

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZİAN PARA - SASAKİAN MANİFOLDLARDA
SOLİTON TİPLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mehmet Hanifi GELERİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

ŞUBAT - 2024

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZİAN PARA - SASAKİAN MANİFOLDLARDA
SOLİTON TİPLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet Hanifi GELERİ

(36203614048)

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

ŞUBAT - 2024

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemedi beni her konuda yönlendiren danışman Hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet YILDIZ'a, ayrıca tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışmalarım süresince de benden her türlü desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.



ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Lorentzian para - Sasakian manifoldlarda soliton tipleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Mehmet Hanifi GELERİ



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ	i
ONUR SÖZÜ	ii
SEMBOLLER DİZİNİ.....	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. TEMEL KAVRAMLAR.....	1
2. DEĞME MANİFOLDLAR	6
2.1. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldlar.....	6
2.2. Değme Metrik Manifoldlar.....	7
3. PARADEĞME MANİFOLDLAR	9
3.1. Hemen Hemen Paradeğme Metrik Manifoldlar	9
4. LP SASAKİAN MANİFOLDLARDA SOLİTON TİPLERİ	11
4.1. LP Sasakian Manifoldlar	11
4.2. Soliton Tipleri.....	13
4.3. Ricci soliton şartını sağlayan LP-Sasakian manifoldlar	14
KAYNAKÇA.....	36
ÖZGEÇMİŞ	37

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
M	: Manifold
C^∞	: Her mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
∇	: M üzerinde afin koneksiyon
$\chi(M)$	: Vektör alanlarının uzayı
$[\]$	: Lie Parantez operatörü
g	: Metrik tensör
R_{cur}	: Riemann-Christoffel eğrilik tensörü
$K(\Pi)$	: Π nin kesitsel eğriliği
Ric	: Ricci eğrilik tensörü
τ	: Skaler Eğrilik
Q	: Ricci operatörü
C	: Weyl konformal eğrilik tensörü
P	: Projektif eğrilik tensörü
$\bar{C}$	: Konharmonik eğrilik tensörü
$\check{Z}$	: Konsirküler eğrilik tensörü
ξ	: Karakteristik vektör alanı
Ω	: Temel 2 –form
φ	: (1,1) tipinde tensör alanı
C^∞	: Her mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
η	: 1 –form

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LORENTZİAN PARASASAKİAN MANİFOLDLARDA SOLİTON TİPLERİ

MEHMET HANİFİ GELERİ

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2024

Danışman: Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konu ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde hemen hemen değme metrik manifoldlar, değme metrik manifoldlar ve paradeğme metrik manifoldlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde Lorentzian para-Sasakian manifoldlar tanımlanmış ve bu manifold üzerinde Ricci soliton ve η -Ricci soliton tipleri çalışılarak çeşitli eğrilik şartları incelenmiştir.

ABSTRACT

MASTER THESIS

SOLITON TYPES ON LORENTZIAN PARA – SASAKIAN MANIFOLDS

Mehmet Hanifi GELERİ

Inonu University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

2024

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, the basic concepts related to the subject are given.

In the second chapter, basic definitions and theorems about almost contact metric manifolds, contact metric manifolds and para-contact metric manifolds are given.

In the third and fourth parts, Lorentzian para-Sasakian manifolds were defined and various curvature conditions were studied by studying Ricci Soliton and η -Ricci soliton types on this manifold.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 1.1: M bir Hausdorff uzay olsun. Eğer $\forall p \in M$ için $\mathbb{R}^n$ deki bir açık kümeye homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir açık komşuluğu varsa M Hausdorff uzayına bir topolojik manifold veya kısaca manifold denir (Şahin, 2022).

Tanım 1.2: M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2-linear} \chi(M)$$

$$(\theta_1, \theta_2) \longrightarrow \nabla(\theta_1, \theta_2) = \nabla_{\theta_1} \theta_2$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için,

$$\text{i. } \nabla_{\theta_1}(\theta_2 + \theta_3) = \nabla_{\theta_1} \theta_2 + \nabla_{\theta_1} \theta_3 \quad (1.1.)$$

$$\text{ii. } \nabla_{f\theta_1 + g\theta_2} \theta_3 = f\nabla_{\theta_1} \theta_3 + g\nabla_{\theta_2} \theta_3 \quad (1.2.)$$

$$\text{iii. } \nabla_{\theta_1} f\theta_2 = f\nabla_{\theta_1} \theta_2 + \theta_1(f)\theta_2 \quad (1.3.)$$

özelliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir Afin koneksiyon adı verilir (Yano & Kon, 1984).

Tanım 1.3: (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir Afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ olmak üzere ∇ dönüşümü;

$$\text{i. } \nabla_{\theta_1} \theta_2 - \nabla_{\theta_2} \theta_1 = [\theta_1, \theta_2] \text{ (Koneksiyonun sıfır torsiyon özelliği)} \quad (1.4.)$$

$$\text{ii. } \theta_1 g(\theta_2, \theta_3) = g(\nabla_{\theta_1} \theta_2, \theta_3) + g(\theta_2, \nabla_{\theta_1} \theta_3) \text{ (Koneksiyonun metrikle bağdaşması özelliği)} \quad (1.5.)$$

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann koneksiyon veya M nin Levi - Civita koneksiyonu adı verilir (Yano & Kon, 1984).

Tanım 1.4: M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere;

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2-linear} \chi(M)$$

$$(\theta_1, \theta_2) \longrightarrow \nabla(\theta_1, \theta_2) = \nabla_{\theta_1} \theta_2 \quad (1.6.)$$

biçiminde tanımlanan ∇ operatörü, M nin bir U bölgesi üzerinde tanımlı olup her bir

$\theta_1, \theta_2 \in \chi(U)$ vektör alan çiftine U üzerinde $\nabla_{\theta_1} \theta_2$ ile ifade edilen üçüncü bir C^∞ vektör

alanı karşılık getirir. Bu karşılık gelme aşağıdaki özellikleri sağladığında ∇ ya Lineer koneksiyon (veya kovaryant türev) adı verilir.

$\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M), \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere;

$$i. \quad \nabla_{\theta_1+\theta_2}\theta_3 = \nabla_{\theta_1}\theta_3 + \nabla_{\theta_2}\theta_3 \quad (1.7.)$$

$$ii. \quad \nabla_{f\theta_1}\theta_2 = f\nabla_{\theta_1}\theta_2 \quad (1.8.)$$

$$iii. \quad \nabla_{\theta_1}(\theta_2 + \theta_3) = \nabla_{\theta_1}\theta_2 + \nabla_{\theta_1}\theta_3 \quad (1.9.)$$

$$iv. \quad \nabla_{\theta_1}(f\theta_2) = f\nabla_{\theta_1}\theta_2 + \theta_1(f)\theta_2 \quad (1.10.)$$

dir (O'Neill B. , 1983).

Tanım 1.5: M bir diferansiyellenebilir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \quad (1.11.)$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir Riemann manifoldu adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir (Hacısalıhoğlu & Ekmekçi, 2003).

M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M ye bağlantılı manifold adı verilir. M bağlantılı ve temel grubu sadece birim elemandan oluşuyor ise M ye basit bağlantılıdır denir (O'Neill B. , 1983).

Tanım 1.6: (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ de M üzerindeki Levi - Civita koneksiyonu olsun.

$$R_{cur}: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = \nabla_{\theta_1}\nabla_{\theta_2}\theta_3 - \nabla_{\theta_2}\nabla_{\theta_1}\theta_3 - \nabla_{[\theta_1, \theta_2]}\theta_3 \quad (1.12.)$$

ile tanımlanan R_{cur} fonksiyonu M üzerinde bir (1,3) tensör alanıdır ve M nin Riemann-Christoffel eğrilik tensörü olarak adlandırılır. Ayrıca

$$R_{cur}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) \quad (1.13.)$$

tensörüne M nin Riemann eğrilik tensörü adı verilir (O'Neill B. , 1983).

Her $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in \chi(M)$ için Riemann-Christoffel eğrilik tensörü R_{cur} aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$i. \quad R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = -R_{cur}(\theta_2, \theta_1)\theta_3 \quad (1.14.)$$

$$\text{ii. } g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) = -g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \theta_3) \quad (1.15.)$$

$$\text{iii. } R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 + R_{cur}(\theta_2, \theta_3)\theta_1 + R_{cur}(\theta_3, \theta_1)\theta_2 = 0 \quad (1.16.)$$

$$\text{iv. } g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) = g(R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\theta_1, \theta_2) \quad (1.17.)$$

özelliklerine sahiptir (O'Neill B. , 1983).

Tanım 1.7: (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $T_p M$ tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı Π olmak üzere $V, W \in \Pi$ tanjant vektörleri için Q fonksiyonu;

$$Q(\theta_1, \theta_2) = g(\theta_1, \theta_1)g(\theta_2, \theta_2) - g(\theta_1, \theta_2)^2 \quad (1.18.)$$

biçiminde tanımlansın. $Q(\theta_1, \theta_2) \neq 0$ olmak üzere;

$$K(\theta_1, \theta_2) = \frac{g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_2, \theta_1)}{Q(\theta_1, \theta_2)} \quad (1.19.)$$

olup Π nin kesitsel eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'Neill B. , 1983)

Tanım 1.8: (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olsunlar.

$$Ric: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\theta_1, \theta_2) \longrightarrow Ric(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^n g(R_{cur}(e_i, \theta_1)\theta_2, e_i) \quad (1.20.)$$

şeklinde tanımlanan $(0,2)$ tipindeki Ric tensör alanına, M üzerinde Ricci eğrilik tensörü adı verilir (O'Neill B. , 1983).

Tanım 1.9: (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $\theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için;

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = ag(\theta_1, \theta_2) \quad (1.21.)$$

olacak biçimde M üzerinde bir a fonksiyonu var ise yani M nin Ricci tensörü Ric , metrik tensör g nin bir katı ise M ye Einstein manifoldu adı verilir (O'Neill B. , 1983).

Tanım 1.10: (M, g) n – boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$\tau = \sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i) \quad (1.22.)$$

değerine M nin skalar eğriliği adı verilir (O'Neill B. , 1983).

Tanım 1.11: M n – boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için M nin Weyl konformal eğrilik tensörü,

$$\begin{aligned} C(\theta_1, \theta_2)\theta_3 &= R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 \\ &\quad - \frac{1}{n-2} \left[Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2 - Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 \right] \\ &\quad + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 - g(\theta_2, \theta_3)\theta_1] \end{aligned} \quad (1.23.)$$

şeklinde tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür (Yano & Kon, 1984).

Tanım 1.12: $C = 0$ ise M manifoldu konformal flat olarak adlandırılır (Yano & Kon, 1984).

Tanım 1.13: M n – boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için M nin projektif eğrilik tensörü

$$P(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-1} [Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2] \quad (1.24.)$$

şeklinde tanımlanır (Yano & Kon, 1984).

Tanım 1.14: $P = 0$ ise M manifoldu projektif flat olarak adlandırılır (Yano & Kon, 1984).

Tanım 1.15: M n –boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için M nin konharmonik eğrilik tensörü

$$\bar{C}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-2} \left[Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right] \quad (1.25.)$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür (Yano & Kon, 1984).

Tanım 1.16: $\bar{C} = 0$ ise M manifoldu konharmonikal flat olarak adlandırılır (Yano & Kon, 1984).

Tanım 1.17: M n –boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için M nin konsirküler eğrilik tensörü

$$\check{Z}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{\tau}{n(n-1)} [g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2] \quad (1.26)$$

ile tanımlanır (Yano & Kon, 1984).

Tanım 1.18: $\check{Z} = 0$ ise M manifoldu konsirküler flat olarak adlandırılır (Yano & Kon, 1984).

Tanım 1.19: M manifoldu üzerinde $(0, k)$ –tipinde ($k \geq 1$) bir T tensör alanı verildiğinde $R_{cur}.T$ tensörü

$$(R_{cur}.T)(X_1, X_2, \dots, X_k; X, Y) = T(R_{cur}(X, Y)X_1, X_2, \dots, X_k) \\ -T(X_1, R_{cur}(X, Y)X_2, \dots, X_k) - \dots -T(X_1, X_2, \dots, R_{cur}(X, Y)X_k), \quad (1.27)$$

biçiminde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Böylece (1.27) denkleminde sırası ile, $T = R_{cur}$ alınırsa,

$$(R_{cur}.R_{cur})(X_1, X_2, \dots, X_k; X, Y) = R_{cur}(R_{cur}(X, Y)X_1, X_2, \dots, X_k) \\ -R_{cur}(X_1, R_{cur}(X, Y)X_2, \dots, X_k) - \dots \\ -R_{cur}(X_1, X_2, \dots, R_{cur}(X, Y)X_k), \quad (1.28)$$

$T = C$ alınırsa,

$$(R_{cur}.C)(X_1, X_2, \dots, X_k; X, Y) = C(R_{cur}(X, Y)X_1, X_2, \dots, X_k) \\ -C(X_1, R_{cur}(X, Y)X_2, \dots, X_k) - \dots -C(X_1, X_2, \dots, R_{cur}(X, Y)X_k), \quad (1.29)$$

$T = Ric$ alınırsa,

$$(R_{cur}.Ric)(X_1, X_2, \dots, X_k; X, Y) = Ric(R_{cur}(X, Y)X_1, X_2, \dots, X_k) \\ -Ric(X_1, R_{cur}(X, Y)X_2, \dots, X_k) - \dots \\ -Ric(X_1, X_2, \dots, R_{cur}(X, Y)X_k), \quad (1.30)$$

olarak elde edilir. Ayrıca, M üzerindeki her p noktası için;

$$i. \quad R_{cur}.R_{cur} = 0 \text{ ise } M \text{ ye semisimetriktir,} \quad (1.31)$$

$$ii. \quad R_{cur}.C = 0 \text{ ise } M \text{ ye Weyl-semisimetriktir,} \quad (1.32)$$

$$iii. \quad R_{cur}.Ric = 0 \text{ ise } M \text{ ye Ricci-semisimetriktir denir (Yano \& Kon, 1984).} \quad (1.33)$$

Üstelik,

$$i. \quad R_{cur}.R_{cur} = 0 \subset R_{cur}.Ric = 0, \quad (1.34)$$

$$ii. \quad R_{cur}.R_{cur} = 0 \subset R_{cur}.C = 0, \quad (1.35)$$

kapsama bağıntıları geçerlidir (Blair, 1976).

2. DEĞME MANİFOLDLAR

2.1. Hemen Hemen Değme Metrik Manifolds

Tanım 2.1.1: M bir n – boyutlu manifold φ, ξ, η da M üzerinde sırasıyla $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1 – form olsun. Eğer φ, ξ, η için M üzerinde herhangi bir vektör alanı θ olmak üzere

$$\text{i. } \eta(\xi) = 1 \quad (2.1.1.)$$

$$\text{ii. } \varphi^2\theta = -\theta + \eta(\theta)\xi \quad (2.1.2.)$$

özellikleri sağlanıyor ise o zaman (φ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen değme yapısı ve bu yapı ile birlikte M ye bir hemen hemen değme manifoldu denir (Yano & Kon, 1984).

Teorem 2.1.1: Bir n – boyutlu M manifoldu üzerinde (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı, her $\theta \in \chi(M)$ için;

$$\text{i. } \varphi\xi = 0 \quad (2.1.3.)$$

$$\text{ii. } \eta(\varphi\theta) = 0 \quad (2.1.4.)$$

$$\text{iii. } \text{rank}\varphi = n - 1 \quad (2.1.5.)$$

eşitliklerini sağlar (Yano & Kon, 1984).

Tanım 2.1.2: Bir hemen hemen değme M manifoldu üzerinde hemen hemen değme yapısı (φ, ξ, η) olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği her $\theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için

$$\text{i. } g(\theta_1, \xi) = \eta(\theta_1) \quad (2.1.6.)$$

$$\text{ii. } g(\varphi\theta_1, \varphi\theta_2) = g(\theta_1, \theta_2) - \eta(\theta_1)\eta(\theta_2) \quad (2.1.7.)$$

$$\text{iii. } g(\varphi\theta_1, \theta_2) + g(\theta_1, \varphi\theta_2) = 0 \quad (2.1.8.)$$

eşitliklerini sağlıyor ise g metriğine M üzerinde hemen hemen değme metrik, (φ, ξ, η, g) yapısına da hemen hemen değme metrik yapısı, (φ, ξ, η, g) yapısıyla M ye de hemen hemen değme metrik manifoldu denir (Yano & Kon, 1984).

Tanım 2.1.3: n – boyutlu bir hemen hemen değme M manifoldu verilsin. M nin bir değme yapısı (φ, ξ, η) verildiğinde, $\forall \theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için;

$$g(\theta_1, \varphi \theta_2) = d\eta(\theta_1, \theta_2) \quad (2.1.9.)$$

olacak şekilde bir hemen hemen değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) vardır (Yano & Kon, 1984).

Tanım 2.1.4: M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) , $\forall \theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için;

$$\Omega(\theta_1, \theta_2) = g(\theta_1, \varphi \theta_2) \quad (2.1.10.)$$

şeklinde tanımlı Ω dönüşümüne, (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısının temel 2 –formu denir (Yano & Kon, 1984).

2.2. Değme Metrik Manifoldlar

Tanım 2.2.1: Eğer bir n –boyutlu manifoldu M üzerinde

$$\eta \wedge (d\eta)^{\frac{n-1}{2}} \neq 0 \quad (2.2.1.)$$

olacak şekilde bir η , 1 –formu mevcut ise M bir değme yapıya sahiptir denir ve η , değme yapı olarak, M ise bir değme manifold olarak adlandırılır (Yano & Kon, 1984).

Teorem 2.2.1: Değme yapısı η olan, n –boyutlu değme manifold M olsun. M üzerinde θ vektör alanı için,

$$i. \quad d\eta(\xi, \theta) = 0 \quad (2.2.2.)$$

$$ii. \quad \eta(\xi) = 1 \quad (2.2.3.)$$

eşitliklerini sağlayan tek bir ξ vektör alanı vardır (Yano & Kon, 1984).

Tanım 2.2.2: Değme yapısı η ve karakteristik vektör alanı ξ olan, n –boyutlu değme manifold M olsun. M üzerinde $\forall \theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için,

$$i. \quad \varphi^2 \theta_1 = -\theta_1 + \eta(\theta_1) \xi \quad (2.2.4.)$$

$$ii. \quad \varphi \xi = 0 \quad (2.2.5.)$$

$$iii. \quad g(\theta_1, \xi) = \eta(\theta_1) \quad (2.2.6.)$$

$$iv. \quad g(\theta_1, \varphi \theta_2) = -g(\varphi \theta_1, \theta_2) \quad (2.2.7.)$$

$$v. \quad d\eta(\theta_1, \theta_2) = g(\theta_1, \varphi \theta_2) \quad (2.2.8.)$$

koşullarını sağlayan, bir g metriği ve bir φ (1,1) tipinde tensör alanı var ise, (φ, ξ, η, g) yapısına değme metrik yapı denir (Yano & Kon, 1984).



3. PARADEĞME MANİFOLDLAR

3.1. Hemen Hemen Paradeğme Metrik Manifoldlar

Tanım 3.1.1: M bir n –boyutlu diferansiyellenebilir manifold, φ, ξ, η da M üzerinde sırasıyla $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı, bir kotravaryant vektör alanı ve 1-formu her $\theta \in \chi(M)$ için.

$$\text{i. } \eta(\xi) = 1 \quad (3.1.1.)$$

$$\text{ii. } \varphi^2\theta = \theta_1 - \eta(\theta)\xi \quad (3.1.2.)$$

eşitliklerini sağlıyorsa zaman (φ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen paradeğme yapısı ve bu yapı ile birlikte M ye bir hemen hemen paradeğme manifold denir (Yano & Kon, 1984)

Teorem 3.1.1. M üzerinde tanımlı (φ, ξ, η) hemen hemen paradeğme yapısı, her $\theta \in \chi(M)$ için

$$\text{i. } \varphi\xi = 0 \quad (3.1.3.)$$

$$\text{ii. } \eta(\varphi\theta) = 0 \quad (3.1.4.)$$

$$\text{iii. } \text{rank}\varphi = n - 1 \quad (3.1.5.)$$

eşitliklerini sağlar (Yano & Kon, 1984).

Teorem 3.1.2. Bir n –boyutlu hemen hemen paradeğme manifold (M, φ, ξ, η) olsun. Bu durumda M manifoldu üzerinde $\forall \theta \in \chi(M)$ için, bir g yarı-Riemann metrik tensör alanı;

$$g(\theta, \xi) = \eta(\theta) \quad (3.1.6.)$$

olacak şekilde vardır (Zamkovoy, 2009).

Teorem 3.1.3. Bir hemen hemen paradeğme yarı-Riemann manifoldu $(M^n, \varphi, \xi, \eta)$ üzerinde $\forall \theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için

$$\text{i. } g(\varphi\theta_1, \varphi\theta_2) = -g(\theta_1, \theta_2) + \eta(\theta_1)\eta(\theta_2) \quad (3.1.7.)$$

$$\text{ii. } \eta(\theta_1) = g(\theta_1, \xi) \quad (3.1.8.)$$

$$\text{iii. } g(\varphi\theta_1, \theta_2) + g(\theta_1, \varphi\theta_2) = 0 \quad (3.1.9.)$$

özelliklerini sağlayacak şekilde bir g yarı-Riemann metriği vardır (Zamkovoy, 2009).

Tanım 3.1.2. $(M^n, \varphi, \xi, \eta)$ dörtlüsü bir hemen hemen paradeğme manifold olsun (3.1.7.) ve (3.1.8.) koşullarını sağlayan g yarı-Riemann metriğine $(M^n, \varphi, \xi, \eta)$ üzerinde hemen hemen paradeğme metrik, (φ, ξ, η, g) yapısına da hemen hemen paradeğme metrik yapı ve $(M^n, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisine de hemen hemen paradeğme metrik manifold denir (Zamkovoy, 2009).

Tanım 3.1.3. M üzerinde bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen paradeğme metrik yapısı verilsin.

$\forall \theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için;

$$\Omega(\theta_1, \theta_2) = g(\theta_1, \varphi \theta_2) \quad (3.1.10.)$$

şeklinde tanımlı anti simetrik Ω dönüşümüne (φ, ξ, η, g) hemen hemen paradeğme metrik yapısının temel 2 –formu denir (Zamkovoy, 2009).

Sonuç 3.1.1. M^n yarı-Riemann manifoldu olsun. Ω temel 2-form ters simetriktir ve (2.2.1) yardımıyla;

$$\eta \wedge \Omega \neq 0 \quad (3.1.11.)$$

dir.

4. LP SASAKIAN MANİFOLDLARDA SOLİTON TİPLERİ

4.1. LP Sasakian Manifolds

Bir n –boyutlu M Lorentzian manifoldu bir parakompakt Hausdorff manifold ile bir g Lorentzian metriğinin birleşimidir. g Lorentz metriği M manifoldu üzerinde tanımlı $(0,2)$ tipinde bir simetrik tensör alanıdır, öyle ki, herhangi bir $p \in M$ noktası için, tensör $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ sonucunun işareti $(-, +, \dots, +)$ olup, non-degeneratedir. Burada $T_p M$, M nin p deki tanjant vektör uzayı ve $\mathbb{R}$ reel sayılar uzayıdır. Sıfırdan farklı bir $v \in T_p M$ vektörü $g_p(v, v) < 0$ (sırasıyla, $\leq 0, = 0, > 0$) şartlarını sağlıyorsa timelike (sırasıyla non-spacelike, null, spacelike) şeklinde adlandırılır (O'Neill B. , 1983).

Bir n –boyutlu diferansiyellenebilir M manifoldu hemen hemen paradeğme yapı (φ, ξ, η) olarak adlandırılması için; φ , $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı, ξ bir timelike kontravariant birim vektör alanı ve η , bir 1 –form olmak üzere M deki herhangi bir θ vektör alanı için;

$$i. \quad \eta(\xi) = -1 \quad (4.1.1.)$$

$$ii. \quad \varphi^2 \theta = \theta + \eta(\theta) \xi \quad (4.1.2.)$$

eşitliklerini sağlamalıdır (Matsumoto, 1989).

Bir n –boyutlu Lorentzian manifoldunda (φ, ξ, η) yapısı aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$i. \quad \varphi \circ \xi = 0 \quad (4.1.3.)$$

$$ii. \quad \eta \circ \varphi = 0 \quad (4.1.4.)$$

$$iii. \quad \text{rank} \varphi = n - 1 \quad (4.1.5.)$$

Her θ_1, θ_2 vektör alanları için ξ yi bir timelike birim vektör alanı yapan bir g Lorentz metriği;

$$i. \quad \eta(\theta_1) = g(\theta_1, \xi) \quad (4.1.6.)$$

$$ii. \quad g(\varphi \theta_1, \varphi \theta_2) = g(\theta_1, \theta_2) + \eta(\theta_1) \eta(\theta_2) \quad (4.1.7.)$$

$$iii. \quad (\nabla_{\theta_1} \varphi)(\theta_2) = g(\theta_1, \theta_2) \xi + \eta(\theta_2) \theta_1 + 2\eta(\theta_1) \eta(\theta_2) \xi \quad (4.1.8.)$$

eşitliklerini sağlar (Matsumoto & Mihai, 1988).

(4.1.6.) ve (4.1.7.) eşitliklerini sağlayan g metriği, verilen hemen hemen paradeğme yapıyla birleştirilmiş bir Lorentz metriği olarak adlandırılır.

(φ, ξ, η) hemen hemen paradeğme yapıyla birleştirilmiş bir Lorentz metriği g olmak üzere; $M, (\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen paradeğme yapıyla diferansiyellenebilir bir manifold ise M^n nin Lorentz anlamında hemen hemen paradeğme (φ, ξ, η, g) metrik yapısına sahip olduğunu söyleriz ve $M^n, (\varphi, \xi, \eta, g)$ metrik yapısıyla birlikte Lorentz anlamında hemen hemen paradeğme manifold (kısaca LAP-manifold) olarak adlandırılır.

(φ, ξ, η, g) metrik yapısıyla tanımlı bir M^n LAP-Manifoldu üzerindeki her θ_1, θ_2 vektör alanı için

$$\text{i. } \Omega(\theta_1, \theta_2) = g(\varphi\theta_1, \theta_2) \quad (4.1.9.)$$

$$\text{ii. } \Omega(\theta_1, \theta_2) = \Omega(\theta_2, \theta_1) \quad (4.1.10.)$$

eşitliklerini sağlayan (0,2) tipinde simetrik bir Ω tensör alanı tanımlansın.

Eğer (φ, ξ, η, g) yapısıyla tanımlı bir LAP-manifold

$$\Omega(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \{ (\nabla_{\theta_1} \eta)(\theta_2) + (\nabla_{\theta_2} \eta)(\theta_1) \} \quad (4.1.11.)$$

eşitliğini sağlıyorsa Lorentz anlamında paradeğme manifold (kısaca LP-manifold) olarak adlandırılır ve (φ, ξ, η, g) yapısına da Lorentz anlamında paradeğme yapı denir. Burada ∇, g Lorentz metriğine göre kovaryant türev operatörünü gösterir.

Bir LAP-manifoldu (φ, ξ, η, g) yapısıyla;

$$\begin{aligned} (\nabla_{\theta_3} \Omega)(\theta_1, \theta_2) &= g(\theta_2, \theta_3) \eta(\theta_1) + g(\theta_1, \theta_3) \eta(\theta_2) \\ &\quad + 2\eta(\theta_1) \eta(\theta_2) \eta(\theta_3) \end{aligned} \quad (4.1.12.)$$

eşitliğini sağlıyorsa bir Lorentz anlamında normal paradeğme manifold veya Lorentz anlamında para-Sasakian (kısaca LP-Sasakian) manifoldu olarak adlandırılır. Bir LP-Sasakian manifoldda η vektör alanı kapalıdır (De & Shaikh, 2009).

Ayrıca bir n –boyutlu Lorentz manifoldu (M^n, g) ;

$$\begin{aligned} (\nabla_{\theta_1} \nabla_{\theta_2} \eta)(\theta_3) &= g(\theta_1, \theta_2) \eta(\theta_3) + g(\theta_1, \theta_3) \eta(\theta_2) \\ &\quad + 2\eta(\theta_1) \eta(\theta_2) \eta(\theta_3) \end{aligned} \quad (4.1.13.)$$

eşitliğini sağlayan, bir timelike birim vektör alanı olan ξ ye ve bir kapalı 1 –form olan η ye sahip ise M^n bir LP-Sasakian yapıya sahiptir.

Yine sabit eğriliğe sahip LP-Sasakian manifolduna, LP-Sasakian uzay formu denir.

Bir n –boyutlu $M^n(\varphi, \xi, \eta, g)$ LP-Sasakian manifoldunda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned} g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \xi) &= \eta(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3) \\ &= g(\theta_2, \theta_3)\eta(\theta_1) - g(\theta_1, \theta_3)\eta(\theta_2) \end{aligned} \quad (4.1.14.)$$

$$R_{cur}(\xi, \theta_1)\theta_2 = g(\theta_1, \theta_2)\xi - \eta(\theta_2)\theta_1 \quad (4.1.15.)$$

$$R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\xi = \eta(\theta_2)\theta_1 - \eta(\theta_1)\theta_2 \quad (4.1.16.)$$

$$R_{cur}(\xi, \theta_1)\xi = \theta_1 + \eta(\theta_1)\xi \quad (4.1.17.)$$

$$Ric(\theta_1, \xi) = (n - 1)\eta(\theta_1) \quad (4.1.18.)$$

$$Ric(\varphi\theta_1, \varphi\theta_2) = Ric(\theta_1, \theta_2) + (n - 1)\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) \quad (4.1.19.)$$

$$\begin{aligned} \varphi(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3) &= R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 + 2[\eta(\theta_2)\theta_1 - \eta(\theta_1)\theta_2]\eta(\theta_3) \\ &\quad + 2[g(\theta_1, \theta_3)\eta(\theta_2) - g(\theta_2, \theta_3)\eta(\theta_1)]\xi + \Omega(\theta_1, \theta_3)\varphi\theta_2 \\ &\quad - \Omega(\theta_2, \theta_3)\varphi\theta_1 + g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \end{aligned} \quad (4.1.20.)$$

burada R_{cur} , (1,3) tipindeki eğrilik tensörü Ric ise (0,2) tipinde Ricci tensörüdür (De & Shaikh, 2009).

Ayrıca η vektör alanı bir LP-Sasakian manifoldda kapalı olduğundan her θ_1, θ_2 vektör alanı için

$$(\nabla_{\theta_1}\eta)(\theta_2) = \Omega(\theta_1, \theta_2) \quad (4.1.21.)$$

$$\Omega(\theta_1, \xi) = 0 \quad (4.1.22.)$$

$$\nabla_{\theta_1}\xi = \varphi\theta_1 \quad (4.1.23.)$$

eşitliklerine sahiptir (Matsumoto & Mihai, 1988).

4.2. Soliton Tipleri

Tanım 4.2.1. Bir değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) olan n –boyutlu manifold M olsun. Eğer Ric Ricci tensörü için,

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = ag(\theta_1, \theta_2) + b\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) \quad (4.2.2)$$

eşitliği sağlanıyorsa, M ye η –Einstein manifold adı verilir. Burada a ve b , M üzerinde birer sabittir (Blaga & Crasmareanu, 2017).

Tanım 4.2.2. Bir değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) olan n –boyutlu manifold M olsun. Eğer Ric Ricci tensörü için,

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = ag(\theta_1, \theta_2) + b\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) + cg(\varphi\theta_1, \theta_2) \quad (4.2.3)$$

eşitliği sağlanıyorsa, M ye pseudo η –Einstein manifold adı verilir. Burada a, b ve c , M üzerinde birer sabittir (Hui & Chakraborty, 2017).

Tanım 4.2.3. Bir n – boyutlu Riemann manifoldu (M, g) üzerinde $\varphi_t: M^n \rightarrow M^n, t \in [0, \varepsilon)$ ve $\varepsilon > 0$ için diffeomorfizmlerin 1 –parametrelili ailesi olmak üzere $\lambda \in R, \rho(t) = 2\lambda(1 - t)$ için elde edilen $g(t) = \rho(t)\varphi_t^*g_0$ metrik tensörlerinin

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ricg(t), \quad (4.2.4)$$

$$g(0) = g_0, \quad (4.2.5)$$

Ricci flow (akış) denklemini sağlayan bir çözümüne Ricci soliton manifoldu denir (Açıkgöz Kaya, 2017).

Bir genelleştirilmiş Einstein manifoldu, tam bir V vektör alanına sahip bir Riemann manifoldu gibi

$$L_V g + 2Ric + 2\lambda g = 0 \quad (4.2.6)$$

denklemini sağlıyor ise bir (M, g, λ) hemen hemen Ricci soliton olarak adlandırılır. Burada L Lie türevi, Ric Ricci tensörü ve λ bir diferansiyellenebilir fonksiyondur. Eğer λ sırasıyla, negatif, sıfır ya da pozitif ise hemen hemen Ricci soliton daralan (shrinking), durağan (steady) ya da genişleyen (expanding) olarak adlandırılır (Hui & Chakraborty, 2017).

Cho ve Kimura tarafından da η –Ricci solitonlar ortaya konulmuştur. Bir η –Ricci soliton

$$L_V g + 2Ric + 2\lambda g + 2\mu\eta \otimes \eta = 0 \quad (4.2.7)$$

şeklinde tanımlanır (Cho & Kimura, 2009).

4.3. Ricci soliton şartını sağlayan LP-Sasakian manifoldlar

Bu altbölümde, bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M üzerinde ilk önce Ricci solitonun daralan olduğu gösterildi. Daha sonra Ricci soliton denklemini sağlayan M manifoldu

üzerinde, sırasıyla konformal flat, projektif flat, konharmonik flat ve konsirküler flat olma özelliği ile elde edilen karakterizasyonlar sonuç olarak verilmiştir.

Teorem 4.3.1. Bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M olsun. M üzerinde bir Ricci Soliton daralan (shrinking) olur.

İspat: Bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M olsun. (M, g, λ) bir Ricci Soliton ise (4.2.6) denklemini kullanarak $\forall \theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için

$$L_V g(\theta_1, \theta_2) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) = 0 \quad (4.3.1)$$

dır. (4.3.1) denkleminde,

$$g(\nabla_{\theta_1} V, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2} V) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (4.3.2)$$

yazarız. (4.3.2) denkleminde $V = \xi$ alınır

$$g(\nabla_{\theta_1} \xi, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2} \xi) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (4.3.3)$$

elde edilir. (4.1.23.) denklemini (4.3.3) de kullanırsak

$$g(\varphi\theta_1, \theta_2) + g(\theta_1, \varphi\theta_2) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (4.3.4)$$

elde ederiz. Böylece (4.1.9) ve (4.1.10) yardımıyla,

$$2g(\varphi\theta_1, \theta_2) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (4.3.5)$$

ve

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = -g(\varphi\theta_1, \theta_2) - \lambda g(\theta_1, \theta_2), \quad (4.3.6)$$

dir. Böylece,

$$Q\theta_1 = -\varphi\theta_1 - \lambda\theta_1 \quad (4.3.7)$$

elde ederiz. Şimdi (4.3.6) da $\theta_1 = \varphi\theta_1$ ve $\theta_2 = \varphi\theta_2$ alınır

$$g(\varphi(\varphi\theta_1), \varphi\theta_2) + Ric(\varphi\theta_1, \varphi\theta_2) + \lambda g(\varphi\theta_1, \varphi\theta_2) = 0, \quad (4.3.8)$$

dir. (4.1.2.), (4.1.7.) ve (4.1.19.) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} g(\theta_1 + \eta(\theta_1)\xi, \varphi\theta_2) + Ric(\theta_1, \theta_2) + (n-1)\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) \\ + \lambda g(\theta_1, \theta_2) + \lambda\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

elde edilir. Bu denklemi (4.3.6), (4.1.9) ve (4.1.10) yardımıyla düzenlersek,

$$\begin{aligned}
& -Ric(\theta_1, \theta_2) - \lambda g(\theta_1, \theta_2) + Ric(\theta_1, \theta_2) + (n - 1 + \lambda)\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) \\
& + \lambda g(\theta_1, \theta_2) = 0
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

olur. Böylece

$$(n - 1 + \lambda)\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0 \tag{4.3.11}$$

sonucuna ulaşırız. O halde

$$(n - 1 + \lambda) = 0, \tag{4.3.12}$$

ve

$$\lambda = 1 - n, \tag{4.3.13}$$

elde edilir.

Böylece $n > 1$ için $\lambda < 0$ olacağından Ricci soliton daralan (shrinking) dır.

Teorem 4.3.2. Bir (M, g, λ) Ricci soliton şartını sağlayan n –boyutlu LP-Sasakian manifold M , konformal flat ise M bir η –Einstein manifolddur.

İspat: Bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M olsun. M manifoldunun Ricci soliton şartını sağladığını göz önüne alarak (1.23) te verilen konformal eğrilik tensörü ifadesinde (4.3.6) ve (4.3.7) eşitlikleri uygulanırsa $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
C(\theta_1, \theta_2)\theta_3 &= R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 \\
& - \frac{1}{n-2} \left[g(\varphi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\varphi\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right] \\
& + g(\theta_2, \theta_3)\varphi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\varphi\theta_2 \\
& - \left(\frac{\tau + 2\lambda(n-1)}{(n-1)(n-2)} \right) [g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 - g(\theta_2, \theta_3)\theta_1]
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

olur. Şimdi M manifoldu konformal flat olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 &= \frac{1}{n-2} \left[g(\varphi\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\varphi\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right] \\
& + g(\theta_2, \theta_3)\varphi\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\varphi\theta_2 \\
& - \left(\frac{\tau + 2\lambda(n-1)}{(n-1)(n-2)} \right) [g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 - g(\theta_2, \theta_3)\theta_1]
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

dir. (4.3.15) de $\theta_3 = \xi$ alınır,

$$R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\xi = \frac{1}{n-2} \left[g(\varphi\theta_2, \xi)\theta_1 - g(\varphi\theta_1, \xi)\theta_2 \right] + g(\theta_2, \xi)\varphi\theta_1 - g(\theta_1, \xi)\varphi\theta_2$$

$$-\left(\frac{\tau + 2\lambda(n-1)}{(n-1)(n-2)}\right)[g(\theta_1, \xi)\theta_2 - g(\theta_2, \xi)\theta_1] \quad (4.3.16)$$

Böylece (4.1.16), (4.1.4) ve (4.1.6) dan,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-2}[\eta(\theta_2)\varphi\theta_1 - \eta(\theta_1)\varphi\theta_2] = \\ \left(\frac{\tau + 2\lambda(n-1)}{(n-1)(n-2)} + 1\right)[\eta(\theta_1)\theta_2 - \eta(\theta_2)\theta_1] \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

elde edilir. Bu eşitlik θ_4 ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-2}[\eta(\theta_2)g(\varphi\theta_1, \theta_4) - \eta(\theta_1)g(\varphi\theta_2, \theta_4)] = \\ \left(\frac{\tau + 2\lambda(n-1)}{(n-1)(n-2)} + 1\right)[\eta(\theta_1)g(\theta_2, \theta_4) - \eta(\theta_2)g(\theta_1, \theta_4)] \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

sonucuna ulaşırız. (4.3.18) denkleminde $\theta_1 = \xi$ alınıp, (4.1.16), (4.1.1), (4.1.3) ve (4.1.4) eşitlikleri kullanılarak düzenlenirse,

$$\frac{1}{n-2}g(\varphi\theta_2, \theta_4) = \left(\frac{\tau + 2\lambda(n-1)}{(n-1)(n-2)} + 1\right)[-g(\theta_2, \theta_4) - \eta(\theta_2)\eta(\theta_4)] \quad (4.3.19)$$

elde edilir. Böylece (4.3.6) eşitliği yardımıyla,

$$\begin{aligned} Ric(\theta_2, \theta_4) = \left(\frac{\tau}{(n-1)} + \lambda - n + 2\right)g(\theta_2, \theta_4) \\ + \left(\frac{\tau}{(n-1)} + 2\lambda - n + 2\right)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

elde edilir. Bu ise M nin bir η –Einstein manifold olduğunu gösterir.

Teorem 4.3.3. Bir (M, g, λ) Ricci Soliton şartını sağlayan n –boyutlu LP-Sasakian manifold M projektif flat ise M bir η – Einstein manifolddur.

İspat: Bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M olsun. M manifoldunun Ricci soliton şartını sağladığını göz önüne alırsak, (1.24) ile verilen projektif eğrilik tensörü (4.3.6) yardımıyla $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için

$$P(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} -g(\varphi\theta_2, \theta_3)\theta_1 + g(\varphi\theta_1, \theta_3)\theta_2 \\ -\lambda g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 + \lambda g(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.21)$$

ile tanımlıdır. M manifoldu projektif flat olsun. Bu durumda, (4.3.21) eşitliğinde $P = 0$ olacağından,

$$R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = \frac{1}{n-1} \left[-g(\varphi\theta_2, \theta_3)\theta_1 + g(\varphi\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right] \quad (4.3.22)$$

elde edilir. (4.3.22) de $\theta_1 = \xi$ alınıp (4.1.3) ve (4.1.3) eşitlikleri uygulanırsa,

$$R_{cur}(\xi, \theta_2)\theta_3 = \frac{1}{n-1} \left[-g(\varphi\theta_2, \theta_3)\xi - \lambda g(\theta_2, \theta_3)\xi + \lambda \eta(\theta_3)\theta_2 \right], \quad (4.3.23)$$

olur. (4.3.23) denklemini ξ ile çarparsak

$$\eta(R_{cur}(\xi, \theta_2)\theta_3) = \frac{1}{n-1} \left[+\lambda g(\theta_2, \theta_3) + \lambda \eta(\theta_3)\eta(\theta_2) \right], \quad (4.3.24)$$

elde edilir. (4.1.15) eşitliğinden,

$$-g(\theta_2, \theta_3) - \eta(\theta_3)\eta(\theta_2) = \frac{1}{n-1} \left[+\lambda g(\theta_2, \theta_3) + \lambda \eta(\theta_3)\eta(\theta_2) \right], \quad (4.3.25)$$

olur. Böylece,

$$g(\varphi\theta_2, \theta_3) = -(n-1+\lambda)[g(\theta_2, \theta_3) + \eta(\theta_3)\eta(\theta_2)], \quad (4.3.26)$$

elde edilir. Böylece (4.3.6) eşitliği kullanılarak

$$Ric(\theta_2, \theta_3) = (n-1)g(\theta_2, \theta_3) + (n-1+\lambda)\eta(\theta_2)\eta(\theta_3), \quad (4.3.27)$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise M nin bir η – Einstein manifold olduğunu gösterir.

Teorem 4.3.4. Bir (M, g, λ) Ricci Soliton şartını sağlayan n –boyutlu LP-Sasakian manifold M konharmonikal flat ise M bir η – Einstein manifolddur.

İspat: Bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M olsun. M manifoldunun Ricci soliton şartını sağladığını göz önüne alırsak konharmonikal eğrilik tensörü $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \bar{C}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 &= R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 \\ &\quad - \frac{1}{n-2} \left[Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right] \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

ile tanımlıdır. M manifoldu konharmonik flat olsun. Bu durumda, (4.3.28) eşitliğinde $\bar{C} = 0$ olacağından,

$$R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = \frac{1}{n-2} \left[Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2 \right] \quad (4.3.29)$$

elde edilir. (4.3.29) eşitliğinde $\theta_3 = \xi$ alınıp (4.1.16), (4.3.6), (4.3.7), (4.1.9) ve (4.1.22) eşitlikleri uygulanırsa,

$$R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\xi = \frac{1}{n-2} \left[2\lambda\eta(\theta_1)\theta_2 - 2\lambda\eta(\theta_2)\theta_1 \right] \quad (4.3.30)$$

ve

$$\eta(\theta_2)\theta_1 - \eta(\theta_1)\theta_2 = \frac{1}{n-2} [2\lambda\eta(\theta_1)\theta_2 - 2\lambda\eta(\theta_2)\theta_1], \quad (4.3.31)$$

elde edilir. (4.3.31) eşitliğinde $\theta_1 = \xi$ alınarak (4.1.1) ve (4.1.3) eşitlikleri uygulanırsa,

$$\eta(\theta_2)\xi + \theta_2 = \frac{1}{n-2} [-2\lambda\theta_2 - 2\lambda\eta(\theta_2)\xi - \varphi\theta_2], \quad (4.3.32)$$

olur. Bu eşitlik θ_4 ile çarpılarak (4.1.6) eşitliği uygulanıp düzenlenirse,

$$\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) + g(\theta_2, \theta_4) = \frac{1}{n-2} \left[\begin{array}{c} -2\lambda g(\theta_2, \theta_4) - 2\lambda\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) \\ -g(\varphi\theta_2, \theta_4) \end{array} \right], \quad (4.3.33)$$

ve

$$\left(\frac{n-2+2\lambda}{n-2} \right) [\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) + g(\theta_2, \theta_4)] = -\frac{1}{n-2} g(\varphi\theta_2, \theta_4), \quad (4.3.34)$$

elde edilir. Böylece (4.3.6) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \left(\frac{n-2+2\lambda}{n-2} \right) [\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) + g(\theta_2, \theta_4)] \\ = \frac{1}{n-2} [Ric(\theta_2, \theta_4) + \lambda g(\theta_2, \theta_4)], \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

veya

$$Ric(\theta_2, \theta_4) = (n-2+\lambda)g(\theta_2, \theta_4) + (n-2+2\lambda)\eta(\theta_2)\eta(\theta_4) \quad (4.3.36)$$

sonucuna ulaşırız. Bu ise M nin bir η – Einstein manifold olduğunu gösterir.

Teorem 4.3.5. Bir (M, g, λ) Ricci Soliton şartını sağlayan n –boyutlu LP-Sasakian manifold M konsirküler flat ise M bir pseudo η – Einstein manifolddur.

İspat: Bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M olsun. M manifoldunun Ricci soliton şartını sağladığını göz önüne alırsak konsirküler eğrilik tensörü $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \check{Z}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 &= R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 \\ &+ \frac{\tau}{\lambda n(n-1)} \left[\begin{array}{c} Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 + g(\varphi\theta_2, \theta_3)\theta_1 \\ -Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2 - g(\varphi\theta_1, \theta_3)\theta_2 \end{array} \right], \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

ile tanımlıdır. M manifoldu konsirküler flat olsun. Bu durumda, (4.3.28) eşitliğinde $\check{Z} = 0$ olacağından,

$$R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = \frac{\tau}{\lambda n(n-1)} \left[\begin{array}{c} -Ric(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\varphi\theta_2, \theta_3)\theta_1 \\ +Ric(\theta_1, \theta_3)\theta_2 + g(\varphi\theta_1, \theta_3)\theta_2 \end{array} \right], \quad (4.3.38)$$

elde edilir. (4.3.38) eşitliğinde $\theta_1 = \xi$ alınıp (4.1.3), (4.1.15) ve (4.1.18) eşitlikleri uygulanırsa,

$$g(\theta_2, \theta_3)\xi - \eta(\theta_3)\theta_2 = \frac{\tau}{\lambda n(n-1)} \left[\begin{array}{c} -Ric(\theta_2, \theta_3)\xi - g(\varphi\theta_2, \theta_3)\xi \\ + (n-1)\eta(\theta_2)\theta_2 \end{array} \right], \quad (4.3.39)$$

elde edilir. Bu son eşitlik ξ ile çarpılarak (4.1.1) ve (4.1.6) eşitlikleri uygulanırsa,

$$-g(\theta_2, \theta_3) - \eta(\theta_3)\eta(\theta_2) = \frac{\tau}{\lambda n(n-1)} \left[\begin{array}{c} Ric(\theta_2, \theta_3) + g(\varphi\theta_2, \theta_3) \\ + (n-1)\eta(\theta_2)\eta(\theta_3) \end{array} \right], \quad (4.3.40)$$

veya

$$\begin{aligned} Ric(\theta_2, \theta_3) &= -g(\varphi\theta_2, \theta_3) - \frac{\lambda n(n-1)}{\tau} g(\theta_2, \theta_3) \\ &\quad - \left(1 + \frac{\tau}{\lambda n}\right) \frac{\lambda n(n-1)}{\tau} \eta(\theta_2)\eta(\theta_3), \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

sonucuna ulaşırız. Bu ise M manifoldunun pseudo η – Einstein olduğunu gösterir.

Teorem 4.3.6. n –boyutlu LP-Sasakian manifold M üzerinde η –Ricci soliton denklemi sağlanmaz.

İspat: Bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M üzerinde η –Ricci soliton şartının sağlandığını yani $\forall \theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için,

$$(L_V g)(\theta_1, \theta_2) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0 \quad (4.3.42)$$

denkleminin sağlandığını göz önüne alalım. Böylece

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\theta_1} V, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2} V) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) \\ + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

dır. (4.3.43) denkleminde $V = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\theta_1} \xi, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2} \xi) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) \\ + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

elde edilir. (4.3.44.) denkleminde (4.1.23) eşitliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} g(\varphi\theta_1, \theta_2) + g(\theta_1, \varphi\theta_2) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) \\ + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

elde ederiz. Böylece,

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = -g(\varphi\theta_1, \theta_2) - \lambda g(\theta_1, \theta_2) - \mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2), \quad (4.3.46)$$

elde edilir. (4.3.46) eşitliğinde $\theta_2 = \xi$ alınırsa

$$Ric(\theta_1, \xi) = -(\lambda - \mu)\eta(\theta_1), \quad (4.3.47)$$

$$n - 1 = -(\lambda - \mu), \quad (4.3.48)$$

sonucuna ulaşılır. (4.3.13) denklemi yardımı ile $\lambda = 1 - n$ olduğundan $\mu = 0$ elde ederiz. Böylece bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M üzerinde η –Ricci soliton denklemi sağlanmaz.

Teorem 4.3.7. Bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M olsun. M manifoldu konsirküler flat ise M , Einstein manifolddur.

İspat: Bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M olsun. konsirküler eğrilik tensörü, $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} \check{Z}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 &= R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 \\ &\quad - \frac{\tau}{n(n-1)} [g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2], \end{aligned} \quad (4.3.49)$$

ile tanımlıdır. M manifoldu konsirküler flat ise $\check{Z}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = 0$ olur. Bu durumda,

$$R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = \frac{\tau}{n(n-1)} [g(\theta_2, \theta_3)\theta_1 - g(\theta_1, \theta_3)\theta_2], \quad (4.3.50)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının θ_4 ile iç çarpımı alınırsa, metriğin özelliklerinden,

$$\begin{aligned} g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) &= \\ &\quad \frac{\tau}{n(n-1)} [g(\theta_2, \theta_3)g(\theta_1, \theta_4) - g(\theta_1, \theta_3)g(\theta_2, \theta_4)], \end{aligned} \quad (4.3.51)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\theta_1 = \theta_4 = e_i$ alınırsa

$$Ric(\theta_2, \theta_3) = \frac{\tau}{n} g(\theta_2, \theta_3) \quad (4.3.52)$$

sonucuna varılır. Bu ise M nin bir Einstein manifold olduğunu gösterir.

O halde n –boyutlu LP-Sasakian M manifoldu konsirküler flat ise M , Einstein manifolddur.

Teorem 4.3.8. Bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M olsun. M manifoldu konsirküler flat ise M üzerindeki Ricci Soliton için $\lambda = -\frac{\tau}{n}$ dir.

İspat: Bir n – boyutlu M , LP-Sasakian manifoldu, konsirküler flat ve (M, g, λ) bir Ricci Soliton olsun. Bu durumda (4.2.5) ve (4.3.52) denklemlerinden $\forall \theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için,

$$L_V g(\theta_1, \theta_2) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (4.3.53)$$

ve

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = \frac{\tau}{n} g(\theta_1, \theta_2), \quad (4.3.54)$$

eşitliklerini sağlar. Bu durumda, (4.3.53) denkleminde (4.3.54) ü yazarak düzenlendiğinde,

$$L_V g(\theta_1, \theta_2) + 2\frac{\tau}{n} g(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (4.3.55)$$

ve

$$L_V g(\theta_1, \theta_2) + 2\left(\frac{\tau}{n} + \lambda\right) g(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (4.3.56)$$

olur. (4.3.56) eşitliğinden,

$$g(\nabla_{\theta_1} V, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2} V) + 2\left(\frac{\tau}{n} + \lambda\right) g(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (4.3.57)$$

elde edilir. Bu ifadede $V = \xi$ alınır,sa,

$$g(\nabla_{\theta_1} \xi, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2} \xi) + 2\left(\frac{\tau}{n} + \lambda\right) g(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (4.3.58)$$

dir. Bu ifadede (4.1.23), (4.1.9) ve (4.1.10) eşitlikleri kullanılarak eşitlik düzenlenirse,

$$g(\varphi\theta_1, \theta_2) + \left(\frac{\tau}{n} + \lambda\right) g(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (4.3.59)$$

olur. Burada $\theta_2 = \xi$ alınarak (4.1.9) ve (4.1.22) eşitlikleri uygulanırsa,

$$g(\varphi\theta_1, \xi) + \left(\frac{\tau}{n} + \lambda\right) g(\theta_1, \xi) = 0, \quad (4.3.60)$$

ve

$$\left(\frac{\tau}{n} + \lambda\right) \eta(\theta_1) = 0, \quad (4.3.61)$$

dır. Böylece,

$$\lambda = -\frac{\tau}{n} \quad (4.3.62)$$

sonucuna ulaşılır. O halde n –boyutlu LP-Sasakian M manifoldu konsirküler flat ise M üzerindeki Ricci Soliton için $\lambda = -\frac{\tau}{n}$ dir.

Teorem 4.3.9. Bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M olsun. M manifoldu projektif flat ise M üzerindeki bir η - Ricci Soliton için $\lambda - \mu = 1 - n$ dir.

İspat: Bir n – boyutlu M , LP-Sasakian manifoldu, projektif flat ve (M, g, λ, μ) bir η - Ricci Soliton olsun. Bu durumda (4.2.6) ve (4.2.12) denklemlerinden $\forall \theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için

$$L_V g(\theta_1, Y) + 2Ric(\theta_1, Y) + 2\lambda g(\theta_1, Y) + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(Y) = 0, \quad (4.3.63)$$

ve

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = (n - 1)g(\theta_1, \theta_2), \quad (4.3.64)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu durumda, (4.3.63) de (4.3.64) ü yazarak düzenlersek,

$$L_V g(\theta_1, \theta_2) + 2(n - 1)g(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \quad (4.3.65)$$

$$L_V g(\theta_1, \theta_2) + 2(\lambda + n - 1)g(\theta_1, \theta_2) + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \quad (4.3.66)$$

elde edilir. Bu denklemden,

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\theta_1} V, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2} V) + 2(\lambda + n - 1)g(\theta_1, \theta_2) \\ + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.67)$$

olur. (4.3.67) de $V = \xi$ alınırsa,

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\theta_1} \xi, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2} \xi) + 2(\lambda + n - 1)g(\theta_1, \theta_2) \\ + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.68)$$

eşitliği oluşur. (4.3.68) eşitliğinde (4.1.9) ve (4.1.10) eşitlikleri kullanılarak eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned} g(\varphi\theta_1, \theta_2) + g(\theta_1, \varphi\theta_2) + 2(\lambda + n - 1)g(\theta_1, \theta_2) \\ + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.69)$$

$$2g(\varphi\theta_1, \theta_2) + 2(\lambda + n - 1)g(\theta_1, \theta_2) + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \quad (4.3.70)$$

$$g(\varphi\theta_1, \theta_2) + (\lambda + n - 1)g(\theta_1, \theta_2) + \mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \quad (4.3.71)$$

dir. (4.3.70) eşitliğinde $\theta_2 = \xi$ alınarak (4.1.9) ve (4.1.22) eşitlikleri dikkate alınırsa,

$$g(\varphi\theta_1, \xi) + (\lambda + n - 1)g(\theta_1, \xi) + \mu\eta(\theta_1)\eta(\xi) = 0, \quad (4.3.72)$$

$$(\lambda + n - 1 - \mu)\eta(\theta_1) = 0, \quad (4.3.73)$$

$$\lambda - \mu = 1 - n \quad (4.3.74)$$

sonucuna varılır. O halde n –boyutlu LP-Sasakian M manifoldu projektif flat ise M üzerindeki η - Ricci Soliton için $\lambda - \mu = 1 - n$ dir.

Teorem 4.3.10. Bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M olsun. M manifoldu konharmonikal flat ise M üzerindeki bir η - Ricci Soliton için $\lambda - \mu = 1 - n$ dir.

İspat: Bir n –boyutlu M , LP-Sasakian manifoldu, konharmonikal flat ve (M, g, λ, μ) bir η - Ricci Soliton olsun. Bu durumda (4.2.6) ve (4.2.15) denklemlerinden $\forall \theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için,

$$L_V g(\theta_1, \theta_2) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \quad (4.3.76)$$

ve

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = -g(\theta_1, \theta_2) - n \eta(\theta_1)\eta(\theta_2), \quad (4.3.77)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu durumda, (4.3.76) te (4.3.77) i yazarak düzenlersek,

$$L_V g(\theta_1, \theta_2) + 2(\lambda - 1)g(\theta_1, \theta_2) + 2(\mu - n)\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \quad (4.3.78)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemden,

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\theta_1} V, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2} V) + 2(\lambda - 1)g(\theta_1, \theta_2) \\ + 2(\mu - n)\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.79)$$

elde edilir. Burada $V = \xi$ alınarak (4.1.23) eşitliği yardımıyla eşitliği düzenlenirse,

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\theta_1} \xi, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2} \xi) + 2(\lambda - 1)g(\theta_1, \theta_2) \\ + 2(\mu - n)\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.80)$$

$$\begin{aligned} g(\varphi\theta_1, \theta_2) + g(\theta_1, \varphi\theta_2) + 2(\lambda - 1)g(\theta_1, \theta_2) \\ + 2(\mu - n)\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.81)$$

$$2g(\varphi\theta_1, \theta_2) + 2(\lambda - 1)g(\theta_1, \theta_2) + 2(\mu - n)\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \quad (4.3.82)$$

$$g(\varphi\theta_1, \theta_2) + (\lambda - 1)g(\theta_1, \theta_2) + (\mu - n)\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \quad (4.3.83)$$

olur. Bu ifadede $\theta_2 = \xi$ alınarak (4.1.9), (4.1.22) ve (4.1.1) eşitlikleri uygulanırsa,

$$g(\varphi\theta_1, \xi) + (\lambda - 1)g(\theta_1, \xi) + (\mu - n)\eta(\theta_1)\eta(\xi) = 0, \quad (4.3.84)$$

$$(\lambda - 1)\eta(\theta_1) + (\mu - n)\eta(\theta_1)(-1) = 0, \quad (4.3.85)$$

$$(\lambda - 1 - \mu + n)\eta(\theta_1) = 0, \quad (4.3.86)$$

dır. Böylece,

$$\lambda - \mu = 1 - n \quad (4.3.87)$$

sonucuna ulaşılır.

O halde n –boyutlu LP-Sasakian M manifoldu konharmonikal flat ise M üzerindeki η - Ricci Soliton için $\lambda - \mu = 1 - n$ dir.

Teorem 4.3.11. Bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M olsun. M manifoldu konsirküler flat ise M üzerindeki bir η - Ricci Soliton için $\lambda - \mu = -\frac{\tau}{n}$ dir.

İspat: Bir n –boyutlu M , LP-Sasakian manifoldu, konsirküler flat ve (M, g, λ) bir η - Ricci soliton olsun. Bu durumda (4.2.6) ve (4.3.71) denklemlerinden $\forall \theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için,

$$L_V g(\theta_1, \theta_2) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \quad (4.3.88)$$

ve

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = \frac{\tau}{n} g(\theta_1, \theta_2), \quad (4.3.89)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.3.88) denkleminde (4.3.89) yi yazarak düzenlediğimizde,

$$L_V g(\theta_1, \theta_2) + 2\left(\frac{\tau}{n} + \lambda\right) g(\theta_1, \theta_2) + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \quad (4.3.90)$$

olur. Bu denklemden,

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\theta_1} V, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2} V) + 2\left(\frac{\tau}{n} + \lambda\right) g(\theta_1, \theta_2) \\ + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.91)$$

elde edilir. (4.3.91) ifadesinde $V = \xi$ alıp (4.1.23) yardımıyla eşitliği düzenlersek,

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\theta_1} \xi, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2} \xi) + 2\left(\frac{\tau}{n} + \lambda\right) g(\theta_1, \theta_2) \\ + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.92)$$

$$g(\varphi\theta_1, \theta_2) + g(\theta_1, \varphi\theta_2) + 2\left(\frac{\tau}{n} + \lambda\right) g(\theta_1, \theta_2) + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0 \quad (4.3.93)$$

$$g(\varphi\theta_1, \theta_2) + \left(\frac{\tau}{n} + \lambda\right) g(\theta_1, \theta_2) + \mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \quad (4.3.94)$$

ifadesi elde edilir. (4.3.94) ifadesinde $\theta_2 = \xi$ alınarak (4.1.9), (4.1.22) ve (4.1.1) eşitlikleri uygulanıp düzenlenirse,

$$\left(\frac{\tau}{n} + \lambda\right) \eta(\theta_1) + \mu\eta(\theta_1)(-1) = 0, \quad (4.3.95)$$

$$\left(\frac{\tau}{n} + \lambda - \mu\right) \eta(\theta_1) = 0, \quad (4.3.96)$$

olur. Böylece,

$$\lambda - \mu = -\frac{\tau}{n} \quad (4.3.97)$$

sonucuna ulaşılır.

O halde n -boyutlu LP-Sasakian M manifoldu konsirküler flat ise M üzerindeki bir η – Ricci Soliton için $\lambda - \mu = -\frac{\tau}{n}$ dir.

Teorem 4.3.12. Bir n –boyutlu LP-Sasakian manifold M olsun. M manifoldu konformal flat ise M üzerindeki bir η –Ricci Soliton için $\lambda - \mu = 1 - n$ dir.

İspat: Bir n –boyutlu M , LP-Sasakian manifoldu, konformal flat ve (M, g, λ) bir η –Ricci Soliton olsun. Bu durumda (4.2.6) ve (4.3.19) denklemlerinden $\forall \theta_1, \theta_2 \in \chi(M)$ için,

$$L_V g(\theta_1, \theta_2) + 2Ric(\theta_1, \theta_2) + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \quad (4.3.98)$$

ve

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{\tau}{n-1} - 1\right) g(\theta_1, \theta_2) + \left(\frac{\tau}{n-1} - n\right) \eta(\theta_1)\eta(\theta_2), \quad (4.3.99)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu durumda, (4.3.98) denkleminde (4.3.99) u yazarak düzenlersek,

$$\begin{aligned} L_V g(\theta_1, \theta_2) + 2\left(\frac{\tau}{n-1} - 1\right) g(\theta_1, \theta_2) + 2\left(\frac{\tau}{n-1} - n\right) \eta(\theta_1)\eta(\theta_2) \\ + 2\lambda g(\theta_1, \theta_2) + 2\mu\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.100)$$

$$\begin{aligned} L_V g(\theta_1, \theta_2) + 2\left(\frac{\tau}{n-1} - 1 + \lambda\right) g(\theta_1, \theta_2) \\ + 2\left(\frac{\tau}{n-1} - n + \mu\right) \eta(\theta_1)\eta(Y) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.101)$$

eşitliği elde edilir. Be denklemden,

$$g(\nabla_{\theta_1} V, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2} V) + 2\left(\frac{\tau}{n-1} - 1 + \lambda\right) g(\theta_1, \theta_2)$$

$$+2\left(\frac{\tau}{n-1} - n + \mu\right)\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \quad (4.3.102)$$

elde edilir. (4.3.102) eşitliğinde $V = \xi$ alarak (4.1.23) yardımıyla eşitliği düzenlersek,

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\theta_1}\xi, \theta_2) + g(\theta_1, \nabla_{\theta_2}\xi) + 2\left(\frac{\tau}{n-1} - 1 + \lambda\right)g(\theta_1, \theta_2) \\ + 2\left(\frac{\tau}{n-1} - n + \mu\right)\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.103)$$

$$\begin{aligned} g(\varphi\theta_1, \theta_2) + \left(\frac{\tau}{n-1} - 1 + \lambda\right)g(\theta_1, \theta_2) \\ + \left(\frac{\tau}{n-1} - n + \mu\right)\eta(\theta_1)\eta(\theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.104)$$

ifadesine ulaşılır. (4.3.123) eşitliğinde $\theta_2 = \xi$ alınarak (4.1.6) ve (4.1.1) eşitlikleri uygulan-
dığında,

$$\begin{aligned} g(\varphi\theta_1, \xi) + \left(\frac{\tau}{n-1} - 1 + \lambda\right)g(\theta_1, \xi) \\ + \left(\frac{\tau}{n-1} - n + \mu\right)\eta(\theta_1)\eta(\xi) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.105)$$

$$\left(\frac{\tau}{n-1} - 1 + \lambda - \frac{\tau}{n-1} + n - \mu\right)\eta(\theta_1) = 0, \quad (4.3.106)$$

$$-1 + \lambda + n - \mu = 0, \quad (4.3.107)$$

olur. Böylece,

$$\lambda - \mu = 1 - n \quad (4.3.108)$$

sonucuna ulaşılır.

O halde n –boyutlu LP-Sasakian M manifoldu konformal flat ise M üzerindeki bir η –Ricci Soliton için $\lambda - \mu = 1 - n$ dir.

Örnek:

$\mathbb{R}^3$ de standart koordinatlar (x, y, z) olmak üzere $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z \neq 0\}$ de $\{e_1, e_2, e_3\}$ lineer bağımsız vektör alanlarını,

$$e_1 = e^z \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = e^z \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.3.109)$$

ile tanımlayalım. g Lorenz metriğini

$$\begin{aligned} g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) = 1, \\ g(e_1, e_2) = g(e_2, e_3) = g(e_3, e_1) = 0, \end{aligned} \quad (4.3.110)$$

şeklinde, ξ vektör alanını $\xi = e_3$ ve bir η , 1 –formunu ise $\forall \theta \in \chi(M)$ için $\eta(\theta) = g(\theta, e_3)$ ile $\varphi, (1,1)$ –tensör alanını $\varphi e_1 = -e_1, \varphi e_2 = -e_2, \varphi e_3 = 0$ şeklinde tanımlayalım. Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = -e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2, \quad (4.3.111)$$

dır. g Lorenz metriğinde $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\theta_1} \theta_2, \theta_3) &= \theta_1 g(\theta_2, \theta_3) + \theta_2 g(\theta_3, \theta_1) - \theta_3 g(\theta_1, \theta_2) \\ &\quad - g(\theta_1, [\theta_2, \theta_3]) - g(\theta_2, [\theta_1, \theta_3]) + g(\theta_3, [\theta_1, \theta_2]) \end{aligned} \quad (4.3.112)$$

şeklinde tanımlanan Koszul formülünü kullanırsak,

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= -e_3, & \nabla_{e_1} e_2 &= 0, & \nabla_{e_1} e_3 &= -e_1, \\ \nabla_{e_2} e_1 &= 0, & \nabla_{e_2} e_2 &= -e_3, & \nabla_{e_2} e_3 &= -e_2, \\ \nabla_{e_3} e_1 &= 0, & \nabla_{e_3} e_2 &= 0, & \nabla_{e_3} e_3 &= 0, \end{aligned} \quad (4.3.113)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.3.113) eşitlikleri yardımıyla (φ, ξ, η, g) yapısının, M üzerinde LP-Sasakian yapı olduğu görülür. (Blaga A. , 2016), (Prasad & Srivastav, 2012).

Şimdi (4.3.113) denklemi ile Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} R_{cur}(e_1, e_2)e_1 &= -e_2, & R_{cur}(e_1, e_2)e_2 &= e_1, & R_{cur}(e_1, e_2)e_3 &= 0, \\ R_{cur}(e_2, e_3)e_1 &= 0, & R_{cur}(e_2, e_3)e_2 &= -e_3, & R_{cur}(e_2, e_3)e_3 &= -e_2, \\ R_{cur}(e_1, e_3)e_1 &= -e_3, & R_{cur}(e_1, e_3)e_2 &= 0, & R_{cur}(e_1, e_3)e_3 &= -e_1, \end{aligned} \quad (4.3.114)$$

şeklinde hesaplanır.

Diğer yandan M üzerinde Ricci soliton denkleminin sağlandığını göz önüne alalım.

Bu durumda

$$Ric(e_i, e_j) = -g(\varphi e_i, e_j) - \lambda g(e_i, e_j), \quad (4.3.115)$$

eşitliği yardımı ile

$$\begin{aligned} Ric(e_1, e_1) &= 1 - \lambda, & Ric(e_1, e_2) &= 0, & Ric(e_1, e_3) &= 0, \\ Ric(e_2, e_1) &= 0, & Ric(e_2, e_2) &= 1 - \lambda, & Ric(e_2, e_3) &= 0, \\ Ric(e_3, e_1) &= 0, & Ric(e_3, e_2) &= 0, & Ric(e_3, e_3) &= \lambda, \end{aligned} \quad (4.3.116)$$

elde ederiz. Ayrıca 3-boyutlu manifoldda projektif eğrilik tensörü

$$P(\theta_i, \theta_j)\theta_k = R_{cur}(\theta_i, \theta_j)\theta_k - \frac{1}{2}[Ric(\theta_j, \theta_k)\theta_i - Ric(\theta_i, \theta_k)\theta_j], \quad (4.3.117)$$

olduğundan, (4.3.114) ve (4.3.115) denklemlerini kullandığımızda

$$P(\theta_i, \theta_j)\theta_k = 0, \quad (4.3.115)$$

olacağından M manifoldu projektif flat manifolddur.

Şimdi Ricci soliton şartını sağlayan n –boyutlu LP-Sasakian manifoldunda bazı simetri şartlarını inceleyelim.

Teorem 4.3.13: Ricci soliton şartını sağlayan n –boyutlu LP-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde $R_{cur} \cdot Ric = 0$ şartı sağlanıyorsa M bir Einstein manifolddur.

İspat: Ricci soliton şartını sağlayan n –boyutlu LP-Sasakian M manifoldu üzerinde $R_{cur} \cdot Ric = 0$ şartı sağlansın. Bu durumda $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in \chi(M)$ için,

$$R_{cur}(\theta_1, \theta_2)Ric(\theta_3, \theta_4) = 0 \quad (4.3.122)$$

yazılabilir. (1.15) dikkate alınarak bu eşitlik düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} R_{cur}(\theta_1, \theta_2)Ric(\theta_3, \theta_4) - Ric(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) \\ - Ric(\theta_3, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.123)$$

dir. Bu denklem

$$Ric(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) + Ric(\theta_3, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4) = 0 \quad (4.3.124)$$

olarak yazılır. Böylece (4.3.6) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} -g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \varphi\theta_4) - \lambda g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) \\ -g(\varphi\theta_3, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4) - \lambda g(\theta_3, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.125)$$

elde edilir. (4.3.125) denkleminde $\theta_3 = \xi$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} -g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\xi, \varphi\theta_4) - \lambda g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\xi, \theta_4) \\ -\lambda g(\xi, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.126)$$

elde edilir. Bu denklemde (4.1.16) ve (4.1.15) uygulanarak düzenlenirse,

$$\begin{aligned} -g(\eta(\theta_2)\theta_1 - \eta(\theta_1)\theta_2, \varphi\theta_4) - \lambda g(\eta(\theta_2)\theta_1 - \eta(\theta_1)\theta_2, \theta_4) \\ -\lambda g(\xi, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.127)$$

$$\begin{aligned}
& -g(\eta(\theta_2)\theta_1, \varphi\theta_4) + g(\eta(\theta_1)\theta_2, \varphi\theta_4) - \lambda g(\eta(\theta_2)\theta_1, \theta_4) \\
& + \lambda g(\eta(\theta_1)\theta_2, \theta_4) - \lambda[g(\theta_2, \theta_4)\eta(\theta_1) - g(\theta_1, \theta_4)\eta(\theta_2)] = 0
\end{aligned} \quad (4.3.128)$$

ifadesi oluşur. Bu ifadede $\theta_1 = \xi$ yazılıp, (4.1.1), (4.1.6) ve (4.1.4) eşitlikleri dikkate alınarak düzenlenirse,

$$g(\theta_2, \varphi\theta_4) = 0 \quad (4.3.129)$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç (4.3.6) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$Ric(\theta_1, \theta_2) = -\lambda g(\theta_1, \theta_2) \quad (4.3.130)$$

eşitliği elde edilir. Bu ise M nin bir Einstein manifold olduğunu gösterir

O halde Ricci soliton şartını sağlayan n –boyutlu LP-Sasakian manifoldu M üzerinde $R_{cur}.Ric = 0$ şartı sağlanıyorsa M bir Einstein manifolddur.

Teorem 4.3.14: η – Ricci soliton şartını sağlayan n –boyutlu LP-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde $R_{cur}.Ric = 0$ şartı sağlanıyorsa M bir Einstein manifolddur.

İspat: η – Ricci soliton şartını sağlayan n –boyutlu LP-Sasakian M manifoldu üzerinde $R_{cur}.Ric = 0$ şartı sağlansın. Bu durumda $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in \chi(M)$ için

$$R_{cur}(\theta_1, \theta_2)Ric(\theta_3, \theta_4) = 0 \quad (4.3.131)$$

denklemini

$$\begin{aligned}
& R_{cur}(\theta_1, \theta_2)Ric(\theta_3, \theta_4) - Ric(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) \\
& - Ric(\theta_3, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4) = 0
\end{aligned} \quad (4.3.132)$$

veya

$$Ric(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) + Ric(\theta_3, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4) = 0 \quad (4.3.133)$$

olarak yazabiliriz. Bu denklemde $\theta_3 = \xi$ alırsak

$$Ric(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\xi, \theta_4) + Ric(\xi, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4) = 0 \quad (4.3.134)$$

veya

$$Ric(\eta(\theta_2)\theta_1 - \eta(\theta_1)\theta_2, \theta_4) + Ric(\xi, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4) = 0 \quad (4.3.135)$$

elde ederiz. Tekrar $\theta_2 = \xi$ kullanırsak

$$Ric(\theta_1, \theta_4) = (\mu - \lambda)g(\theta_1, \theta_4) \quad (4.3.136)$$

sonucuna ulaşırız.

Teorem 4.3.15: Ricci soliton şartını sağlayan n –boyutlu LP-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde $R_{cur} \cdot P = 0$ şartı sağlanıyorsa M bir Einstein manifolddur.

İspat: Ricci soliton şartını sağlayan n –boyutlu LP-Sasakian M manifoldu üzerinde $R_{cur} \cdot P = 0$ şartı sağlansın. Bu durumda $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5 \in \chi(M)$ için

$$(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)P)(\theta_3, \theta_4)\theta_5 = 0 \quad (4.3.137)$$

eşitliğini

$$\begin{aligned} R_{cur}(\theta_1, \theta_2)P(\theta_3, \theta_4)\theta_5 - P(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4)\theta_5 \\ - P(\theta_3, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4)\theta_5 - P(\theta_3, \theta_4)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_5 = 0 \end{aligned} \quad (4.3.138)$$

olarak yazabiliriz. Böylece, sırası ile,

$$\begin{aligned} R_{cur}(\theta_1, \theta_2)P(\theta_3, \theta_4)\theta_5 &= R_{cur}(\theta_1, \theta_2)R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\theta_5 \\ &- \frac{1}{n-1} \left[g(\varphi\theta_4, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - g(\varphi\theta_3, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4 \right. \\ &\quad \left. + g(\theta_4, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\varphi\theta_3 - g(\theta_3, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\varphi\theta_4 \right] \end{aligned} \quad (4.3.139)$$

$$\begin{aligned} P(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) &= R_{cur}(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4)\theta_5 \\ &- \frac{1}{n-1} \left[g(\varphi\theta_4, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - g(\varphi R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_5)\theta_4 \right. \\ &\quad \left. + g(\theta_4, \theta_5)\varphi R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_5)\varphi\theta_4 \right] \end{aligned} \quad (4.3.140)$$

$$\begin{aligned} P(\theta_3, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4)\theta_5 &= R_{cur}(\theta_3, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4)\theta_5 \\ &- \frac{1}{n-1} \left[g(\varphi R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \theta_5)\theta_3 - g(\varphi\theta_3, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4 \right. \\ &\quad \left. + g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \theta_5)\varphi\theta_3 - g(\theta_3, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\varphi\theta_4 \right] \end{aligned} \quad (4.3.141)$$

$$\begin{aligned} P(\theta_3, \theta_4)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_5 &= R_{cur}(\theta_3, \theta_4)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_5 \\ &- \frac{1}{n-1} \left[g(\varphi\theta_4, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_5)\theta_3 - g(\varphi\theta_3, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_5)\theta_4 \right. \\ &\quad \left. + g(\theta_4, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_5)\varphi\theta_3 - g(\theta_3, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\varphi\theta_4 \right] \end{aligned} \quad (4.3.142)$$

dır. Bu denklemleri kullanarak

$$\begin{aligned} R_{cur}(\theta_1, \theta_2)R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\theta_5 - R_{cur}(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4)\theta_5 \\ - R_{cur}(\theta_3, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4)\theta_5 - R_{cur}(\theta_3, \theta_4)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_5 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} g(\varphi\theta_4, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - g(\varphi\theta_3, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4 \\ + g(\theta_4, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\varphi\theta_3 - g(\theta_3, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\varphi\theta_4 \\ - g(\varphi\theta_4, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 + g(\varphi R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_5)\theta_4 \\ - g(\theta_4, \theta_5)\varphi R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 + g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_5)\varphi\theta_4 \\ - g(\varphi R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \theta_5)\theta_3 + g(\varphi\theta_3, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4 \\ - g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \theta_5)\varphi\theta_3 + g(\theta_3, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\varphi\theta_4 \\ - g(\varphi\theta_4, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_5)\theta_3 + g(\varphi\theta_3, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_5)\theta_4 \\ - g(\theta_4, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_5)\varphi\theta_3 + g(\theta_3, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\varphi\theta_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.3.143)$$

sonucuna ulaşırız. Böylece

$$\begin{aligned} & R_{cur}(\theta_1, \theta_2)R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\theta_5 - R_{cur}(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4)\theta_5 \\ & - R_{cur}(\theta_3, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4)\theta_5 - R_{cur}(\theta_3, \theta_4)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_5 \\ & - \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} g(\theta_4, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\varphi\theta_3 + g(\varphi R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_5)\theta_4 \\ - g(\theta_4, \theta_5)\varphi R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 + g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_5)\varphi\theta_4 \\ - g(\varphi R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \theta_5)\theta_3 + g(\theta_3, \theta_5)R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\varphi\theta_4 \\ - g(\varphi\theta_4, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_5)\theta_3 + g(\varphi\theta_3, R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_5)\theta_4 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.144)$$

dir. Bu denklemde $\theta_1 = \xi$ alırsak

$$\begin{aligned} & R_{cur}(\xi, \theta_2)R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\theta_5 - R_{cur}(R_{cur}(\xi, \theta_2)\theta_3, \theta_4)\theta_5 \\ & - R_{cur}(\theta_3, R_{cur}(\xi, \theta_2)\theta_4)\theta_5 - R_{cur}(\theta_3, \theta_4)R_{cur}(\xi, \theta_2)\theta_5 \\ & - \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} g(\theta_4, \theta_5)R_{cur}(\xi, \theta_2)\varphi\theta_3 + g(R_{cur}(\xi, \theta_2)\theta_3, \varphi\theta_5)\theta_4 \\ - g(\theta_4, \theta_5)\varphi R_{cur}(\xi, \theta_2)\theta_3 + g(R_{cur}(\xi, \theta_2)\theta_3, \theta_5)\varphi\theta_4 \\ - g(R_{cur}(\xi, \theta_2)\theta_4, \varphi\theta_5)\theta_3 + g(\theta_3, \theta_5)R_{cur}(\xi, \theta_2)\varphi\theta_4 \\ - g(\varphi\theta_4, R_{cur}(\xi, \theta_2)\theta_5)\theta_3 + g(\varphi\theta_3, R_{cur}(\xi, \theta_2)\theta_5)\theta_4 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.145)$$

elde ederiz. O halde

$$\begin{aligned} & g(\theta_2, R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\theta_5)\xi - \eta(R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\theta_5)\theta_2 \\ & - g(\theta_2, \theta_3)R_{cur}(\xi, \theta_4)\theta_5 + \eta(\theta_3)R_{cur}(\theta_2, \theta_4)\theta_5 \\ & - g(\theta_2, \theta_4)R_{cur}(\theta_3, \xi)\theta_5 + \eta(\theta_4)R_{cur}(\theta_3, \theta_2)\theta_5 \\ & - g(\theta_2, \theta_5)\xi + \eta(\theta_5)R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\theta_2 \\ & - \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} g(\theta_4, \theta_5)g(\theta_2, \varphi\theta_3)\xi - \eta(\theta_3)g(\theta_2, \varphi\theta_5)\theta_4 \\ - g(\theta_4, \theta_5)\varphi R_{cur}(\xi, \theta_2)\theta_3 + g(\theta_2, \theta_3)\eta(\theta_5)\varphi\theta_4 \\ - \eta(\theta_3)g(\theta_2, \theta_5)\varphi\theta_4 + \eta(\theta_4)g(\theta_2, \varphi\theta_5)\theta_3 \\ + g(\theta_3, \theta_5)g(\theta_2, \varphi\theta_4)\xi + \eta(\theta_5)g(\varphi\theta_4, \theta_2)\theta_3 \\ - \eta(\theta_5)g(\varphi\theta_3, \theta_2)\theta_4 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.146)$$

sonucuna ulaşır $\theta_5 = \xi$ alırsak

$$\begin{aligned}
& g(\theta_2, R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\xi)\xi - g(\theta_2, \theta_3)R_{cur}(\xi, \theta_4)\xi + \eta(\theta_3)R_{cur}(\theta_2, \theta_4)\xi \\
& + g(\theta_2, \theta_4)R_{cur}(\xi, \theta_3)\xi + \eta(\theta_4)R_{cur}(\theta_3, \theta_2)\xi \\
& - \eta(\theta_2)R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\xi + R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\theta_2 \\
& - \frac{1}{n-1} \left[\begin{aligned} & \eta(\theta_4)g(\theta_2, \varphi\theta_3)\xi - \eta(\theta_4)\eta(\theta_3)\varphi\theta_2 \\ & - g(\theta_2, \theta_3)\varphi\theta_4 - \eta(\theta_3)\eta(\theta_2)\varphi\theta_4 \\ & + \eta(\theta_3)g(\theta_2, \varphi\theta_4)\xi - g(\varphi\theta_4, \theta_2)\theta_3 \\ & + g(\varphi\theta_3, \theta_2)\theta_4 \end{aligned} \right] = 0 \quad (4.3.147)
\end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemi de ξ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
& g(\theta_2, R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\xi) + g(R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\theta_2, \xi) \\
& + \frac{1}{n-1} \left[\begin{aligned} & -\eta(\theta_4)g(\theta_2, \varphi\theta_3) - \eta(\theta_3)g(\theta_2, \varphi\theta_4) \\ & - g(\varphi\theta_4, \theta_2)\eta(\theta_3) + g(\varphi\theta_3, \theta_2)\eta(\theta_4) \end{aligned} \right] = 0 \quad (4.3.148)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& \eta(\theta_4)g(\theta_2, \varphi\theta_3) + \eta(\theta_3)g(\theta_2, \varphi\theta_4) + g(\varphi\theta_4, \theta_2)\eta(\theta_3) \\
& - g(\varphi\theta_3, \theta_2)\eta(\theta_4) = 0 \quad (4.3.149)
\end{aligned}$$

$$\eta(\theta_3)g(\theta_2, \varphi\theta_4) = 0 \quad (4.3.150)$$

sonucunu elde ederiz. Böylece

$$g(\varphi\theta_4, \theta_2) = 0 \quad (4.3.151)$$

dır. O halde M manifoldu bir Einstein manifold dur.

Teorem 4.3.16: Ricci soliton şartını sağlayan n –boyutlu LP-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde $Q \cdot R_{cur} = 0$ şartı sağlanıyorsa M daralandır.

İspat: Ricci soliton şartını sağlayan n –boyutlu LP-Sasakian M manifoldu üzerinde $Q \cdot R_{cur} = 0$ şartı sağlansın. Bu durumda $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \chi(M)$ için

$$(QR_{cur})(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = 0 \quad (4.3.152)$$

dır. Bu denklemi

$$\begin{aligned}
& QR_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - R_{cur}(Q\theta_1, \theta_2)\theta_3 - R_{cur}(\theta_1, Q\theta_2)\theta_3 \\
& - R_{cur}(\theta_1, \theta_2)Q\theta_3 = 0 \quad (4.3.153)
\end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Bu eşitlikte $Q\theta_1 = -\varphi\theta_1 - \lambda\theta_1$ eşitliği dikkate alındığında

$$QR_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = -\varphi R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \lambda R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 \quad (4.3.154)$$

$$\begin{aligned} R_{cur}(Q\theta_1, \theta_2)\theta_3 &= R_{cur}(-\varphi\theta_1 - \lambda\theta_1, \theta_2)\theta_3 \\ &= -R_{cur}(\varphi\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \lambda R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 \end{aligned} \quad (4.3.155)$$

$$\begin{aligned} R_{cur}(\theta_1, Q\theta_2)\theta_3 &= R_{cur}(\theta_1, -\varphi\theta_2 - \lambda\theta_2)\theta_3 \\ &= -R_{cur}(\theta_1, \varphi\theta_2)\theta_3 - \lambda R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 \end{aligned} \quad (4.3.156)$$

$$\begin{aligned} R_{cur}(\theta_1, \theta_2)Q\theta_3 &= R_{cur}(\theta_1, \theta_2)(-\varphi\theta_3 - \lambda\theta_3) \\ &= -R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\varphi\theta_3 - \lambda R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 \end{aligned} \quad (4.3.157)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} &-\varphi R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - \lambda R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 + R_{cur}(\varphi\theta_1, \theta_2)\theta_3 \\ &+ \lambda R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 + R_{cur}(\theta_1, \varphi\theta_2)\theta_3 + \lambda R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 \\ &+ R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\varphi\theta_3 + \lambda R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.3.158)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} &\varphi R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 - R_{cur}(\varphi\theta_1, \theta_2)\theta_3 - R_{cur}(\theta_1, \varphi\theta_2)\theta_3 \\ &- R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\varphi\theta_3 - 2\lambda R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.3.159)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin θ_4 ile iç çarpımı alınıp Riemann eğrilik tensörünün özellikleri dikkate alınarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} &g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \varphi\theta_4) - g(R_{cur}(\varphi\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) \\ &- g(R_{cur}(\theta_1, \varphi\theta_2)\theta_3, \theta_4) - g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\varphi\theta_3, \theta_4) \\ &- 2\lambda g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.160)$$

$$\begin{aligned} &g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \varphi\theta_4) + g(R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\theta_2, \varphi\theta_1) \\ &- g(R_{cur}(\theta_3, \theta_4)\theta_1, \varphi\theta_2) + g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_4, \varphi\theta_3) \\ &- 2\lambda g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \theta_4) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.161)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede $\theta_4 = \xi$ alınarak ifade (4.1.3) ve Riemann eğrilik tensörünün özellikleri dikkate alınarak düzenlenirse

$$g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \varphi\xi) + g(R_{cur}(\theta_3, \xi)\theta_2, \varphi\theta_1)$$

$$\begin{aligned}
& -g(R_{cur}(\theta_3, \xi)\theta_1, \varphi\theta_2) + g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\xi, \varphi\theta_3) \\
& -2\lambda g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \xi) = 0
\end{aligned} \tag{4.3.162}$$

$$\begin{aligned}
& g(R_{cur}(\theta_3, \xi)\theta_2, \varphi\theta_1) - g(R_{cur}(\theta_3, \xi)\theta_1, \varphi\theta_2) \\
& + g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\xi, \varphi\theta_3) - 2\lambda g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \xi) = 0
\end{aligned} \tag{4.3.163}$$

$$\begin{aligned}
& -g(R_{cur}(\xi, \theta_3)\theta_2, \varphi\theta_1) + g(R_{cur}(\xi, \theta_3)\theta_1, \varphi\theta_2) \\
& + g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\xi, \varphi\theta_3) - 2\lambda g(R_{cur}(\theta_1, \theta_2)\theta_3, \xi) = 0
\end{aligned} \tag{4.3.164}$$

elde edilir. Bu ifade (4.1.15), (4.1.4), (4.1.6) ve metriğin özellikleri dikkate alınarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
& -g(\theta_3, \theta_2)g(\xi, \varphi\theta_1) + \eta(\theta_2)g(\theta_3, \varphi\theta_1) + g(\theta_3, \theta_1)g(\xi, \varphi\theta_2) \\
& -\eta(\theta_1)g(\theta_3, \varphi\theta_2) + \eta(\theta_2)g(\theta_1, \varphi\theta_3) - \eta(\theta_1)g(\theta_2, \varphi\theta_3) \\
& -2\lambda[g(\theta_2, \theta_3)\eta(\theta_1) - g(\theta_1, \theta_3)\eta(\theta_2)] = 0
\end{aligned} \tag{4.3.165}$$

$$\begin{aligned}
& \eta(\theta_2)g(\theta_3, \varphi\theta_1) - \eta(\theta_1)g(\theta_3, \varphi\theta_2) + \eta(\theta_2)g(\theta_1, \varphi\theta_3) \\
& -\eta(\theta_1)g(\theta_2, \varphi\theta_3) - 2\lambda[g(\theta_2, \theta_3)\eta(\theta_1) - g(\theta_1, \theta_3)\eta(\theta_2)] = 0
\end{aligned} \tag{4.3.166}$$

$$\begin{aligned}
& g(\theta_3, \varphi\theta_1)\eta(\theta_2) - g(\theta_3, \varphi\theta_2)\eta(\theta_1) - \lambda g(\theta_2, \theta_3)\eta(\theta_1) \\
& + \lambda g(\theta_1, \theta_3)\eta(\theta_2) = 0
\end{aligned} \tag{4.3.167}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte $\theta_2 = \xi$ yazılıp (4.1.1), (4.1.3) ve (4.1.6) dikkate alınarak düzenlendiğinde,

$$g(\theta_3, \varphi\theta_1) = -\lambda g(\theta_1, \theta_3) - \lambda \eta(\theta_3)\eta(\theta_1) \tag{4.3.168}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (4.3.6) uygulanırsa,

$$Ric(\theta_1, \theta_3) = \lambda \eta(\theta_3)\eta(\theta_1) \tag{4.3.169}$$

olur. Burada $\theta_3 = \xi$ alınarak (4.1.18) uygulanırsa,

$$1 - n = \lambda \tag{4.3.170}$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda M daralandır.

KAYNAKÇA

- Açıkgöz Kaya, D. (2017).** Ricci Solitonlar. *Doktora Tezi*. Aydın: Adnan Menderes Üniversitesi.
- Blaga, A. (2016).** η -Ricci Solitons on Lorentzian Para-Sasakian Manifolds. *Filomat*, 30(2), 489-496.
- Blaga, A. M., & Crasmareanu, M. (2017).** Torse-Forming η -Ricci Solitons in Almost Paracontact η -Einstein Geometry. 31(2), 499 - 504.
- Blair, D. E. (1976).** *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*. Berlin: Springer-Verlag.
- Cho, J. T., & Kimura, M. (2009).** Ricci solitons and real hypersurfaces in a complex space form. *Tohoku Math. J.*, 205 - 212.
- De, U. C., & Shaikh, A. A. (2009).** *Complex Manifolds and Contact Manifolds*. New Delhi: Narosa Publishing House Pvt. Ltd.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1983).** *Diferansiyel Geometri*. Malatya: İnönü Üniversitesi Fen Edebiyet Fakültesi Yayınları.
- Hacısalıhoğlu, H. H., & Ekmekçi, N. (2003).** *Tensör Geometri*. Ankara: Ankara Üniversitesi.
- Hui, S. K., & Chakraborty, D. (2017).** Para-Sasakian Manifolds and Ricci Solitons. *İlirias Journal of Mathematics*, 6(1), 25 - 34.
- Matsumoto, K. (1989).** On Lorentzian Paracontact Manifolds. *Bulletin of Yamagata University Natural Science*, 12, 151 - 156.
- Matsumoto, K., & Mihai, I. (1988).** On a Certain Transformation in a Lorentzian Para-Sasakian Manifold. *Tensor N.S*, 47, 189-197.
- O'Neill, B. (1983).** *Elementary Differential Geometry*. New York: Academic Press.
- O'Neill, B. (1983).** *Semi Riemannian Geometry with applications to relativity*. New York: Academic Press.
- Prasad, R., & Srivastav, V. (2012).** On (ϵ) -Lorentzian para-Sasakian manifolds. *Commun. Korean Math. Soc.*, 27(2), 297–306.
- Şahin, B. (2022).** *Diferansiyel Geometri*. Ankara: Palme Yayınevi.
- Yano, K., & Kon, M. (1984).** *Structures on Manifolds*. Singapore: World Scientific Publishing Corp.
- Zamkovoy, S. (2009).** Canonical connections on paracontact manifolds. *Annals Global Analysis Geometry*, 37-60.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Mehmet Hanifi GELERİ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2001, İnönü, Eğitim, Matematik Öğretmenliği
- **Yüksek Lisans** : 2013, İnönü, Eğitim Bilimleri, Eğitim Yönetimi ve Denetimi

MESLEKİ DENEYİM:

- 2001 – 2007 Yağmurlu İlköğretim Okulu
- 2007 – 2009 Sümer İlköğretim Okulu
- 2009 – 2010 Mustafa İclal Başer Anadolu Lisesi
- 2010 – 2014 Fethi Gemuhluoğlu Anadolu Öğretmen Lisesi
- 2017 – 2024 Fethi Gemuhluoğlu Fen Lisesi