$$\det(\hat{A}) = \det(\hat{B})$$

Bu iki eşitlikten $\det(\hat{A}) = 0 + \varepsilon 0$ elde edilir.

4) $\hat{A}$ dual kare matrisinin bir satırındaki (sütunundaki) tüm elemanlar $0 + \varepsilon 0$ ise $\det(\hat{A}) = 0 + \varepsilon 0$ dır.

İspat

$\det(\hat{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)}$ eşitliğini göz önüne alalım. Bu toplamın her terimi i . satırdan bir çarpan içerdiğinden her terim $0 + \varepsilon 0$ olur. Böylece $\det(\hat{A}) = 0 + \varepsilon 0$ elde edilir.

5) $\hat{A}$ dual kare matrisinin bir satırının (sütununun) bir dual λ sayısı ile çarpılmasıyla elde edilen matris $\hat{B}$ olsun. Bu durumda $\det(\hat{B}) = \lambda \det(\hat{A})$ olur.

İspat $\hat{A} = [A_{ij}]$ matrisinin r . satırını λ ile çarparak $\hat{B} = [B_{ij}]$ matrisini elde edelim.

$$i = j \text{ ise } B_{ij} = A_{ij}$$

$$i \neq j \text{ ise } B_{ij} = \lambda A_{ij}$$

$$\begin{aligned} \det(\hat{B}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) B_{1\sigma(1)} B_{2\sigma(2)} \dots B_{r\sigma(r)} \dots B_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots \lambda A_{r\sigma(r)} \dots A_{n\sigma(n)} \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{r\sigma(r)} \dots A_{n\sigma(n)} \\ &= \lambda \det(\hat{A}) \end{aligned}$$

elde edilir.

6) $r \neq s$ olmak üzere $\hat{A}$ kare dual matrisinin s . satırındaki (sütunundaki) elemanları dual λ sayısı ile çarpıp r . satıra (sütuna) eklediğimizde oluşan matris $\hat{B}$ olsun. Bu durumda $\det(\hat{A}) = \det(\hat{B})$ dir.

İspat

Satırlar için gösterelim.

$i \neq j$ için $B_{ij} = A_{ij}$ ve $r \neq s$, $r < s$ olsun. O halde, $B_{rj} = A_{rj} + \lambda A_{sj}$ dir.

$$\begin{aligned}
\det(\hat{B}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) B_{1\sigma(1)} B_{2\sigma(2)} \dots B_{r\sigma(r)} \dots B_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots (A_{r\sigma(r)} + \lambda A_{s\sigma(s)}) \dots A_{s\sigma(s)} \dots A_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{r\sigma(r)} \dots A_{s\sigma(s)} \dots A_{n\sigma(n)} \\
&\quad + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots \lambda A_{s\sigma(s)} \dots A_{s\sigma(s)} \dots A_{n\sigma(n)} \\
&= \det(\hat{A}) + \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{s\sigma(s)} \dots A_{s\sigma(s)} \dots A_{n\sigma(n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{s\sigma(s)} \dots A_{s\sigma(s)} \dots A_{n\sigma(n)} = 0 + \varepsilon 0$$

olduğundan $\det(\hat{B}) = \det(\hat{A})$ olduğu görülür.

7) $\hat{A}$ kare dual matrisi üst (alt) üçgensel matrisi ise $\det(\hat{A}) = A_{11} A_{22} \dots A_{nn}$ dir.

İspat $\hat{A}$ üst üçgen matrisi olsun. ($i > j$ için $A_{ij} = 0$). Bu durumda

$A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)}$ yalnız $1 \leq \sigma(1), 2 \leq \sigma(2), \dots, n \leq \sigma(n)$ için sıfır olmayabilir.

$$\det(\hat{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)} \text{ ifadesindeki } \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$$

permütasyonunu düşünelim.

- n . satırda sıfırdan farklı sadece n . sütun elemanı vardır. Yani $\sigma(n) = n$ dir .
- $(n-1)$. satırda sıfırdan farklı n . ve $(n-1)$. sütun elemanları vardır. Ancak n . ve $(n-1)$. sütun kullanıldığından $\sigma(n-1) = (n-1)$ dir.
- $(n-2)$. satırda sıfırdan farklı n . , $(n-1)$. ve $(n-2)$. sütun elemanları vardır. Ancak n . ve $(n-1)$. sütun kullanıldığından $\sigma(n-2) = (n-2)$ dir.

Görüldüğü üzere $\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$ permütasyonu sadece $123\dots n$ için sıfırdan farklıdır. O halde $\det(\hat{A}) = A_{11}A_{22}\dots A_{nn}$ bulunur.

Teorem 4.85 $\hat{A}$ $n \times n$ -tipinde bir dual matris ve $\hat{A}X = 0$ homojen sistemi tek $X = 0$ çözümüne sahip olsun. O zaman $\hat{A}$, $\hat{I}_n$ birim matrisine satırca denktir.

İspat

$\hat{A}$ matrisinin satırca eşelon forma indirgenmiş hali $\hat{B}$ matrisi olsun. O zaman $\hat{A}X = 0$ ve $\hat{B}X = 0$ homojen sistemleri denktir. Bu durumda $\hat{A}X = 0$ sistemi de tek aşıkâr çözüme sahiptir ($X = 0$). $\hat{B}$ matrisinin sıfırdan farklı satırların sayısı r ise, $\hat{B}X = 0$ homojen sistemi $\hat{B}$ nin sıfırdan farklı satırlarının oluşturduğu sisteme denktir. Böylece sistemin boyutu $r \times n$ olur. Bu son homojen sistem sadece aşıkâr çözüme sahip olduğundan $r \geq n$ dir.

$\hat{B}$ $n \times n$ -tipinde bir matris olduğundan $r \leq n$ olur. Dolayısıyla $r = n$ dir. Bu durumda $\hat{B}$ matrisinin sıfır satırı yoktur. O halde $\hat{B} = \hat{I}_n$ elde edilir.

Teorem 4.86 $\hat{A}$ dual matrisinin singüler olmaması için gerek ve yeter koşul $\hat{A}$ matrisinin elemanter matrislerin çarpımı olarak yazılmasıdır.

İspat

$\hat{A}$ matrisi $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_k$ elemanter matrislerin çarpımına eşit ise $\hat{A} = \hat{E}_1 \hat{E}_2 \dots \hat{E}_k$ her bir elemanter matris singüler olmadığından çarpımları da singüler değildir. O halde $\hat{A}$ matrisi singüler değildir.

$\hat{A}$ matrisi singüler olmasın. $\hat{A}X = 0$ iken $\hat{A}^{-1}(\hat{A}X) = \hat{A}^{-1}.0 = 0$ olur. Buradan $\hat{I}_n.X = 0$ ise $X = 0$ elde edilir. O halde $\hat{A}X = 0$ sadece aşıkâr çözüme sahiptir. O halde $\hat{A}$ matrisi $\hat{I}_n$ birim matrisine satırca denk olduğu görülür. Bu durumda $\hat{I}_n = \hat{E}_k \cdot \hat{E}_{k-1} \dots \hat{E}_1 \cdot \hat{A}$ olacak şekilde $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_k$ vardır.

Böylece $\hat{A} = (\hat{E}_k \cdot \hat{E}_{k-1} \dots \hat{E}_1)^{-1} = \hat{E}_1^{-1} \cdot \hat{E}_2^{-1} \dots \hat{E}_k^{-1}$ elde edilir. Buradan elemanter matrislerin terslerinin de bir elemanter matris olduğu görülür.

Teorem 4.87 $\hat{A}$ dual matrisinin singüler olmayan bir matris olması için gerek ve yeter koşul $\hat{I}_n$ birim matrisine satırca denk olmasıdır.

İspat:

($\Leftarrow$) $\hat{A}$ dual matrisi, $\hat{I}_n$ birim matrisine satırca denk ise, $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_k$ elemanter matrisler olmak üzere, $\hat{I}_n = \hat{E}_k \cdot \hat{E}_{k-1} \dots \hat{E}_1 \cdot \hat{A}$ olarak yazılır. Böylece $\hat{A}^{-1} = \hat{E}_1^{-1} \cdot \hat{E}_2^{-1} \dots \hat{E}_k^{-1}$ yazılır. Bir elemanter matrisin tersinin de elemanter matris olmasından ve Teorem 7.62 den $\hat{A}$ matrisinin singüler olmayan bir matris olduğu görülür.

($\Rightarrow$) $\hat{A}$ matrisi singüler olmasın. O halde $\hat{A}$ matrisi elemanter matrislerin çarpımı şeklinde yazılabilir. Yani $\hat{A} = \hat{E}_k \cdot \hat{E}_{k-1} \dots \hat{E}_1$ dir. $\hat{A} = \hat{A} \cdot \hat{I}_n = \hat{E}_k \cdot \hat{E}_{k-1} \dots \hat{E}_1$ olup $\hat{A}$ matrisi $\hat{I}_n$ birim matrisine satırca denktir.

Teorem 4.88 Bir $n \times n$ -tipindeki bir $\hat{A}$ matrisinin singüler olması için gerek ve yeter koşul $\hat{A}$ matrisinin, bir satırı sıfır olan bir $\hat{B}$ matrisine satırca denk olmasıdır.

İspat:

($\Leftarrow$) $\hat{A}$ matrisi, bir satırı sıfır olan $\hat{B}$ matrisine satırca denk olsun. Bu durumda $\hat{B}$ matrisi singülerdir. ($\hat{B}$ singüler olmasın. $\hat{B} \cdot \hat{D} = \hat{D} \cdot \hat{B} = \hat{I}_n$ olacak şekilde $n \times n$ -tipinde bir $\hat{D}$ matrisi olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir.)

$\hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_k$ elemanter matrisler olmak üzere $\hat{B} = \hat{E}_k \cdot \hat{E}_{k-1} \dots \hat{E}_1 \cdot \hat{A}$ olur. Eğer $\hat{A}$ matrisi singüler değilse $\hat{B}$ matrisi de singüler değildir. Bu bir çelişkidir. O halde $\hat{A}$ singülerdir.

($\Rightarrow$) $\hat{A}$ singüler matris ise, $\hat{I}_n$ birim matrisine satırca denk olamaz. Buradan $\hat{A}$ matrisi satırca eşolon forma indirgenen bir $\hat{B}$ matrisine ($\hat{B} \neq \hat{I}_n$) denk olur. Eşolon

formun tanımından $n \times n$ -tipinde bir matrisin eşolon formu ya birim matrise denktir ya da bir satırı sıfırdır. Dolayısıyla $\hat{B}$ bir sıfır satırına sahiptir.

8) $\hat{A}$, $n \times n$ -tipinde bir dual matris olsun. O zaman $\hat{A}$ matrisinin singüler olması için gerek ve yeter koşul $\det(\hat{A}) \neq 0$ olmasıdır.

İspat

$\hat{A}$ singüler değilse elemanter matrislerin bir çarpımıdır. O halde $\hat{A} = \hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_k$ olsun. Böylece,

$$\det(\hat{A}) = \det(\hat{E}_1) \cdot \det(\hat{E}_2) \dots \det(\hat{E}_k) \cdot \det(\hat{B}) = 0$$

yazılır. $\hat{A}$ singüler ise bir sıfır satıra sahip olan $\hat{B}$ matrisine denktir. Bu durumda $\hat{A} = \hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_k \cdot \hat{B}$ olur. $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_k$ elemanter matrisler olduğundan $\det(\hat{B}) = 0$ olur. O halde, $\det(\hat{A}) = \det(\hat{E}_1) \cdot \det(\hat{E}_2) \dots \det(\hat{E}_k) \cdot \det(\hat{B}) = 0$ olur.

9) $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ $n \times n$ -tipinde matrisler ise $\det(\hat{A} \cdot \hat{B}) = \det(\hat{A}) \cdot \det(\hat{B})$ 'dir.

İspat

$\hat{A}$ matrisi singüler değilse $\hat{I}_n$ birim matrisine satırca denktir.

$$\hat{A} = \hat{E}_k \cdot \hat{E}_{k-1} \dots \hat{E}_1 \cdot \hat{I}_n = \hat{E}_k \cdot \hat{E}_{k-1} \dots \hat{E}_1 \text{ dir. } (\hat{E}_n, n = 1, 2, \dots, k \text{ elemanter matrisler})$$

O halde $\det(\hat{A}) = (\hat{E}_k \cdot \hat{E}_{k-1} \dots \hat{E}_1) = \det(\hat{E}_k) \cdot \det(\hat{E}_{k-1}) \dots \det(\hat{E}_1)$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \det(\hat{A} \cdot \hat{B}) &= \det(\hat{E}_k \cdot \hat{E}_{k-1} \dots \hat{E}_1 \cdot \hat{B}) \\ &= \det(\hat{E}_k) \cdot \det(\hat{E}_{k-1}) \dots \det(\hat{E}_1) \det(\hat{B}) \\ &= \det(\hat{A}) \cdot \det(\hat{B}) \end{aligned}$$

yazılır. $\hat{A}$ singüler ise 8. özellikten $\det(\hat{A}) = 0$ 'dır. Ya da $\hat{A}$ singüler ise $\hat{A}$ satırca bir satırı sıfır olan bir $\hat{D}$ matrisine denktir. Buradan ,

$$\hat{D} = \hat{E}_k \cdot \hat{E}_{k-1} \dots \hat{E}_1 \cdot \hat{A}$$

$$\hat{D} \cdot \hat{B} = \hat{E}_k \cdot \hat{E}_{k-1} \dots \hat{E}_1 \cdot \hat{A} \cdot \hat{B}$$

elde edilir. Böylece $\hat{A} \cdot \hat{B}$ matrisinin , $\hat{D} \cdot \hat{B}$ matrisine satır olarak denk olduğunu görülür. $\hat{D} \cdot \hat{B}$ bir sıfır satıra sahip olduğundan $\hat{A} \cdot \hat{B}$ singülerdir. $\det(\hat{A} \cdot \hat{B}) = 0$ olur.

Böylece $\det(\hat{A} \cdot \hat{B}) = \det(\hat{A}) \cdot \det(\hat{B})$ elde edilir.

10) $\hat{A}$ singüler değilse $\det(\hat{A}^{-1}) = 1/\det(\hat{A})$ dır.

İspat $\hat{A}$ singüler değilse $\hat{A} \cdot \hat{A}^{-1} = \hat{I}_n$ olacak şekilde bir $\hat{A}^{-1}$ vardır. Buradan,

$$\det(\hat{A} \cdot \hat{A}^{-1}) = \det(\hat{I}_n)$$

yazılır. (9). özellikten

$$\det(\hat{A} \cdot \hat{A}^{-1}) = \det(\hat{A}) \det(\hat{A}^{-1}) = \det(\hat{I}_n) = 1 + \varepsilon 0 = 1$$

yazılır. Buradan $\det(\hat{A}^{-1}) = 1/\det(\hat{A})$ elde edilir.

11) $\hat{A}$ dual matrisinin herhangi bir sütun (satır) elemanları pure dual ise $\hat{A}$ matrisinin tersi yoktur.

İspat

$\hat{A}$ matrisi aşağıdaki gibi olsun ,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix} = A + \varepsilon A^*$$

ise $\det(\hat{A}) = 0$ dır. Yani,

$$\det(\hat{A}) = \det(A) (1 + \varepsilon \cdot iz(A^{-1} A^*))$$

Eşitliğinden $\det(\hat{A}) = 0$ olup $\hat{A}^{-1}$ yoktur. ($\hat{A}^{-1} = ek(\hat{A})/\det(\hat{A})$)

Teorem 4.89 Bir $\hat{A} = A + \varepsilon A^* \in \mathcal{D}_n^n$ dual matrisin determinanı ,

$$\det(\hat{A}) = \det(A) + \varepsilon \left(\det[A_1^* | A_2 | \dots | A_n] + \det[A_1 | A_2^* | \dots | A_n] + \dots + \det[A_1 | A_2 | \dots | A_n^*] \right)$$

şeklinde hesaplanır. Burada A_i^* , A^* matrisinin ve A_i ler de A matrisinin sütunlarını ifade etmektedir, [7].

Teorem 4.90 $\hat{A} = A + \varepsilon A^* \in \mathcal{D}_n^n$ dual matrisinin determinanı,

$$\det(\hat{A}) = \det(A) \left(1 + \varepsilon .iz(A^{-1} A^*) \right) \text{ şeklindedir, [7].}$$

İspat

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}) &= \det(A + \varepsilon A^*) \\ &= \det\left(A \left(I_n + \varepsilon A^{-1} A^* \right)\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan (C.1) eşitliğinden,

$$\det(\hat{A}) = \det\left(A . e^{\varepsilon A^{-1} A^*}\right)$$

bulunur. Teorem (A.2) deki determinant özelliğinden,

$$\det(\hat{A}) = \det(A) . \det\left(e^{\varepsilon A^{-1} A^*}\right)$$

yazılabilir. Teorem (C.5) den dolayı,

$$\det(\hat{A}) = \det(A) . e^{\varepsilon .iz(A^{-1} A^*)}$$

yazılabilir. $e^{\varepsilon x} = 1 + \varepsilon x$ olduğundan

$$\det(\hat{A}) = \det(A) \left(1 + \varepsilon .iz(A^{-1} A^*) \right)$$

elde edilir.

O halde, reel kısmı terslenebilir olan bir dual matrisin determinanı,

$$\det(\hat{A}) = \det(A) . \left(1 + \varepsilon .iz(A^{-1} A^*) \right) \text{ şeklinde bulunur, [7]. (Üstel matrisler için Ek-C ye bakınız.)}$$

12) İki dual matrisin çarpımının determinanı,

$$\det(\hat{A}\hat{B}) = \det(A.B) \cdot (1 + \varepsilon \cdot iz(A^{-1}A^* + B^{-1}B^*))$$

şeklindedir.

İspat

I.yol

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}\hat{B}) &= \det(\hat{A}) \cdot \det(\hat{B}) \\ &= \det(A) \cdot (1 + \varepsilon \cdot iz(A^{-1}A^*)) \cdot \det(B) \cdot (1 + \varepsilon \cdot iz(B^{-1}B^*)) \\ &= \det(A) \cdot \det(B) \cdot (1 + \varepsilon \cdot iz(A^{-1}A^*) + \varepsilon \cdot iz(B^{-1}B^*)) \\ &= \det(AB) \cdot (1 + \varepsilon \cdot iz(A^{-1}A^* + B^{-1}B^*)) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

II. yol

$$\begin{aligned} \det(\hat{A}\hat{B}) &= \det(A.B + \varepsilon(AB^* + A^*B)) \\ &= \det\left((A.B) \left(1 + \varepsilon(A.B)^{-1}(AB^* + A^*B)\right)\right) \\ &= \det\left((A.B) \left(1 + \varepsilon(B^{-1}A^{-1}AB^* + B^{-1}A^{-1}A^*B)\right)\right) \\ &= \det\left((A.B) \left(1 + \varepsilon(B^{-1}B^* + B^{-1}A^{-1}A^*B)\right)\right) \\ &= \det\left((A.B) \cdot e^{\varepsilon(B^{-1}B^* + B^{-1}A^{-1}A^*B)}\right) \\ &= \det(A.B) \det\left(e^{\varepsilon(B^{-1}B^* + B^{-1}A^{-1}A^*B)}\right) \\ &= \det(A.B) e^{\varepsilon \cdot iz(B^{-1}B^* + B^{-1}A^{-1}A^*B)} \\ &= \det(A.B) e^{\varepsilon \cdot iz(B^{-1}B^*) + \varepsilon \cdot iz(B^{-1}A^{-1}A^*B)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det(A.B) e^{\varepsilon.i z (B^{-1} B^*) + \varepsilon.i z (A^* B B^{-1} A^{-1})} \\
&= \det(A.B) e^{\varepsilon.i z (A^{-1} A^* + B^{-1} B^*)} \\
&= \det(A.B) e^{\varepsilon.i z (A^{-1} A^* + B^{-1} B^*)} \\
&= \det(A.B) (1 + \varepsilon.i z (A^{-1} A^* + B^{-1} B^*))
\end{aligned}$$

bulunur.

13) $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$ dual matrislerinin çarpımının determinanı

$$\det(\hat{A}_1 \hat{A}_2 \dots \hat{A}_n) = \det(A_1 A_2 \dots A_n) \cdot (1 + \varepsilon.i z (A_1^{-1} A_1^* + A_2^{-1} A_2^* + \dots + A_n^{-1} A_n^*))$$

ile hesaplanır.

İspat

İspatı yapmak için tümevarım yöntemini kullanalım:

$$n = 2 \text{ için } \det(\hat{A}_1 \hat{A}_2) = \det(A_1 A_2) \cdot (1 + \varepsilon.i z (A_1^{-1} A_1^* + A_2^{-1} A_2^*)) \text{ dir.}$$

$$n = k \text{ için } \det(\hat{A}_1 \hat{A}_2 \dots \hat{A}_k) = \det(A_1 A_2 \dots A_k) \cdot (1 + \varepsilon.i z (A_1^{-1} A_1^* + A_2^{-1} A_2^* + \dots + A_k^{-1} A_k^*))$$

olduğunu kabul edelim.

$n = k + 1$ için

$$\begin{aligned}
\det(\hat{A}_1 \hat{A}_2 \dots \hat{A}_k) &= \det(\hat{A}_1) \cdot \det(\hat{A}_2) \dots \det(\hat{A}_k) \cdot \det(\hat{A}_{k+1}) \\
&= \det(\hat{A}_1 \hat{A}_2 \dots \hat{A}_k) \cdot \det(\hat{A}_{k+1}) \\
&= \det(A_1 A_2 \dots A_k) \cdot (1 + \varepsilon.i z (A_1^{-1} A_1^* + A_2^{-1} A_2^* + \dots + A_k^{-1} A_k^*)) \\
&\quad \cdot \det(A_{k+1}) \cdot (1 + \varepsilon.i z (A_{k+1}^{-1} A_{k+1}^*))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det(A_1.A_2...A_k). \det(A_{k+1}). \left(1 + \varepsilon.i\omega(A_1^{-1}A_1^* + A_2^{-1}A_2^* + ... + A_k^{-1}A_k^*)\right) \\
&\quad . \left(1 + \varepsilon.i\omega(A_{k+1}^{-1}A_{k+1}^*)\right) \\
&= \det(A_1.A_2...A_k.A_{k+1}) \\
&\quad . \left(1 + \varepsilon.i\omega(A_1^{-1}A_1^* + A_2^{-1}A_2^* + ... + A_k^{-1}A_k^*) + \varepsilon.i\omega(A_{k+1}^{-1}A_{k+1}^*)\right)
\end{aligned}$$

Eşitliğinde matrislerin $i\omega$ özellikleri kullanılırsa,

$$\det(\hat{A}_1.\hat{A}_2...\hat{A}_k.\hat{A}_{k+1}) = \det(A_1.A_2...A_k.A_{k+1}). \left(1 + \varepsilon.i\omega(A_1^{-1}A_1^* + A_2^{-1}A_2^* + ... + A_k^{-1}A_k^* + A_{k+1}^{-1}A_{k+1}^*)\right)$$

elde edilir.

Örnek 4.91 $\hat{A} = \begin{bmatrix} 3+2\varepsilon & 1+\varepsilon \\ 2-\varepsilon & 3\varepsilon \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını bulalım.

1.yol

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3+2\varepsilon & 1+\varepsilon \\ 2-\varepsilon & 3\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ şeklinde yazalım.}$$

Burada $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ve $A^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ şeklindedir. O halde, $A_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A_1^* = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $A_2^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$\det(\hat{A}) = \det(A) + \varepsilon \left(\det[A_1^* | A_2] + \det[A_1 | A_2^*] \right)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\det(\hat{A}) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \varepsilon \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) \\
&= -2 + 8\varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur.

II.yol

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{matrisi için}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{şeklinde olup determinant,}$$

$$\det(\hat{A}) = \det(A) \cdot (1 + \varepsilon \cdot \text{iz}(A^{-1}A^*))$$

ile bulunur. Buradan,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad A^{-1}A^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}, \quad \det(A) = -2 \text{ ve}$$

$$\text{iz}(A^{-1}A^*) = \left(\left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{7}{2} \right) \right) = -4$$

elde edilir. O halde,

$$\det(\hat{A}) = (-2)(1 + \varepsilon(-4)) = -2 + 8\varepsilon$$

bulunur.

III.yol

$$\det(\hat{A}) = \begin{vmatrix} 3+2\varepsilon & 1+\varepsilon \\ 2-\varepsilon & 3\varepsilon \end{vmatrix} = (3+2\varepsilon) \cdot (3\varepsilon) - (2-\varepsilon) \cdot (1+\varepsilon)$$

$$= 9\varepsilon - [2 + 2\varepsilon - \varepsilon]$$

$$= -2 + 8\varepsilon$$

bulunur.

4.7 Dual Matrislerin Özdeğer ve Özvektörleri

$\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ şeklinde verilen bir kare dual matrisin öz değer problemi

$$\hat{A}.\vec{X} = \hat{\lambda}.\vec{X}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\vec{X} \in \mathcal{D}^n$ ve $\hat{\lambda} = \lambda + \varepsilon \lambda^* \in \mathcal{D}$ şeklindedir. Buradan,

$$(\hat{A} - \hat{\lambda} \hat{I}_n).\vec{X} = 0 \quad (4.18)$$

Lineer sisteminin $\vec{X} \neq 0$ çözümü olacak şekilde $\hat{\lambda}$ ların bulunması gerekir. Bu lineer sistemin çözümü dışında çözüme sahip olacak şekilde $\hat{\lambda}$ ların bulunması gerekir. Bulunan bu değerlere öz değerler adı verilir. Bu öz değerlere karşılık gelen çözümlere de öz vektörler adı verilir.

(4.18) deki sistem homojen bir sistem olup bu sistemin çözümü her zaman vardır. Sıfırdan farklı çözümün olması için $\det(\hat{A} - \hat{\lambda} \hat{I}_n) = 0$ olmalıdır. Bu determinant hesaplandığında $\hat{\lambda}$ ya bağlı n. dereceden bir polinom elde edilir. Bu polinoma karakteristik polinom adı verilir. Bu polinomun kökleri olan $\hat{\lambda}^i$ ler matrisin öz değerleridir.

$$\det(\hat{A} - \hat{\lambda} \hat{I}_n) = 0$$

eşitliğinden $\hat{\lambda}^n + \hat{a}_1 \hat{\lambda}^{n-1} + \dots + \hat{a}_{n-1} \hat{\lambda} + \hat{a}_n = 0$ denkleminin çözülmesiyle elde edilen $\hat{\lambda}^i$ ler $\hat{A}$ matrisinin özdeğerleridir, bulunan $\hat{\lambda}^i$ ler $(\hat{A} - \hat{\lambda} \hat{I}_n).\vec{X} = 0$ de yerine konulduğunda bulunan $\vec{X}$ ler $\hat{A}$ matrisinin öz vektörleri olacaktır, [16].

 $\mathbb{R}_n^m$ UZAYINDA LORENTZ MATRİS ÇARPIMININ ÖZELLİKLERİ

Tezin ilk orijinal kısmı olan bu bölümde, ikinci bölümde incelenen Lorentz matris çarpımının ek bazı özellikleri verilecektir.

Teorem 5.1 I_n, L – birim matrisinin determinanı -1 dir.

İspat: Verilen bir matrisin determinanı minör ve kofaktör yardımıyla bulunabilir. Böylece I_n, L – birim matrisin determinanı,

$$\begin{aligned}
 \det(I_n) &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}_{n \times n} \\
 &= (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \\
 &\vdots \\
 &= (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = 1 \cdot -1 = -1
 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 5.2 $\forall A, B \in L_n^n$ terslenebilir matrisleri için $(A \cdot_L B)^{-1} = B^{-1} \cdot_L A^{-1}$ dir.

İspat

$(A \cdot_L B) \cdot_L X = X \cdot_L (A \cdot_L B) = I_n$ eşitliğini sağlayan X matrisine $A \cdot_L B$ nin tersi denir.

$$(A \cdot_L B) \cdot_L X = I_n$$

olmak üzere,

$$A \cdot_L (B \cdot_L X) = I_n$$

veya

$$B \cdot_L X = A^{-1}$$

bulunur. Buradan, $X = B^{-1} \cdot_L A^{-1}$ elde edilir.

Teorem 5.3 $A = [a_{ij}] \in L_n^m$ ve $B = [b_{jk}] \in L_p^n$ matrisleri için $(A \cdot_L B)^T = B^T \cdot_L A^T$ dir.

İspat $A \cdot_L B = \left[\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \cdot b_{jk} - a_{in} \cdot b_{nk} \right]$ L – matris çarpımında,

$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \cdot b_{jk} - a_{in} \cdot b_{nk}$ olmak üzere $A \cdot_L B = [c_{ik}] \in L_n^m$ şeklinde yazılabilir. Buradan

dir. O halde,

$$(A \cdot_L B)^T = [c_{ik}]^T = [c_{ki}] = \left[\sum_{j=1}^{n-1} a_{kj} \cdot b_{ji} - a_{kn} \cdot b_{ni} \right]$$

elde edilir. Ayrıca ,

$$B^T \cdot_L A^T = [b_{kj}] \cdot_L [a_{ji}] = \left[\sum_{j=1}^{n-1} b_{kj} \cdot a_{ji} - b_{kn} \cdot a_{ni} \right]$$

bulunur. O halde,

$$(A \cdot_L B)^T = B^T \cdot_L A^T$$

elde edilir.

Tanım 5.4 $A = [a_{ij}] \in L^n$ matrisinin izi, $\text{iz}(A)$ ile gösterilir. $\text{iz}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ olarak tanımlanır.

Teorem 5.5 $A = [a_{ij}], B = [b_{jk}] \in L^n$ olsun. $\text{iz}(A \cdot_L B) \neq \text{iz}(B \cdot_L A)$ dır.

İspat $A \cdot_L B = [a_{ij}] \cdot_L [b_{jk}] = \left[\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \cdot b_{jk} - a_{in} \cdot b_{nk} \right] = [c_{ik}]$ yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \text{iz}(A \cdot_L B) &= \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \cdot b_{ji} - a_{in} \cdot b_{ni} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \cdot b_{ji} \right) - \sum_{i=1}^n a_{in} \cdot b_{ni} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \cdot b_{ji} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} \cdot b_{jn} - \sum_{i=1}^n a_{in} \cdot b_{ni} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\text{iz}(B \cdot_L A) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} \cdot b_{ji} \right) + \sum_{j=1}^n a_{in} \cdot b_{ni} - \sum_{i=1}^{n-1} a_{nj} \cdot b_{jn}$$

elde edilir. Böylece $\text{iz}(A \cdot_L B) \neq \text{iz}(B \cdot_L A)$ olduğu görülür.

Teorem 5.6 Bir $A \in L^n$ matrisinin L -determinantı $\det(A)$ ise bu matrisin tersi olan A^{-1} matrisinin L -determinantı ise $1/\det(A)$ dir.

İspat :

$$\begin{aligned} -1 &= \det(I_n) \\ &= \det(A \cdot_L A^{-1}) \\ &= -\det(A) \cdot \det(A^{-1}) \end{aligned}$$

yazılabilir. O halde $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ elde edilir.

Not 5.7 $\forall A \in L_n^n$ matrisi için $\det(A) = \det(A^T)$ dır. Bu özellik reel katsayılı matrislerle aynıdır.

Teorem 5.8 L – ortogonal matrisin L – determinanı ± 1 dir.

İspat: A , L – ortogonal matris olsun. O halde,

$A^T = A^{-1}$ veya $A^T \cdot_L A = I_n$ yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının determinanı alınır,

$$\det(A^T \cdot_L A) = \det(I_n)$$

elde edilir. Buradan

$$-\det(A^T) \cdot \det(A) = -1$$

$$(\det(A))^2 = 1$$

$$\det(A) = \pm 1$$

eşitliği bulunur.

Örnek 5.9 $\begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix}$ matrisi L – ortogonal matristir.

Tanım 5.10 $A \in L_n^n$ matrisi verilsin. $A^T \cdot_L A^{-1} = I_n$ özelliğini sağlayan matrise L – **simetrik matris** adı verilir.

Örnek 5.11 $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi L – simetrik matristir.

Tanım 5.12 $A \in L_n^n$ matrisi verilsin. $A^T = -A$ özelliğini sağlayan matrise L – **ters Simetrik matris** adı verilir.

Tanım 5.13 $A, B \in L_n^n$ matrisi verilsin. $A \cdot_L A^T = A^T \cdot_L A$ özelliğini sağlayan A matrisine L – **normal matrisler** denir.

Tanım 5.14 $A \in L_n^n$ matrisi verilsin. $A^2 = I$ özelliğini sağlayan matrise L –**involut matris** adı verilir.

Tanım 5.15 $A \in L_n^n$ matrisi verilsin. $A^{p+1} = A$ özelliğini sağlayan matrise L –**periyodik matris** adı verilir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif p tamsayısına da A matrisinin periyodu denir.

Tanım 5.16 $A \in L_n^n$ matrisi verilsin. $A^q = 0 + \varepsilon.0$ olacak şekilde bir pozitif q tamsayısı varsa A matrisine L –**nilpotent matris** denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif q tamsayısına da bu matrisin **indeksi (derecesi)** denir.

Tanım 5.17 $\overline{(A)}^T = A$ eşitliğini sağlayan A kare matrisine L –**Hermityen matris** denir. Eğer $A = [A_{ij}]$ kare matrisi L –Hermityen matris ise $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ eşitliğini sağlar.

Tanım 5.18 $\overline{(A)}^T = -A$ eşitliğini sağlayan A kare matrisine L –**ters Hermityen matris** denir. Eğer $A = [A_{ij}]$ kare matrisi L –Ters Hermityen matris ise $A_{ij} = -\overline{A_{ji}}$ eşitliğini sağlar.

Tanım 5.19 $A, B \in L_n^n$ matrisi verilsin. $A_{\cdot L} B = B_{\cdot L} A$ özelliğini sağlayan A ve B matrislerine L –**değişmeli matrisler** denir.

Tanım 5.20 $\overline{(A)}^T \cdot_L A = A_{\cdot L} \overline{(A)}^T = I_n$ eşitliğini sağlayan A matrisine L –**üniter matris** denir.

Tanım 5.21 $(A)^T \cdot_L A = A_{\cdot L} (A)^T = I_n$ eşitliğini sağlayan A matrisine L –**ortogonal matris** denir.

$\mathcal{D}_1^n$ n -BOYUTLU DUAL LORENTZ UZAYI

Bu orijinal bölümde, n – boyutlu dual Lorentz uzayı incelenecektir.

6.1 $\mathcal{D}_1^n$ Uzayı

$\mathcal{D}^n$ dual uzayının elemanları bileşenleri dual sayılar olan n tane sıralı dual sayıdan oluşmaktadır. $\mathcal{D}^n$ dual vektörlerin kümesini,

$$\mathcal{D}^n = \left\{ \vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n) \mid A_i \in \mathcal{D}, 1 \leq i \leq n \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, $\vec{A} \in \mathcal{D}^n$ vektörü iki reel vektörün dual kombinasyonu olarak $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ şeklinde yazılabileceğinden dual vektörlerin kümesi,

$$\mathcal{D}^n = \left\{ \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{a}^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

olarak yazılabilir.

$\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n) = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$, $\vec{B} = (B_1, B_2, \dots, B_n) = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathcal{D}^n$ vektörleri için,

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_L: \mathcal{D}^n \times \mathcal{D}^n &\rightarrow \mathcal{D} \\ \left(\begin{pmatrix} \vec{A} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \right) &\rightarrow \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L = \sum_{i=1}^{n-1} A_i B_i - A_n B_n \end{aligned}$$

iç çarpımı tanımlayalım. Buradan,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L = A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_{n-1} B_{n-1} - A_n B_n$$

$$= (a_1 + \varepsilon a_1^*)(b_1 + \varepsilon b_1^*) + \dots + (a_{n-1} + \varepsilon a_{n-1}^*)(b_{n-1} + \varepsilon b_{n-1}^*) - (a_n + \varepsilon a_n^*)(b_n + \varepsilon b_n^*)$$

veya

$$\begin{aligned} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L &= a_1 b_1 + \varepsilon (a_1 b_1^* + a_1^* b_1) + \dots + a_{n-1} b_{n-1} + \varepsilon (a_{n-1} b_{n-1}^* + a_{n-1}^* b_{n-1}) \\ &\quad - a_n b_n - \varepsilon (a_n b_n^* + a_n^* b_n) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L &= a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} - a_n b_n \\ &\quad + \varepsilon \left((a_1 b_1^* + \dots + a_{n-1} b_{n-1}^* - a_n b_n^*) + (a_1^* b_1 + \dots + a_{n-1}^* b_{n-1} - a_n^* b_n) \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. $\mathbb{R}_1^n$ Lorentz uzayında Lorentz iç çarpımı kullanılırsa,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L + \varepsilon \left(\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle_L + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle_L \right)$$

elde edilir.

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_L = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L + \varepsilon \left(\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle_L + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle_L \right)$$

ile verilen Lorentz iç çarpımı ile birlikte $\mathcal{D}^n$ uzayına **Dual Lorentz n – uzay** veya **Dual Minkowski n – uzay** adı verilir. $\mathcal{D}_l^n$ ile gösterilir. Burada $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L$ çarpımı $\mathbb{R}_1^n$ de $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin Lorentz iç çarpımıdır ve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}^*, \vec{b}^* \in \mathbb{R}_1^n$ dir.

Tanım 6.1 Bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathcal{D}_l^n$ dual vektörünün normu

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle_L \text{ olmak üzere, } \sqrt{x + \varepsilon x^*} = \sqrt{x} + \varepsilon \frac{x^*}{2\sqrt{x}} \text{ olduğundan,}$$

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle_L}{\|\vec{a}\|}$$

şeklinde tanımlanır.

Not 6.2 $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathcal{D}_1^n$ vektörünün kendisiyle iç çarpımı,

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle_L \text{ dir. (3.1) deki denklem yardımıyla,}$$

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle > 0 \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0 \text{ olduğu görülür.}$$

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathcal{D}_1^n$ vektörünün normu göz önüne alınırsa, elde edilen ifadenin pozitif mi yoksa negatif mi olduğu, vektörün reel kısmı olan $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^n$ vektörüne bağlı olduğu görülür. O halde $\mathcal{D}_1^n$ dual uzayındaki vektörleri sınıflandırabiliriz.

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathcal{D}_1^n \text{ vektörü için;}$$

- $\vec{a}$ spacelike ise $\vec{A}$ vektörü **spacelike**,
- $\vec{a}$ timelike ise $\vec{A}$ vektörü **timelike**,
- $\vec{a}$ lightlike ise $\vec{A}$ vektörü **lightlike**

şeklinde tanımlanır.

$\mathcal{D}_1^n$ dual vektörlerinin kümesi $\mathcal{D}_1^n = \left\{ \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}_1^n \right\}$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 6.3 $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathcal{D}_1^n$ dual vektörü verilsin. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 1$ ise $\vec{A}$ vektörüne **dual spacelike birim vektör**, $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = -1$ ise $\vec{A}$ vektörüne **dual timelike birim vektör** adı verilir.

Tanım 6.4 $\mathcal{D}_1^n$ de Dual timelike birim vektörlerin kümesi **dual hiperbolik birim küre** olarak tanımlanır ve H_0^{n-1} ile gösterilir. Benzer şekilde $\mathcal{D}_1^n$ de dual spacelike birim vektörlerin kümesi **dual Lorenzian birim küre** olarak tanımlanır ve S_1^{n-1} ile gösterilir.

$$H_0^{n-1} = \left\{ \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \|A\| = (1, 0); \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}_1^n; \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L < 0 \right\}$$

ve

$$S_1^{n-1} = \left\{ \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \|A\| = (1, 0); \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}_1^n; \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L > 0 \right\} .$$

DUAL LORENTZ MATRİS ÇARPIMI

Bu orijinal bölümde Dual matrislerde Lorentz matris çarpımı tanımlanarak sağladığı özellikler incelenecektir.

7.1 Dual Katsayılı Matrislerin Lorentz Çarpımı

$$\hat{A} = [A_{ij}] = [a_{ij} + \varepsilon a_{ij}^*] = [a_{ij}] + \varepsilon [a_{ij}^*] = A + \varepsilon A^* \in \mathcal{D}_n^m \quad \text{ve}$$

$$\hat{B} = [B_{jk}] = [b_{jk} + \varepsilon b_{jk}^*] = [b_{jk}] + \varepsilon [b_{jk}^*] = B + \varepsilon B^* \in \mathcal{D}_p^n \quad \text{dual matrisleri verilsin. } \hat{A} \text{ ve}$$

$\hat{B}$ dual matrislerinin " $\cdot_L$ " ile gösterilen Lorentz matris çarpımı,

$$\hat{A} \cdot_L \hat{B} = \left[\sum_{j=1}^{n-1} A_{ij} \cdot B_{jk} - A_{in} \cdot B_{nk} \right]$$

şeklinde tanımlanır. Buradan,

$$\begin{aligned} \hat{A} \cdot_L \hat{B} &= \left[\sum_{j=1}^{n-1} \left[(a_{ij} + \varepsilon a_{ij}^*) (b_{jk} + \varepsilon b_{jk}^*) \right] - (a_{in} + \varepsilon a_{in}^*) (b_{nk} + \varepsilon b_{nk}^*) \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n-1} \left((a_{ij} b_{jk}) + \varepsilon (a_{ij} b_{jk}^* + a_{ij}^* b_{jk}) \right) - (a_{in} b_{nk}) - \varepsilon (a_{in} b_{nk}^* + a_{in}^* b_{nk}) \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n-1} (a_{ij} \cdot b_{jk}) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n-1} (a_{ij} \cdot b_{jk}^* + a_{ij}^* \cdot b_{jk}) - a_{in} \cdot b_{nk} - \varepsilon (a_{in} \cdot b_{nk}^* + a_{in}^* \cdot b_{nk}) \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n-1} (a_{ij} \cdot b_{jk}) - a_{in} \cdot b_{nk} + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n-1} (a_{ij} \cdot b_{jk}^* + a_{ij}^* \cdot b_{jk}) - (a_{in} \cdot b_{nk}^* + a_{in}^* \cdot b_{nk}) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_{j=1}^{n-1} (a_{ij} \cdot b_{jk}) - a_{in} b_{nk} + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \cdot b_{jk}^* - a_{in} \cdot b_{nk}^* + \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}^* \cdot b_{jk} - a_{in}^* \cdot b_{nk} \right) \right] \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n-1} (a_{ij} \cdot b_{jk}) - a_{in} b_{nk} \right] + \varepsilon \left[\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \cdot b_{jk}^* - a_{in} \cdot b_{nk}^* + \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}^* \cdot b_{jk} - a_{in}^* \cdot b_{nk} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ dual matrislerinin Lorentz çarpımı,

$$\hat{A} \cdot_L \hat{B} = A \cdot_L B + \varepsilon (A \cdot_L B^* + A^* \cdot_L B)$$

şeklinde de tanımlanabilir. Burada A, A^*, B ve B^* elemanları reel sayılar olan matrislerdir. Ayrıca, $\mathcal{D}_n^m$ uzayını L - çarpımı ile birlikte $\mathcal{DL}_n^m$ ile göstereceğiz.

Teorem 7.1

- i) $\forall \hat{A} \in \mathcal{DL}_n^m, \hat{B} \in \mathcal{DL}_p^n, \hat{C} \in \mathcal{DL}_r^p$ için $\hat{A} \cdot_L (\hat{B} \cdot_L \hat{C}) = (\hat{A} \cdot_L \hat{B}) \cdot_L \hat{C}$
- ii) $\forall \hat{A} \in \mathcal{DL}_n^m, \hat{B}, \hat{C} \in \mathcal{DL}_p^n$ için $\hat{A} \cdot_L (\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A} \cdot_L \hat{B} + \hat{A} \cdot_L \hat{C}$
- iii) $\forall \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{DL}_n^m, \hat{C} \in \mathcal{DL}_p^n$ için $(\hat{A} + \hat{B}) \cdot_L \hat{C} = \hat{A} \cdot_L \hat{C} + \hat{B} \cdot_L \hat{C}$
- iv) $\forall k \in \mathbb{R}$ ve $\hat{A} \in \mathcal{DL}_n^m, \hat{B} \in \mathcal{DL}_p^n$ için $k(\hat{A} \cdot_L \hat{B}) = (k\hat{A}) \cdot_L \hat{B} = \hat{A} \cdot_L (k\hat{B})$
- v) $\forall \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{DL}_n^m$ için $\hat{A} \cdot_L \hat{B} \neq \hat{B} \cdot_L \hat{A}$ (genellikle)

eşitlikleri sağlanır.

İspat

- i) $\forall \hat{A} \in \mathcal{DL}_n^m, \hat{B} \in \mathcal{DL}_p^n, \hat{C} \in \mathcal{DL}_r^p$ için $\hat{A} \cdot_L (\hat{B} \cdot_L \hat{C}) = (\hat{A} \cdot_L \hat{B}) \cdot_L \hat{C}$ olduğunu görelim.

Bu matrisler $\hat{A} = A + \varepsilon A^*, \hat{B} = B + \varepsilon B^*, \hat{C} = C + \varepsilon C^*$ şeklinde verilsin.

$$\begin{aligned}
\hat{A} \cdot_L (\hat{B} \cdot_L \hat{C}) &= (A + \varepsilon A^*) \cdot_L ((B + \varepsilon B^*) \cdot_L (C + \varepsilon C^*)) \\
&= (A + \varepsilon A^*) \cdot_L (B \cdot_L C + \varepsilon (B \cdot_L C^* + B^* \cdot_L C))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_{\cdot L} B_{\cdot L} C + \varepsilon A_{\cdot L} (B_{\cdot L} C^* + B^*_{\cdot L} C) + \varepsilon A^*_{\cdot L} B_{\cdot L} C \\
&= A_{\cdot L} B_{\cdot L} C + \varepsilon (A_{\cdot L} B_{\cdot L} C^* + A_{\cdot L} B^*_{\cdot L} C + A^*_{\cdot L} B_{\cdot L} C)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
(\hat{A}_{\cdot L} \hat{B})_{\cdot L} \hat{C} &= ((A + \varepsilon A^*)_{\cdot L} (B + \varepsilon B^*))_{\cdot L} (C + \varepsilon C^*) \\
&= (A_{\cdot L} B + \varepsilon (A^*_{\cdot L} B + A_{\cdot L} B^*))_{\cdot L} (C + \varepsilon C^*) \\
&= A_{\cdot L} B_{\cdot L} C + \varepsilon A_{\cdot L} B_{\cdot L} C^* + \varepsilon (A^*_{\cdot L} B + A_{\cdot L} B^*)_{\cdot L} C \\
&= A_{\cdot L} B_{\cdot L} C + \varepsilon (A_{\cdot L} B_{\cdot L} C^* + A_{\cdot L} B^*_{\cdot L} C + A^*_{\cdot L} B_{\cdot L} C)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde birleşme özelliği sağlanır.

ii) $\forall \hat{A} \in \mathcal{DL}_n^m, \hat{B}, \hat{C} \in \mathcal{DL}_p^n$ için $\hat{A}_{\cdot L} (\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}_{\cdot L} \hat{B} + \hat{A}_{\cdot L} \hat{C}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{\cdot L} (\hat{B} + \hat{C}) &= (A + \varepsilon A^*)_{\cdot L} (B + C + \varepsilon (B^* + C^*)) \\
&= A_{\cdot L} (B + C) + \varepsilon A_{\cdot L} (B^* + C^*) + \varepsilon A^*_{\cdot L} (B + C) \\
&= A_{\cdot L} B + A_{\cdot L} C + \varepsilon A_{\cdot L} B^* + \varepsilon A_{\cdot L} C^* + \varepsilon A^*_{\cdot L} B + \varepsilon A^*_{\cdot L} C \\
&= A_{\cdot L} B + \varepsilon (A_{\cdot L} B^* + A^*_{\cdot L} B) + A_{\cdot L} C + \varepsilon (A_{\cdot L} C^* + A^*_{\cdot L} C) \\
&= (A + \varepsilon A^*)_{\cdot L} (B + \varepsilon B^*) + (A + \varepsilon A^*)_{\cdot L} (C + \varepsilon C^*) \\
&= \hat{A}_{\cdot L} \hat{B} + \hat{A}_{\cdot L} \hat{C}
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $\forall \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{DL}_n^m, \hat{C} \in \mathcal{DL}_p^n$ için $(\hat{A} + \hat{B})_{\cdot L} \hat{C} = \hat{A}_{\cdot L} \hat{C} + \hat{B}_{\cdot L} \hat{C}$ olduğunu gösterelim.

$$(\hat{A} + \hat{B})_{\cdot L} \hat{C} = (A + B + \varepsilon (A^* + B^*))_{\cdot L} (C + \varepsilon C^*)$$

$$\begin{aligned}
&= (A+B) \cdot_L C + \varepsilon (A+B) \cdot_L C^* + \varepsilon (A^* + B^*) \cdot_L C \\
&= A \cdot_L C + \varepsilon (A \cdot_L C^* + A^* \cdot_L C) + B \cdot_L C + \varepsilon (B \cdot_L C^* + B^* \cdot_L C) \\
&= \hat{A} \cdot_L \hat{C} + \hat{B} \cdot_L \hat{C}
\end{aligned}$$

bulunur.

iv) $\forall k \in \mathbb{R}$ ve $\hat{A} \in \mathcal{DL}_n^m, \hat{B} \in \mathcal{DL}_p^n$ için $k(\hat{A} \cdot_L \hat{B}) = (k\hat{A}) \cdot_L \hat{B} = \hat{A} \cdot_L (k\hat{B})$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
k(\hat{A} \cdot_L \hat{B}) &= k(A \cdot_L B + \varepsilon (A \cdot_L B^* + A^* \cdot_L B)) \\
&= kA \cdot_L B + \varepsilon (kA \cdot_L B^* + kA^* \cdot_L B) \\
&= (kA) \cdot_L B
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde eşitliğin diğer kısmı da gösterilebilir.

Tanım 7.2 $\mathcal{DL}_n^m$ kümesi matrislerde toplama işlemine göre bir gruptur.

İspat Kapalılık, birleşme ve değişme özelliklerinin varlığı kolayca görülebilir. Ayrıca etkisiz eleman $\hat{E} = 0 + \varepsilon 0$ dır. Ters eleman ise $\hat{A} = A + \varepsilon A^* \in \mathcal{DL}_n^m$ için $\hat{A}^{-1} = -A - \varepsilon A^*$ şeklindedir. O halde, $\mathcal{DL}_n^m$ kümesi matrislerde toplama işlemine göre bir gruptur.

Teorem 7.3 $\mathcal{DL}_n^m$ kümesi matrislerde toplama ve L – çarpıma göre birimli bir halkadır.

İspat $(\mathcal{DL}_n^m, +, \cdot_L)$ üçlüsü için,

i) $(\mathcal{DL}_n^m, +)$ ikilisi değişmeli bir gruptur.

ii) Teorem 7.1 (i) şikkından L – çarpımın birleşme özelliği vardır.

iii) Teorem 7.1 (i) ve (ii) den L – çarpımın toplama üzerine dağılma özelliğini sağlar.

O halde $\mathcal{DL}_n^m$ kümesi matrislerde toplama ve L – çarpıma göre birimli bir halkadır.

Tanım 7.4 $\forall \hat{A} \in \mathcal{DL}_n^m$ için $\hat{I}_n \cdot_L \hat{A} = \hat{A}_L \hat{I}_n = \hat{A}$ özelliğini sağlayan $\hat{I}_n$ matrisine $\mathcal{DL}$ – birim dual matris denir. $\hat{I}_n$, L – birim dual matrisinin esas köşegen üzerinde bulunan elemanların dışındaki elemanların hepsi $0 = 0 + \varepsilon 0$ ve esas köşegen dışındaki elemanları da $(1 + \varepsilon 0, 1 + \varepsilon 0, \dots, 1 + \varepsilon 0, -1 - \varepsilon 0)$ olma özelliğine sahiptir.

$$\hat{I}_n = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon 0 & 0 + \varepsilon 0 & \cdots & 0 + \varepsilon 0 \\ 0 + \varepsilon 0 & 1 + \varepsilon 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 + \varepsilon 0 & \cdots & & -1 - \varepsilon 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

şeklindedir.

Teorem 7.5 $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{DL}_n^n$ matrisleri için, $iz(\hat{A}_L \hat{B}) \neq iz(\hat{A} \hat{B}_L)$ dir.

İspat

$$\begin{aligned} iz(\hat{A}_L \hat{B}) &= iz(A_L B + \varepsilon(A_L B^* + A^* \cdot_L B)) \\ &= iz(A_L B) + \varepsilon iz(A_L B^* + A^* \cdot_L B) \\ &= iz(A_L B) + \varepsilon iz(A_L B^*) + \varepsilon iz(A^* \cdot_L B) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} iz(\hat{B}_L \hat{A}) &= iz(B_L A + \varepsilon(B_L A^* + B^* \cdot_L A)) \\ &= iz(B_L A) + \varepsilon iz(B^* \cdot_L A + B_L A^*) \\ &= iz(B_L A) + \varepsilon iz(B_L A^*) + \varepsilon iz(B^* \cdot_L A) \end{aligned}$$

bulunur. A, B reel matrislerinin Lorentz matris çarpımının izi $iz(A_L B) \neq iz(A \hat{B}_L)$ özelliğine sahip olduğundan dolayı $iz(\hat{A}_L \hat{B}) \neq iz(\hat{A} \hat{B}_L)$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 7.6 Bir $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ $n \times n$ -tipinde dual matrisi verilsin. A reel matrisi L -terslenebilir ise $\hat{A}$ dual matrisinin tersi vardır ve $\hat{A}^{-1} = A^{-1} + \varepsilon \cdot (-A^{-1} \cdot_L A^* \cdot_L A^{-1})$ dir.

İspat $\hat{A} \cdot_L \hat{B} = \hat{B} \cdot_L \hat{A} = \hat{I}_n$ eşitliğini sağlayan $\hat{B}$ matrisi $\hat{A}$ matrisinin tersidir.

$\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ ve $\hat{B} = B + \varepsilon B^*$ matrisleri için,

$$\hat{A} \cdot_L \hat{B} = A \cdot_L B + \varepsilon (A \cdot_L B^* + A^* \cdot_L B) = \hat{I}_n + \varepsilon 0 \quad \text{ve}$$

$$\hat{B} \cdot_L \hat{A} = B \cdot_L A + \varepsilon (B \cdot_L A^* + B^* \cdot_L A) = \hat{I}_n + \varepsilon 0$$

eşitlikleri sağlansın. Bu eşitlikten $A \cdot_L B = \hat{I}_n$, $B \cdot_L A = \hat{I}_n$ ve $A \cdot_L B^* + A^* \cdot_L B = 0$ elde edilir. Buradan $B = A^{-1}$ ve $B^* = A^{-1} \cdot_L A^* \cdot_L A^{-1}$ bulunur.

Böylece Eşitliğin diğer tarafından da benzer sonuçlar elde edilir. $\hat{B} = \hat{A}^{-1} = A^{-1} + \varepsilon \cdot (-A^{-1} \cdot_L A^* \cdot_L A^{-1})$ elde edilir.

Teorem 7.7 $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{DL}_n^n$, terslenebilir matrisler için $(\hat{A} \cdot_L \hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1} \cdot_L \hat{A}^{-1}$ eşitliği sağlanır.

İspat $(\hat{A} \cdot_L \hat{B}) \cdot_L \hat{X} = \hat{X} \cdot_L (\hat{A} \cdot_L \hat{B}) = \hat{I}_n$ olacak şekilde $\hat{X} \in \mathcal{DL}_n^n$ var mıdır?

$(\hat{A} \cdot_L \hat{B}) \cdot_L \hat{X} = \hat{I}_n$ için $\hat{A} \cdot_L (\hat{B} \cdot_L \hat{X}) = \hat{I}_n$ yazılır. Buradan $\hat{B} \cdot_L \hat{X} = \hat{A}^{-1}$ veya $\hat{X} = \hat{B}^{-1} \cdot_L \hat{A}^{-1}$ elde edilir. Benzer şekilde, $\hat{X} \cdot_L (\hat{A} \cdot_L \hat{B}) = \hat{I}_n$ için de $\hat{X} = \hat{B}^{-1} \cdot_L \hat{A}^{-1}$ elde edilir.

Teorem 7.8 $\hat{A} = [a_{ij}] \in \mathcal{DL}_n^m$ ve $\hat{B} = [b_{jk}] \in \mathcal{DL}_p^n$ matrisleri için $(\hat{A} \cdot_L \hat{B})^T = \hat{B}^T \cdot_L \hat{A}^T$ eşitliği sağlanır.

İspat $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$, $\hat{B} = B + \varepsilon B^*$ matrisleri için, $\hat{A} \cdot_L \hat{B} = A \cdot_L B + \varepsilon (A \cdot_L B^* + A^* \cdot_L B)$ olduğunu biliyoruz. O halde,

$$(\hat{A} \cdot_L \hat{B})^T = (A \cdot_L B + \varepsilon (A \cdot_L B^* + A^* \cdot_L B))^T$$

$$\begin{aligned}
&= (A \cdot_L B)^T + \varepsilon (A \cdot_L B^*)^T + \varepsilon (A^* \cdot_L B)^T \\
&= B^T \cdot_L A^T + \varepsilon \left((B^{*T} \cdot_L A^T) + (B^T \cdot_L A^{*T}) \right) \\
&= \hat{B}^T \cdot_L \hat{A}^T
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 7.9 $\hat{A} \in \mathcal{DL}_n^n$ matrisinin L -inversi varsa tektir.

İspat $\hat{A} \in \mathcal{DL}_n^n$ matrisinin $\hat{B}$ ve $\hat{D}$ gibi iki tane tersi olduğunu kabul edelim. O halde,

$$\hat{B} = \hat{B} \cdot_L \hat{I}_n = \hat{B} (\hat{A} \cdot_L \hat{D}) = (\hat{B} \cdot_L \hat{A}) \cdot_L \hat{D} = \hat{I}_n \cdot_L \hat{D} = \hat{D}$$

olup $\hat{B} = \hat{D}$ elde edilir.

Tanım 7.10 $\hat{A} \in \mathcal{DL}_n^n$ bir kare dual matris olsun. $\hat{A}$ matrisinin n defa kendisiyle L -çarpımının sonucuna, $\hat{A}$ dual matrisinin **n . kuvveti** denir ve $\hat{A}^n$ ile gösterilir. Özel olarak $\hat{A}^2 = \hat{A}$ ise $\hat{A}$ matrisine **$\mathcal{DL}$ -idempotent dual matris** denir.

$$\hat{A}^1 = A + \varepsilon A^*$$

$$\hat{A}^2 = A^2 + \varepsilon (A \cdot_L A^* + A^* \cdot_L A)$$

$$\hat{A}^3 = A^3 + \varepsilon (A \cdot_L (A \cdot_L A^* + A^* \cdot_L A) + A^* \cdot_L A^2)$$

$$= A^3 + \varepsilon (A \cdot_L A \cdot_L A^* + A \cdot_L A^* \cdot_L A + A^* \cdot_L A \cdot_L A)$$

$$\hat{A}^4 = A^4 + \varepsilon (A \cdot_L (A \cdot_L A \cdot_L A^* + A \cdot_L A^* \cdot_L A + A^* \cdot_L A \cdot_L A) + A^* \cdot_L (A^3))$$

$$= A^4 + \varepsilon (A \cdot_L A \cdot_L A \cdot_L A^* + A \cdot_L A \cdot_L A^* \cdot_L A + A \cdot_L A^* \cdot_L A \cdot_L A + A^* \cdot_L A \cdot_L A \cdot_L A)$$

$\vdots$

$$\begin{aligned}
\hat{A}^n = A^n + \varepsilon \Big(& \underbrace{A A \dots A}_{n-1} A^* + \underbrace{A \cdot_L A \cdot_L \dots A \cdot_L}_{n-2} A^* \cdot_L \underbrace{A}_{1} + \underbrace{A \cdot_L A \cdot_L \dots A \cdot_L}_{n-3} A^* \cdot_L \underbrace{A \cdot_L A}_{2} + \dots + A^* \cdot_L \underbrace{A \cdot_L A \cdot_L \dots A}_{n-1} \Big)
\end{aligned}$$

Teorem 7.11 $\hat{A} \in \mathcal{DL}_n^r$ matrisi verilsin. $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ matrisinin $\mathcal{DL}$ – idempotent dual matris olması için gerek ve yeter koşul A reel matrisinin L – idempotent olması ve $A_{\cdot L} A^* + A^*_{\cdot L} A = A^*$ olmasıdır.

İspat $(\Rightarrow)$ $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ matrisi $\mathcal{DL}$ – idempotent dual matris yani $\hat{A}^2 = A^2 + \varepsilon(A_{\cdot L} A^* + A^*_{\cdot L} A) = \hat{A}$ olsun. Bu durumda, $A = A^2$ ve $A_{\cdot L} A^* + A^*_{\cdot L} A = A^*$ dir. Yani A reel matrisi L – idempotenttir ve $A_{\cdot L} A^* + A^*_{\cdot L} A = A^*$ dir.

$(\Leftarrow)$ A reel matrisi L – idempotent olsun. O halde $A^2 = A$ ve $A_{\cdot L} A^* + A^*_{\cdot L} A = A^*$ eşitlikleri sağlanır. Buradan $A + \varepsilon A^* = A^2 + \varepsilon(A_{\cdot L} A^* + A^*_{\cdot L} A)$ elde edilir. Yani, $\hat{A}$ bir $\mathcal{DL}$ – idempotent dual matristir.

Tanım 7.12 Bir $\hat{A}$ kare dual matrisi için $\hat{A}^{p+1} = \hat{A}$ eşitliğini sağlayan bir pozitif p tamsayısı varsa $\hat{A}$ kare dual matrisine $\mathcal{DL}$ –**periyodik dual matris** denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif p tamsayısına da $\hat{A}$ dual matrisinin **periyodu** denir.

Teorem 7.13 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ periyodu p olan bir $\mathcal{DL}$ – periyodik dual matris ise A reel matrisi de L – periyodik matristir ve periyodu p dir.

İspat $\hat{A}^{p+1} = \hat{A}$ ise

$$A^{p+1} + \varepsilon(A_{\cdot L} A_{\cdot L} \dots A_{\cdot L} A^* + A_{\cdot L} A_{\cdot L} A_{\cdot L} \dots A^*_{\cdot L} A + \dots + A^*_{\cdot L} A_{\cdot L} A_{\cdot L} \dots A) = A + \varepsilon A^*$$

olup buradan,

$$A^{p+1} = A$$

elde edilir. Yani A reel L – periyodik matristir.

Tanım 7.14 Bir $\hat{A}$ kare dual matrisi için $\hat{A}^q = 0 + \varepsilon.0$ olacak şekilde bir pozitif q tamsayısı varsa $\hat{A}$ dual matrisine $\mathcal{DL}$ –**nilpotent dual matris** denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif q tamsayısına da bu matrisin **indeksi (derecesi)** denir.

Teorem 7.15 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$, $\mathcal{DL}$ –nilpotent dual matris ise A reel L –nilpotent matristir.

İspat $\hat{A}^q = 0 + \varepsilon \cdot 0$ ise

$$A^q + \varepsilon(A_{\cdot L} A_{\cdot L} A_{\cdot L} \dots A_{\cdot L} A^* + A_{\cdot L} A_{\cdot L} A_{\cdot L} \dots A^*_{\cdot L} A + \dots + A^*_{\cdot L} A_{\cdot L} A_{\cdot L} \dots A) = 0 + \varepsilon \cdot 0$$

bulunur. O halde, $A^q = 0$ ise A bir reel L –nilpotent matristir.

Tanım 7.16 $\hat{A} \in \mathcal{DL}_n''$ matrisi verilsin. $\hat{A}^T = \hat{A}$ özelliğini sağlayan matrise $\mathcal{DL}$ –Simetrik dual matris adı verilir.

Teorem 7.17 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ matrisinin bir $\mathcal{DL}$ –simetrik dual matris olması için gerek ve yeter koşul A ve A^* matrislerinin reel L –simetrik matrisler olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ simetrik dual matris olsun. O halde $\hat{A}^T = \hat{A}$ için

$$\begin{aligned} A + \varepsilon A^* &= (A + \varepsilon A^*)^T \\ &= A^T + \varepsilon A^{*T} \end{aligned}$$

olup buradan,

$$A^T = A \text{ ve } A^{*T} = A^*$$

elde edilir. Dolayısıyla A ve A^* reel L –simetrik matrislerdir.

$(\Leftarrow)$ Diğer taraftan, A ve A^* reel L –simetrik matris olsun. O halde, $A^{*T} = A^*$ eşitliğini sağlar. O halde, $A^T + \varepsilon A^{*T} = A + \varepsilon A^*$ elde edilir. Bundan dolayı $\hat{A}$ $\mathcal{DL}$ –simetrik dual matristir.

Tanım 7.18 $\hat{A}^T = -\hat{A}$ özelliğini sağlayan matrise $\mathcal{DL}$ –ters simetrik dual matris adı verilir.

Tanım 7.19 $\hat{A} \in \mathcal{DL}_n^n$ matrisi verilsin. $\hat{A}^T = -\hat{A}$ eşitliğini sağlayan $\hat{A}$ kare dual matrisine **$\mathcal{DL}$ -ters simetrik dual matris** denir. Eğer $\hat{A} = [A_{ij}]$ bir L -ters simetrik dual matris ise her i, j için $A_{ij} = -A_{ji}$ dir.

Teorem 7.20 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ matrisinin bir **$\mathcal{DL}$ -ters simetrik dual matris** olması için gerek ve yeter koşul A ve A^* matrislerinin reel L -ters simetrik matrisler olmasıdır.

İspat

$(\Rightarrow)$ $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ matrisi **$\mathcal{DL}$ -ters simetrik dual matris** olsun. O halde,

$$(A + \varepsilon A^*)^T = -(A + \varepsilon A^*) \quad \text{veya} \quad A^T + \varepsilon A^{*T} = -A - \varepsilon A^*$$

yazılır. Buradan,

$$A^T = -A \quad \text{ve} \quad A^{*T} = -A^*$$

elde edilir. O halde, A ve A^* reel L -ters simetrik matrislerdir.

$(\Leftarrow)$ A ve A^* reel L -ters simetrik matris olsun. O halde, $A^T = -A$ ve $A^{*T} = -A^*$ şartları sağlanır. Buradan $A^T + \varepsilon A^{*T} = -A - \varepsilon A^*$ bulunur. O halde, $\hat{A}^T = -\hat{A}$ elde edilir. Yani $\hat{A}$ matrisi **$\mathcal{DL}$ -ters simetrik dual matristir**.

Tanım 7.21 $\hat{A} \in \mathcal{DL}_n^n$ matrisi verilsin. $\overline{(\hat{A})^T} = \hat{A}$ eşitliğini sağlayan $\hat{A}$ kare dual matrisine **$\mathcal{DL}$ -Hermityen dual matris** denir. Eğer $\hat{A} = [A_{ij}]$ kare dual matrisi Hermitian dual matris ise $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ eşitliğini sağlar.

Teorem 7.22 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ **$\mathcal{DL}$ -Hermityen dual matris** olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin reel L -simetrik matris ve A^* matrisinin L -ters simetrik matris olmasıdır.

İspat:

$(\Rightarrow) \hat{A} = A + \varepsilon A^* \quad \mathcal{DL}$ – Hermityen dual matris olsun. O halde $\overline{(\hat{A})^T} = \hat{A}$ için

$$\begin{aligned} A + \varepsilon A^* &= (A - \varepsilon A^*)^T \\ &= A^T - \varepsilon A^{*T} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $A^T = A$ ve $A^* = -A^{*T}$ elde edilir.

$(\Leftarrow) \quad A^T = A$ ve $A^* = -A^{*T}$ olsun. Buradan $A + \varepsilon A^* = A^T - \varepsilon A^{*T}$ olduğundan $\overline{(\hat{A})^T} = \hat{A}$ elde edilir.

Tanım 7.23 $\overline{(\hat{A})^T} = -\hat{A}$ olacak şekilde $\hat{A}$ dual kare matrisine $\mathcal{DL}$ –ters Hermityen dual matris denir. Eğer $\hat{A} = (A_{ij})$ dual kare matrisi ters dual Hermitian matris ise $A_{ij} = -\overline{A_{ji}}$ dir.

Teorem 7.24 $\hat{A}$ matrisinin $\mathcal{DL}$ –ters Hermityen dual matris olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin L –ters simetrik matris ve A^* matrisinin L –simetrik matris olmasıdır.

İspat $(\Rightarrow) \hat{A} = [A_{ij}] = A + \varepsilon A^* \quad L$ –ters Hermityen dual matris yani $\overline{(\hat{A})^T} = -\hat{A}$ olsun.

O halde,

$$-A - \varepsilon A^* = (A - \varepsilon A^*)^T = A^T - \varepsilon A^{*T}$$

olmak üzere $A^T = -A$ ve $A^* = A^{*T}$ elde edilir.

$(\Leftarrow) \quad A^T = -A, \quad A^* = A^{*T}$ olsun. O halde $\overline{(\hat{A})^T} = -\hat{A}$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tanım 7.25 $\hat{A} \in \mathcal{DL}_n^n$ matrisi verilsin. $\hat{A}^2 = \hat{I}_n$ eşitliğini sağlayan $\hat{A}$ kare dual matrisine **$\mathcal{DL}$ – dual involut matris** denir.

Teorem 7.26 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ dual matrisi **$\mathcal{DL}$ – involut dual matris** ise A matrisi bir reel L – involut matristir.

İspat $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ dual matrisi **$\mathcal{DL}$ – involut dual matris** olsun. O halde, $\hat{A}^2 = \hat{I}_n$ olmak üzere, $A^2 + \varepsilon(A_{\cdot L} A^* + A^*_{\cdot L} A) = I_n + \varepsilon 0$ için $A^2 = I_n$ yani A reel L – involut matristir.

Tanım 7.27 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ ve $\hat{B} = B + \varepsilon B^*$ $n \times n$ -tipindeki kare dual matrisleri için; $\hat{A}_{\cdot L} \hat{B} = \hat{B}_{\cdot L} \hat{A}$ ise $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ matrislerine **$\mathcal{DL}$ –değişmeli dual matrisler** denir.

Teorem 7.28 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ ve $\hat{B} = B + \varepsilon B^*$ **$\mathcal{DL}$ –değişmeli dual matrisler** ise A ve B L –değişmeli matrislerdir.

İspat $\hat{A} \hat{B} = \hat{B} \hat{A}$ olsun.

$$A_{\cdot L} B + \varepsilon(A_{\cdot L} B^* + A^*_{\cdot L} B) = B_{\cdot L} A + \varepsilon(B_{\cdot L} A^* + A^*_{\cdot L} B)$$

eşitliğinden $A_{\cdot L} B = B_{\cdot L} A$ elde edilir. O halde, A ve B L –değişmeli matrislerdir.

Tanım 7.29 $\overline{(\hat{A})^T}_{\cdot L} \hat{A} = A_{\cdot L} \overline{(\hat{A})^T} = \hat{I}_n$ eşitliğini sağlayan $\hat{A}$ kare dual matrisine **$\mathcal{DL}$ – üniter dual matris** denir.

Teorem 7.30 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ **$\mathcal{DL}$ – üniter dual matris** ise A reel L – ortogonal matris, $A^*_{\cdot L} A^T$ ve $A^{*T}_{\cdot L} A$ de reel L – simetrik matristir.

ispat
$$\begin{aligned} (A + \varepsilon A^*)^T \cdot_L (A + \varepsilon A^*) &= (A^T - \varepsilon A^{*T}) \cdot_L (A + \varepsilon A^*) \\ &= A^T \cdot_L A + \varepsilon (A^T \cdot_L A^* - A^{*T} \cdot_L A) = I_n + \varepsilon 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (A + \varepsilon A^*) \cdot_L (A - \varepsilon A^*)^T &= (A + \varepsilon A^*) \cdot_L (A^T - \varepsilon A^{*T}) \\ &= A \cdot_L A^T + \varepsilon (-A \cdot_L A^{*T} + A^* \cdot_L A^T) = I_n + \varepsilon 0 \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$A^T \cdot_L A = A \cdot_L A^T = I_n ,$$

$$A^T \cdot_L A^* - A^{*T} \cdot_L A = 0 ,$$

$$-A \cdot_L A^{*T} + A^* \cdot_L A^T = 0$$

eşitlikleri elde edilir. O halde, A reel L –ortogonal matristir. $A^{*T} \cdot_L A$ ve $A^* \cdot_L A^T$ matrisleri ise L –simetrik matrislerdir.

Tanım 7.31 $(\hat{A})^T \cdot_L \hat{A} = \hat{A} \cdot_L (\hat{A})^T = \hat{I}_n$ eşitliğini sağlayan $\hat{A}$ dual matrisine

$\mathcal{DL}$ –ortogonal dual matris denir.

Teorem 7.32 $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ $\mathcal{DL}$ –ortogonal dual matris ise A reel L –ortogonal matris, $A^T \cdot_L A^*$ ve $A \cdot_L A^{*T}$ de reel L –ters simetrik matristir.

ispat
$$\begin{aligned} (A + \varepsilon A^*)^T \cdot_L (A + \varepsilon A^*) &= (A^T + \varepsilon A^{*T}) \cdot_L (A + \varepsilon A^*) \\ &= A^T \cdot_L A + \varepsilon (A^T \cdot_L A^* + A^{*T} \cdot_L A) = I_n + \varepsilon 0 \\ (A + \varepsilon A^*) \cdot_L (A + \varepsilon A^*)^T &= (A + \varepsilon A^*) \cdot_L (A^T + \varepsilon A^{*T}) \\ &= A \cdot_L A^T + \varepsilon (A \cdot_L A^{*T} + A^* \cdot_L A^T) = I_n + \varepsilon 0 \end{aligned}$$

olmak üzere ,

$$A^T \cdot_L A = A \cdot_L A^T = I_n ,$$

$$A^T \cdot_L A^* + A^{*T} \cdot_L A = 0 ,$$

$$A \cdot_L A^{*T} + A^* \cdot_L A^T = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan A reel L – ortogonal matris, $A^{*T} \cdot_L A$ ve $A^* \cdot_L A^T$ matrislerinin ise reel L – ters simetrik matris olduğu bulunur.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezin beşinci bölümünde, [4] de tanımlanan Lorentz matris çarpımı kullanılarak Reel katsayılı matrislerin özellikleri ile ilgili temel sonuçlar elde edilmiştir.

Altıncı bölümde, n – boyutlu dual Lorentz uzayı ile ilgili çalışmaların belki de genelleştirilmesine temel oluşturacağını düşündüğümüz, n – boyutlu dual Lorentz uzayı ve bu uzay ile ilgili iç çarpım, norm ve vektörlerin sınıflandırılması gibi temel kavramlar tanımlanmıştır.

Yedinci bölümde ise, Lorentz matris çarpımı kullanılarak ε işaret matrisi olmaksızın , Lorentz iç çarpımı ile uygunluğu da göz önünde bulundurularak dual katsayılı matrisler çalışılmış ve dual katsayılı matrislerin çarpımında Öklid çarpımı kullanıldığında, tanımlamada ve uygulamada zorlanılan kavramlar kolay bir şekilde ve uzayda vektörlerin iç çarpımı ile de uyumlu olacak şekilde tanımlanmıştır.

Reel katsayılı matrisle ile Lorentz uzayında çalışıldığında matris çarpımı olarak O’Neill ‘in [9] kullandığı Öklid çarpımı yerine, Keçelioğlu [4] tarafından tanımlanan Lorentz matris çarpımı kullanılmasının uzaydaki vektörlerin iç çarpımı ile uyumlu olması ve ε işaret matrisine gerek duyulmamasını önermekteyiz.

Benzer şekilde, dual katsayılı matrisler ile dual Lorentz uzayda çalışıldığında, matris çarpımı olarak sekizinci bölümde tanımladığımız dual Lorentz matris çarpımının kullanılması, uzaydaki vektörlerin iç çarpımı ile uyumluluğu açısından önemlidir.

KAYNAKLAR

- [1] Study, E., (1903). Geometrie der Dynamen, Leibzig.
- [2] Uğurlu, H.H. ve Çalışkan A. ,(1996). “ The study mapping for directed spacelike ve timelike lines in minkowsky 3-space $\mathbb{R}_1^3$ ”, Mathematical and Computational Applications, no2, 142-148.
- [3] Kürüz, F., (2010). Dual Matrisler, Lisans Bitirme Tezi , İstanbul.
- [4] Gündoğan, H. ve Keçelioğlu, O., (2006). “Lorentzian Matrix Multiplication and The Motion On Lorentzian Plane”, Glasnik Matematicki, 41(61), 329-334.
- [5] Hacısalihoğlu, H.H.,(1983). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- [6] Veldkamp, G.R., (1976). “On the use of dual numbers, vektors and matrices in instantaneous kinematics”, Mechanism and Machine Theory, 11(2), pp.141-156.
- [7] Bandyopadhyay, S., (2008). Analysis and Desing of Spatial Manipulators:An Exact Algebraic Approach Using Dual Numbers and Symbolic Computation, Thesis Doctor of Philosophy, Indian Institute Of Science,Bangalore.
- [8] Önder, M. ve Uğurlu, H.H., “Mannheim Offsets of the Timelike Ruled Surfaces with Spacelike Rulings in Dual Lorentzian Space $\mathcal{D}_1^3$ ”, AMS:53A25,53C50.
- [9] O’Neill, B., (1983). Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Akademik Press, London.
- [10] Sombatboriboon, S. ve Mora, W. ve Kemprasit, Y., (2011). “Some results concerning invertible matrices over semirings”, SicienceAsia 37, 130-135.
- [11] Hacısalihoğlu, H.H., (2000). Lineer Cebir, 8.Baskı, Ankara.
- [12] Yaglom, I.M., (1968), Complex Numbers in Geometry, Academic Press, New York and London.
- [13] Turgut, A., (1995). Minkowsky Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- [14] Akutagawa, K. ve Nishikawa,S., (1990). “The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-Space”, Tohoku Math.J., 42,67-82.

- [15] Baker,A., (2002). Matrix Groups An Introduction to Lie Group Theory, Springer, London.
- [16] Pennestri, E. ve Stefanelli, R., (2007). “Lineer Algebra and Numerical Algorithms Using Dual Numbers” , Multibody Syst Dyn 18, 323-344.

LİNEER CEBİR ve KOMPLEKS SAYILAR

A-1 Lineer Cebir

Tanım A.1 S_n , simetrik grup ve S_n bir yarı halka olsun ($n \geq 2$).

$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ çift permütasyon}\}$ ve $B_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ tek permütasyon}\}$ kümeleri olmak üzere $A \in S_n^n$ matrisinin pozitif ve negatif determinanı sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\det^+ A = \sum_{\sigma \in A_n} A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}$$

$$\det^- A = \sum_{\sigma \in B_n} A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)} .$$

Burada not edelim ki R değişmeli bir halka iken $A \in R_n^n$ için $\det A = \det^+ A - \det^- A$ elde edilir, [10].

Teorem A.2 S değişmeli ve birimli bir yarı-halka olmak üzere, $A, B \in S_n^n$ matrisleri için

$$\det^+ (AB) = (\det^+ A)(\det^+ B) + (\det^- A)(\det^- B) + r$$

$$\det^- (AB) = (\det^+ A)(\det^- B) + (\det^- A)(\det^+ B) + r$$

olacak şekilde $r \in S$ vardır [10].

Not A.3 $\mathcal{D}$ dual sayılar halkası alındığında $\mathcal{D}$ bir değişmeli halkadır ve özel olarak da değişmeli ve birimli yarı halkadır. Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak,

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B) \quad (\text{A.1})$$

eşitliğinin sağlandığı aşığıdaki şekilde görülebilir.

$A, B \in \mathcal{D}_n^n$ için

$$\begin{aligned} \det^+(AB) - \det^-(AB) &= (\det^+ A)(\det^+ B) + (\det^- A)(\det^- B) + r \\ &\quad - (\det^+ A)(\det^- B) - (\det^- A)(\det^+ B) - r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det^+(AB) - \det^-(AB) &= \det^+ A(\det^+ B - \det^- B) + \det^- A(\det^- B - \det^+ B) \\ &= \det^+ A(\det^+ B - \det^- B) + \det^- A(\det^- B - \det^+ B) \\ &= \det^+ A(\det^+ B - \det^- B) - \det^- A(\det^+ B - \det^- B) \\ &= (\det^+ A - \det^- A)(\det^+ B - \det^- B) \\ &= \det A.\det B \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım A.4 $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası ve $\beta = \{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) : \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}\}$ denklik bağıntısı verilmiş olsun.

$$[\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{CD} : (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \in \beta\}$$

kümesine **vektör** adı verilir, [11].

Tanım A.5 $V \neq \emptyset$, $(K, +, \cdot)$ bir cisim, $\oplus : V \times V \rightarrow V$ iç işlem, $\odot : K \times V \rightarrow V$ dış işlem ve $(V, +)$ Abel grup olmak üzere,

$\forall \alpha, \beta \in V$ ve $\lambda, \mu \in K$ için,

$$\mathbf{V1)} \lambda \odot (\alpha \oplus \beta) = (\lambda \odot \alpha) \oplus (\lambda \odot \beta)$$

$$\mathbf{V2)} \lambda \odot (\mu \odot \beta) = (\lambda \cdot \mu) \odot \beta$$

$$\mathbf{V3)} \varepsilon \odot \alpha = \alpha \quad (\varepsilon \text{ } K \text{ cisminin birim elemanıdır.})$$

$$\mathbf{V4)} (\lambda + \mu) \odot \alpha = (\lambda \odot \alpha) \oplus (\mu \odot \alpha)$$

Özellikleri sağlanıyorsa $\{V, \oplus, K, +, \cdot, \odot\} \equiv V$ altılısına bir **vektör uzayı** denir, [11].

Tanım A.6 V bir vektör uzayı olmak üzere $\vec{x} \in V$ vektörünün **normu** (boyu)

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \text{ şeklinde tanımlıdır, [11].}$$

Tanım A.7 $\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \theta$ şeklinde tanımlı fonksiyonu bir

iç çarpım fonksiyonudur. θ açısı bu iki vektör arasındaki açıyı ifade etmektedir. O

halde, bu iki vektör arasındaki **açı** $\cos \theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$, $\theta = \angle(\vec{x}, \vec{y})$ şeklinde ifade edilebilir.

Tanım A.8 V bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\mathbf{Bilineer (2-lineer):} \quad \langle \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3 \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle + \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle$$

$$\langle \alpha_1, \lambda \alpha_2 \rangle = \lambda \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \lambda \alpha_1, \alpha_2 \rangle \quad , \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in V \quad , \quad \forall \lambda \in K$$

$$\mathbf{Simetri:} \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in V$$

$$\mathbf{Pozitif tanımlılık:} \quad \langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0 \quad ; \quad \langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad , \quad \forall \alpha \in V$$

özelliklerini sağlıyorsa $\langle, \rangle$ fonksiyonuna bir **iç çarpım fonksiyonu** ve V vektör uzayına da bir **iç çarpım uzayı** adı verilir, [11].

Örnekler:

1) $\mathbb{R}^n$ de $\forall X=(x_i), Y=(y_i) \in \mathbb{R}^n$ için $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ fonksiyonu

2) $\mathbb{C}^n$ de $\forall X=(x_i), Y=(y_i) \in \mathbb{C}^n$ için $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ fonksiyonu

3) $\mathbb{R}^n$ de $\forall X=(x_i), Y=(y_i) \in \mathbb{R}^n$ için $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$ fonksiyonu

birer iç çarpım fonksiyonları olup, sırasıyla, Öklid, Hermit ve Lorentz iç çarpımı olarak adlandırılır.

Tanım A.9 $M \neq \emptyset$ kümesi $\oplus: M \times M \rightarrow M$ iç işlemi ile birlikte bir abel grubu olsun. $(H, +, \cdot)$ üçlüsü birimli değişmeli bir halka olmak üzere, $\odot: H \times M \rightarrow M$ dış işlem olsun. Vektör uzayı aksiyomları sağlanıyorsa $\{M, \oplus, H, +, \cdot, \odot\} \equiv M$ altılısına **Modül** denir (veya M ye H-Modül denir), [11].

Tanım A.10 M, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} \otimes: M \times M &\rightarrow M \\ (a, b) &\longrightarrow a \otimes b \end{aligned} \quad \text{işlemi,}$$

i) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in M$ için $\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$

ii) $\alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)$

iii) $(\alpha \oplus \beta) \otimes \gamma = (\alpha \otimes \gamma) \oplus (\beta \otimes \gamma)$

özelliklerini sağlıyorsa $\{M, \oplus, H, +, \cdot, \odot, \otimes\} \equiv M$ yedilisine **cebiri** denir.

$K = \mathbb{R}$ ise M ye reel cebir,

$K = \mathbb{C}$ ise M ye kompleks cebir denir, [11].

A-2 Kompleks Sayılar

A-2-1 Sıradan Kompleks Sayılar

Cebirde kompleks sayılara giriş quadritik denklemlerin çözümü ile ilgilidir. Sayılar denildiğinde akla sadece reel sayılar geliyorsa $x^2 + px + q = 0$ Quadritik denklemini $\Delta = p^2 - 4q > 0$ olduğunda iki tane köke ve $\Delta = 0$ olduğunda bir tane köke sahiptir. Fakat $\Delta < 0$ olduğunda ise herhangi bir köke sahip değildir.

Örneğin, $x^2 + 1 = 0$ denkleminin kökü bulunamaz. Bu çözümsüzlüğün üstesinden gelmek için sayı kavramını genişletmemiz gerekmektedir. Yani reel sayılardan farklı yeni bir çeşit sayı düşündüğümüzde bu denklemin kökünü bulabiliriz. Bu yeni sayımız sanal olarak ifade edilen ve i ile gösterilen yeni bir tür sayıdır. Reel sayılara bu yeni sayıyı eklediğimizde bu sayı ile toplama ve çarpma kavramlarını da eklemek gerekecektir. O yüzden i sayısı tek başına yeterli olmayacaktır. Bundan dolayı herhangi bir reel sayı ile bu imajiner sayının çarpımı ve herhangi bir reel sayı ile de toplamı halinde de olması gerekmektedir. Yani $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a + bi$ şeklinde sayılar elde edilmektedir. Bu şekilde elde edilen sayıların kümesine **Kompleks Sayılar** kümesi denilmektedir. Bu küme literatürde $\mathbb{C}$ ile gösterilmektedir, [12].

Kompleks sayılar kümesi üzerinde toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Bu yeni sayı sistemi ile birlikte $x^2 + 1 = 0$ denkleminin kökü $i^2 + 1 = 0$ dan $i^2 = -1$ bulunacaktır.

Kompleks bir sayının reel bir sayıya bölümünü şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\frac{c+di}{a} = (c+di) \frac{1}{a} = \frac{c}{a} + \frac{d}{a}i$$

Eğer bir kompleks sayıyı diğer bir kompleks sayıya bölmek istiyorsak $z = a+bi$, $\bar{z} = a-bi$, $z_1 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$ olmak üzere bölme işlemi

$$\frac{z_1}{z} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} \text{ şeklinde ifade edilir.}$$

Burada $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ olduğunu görebiliriz, [12].

A-2-2 Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar

Bir önceki konuda $x^2+1=0$ quadritik denklemin çözümünü sunduk. Sunmuş olduğumuz bu çözümün tüm quadritik denklemleri kapsamadığı aşikardır. $x^2+px+q=0$ ve $\Delta = p^2-4q < 0$ şeklindeki quadritik denklemlerin çözümü I olarak verilen özel bir sayı olarak alalım. Bu sayı genel olarak $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a+bI$ şeklindeki sayılardır. Bu sayılara **Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar** adı verilir.

Bu sayılarda toplama, çıkarma ve çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$(a+bI) + (c+dI) = (a+c) + (b+d)I$$

$$(a+bI) - (c+dI) = (a-c) + (b-d)I$$

$$\begin{aligned} (a+bI) \cdot (c+dI) &= ac + adI + bcI + bdI^2 \\ &= (ac - qbd) + (ad + bc - pbd)I \end{aligned}$$

Burada $x^2+px+q=0$ quadritiğinin kökü I olduğundan $I^2 = -pI - q$ olduğu kolayca görülebilir.

$$I = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i \text{ veya } I = -\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i \text{ şeklindedir.}$$

i sanalı I cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$i = \frac{p}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}I \text{ veya } i = \frac{p}{\sqrt{-\Delta}} - \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}I$$

Böylece genelleştirilmiş kompleks sayılar $a+bI$ sıradan kompleks sayılar olan $a+bi$ şeklinde de ifade edilebilir.

$$a+bI = a+b\left(-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}i\right) = a_1 + b_1i$$

yazılabilir. Burada $a_1 = a - \frac{p}{2}b$ ve $b_1 = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}b$ dir, [12].

A-2-3 En Genel Kompleks Sayılar

$$x^2 + px + q = 0 \tag{A.2}$$

Şeklindeki quadritik denklemlerin çözümünü genel bir ifade ile sunalım. Burada bu genel ifadeyi bulmak için reel sayılar kümesine yeni bir sayı çeşidi olarak E' yi ekleyelim. Bu durumda yukarıdaki (A.2) denkleminin çözümü $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a+bE$ şeklinde olur. Bu şekildeki sayılara **en genel kompleks sayılar** adı verilir.

En genel kompleks sayılarda toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri aşağıdaki gibidir.

$$(a+bE) + (c+dE) = (a+c) + (b+d)E$$

$$(a+bE) - (c+dE) = (a-c) + (b-d)E$$

$$(a+bE) \cdot (c+dE) = ac + adE + bcE + bdE^2$$

$$= ac + adE + bcE + bd(-pE - q)$$

$$= (ac - qbd) + (ad + bc - pbd)E$$

şeklinde dir. Burada $E^2 = -pE - q$ ifadesi kullanılmıştır. Bu en genel kompleks sayılar, verilen p ve q sayılarının değerlerinin değişmesiyle farklı sayı sistemleri elde edilir.

$$\Delta = p^2 - 4q < 0$$

olması durumunda (A.2) denkleminin çözümü; $a + bE$ formundaki sayıların arasından

$i^2 = -1$ olacak şekilde $i = a + bE$ şeklindeki bir sayı olacaktır. Buradan $\alpha_1 = -\frac{p}{2}$ ve

$\beta_1 = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ olacak şekilde $E = \alpha_1 + \beta_1 i$ elde edilebilir.

$$E = \alpha_1 + \beta_1 i$$

$$E = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} i$$

$$a + bE = a + b \left(-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} i \right)$$

$$= a - b \frac{p}{2} - b \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} i$$

$$= a_1 + b_1 i$$

bulunur. Burada $a_1 = a - b \frac{p}{2}$ ve $b_1 = -b \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ şeklindedir. Yani $a + bE$ kökü sıradan kompleks sayılar cinsinden $a_1 + b_1 i$ şeklinde ifade edilebilir.

Benzer şekilde,

$$\Delta = p^2 - 4q = 0$$

olması durumunda quadritik denklemin çözümü $a + bE$ formundaki sayılar arasından

$\varepsilon^2 = 0$ olacak şekilde $\varepsilon = \alpha + \beta E$ şeklindedir. Örneğin $\varepsilon = \frac{p}{2} + E$ için

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{p}{2} + E \right)^2 = \frac{p^2}{4} + pE + (-pE - q) = \frac{p^2}{4} - q = 0$$

olduğu görülür. $\Delta = p^2 - 4q = 0$ olması durumunda en genel kompleks sayılar $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $a_1 + b_1 \varepsilon$ şeklindeki sayılara indirgenir. Bu sayılara **Dual Sayılar** denir.

Son olarak,

$$\Delta = p^2 - 4q > 0$$

olması durumunda (A.2) denkleminin çözümü $e^2 = +1$ olmak üzere $e = a + bE$ şeklinde olacaktır.

$$e = \frac{p}{\sqrt{\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{\Delta}} E, \quad E = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} e$$

O halde

$$\begin{aligned} e^2 &= \left(\frac{p}{\sqrt{\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{\Delta}} E \right)^2 = \frac{p^2}{\Delta} + \frac{4p}{\Delta} E + \frac{4}{\Delta} E^2 \\ &= \frac{p^2}{\Delta} + \frac{4p}{\Delta} E + \frac{4}{\Delta} (-pE - q) \\ &= \frac{p^2}{\Delta} + \frac{4p}{\Delta} E - \frac{4}{\Delta} pE + \frac{4}{\Delta} q \\ &= \frac{p^2 - 4q}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1 \end{aligned}$$

bulunur, [12].

Böylece en genel kompleks sayılar $e^2 = +1$ olmak üzere $a_1 + b_1 e$ şeklindeki sayılara indirgenir. Bu sayılara **Double Sayılar** adı verilir.

En genel kompleks sayı olan $a + bE$ sayısını double sayı şeklinde aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$a_1 + b_1 e = \left(a - b \frac{p}{2} \right) + \left(b \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) e$$

Sonuç olarak, en genel kompleks sayıları;

$$\Delta < 0, \quad a + bi, \quad i^2 = -1 \quad \textbf{Sıradan Kompleks Sayılar}$$

$$\Delta = 0, \quad a + b\varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 0 \quad \textbf{Dual Sayılar}$$

$$\Delta > 0, \quad a + be, \quad e^2 = +1 \quad \textbf{Double Sayılar}$$

şeklinde üç farklı sayı sistemine indirgeyebiliriz. Bu sayılar literatürde $\Delta < 0$ olduğunda **eliptik kompleks sayılar**, $\Delta = 0$ olduğunda **parabolik kompleks sayılar**, $\Delta > 0$ olduğunda da **hiperbolik kompleks sayılar** olarak da isimlendirilmektedir, [12].

$\mathbb{R}_1^3$ ve $\mathbb{R}_1^n$ LORENTZ UZAYLARI

B-1 $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz Uzayı

$\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ üç boyutlu vektör uzayını göz önüne alalım.

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörleri için Lorentz iç çarpımı,

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3$$

şeklinde tanımlanır. $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle_L)$ ikilisine 3-boyutlu Lorentz uzayı adı verilir. $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir.

Tanım B.1 Bir $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ vektörünün normu $\|\vec{a}\| = \sqrt{|\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L|}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım B.2 $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz iç çarpımı ile bir vektör uzayı olsun. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}_1^3$ alalım.

Bu durumda ;

$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L > 0$ ise $\vec{a}$ 'ya **spacelike**,

$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L < 0$ ise $\vec{a}$ 'ya **timelike**,

$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 0$ ise $\vec{a}$ 'ya **lightlike (null)**,

vektör adı verilir. Ayrıca,

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ bir timelike vektörü için $\vec{e} = (0, 0, 1)$ olmak üzere $\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle_L < 0$ ise $\vec{a}$ vektörüne future pointing timelike(f.p.t.l) denir. $\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle_L > 0$ ise $\vec{a}$ vektörüne past pointing timelike(p.p.t.l) vektör adı verilir, [9].

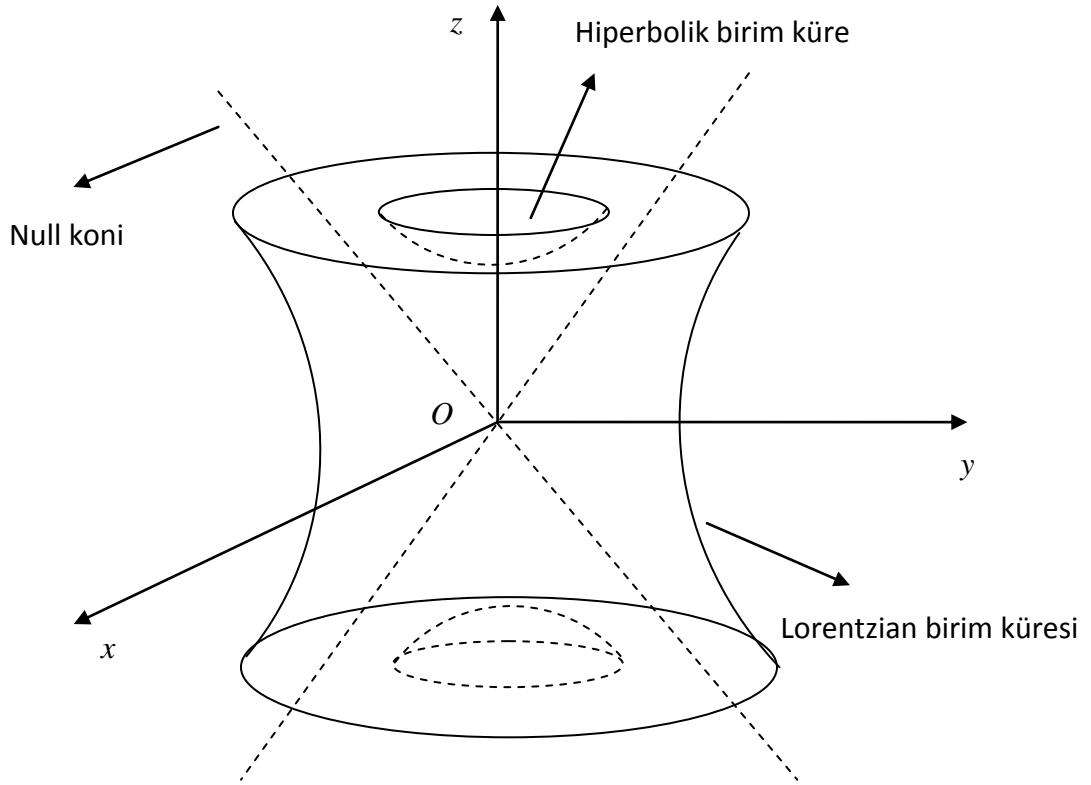
Tanım B.3 $\mathbb{R}_1^3$ de 1 br. yarıçaplı Lorentzian ve Hiperbolik küre, sırasıyla ,

$$S_1^2 = \{ \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}_1^3; \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 1 \} ,$$

$$H_0^2 = \{ \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}_1^3; \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = -1 \}$$

şeklinde tanımlanır, [12].

Şimdi de Lorentz ve hiperbolik çemberlerini $\mathbb{R}_1^3$ de şekil üzerinde gösterelim.



Şekil B. 1 $\mathbb{R}_1^3$ de Lorentz ve Hiperbolik çember

Tanım B.4 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}_1^3$ için bu iki vektörün vektörel çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır :

$$\vec{a} \wedge_L \vec{b} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

burada $e_1 \wedge_L e_2 = e_3, e_2 \wedge_L e_1 = -e_1, e_3 \wedge_L e_1 = -e_2$ dir, [14].

Teorem B.5 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ve $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}_1^3$ vektörleri için,

i) $\langle \vec{a} \wedge_L \vec{b}, \vec{c} \rangle_L = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

ii) $(\vec{a} \wedge_L \vec{b}) \wedge_L \vec{c} = -\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle_L \vec{b} + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle_L \vec{a}$

iii) $\langle \vec{a} \wedge_L \vec{b}, \vec{a} \rangle_L = 0$ ve $\langle \vec{a} \wedge_L \vec{b}, \vec{b} \rangle_L = 0$ dir.

iv) $\langle \vec{a} \wedge_L \vec{b}, \vec{a} \wedge_L \vec{b} \rangle_L = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L \cdot \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_L - (\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L)^2$

Yukarıdaki eşitlikler sağlanır, [13].

İspat

i) Lorentz vektörel çarpımı ve iç çarpım tanımından

$$\langle \vec{a} \wedge_L \vec{b}, \vec{c} \rangle_L = a_3 b_2 c_1 - a_2 b_3 c_1 + a_1 b_3 c_2 - a_3 b_1 c_2 - a_1 b_2 c_3 + a_2 b_1 c_3$$

elde edilir. Ayrıca,

$$-\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1 b_2 c_3 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 - a_2 b_3 c_1 - a_3 b_1 c_2 + a_3 b_2 c_1$$

bulunur. O halde $\langle \vec{a} \wedge_L \vec{b}, \vec{c} \rangle_L = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ olduğu görülür.

$$\text{ii) } (\vec{a} \wedge_L \vec{b}) \wedge_L \vec{c} = - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ a_3b_2 - a_2b_3 & a_1b_3 - a_3b_1 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (-a_1b_3c_3 + a_3b_1c_3 + a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2)e_1$$

$$+ (a_3b_2c_3 - a_2b_3c_3 - a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1)e_2$$

$$+ (a_3b_2c_2 - a_2b_3c_2 - a_1b_3c_1 + a_3b_1c_1)e_3$$

elde edilir. Bu vektörün birinci bileşenine $a_1b_1c_1$, ikinci bileşenine $a_2b_2c_2$ ve üçüncü bileşenine $a_3b_3c_3$ ifadelerini bir ekleyip bir çıkarırsak,

$$(\vec{a} \wedge_L \vec{b}) \wedge_L \vec{c} = (-a_1b_3c_3 + a_3b_1c_3 + a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2 + a_1b_1c_1 - a_1b_1c_1)e_1$$

$$+ (a_3b_2c_3 - a_2b_3c_3 - a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2 - a_2b_2c_2)e_2$$

$$+ (a_3b_2c_2 - a_2b_3c_2 - a_1b_3c_1 + a_3b_1c_1 + a_3b_3c_3 - a_3b_3c_3)e_3$$

bulunur. O halde ,

$$(\vec{a} \wedge_L \vec{b}) \wedge_L \vec{c} = (-a_1c_1 - a_2c_2 + a_3c_3) \cdot (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3)$$

$$+ (b_1c_1 + b_2c_2 - b_3c_3) \cdot (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3)$$

$$= -\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle_L \vec{b} + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle_L \vec{a}$$

bulunur.

iii) Birinci maddeden $\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \rangle_L = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ olduğu bilindiğinden,

$$\langle \vec{a} \wedge_L \vec{b}, \vec{a} \rangle_L = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}) = 0,$$

$$\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \rangle_L = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) = 0$$

bulunur.

$$\text{iv) } \langle \vec{a} \wedge_L \vec{b}, \vec{a} \wedge_L \vec{b} \rangle_L = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge_L \vec{b})$$

$$= \det(\vec{a}, \vec{a} \wedge_L \vec{b}, \vec{b})$$

$$\begin{aligned}
&= -\det(\vec{a} \wedge_L \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}) \\
&= \langle (\vec{a} \wedge_L \vec{b}) \wedge_L \vec{a}, \vec{b} \rangle_L \\
&= \langle (-\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L \vec{b} + \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle_L \vec{a}), \vec{b} \rangle_L \\
&= \langle -\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L \vec{b}, \vec{b} \rangle_L + \langle \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle_L \vec{a}, \vec{b} \rangle_L \\
&= -\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L \cdot \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_L + \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle_L \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L \\
&= -\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L \cdot \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_L + (\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L)^2
\end{aligned}$$

bulunur, [13].

B-2 $\mathbb{R}_1^n$ Lorentz Uzağı

$\mathbb{R}^n$ standart reel vektör uzağı üzerinde $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\langle, \rangle_L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\
\left(\begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix} \right) &\rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L = \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i - a_n b_n
\end{aligned}$$

ile verilen Lorentz iç çarpımı tanımlanırsa $\mathbb{R}^n$ uzağına **Lorentz n -uzağı** veya **Minkowski n -uzağı** adı verilir ve $\mathbb{R}_1^n$ ile gösterilir. Bu şekilde tanımlanan Lorentz iç çarpımı $\mathbb{R}_1^n$ deki vektörleri üç sınıfa ayırır. Bir $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^n$ vektörü için,

- $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L < 0$ ise $\vec{a}$ vektörüne **timelike**,
- $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L > 0$ ise $\vec{a}$ vektörüne **spacelike**,
- $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 0$ ise $\vec{a}$ vektörüne **lightlike**

vektör adı verilir.

Tanım B.6 $\mathbb{R}_1^n$ de Lorentzian n – küresi

$$S_1^{n-1} = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 1 \right\}$$

şeklinde ve hiperbolik n – küresi de

$$H_0^{n-1} = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = -1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca ışık konisi de

$$\Lambda_1^{n-1} = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Timelike vektörler Λ^{n-1} ışık konisinin içinde, null vektörler ışık konisinin üzerinde ve spacelike vektörler de ışık konisinin dışında yer alır.

B-3 $\mathbb{R}_1^n$ Lorentz Uzayında Matrisler

Bu kısımda, Lorentz uzayında reel matrislerde Öklid çarpımı kullanılarak ε işaret matrisi yardımıyla tanımlanan ortogonal ve anti-simetrik matrisler verilecektir, [9].

Tanım B.7 $n \times n$ – tipindeki bir A matrisi için $A^T = \varepsilon A^{-1} \varepsilon$ eşitliğini sağlayan matrise **ortogonal matris** denir.

Tanım B.8 $n \times n$ – tipindeki bir A matrisi için $A^T = -\varepsilon A \varepsilon$ eşitliğini sağlayan matrise **anti simetrik matris** denir.

Not B.9 ε işaret matrisi diyagonal bir matris olup ,

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

ÜSTEL MATRİS FORMLARININ ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde matrislerin üstel formları ile ilgili temel bilgiler incelenecektir. Bu bölümdeki bilgiler **Andrew Baker** [15] 'ın "Matrix Groups An Introduction to Lie Group Theory" isimli kitabından alınmıştır.

C-1 Matrislerin Üstel Formlarının Özellikleri

Üstel matris formları, matris gruplarıyla bu grupların Lie cebirlerinin elde edilmesinde çok önemli role sahiptirler. Bundan dolayı üstel matris formlarının iyi bilinmesi gerekmektedir.

$\exp(X) = e^X$ şeklindeki ifadenin seri açılımı,

$$\exp(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} X^n$$

şeklindedir. Bu serinin yakınsaklığı, yakınsaklık yarıçapına bağlıdır.

K bir cisim olmak üzere, K_n^n matris kümesi üzerinde, bir matrisin üstel formu:

$A \in K_n^n$ için,

$$e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

şeklindedir.

Buradan ε dual birim ($\varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0$) olmak üzere,

$$e^{\varepsilon A} = I + \varepsilon A \quad (\text{C.1})$$

elde edilir.

Teorem C.1

$A \in K_n^n$ matrisi verilsin. O halde

i) $\forall u, v \in \mathbb{C}$ için $e^{(u+v)A} = e^{uA} \cdot e^{vA}$ dir.

ii) $e^A \in GL(n, K)$ ise $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ dır.

İspat

i) $e^{(u+v)A} = \sum_{n \geq 0} \frac{(u+v)^n}{n!} A^n$ şeklindedir.

Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} e^{uA} \cdot e^{vA} &= \left(\sum_{r \geq 0} \frac{u^r}{r!} A^r \right) \left(\sum_{s \geq 0} \frac{v^s}{s!} A^s \right) \\ &= \left(\sum_{\substack{r \geq 0 \\ s \geq 0}} \frac{u^r v^s}{r! s!} A^{r+s} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{r=0}^n \frac{u^r \cdot v^{n-r}}{r! (n-r)!} \right) A^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} u^r \cdot v^{n-r} \right) A^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(u+v)^n}{n!} A^n \\ &= e^{(u+v)A} \end{aligned}$$

bulunur.

ii) Yukarıdaki ifadeden yararlanarak ,

$$I = e^0 = e^{(1+(-1))A} = e^A . e^{-A}$$

elde edilir. Buradan da e^A nın tersinir olduğu söylenir ve tersi e^{-A} dir.

Teorem C.2 $A, B \in K_n^n$ matrisleri verilsin. Bu matrisler $A.B = B.A$ eşitliğini sağlasın yani değişmeli olsunlar. O halde ,

$$e^{A+B} = e^A . e^B \text{ dir.}$$

İspat

$$\begin{aligned} e^A . e^B &= \left(\sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} A^r \right) \left(\sum_{s \geq 0} \frac{1}{s!} B^s \right) \\ &= \sum_{\substack{r \geq 0 \\ s \geq 0}} \frac{1}{r! s!} A^r B^s \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{r=0}^n \frac{1}{r! (n-r)!} \right) A^n . B^{n-r} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} A^r B^{n-r} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (A+B)^n \\ &= e^{A+B} \end{aligned}$$

Not C.3 $SL(n, \mathbb{R}) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ olmak üzere , $\alpha : (a, b) \rightarrow SL(n, \mathbb{R})$ bir eğri ve

$\alpha(0) = I$ olsun. $t \in (a, b)$ için $\det \alpha(t) = 1$ dir. Buradan $\frac{d \det \alpha(t)}{dt} = 0$ bulunur.

Burada $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in K_n^n \mid \det(A) \neq 0\} \subset K_n^n$ **genel lineer grup** olarak tanımlanır.

Ayrıca bu grup, tanımdan da anlaşılacağı üzere terslenebilir matrislerin kümesini ifade etmektedir. $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} \subset GL(n, \mathbb{R})$ kümesi ise **özel lineer grup** olarak tanımlanır.

Teorem C.4 $\alpha(t) \in SL(n, \mathbb{R})$ diferansiyellenebilir bir eğri olmak üzere,

$$\left. \frac{d \det \alpha(t)}{dt} \right|_{t=0} = \text{tr} \alpha'(t) \text{ dir, [15].}$$

İspat $A \in K_n^n$ iken $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$ olduğunu biliyoruz. $\partial = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0}$ türev operatörü olmak üzere, $\partial(\gamma_1 \gamma_2) = (\partial \gamma_1) \gamma_2(0) + \gamma_1(0) (\partial \gamma_2)$ ifadesi geçerlidir. Burada $a_{ij} = \alpha(t)_{ij}$ yazarsak $t = 0$ olduğu zaman $a_{ij} = \delta_{ij}$ olduğu görülür.

$C_{ij}, \alpha(t)$ nin i. satır ve j. sütununun silinmesiyle elde edilen kofaktör matris olsun. Bunu n. satır için açarsak

$$\det \alpha(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det C_{nj}$$

ifadesini elde ederiz. Buradan türev alırsak,

$$\begin{aligned} \partial \det \alpha(t) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \cdot (\partial a_{nj}) \cdot \det C_{nj} + a_{nj} (\partial \det C_{nj}) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \cdot (\partial a_{nj}) \cdot \det C_{nj} + \partial \det C_{nn} \end{aligned}$$

olarak bulunur. $t = 0$ için $\det C_{nj} = \delta_{nj}$ ve $\alpha(0) = I$ olacağından bu ifade

$$\partial \det \alpha(t) = \partial a_{nn} + \partial \det C_{nn}$$

şeklinde olur.

Bu hesaplamayı $(n-1) \times (n-1)$ C_{nn} matrisleri için de yaparsak,

$$\partial \det \alpha(t) = \partial a_{nn} + \partial a_{(n-1)(n-1)} + \partial \det C_{(n-1)(n-1)}$$

$\vdots$

$$= \partial a_{nn} + \partial a_{(n-1)(n-1)} + \dots + \partial a_{11}$$

elde edilir. Buradan $\left. \frac{d \det \alpha(t)}{dt} \right|_{t=0} = i\mathbb{Z} \alpha'(0)$ elde edilir.

Teorem C.5 $\forall A \in K_n^n$ için $\det e^A = e^{i\mathbb{Z}A}$ elde edilir.

İspat

$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ olup $\gamma(t) = \det e^{tA}$ olsun.

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\det e^{(h+t)A} - \det e^{tA} \right) \\ &= \det e^{tA} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\det e^{hA} - 1 \right) \\ &= \det e^{tA} \cdot i\mathbb{Z}(A) \\ &= \gamma \cdot i\mathbb{Z}(A) \end{aligned}$$

diferansiyel denklemi,

$$\gamma'(t) = \gamma \cdot i\mathbb{Z}(A)$$

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \gamma \cdot i\mathbb{Z}(A)$$

$$\int \frac{d\gamma}{\gamma} = \int i\mathbb{Z}(A) dt$$

$$\ln \gamma = t \cdot i\mathbb{Z}(A) + c$$

şeklinde çözülrse $\det e^A = e^{i\mathbb{Z}A}$ elde edilir, [15].

Not C.6 Benzer şekilde,

$$\det e^{\varepsilon A} = e^{\varepsilon i\mathbb{Z}A} \tag{C.2}$$

elde edilir.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Ali DAĞDEVİREN
Doğum Tarihi ve Yeri :1987-GAZİANTEP
Yabancı Dili :İngilizce
E-posta :m.a.dagdeviren@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans 1	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2010
Lisans 2	İşletme	Anadolu Üniversitesi	Devam Ediyor
Lise	Sayısal	Araban Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2007-2010	Yıldız Teknik Üniversitesi	Asistan Öğrenci