



GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIPSCHITZ FONKSİYONLARI İÇİN BAZI İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİNİN GENELLEŞMESİ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI
Yüksek Lisans Tezi

Levent ŞENEL
10196697
Haziran 2018

GİRESUN

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LIPSCHITZ FONKSİYONLARI İÇİN BAZI İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİNİN GENELLEŞMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Levent ŞENEL

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Doç. Dr. İmdat İşcan

Haziran 2018

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LIPSCHITZ FONKSİYONLARI İÇİN BAZI İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİN GENELLEŞMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Levent ŞENEL

Enstitü Anabilim Dalı

:

Matematik

Bu tez 20/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Doç. Dr.
İmdat İŞCAN**
.....
Jüri Başkanı

**Dr. Öğr. Üyesi
Mehmet KUNT**
.....
Üye

**Dr. Öğr. Üyesi
Sercan TURHAN**
.....
Üye

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ**
.....
Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.


Levent ŞENEL

20/06/2018

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarımın başlangıcından bu yana, tez konumda çalışmamı sağlayan, bütün enerjisi ve engin birikimiyle beni motive eden, çalışmalarımda eşsiz katkıları bulunan, bana bilimsel çalışma ve düşünme yeteneğini aşılayan değerli danışman hocam Doç. Dr. İmdat İşcan' a en samimi duygularım ile sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca öneri ve desteklerini esirgemeyen Giresun Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine en içten şükranlarımı sunuyorum.

Çalışmam boyunca sabırla, güvenle ve sevgiyle daima yanımda olan. desteklerini hiç eksik etmeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	III
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	IV
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	5
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler.....	5
2.2. GA-Konveks Fonksiyonlarla İlgili Bazı Tanım ve Teoremler.....	9
2.3. Bazı Önemli Eşitsizlikler.....	14
2.4. Lipschitz Fonksiyonu.....	15
2.5. Bazı Özel Ortalamalar.....	17
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	18
3.1. Lipschitz ve Konveks Fonksiyonlarla İlgili Bazı Teorem ve Sonuçlar.....	18
3.2. Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri Aracılığıyla Lipschitz Fonksiyonlar İçin Hadamard ve Bullen Tipli Eşitsizlikler.....	22
3.3. Hadamard Kesirli İntegralleri Aracılığıyla Lipschitz Fonksiyonlar İçin Bazı Genel İntegral Eşitsizlikleri.....	25
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	29
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	42
KAYNAKLAR.....	43
ÖZGEÇMİŞ.....	47

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n -boyutlu Reel Sayılar Uzayı
$\mathbb{R}^+$	: $(0, \infty)$
I	: $\mathbb{R}$ de herhangi bir aralık
I^0	: I nın içi
$\forall$	: Her
$L[a, b]$	: $[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	: f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f'_-	: f Fonksiyonunun Sol Türevi
f'_+	: f Fonksiyonunun Sağ Türevi
Γ	: Gamma Fonksiyonu
${}_R J_{a+}^\alpha$	: Sol Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
${}_H J_{a+}^\alpha$	: Sol Taraflı Hadamard Kesirli İntegrali
${}_R J_{b-}^\alpha$	: Sağ Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
${}_H J_{b-}^\alpha$	: Sağ Taraflı Hermite-Hadamard Kesirli İntegrali

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.1 Konveks kümeler	6
Şekil 2.1.2 Konveks olmayan kümeler	6
Şekil 2.1.3 Konveks fonksiyonun geometrik yorumu	7
Şekil 2.1.4 Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = x $)	8

LIPSCHITZ FONKSİYONLARI İÇİN BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİNİN GENELLEŞMESİ

ÖZET

Bu tez çalışması GA-konveks fonksiyonlar için elde edilmiş olan bazı kesirli integral eşitsizliklerinin Lipschitz fonksiyonları için elde edilmesi ile ilgilidir. Bu tezde, öncelikle konveks, GA-konveks ve Lipschitz fonksiyonlar, kesirli integral eşitsizlikleri ve önemli eşitsizlikler ile ilgili bazı temel tanım ve teoremler verildi. Daha sonra konveks fonksiyonlar ve GA-konveks fonksiyonlar için elde edilmiş Hadamard tipli integral eşitsizliklerinin Lipschitz fonksiyonları için literatürde bulunan bazı sonuçları verilmiştir. Tezin araştırma bulguları kısmında, GA-konveks fonksiyonlar için elde edilmiş eşitsizliklerden Lipschitz fonksiyonları için yeni eşitsizlikler elde edildi. Son olarak, bu eşitsizliklerin bazı özel ortalamalara uygulamaları verildi.

Anahtar kelimeler: Konveks Fonksiyonlar, GA-Konveks Fonksiyonlar, Lipschitz Fonksiyonları, Kesirli İntegral Eşitsizlikleri

GENERALIZATION OF SOME INTEGRAL INEQUALITIES FOR LIPSCHITZ FUNCTIONS

SUMMARY

This thesis is about getting for Lipschitz functions of some inequalities that are obtained for GA-convex functions. At first, some basic definitions and theorems related to convexity, GA-convexity and Lipschitz functions, fractional integral inequalities and important inequalities are given. Then, some results in the literature for Lipschitz functions of Hadamard type inequalities obtained for convex and GA-convex functions are given. In research findings section of thesis, we have new inequalities for Lipschitz functions by means of inequalities which are used for GA-convex functions. Finally, some special means applications of these inequalities are given.

Anahtar kelimeler: Convex Functions, GA-Convex Functions, Lipschitz Functions, Fractional Integral Inequalities

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar matematiğin tüm alanlarında önemli bir rol oynaması ve aktif bir araştırma alanı olmasından dolayı, özellikle son yıllarda araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiştir.

Eşitsizlikler alanında Hermite' in temel çalışmaları sık sık onun orijinal yazar kimliği verilmeden belirtilmiştir. Bu bağlamda temel matematikte ilgi çekmekte olan Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin geometrik yorumu ve çoğu uygulamasıyla konveks fonksiyonun ilk temel sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Analitik eşitsizlikler yaygın olarak matematik ve birçok uygulamalı matematiğin çeşitli dallarında gelişiminin arkasındaki temel itici güçlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Eşitsizlikler ile ilgili çalışmaların son on yıldan fazladır matematiğin birçok farklı alanındaki uygulamalara nasıl büyük bir katkı sağladığı açıkça ortadadır. Örneğin; Hadamard, Chebyshev, Ostrowski, Grüss, Jensen ve Trapezoidal eşitsizlikler ile ilgili birçok uygulama literatürde önemli bir yere sahiptir.

Konveks fonksiyonların tarihi M.Ö 250 yılında Archimedes' in ünlü π değerini hesaplamasına kadar dayanmakla birlikte başlangıcı 19. Yüzyılın sonları olarak görülebilir. Konveks kümeler ve konveks fonksiyonlar matematik dünyasında, matematik ve geometri konuları arasında artık önemli bir yer teşkil etmektedir. Konvekslik, geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılmakla beraber sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi (lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar. Konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen'in bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir.

Son yüzyılda gelişen disiplini ve artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak yerini almıştır. 1934 yılında Hardy, Littlewood ve

Polya tarafından çıkarılan 'Inequalities' isimli kitap bu alanda ilk çalışma olup temel başvuru kaynağı olarak önemli bir yere sahiptir [1]. Genel eşitsizlikler üzerine 1961 yılında yazılmış olan E. F. Beckenbach ve R. Bellman' ın 'Inequalities' isimli kitabı, eşitsizlikler teorisini araştırmak isteyen okuyucu için el altında bulunması gereken bir kaynaktır [2]. 1970 yılında Mitrinović tarafından yazılan 'Analytic Inequalities' adlı eserde, okuyucu konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikleri, problemleri, ispat yöntemlerini ve elde edilen sonuçları bulabilir [3].

Konvekslik kavramına Charles Hermite'in 1881 yılında Mathesis 3 (1883, s.82) dergisine gönderdiği mektupta şu şekilde rastlanır.

Sur deux d'une integrale définie. Soit $f(x)$ une fonction qui varie toujours dans le meme sens de $x = a$; $dx=b$; On aura les relation

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) < \int_a^b f(x) dx < (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) > \int_a^b f(x) dx > (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavité vers l'axe des abscisses.

İlerleyen yıllarda Fejér (1880-1959) Hermite'in sonuçlarının genelleştirilmiş halini sunmuştur.

"Neden Matematiksel Eşitsizlikler? "sorusu için 1978 yılında Richard Bellman tarafından şöyle bir cevap verilmiştir: "Eşitsizlik çalışmak için bazı nedenler vardır. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak olarak karşımıza çıkmaktadır. Klasik eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir.

Estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.

O.Hölder (1889), O.Stolz (1893) ve J.Hadamard (1893) 'ın katkılarıyla 19. yüzyılın sonunda konveks fonksiyonların temelleri atılmıştır. Eşitsizlikler Teorisi C.F. Gauss, A.L. Cauchy ve P.L. Chebyshev ile gelişmeye başlamıştır.1881 yılında Hermite tarafından elde edilen Hermite- Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliği, 19. ve 20. yüzyıllarda bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek literatüre kazandırılmıştır.

Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların önemli bir kısmını S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından yazılmış olan 'Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications' isimli kitapta; Ostrowski eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı da S.S. Dragomir ve Themistocles M. Rassias tarafından 2002 yılında yazılmış olan 'Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration' isimli kitapta bir araya getirilmiştir. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine çalışan diğer matematikçiler; R.Agarwal, G.Anastassiou, G.V.Milovanovic, A.M. Fink, Roberts and Varberg, N.S. Barnett, M.E. Özdemir, U.S. Kırmacı, H.Yıldırım, M.Z. Sarıkaya, N. Ujevic, S.Varosenec, P.S.Bullen, P.Cerone, E.Set ve İ.İşcan şeklinde sıralayabiliriz.

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak Liouville tarafından duyuruldu. Kesirli (tamsayı olmayan) diferansiyel teorisi 1695 yılında yazılan Leibniz' in notlarında yarım mertebeden türevin ifadesinin tartışılmasıyla başlıyor. Leibniz'in notu ile rastgele mertebeden türev ve integral teorisi ortaya çıktı. 19. yüzyılın sonlarında Liouville bu yapıyı tamamladı. Bundan sonra Grünwald, Letnikov ve Riemann kesirli türev teorisi üzerine çalışmalarda bulundu. Kesirli türev ve kesirli integral kavramı, türev ve integrallerin sadece tam sayılar için var mıdır sorusundan yola çıkılarak ortaya çıkmış 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer birçok matematikçinin kesirli mertebeye için diferensiyel ve integrasyonun geliştirilmesine dayanan öncü çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır. Uygulamalı alanlarda kesirli türev ve kesirli integral kavramları hakkında ilk kaynak kitap S.G.Samko ile A.A.Kilbas ve O.I. Marichev tarafından

yazılmış olup bu kavramlar üzerinde birçok çalışma yapılmıştır [4]. Bu çalışmalardan bir tanesi de 2011 yılında Xiao-Jun Yang tarafından yazılan, kesirli küme, lokal kesirli türev ve lokal kesirli integral gibi kavramların tanıtıldığı ‘Lokal Kesirli Fonksiyonel Analiz ve Uygulamaları’ adlı eserdir [5]. Yang’ ın bu eserinden faydalanarak son birkaç yılda genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar ve bazı türleri tanıtılmış ve bu fonksiyonlar yardımıyla da yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bu çalışmamız; literatürde GA-Konveks fonksiyonlar için elde edilen kesirli integral eşitsizliklerinin Lipschitz fonksiyonlar için uygulanmasıyla ilgilidir. Bu amaçla çalışmanın ikinci bölümünde konveks fonksiyonlar, konveks fonksiyonlar sınıfından olan GA-konveks fonksiyonlar ve Lipschitz fonksiyonlarla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise kesirli integraller aracılığıyla Lipschitz fonksiyonlar için Hadamard ve Bullen tipli eşitsizliklerle ilgili bazı tanım, teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde Lipschitz fonksiyonları için bazı integral eşitsizliklerinin genelleşmesi ile ilgili bir teorem, özel durumlarda sonuçları ve özel ortalamalar ile ilgili önermeler verilmiştir.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Bu bölümde bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1. (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun.

$+: L \times L \rightarrow L$ ve $\cdot : F \times L \rightarrow L$ işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L , $+$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani,

G1. $\forall x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,

G2. $\forall x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir,

G3. $\forall x \in L$ için $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır,

G4. $\forall x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.

G5. $\forall x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1. $\alpha \cdot x \in L$ dir,

L2. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ dir,

L3. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ dir,

L4. $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha(\beta x)$ dir,

L5. $1 \cdot x = x$ dir (Burada 1 , F 'nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L 'ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye kompleks lineer uzay adı verilir [6].

Tanım 2.1.2. (Lineer Dönüşüm): F bir cisim ve V ve W , F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \rightarrow W$ dönüşümü,

(a) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

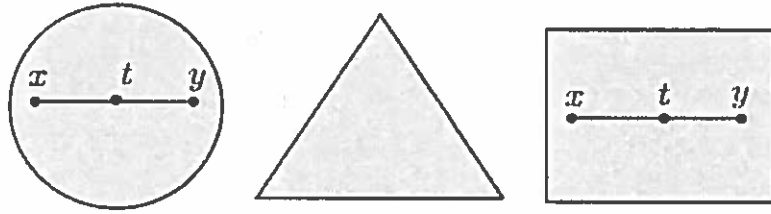
(b) $T(cu) = cT(u)$

şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir. Eğer $V = W$ ise $T : V \rightarrow W$ lineer dönüşümüne bir lineer operatör denir [6].

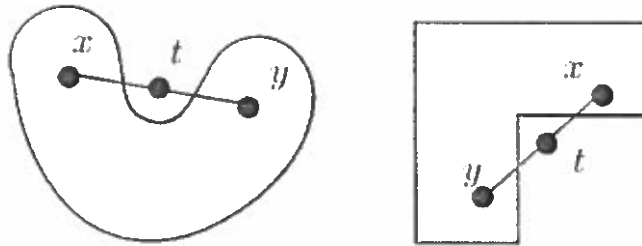
Tanım 2.1.3. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere;

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y 'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, (1 - \alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [7].



Şekil 2.1.1. Konveks kümeler

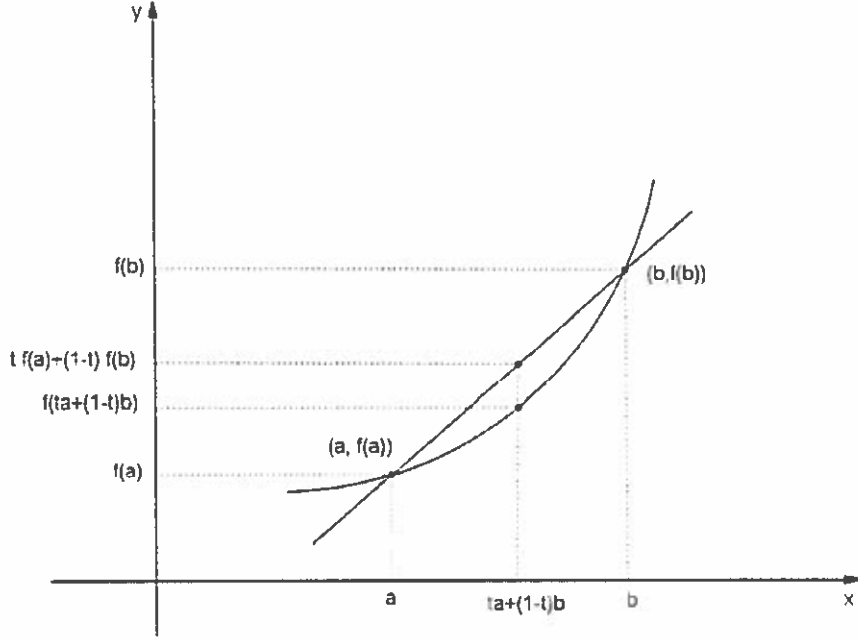


Şekil 2.1.2. Konveks olmayan kümeler

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \quad (2.1.1)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizlikte " $\geq$ " olması durumunda ise f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. Eğer (2.1.1) eşitsizliği $t \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir [8].



Şekil 2.1.3. Konveks fonksiyonun geometrik yorumu

Geometrik olarak, $ta + (1 - t)b$ noktasında; f nin eğri üzerinde aldığı değer $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren doğru parçası her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üstündedir.

Şekilden de görüldüğü gibi, eğer $f(a) \leq f(b)$ ise her $t \in [0,1]$ için $f(a) \leq tf(a) + (1 - t)f(b) \leq f(b)$ dır. Konkav fonksiyon için doğru parçası f nin grafiğinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının altındadır.

Konveks fonksiyonun bazı özellikleri:

- i. Kapalı bir aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.
- ii. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I^0 de kalan herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I^0 süreklidir.
- iii. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I^0 de f'_- ve f'_+ türevleri mevcut olup bu türevler artandır.

iv. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I açık aralığında konveks ise bu aralıkta sayılabilir bir E kümesi hariç f' mevcut ve süreklidir.

v. $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, 3, \dots, k, k$ tane konveks fonksiyonlar olsun. Bu taktirde;

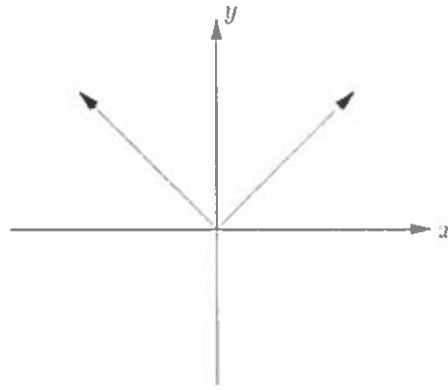
$$f(x) = \sum_{j=1}^k a_j f_j(x), \quad a_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, k)$$

fonksiyonu da konvekstir.

vi. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan konveks fonksiyon ve $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun.

Bu taktirde; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (g \circ h)(x)$ bileşke fonksiyonu da konvekstir [9].

Örnek 2.1.1. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.



Şekil 2.1.4. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

Sonuç 2.1.1. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ için $p + q > 0$ olan her $\forall p, q \geq 0$ için

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

olmasıdır [10].

Teorem 2.1.1. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

- $f, (a, b)$ aralığında süreklidir.
- $f, [a, b]$ aralığında sınırlıdır [11].

Teorem 2.1.2. f fonksiyonunun I aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır [3].

Tanım 2.1.5. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise $a < b$ koşulunu sağlayan $\forall a, b \in I$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Hermite-Hadamard eşitsizliği denir [10].

2.2. GA-Konveks Fonksiyonlarla İlgili Bazı Tanım ve Teoremler

Tanım 2.2.1. (Geometrik-Aritmetik (GA) Konveks Fonksiyon): $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu $\forall x, y \in I$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için

$$f(x^\lambda y^{1-\lambda}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna GA-konveks fonksiyon denir. Burada $x^\lambda y^{1-\lambda}$ ifadesi x ve y pozitif sayılarının ağırlıklı geometrik ortalaması ve $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ ifadesi ise $f(x)$ ve $f(y)$ nin ağırlıklı aritmetik ortalamasıdır [12].

Tanım 2.2.2. (Gamma Fonksiyonu): $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanan fonksiyon gamma fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun bazı önemli özelliklerini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz [13].

- i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$,
- ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,
- iii. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$, $0 < p < 1$,
- iv. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$.

Tanım 2.2.3. $f \in L[a, b]$, $\alpha > 0$ ve $b > a \geq 0$ için ${}_R J_{a+}^{\alpha} f(x)$ ve ${}_R J_{b-}^{\alpha} f(x)$ sırasıyla sol taraf ve sağ taraf Riemann-Liouville kesirli integralleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [14].

$${}_R J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, x > a$$

ve

$${}_R J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, x < b$$

M. Z. Sarıkaya ve arkadaşları, Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri aşağıdaki gibi ifade etmişlerdir.

Teorem 2.2.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir pozitif fonksiyon $f \in L[a, b]$ ve $a < b$ olsun. Eğer f , $[a, b]$ de konveks fonksiyon ve $\alpha > 0$ ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} [{}_R J_{a+}^{\alpha} f(b) + {}_R J_{b-}^{\alpha} f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

GA-konveks fonksiyonları için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı genelleştirilmesi aşağıdaki gibidir [14].

Teorem 2.2.2. $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ bir GA-konveks fonksiyon ve $a, b \in I$ elemanları $a < b$ olacak şekilde olsun. $g: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ sürekli ve $\sqrt{ab}$ ye göre geometrik olarak simetrik bir fonksiyon ise;

$$f(\sqrt{ab}) \int_a^b \frac{g(x)}{x} dx \leq \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{g(x)}{x} dx$$

dir [15].

Tanım 2.2.4. $f \in L[a, b]$, $\alpha > 0$ ve $b > a \geq 0$ için ${}_H J_{a+}^{\alpha} f(x)$ ve ${}_H J_{b-}^{\alpha} f(x)$ sırasıyla sol taraf ve sağ taraf Hadamard kesirli integralleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$${}_H J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t}, \quad x > a$$

ve

$${}_HJ_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\ln \frac{t}{x} \right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t}, \quad x < b$$

dir. Burada $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

şeklindedir [16].

GA-konveks fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizlikleri aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 2.2.3. Kabul edelim ki $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olduğunda $f \in L[a, b]$ olsun. Eğer $f, L[a, b]$ de GA-konveks fonksiyon ve $\alpha > 0$ ise

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{\alpha}} [{}_HJ_{a+}^{\alpha} f(b) + {}_HJ_{b-}^{\alpha} f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.2.1)$$

eşitsizliği elde edilir [17].

İspat : f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA-konveks fonksiyon olsun. O halde $\forall x, y \in [a, b]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

eşitsizliğinde $t = \frac{1}{2}$ yazarsak

$$f(\sqrt{xy}) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

elde edilir. Daha sonra $x = a^t b^{1-t}$, $y = b^t a^{1-t}$ seçersek

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{f(a^t b^{1-t}) + f(b^t a^{1-t})}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (2.2.1) eşitsizliğinin her iki tarafı $t^{\alpha-1}$ ile çarpılıp, eşitsizliğin t ye göre $[0,1]$ üzerinde integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} f(\sqrt{ab}) &\leq \frac{\alpha}{2} \left\{ \int_0^1 f(a^t b^{1-t}) dt + \int_0^1 f(b^t a^{1-t}) dt \right\} \\ &= \frac{\alpha}{2} \left\{ \int_a^b \left(\frac{\ln b - \ln u}{\ln b - \ln a} \right)^{\alpha-1} f(u) \frac{du}{u \ln \frac{b}{a}} + \int_a^b \left(\frac{\ln u - \ln a}{\ln b - \ln a} \right)^{\alpha-1} f(u) \frac{du}{u \ln \frac{b}{a}} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (2.2.1) eşitsizliğinin sol tarafı kolayca elde edilir.

(2.2.1) eşitsizliğinin ikinci kısmının ispatı için, ilk olarak f fonksiyonu GA-konveks fonksiyon olduğundan, $\forall t \in [0,1]$ için

$$f(a^t b^{1-t}) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

ve

$$f(b^t a^{1-t}) \leq tf(b) + (1-t)f(a)$$

dır. Eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$f(a^t b^{1-t}) + f(b^t a^{1-t}) \leq f(a) + f(b)$$

elde edilir. Son eşitsizlikte taraflar $t^{\alpha-1}$ ile çarpılarak t ye göre $[0,1]$ üzerinde eşitsizliğin integrali alınır,

$$\int_0^1 f(a^t b^{1-t}) t^{\alpha-1} dt + \int_0^1 f(b^t a^{1-t}) t^{\alpha-1} dt \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 t^{\alpha-1} dt$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yazarlar, GA-konveks fonksiyonlar için kesirli integral şeklindeki Hermite-Hadamard eşitsizliğini ve Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.4. $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ bir GA-konveks fonksiyon $f \in L[a, b]$ ve $a < b$ olsun. O halde $\alpha > 0$ iken kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [18]:

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^\alpha} \left[{}_HJ_{\sqrt{ab}-}^\alpha f(a) + {}_HJ_{\sqrt{ab}+}^\alpha f(b) \right] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Teorem 2.2.5. $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ bir GA-konveks fonksiyon $f \in L[a, b]$ ve $a < b$ olsun. Eğer $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, negatif olmayan, integrallenebilir ve $\sqrt{ab}$ ye göre geometrik-simetrik ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [18]:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{ab}) \times \left[{}_HJ_{\sqrt{ab}-}^\alpha g(a) + {}_HJ_{\sqrt{ab}+}^\alpha g(b) \right] &\leq {}_HJ_{\sqrt{ab}-}^\alpha (fg)(a) + {}_HJ_{\sqrt{ab}+}^\alpha (fg)(b) \\ &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \left[{}_HJ_{\sqrt{ab}-}^\alpha g(a) + {}_HJ_{\sqrt{ab}+}^\alpha g(b) \right] \end{aligned}$$

[19] da yazarların GA-s-konveks fonksiyonlar için vermiş olduğu teoremi, $s = 1$ olması durumunda GA-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki gibi verebiliriz.

Teorem 2.2.6. $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i. $f(x)$ fonksiyonu I 'da GA-konvektir ancak ve ancak $f(e^x)$ fonksiyonu $\ln 0 = -\infty$ kabul edildiğinde $\ln I = \{\ln x \mid x \in I\}$ aralığında konvektir.
- ii. Eğer f fonksiyonu I 'da azalan ve GA-konveks ise f fonksiyonu I da konvektir.
- iii. Eğer f fonksiyonu I 'da artan ve konveks ise f fonksiyonu I da GA-konvektir.

İspat: i. $f(x)$ fonksiyonu I aralığında GA-konveks ise

$$\begin{aligned} f(e^{t\ln x + (1-t)\ln y}) &= f(x^t y^{1-t}) \\ &\leq tf(x) + (1-t)f(y) = tf(e^{\ln x}) + (1-t)f(e^{\ln y}) \end{aligned}$$

dir. Bu yüzden $f(e^x)$ fonksiyonu I aralığında konvektir. Diğer taraftan, tersine olarak $f(e^x)$ fonksiyonu I aralığında konveks olduğunda

$$\begin{aligned} f(x^t y^{1-t}) &= f(e^{t\ln x + (1-t)\ln y}) \leq tf(e^{\ln x}) + (1-t)f(e^{\ln y}) \\ &= tf(x) + (1-t)f(y) \end{aligned}$$

olur ki bu $f(x)$ fonksiyonun I 'da GA-konveks olduğunu gösterir.

ii. Eğer f fonksiyonu I 'da azalan ve GA-konveks ise

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x^t y^{1-t}) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

dir. Bunun anlamı f fonksiyonu I 'da konvektir.

iii. Eğer f fonksiyonu I da artan ve konveks ise

$$f(x^t y^{1-t}) \leq f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

dir. Buna göre f fonksiyonu I 'da GA-konvektir.

Lemma 2.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}^+$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu I da iki kez türevlenebilir ise; f, I da GA-konveks (konkav) fonksiyondur ancak ve ancak $\forall x \in I$ için

$$f'(x) + xf''(x) \geq (\leq) 0$$

eşitsizliği sağlanır [20].

İspat: Lemma, konveks (konkav) fonksiyonların temel özelliklerinden ve “ f fonksiyonu GA-konveks (konkav) fonksiyondur ancak ve ancak $g(x) = f(e^x)$, $J = \{\log x: x \in I\}$ üzerinde konveks (konkav) dir” önermesinden kolaylıkla çıkar.

2.3. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem 2.3.1. (Üçgen Eşitsizliği) : Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir [21].

Teorem 2.3.2. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) $f, [a, b]$ aralığında tanımlı sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

eşitsizliği geçerlidir [21].

Teorem 2.3.3. (Ostrowski Eşitsizliği): $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 da diferansiyellenebilir ve $a, b \in I^0$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise o halde aşağıdaki eşitsizlik her $x \in [a, b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right]$$

sağlanır [22].

Teorem 2.3.4. (Simpson Eşitsizliği): $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (a, b) üzerinde dört defa sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon ve $\|f^{(4)}\|_{\infty} = \sup_{x \in (a,b)} |f^{(4)}(x)| < \infty$ olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlik

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a)^4$$

elde edilir [23].

Teorem 2.3.5. (Bullen Eşitsizliği): Farz edelim ki $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] \\
&\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri vardır. Üçüncü eşitsizlik literatürde Bullen eşitsizliği olarak bilinmektedir [24].

2.4. Lipschitz Fonksiyonu

Tanım 2.4.1. (Süreklilik): $f: S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $|x - x_0| < \delta$ olan $\forall x \in S$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , x_0 'da süreklidir denir [7].

Tanım 2.4.2. $[a, b]$ kapalı aralığında verilen her x, y noktaları için $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ şartını sağlayan bir $M \geq 0$ sabiti varsa f , $[a, b]$ aralığında Lipschitz şartını sağlıyor denir [7].

Tanım 2.4.3. (Düzgün Süreklilik): $f: S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. Eğer $|x_1 - x_2| < \delta$ şartını sağlayan $\forall x_1, x_2 \in S$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, S' 'de düzgün süreklidir denir [7].

Sonuç 2.4.1. f, S' 'de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S' 'de düzgün süreklidir. [7].

Tanım 2.4.4. (Mutlak Süreklilik): $I, \mathbb{R}$ nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I 'nin $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir [25].

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teoremle verilmektedir.

Teorem 2.4.1. L lineer uzay, $U \subseteq L$ bir açık küme ve $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsun.

a. f, U açık kümesinde konveks olsun. Eğer f, U da bir noktanın komşuluğunda üstten sınırlı bir fonksiyon ise f, U da yerel Lipschitz dir ve bu nedenle U nun kompakt alt kümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U da süreklidir.

b. $f, U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde konveks ise f, U nun her kompakt alt kümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U da süreklidir [10].

Teorem 2.4.2. Eğer $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise I^0 deki kapalı herhangi $[a, b]$ aralığında Lipschitz şartını sağlar [26].

İspat: $a - \varepsilon$ ve $a + \varepsilon$, I kümesinin içinde olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı seçelim. m ve M sırasıyla f nin $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ aralığında alt ve üst sınırları olsun. Bu durumda eğer x ve y , $[a, b]$ aralığının ayrık iki noktası olup

$$z = y + \frac{\varepsilon}{|y - x|} (y - x) , \quad \lambda = \frac{|y - x|}{\varepsilon + |y - x|}$$

olarak seçilirse

$$z \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon], \quad y = \lambda z + (1 - \lambda) x$$

yazabiliriz. Buradan

$$f(y) \leq \lambda f(z) + (1 - \lambda) f(x) = \lambda [f(z) - f(x)] + f(x)$$

olur. $K = \frac{M-m}{\varepsilon}$ olarak alınırsa

$$f(y) - f(x) \leq \lambda (M - m) < \frac{|y - x|}{\varepsilon} (M - m) = K |y - x|$$

elde edilir. O halde herhangi bir $x, y \in [a, b]$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq K |y - x|$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ispatı tamamlar.

2.5. Bazı özel Ortalamalar

Bu başlık altında a, b gibi iki pozitif reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir [27,28].

1. Aritmetik ortalama:

$$A = A(a, b) := \frac{a + b}{2}$$

2. Geometrik ortalama:

$$G = G(a, b) := \sqrt{ab}$$

3. Harmonik ortalama:

$$H = H(a, b) := \frac{2ab}{a + b}$$

4. Logaritmik ortalama:

$$L = L(a, b) := \begin{cases} a & , a = b \\ \frac{b - a}{\ln b - \ln a} & , a \neq b \end{cases}$$

6. p -logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a, b) := \begin{cases} a & , a = b \\ \left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \right]^{\frac{1}{p}} & , a \neq b \end{cases}$$

ortalamaları vardır.

Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p 'nin monoton artan olduğu bilinir. $L_0 = I$, $L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki literatürde

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A$$

şeklinde yer almaktadır.

Son olarak x, y pozitif sayılarının r -inci kuvvetlerinin genelleştirilmiş ortalaması

$$L_r(x, y) = \begin{cases} \frac{r}{r+1} \frac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r} & , r \neq 0, x \neq y \\ \frac{x - y}{\ln x - \ln y} & , r = 0, x \neq y \\ xy \frac{\ln x - \ln y}{x - y} & , r = -1, x \neq y \\ x & , x = y \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Lipschitz ve Konveks Fonksiyonlarla İlgili Bazı Teorem ve Sonuçlar

Bu bölümde Dragomir, Cho ve Kim [29] tarafından verilen bazı teoremler ve sonuçlar derlenmiştir.

Teorem 3.1.1. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı I üzerinde bir M -Lipschitz fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M}{4} (b-a) \quad (3.1.1)$$

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M}{3} (b-a) \quad (3.1.2)$$

İspat: $t \in [0,1]$ alalım. O halde her $a, b \in I$ için,

$$\begin{aligned} & |tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b)| \\ &= |t(f(a) - f(ta + (1-t)b)) + (1-t)(f(b) - f(ta + (1-t)b))| \\ &\leq t|f(a) - f(ta + (1-t)b)| + (1-t)|f(b) - f(ta + (1-t)b)| \\ &\leq tM|a - (ta + (1-t)b)| + (1-t)M|b - (ta + (1-t)b)| \\ &= 2t(1-t)M|b-a| \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

olur. Eğer $t = \frac{1}{2}$ seçersek;

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{M}{2} |b-a| \quad (3.1.4)$$

yazabiliriz. Burada sırasıyla a yerine $ta + (1-t)b$ ve b yerine de $(1-t)a + tb$ koyarsak; her $t \in [0,1]$ için,

$$\left| \frac{f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{M|2t-1|}{2} |b-a| \quad (3.1.5)$$

elde ederiz. (3.1.5) eşitsizliğin her iki tarafının t değişkenine göre $[0,1]$ aralığında integralini alınırsa;

$$\left| \frac{1}{2} \left[\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt + \int_0^1 f((1-t)a + tb) dt \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{M|b-a|}{2} \int_0^1 |2t-1| dt$$

elde edilir. Böylece,

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt = \int_0^1 f((1-t)a + tb) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

ve

$$\int_0^1 |2t-1| dt = \frac{1}{2}$$

değerleri bulunur. Bu değerler yukarıdaki eşitsizlikte yerlerine konulursa;

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M(b-a)}{4}$$

bulunur. Böylece (3.1.1) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Şimdi, $a, b \in I$, $a < b$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere, (3.1.3) eşitsizliğinden

$$|tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b)| \leq 2t(1-t)M(b-a)$$

olup, bu eşitsizlikte t değişkenine göre $[0,1]$ aralığında integral alınırsa;

$$\left| f(a) \int_0^1 t dt + f(b) \int_0^1 (1-t) dt - \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt \right| \leq 2M(b-a) \int_0^1 t(1-t) dt$$

yazılabilir. Buradan;

$$\int_0^1 t dt = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 t(1-t) dt = \frac{1}{6}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M(b-a)}{3}$$

elde edilir. Böylece (3.1.2) eşitsizliği ispatlanmış olur ve teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.1.1. $I \subset (0, \infty)$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir konveks bir fonksiyon $a, b \in I$, $a < b$ ve $M = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| < \infty$ olsun. Bu takdirde Hermite-Hadamard eşitsizliğini kullanarak

$$0 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{M}{4}(b-a) \quad (3.1.6)$$

ve

$$0 \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{M}{3}(b-a). \quad (3.1.7)$$

eşitsizlikleri elde ederiz.

İspat: Lagrange' in teoremine göre, $\forall x, y \in (a, b)$ için

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| |f'(c)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde x ile y arasında bir c sabitinin olduğu biliniyor. Teorem 3.1.1 ve Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin sonucu olarak istenilen eşitsizlikler kolayca elde edilir.

Teorem 3.1.2. $I \subset (0, \infty)$ bir aralık, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir M -lipschitz fonksiyon, $a < b$ olan $a, b \in I$ için $[0, 1]$ aralığında;

$$H(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dx$$

şeklinde tanımlanan H , bir $\frac{M(b-a)}{4}$ -Lipschitzian fonksiyonudur.

İspat: $t_1, t_2 \in [0, 1]$ olmak üzere

$$|H(t_2) - H(t_1)|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f\left(t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2}\right) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_a^b f\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| f\left(t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2}\right) - f\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right) \right| dx \\
&\leq \frac{M}{b-a} \int_a^b \left| t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2} - t_1x - (1-t_1)\frac{a+b}{2} \right| dx \\
&= \frac{M|t_2 - t_1|}{b-a} \int_a^b \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx = \frac{M(b-a)}{4} |t_2 - t_1|;
\end{aligned}$$

elde ederiz. $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ için;

$$|H(t_2) - H(t_1)| \leq \frac{M(b-a)}{4} |t_2 - t_1|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu da bize $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde H nin bir $\frac{M(b-a)}{4}$ -

Lipschitz fonksiyonunu olduğunu gösterir.

Yukarıdaki eşitsizlikte, $t_1 = 0$ ve $t_2 = t$ alınırsa;

$$\left| H(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{Mt(b-a)}{4}$$

ve $t_1 = 1$ ve $t_2 = t$ alınırsa

$$\left| H(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M(1-t)(b-a)}{4}$$

bulunur.

Teorem 3.1.3. $I \subset (0, \infty)$ bir aralık . $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir M-lipschitz fonksiyon, $a < b$ olan her $a, b \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için;

$$\left| \frac{f\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) + f\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)}{2} - H(t) \right| \leq \frac{Mt}{3} (b-a) \quad (3.1.8)$$

dir.

İspat: $u = tb + (1 - t)\frac{a+b}{2}$, $v = ta + (1 - t)\frac{a+b}{2}$ alalım. Bu durumda

$$H(t) = \frac{1}{u - v} \int_u^v f(z) dz$$

olur. (3.1.2) eşitsizliğinde u ve v değerleri yerlerine yazılırsa;

$$\left| \frac{f(u) + f(v)}{2} - \frac{1}{u - v} \int_u^v f(z) dz \right| \leq \frac{M(u - v)}{3}$$

eşitsizliğinden (3.1.8) eşitsizliğini elde ederiz.

Yukarıdaki iki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.4. $I \subset \mathbb{R}^+$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir konveks bir fonksiyon $\forall t \in [0,1]$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $M =: \sup_{t \in [a,b]} |f'(t)| < \infty$ olsun. Bu takdirde

$$\leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx - H(t) \leq \frac{M(1 - t)}{4} (b - a) \quad (3.1.9)$$

$$0 \leq H(t) - f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \frac{Mt}{4} (b - a) \quad (3.1.10)$$

$$0 \leq \frac{f\left(tb + (1 - t)\frac{a + b}{2}\right) + f\left(ta + (1 - t)\frac{a + b}{2}\right)}{2} - H(t) \leq \frac{Mt}{3} (b - a) \quad (3.1.11)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

3.2. Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri Aracılığıyla Lipschitz Fonksiyonlar İçin Hadamard ve Bullen Tipli Bazı Eşitsizlikler

Bu bölümde İşcan [30] tarafından verilen bazı teoremler ve sonuçlar derlenmiştir.

Sonraki teorem için; $I, \mathbb{R}$ de bir aralık, I 'da $a \leq x \leq y \leq b$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ M -Lipschitz fonksiyon olsun. $\lambda \in [0,1]$, $V = (1 - \lambda)a + \lambda b$ ve $V_{\alpha, \lambda}$, $\alpha > 0$ alalım. Devamında,

(I) Eğer $a \leq V \leq x \leq y \leq b$, o zaman

$$V_{\alpha,\lambda}(x,y) = (V-a)^\alpha \left[\frac{x-a}{\alpha} - \frac{V-a}{\alpha+1} \right] + (b-V)^\alpha \left[\frac{b-V}{\alpha+1} - \frac{b-y}{\alpha} \right]$$

(2) Eğer $a \leq x \leq V \leq y \leq b$, o zaman

$$V_{\alpha,\lambda}(x,y) = \frac{2(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + (V-a)^\alpha \left[\frac{V-a}{\alpha+1} - \frac{x-a}{\alpha} \right] + \frac{2(b-y)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + (b-V)^\alpha \left[\frac{b-V}{\alpha+1} - \frac{b-y}{\alpha} \right].$$

(3) Eğer $a \leq x \leq y \leq V \leq b$, o zaman

$$V_{\alpha,\lambda}(x,y) = \frac{2(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + (V-a)^\alpha \left[\frac{V-a}{\alpha+1} - \frac{x-a}{\alpha} \right] + (b-V)^\alpha \left[\frac{b-y}{\alpha} - \frac{b-V}{\alpha+1} \right]$$

olur.

Teorem 3.2.1. $x, y, \alpha, \lambda, V, V_{\alpha,\lambda}$ ve f fonksiyonu yukarıdaki gibi tanımlansın. O zaman kesirli integraller için

$$\left| \lambda^\alpha f(x) + (1-\lambda)^\alpha f(y) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[{}_R I_{V-}^\alpha f(a) + {}_R I_{V+}^\alpha f(b) \right] \right| \leq \frac{\alpha M V_{\alpha,\lambda}(x,y)}{(b-a)^\alpha}$$

eşitsizliği yazılabilir.

$I, \mathbb{R}$ de bir aralık. I 'da $a \leq x \leq y \leq z \leq b$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ M -Lipschitzian fonksiyonu olsun. Sonraki teorem için, $\lambda + \eta + \mu = 1$, $\lambda, \eta, \mu \in [0,1], V_1 = (1-\lambda)a + \lambda b, V_2 = \mu a + (\lambda + \eta)b$ alalım. $V_{\alpha,\lambda,\eta,\mu}, \alpha > 0$ aşağıdaki gibi tanımlayalım.

(1) Eğer $V_1 \leq V_2 \leq x \leq y \leq z$ veya $V_1 \leq x \leq V_2 \leq y \leq z$ ise

$$V_{\alpha,\lambda,\eta,\mu}(x,y,z) = (V_1-a)^\alpha \left[\frac{x-a}{\alpha} - \frac{V_1-a}{\alpha+1} \right] + (V_2-V_1)^\alpha \left[\frac{y-V_2}{\alpha} - \frac{V_2-V_1}{\alpha+1} \right] + \frac{2(b-z)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + (b-V_2)^\alpha \left[\frac{b-V_2}{\alpha+1} - \frac{b-z}{\alpha} \right]$$

elde edilir.

(2) Eğer $V_1 \leq x \leq y \leq V_2 \leq z$ ise

$$V_{\alpha,\lambda,\eta,\mu}(x,y,z) = (V_1 - a)^\alpha \left[\frac{x-a}{\alpha} - \frac{V_1-a}{\alpha+1} \right] + \frac{2(V_2-y)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} \\ + (V_2 - V_1)^\alpha \left[\frac{V_2-V_1}{\alpha+1} - \frac{V_2-y}{\alpha} \right] + \frac{2(b-z)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + (b-V_2)^\alpha \left[\frac{b-V_2}{\alpha+1} - \frac{b-z}{\alpha} \right]$$

olur.

(3) Eğer $V_1 \leq x \leq y \leq z \leq V_2$ ise

$$V_{\alpha,\lambda,\eta,\mu}(x,y,z) = (V_1 - a)^\alpha \left[\frac{x-a}{\alpha} - \frac{V_1-a}{\alpha+1} \right] + \frac{2(V_2-y)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} \\ + (V_2 - V_1)^\alpha \left[\frac{V_2-V_1}{\alpha+1} - \frac{V_2-y}{\alpha} \right] + (b-V_2)^\alpha \left[\frac{b-z}{\alpha} - \frac{b-V_2}{\alpha+1} \right]$$

elde edilir.

(4) Eğer $x \leq V_1 \leq V_2 \leq y \leq z$ ise

$$V_{\alpha,\lambda,\eta,\mu}(x,y,z) = \frac{2(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + (V_1 - a)^\alpha \left[\frac{V_1-a}{\alpha+1} - \frac{x-a}{\alpha} \right] \\ + (V_2 - V_1)^\alpha \left[\frac{y-V_2}{\alpha} + \frac{V_2-V_1}{\alpha+1} \right] + \frac{2(b-z)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + (b-V_2)^\alpha \left[\frac{b-V_2}{\alpha+1} - \frac{b-z}{\alpha} \right]$$

olur.

(5) Eğer $x \leq V_1 \leq y \leq V_2 \leq z$ ise

$$V_{\alpha,\lambda,\eta,\mu}(x,y,z) = \frac{2(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + (V_1 - a)^\alpha \left[\frac{V_1-a}{\alpha+1} - \frac{x-a}{\alpha} \right] + \frac{2(V_2-y)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} \\ + (V_2 - V_1)^\alpha \left[\frac{V_2-V_1}{\alpha+1} + \frac{V_2-y}{\alpha} \right] + \frac{2(b-z)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + (b-V_2)^\alpha \left[\frac{b-V_2}{\alpha+1} - \frac{b-z}{\alpha} \right]$$

elde edilir.

(6) Eğer $x \leq V_1 \leq y \leq z \leq V_2$ ise

$$V_{\alpha,\lambda,\eta,\mu}(x,y,z) = \frac{2(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + (V_1 - a)^\alpha \left[\frac{V_1-a}{\alpha+1} - \frac{x-a}{\alpha} \right] + \frac{2(V_2-y)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} \\ + (V_2 - V_1)^\alpha \left[\frac{V_2-V_1}{\alpha+1} - \frac{V_2-y}{\alpha} \right] + (b-V_2)^\alpha \left[\frac{b-z}{\alpha} - \frac{b-V_2}{\alpha+1} \right]$$

olur.

(7) Eğer $x \leq y \leq V_1 \leq V_2 \leq z$ ise

$$V_{\alpha,\lambda,\eta,\mu}(x,y,z) \left[\frac{V_1-a}{\alpha+1} - \frac{x-a}{\alpha} \right] + (V_2 - V_1)^\alpha \left[\frac{V_2-V_1}{\alpha+1} - \frac{V_2-y}{\alpha} \right] \\ + \frac{2(b-z)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + (b-V_2)^\alpha \left[\frac{b-V_2}{\alpha+1} - \frac{b-z}{\alpha} \right]$$

elde edilir.

(8) Eğer $x \leq y \leq V_1 \leq z \leq V_2$ veya $x \leq y \leq V_1 \leq z \leq V_2$ ise

$$V_{\alpha,\lambda,\eta,\mu}(x,y,z) = \frac{2(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + (V_1-a)^\alpha \left[\frac{V_1-a}{\alpha+1} - \frac{x-a}{\alpha} \right] \\ + (V_2-V_1)^\alpha \left[\frac{V_2-y}{\alpha} - \frac{V_2-V_1}{\alpha+1} \right] + (b-V_2)^\alpha \left[\frac{b-z}{\alpha} - \frac{b-V_2}{\alpha+1} \right]$$

olur.

Teorem 3.2.2. $x, y, z, \lambda, \eta, \mu, V_1, V_2, V_{\alpha,\lambda,\eta,\mu}$ ve f fonksiyonu yukarıdaki gibi tanımlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\left| \lambda^\alpha f(x) + \eta^\alpha f(y) + \mu^\alpha f(z) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[{}_{R}J_{V_1}^\alpha f(a) + {}_{R}J_{V_1}^\alpha f(V_2) + {}_{R}J_{V_2}^\alpha f(b) \right] \right| \\ \leq \frac{\alpha M V_{\alpha,\lambda,\eta,\mu}(x,y,z)}{(b-a)^\alpha}$$

3.3. Hadamard Kesirli İntegralleri Aracılığıyla Lipschitz Fonksiyonlar İçin Bazı Genel İntegral Eşitsizlikleri

İşcan [17]'de GA-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliklerini Hadamard kesirli integral formunda aşağıdaki gibi vermiştir.

Teorem 3.3.1. $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L[a,b]$ olan bir fonksiyon. $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer f , $[a,b]$ üzerinde GA-konveks fonksiyon ise $\alpha > 0$ için

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^\alpha} \{ {}_{H}J_{a^+}^\alpha f(b) + {}_{H}J_{b^-}^\alpha f(a) \} \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Eşitsizlikleri elde edilir.

Bu eşitsizlikte $\alpha = 1$ alınırsa,

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu bölümde İşcan [31] tarafından verilen bazı teoremler ve sonuçlar derlenmiştir.

$f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I üzerinde M -Lipschitzian fonksiyonu, bu kısımda

$$I_f(x, \lambda, \alpha, a, b) = (1 - \lambda) \left[\left(\ln \frac{x}{a} \right)^\alpha + \left(\ln \frac{b}{x} \right)^\alpha \right] f(x) + \lambda \left[f(a) \left(\ln \frac{x}{a} \right)^\alpha + f(b) \left(\ln \frac{b}{x} \right)^\alpha \right] - \Gamma(\alpha + 1) [{}_HJ_{x-}^\alpha f(a) + {}_HJ_{a+}^\alpha f(b)],$$

$$S_f(x, y, \lambda, \alpha, a, b) = \lambda^\alpha f(x) + (1 - \lambda)^\alpha f(y) - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\left(\ln \frac{b}{a} \right)^\alpha} [{}_HJ_{C-}^\alpha f(a) + {}_HJ_{C+}^\alpha f(b)]$$

şeklinde alacağız. Burada $a, b \in I, a < b, x, y \in [a, b], \lambda \in [0, 1], C = a^{1-\lambda} b^\lambda, \alpha > 0$ ve Γ , Euler Gamma fonksiyonudur.

Teorem 3.3.2. $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I üzerinde M -Lipschitzian fonksiyonu ve $a, b \in I, a < b$ olsun. Hadamard kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik her $x \in [a, b], \lambda \in [0, 1]$ ve $\alpha > 0$ için vardır.

$$\begin{aligned} & |I_f(x, \lambda, \alpha, a, b)| \\ & \leq M \left[[(1 - \lambda)x - \lambda a] \left(\ln \frac{x}{a} \right)^\alpha + \alpha(2\lambda - 1) \times \int_a^x \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} dt + \right. \\ & \left. [\lambda b - (1 - \lambda)x] \times \left(\ln \frac{b}{x} \right)^\alpha + \alpha(1 - 2\lambda) \int_x^b \left(\ln \frac{b}{t} \right)^{\alpha-1} dt \right] \end{aligned}$$

Sonuç 3.3.1. Teorem 3.2.1'de $\lambda = 0$ alırsak,

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\ln \frac{x}{a} \right)^\alpha + \left(\ln \frac{b}{x} \right)^\alpha}{\left(\ln \frac{b}{a} \right)^\alpha} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\left(\ln \frac{b}{a} \right)^\alpha} \times [{}_HJ_{x-}^\alpha f(a) + {}_HJ_{a+}^\alpha f(b)] \leq \frac{M}{\left(\ln \frac{b}{a} \right)^\alpha} \\ & \times \left\{ x \left[\left(\ln \frac{x}{a} \right)^\alpha - \left(\ln \frac{b}{x} \right)^\alpha \right] + \alpha \left[\int_x^b \left(\ln \frac{b}{t} \right)^{\alpha-1} dt - \int_a^x \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} dt \right] \right\} \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte,

(i) Eğer $\alpha = 1$ alırsak,

$$\left| f(x) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \right| \leq \frac{M}{\ln b - \ln a} \left\{ \ln \frac{x^2}{ab} + (a + b - 2x) \right\}$$

(ii) Eğer $x = \sqrt{ab}$ alırsak,

$$\begin{aligned}
& \left| f(\sqrt{ab}) - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^\alpha} [{}_HJ_{\sqrt{ab}-}^\alpha f(a) + {}_HJ_{\sqrt{ab}+}^\alpha f(b)] \right| \\
& \leq \frac{2^{\alpha-1}M\alpha}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^\alpha} \times \left\{ \int_{\sqrt{ab}}^b \left(\ln \frac{b}{t}\right)^{\alpha-1} dt - \int_a^{\sqrt{ab}} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} dt \right\}
\end{aligned}$$

(iii) Eğer $x = \sqrt{ab}$ ve $\alpha = 1$ alırsak,

$$\left| f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \right| \leq \frac{M}{\ln b - \ln a} (a + b - 2\sqrt{ab})$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.2. Teorem 3.2.1'de $\lambda = 1$ alırsak,

$$\begin{aligned}
& \left| \left[\frac{f(a) \left(\ln \frac{x}{a}\right)^\alpha + f(b) \left(\ln \frac{b}{x}\right)^\alpha}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^\alpha} \right] - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^\alpha} [{}_HJ_{x-}^\alpha f(a) + {}_HJ_{x+}^\alpha f(b)] \right| \\
& \leq \frac{M}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^\alpha} \times \left\{ b \left(\ln \frac{x}{a}\right)^\alpha - a \left(\ln \frac{b}{x}\right)^\alpha - \alpha \left[\int_x^b \left(\ln \frac{b}{t}\right)^{\alpha-1} dt - \int_a^x \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} dt \right] \right\}
\end{aligned}$$

buluruz.

Bu eşitsizlikte eğer $x = \sqrt{ab}$ alırsak,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^\alpha} [{}_HJ_{\sqrt{ab}-}^\alpha f(a) + {}_HJ_{\sqrt{ab}+}^\alpha f(b)] \right| \leq \frac{2^{\alpha-1}M\alpha}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^\alpha} \\
& \times \left\{ \frac{b-a}{2^\alpha} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^\alpha - \alpha \left[\int_{\sqrt{ab}}^b \left(\ln \frac{b}{t}\right)^{\alpha-1} dt - \int_a^{\sqrt{ab}} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} dt \right] \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Özel olarak eşitsizlikte $\alpha = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \right| \\
& \leq \frac{M}{\ln b - \ln a} \left\{ \frac{b-a}{2} \left(\ln \frac{b}{a}\right) - (a + b - 2\sqrt{ab}) \right\}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.3.3. $I, \mathbb{R}$ de bir aralık, I da $a \leq A \leq B \leq b$, $V = (1 - \alpha)a + \alpha b$, $\alpha \in [0,1]$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $L \geq 0$ olan bir L -Lipschitzian fonksiyon olsun. O halde,

$$\left| \alpha f(A) + (1 - \alpha)f(B) - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{LV_\alpha(A, B)}{2(b - a)}$$

eşitsizliği vardır. Burada,

$$V_\alpha(A, B) = \begin{cases} (A - a)^2 - (A - V)^2 + (B - V)^2 + (b - B)^2 & a \leq V \leq A \leq B \leq b \\ (A - a)^2 + (V - A)^2 + (B - V)^2 + (b - B)^2 & a \leq A \leq V \leq B \leq b \\ (A - a)^2 + (V - A)^2 + (b - B)^2 - (V - B)^2 & a \leq A \leq B \leq V \leq b \end{cases}$$

Teorem 3.3.4. $I, \mathbb{R}$ de bir aralık, I da $a \leq A \leq B \leq C \leq b$, $V_1 = (1 - \alpha)a + \alpha b$, $V_2 = \gamma a + (\alpha + \beta)b$, $\alpha \in [0,1]$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $L \geq 0$ olan bir L -Lipschitzian fonksiyon olsun. O halde,

$$\left| \alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma f(c) - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{LV_{\alpha, \beta, \gamma}(A, B, C)}{2(b - a)}$$

eşitsizliği vardır. Burada $V_{\alpha, \beta, \gamma}$, [24] de tanımlandığı gibi alınmıştır.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I üzerinde M -Lipschitz olsun. Bu bölüm boyunca,

$$\begin{aligned} L_f(x, y, z, \lambda, \eta, \mu, \alpha, a, b) \\ = \lambda^\alpha f(x) + \eta^\alpha f(y) + \mu^\alpha f(z) \\ - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^\alpha} \left[{}_HJ_{G_1-}^\alpha f(a) + {}_HJ_{G_1+}^\alpha f(G_2) + {}_HJ_{G_2+}^\alpha f(b) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{\alpha, \lambda, \eta, \mu}(x, y, z) \\ = \int_a^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{|x-t|}{t} dt \\ + \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{|y-t|}{t} dt + \int_{G_2}^b \left[\ln\left(\frac{b}{t}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{|z-t|}{t} dt \end{aligned}$$

şeklinde alacağız. Burada $a, b \in I$ ve $a < b$, $x, y, z \in [a, b]$, $\lambda, \eta, \mu \in [0, 1]$, $G_1 = a^{1-\lambda} b^\lambda$, $G_2 = a^\mu b^{\lambda+\eta}$, $\alpha > 0$ ve $\Gamma, \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ ile tanımlanan Euler Gamma fonksiyonudur.

Teorem 4.1. $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I da M -Lipschitz fonksiyon olsun. I da $a \leq x \leq y \leq z \leq b$ ve $\lambda + \eta + \mu = 1$; $\lambda, \eta, \mu \in [0, 1]$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& |L_f(x, y, z, \lambda, \eta, \mu, \alpha, a, b)| \\
&= \left| \lambda^\alpha f(x) + \eta^\alpha f(y) + \mu^\alpha f(z) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha} \left[{}_HJ_{G_1-}^\alpha f(a) + {}_HJ_{G_1+}^\alpha f(G_2) + {}_HJ_{G_2+}^\alpha f(b) \right] \right| \\
&= \left| \lambda^\alpha f(x) + \eta^\alpha f(y) + \mu^\alpha f(z) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{G_2}^b \left[\ln\left(\frac{b}{t}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt \right] \right|.
\end{aligned}$$

İspat:

$$\int_a^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{f(u)}{t} dt = f(u) \int_a^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{dt}{t}$$

$$x = \ln\left(\frac{t}{a}\right), \quad dx = \frac{1}{t} dt$$

$$f(u) \int_0^{\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)} x^{\alpha-1} dx = \frac{f(u)}{\alpha} \lambda^\alpha \left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha$$

$$\lambda^\alpha f(x) = \frac{\alpha}{\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha} \int_a^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt$$

Benzer şekilde integraller hesaplanırsa.

$$\eta^\alpha f(y) = \frac{\alpha}{\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha} \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt$$

$$\mu^\alpha f(z) = \frac{\alpha}{\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^\alpha} \int_{G_2}^b \left[\ln\left(\frac{b}{t}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt$$

olduğu görülür. O halde

$$|L_f(x, y, z, \lambda, \eta, \mu, \alpha, a, b)|$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha}{\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^\alpha} \left| \int_a^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{f(x) - f(t)}{t} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{f(y) - f(t)}{t} dt + \int_{G_2}^b \left[\ln\left(\frac{b}{t}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{f(z) - f(t)}{t} dt \right| \\ &\leq \frac{\alpha}{\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^\alpha} \left[\int_a^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{|f(x) - f(t)|}{t} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{|f(y) - f(t)|}{t} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{G_2}^b \left[\ln\left(\frac{b}{t}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{|f(z) - f(t)|}{t} dt \right] \\ &\leq \frac{\alpha M}{\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^\alpha} \left[\int_a^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{|x - t|}{t} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{|y - t|}{t} dt + \int_{G_2}^b \left[\ln\left(\frac{b}{t}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{|z - t|}{t} dt \right] \\ &= \frac{\alpha M G_{\alpha, \lambda, \eta, \mu}(x, y, z)}{\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]^\alpha} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada

$$\int_a^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{|x - t|}{t} dt, \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{|y - t|}{t} dt, \int_{G_2}^b \left[\ln\left(\frac{b}{t}\right)\right]^{\alpha-1} \frac{|z - t|}{t} dt$$

integrallerini hesaplırsak aşağıdaki durumları elde ederiz.

(1) Eğer $a \leq G_1 \leq G_2 \leq x \leq y \leq z \leq b$ veya $a \leq G_1 \leq x \leq G_2 \leq y \leq z \leq b$ ise

$$\int_a^{G_1} \left[\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right]^{\alpha-1} \frac{|x-t|}{t} dt = \frac{x}{\alpha} \lambda^\alpha \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]^\alpha - \int_a^{G_1} \left[\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right]^{\alpha-1} dt,$$

$$\int_{G_1}^{G_2} \left[\ln \left(\frac{G_2}{t} \right) \right]^{\alpha-1} \frac{|y-t|}{t} dt = \frac{y}{\alpha} \eta^\alpha \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]^\alpha - \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln \left(\frac{G_2}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt$$

ve

$$\int_{G_2}^b \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} \frac{|z-t|}{t} dt = \frac{z}{\alpha} \mu^\alpha \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]^\alpha - \frac{2z}{\alpha} \left[\ln \left(\frac{b}{z} \right) \right]^\alpha - \int_{G_2}^z \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt$$

$$+ \int_z^b \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt$$

olur.

(2) Eğer $a \leq G_1 \leq x \leq y \leq G_2 \leq z \leq b$ ise

$$\int_a^{G_1} \left[\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right]^{\alpha-1} \frac{|x-t|}{t} dt = \frac{x}{\alpha} \lambda^\alpha \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]^\alpha - \int_a^{G_1} \left[\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right]^{\alpha-1} dt,$$

$$\int_{G_1}^{G_2} \left[\ln \left(\frac{G_2}{t} \right) \right]^{\alpha-1} \frac{|y-t|}{t} dt$$

$$= \frac{y}{\alpha} \eta^\alpha \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]^\alpha - \frac{2y}{\alpha} \left[\ln \left(\frac{G_2}{y} \right) \right]^\alpha - \int_{G_1}^y \left[\ln \left(\frac{G_2}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt$$

$$+ \int_y^{G_2} \left[\ln \left(\frac{G_2}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt$$

ve

$$\int_{G_2}^b \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} \frac{|z-t|}{t} dt$$

$$= \frac{z}{\alpha} \mu^\alpha \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]^\alpha - \frac{2z}{\alpha} \left[\ln \left(\frac{b}{z} \right) \right]^\alpha - \int_{G_2}^z \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt$$

$$+ \int_z^b \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt$$

integralleri elde edilir.

(3) Eğer $a \leq G_1 \leq x \leq y \leq z \leq G_2 \leq b$ ise

$$\begin{aligned} \int_a^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{|x-t|}{t} dt &= \frac{x}{\alpha} \lambda^\alpha \left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha - \int_a^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} dt, \\ \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{|y-t|}{t} dt \\ &= \frac{y}{\alpha} \eta^\alpha \left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha - \frac{2y}{\alpha} \left[\ln\left(\frac{G_2}{y}\right) \right]^\alpha - \int_{G_1}^y \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right) \right]^{\alpha-1} dt \\ &\quad + \int_y^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right) \right]^{\alpha-1} dt \end{aligned}$$

ve

$$\int_{G_2}^b \left[\ln\left(\frac{b}{t}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{|z-t|}{t} dt = -\frac{z}{\alpha} \mu^\alpha \left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha + \int_{G_2}^b \left[\ln\left(\frac{b}{t}\right) \right]^{\alpha-1} dt$$

olur.

(4) Eğer $a \leq x \leq G_1 \leq G_2 \leq y \leq z \leq b$ ise

$$\begin{aligned} \int_a^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{|x-t|}{t} dt \\ &= \frac{x}{\alpha} \lambda^\alpha \left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha + \frac{2x}{\alpha} \left[\ln\left(\frac{x}{a}\right) \right]^{\alpha-1} \\ &\quad - \int_a^x \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} dt + \int_x^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} dt, \\ \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{|y-t|}{t} dt &= \frac{y}{\alpha} \eta^\alpha \left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha - \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right) \right]^{\alpha-1} dt \end{aligned}$$

ve

$$\int_{G_2}^b \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} \frac{|z-t|}{t} dt = -\frac{z}{\alpha} \mu^\alpha \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]^\alpha - \int_{G_2}^z \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt$$

$$+ \int_z^b \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt$$

integralleri elde edilir.

(5) Eğer $a \leq x \leq G_1 \leq y \leq G_2 \leq z \leq b$ ise

$$\int_a^{G_1} \left[\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right]^{\alpha-1} \frac{|x-t|}{t} dt$$

$$= \frac{x}{\alpha} \lambda^\alpha \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]^\alpha + \frac{2x}{\alpha} \left[\ln \left(\frac{x}{a} \right) \right]^{\alpha-1}$$

$$- \int_a^x \left[\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right]^{\alpha-1} dt + \int_x^{G_1} \left[\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right]^{\alpha-1} dt,$$

$$\int_{G_1}^{G_2} \left[\ln \left(\frac{G_2}{t} \right) \right]^{\alpha-1} \frac{|y-t|}{t} dt$$

$$= \frac{y}{\alpha} \eta^\alpha \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]^\alpha - \frac{2y}{\alpha} \left[\ln \left(\frac{G_2}{y} \right) \right]^\alpha - \int_{G_1}^y \left[\ln \left(\frac{G_2}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt$$

$$+ \int_y^{G_2} \left[\ln \left(\frac{G_2}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt$$

ve

$$\int_{G_2}^b \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} \frac{|z-t|}{t} dt = -\frac{z}{\alpha} \mu^\alpha \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]^\alpha - \int_{G_2}^z \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt$$

$$+ \int_z^b \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt$$

olur.

(6) Eğer $a \leq x \leq G_1 \leq y \leq z \leq G_2 \leq b$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_a^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{|x-t|}{t} dt \\
&= \frac{x}{\alpha} \lambda^\alpha \left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha + \frac{2x}{\alpha} \left[\ln\left(\frac{x}{a}\right) \right]^{\alpha-1} \\
&\quad - \int_a^x \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} dt + \int_x^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} dt, \\
& \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{|y-t|}{t} dt \\
&= \frac{y}{\alpha} \eta^\alpha \left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha - \frac{2y}{\alpha} \left[\ln\left(\frac{G_2}{y}\right) \right]^\alpha - \int_{G_1}^y \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right) \right]^{\alpha-1} dt \\
&\quad + \int_y^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right) \right]^{\alpha-1} dt
\end{aligned}$$

ve

$$\int_{G_2}^b \left[\ln\left(\frac{b}{t}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{|z-t|}{t} dt = -\frac{z}{\alpha} \mu^\alpha \left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha + \int_{G_2}^b \left[\ln\left(\frac{b}{t}\right) \right]^{\alpha-1} dt$$

olur.

(7) Eğer $a \leq x \leq y \leq G_1 \leq G_2 \leq z \leq b$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_a^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{|x-t|}{t} dt \\
&= \frac{x}{\alpha} \lambda^\alpha \left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha + \frac{2x}{\alpha} \left[\ln\left(\frac{x}{a}\right) \right]^{\alpha-1} \\
&\quad - \int_a^x \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} dt + \int_x^{G_1} \left[\ln\left(\frac{t}{a}\right) \right]^{\alpha-1} dt, \\
& \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right) \right]^{\alpha-1} \frac{|y-t|}{t} dt = -\frac{y}{\alpha} \eta^\alpha \left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^\alpha + \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln\left(\frac{G_2}{t}\right) \right]^{\alpha-1} dt
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_{G_2}^b \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} \frac{|z-t|}{t} dt \\
&= -\frac{z}{\alpha} \mu^\alpha \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]^\alpha - \int_{G_2}^z \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt + \int_z^b \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt
\end{aligned}$$

İntegralleri bulunur.

(8) Eğer $a \leq x \leq y \leq G_1 \leq z \leq G_2 \leq b$ veya $a \leq x \leq y \leq z \leq G_1 \leq G_2 \leq b$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_a^{G_1} \left[\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right]^{\alpha-1} \frac{|x-t|}{t} dt \\
&= \frac{x}{\alpha} \lambda^\alpha \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]^\alpha + \frac{2x}{\alpha} \left[\ln \left(\frac{x}{a} \right) \right]^{\alpha-1} \\
&\quad - \int_a^x \left[\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right]^{\alpha-1} dt + \int_x^{G_1} \left[\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right]^{\alpha-1} dt, \\
& \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln \left(\frac{G_2}{t} \right) \right]^{\alpha-1} \frac{|y-t|}{t} dt = -\frac{y}{\alpha} \eta^\alpha \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]^\alpha + \int_{G_1}^{G_2} \left[\ln \left(\frac{G_2}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt
\end{aligned}$$

ve

$$\int_{G_2}^b \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} \frac{|z-t|}{t} dt = -\frac{z}{\alpha} \mu^\alpha \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]^\alpha + \int_{G_2}^b \left[\ln \left(\frac{b}{t} \right) \right]^{\alpha-1} dt$$

olur.

Teorem 4.1 in varsayımları altında, aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 4.1. Teorem 4.1.1 de $\alpha = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \lambda f(x) + \eta f(y) + \mu f(z) - \frac{1}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} \left[\int_a^{G_1} \frac{f(t)}{t} dt + \int_{G_1}^{G_2} \frac{f(t)}{t} dt + \int_{G_2}^b \frac{f(t)}{t} dt \right] \right| \\
&= \left| \lambda f(x) + \eta f(y) + \mu f(z) - \frac{1}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \right| \\
&\leq \frac{M}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} \left[\int_a^{G_1} \frac{|x-t|}{t} dt + \int_{G_1}^{G_2} \frac{|y-t|}{t} dt + \int_{G_2}^b \frac{|z-t|}{t} dt \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç 4.1 de verilen eşitsizlik özel durumlarda literatürde bulunan farklı tip integral eşitsizliklerine indirgenmektedir. Aşağıdaki sonuçlarda bu eşitsizlikler verilmiştir.

Sonuç 4.2. Sonuç 4.1 de $\lambda = \frac{1}{2}, \eta = 0, \mu = \frac{1}{2}$ alınırsa, $x = a, z = b, G_1 = \sqrt{ab} = G = G_2$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \right| &\leq \frac{M}{\ln b - \ln a} \left[\int_a^G \frac{t-a}{t} dt + \int_G^b \frac{b-t}{t} dt \right] \\ &= \frac{M}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} [a \ln a + b \ln b - (a+b)(1 + \ln G) + 2G] \\ &= \frac{M}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{b-a}{4} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + 2(G-A) \right] \end{aligned}$$

Trapezoid tipli eşitsizliği elde edilir. $A = A(a, b) = \frac{a+b}{2}$.

Sonuç 4.3. Sonuç 4.1 de $\lambda = 1, \eta = \mu = 0$ alınırsa; $G_1 = b = G_2$ için

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \right| &\leq \frac{M}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\int_a^x \frac{x-t}{t} dt + \int_x^b \frac{t-x}{t} dt \right] \\ &= \frac{M}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[2x \ln\left(\frac{x}{G}\right) + 2(A-x) \right] \end{aligned}$$

Ostrowski tipli eşitsizliği elde edilir. Burada $A = A(a, b) = \frac{a+b}{2}$.

Sonuç 4.4. Sonuç 4.1 de $\lambda = \frac{1}{4} = \mu, \eta = \frac{1}{2}$ alınırsa, $x = a, z = b, y = \sqrt{ab} = G$ olup, $a \leq G_1 = a^{3/4}b^{1/4} \leq G \leq G_2 = a^{1/4}b^{3/4} \leq b$ olacağından

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(\sqrt{ab}) \right] - \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \right| \\
& \leq \frac{M}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\int_a^{G_1} \frac{t-a}{t} dt + \int_{G_1}^G \frac{G-t}{t} dt + \int_G^{G_2} \frac{t-G}{t} dt + \int_{G_2}^b \frac{b-t}{t} dt \right] \\
& = \frac{M}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} [-(a+G)\ln G_1 - (b+G)\ln G_2 + 2G\ln G + a\ln a + b\ln b \\
& \quad + 2G_1 + 2G_2 - 2G - a - b] \\
& = \frac{M}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{b-a}{4} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + 2G_1 + 2G_2 - 2G - 2A \right].
\end{aligned}$$

Bullen tipli eşitsizliği elde edilir. Burada $A = A(a, b) = \frac{a+b}{2}$.

Sonuç 4.5. Sonuç 4.1 de $\lambda = \frac{1}{6} = \mu, \eta = \frac{2}{3}$ alınırsa, $x = a, z = b, y = \sqrt{ab} = G$ olup

$a \leq G_1 = a^{5/6}b^{1/6} \leq G \leq G_2 = a^{1/6}b^{5/6} \leq b$ olacağından

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f(\sqrt{ab}) \right] - \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \right| \\
& \leq \frac{M}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\int_a^{G_1} \frac{t-a}{t} dt + \int_{G_1}^G \frac{G-t}{t} dt + \int_G^{G_2} \frac{t-G}{t} dt + \int_{G_2}^b \frac{b-t}{t} dt \right] \\
& = \frac{M}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} [-(b+G)\ln G_2 - (a+G)\ln G_1 + 2G\ln G + a\ln a + b\ln b \\
& \quad - 2G + 2G_1 - a - b] \\
& = \frac{M}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{b-a}{6} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 2G + 2G_1 - 2A \right]
\end{aligned}$$

Simpson tipli eşitsizliği elde edilir.

Bu bölümdeki önermeleri kanıtlamak için aşağıdaki Lemma'ya ihtiyacımız vardır.

Lemma 4.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir ve $\|f'\|_\infty < \infty$ olsun. O zaman f , $[a, b]$ üzerinde, M -Lipschitz fonksiyon olur ve burada $M = \|f'\|_\infty$ dur [24].

Önerme 4.1. Sonuç 4.2 eşitsizliğinde $[a, b]$ üzerinde $f(x) = x^n$ Lipschitz fonksiyonu alınırsa, $b > a > 0$ ve $n \geq 1$ için

$$|A(a^n, b^n) - L(a^n, b^n)| \leq \frac{nb^{n-1}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{b-a}{4} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + 2(G-A) \right]$$

elde ederiz.

Önerme 4.2. Sonuç 4.3 eşitsizliğinde $[a, b]$ üzerinde $f(x) = x^n$ Lipschitz fonksiyonu alınırsa, $b > a > 0$ ve $n \geq 1$ için

$$|x^n - L(a^n, b^n)| \leq \frac{nb^{n-1}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[2x \ln\left(\frac{x}{G}\right) + 2(A-x) \right]$$

elde ederiz.

Önerme 4.3. Sonuç 4.4 eşitsizliğinde $[a, b]$ üzerinde $f(x) = x^n$ Lipschitz fonksiyonu alınırsa, $b > a > 0$, $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} [A(a^n, b^n) + G^n(a, b)] - L(a^n, b^n) \right| \\ & \leq \frac{nb^{n-1}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{b-a}{4} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + 2G_1 + 2G_2 - 2G - 2A \right] \end{aligned}$$

elde ederiz.

Önerme 4.4. Sonuç 4.5 eşitsizliğinde $[a, b]$ üzerinde $f(x) = x^n$ Lipschitz fonksiyonu alınırsa, $b > a > 0$, $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{3} [A(a^n, b^n) + G^n(a, b)] - L(a^n, b^n) \right| \\ & \leq \frac{nb^{n-1}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{b-a}{4} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + 2G_1 + 2G_2 - 2G - 2A \right] \end{aligned}$$

elde ederiz.

Önerme 4.5. Sonuç 4.2 eşitsizliğinde $[a, b]$ üzerinde $f(x) = \frac{1}{x}$ Lipschitz fonksiyonu alınırsa, $b > a > 0$ için

$$|H^{-1}(a, b) - L(a, b)G^{-2}(a, b)| \leq \frac{1}{a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{b-a}{4} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + 2(G-A) \right]$$

elde ederiz.

Önerme 4.6. Sonuç 4.3 eşitsizliğinde $[a, b]$ üzerinde $f(x) = \frac{1}{x}$ Lipschitz fonksiyonu alınır, $b > a > 0$ için

$$\left| \frac{1}{x} - L(a, b)G^{-2}(a, b) \right| \leq \frac{1}{a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[2x \ln\left(\frac{x}{G}\right) + 2(A-x) \right]$$

elde ederiz.

Önerme 4.7. Sonuç 4.4 eşitsizliğinde $[a, b]$ üzerinde $f(x) = \frac{1}{x}$ Lipschitz fonksiyonu alınır, $b > a > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} [H^{-1}(a, b) + G^{-1}(a, b)] - L(a, b)G^{-2}(a, b) \right| \\ & \leq \frac{1}{a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{b-a}{4} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + 2G_1 + 2G_2 - 2G - 2A \right] \end{aligned}$$

elde ederiz.

Önerme 4.8. Sonuç 4.5 eşitsizliğinde $[a, b]$ üzerinde $f(x) = \frac{1}{x}$ Lipschitz fonksiyonu alınır, $b > a > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{3} [H^{-1}(a, b) + 2G^{-1}(a, b)] - L(a, b)G^{-2}(a, b) \right| \\ & \leq \frac{1}{a^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{b-a}{4} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + 2G_1 + 2G_2 - 2G - 2A \right] \end{aligned}$$

elde ederiz.

Önerme 4.9. Sonuç 4.2 eşitsizliğinde $[a, b]$ üzerinde $f(x) = \ln x$ Lipschitz fonksiyonu alınır, $b > a > 0$ için

$$0 \leq \frac{1}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{b-a}{4} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + 2(G-A) \right]$$

elde ederiz.

Önerme 4.10. Sonuç 4.3 eşitsizliğinde $[a, b]$ üzerinde $f(x) = \ln x$ Lipschitz fonksiyonu alınırsa, $b > a > 0$ için

$$|\ln x - 2A(\ln a, \ln b)| \leq \frac{1}{a \ln \left(\frac{b}{a}\right)} \left[2x \ln \left(\frac{x}{G}\right) + 2(A - x) \right]$$

elde ederiz.

Önerme 4.11. Sonuç 4.4 eşitsizliğinde $[a, b]$ üzerinde $f(x) = \ln x$ Lipschitz fonksiyonu alınırsa, $b > a > 0$ için

$$\left| \frac{1}{2} [\ln G(a, b) - A(\ln a, \ln b)] \right| \leq \frac{1}{a \ln \left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{b-a}{4} \ln \left(\frac{b}{a}\right) + 2G_1 + 2G_2 - 2G - 2A \right]$$

elde ederiz.

Önerme 4.12. Sonuç 4.5 eşitsizliğinde $[a, b]$ üzerinde $f(x) = \ln x$ Lipschitz fonksiyonu alınırsa, $b > a > 0$ için

$$\left| \frac{1}{3} [2 \ln G(a, b) - A(\ln a, \ln b)] \right| \leq \frac{1}{a \ln \left(\frac{b}{a}\right)} \left[\frac{b-a}{4} \ln \left(\frac{b}{a}\right) + 2G_1 + 2G_2 - 2G - 2A \right]$$

elde ederiz.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışma, daha önce GA-konveks fonksiyonlar için elde edilmiş olan bazı kesirli integral eşitsizliklerin Lipschitz fonksiyonlar için elde edilmesiyle ilgilidir. Bu tezde, öncelikle konveks ve GA-konveks fonksiyon kavramı verilip, GA-konveks fonksiyonlar için elde edilmiş bazı Hadamard tipli eşitsizlikler incelendi. Bu eşitsizlikler, kesirli integraller yardımıyla Lipschitz fonksiyonları için yeniden elde edildi. Burada elde edilen sonuçlar yeni olup özel durumlarda çeşitli birçok özel tip integral eşitsizliğine indirgenebilmektedir. Elde edilen sonuçlardan yararlanılarak Lipschitz fonksiyonlar için çeşitli ortalamalarla ilgili önermeler de tezin sonunda verilmiştir. Böylece yeni elde edilen sonuçların uygulanabilir olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Hardy G., Littlewood J.E. and Polya G., Inequalities, 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom, 1952.
- [2] Beckenbach E.F. and Bellman B., Inequalities, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1961.
- [3] Mitrinović, D.S., Analytic Inequalities, Springer, Berlin, 1970.
- [4] Samko. S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives Theory and Appl., Gordon and Breach Science Publishers, Singapore. 1993.
- [5] X.J., Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications, World Science Publisher. New York, 2012.
- [6] Anton H. and Rorres, C. Elementary Linear Algebra, Jhon Wiley and Sons Inc., 2006.
- [7] Bayraktar M., Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1, 2000.
- [8] Niculescu, C.P. and Persson, L.E. Convex Functions and Their Appl., A Contemporary Approach, Springer Science+Business Media Inc., 255 pp., 2006.

- [9] Dragomir S.S and Pearce C.E.M. Selected Topics on Hermite–Hadamard Type Inequalities and Applications, 181, RGMIA Monographs, Victoria University, 2000.
- [10] Pečarić J., Proschan F., Tong Y.L. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press Inc., 1992.
- [11] Azpeitia A.G. Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., (28): 7-12, 1994.
- [12] Niculescu C. P. Convexity according to the geometric mean, Math. Inequal. Appl. 3 (2), Available online at <http://dx.doi.org/10.7153/mia-03-19>, 155–167, 2000.
- [13] Jeffrey A., Dai H-H. Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, Elsevier Inc. 4. Edition, 589, UK, 2008.
- [14] Sarikaya M.Z. et al. Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. Math. Comput. Model., 57, 2403-2407, 2013.
- [15] Latif M.A., Dragomir S.S. and Momaniat E., Some Fejer type integral inequalities for geometrically-arithmetically-convex functions with applications, RGMIA Research Report Collection, 18, Article 25, 18 pp, 2015.
- [16] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [17] İşcan İ., New general integral inequalities for quasi-geometrically convex functions via fractional integrals, J. Inequal. Appl., 491:2013, 15 pages. 2013.

- [18] Kunt M., İşcan İ., On new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejer type for GA-convex functions via fractional integrals, RGMIA Research Report Collection, 18 Article 108, 12 pp., 2015.
- [19] Hua J., Yan Xi B., Qi F. Hermite-Hadamard Type Inequalities For Geometric-Arithmetically s -Convex Functions, Commun. Korean Math. Soc. 29, No. 1, pp. 51–63, 2014.
- [20] Zhang X-M., Chu Y-M., Zhang X-H. The Hermite-Hadamard Type Inequality of GA-Convex Functions and Its Application, Journal of Inequalities and Applications, Article ID 507560, 11 pages, 2010.
- [21] Mitrović D.S., Pečarić J.E. and Fink A.M. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740 pp, Dordrecht/Boston/London, 1993.
- [22] Mitrović D.S., Pečarić J.E. and Fink A.M., Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. vol.53, Springer Science and Business Media, 2012.
- [23] Dragomir S.S., Pearce C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral. Math. Soc., 57: 337-385.
- [24] Tseng K.L., Hwang S.R. and Hsu K.C., Hadamard-type and Bullen-type inequalities for Lipschitzian functions and their applications. Comput. Math. Appl. 64, no. 4, 651-660, 2012.
- [25] Carter M., Van Brunt B. The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction. ISBN: 0387950125. 2000.

- [26] Roberts A.W. and Varberg D.E., *Convex Functions*. Academic Press, 300pp, New York, 1973.
- [27] Bagdasar O. *Inequalities and Applications*, Bachelor' s Degree Thesis, Babeş Bolyai University, Cluj Napoca, 2006.
- [28] Bullen P. S., Mitrinović D.S., Vasi's P. M. *Means and Their Inequalities*, Springer Science+Business Media, B. V., 1988
- [29] Dragomir S.S., Cho Y.J. and Kim S.S. *Inequalities of Hadaamrd's type for Lipschitzian mappings and Their Applications*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 245, 489-501, 2000.
- [30] İ. İşcan, *Hadamard-type and Bullen-type inequalities for Lipschitzian functions via fractional integrals*, *Mathematical Sciences And Applications E-Notes* 4(1), 77-87, 2016.
- [31] İ. İşcan, *New General Integral Inequalities for Lipschitzian Functions via Hadamard Fractional Integrals*, *Hindawi Publishing Corporation International Journal of Analysis*, Article ID 353924, 8 pages, 2014.

ÖZGEÇMİŞ

Levent ŞENEL 1981 yılında Giresun’da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Giresun’da tamamladı. 1999 yılında Giresun Lisesi’nden mezun oldu. 1999 yılında başladığı Kocaeli Üniversitesi Matematik Bölümü’nü 2005 yılında bitirdi. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Samsun ili Çarşamba MTAL’de matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.