

LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Özlem ÖZTÜRK MIZRAK

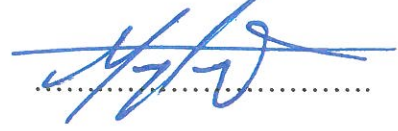
**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EYLÜL 2012
ANKARA**

Özlem ÖZTÜRK MIZRAK tarafından hazırlanan “LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. M. Fahri AKTAŞ
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

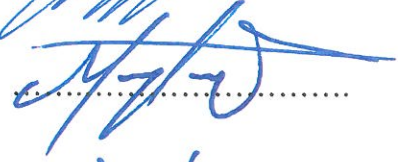


Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

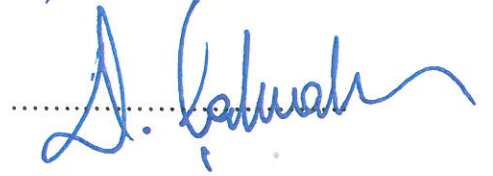
Doç. Dr. Adil MISIR
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.



Yrd. Doç. Dr. M. Fahri AKTAŞ
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.



Doç. Dr. Devrim ÇAKMAK
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, G.Ü.



Tarih: 19 /09 /2012

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Özlem ÖZTÜRK MIZRAK

LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER**(Yüksek Lisans Tezi)****Özlem ÖZTÜRK MIZRAK****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Eylül 2012****ÖZET**

Derleme niteliğindeki bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde amaca yönelik bazı önemli tanım, teorem ve sonuçlara değinilmiştir. Üçüncü bölümde diferensiyel denklemler, birinci ve ikinci basamaktan sistemler için elde edilen Lyapunov tipi eşitsizliklere ilişkin bazı önemli sonuçlara ve uygulamalarına yer verilmiştir. Dördüncü bölümde de yakın zamanda incelenen bazı sistemler için elde edilen Lyapunov tipi eşitsizlikler ağırlıklı olarak irdelenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Lyapunov Eşitsizliği, Diferensiyel Denklemler, Sistemler
Sayfa Adedi : 70
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç.Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

LYAPUNOV TYPE INEQUALITIES
(M.Sc. Thesis)

Özlem ÖZTÜRK MIZRAK

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
September 2012

ABSTRACT

This thesis, a compile of studies which have been conducted so far, consists of four chapters. The first chapter is allocated to the introduction. In the second chapter, some important definitions, theorems and results regarding the topic have been mentioned. In the third chapter, some important results and applications on Lyapunov type inequalities for differential equations, first and second order systems have been given. In the fourth chapter, Lyapunov type inequalities of some systems, which have been recently investigated, have been thoroughly analyzed.

Science Code : 204.1.138
Key Words : Lyapunov Inequality, Differential Equations, Systems
Page Number : 70
Adviser : Assist. Prof. Mustafa Fahri AKTAŞ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşturulması esnasında engin birikimi, sabrı ve yol göstericiliği ile bu günlere ulaşmamı sağlayan çok değerli tez hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ a bana kazandırmaya çalıştığı tüm değerler için minnettarlığımı ve şükranlarımı bildirmeyi bir görev kabul ediyorum. Ayrıca bu çalışmalarım boyunca manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli eşim Cihan MIZRAK a ve aileme teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	2
3. LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER.....	13
3.1. Diferensiyel Denklemler İçin Lyapunov Tipi Eşitsizlikler	13
3.2. Birinci Basamaktan Sistemler İçin Lyapunov Tipi Eşitsizlikler	32
3.3. İkinci Basamaktan Sistemler İçin Lyapunov Tipi Eşitsizlikler.....	37
4. SİSTEMLERE İLİŞKİN SONUÇLAR.....	43
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	70

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler, diğer bilim sahalarının yanı sıra matematiğin hemen hemen tüm branşlarında önemli bir rol oynamaktadır. 1934 yılından bu yana yeni eşitsizliklerin bulunması ve analizin pek çok bölümünde bu eşitsizliklerin uygulamaları adına büyük bir gayret sarf edilmiştir. Matematiksel eşitsizliklerin kullanışlı oluşu başlangıçtan beri bilinmekte ve şu an bu eşitsizlikler yaygınlıkla modern reel analizin gelişmesindeki temel itici güçlerden biri olarak görülmektedir. Eşitsizlikler teorisi sürekli gelişen bir işleyişin içindedir ve eşitsizlikler matematiğin çeşitli dallarına ait pek çok problemin çözümünde etkili ve güçlü birer araç haline gelmektedirler. Bu teori son yıllarda çok sayıda araştırmacının ilgisini çekmiş, yeni araştırma sahalarının açılmasına sebep olmuş ve matematiksel analiz ve uygulamalarının çeşitli yanlarını etkilemiştir.

Pek çok tipten eşitsizliğin arasında Lyapunov eşitsizliği derin köklere sahiptir ve matematiğin çeşitli dalları üzerinde büyük bir etki yapmıştır. Özellikle son birkaç yıl içinde Lyapunov eşitsizliği ve onun pek çok genelleştirmelerinin diferensiyel ve fark denklemlerinin teorileri içinde yer alan salınımlılık teorisi, disconjugacy, öz değer problemleri, kararlılık, sınırlılık ve diğer pek çok uygulama için kullanışlı birer araç olması bu konuda yapılan araştırmaların sayısını bir hayli artırmıştır.

Hazırladığımız bu tezde önce amaca yönelik temel kavramlar daha sonra ikinci ve daha yüksek basamaktan diferensiyel denklemler, birinci ve ikinci basamaktan lineer sistemlere ilişkin bir dizi önemli sonuç tarihsel süreç içerisinde sistematik bir biçimde sunulacaktır. Son kısımda da çok yakın zamanda Tang ve He [30] tarafından ele alınan ikinci basamaktan lineer sistemler üzerinde ağırlıklı olarak durulacak ve çalışmada yer alan sonuçlar ayrıntılı olarak tanıtılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tez boyunca diferensiyel denklem ve sistemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği kabul edilmiştir.

$$p(t)x'(t) + q(t)x(t) = h(t)$$

lineer diferensiyel denklemi için $p \in C^1$, $q \in C$ ve $h \in C$ verilen bir I aralığı üzerinde sürekli ve aynı aralık üzerinde $p(t) > 0$ olsun. D , $q \in C$ ve $p(t)x'(t) \in I$ aralığı üzerinde sürekli, diferensiyellenebilir olacak şekilde $x \in C^1$ lerden oluşan bir bölge olmak üzere $t \in I$ için D üzerindeki sürekli lineer L operatörünü

$$Lx = p(t)x'(t) + q(t)x(t)$$

olarak tanımlayalım [15].

Burada $a, b \in I$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ ve $\gamma^2 + \delta^2 > 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} Lx = 0 \\ \alpha x(a) - \beta x'(a) = 0 \\ \gamma x(b) + \delta x'(b) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

iki noktalı homojen sınır değer problemi için Green fonksiyonları üzerinde duracağız.

2.1. Teorem [15, Teorem 5.98]: (2.1) homojen sınır değer problemi sadece aşıkâr çözüme sahip olsun. Böylece A, B sabitler ve $h(t)$, a, b aralığında sürekli olmak üzere

$$\begin{cases} Lu = h(t) \\ \alpha u(a) - \beta u'(a) = A \\ \gamma u(b) + \delta u'(b) = B \end{cases} \quad (2.2)$$

homojen olmayan sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır.

Aşağıdaki örnekte aşıkâr çözümden başka çözümlere de sahip olan (2.1) tipinde bir sınır değer problemi vereceğiz.

2.2. Örnek:

$$\begin{cases} p(t)x'(t) = 0 \\ x'(a) = 0 = x'(b) \end{cases}$$

sınır değer probleminin bütün çözümlerini bulalım. Bu sınır değer problemi, $q(t) \equiv 0$, $\alpha = \gamma = 0$, $\beta \neq 0$ ve $\delta \neq 0$ olmak üzere (2.1) formunda bir sınır değer

problemine denktir. Bu diferensiyel denklemin genel çözümü, $x(t) = c_1 + c_2 \int_a^t \frac{ds}{p(s)}$

dir. Sınır şartlarından $x'(a) = \frac{c_2}{p(a)} = 0$ ve $x'(b) = \frac{c_2}{p(b)} = 0$ elde edilir. Böylece

$c_2 = 0$ bulunurken c_1 üzerinde bir kısıtlama yoktur. Dolayısıyla keyfî bir c_1 sabiti için $x(t) = c_1$ sınır değer problemimizin bir çözümüdür. Özel olarak, verilen sınır değer problemi aşıkâr olmayan çözümlere sahiptir.

Aşağıdaki teoremden (2.1) formundaki sınır değer problemlerinin sadece aşıkâr çözümlere sahip olması için gerek ve yeter şartı vereceğiz.

2.3. Teorem [15, Teorem 5.100]: $\rho := \alpha\gamma \int_a^b \frac{ds}{p(s)} + \frac{\beta\gamma}{p(a)} + \frac{\alpha\delta}{p(b)}$ olsun. Böylece

$$\begin{cases} p(t)x'(t) = 0 \\ \alpha x(a) - \beta x'(a) = 0 \\ \gamma x(b) + \delta x'(b) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin sadece aşıkâr çözümünün olması için gerek ve yeter şart $\rho \neq 0$ olmasıdır.

2.4. Teorem [15, Teorem 5.101] (Genel İki Noktalı Sınır Değer Problemi İçin Green Fonksiyonu): (2.1) homojen sınır değer problemi sadece aşıkâr çözüme sahip olsun. $x \in C^1[a, b]$, $Lx=0$ için Cauchy fonksiyonu olmak üzere her bir sabit $s \in (a, b)$ için $u \in C^1[a, s]$,

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ \alpha u(a, s) - \beta u'(a, s) = 0 \\ \gamma u(b, s) + \delta u'(b, s) = -\gamma x(b, s) - \delta x'(b, s) \end{cases} \quad (2.3)$$

sınır değer probleminin çözümü olsun. $t, s \in (a, b)$ için $v(t, s) := u(t, s) + x(t, s)$ olmak üzere

$$G(t, s) := \begin{cases} u(t, s), & a \leq t \leq s \leq b \\ v(t, s), & a \leq s \leq t \leq b \end{cases} \quad (2.4)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Böylece $h(t)$, a, b üzerinde sürekli olmak üzere $t \in [a, b]$ için

$$x(t) := \int_a^b G(t, s) h(s) ds,$$

$$\begin{cases} Lx = h(t) \\ \alpha x(a) - \beta x'(a) = 0 \\ \gamma x(b) + \delta x'(b) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

homogen olmayan sınır değer probleminin bir tek çözümüdür. Ayrıca, her sabit $s \in [a, b]$ için $v(t, s)$

$$\begin{cases} Lx = 0 \\ \gamma x(b) + \delta x'(b) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

sınır değer probleminin bir çözümüdür.

2.5. Sonuç: (2.1) sınır değer problemi sadece aşıkâr çözüme sahip olsun. Eğer $h(t)$, a, b üzerinde sürekli ise A ve B sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} Lx = h(t) \\ \alpha x(a) - \beta x'(a) = A \\ \gamma x(b) + \delta x'(b) = B \end{cases}$$

sınır değer probleminin çözümü, G , (2.1) sınır değer problemi için Green fonksiyonu ve w ,

$$\begin{cases} Lw = 0 \\ \alpha w(a) - \beta w'(a) = A \\ \gamma w(b) + \delta w'(b) = B \end{cases}$$

sınır değer probleminin çözümü olmak üzere

$$x(t) = w(t) + \int_a^b G(t,s) h(s) ds$$

dir.

Aşağıdaki teoremden, (2.1) sınır değer problemi için Green fonksiyonunun başka bir formunu vereceğiz ve dikkat edilirse Green fonksiyonu a, b^2 üzerinde simetriktir.

2.6. Teorem [15, Teorem 5.103]: (2.1) sınır değer problemi sadece aşıkara çözüme sahip olsun. ϕ ,

$$\begin{cases} L\phi = 0 \\ \phi(a) = \beta, \phi'(a) = \alpha \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin ve χ ,

$$\begin{cases} L\chi = 0 \\ \chi(b) = \delta, \chi'(b) = -\gamma \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü olsun. Böylece (2.1) sınır değer problemi için Green fonksiyonu, $\phi(t)$ ve $\chi(t)$ fonksiyonlarının Wronskiyanları

$$W[\phi(t), \chi(t)] = \begin{vmatrix} \phi(t) & \chi(t) \\ \phi'(t) & \chi'(t) \end{vmatrix} = \phi(t)\chi'(t) - \chi(t)\phi'(t) \quad \text{ve} \quad c := p(t)W[\phi(t), \chi(t)]$$

bir sabit olmak üzere

$$G(t, s) := \begin{cases} \frac{1}{c} \phi(t)\chi(s), & a \leq t \leq s \leq b \\ \frac{1}{c} \phi(s)\chi(t), & a \leq s \leq t \leq b \end{cases} \quad (2.7)$$

dir. Ayrıca, Green fonksiyonu a, b^2 üzerinde simetriktir. Yani, $t, s \in [a, b]$ için $G(t, s) = G(s, t)$ dir.

2.7. Örnek: Uygun bir Green fonksiyonu kullanarak

$$\begin{cases} x'' + x = t \\ x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemini çözelim. $x'' + x = 0$ için Cauchy fonksiyonu $x(t, s) = \sin(t-s)$ olarak verilir. Her sabit $s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $u(t, s)$, $x'' + x = 0$ denkleminin $u(t, s) = A(s) \cos t + B(s) \sin t$ şeklinde bir çözümüdür.

$$u(0, s) = 0,$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, s\right) = -x\left(\frac{\pi}{2}, s\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = -\cos s$$

sınır şartlarını kullanarak $A(s) = 0$ ve $B(s) = -\cos s$ elde edilir. Böylece

$$u(t, s) = -\sin t \cos s$$

$$v(t, s) = u(t, s) + x(t, s) = -\sin t \cos s + \sin(t - s) = -\sin s \cos t$$

dir.

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemi için Green fonksiyonu

$$G(t, s) = \begin{cases} -\sin t \cos s, & 0 \leq t \leq s \leq \frac{\pi}{2} \\ -\sin s \cos t, & 0 \leq s \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

dir. Böylece

$$\begin{cases} x'' + x = t \\ x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_a^b G(t,s) h(s) ds \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(t,s) s ds \\
&= \int_0^t G(t,s) s ds + \int_t^{\frac{\pi}{2}} G(t,s) s ds \\
&= -\cos t \int_0^t s \sin s ds - \sin t \int_t^{\frac{\pi}{2}} s \cos s ds \\
&= -\cos t \left[-t \cos t + \sin t \right] - \sin t \left(\frac{\pi}{2} - t \sin t - \cos t \right) \\
&= t - \frac{\pi}{2} \sin t
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

2.8. Örnek:

$$\begin{cases} p(t)x'(t) = 0 \\ x(a) = 0 = x(b) \end{cases}$$

sınır değer problemi için Green fonksiyonunu bulalım.

$p(t)x'(t) = 0$ denklemi için Cauchy fonksiyonu $t, s \in [a, b]$ olmak üzere

$x(t,s) = \int_s^t \frac{d\tau}{p(\tau)}$ dir. Her bir sabit s için $u(\cdot, s)$,

$$\begin{cases} Lu(t,s) = 0 \\ u(a,s) = 0 \\ u(b,s) = -x(b,s) \end{cases}$$

sınır değer probleminin çözümü olsun. $u(t, s)$ her bir sabit s için çözüm olduğundan

$u(t, s) = c_1(s) \cdot 1 + c_2(s) \int_a^t \frac{d\tau}{p(\tau)}$ dir. Fakat $u(a, s) = 0$ olduğundan $c_1(s) = 0$ ve

böylece $c_2(s) = \frac{-\int_s^b \frac{d\tau}{p(\tau)}}{\int_a^b \frac{d\tau}{p(\tau)}}$ bulunur. Böylece $a \leq t \leq s \leq b$ için

$$G(t, s) = u(t, s) = \frac{-\int_a^t \frac{d\tau}{p(\tau)} \int_s^b \frac{d\tau}{p(\tau)}}{\int_a^b \frac{d\tau}{p(\tau)}}$$

dir. $a \leq s \leq t \leq b$ için Green fonksiyonunu elde edebilmek için yukarıda bulduğumuz

Green fonksiyonunun simetrisi kullanılabilir; fakat biz şimdi G yi doğrudan bulalım.

$a \leq s \leq t \leq b$ için

$$\begin{aligned}
G(t,s) &= v(t,s) = u(t,s) + x(t,s) = \frac{-\int_a^t \frac{d\tau}{p(\tau)} \int_s^b \frac{d\tau}{p(\tau)}}{\int_a^b \frac{d\tau}{p(\tau)}} + \int_s^t \frac{d\tau}{p(\tau)} \\
&= \frac{-\left[\int_a^t \frac{d\tau}{p(\tau)} \int_s^b \frac{d\tau}{p(\tau)} - \int_a^b \frac{d\tau}{p(\tau)} \int_s^t \frac{d\tau}{p(\tau)} \right]}{\int_a^b \frac{d\tau}{p(\tau)}} \\
&= \frac{-\left\{ \left[\int_a^t \frac{d\tau}{p(\tau)} - \int_t^b \frac{d\tau}{p(\tau)} \right] \int_s^b \frac{d\tau}{p(\tau)} - \int_a^b \frac{d\tau}{p(\tau)} \int_s^t \frac{d\tau}{p(\tau)} \right\}}{\int_a^b \frac{d\tau}{p(\tau)}} \\
&= \frac{-\left[\int_a^b \frac{d\tau}{p(\tau)} \int_t^b \frac{d\tau}{p(\tau)} - \int_t^b \frac{d\tau}{p(\tau)} \int_s^b \frac{d\tau}{p(\tau)} \right]}{\int_a^b \frac{d\tau}{p(\tau)}} \\
&= \frac{-\int_t^b \frac{d\tau}{p(\tau)} \int_a^s \frac{d\tau}{p(\tau)}}{\int_a^b \frac{d\tau}{p(\tau)}}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{cases} p(t)x'(t) = 0 \\ x(a) = 0 = x(b) \end{cases}$$

sınır değer problemi için elde ettiğimiz Green fonksiyonu

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{\int_a^t \frac{d\tau}{p(\tau)} \int_s^b \frac{d\tau}{p(\tau)}}{\int_a^b \frac{d\tau}{p(\tau)}}, & a \leq t \leq s \leq b \\ -\frac{\int_t^b \frac{d\tau}{p(\tau)} \int_a^s \frac{d\tau}{p(\tau)}}{\int_a^b \frac{d\tau}{p(\tau)}}, & a \leq s \leq t \leq b \end{cases}$$

olarak bulunur. Bu örnekte $p(t) = 1$ alındığında

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ x(a) = 0 = x(b) \end{cases}$$

sınır değer problemi için Green fonksiyonunun

$$G(t,s) := \begin{cases} -\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & a \leq t \leq s \leq b \\ -\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & a \leq s \leq t \leq b \end{cases}$$

olduğu açıkça görülür.

3. LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Rus matematikçi Lyapunov [18], $x(t)$,

$$x'' + q(t)x = 0 \quad (3.1)$$

denkleminin aşikar olmayan çözümü olmak üzere $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x(t)$ nin $x(a) = 0 = x(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları ve $t \in (a, b)$ için $x(t) \neq 0$ olduğunda Lyapunov eşitsizliği olarak bilinen

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{4}{b-a} \quad (3.2)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiğini ispatlamıştır.

Bu sonuç (3.1) denkleminin çözümlerinin salınımlılık, disconjugacy, kararlılık, sınırlılık ve özdeğer problemleri gibi çeşitli özellikleri üzerine yapılan çalışmalarda oldukça fazla uygulama alanı bulmuştur.

Bu bölümde Lyapunov tipi eşitsizliklerin diferensiyel denklemler, birinci ve ikinci basamaktan sistemler için en temel sonuçları ve uygulamaları tarihsel süreç içinde sistematik bir biçimde sunulacaktır. Tezde diferensiyel denklem ve sistemlerin çözümlerinin varlığı kabul edilmiştir.

3.1. Diferensiyel Denklemler İçin Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

Lyapunov'un çalışması ortaya çıktığından günümüze kadar literatürde Lyapunov eşitsizliğinin pek çok genellemesi ve ispatı verilmiştir. Lyapunov tipi eşitsizliklere katkıda bulunan bazı yazarlar için Cheng [3], Çakmak ve Tiryaki [5], Dosly ve Rehak [7], Eliason [8-10], Guseinov ve Kaymakçalan [11], Hartman [13], Kwong

[16], Lee ve diğerleri [17], Napoli ve Pinasco [19], Pachpatte [20-23], Panigrahi [24], Parhi ve Panigrahi [25, 26], Pinasco [27], Tang ve He [30], Tiryaki [32], Wang [34], Yang, Kim ve Lo [40] ve Zhang ve He [41] referans olarak gösterilebilir. Örneğin, Hartman [13] (3.1) denklemi için verilen klasik Lyapunov eşitsizliğini $r(t)$ ve $q(t)$ reel değerli, sürekli fonksiyonlar, $r(t) > 0$ olmak üzere

$$r(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \quad (3.3)$$

lineer diferensiyel denklemi için aşağıdaki gibi genelleştirmiştir:

3.1. Teorem: Eğer $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, (3.3) denkleminin aşikar olmayan çözümünün ardışık sıfırları ise $q^+(t) = \max\{0, q(t)\}$, $q(t)$ nin negatif olmayan kısmı olmak üzere

$$\int_a^b q^+(s)ds > \frac{4}{\int_a^b r^{-1}(s)ds} \quad (3.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu durumda (3.3) denkleminde $r(t) = 1$ alınırsa denklem (3.1) denklemine indirgenir ve (3.4) den (3.1) denklemi için

$$\int_a^b q^+(s)ds > \frac{4}{b-a} \quad (3.5)$$

eşitsizliği elde edilir. q^+ fonksiyonunun tanımından her $t \in \mathbb{R}$ için $q^+(t) \leq |q(t)|$ olduğundan (3.5) eşitsizliği (3.2) eşitsizliğini gerektirir; ancak tersi her zaman doğru değildir. Bu durumda (3.5) eşitsizliği (3.2) den daha iyidir.

Bu eşitsizlikte 4 sabiti yerine daha büyük bir sayı yazılamayacağına bir örnek Hartman [13, Syf. 345] tarafından verilmiştir.

Yine Hartman [13], $x(t)$ (3.1) denkleminin aşikar olmayan çözümü olmak üzere $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x(t)$ nin $x(a) = 0 = x(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları ve $t \in (a, b)$ için $x(t) \neq 0$ olduğunda $q^+(t) = \max\{0, q(t)\}$ olmak üzere

$$\int_a^b (s-a)(b-s)q^+(s)ds > b-a \quad (3.6)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiğini ispatlamıştır. Bu eşitsizlikte, $M(t) = (t-a)(b-t)$

fonksiyonunun maksimumu $\max_{a < t < b} M(t) = M\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{4}$ olduğundan (3.6)

dan

$$\frac{(b-a)^2}{4} \int_a^b q^+(s)ds > \int_a^b (s-a)(b-s)q^+(s)ds > b-a \quad (3.7)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. (3.7) den de (3.5) eşitsizliği elde edildiğinden (3.6) (3.5) i gerektirir; ancak tersi her zaman doğru değildir. Bu durumda (3.6) eşitsizliği (3.5) den daha iyidir. Sonuç olarak (3.1) denklemi için bilinen en iyi Lyapunov tipi eşitsizlik (3.6) eşitsizliğidir.

Brown ve Hinton [2] ve Kwong [16] tarafından bu sonuçlardan daha güçlü sonuçlar elde edilmiştir. Kwong [16], $c \in (a, b)$ için $x'(c) = 0$ olmak üzere

$$\int_a^c q^+(s)ds > \frac{1}{c-a} \quad (3.8)$$

ve

$$\int_c^b q^+ s \, ds > \frac{1}{b-c} \quad (3.9)$$

eşitsizliklerinin sağlandığını göstermiştir. Böylece $m(t) = \frac{1}{(t-a)(b-t)}$

fonksiyonunun minimumu $\min_{a < t < b} m(t) = m\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{4}{(b-a)^2}$ olduğundan (3.8) ve

(3.9) dan

$$\int_a^b q^+ s \, ds > \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} \geq \frac{4}{(b-a)^2} \quad (3.10)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. (3.10) dan da (3.5) eşitsizliği elde edildiğinden (3.10) (3.5) i gerektirir; ancak tersi her zaman doğru değildir. Bu durumda (3.10) eşitsizliği (3.5) den daha iyidir.

Brown ve Hinton [2], (3.1) denklemi için

$$\left| \int_a^b q(s) \, ds \right| > \frac{4}{b-a} \quad (3.11)$$

eşitsizliğini elde etmiştir. Bu eşitsizlikte $\int_a^b |q(s)| \, ds > \left| \int_a^b q(s) \, ds \right|$ olduğundan (3.2)

eşitsizliği elde edilir. Yani, (3.11), (3.2) yi gerektirir; ancak tersi her zaman doğru değildir. Bu durumda (3.11) eşitsizliği (3.2) den daha iyidir.

Lyapunov eşitsizliği pek çok yönde genişletilmiştir ve $r(t)$, $q(t)$ reel değerli, sürekli fonksiyonlar, $r(t) > 0$ ve $\alpha > 1$ olmak üzere

$$r(t) |x'|^{\alpha-2} x' + q(t) |x|^{\alpha-2} x = 0 \quad (3.12)$$

yarı-lineer diferensiyel denklemi yönündeki genişleme Yang [37] tarafından bulunmuştur:

3.2. Teorem [37, Teorem 2.1]: $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, (3.12) denkleminin aşıkâr olmayan çözümünün ardışık sıfırları olsun. $q^+(t) = \max\{0, q(t)\}$ olmak üzere

$$\int_a^b q^+(s) ds > \frac{2^\alpha}{\left(\int_a^b r^{1/(1-\alpha)}(s) ds \right)^{\alpha-1}} \quad (3.13)$$

eşitsizliği sağlanır. $r(t) = 1$ ve $\alpha = 2$ için (3.12) denklemi (3.1) denkleminde dönüşür ve (3.13) eşitsizliği de (3.5) Lyapunov tipi eşitsizliğe indirgenir.

1997 yılında Pachpatte [21], $t_0 \geq 0$ için $t \in I = [t_0, \infty)$ ve I aralığı $a < b$ olacak şekilde a ve b noktalarını içermek üzere $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 2$ ve $\gamma > \beta$ olacak şekilde $\alpha, \beta, \gamma, \beta$ reel sabitler, $r, p, q: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli, $r(t)$ ve $p(t)$ sürekli diferensiyellenebilir, $r(t) > 0$, $w: I \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu sürekli, $0 \leq u \leq v$ için $w(t, u) \leq w(t, v)$ iken $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $|f(t, x)| \leq w(t, |x|)$ olmak üzere Lyapunov eşitsizliğini

$$r(t) |x'|^{\alpha-2} x' + p(t) x' + q(t) x + f(t, x) = 0 \quad (3.14)$$

ve

$$r(t) |x|^\beta |x'|^{\gamma-2} x'' + p(t) x' + q(t) x + f(t, x) = 0 \quad (3.15)$$

formundaki diferensiyel denklemler için aşağıdaki gibi genelleştirmiştir:

3.3. Teorem [21, Teorem 1]: $x(t)$, $x(a) = 0 = x(b)$ ve $t \in (a, b)$ için $x(t) \not\equiv 0$ olacak şekilde (3.14) denkleminin bir çözümü olsun. $M = \|x\|_C = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$, $|f(t, x(t))| \leq w(t)|x(t)|$ ve $\alpha \geq 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{2^{\alpha+1}} \left(\int_a^b r^{-1/\alpha}(s) ds \right)^\alpha \times \left(\frac{1}{M^{\alpha-1}} \int_a^b \left| q(s) - \frac{p'(s)}{2} \right| ds + \frac{1}{M^\alpha} \int_a^b w(s) M ds \right) \geq 1 \quad (3.16)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.4. Teorem [21, Teorem 2]: $x(t)$, $x(a) = 0 = x(b)$ ve $t \in (a, b)$ için $x(t) \not\equiv 0$ olacak şekilde (3.15) denkleminin bir çözümü olsun. $M = \|x\|_C = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$, $|f(t, x(t))| \leq w(t)|x(t)|$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 2$ ve $\gamma > \beta$ olmak üzere

$$\left(\int_a^b r^{-1/(\gamma-1)}(s) ds \right)^{\gamma-1} \times \left(\frac{1}{M^{\beta+\gamma-2}} \int_a^b \left| q(s) - \frac{p'(s)}{2} \right| ds + \frac{1}{M^{\beta+\gamma-1}} \int_a^b w(s) M ds \right) \geq 1 \quad (3.17)$$

eşitsizliği sağlanır.

1999 yılında Parhi ve Panigrahi [25], $q(t) \in [0, \infty)$ üzerinde reel değerli, sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$x''' + q(t)x = 0 \quad (3.18)$$

formundaki üçüncü basamaktan diferensiyel denklemler için (3.2) eşitsizliğine benzer eşitsizlikler elde etmiştir. Parhi ve Panigrahi nin sonuçları aşağıdaki gibidir:

3.5. Teorem [25, Teorem 1]: $x(t)$, $x(a) = 0 = x(b)$ ve $t \in (a, b)$ için $x(t) \not\equiv 0$ olacak şekilde (3.18) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $x''(t) \geq 0$ olacak şekilde bir $d \in (a, b)$ varsa

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{4}{(b-a)^2} \quad (3.19)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.6. Teorem [25, Teorem 2]: $x(t)$, $a < b < a'$ iken $t \in (a, b)$ ve $t \in (b, a')$ için $x(t) \not\equiv 0$ olacak şekilde (3.18) denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $t \in (a, b)$ için $x''(t) \geq 0$ ve $x(t)$, $a < b < a'$ olacak şekilde ardışık üç sifıra sahipse

$$\int_a^{a'} |q(s)| ds > \frac{4}{(a'-a)^2} \quad (3.20)$$

eşitsizliği sağlanır.

2003 yılında Yang [36] ve Parhi ve Panigrahi [25] nin yukarıdaki sonuçlarını yüksek basamaktan diferensiyel denklemlere genelleştirmiştir. Yang in sonuçları aşağıdaki gibidir:

3.7. Teorem [36, Teorem 1]: $n \in \mathbb{N}$ ve $q(t) \in C[a, b]$ olsun. $x(t)$,

$$x^{(2n+1)} + q(t)x = 0 \quad (3.21)$$

diferensiyel denkleminin $i = 0, 1, \dots, n-1$ ve $t \in [a, b]$ için $x(t) \not\equiv 0$ olduğunda

$$x^{(i)}(a) = x^{(i)}(b) = 0 \quad (3.22)$$

şartlarını sağlayan bir çözümü olmak üzere eğer $x^{(2n)}(d) = 0$ şartını sağlayan bir $d \in [a, b]$ varsa

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{n! 2^{n+1}}{b-a} \quad (3.23)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.8. Teorem [36, Teorem 2]: Her $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq 2$ ve $q(t) \in C[a, b]$ olsun. Eğer

$$x^{(n)} + q(t)x = 0 \quad (3.24)$$

diferensiyel denkleminin $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ ve $k = 1, 2, \dots, n-1$ iken $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için $x(t) \not\equiv 0$ olmak üzere

$$x(a) = x(t_2) = \dots = x(t_{n-1}) = x(b) = 0 \quad (3.25)$$

şartlarını sağlayan bir $x(t)$ çözümüne sahipse

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{(n-2)! n^{n-1}}{(n-1)^{n-2} (b-a)^{n-1}} \quad (3.26)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.9. Teorem [36, Teorem 3]: $q, t \in C[a, b]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x^{2n} + q(t)x = 0 \quad (3.27)$$

diferensiyel denkleminin $x(t)$ çözümü,

$$x(a) = x'(a) = \dots = x^{(n-1)}(a) = 0 \quad (3.28)$$

$$x(b) = x'(b) = \dots = x^{(n-1)}(b) = 0 \quad (3.29)$$

şartlarını sağlasın ve $t \in [a, b]$ için $x(t) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b |q(s)| |s-a|^{2n-1} |b-s|^{2n-1} ds \geq 2n-1 \left[(n-1)! \right]^2 (b-a)^{2n-1} \quad (3.30)$$

dır. Özel olarak

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{4^{2n-1} (2n-1) \left[(n-1)! \right]^2}{(b-a)^{2n-1}} \quad (3.31)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.10. Teorem [36, Teorem 4]: $q, t \in C[a, b]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $i = 0, 1, \dots, n-1$ için

$$x^{2n} + q(t)x = 0 \quad (3.32)$$

$$x^{(2i)}(a) = x^{(2i)}(b) = 0 \quad (3.33)$$

sınır değer probleminde $t \in [a, b]$ için $x(t) \not\equiv 0$ olmak üzere eğer $x(t)$, (3.32) denkleminin bir çözümü ise

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{2^n}{(b-a)^n} \quad (3.34)$$

eşitsizliği sağlanır.

2010 yılında Çakmak [4], (3.24) ve (3.32) formundaki yüksek basamaktan denklemler için Lyapunov tipi eşitsizlikler elde etmiştir. Çakmak ın, Yang [36] ın Teorem 3.8 ve Teorem 3.10 da verilen (3.26) ve (3.34) eşitsizliklerini düzelttiği sonuçları aşağıdaki gibidir:

3.11. Teorem [4, Teorem 1]: Her $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq 2$ ve $q(t) \in C[a, b]$ olsun. Eğer

$$x^{(n)} + q(t)x = 0 \quad (3.24)$$

diferensiyel denklemi $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ ve $k = 1, 2, \dots, n-1$ iken $t \in [t_k, t_{k+1}]$ için $x(t) \not\equiv 0$ olmak üzere

$$x(a) = x(t_2) = \dots = x(t_{n-1}) = x(b) = 0 \quad (3.25)$$

şartlarını sağlayan bir $x(t)$ çözümüne sahipse

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{(n-2)! n^n}{(n-1)^{n-1} (b-a)^{n-1}} \quad (3.35)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.12. Teorem [4, Teorem 2]: $q, t \in C[a, b]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $i = 0, 1, \dots, n-1$ için

$$x^{2n} + q(t)x = 0 \quad (3.32)$$

$$x^{2i}(a) = x^{2i}(b) = 0 \quad (3.33)$$

sınır değer probleminde $t \in [a, b]$ için $x(t) \not\equiv 0$ olmak üzere eğer $x(t)$, (3.32) denkleminin bir çözümü ise

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{2^{2n}}{(b-a)^{2n-1}} \quad (3.36)$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu eşitsizliğin bir uygulaması olarak $q, t \in C[a, b]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $i = 0, 1, \dots, n-1$ için (3.33) sınır şartıyla birlikte

$$x^{2n} \pm \lambda q(t)x = 0 \quad (3.37)$$

özdeğer problemini göz önüne alalım. Bu durumda (3.36) eşitsizliğinin kullanımıyla λ özdeğeri için bir alt sınır

$$|\lambda| > \frac{2^{2n}}{(b-a)^{2n-1} \int_a^b |q(s)| ds} \quad (3.38)$$

şeklinde elde edilir.

2010 yılında Yang ve Lo [38], çift basamaktan diferensiyel denklemler için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir:

3.13. Teorem [38, Teorem 1]: $k=1,2,...,2n-1$ için $r_k(t) \in C^{2n-k}[a,b]$, $0, +\infty$,
 $q(t) \in C[a,b]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\left(r_{2n-1}(t) \left(r_{2n-2}(t) \left(\dots \left(r_2(t) r_1(t) x'(t) \right)' \dots \right)' \right)' \right)' + q(t)x = 0 \quad (3.39)$$

şeklindeki $2n$ inci basamaktan lineer diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Eğer $x(t)$, (3.39) denkleminin $i=0,1,2,...,n-1$ için

$$x^{(i)}(a) = x^{(i)}(b) = 0 \quad (3.40)$$

şartlarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise $n=1$ için

$$\int_a^b \frac{ds}{r_1(s)} \int_a^b |q(s)| ds > 4, \quad (3.41)$$

$$n=2 \text{ için } H_2(c) = \frac{1}{\int_a^c \frac{ds}{r_1(s)} \int_a^c \frac{ds}{r_2(s)} \int_a^c \frac{ds}{r_3(s)}} + \frac{1}{\int_c^b \frac{ds}{r_1(s)} \int_c^b \frac{ds}{r_2(s)} \int_c^b \frac{ds}{r_3(s)}} \text{ olmak üzere}$$

$$2 \int_a^b |q(s)| ds > \min_{c \in [a,b]} H_2(c), \quad (3.42)$$

ve $n \geq 3$ için $H_n \ c = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n+1} \int_a^c \frac{ds}{r_k \ s}} + \frac{1}{\prod_{k=1}^{n+1} \int_c^b \frac{ds}{r_k \ s}}$ olmak üzere

$$2 \left[\prod_{k=n+2}^{2n-1} \int_a^b \frac{ds}{r_k \ s} \right] \int_a^b |q \ s| ds > \min_{c \in [a,b]} H_n \ c \quad (3.43)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Bu eşitsizliklerin bir uygulaması olarak $k = 1, 2, \dots, 2n-1$ için $r_k \ t \in C^{2n-k} [a, b]$, $0, +\infty$, $q \ t \in C [a, b]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için (3.40) sınır şartıyla birlikte

$$\left(r_{2n-1} \ t \left(r_{2n-2} \ t \left(\dots \left(r_2 \ t \ r_1 \ t \ x' \right)' \dots \right)' \right)' \right)' + \lambda q \ t \ x = 0 \quad (3.44)$$

özdeğer problemini göz önüne alalım. Böylece $n = 1$ için (3.41) eşitsizliğinden

$$|\lambda| > \frac{4}{\int_a^b \frac{ds}{r_1 \ s} \int_a^b |q \ s| ds}, \quad (3.45)$$

$n = 2$ için (3.42) eşitsizliğinden

$$|\lambda| > \frac{\min_{c \in [a,b]} H_2 \ c}{2 \int_a^b |q \ s| ds} \quad (3.46)$$

ve $n \geq 3$ için (3.43) eşitsizliğinden

$$|\lambda| > \frac{\min_{c \in a,b} H_n c}{2 \left[\prod_{k=n+2}^{2n-1} \int_a^b \frac{ds}{r_k s} \right] \int_a^b |q(s)| ds} \quad (3.47)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Ayrıca $q, t \in C[a, b]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için (3.40) sınır şartıyla birlikte $k = 1, 2, \dots, 2n-1$ için $r_k(t) = 1$ alındığında (3.44) özdeğer problemi

$$x^{2n} + \lambda q(t)x = 0 \quad (3.48)$$

özdeğer problemine indirgenir ve (3.47) eşitsizliğinde sağ tarafın minimumu ile paydaların maksimumu alınırsa

$$|\lambda| > \frac{2^{n+1} n!}{b-a \int_a^b |q(s)| ds} \quad (3.49)$$

eşitsizliği elde edilir.

2010 yılında Yang, Kim ve Lo [39], tek basamaktan diferensiyel denklemler için Lyapunov tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir. Onların sonuçları aşağıdaki gibidir:

3.14. Teorem [39, Teorem 1]: $k = 1, 2$ için $r_k(t) \in C^{2-k+1}[a, b]$, $0, +\infty$ ve $q, t \in C[a, b]$ olmak üzere

$$\left(r_2(t) - r_1(t) x'(t) \right)' + q(t)x(t) = 0 \quad (3.50)$$

üçüncü basamaktan lineer diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Eğer $x(t)$, $x(a) = x(b) = 0$ olacak şekilde (3.50) denkleminin aşıkâr olmayan bir çözümü ve

$f_1(t) = r_1(t) x'(t)$ olmak üzere, $f_1(d) = 0$ olacak şekilde bir $d \in (a, b)$ mevcut ise

$$g_1(c) = \frac{1}{\int_a^c \frac{ds}{r_1(s)} \int_c^b \frac{ds}{r_2(s)}} + \frac{1}{\int_c^b \frac{ds}{r_1(s)} \int_c^b \frac{ds}{r_2(s)}} \text{ olmak üzere}$$

$$2 \int_a^b |q(s)| ds > \min_{c \in (a, b)} g_1(c) \quad (3.51)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.15. Teorem [41, Teorem 2]: $1 < n \in \mathbb{N}$ iken $k = 1, 2, \dots, 2n$ için

$r_k(t) \in C^{2n-k+1}(a, b)$, $0, +\infty$ ve $q(t) \in C(a, b)$ olmak üzere

$$\left(r_{2n}(t) \left(r_{2n-1}(t) \left(\dots \left(r_2(t) - r_1(t) x'(t) \right)' \dots \right)' \right)' \right)' + q(t)x(t) = 0 \quad (3.52)$$

$2n+1$ inci basamaktan lineer diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Eğer $x(t)$, (3.52) denkleminin $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için

$$x^{(i)}(a) = x^{(i)}(b) = 0 \quad (3.53)$$

şartını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ve

$$f_n \ t := \left(r_{2n-1} \ t \left(\dots \left(r_2 \ t \ r_1 \ t \ x' \ ' \right)' \dots \right) \right)' \quad (3.54)$$

fonksiyonu bir $d \in [a, b]$ sıfırına sahipse

$$g_n \ c = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n+1} \int_a^c \frac{ds}{r_j \ s}} + \frac{1}{\prod_{j=1}^{n+1} \int_c^b \frac{ds}{r_j \ s}} \quad (3.55)$$

olmak üzere

$$2 \left[\prod_{k=n+2}^{2n} \int_a^b \frac{ds}{r_k \ s} \right] \int_a^b |q \ s| ds > \min_{c \in [a, b]} g_n \ c \quad (3.56)$$

eşitsizliği sağlanır.

2011 yılında Wang [35], aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştir:

3.16. Teorem [35, Teorem 2.2]: Eğer $x \ t$, $\alpha > 1$, $r, q \in L^1[a, b]$ ve $t \in [a, b]$ için $r \ t > 0$ olmak üzere (3.12) denkleminin $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x \ t$ nin $x \ a = 0 = x \ b$ şeklinde ardışık sıfırları ve $t \in [a, b]$ için $x \ t \not\equiv 0$ olacak şekilde aşikar olmayan bir çözümü ise $q^+ \ t = \max\{0, q \ t\}$ ve

$$C \ \gamma = \begin{cases} 1 & , \ 1 < \gamma < 2 \\ 2^{2-\gamma} & , \ \gamma \geq 2 \end{cases} \quad (3.57)$$

olmak üzere

$$\int_a^b q^+(u) \left(\int_a^u [r(s)]^{-1/\gamma-1} ds \int_u^b [r(s)]^{-1/\gamma-1} ds \right)^{\gamma-1} du > C \gamma \left(\int_a^b [r(s)]^{-1/\gamma-1} ds \right)^{\gamma-1} \quad (3.58)$$

eşitsizliği sağlanır. $r(t) = 1$ ve $\alpha = 2$ için (3.12) denklemi (3.1) denklemine dönüşür ve (3.58) eşitsizliği de (3.5) Lyapunov tipi eşitsizliğe indirgenir.

2012 yılında He ve Tang [14], $n \in \mathbb{N}$ ve $q \in L^1(a, b, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$x^{2n} + (-1)^{n-1} q(t)x = 0 \quad (3.59)$$

formundaki $2n$ inci basamaktan diferensiyel denklemler için bazı yeni Lyapunov tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir. Onların sonuçları aşağıdaki gibidir:

3.17. Teorem [14, Teorem 2.3]: $n \in \mathbb{N}$ ve $q \in L^1(a, b, \mathbb{R})$ olsun. Eğer (3.59) diferensiyel denklemi $i = 0, 1, \dots, n-1$ ve $t \in (a, b)$ için $x(t) \neq 0$ olmak üzere

$$x^{2i}(a) = x^{2i}(b) = 0 \quad (3.60)$$

şartlarını sağlayan bir $x(t)$ çözümüne sahipse

$$\int_a^b |q(s)| |s-a|^{2n-3} |b-s|^{2n-3} ds > \frac{2^{3n-1}}{b-a} \quad (3.61)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.18. Teorem [14, Teorem 2.5]: Her $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq 2$ ve $q \in L^1(a, b, \mathbb{R})$ olsun. Eğer (3.59) diferensiyel denklemi $i = 0, 1, \dots, n-1$ ve $t \in (a, b)$ için $x(t) \neq 0$ olmak üzere (3.60) sınır şartlarını sağlayan bir $x(t)$ çözümüne sahipse $q^+(t) = \max\{0, q(t)\}$ olmak üzere

$$\int_a^b q^+(s) [s-a]^{n-1} [b-s]^{n-1} ds > \left(\frac{32}{45}\right)^{1-\cos n\pi/4} \frac{2^{n-2/2} 3^{n-1} 5^{n-2/2}}{b-a} \quad (3.62)$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu eşitsizliklerin bir uygulaması olarak $n \in \mathbb{N}$ ve $q \in L^1(a, b, \mathbb{R})$ olmak üzere $i = 0, 1, \dots, n-1$ için (3.60) sınır şartıyla birlikte

$$x^{(2n)} + (-1)^{n-1} \lambda q(t)x = 0 \quad (3.63)$$

özdeğer problemini göz önüne alalım. Bu durumda (3.61) eşitsizliği yardımıyla

$$|\lambda| > \frac{2^{3n-1}}{b-a} \frac{1}{\int_a^b q(s) [s-a]^{n-1} [b-s]^{n-1} ds} \quad (3.64)$$

ve $n \geq 2$ olmak üzere (3.62) eşitsizliği yardımıyla

$$|\lambda| > \left(\frac{32}{45}\right)^{1-\cos n\pi/4} \frac{2^{n-2/2} 3^{n-1} 5^{n-2/2}}{b-a} \frac{1}{\int_a^b q^+(s) [s-a]^{n-1} [b-s]^{n-1} ds} \quad (3.65)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

2012 yılında Zhang ve He [41], $n \in \mathbb{N}$ ve $q \in L^1(a, b, \mathbb{R})$ olmak üzere (3.59) formundaki $2n$ inci basamaktan diferensiyel denklemler için yukarıdaki eşitsizliklerden daha güçlü Lyapunov tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir. Onların sonuçları aşağıdaki gibidir:

3.19. Teorem [43, Teorem 2.4]: $n \in \mathbb{N}$ ve $q \in L^1(a, b, \mathbb{R})$ olsun. Eğer (3.59) diferensiyel denklemi $i = 0, 1, \dots, n-1$ ve $t \in (a, b)$ için $x(t) \not\equiv 0$ olmak üzere (3.60) sınır şartlarını sağlayan bir $x(t)$ çözümüne sahipse

$$\int_a^b |q(s)|^2 ds \geq \frac{48\pi^{4n-1}}{b-a^{4n-1}} \quad (3.66)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.20. Teorem [43, Teorem 2.5]: Her $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq 2$ ve $q \in L^1(a, b, \mathbb{R})$ olsun. Eğer (3.59) diferensiyel denklemi $i = 0, 1, \dots, n-1$ ve $t \in (a, b)$ için $x(t) \not\equiv 0$ olmak üzere (3.60) sınır şartlarını sağlayan bir $x(t)$ çözümüne sahipse $q^+(t) = \max\{0, q(t)\}$ olmak üzere

$$\int_a^b q^+(s) [s-a \quad b-s]^2 ds \geq \frac{3\pi^{2n-4}}{b-a^{2n-5}} \quad (3.67)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2. Birinci Basamaktan Sistemler İçin Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

Diferensiyel denklemlerin farklı sınıfları için Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerine geniş bir literatür bulunmasına rağmen lineer ve lineer olmayan sistemler için yapılan çalışmalar çok daha az sayıdadır.

2003 yılında Guseinov ve Kaymakçalan [11], $\alpha_1, \beta_1, \beta_2: t_0, \infty \rightarrow \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{R}$ için $\beta_1(t) > 0$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha_1(t)x(t) + \beta_1(t)u(t) \\ u'(t) = -\beta_2(t)x(t) - \alpha_1(t)u(t) \end{cases} \quad (3.68)$$

lineer Hamiltonian sistemine ilişkin Lyapunov tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir. Onların sonuçları aşağıdaki gibidir:

3.21. Teorem [11, Teorem 1.1]: Her $t \in \mathbb{R}$ için $\beta_1(t) > 0$ olsun. $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x(t)$ nin $x(a) = 0 = x(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları ve $t \in (a, b)$ için $x(t) \neq 0$ olmak üzere (3.68) sistemi reel bir $x(t), u(t)$ çözümüne sahip olsun. Böylece $\beta_2^+(t) = \max \beta_2(t), 0$ olmak üzere

$$\int_a^b |\alpha_1(s)| ds + \left(\int_a^b \beta_1(s) ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b \beta_2^+(s) ds \right)^{1/2} \geq 2 \quad (3.69)$$

Lyapunov eşitsizliği sağlanır.

2007 yılında Tiryaki, Ünal ve Çakmak [31], $t \in \mathbb{R}$, $\gamma > 1$, $\beta > 1$ reel sabitler, $t \in t_0, \infty$ için $\beta_1(t) > 0$ ve $\alpha_1, \beta_1, \beta_2: t_0, \infty \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{cases} x' t = \alpha_1 t x t + \beta_1 t |u t|^{\gamma-2} u t \\ u' t = -\beta_2 t |x t|^{\beta-2} x t - \alpha_1 t u t \end{cases} \quad (3.70)$$

lineer olmayan sistemi için aşağıdaki Lyapunov tipi eşitsizlikleri elde etmişlerdir:

3.22. Teorem [31, Teorem 1]: $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x t$ nin $x a = 0 = x b$ olacak şekilde ardışık sıfırları ve $t \in a, b$ için $x t \neq 0$ olmak üzere (3.70) sistemi reel bir

$x t, u t$ çözümüne sahip olsun. Böylece $M = |x c| = \max |x t| : a < t < b$ ve

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = 1$ olmak üzere

$$\int_a^b |\alpha_1 s| ds + M^{\frac{\beta}{\alpha}-1} \left(\int_a^b \beta_1 s ds \right)^{1/\gamma} \left(\int_a^b \beta_2^+ s ds \right)^{1/\alpha} \geq 2 \quad (3.71)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.23. Teorem [31, Teorem 3]: $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x t$ nin $x a = 0 = x b$ olacak şekilde ardışık sıfırları ve $t \in a, b$ için $x t \neq 0$ olmak üzere $\alpha_1 t \equiv 0$ iken (3.70)

sistemi reel bir $x t, u t$ çözümüne sahip olsun. Böylece $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = 1$ ve

$M = |x c| = \max |x t| : a < t < b$ olmak üzere

$$M^{\beta-\alpha} \left(\int_a^\tau \beta_1 s ds \right)^{\alpha-1} \left(\int_a^\tau \beta_2^+ s ds \right) \geq 1 \quad (3.72)$$

$$M^{\beta-\alpha} \left(\int_\tau^b \beta_1 s ds \right)^{\alpha-1} \left(\int_\tau^b \beta_2^+ s ds \right) \geq 1 \quad (3.73)$$

$$M^{\beta-\alpha} \left(\int_a^b \beta_1(s) ds \right)^{\alpha-1} \left(\int_a^b \beta_2^+(s) ds \right) \geq 2^\alpha \quad (3.74)$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $\tau \in [a, b]$ vardır.

2010 yılında Wang [34], (3.68) lineer Hamiltonian sistemi için Guseinov ve Zafer [12] in bulduğu kararlılık kriterini geliştirip elde ettiği yeni kararlılık kriteriyle yakından ilgili olan bir Lyapunov tipi eşitsizlik elde etmiştir. Wang'ın sonucu aşağıdaki gibidir:

3.24. Teorem [34, Teorem 3.1]: $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x(t)$ nin $x(a) = 0 = x(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları ve $t \in [a, b]$ için $x(t) \not\equiv 0$ olmak üzere (3.68) sistemi reel bir $x(t), u(t)$ çözümüne sahip olsun. Böylece $\beta_2^+(t) = \max \beta_2(t), 0$ olmak üzere

$$\left[\int_a^b \beta_1(s) ds \exp \left(-2 \int_a^s \alpha_1(\tau) d\tau \right) ds \right] \int_a^b \beta_2^+(s) ds \geq 4 \quad (3.75)$$

Lyapunov tipi eşitsizliği sağlanır.

2011 yılında Tang, Zhang ve Zhang [29], (3.70) lineer olmayan sistemi için aşağıdaki Lyapunov tipi eşitsizlikleri elde etmişlerdir:

3.25. Teorem [29, Teorem 2.1.]: $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x(t)$ nin $x(a) = 0 = x(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları ve $t \in [a, b]$ için $x(t) \not\equiv 0$ olmak üzere (3.70) sistemi reel bir $x(t), u(t)$ çözümüne sahip olsun. Böylece $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = 1$,

$$\zeta(t) := \left[\int_a^t \beta_1(\tau) \exp\left(\gamma \int_\tau^t \alpha_1(s) ds\right) d\tau \right]^{\beta/\gamma}, \quad \eta(t) := \left[\int_t^b \beta_1(\tau) \exp\left(-\gamma \int_t^\tau \alpha_1(s) ds\right) d\tau \right]^{\beta/\gamma},$$

ve $\beta_2^+(t) = \max \beta_2(t), 0$ olmak üzere

$$\int_a^b \frac{\zeta(s) \eta(s)}{\zeta(s) + \eta(s)} \beta_2^+(s) ds \geq 1 \quad (3.76)$$

eşitsizliği sağlanır.

2012 yılında Tiryaki, Çakmak ve Aktaş [33], (3.70) lineer olmayan sistemi için aşağıdaki Lyapunov tipi eşitsizlikleri elde etmişlerdir:

Her $t \in \mathbb{R}$ için h_a ve h_b fonksiyonlarını

$$h_a(t) := \int_a^t \beta_1(z) e^{-\gamma \int_t^z \alpha_1(v) dv} dz \quad \text{ve} \quad h_b(t) := \int_t^b \beta_1(z) e^{-\gamma \int_t^z \alpha_1(v) dv} dz \quad (3.77)$$

şeklinde tanımlayalım.

3.26. Teorem [33, Teorem 2.1]: $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x(t)$ nin $x(a) = 0 = x(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları ve $t \in (a, b)$ için $x(t) \neq 0$ olmak üzere (3.70) sistemi

$\beta = \alpha$ için reel bir $x(t), u(t)$ çözümüne sahip olsun. Böylece $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = 1$ ve

$\beta_2^+(t) = \max \beta_2(t), 0$ olmak üzere

$$\int_a^b \frac{\beta_2^+(s)}{h_a^{1-\alpha}(s) + h_b^{1-\alpha}(s)} ds \geq 1 \quad (3.78)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.27. Teorem [33, Teorem 2.2]: $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x(t)$ nin $x(a) = 0 = x(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları ve $t \in (a, b)$ için $x(t) \neq 0$ olmak üzere (3.70) sistemi $\beta = \alpha$ için reel bir $x(t), u(t)$ çözümüne sahip olsun. Böylece $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = 1$ ve $\beta_2^+(t) = \max \beta_2(t), 0$ olmak üzere

$$\int_a^b \beta_2^+(s) 2^{\alpha-2} \left(\frac{1}{h_a(s)} + \frac{1}{h_b(s)} \right)^{1-\alpha} ds \geq 1 \quad (3.79)$$

eşitsizliği sağlanır.

Dikkat edilirse Tang ve diğerleri [29] nin Teorem 3.25 deki sonucuyla Teorem 3.26 daki sonuç aynıdır; ancak Teorem 3.26 nın ispatı onların ispatından farklıdır.

$t > 0$ ve $1 < \alpha < 2$ için $h(t) = t^{\alpha-1}$ fonksiyonu konkav olduğundan $w = \frac{1}{h_a(t)}$ ve $v = \frac{1}{h_b(t)}$ olarak alındığında Jensen eşitsizliğinden $h\left(\frac{w+v}{2}\right) \geq \frac{1}{2} h(w) + h(v)$ sağlanır yani

$$2^{2-\alpha} \left[\frac{1}{h_a(t)} + \frac{1}{h_b(t)} \right]^{\alpha-1} \geq \frac{1}{h_a^{\alpha-1}(t)} + \frac{1}{h_b^{\alpha-1}(t)} \quad (3.80)$$

eşitsizliği sağlanır.

$\alpha > 2$ ise $h(t)$ fonksiyonu $t > 0$ için konveks olduğundan (3.80) eşitsizliği tersine döner yani

$$2^{2-\alpha} \left[\frac{1}{h_a t} + \frac{1}{h_b t} \right]^{\alpha-1} \leq \frac{1}{h_a^{\alpha-1} t} + \frac{1}{h_b^{\alpha-1} t} \quad (3.81)$$

eşitsizliği sağlanır.

$1 < \alpha < 2$ için (3.80) eşitsizliği gerçekleşeneğinden (3.79) eşitsizliği (3.78) eşitsizliğinden daha iyidir yani (3.79) eşitsizliği (3.78) eşitsizliğini gerektirir; ancak tersi her zaman doğru değildir. Benzer şekilde $\alpha > 2$ olduğunda (3.81) eşitsizliği gerçekleşeneğinden (3.78) eşitsizliği (3.79) eşitsizliğinden daha iyidir yani (3.78) eşitsizliği (3.79) eşitsizliğini gerektirir; ancak tersi her zaman doğru değildir.

3.3. İkinci Basamaktan Sistemler İçin Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

2006 yılında Napoli ve Pinasco [19], $\alpha > 1$ için $\phi_\alpha u = |u|^{\alpha-2} u$, her $t \in \mathbb{R}$ için $f_1 t$ ve $f_2 t$ reel değerli, pozitif ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere $1 < p_1, p_2 < +\infty$ şartını sağlayan p_1, p_2 ile negatif olmayan α_1, α_2 parametreleri

$$\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} = 1 \quad (3.82)$$

şartını sağladığında

$$\begin{cases} -\phi_{p_1} x_1' = f_1 t |x_1|^{\alpha_1-2} |x_2|^{\alpha_2} \\ -\phi_{p_2} x_2' = f_2 t |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2-2} \end{cases} \quad (3.83)$$

yarı-linear sistemi için bir Lyapunov tipi eşitsizlik elde etmişlerdir. Onların sonuçları aşağıdaki gibidir:

3.28. Teorem [19, Teorem 1.5]: $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin $x_1(a) = x_1(b) = 0 = x_2(a) = x_2(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları ve her $t \in (a, b)$ için $x_1(t) \neq 0$ ve $x_2(t) \neq 0$ olmak üzere (3.83) sistemi reel bir $x_1(t), x_2(t)$ çözümüne sahipse

$$\left(\int_a^b f_1(s) ds \right)^{\alpha_1/p_1} \left(\int_a^b f_2(s) ds \right)^{\alpha_2/p_2} \geq \frac{2^{\alpha_1+\alpha_2}}{b-a^{\alpha_1+\alpha_2-1}} \quad (3.84)$$

eşitsizliği sağlanır.

Dikkat edilirse $i = 1, 2$ için $\alpha_i = p_i$ ve $i \neq k$ için $\alpha_k = 0$ olarak alındığında (3.83)

sisteminin $-\phi_{p_i} x_i' = f_i(t) |x_i|^{\alpha_i-2} x_i$ yarı-linear denkleminde indirildiği görülür.

Ayrıca, Napoli ve Pinasco [19], $\alpha > 1$ için $\phi_\alpha u = |u|^{\alpha-2} u$, $x_1(a) = x_1(b) = 0 = x_2(a) = x_2(b)$, her $t \in (a, b)$ için $x_1(t), x_2(t) > 0$ ve $q(t) \in \mathbb{R}$ üzerinde reel değerli, pozitif ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere $1 < p_1, p_2 < +\infty$ şartını sağlayan p_1, p_2 ile negatif olmayan α_1, α_2 parametreleri (3.82) şartını sağladığında

$$\begin{cases} -\phi_{p_1} x_1' = \lambda_1 \alpha_1 q(t) |x_1|^{\alpha_1-2} |x_2|^{\alpha_2} \\ -\phi_{p_2} x_2' = \lambda_2 \alpha_2 q(t) |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2-2} \end{cases} \quad (3.85)$$

özdeğer problemi için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir:

3.29. Teorem [19, Teorem 1.4]: (3.85) probleminin her genelleştirilmiş λ_1, λ_2 özdeğeri için

$$\lambda_2 \geq h_{\lambda_1} := \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{2^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\lambda_1 \alpha_1^{\alpha_1/p_1} (b-a)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} \int_a^b q(s) ds} \right)^{\frac{p_2}{\alpha_2}} \quad (3.86)$$

olacak şekilde bir h_{λ_1} fonksiyonu vardır.

2010 yılında Çakmak ve Tiryaki [5], $\alpha > 1$ için $\phi_\alpha u = |u|^{\alpha-2} u$, her $t \in \mathbb{R}$ için $r_1(t) > 0$ ve $r_2(t) > 0$ olmak üzere $r_1(t)$, $r_2(t)$, $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ reel değerli, sürekli fonksiyonlar, $1 < p_1, p_2 < +\infty$ şartını sağlayan p_1, p_2 ile negatif olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ parametreleri $\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} = 1$ ve $\frac{\beta_1}{p_1} + \frac{\beta_2}{p_2} = 1$ şartını sağladığında

$$\begin{cases} -r_1(t) \phi_{p_1}(x_1')' = f_1(t) |x_1|^{\alpha_1-2} |x_2|^{\alpha_2} \\ -r_2(t) \phi_{p_2}(x_2')' = f_2(t) |x_1|^{\beta_1} |x_2|^{\beta_2-2} x_2 \end{cases} \quad (3.87)$$

şeklindeki lineer olmayan sistemler için Lyapunov tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir. Çakmak ve Tiryaki [5] nin, Napoli ve Pinasco [19] nun yukarıdaki teoremde söz edilen sonucunu genelleştirdikleri sonuçları aşağıdaki gibidir:

Her $t \in \mathbb{R}$ için $s(t) > 0$ olacak şekilde reel değerli, sürekli bir fonksiyon, $t \in (a, b)$,

$$\mu \in [1, +\infty), \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} = 1 \text{ olmak üzere}$$

$$M_{t,s,\mu} = \left(\int_a^t s x^{-\frac{\mu'}{\mu}} dx \right)^{1-\mu} + \left(\int_t^b s x^{-\frac{\mu'}{\mu}} dx \right)^{1-\mu} \quad (3.88)$$

integral operatörünü ele alalım.

3.30. Teorem [5, Teorem 1]: $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ nin $x_1(a) = x_1(b) = 0 = x_2(a) = x_2(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları ve her $t \in (a, b)$ için $x_1(t) \neq 0$ ve $x_2(t) \neq 0$, M_{c,r_1,p_1} ve M_{d,r_2,p_2} var olacak şekilde $|x_1(c)| = \max_{a < t < b} |x_1(t)|$, $|x_2(d)| = \max_{a < t < b} |x_2(t)|$ ve $i=1,2$ için $f_i^+(x) = \max\{0, f_i(x)\}$ olmak üzere (3.87) sistemi reel bir $x_1(t), x_2(t)$ çözümüne sahipse

$$\left(\int_a^b f_1^+(s) ds \right)^{\beta_1/p_1} \left(\int_a^b f_2^+(s) ds \right)^{\alpha_2/p_2} \geq M_{c,r_1,p_1}^{\beta_1/p_1} M_{d,r_2,p_2}^{\alpha_2/p_2} \quad (3.89)$$

eşitsizliği sağlanır.

Dikkat edilirse $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$ ve $r_1(t) = r_2(t) = 1$ alınırsa (3.87) sistemi (3.83) sistemine indirgenir. Ayrıca (3.87) sistemi için (3.83) sisteminde $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ fonksiyonları üzerinde var olan pozitiflik şartı kaldırılmıştır. Bu yönleriyle (3.87) sistemi (3.83) sisteminin hem genellemesi hem de geliştirilmiştir.

Yine (3.87) sisteminde $\alpha_1 = \beta_2 = p_1 = p_2 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta_1 = 0$, $r_1(t) = r_2(t) = r(t)$ ve $f_1(t) = f_2(t) = q(t)$ olarak alındığında sistemin (3.12) yarı-lineer denklemine indirgendiği görülmektedir.

2010 yılında Çakmak ve Tiryaki [6], $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$ için $\phi_\alpha u = |u|^{\alpha-2}u$, her $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$ için f_k fonksiyonları reel değerli, sürekli fonksiyonlar olmak üzere $1 < p_k < +\infty$ şartını sağlayan p_k ile negatif olmayan α_k parametreleri

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{p_k} = 1 \quad (3.90)$$

şartını sağladığında, (3.83) sistemini

$$\begin{cases} -\phi_{p_1} x_1' = f_1(t) |x_1|^{\alpha_1-2} x_1 |x_2|^{\alpha_2} \dots |x_n|^{\alpha_n} \\ -\phi_{p_2} x_2' = f_2(t) |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2-2} x_2 \dots |x_n|^{\alpha_n} \\ \dots \\ -\phi_{p_n} x_n' = f_n(t) |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \dots |x_n|^{\alpha_n-2} x_n \end{cases} \quad (3.91)$$

sistemine geliştirmiş ve genelleştirmişlerdir. $k = 1, 2, \dots, n$ için (3.91) sistemi aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$-\phi_{p_k} x_k' = f_k(t) \phi_{\alpha_k} x_k \prod_{i=1, i \neq k}^n |x_i|^{\alpha_i} \quad (3.91)$$

Onların elde ettikleri sonuçlar aşağıdaki gibidir:

3.31. Teorem [6, Teorem 1]: (3.91) sistemi $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$ için $x_k(t)$ nin $x_k(a) = 0 = x_k(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları ve $t \in (a, b)$ için $x_k(t) \neq 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı, reel bir

$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ çözümüne sahipse $|x_k - c_k| = \max_{a < t < b} |x_k(t)|$ ve $k = 1, 2, \dots, n$ için

$f_k^+(t) = \max\{0, f_k(t)\}$ olmak üzere

$$\prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k^+(s) ds \right)^{\alpha_k / p_k} \geq \prod_{k=1}^n \left[\frac{1}{c_k - a} \frac{1}{p_k - 1} + \frac{1}{b - c_k} \frac{1}{p_k - 1} \right]^{\alpha_k / p_k} \quad (3.92)$$

eşitsizliği sağlanır.

Dikkat edilirse (3.91) sistemi $r_1(t) = r_2(t) = 1$ için (3.87) sisteminin n boyuta bir genellemesidir. Yine $i = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha_i = p_i$ ve $i \neq k$ için $\alpha_k = 0$ olarak alındığında

(3.91) sisteminin $-\phi_{p_i} x_i' = f_i(t) |x_i|^{\alpha_i - 2} x_i$ yarı-lineer denklemine indirgendiği görülür.

2011 yılında Yang, Kim ve Lo [40], (3.91) sistemi için Çakmak ve Tiryaki [6] nin bulduğu Lyapunov tipi eşitsizlikle aynı eşitsizliği elde etmiştir.

4. SİSTEMLERE İLİŞKİN SONUÇLAR

Bu bölümde Tang ve He [30] ve Aktaş, Çakmak ve Tiriyaki [1] nin ikinci basamaktan sistemler için son zamanlarda yapmış oldukları çalışmalara yer verilecektir.

$\alpha > 1$ için $\phi_\alpha u = |u|^{\alpha-2}u$ olmak üzere, $n \in \mathbb{N}$ iken $i = 1, 2, \dots, n$ ve her $t \in \mathbb{R}$ için

(H1) $i = 1, 2$ için $r_i(t)$ ve $f_i(t)$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli, sürekli fonksiyonlar, $r_i(t) > 0$ olsun ve $1 < p_i < \infty$, $\alpha_i, \beta_i > 0$ olmak üzere

$\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} = 1$ ve $\frac{\beta_1}{p_1} + \frac{\beta_2}{p_2} = 1$ eşitlikleri sağlansın.

(H2) $i = 1, 2, \dots, n$ için $r_i(t)$ ve $f_i(t)$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli,

sürekli fonksiyonlar, $r_i(t) > 0$ olsun ve $1 < p_i < \infty$, $\alpha_i > 0$ olmak üzere $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{p_i} = 1$

eşitliği sağlansın.

hipotezleri altında

$$\begin{cases} -r_1(t) \phi_{p_1}(x_1')' = f_1(t) |x_1|^{\alpha_1-2} x_1 |x_2|^{\alpha_2} \\ -r_2(t) \phi_{p_2}(x_2')' = f_2(t) |x_1|^{\beta_1} |x_2|^{\beta_2-2} x_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

sistemi ve

$$\left\{ \begin{array}{l} -r_1(t) \phi_{p_1} x_1' = f_1(t) |x_1|^{\alpha_1-2} |x_2|^{\alpha_2} \dots |x_n|^{\alpha_n} \\ -r_2(t) \phi_{p_2} x_2' = f_2(t) |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2-2} |x_3|^{\alpha_3} \dots |x_n|^{\alpha_n} \\ \dots \\ -r_n(t) \phi_{p_n} x_n' = f_n(t) |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \dots |x_n|^{\alpha_n-2} |x_n|^{\alpha_n} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

veya kısaca $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$-r_i(t) \phi_{p_i} x_i' = f_i(t) \phi_{\alpha_i} x_i \prod_{k=1, k \neq i}^n |x_k|^{\alpha_k} \quad (4.2)$$

sistemi için Tang ve He [30] nin elde ettiği Lyapunov tipi eşitsizlikleri ispatları ile verelim.

$i = 1, 2, \dots, n$ için ζ_i ve η_i fonksiyonlarını

$$\zeta_i(t) = \left(\int_a^t [r_i(s)]^{1/p_i} ds \right)^{p_i-1} \text{ ve } \eta_i(t) = \left(\int_t^b [r_i(s)]^{1/p_i} ds \right)^{p_i-1}, \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlayalım.

4.1. Teorem [30, Teorem 2.1]: (H1) hipotezi sağlansın. (4.1) sistemi her $t \in (a, b)$ için $x_1(t) \neq 0$ ve $x_2(t) \neq 0$ olmak üzere

$$x_1(a) = x_1(b) = 0 = x_2(a) = x_2(b) \quad (4.4)$$

sınır şartlarını sağlayan bir $x_1(t), x_2(t)$ çözümüne sahipse

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \frac{\zeta_1 s \eta_1 s}{\zeta_1 s + \eta_1 s} f_1^+ s ds \quad \frac{\alpha_1 \beta_1}{p_1^2} \int_a^b \frac{\zeta_1 s \eta_1 s}{\zeta_1 s + \eta_1 s} f_2^+ s ds \quad \frac{\beta_1 \alpha_2}{p_1 p_2} \\
& \times \int_a^b \frac{\zeta_2 s \eta_2 s}{\zeta_2 s + \eta_2 s} f_1^+ s ds \quad \frac{\beta_1 \alpha_2}{p_1 p_2} \int_a^b \frac{\zeta_2 s \eta_2 s}{\zeta_2 s + \eta_2 s} f_2^+ s ds \quad \frac{\alpha_2 \beta_2}{p_2^2} > 1
\end{aligned} \tag{4.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.1) ve (4.4) den

$$\int_a^b r_1 s \left| x_1' s \right|^{p_1} ds = \int_a^b f_1 s \left| x_1 s \right|^{\alpha_1} \left| x_2 s \right|^{\alpha_2} ds \tag{4.6}$$

ve

$$\int_a^b r_2 s \left| x_2' s \right|^{p_2} ds = \int_a^b f_2 s \left| x_1 s \right|^{\beta_1} \left| x_2 s \right|^{\beta_2} ds \tag{4.7}$$

elde edilir.

(4.3), (4.4) ve Hölder eşitsizliğinden $a \leq t \leq b$ için

$$\begin{aligned}
\left| x_1 t \right|^{p_1} &= \left| \int_a^t x_1' s ds \right|^{p_1} \\
&\leq \left(\int_a^t \left[r_1 s \right]^{1/p_1} ds \right)^{p_1-1} \int_a^t r_1 s \left| x_1' s \right|^{p_1} ds \\
&= \zeta_1 t \int_a^t r_1 s \left| x_1' s \right|^{p_1} ds
\end{aligned} \tag{4.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
|x_1(t)|^{p_1} &= \left| \int_t^b x_1'(s) ds \right|^{p_1} \\
&\leq \left(\int_t^b [r_1(s)]^{1/p_1} ds \right)^{p_1-1} \int_t^b r_1(s) |x_1'(s)|^{p_1} ds \\
&= \eta_1(t) \int_t^b r_1(s) |x_1'(s)|^{p_1} ds
\end{aligned} \tag{4.9}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

(4.8) ve (4.9) dan $a \leq t \leq b$ için

$$|x_1(t)|^{p_1} \leq \frac{\zeta_1(t) \eta_1(t)}{\zeta_1(t) + \eta_1(t)} \int_a^b r_1(s) |x_1'(s)|^{p_1} ds \tag{4.10}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $a < t < b$ için

$$|x_1(t)|^{p_1} < \frac{\zeta_1(t) \eta_1(t)}{\zeta_1(t) + \eta_1(t)} \int_a^b r_1(s) |x_1'(s)|^{p_1} ds \tag{4.11}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

Gerçekten (4.11) doğru değil ise (4.10) dan

$$|x_1(t_*)|^{p_1} = \frac{\zeta_1(t_*) \eta_1(t_*)}{\zeta_1(t_*) + \eta_1(t_*)} \int_a^b r_1(s) |x_1'(s)|^{p_1} ds \tag{4.12}$$

eşitliği sağlanacak şekilde $t_* \in [a, b]$ vardır. Böylece (4.8), (4.9) ve (4.12) den

$$\left| x_1 - t_* \right|^{p_1} = \zeta_1 - t_* \int_a^{t_*} r_1 - s \left| x_1' - s \right|^{p_1} ds \quad (4.13)$$

ve

$$\left| x_1 - t_* \right|^{p_1} = \eta_1 - t_* \int_{t_*}^b r_1 - s \left| x_1' - s \right|^{p_1} ds \quad (4.14)$$

eşitlikleri elde edilir.

(4.8) ve (4.13) den elde edilen

$$\left| \int_a^{t_*} x_1' - s ds \right|^{p_1} = \left(\int_a^{t_*} [r_1 - s]^{1/p_1 - 1} ds \right)^{p_1 - 1} \int_a^{t_*} r_1 - s \left| x_1' - s \right|^{p_1} ds$$

eşitliği ve Hölder eşitsizliğinden $a \leq \tau \leq t_*$ için

$$r_1 - \tau \left| x_1' - \tau \right|^{p_1} = c_1 [r_1 - \tau]^{1/p_1 - 1} \quad (4.15)$$

eşitliği sağlanacak şekilde c_1 sabiti vardır.

Benzer şekilde (4.9), (4.14) ve Hölder eşitsizliğinden $t_* \leq \tau \leq b$ için

$$r_1 - \tau \left| x_1' - \tau \right|^{p_1} = c_2 [r_1 - \tau]^{1/p_1 - 1} \quad (4.16)$$

eşitliği sağlanacak şekilde c_2 sabiti vardır.

$x_1' \tau$, $\tau = t_*$ noktasında sürekli olduğundan (4.15) ve (4.16) eşitlikleri $c_1 = c_2$ olduğunu gösterir. Eğer $c_1 = c_2 = 0$ ise $\tau \in a, b$ için $x_1' \tau = 0$ olur. Böylece (4.8) den $t \in a, b$ için $x_1 t = 0$ olur. Bu durum (4.4) ile çelişir. Eğer $c_1 = c_2 \neq 0$ ise $\tau \in a, b$ için $|x_1' \tau| > 0$ olur. Böylece (4.8) den $x_1 b \neq 0$ olur. Bu durum $x_1 b = 0$ olması gerçeğiyle çelişir. Böylece (4.11) gerçekleşir.

Şimdi (4.4), (4.6), (4.11), (H1) ve Hölder eşitsizliğinden

$$M_{11} = \int_a^b \frac{\zeta_1 s \eta_1 s}{\zeta_1 s + \eta_1 s} f_1^+ s ds \text{ ve } M_{12} = \int_a^b \frac{\zeta_1 s \eta_1 s}{\zeta_1 s + \eta_1 s} f_2^+ s ds \quad (4.17)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1^+ s |x_1 s|^{p_1} ds &< \int_a^b \frac{\zeta_1 s \eta_1 s}{\zeta_1 s + \eta_1 s} f_1^+ s ds \int_a^b r_1 s |x_1' s|^{p_1} ds \\ &= M_{11} \int_a^b f_1 s |x_1 s|^{\alpha_1} |x_2 s|^{\alpha_2} ds \\ &\leq M_{11} \int_a^b f_1^+ s |x_1 s|^{\alpha_1} |x_2 s|^{\alpha_2} ds \\ &\leq M_{11} \left(\int_a^b f_1^+ s |x_1 s|^{p_1} ds \right)^{\alpha_1/p_1} \left(\int_a^b f_1^+ s |x_2 s|^{p_2} ds \right)^{\alpha_2/p_2} \end{aligned} \quad (4.18)$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_2^+ s |x_1 s|^{p_1} ds &< \int_a^b \frac{\zeta_1 s \eta_1 s}{\zeta_1 s + \eta_1 s} f_2^+ s ds \int_a^b r_1 s |x_1' s|^{p_1} ds \\
&= M_{12} \int_a^b f_1 s |x_1 s|^{\alpha_1} |x_2 s|^{\alpha_2} ds \\
&\leq M_{12} \int_a^b f_1^+ s |x_1 s|^{\alpha_1} |x_2 s|^{\alpha_2} ds \\
&\leq M_{12} \left(\int_a^b f_1^+ s |x_1 s|^{p_1} ds \right)^{\alpha_1/p_1} \left(\int_a^b f_1^+ s |x_2 s|^{p_2} ds \right)^{\alpha_2/p_2} \quad (4.19)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

(4.11) in ispatına benzer olarak (4.3) ve (4.4) den $a < t < b$ için

$$|x_2 t|^{p_2} < \frac{\zeta_2 t \eta_2 t}{\zeta_2 t + \eta_2 t} \int_a^b r_2 s |x_2' s|^{p_2} ds \quad (4.20)$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.4), (4.7), (4.20), (H1) ve Hölder eşitsizliğinden

$$M_{21} = \int_a^b \frac{\zeta_2 s \eta_2 s}{\zeta_2 s + \eta_2 s} f_1^+ s ds \text{ ve } M_{22} = \int_a^b \frac{\zeta_2 s \eta_2 s}{\zeta_2 s + \eta_2 s} f_2^+ s ds \quad (4.21)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_1^+ s |x_2 s|^{p_2} ds &< \int_a^b \frac{\zeta_2 s \eta_2 s}{\zeta_2 s + \eta_2 s} f_1^+ s ds \int_a^b r_2 s |x_2' s|^{p_2} ds \\
&= M_{21} \int_a^b f_2 s |x_1 s|^{\beta_1} |x_2 s|^{\beta_2} ds \\
&\leq M_{21} \int_a^b f_2^+ s |x_1 s|^{\beta_1} |x_2 s|^{\beta_2} ds
\end{aligned}$$

$$\leq M_{21} \left(\int_a^b f_2^+ |x_1 - s|^{p_1} ds \right)^{\beta_1/p_1} \left(\int_a^b f_2^+ |x_2 - s|^{p_2} ds \right)^{\beta_2/p_2} \quad (4.22)$$

ve

$$\begin{aligned} \int_a^b f_2^+ |x_2 - s|^{p_2} ds &< \int_a^b \frac{\zeta_2 - s}{\zeta_2} \frac{\eta_2 - s}{\eta_2} f_2^+ |x_2 - s|^{p_2} ds \int_a^b r_2 |x_2' - s|^{p_2} ds \\ &= M_{22} \int_a^b f_2^+ |x_1 - s|^{\beta_1} |x_2 - s|^{\beta_2} ds \\ &\leq M_{22} \int_a^b f_2^+ |x_1 - s|^{\beta_1} |x_2 - s|^{\beta_2} ds \\ &\leq M_{22} \left(\int_a^b f_2^+ |x_1 - s|^{p_1} ds \right)^{\beta_1/p_1} \left(\int_a^b f_2^+ |x_2 - s|^{p_2} ds \right)^{\beta_2/p_2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Şimdi

$$\int_a^b f_1^+ |x_1 - s|^{p_1} ds > 0 \quad (4.24)$$

olduğunu ispatlayalım.

Eğer (4.24) doğru değilse

$$\int_a^b f_1^+ |x_1 - s|^{p_1} ds = 0 \quad (4.25)$$

olur.

(4.6) ve (4.25) den

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^b r_1(s) |x_1'(s)|^{p_1} ds &= \int_a^b f_1(s) |x_1(s)|^{\alpha_1} |x_2(s)|^{\alpha_2} ds \\ &\leq \int_a^b f_1^+(s) |x_1(s)|^{\alpha_1} |x_2(s)|^{\alpha_2} ds = 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

(H1) den $a \leq t \leq b$ için

$$x_1'(t) \equiv 0 \quad (4.26)$$

olur. (4.8) ve (4.26) yı birleştirdiğimizde $a \leq t \leq b$ için $x_1(t) \equiv 0$ sonucuna ulaşırız.

Bu durum (4.4) ile çelişir. Böylece (4.24) gerçekleşir. Benzer şekilde

$$\int_a^b f_2^+(s) |x_1(s)|^{p_1} ds > 0, \quad \int_a^b f_1^+(s) |x_2(s)|^{p_2} ds > 0, \quad \int_a^b f_2^+(s) |x_2(s)|^{p_2} ds > 0 \quad (4.27)$$

eşitsizliklerinin sağlandığı görülür.

(4.18), (4.19), (4.22), (4.23), (4.24), (4.27) ve (H1) den

$$M_{11}^{\alpha_1 \beta_1 / p_1^2} M_{12}^{\beta_1 \alpha_2 / p_1 p_2} M_{21}^{\beta_1 \alpha_2 / p_1 p_2} M_{22}^{\alpha_2 \beta_2 / p_2^2} > 1 \quad (4.28)$$

eşitsizliği sağlanır.

(4.17), (4.21) ve (4.28) den (4.5) sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

$\alpha_1 = \beta_2 = p_1 = p_2 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta_1 = 0$, $r_1(t) = r_2(t) = r(t)$ ve $f_1(t) = f_2(t) = q(t)$ olarak alındığında (4.1) sistemi

$$r(t)|x'|^{\alpha-2}x' + q(t)|x|^{\alpha-2}x = 0 \quad (4.29)$$

yarı-linear denkleme indirgenir. (4.18) ve (4.24) den (4.29) denklemi için aşağıdaki Lyapunov-tipi eşitsizlik üretilir:

4.2. Teorem [30, Teorem 2.2]: $\alpha > 1$ ve $r(t) > 0$ olsun. $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$ (4.29) denkleminin aşikar olmayan çözümünün ardışık sıfırları ise $q^+(t) = \max\{0, q(t)\}$ olmak üzere

$$\int_a^b \frac{\left(\int_a^s [r(\tau)]^{1/\alpha-1} d\tau \right)^{\alpha-1} \left(\int_s^b [r(\tau)]^{1/\alpha-1} d\tau \right)^{\alpha-1}}{\left(\int_a^s [r(\tau)]^{1/\alpha-1} d\tau \right)^{\alpha-1} + \left(\int_s^b [r(\tau)]^{1/\alpha-1} d\tau \right)^{\alpha-1}} q^+(s) ds > 1 \quad (4.30)$$

eşitsizliği sağlanır.

$r(t) = 1$ ve $\alpha = 2$ için (4.29) denklemi $x'' + q(t)x = 0$ denkleme dönüşür ve (4.30) eşitsizliği de bilinen en iyi Lyapunov tipi eşitsizlik olan

$$\int_a^b \frac{s-a}{b-s} q^+(s) ds > b-a \quad (4.31)$$

eşitsizliğine indirgenir.

4.3. Teorem [30, Teorem 3.1]: (H2) hipotezi sağlansın. (4.2) sistemi her $t \in [a, b]$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i(t) \neq 0$ olmak üzere

$$x_i(a) = x_i(b) = 0 \quad (4.32)$$

sınır şartlarını sağlayan bir $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ çözümüne sahipse

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \int_a^b \frac{\zeta_i(s) \eta_j(s)}{\zeta_i(s) + \eta_j(s)} f_j^+(s) ds^{\frac{\alpha_i \alpha_j}{p_i p_j}} > 1 \quad (4.33)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.2), (H2) ve (4.32) den $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\int_a^b r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds = \int_a^b f_i(s) \prod_{k=1}^n |x_k(s)|^{\alpha_k} ds \quad (4.34)$$

elde edilir.

(4.3), (4.32) ve Hölder eşitsizliğinden $a \leq t \leq b$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} |x_i(t)|^{p_i} &= \left| \int_a^t x_i'(s) ds \right|^{p_i} \\ &\leq \left(\int_a^t [r_i(s)]^{1/p_i} ds \right)^{p_i-1} \int_a^t r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds \\ &= \zeta_i(t) \int_a^t r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds \end{aligned} \quad (4.35)$$

elde edilir.

Benzer şekilde (4.3), (4.32) ve Hölder eşitsizliğinden $a \leq t \leq b$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\begin{aligned}
 |x_i(t)|^{p_i} &= \left| \int_t^b x_i'(s) ds \right|^{p_i} \\
 &\leq \left(\int_t^b [r_i(s)]^{1/p_i} ds \right)^{p_i-1} \int_t^b r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds \\
 &= \eta_i(t) \int_t^b r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edilir.

(4.35) ve (4.36) dan $a \leq t \leq b$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$|x_i(t)|^{p_i} \leq \frac{\zeta_i(t) \eta_i(t)}{\zeta_i(t) + \eta_i(t)} \int_a^b r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds \tag{4.37}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $a < t < b$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$|x_i(t)|^{p_i} < \frac{\zeta_i(t) \eta_i(t)}{\zeta_i(t) + \eta_i(t)} \int_a^b r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds \tag{4.38}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

Gerçekten (4.38) doğru değil ise (4.37) den

$$\left| x_{i_0} t_* \right|^{p_0} = \frac{\zeta_{i_0} t_* \eta_{i_0} t_*}{\zeta_{i_0} t_* + \eta_{i_0} t_*} \int_a^b r_{i_0} s \left| x_{i_0}' s \right|^{p_0} ds \quad (4.39)$$

eşitliği sağlanacak şekilde $t_* \in [a, b]$ vardır.

Böylece (4.35), (4.36) ve (4.39) dan

$$\left| x_{i_0} t_* \right|^{p_0} = \zeta_{i_0} t_* \int_a^{t_*} r_{i_0} s \left| x_{i_0}' s \right|^{p_0} ds \quad (4.40)$$

ve

$$\left| x_{i_0} t_* \right|^{p_0} = \eta_{i_0} t_* \int_{t_*}^b r_{i_0} s \left| x_{i_0}' s \right|^{p_0} ds \quad (4.41)$$

eşitlikleri elde edilir.

(4.35) ve (4.40) dan elde edilen

$$\left| \int_a^{t_*} x_{i_0}' s ds \right|^{p_0} = \left(\int_a^{t_*} [r_{i_0} s]^{1/p_0} ds \right)^{p_0-1} \int_a^{t_*} r_{i_0} s \left| x_{i_0}' s \right|^{p_0} ds$$

eşitliği ve Hölder eşitsizliğinden $a \leq \tau \leq t_*$ için

$$r_{i_0} \tau \left| u_{i_0}' \tau \right|^{p_0} = c_1 [r_{i_0} \tau]^{1/p_0} \quad (4.42)$$

eşitliği sağlanacak şekilde c_1 sabiti vardır.

Benzer şekilde (4.36), (4.41) ve Hölder eşitsizliğinden $t_* \leq \tau \leq b$ için

$$r_{i_0} \tau \left| x_{i_0}' \tau \right|^{p_0} = c_2 \left[r_{i_0} \tau \right]^{1/p_0} \quad (4.43)$$

eşitliği sağlanacak şekilde c_2 sabiti vardır

$x_{i_0}' \tau$, $\tau = t_*$ noktasında sürekli olduğundan (4.42) ve (4.43) eşitlikleri $c_1 = c_2$ olduğunu gösterir. Eğer $c_1 = c_2 = 0$ ise $\tau \in a, b$ için $x_{i_0}' \tau = 0$ olur. Böylece (4.35) den $t \in a, b$ için $x_{i_0} t = 0$ olur. Bu durum (4.32) ile çelişir. Eğer $c_1 = c_2 \neq 0$ ise $\tau \in a, b$ için $\left| x_{i_0}' \tau \right| > 0$ olur. Böylece (4.35) den $x_{i_0} b \neq 0$ olur. Bu durum $x_{i_0} b = 0$ olması gerçeğiyle çelişir. Böylece (4.38) gerçekleşir.

Şimdi (4.32), (4.34), (4.35), (4.38), (H2) ve Hölder eşitsizliğinden $i, j = 1, 2, \dots, n$ için

$$M_{ij} = \int_a^b \frac{\zeta_i s \eta_i s}{\zeta_i s + \eta_i s} f_j^+ s ds \quad (4.44)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_a^b f_j^+ s \left| x_i s \right|^{p_i} ds &< \int_a^b \frac{\zeta_i s \eta_i s}{\zeta_i s + \eta_i s} f_j^+ s ds \int_a^b r_i s \left| x_i' s \right|^{p_i} ds \\ &= M_{ij} \int_a^b f_i^+ s \prod_{k=1}^n \left| x_k s \right|^{\alpha_k} ds \\ &\leq M_{ij} \int_a^b f_i s \prod_{k=1}^n \left| x_k s \right|^{\alpha_k} ds \\ &\leq M_{ij} \prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_i^+ s \left| x_k s \right|^{p_k} ds \right)^{\alpha_k / p_k} \end{aligned} \quad (4.45)$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $i, j = 1, 2, \dots, n$ için

$$\int_a^b f_i^+ (s) |x_j(s)|^{p_j} ds > 0 \quad (4.46)$$

olduğunu ispatlayalım.

Eğer (4.46) doğru değilse

$$\int_a^b f_{i_0}^+ (s) |x_{j_0}(s)|^{p_{j_0}} ds = 0 \quad (4.47)$$

olacak şekilde $i_0, j_0 \in 1, 2, \dots, n$ vardır.

(4.34) ve (4.47) den

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^b r_{i_0}(s) |x'_{i_0}(s)|^{p_{i_0}} ds &= \int_a^b f_{i_0}(s) \prod_{k=1}^n |x_k(s)|^{\alpha_k} ds \\ &\leq \int_a^b f_{i_0}^+(s) \prod_{k=1}^n |x_k(s)|^{\alpha_k} ds = 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

$r_{i_0}(t) > 0$ olduğundan $a \leq t \leq b$ için

$$x'_{i_0}(t) \equiv 0 \quad (4.48)$$

olur. (4.35) ve (4.48) i birleştirdiğimizde $a \leq t \leq b$ için $x_{i_0} t \equiv 0$ sonucuna ulaşırız. Bu durum (4.32) ile çelişir. Böylece (4.46) gerçekenir. (4.45), (4.46) ve (H3) den

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n M_{ij}^{\frac{\alpha_i \alpha_j}{p_i p_j}} > 1 \quad (4.49)$$

olduğu görölür.

(4.44) ve (4.49) dan (4.33) sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Özel olarak $n=1$ için Teorem 4.3 Teorem 4.2 ye indirgenir. Dolayısıyla Teorem 4.3 var olan tüm Lyapunov-tipi eşitsizlikleri genelleştirir ve geliştirir.

şimdi $\alpha > 1$ için $\phi_\alpha u = |u|^{\alpha-2} u$, $i=1,2,...,n$ için $x_i a = x_i b = 0$, her $t \in a, b$ için $x_i t > 0$ ve $q t$, $\mathbb{R}$ üzerinde reel değerli, pozitif ve süreklı bir fonksiyon olmak üzere $1 < p_i < +\infty$ şartını sağlayan p_i ile negatif olmayan α_i parametreleri

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{p_i} = 1 \quad (4.50)$$

şartını sağladığında

$$-\phi_{p_i} x_i' = \lambda_i \alpha_i q t \phi_{\alpha_i} x_i \prod_{k=1, k \neq i}^n |x_k|^{\alpha_k} \quad (4.51)$$

özdeğer problemi için aşağıdaki teoremi verelim:

4.4. Teorem [30, Teorem 4.1]:

$$h(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = \frac{1}{\alpha_n} \left(\prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j \alpha_j^{\alpha_j/p_j} \prod_{i=1}^n \left(\int_a^b \frac{[s-a]^{p_i-1} [b-s]^{p_i-1}}{s-a + b-s} q(s) ds \right)^{\frac{\alpha_i}{p_i}} \right)^{-\frac{p_n}{\alpha_n}} \quad (4.52)$$

olmak üzere (4.51) probleminin her genelleştirilmiş $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğeri için $\lambda_n > h(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ olacak şekilde bir $h(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ fonksiyonu vardır.

İspat: $i = 1, 2, \dots, n$ ve her $t \in \mathbb{R}$ için $r_i(t) = 1$ ve $f_i(t) = \lambda_i \alpha_i q(t) > 1$ olduğunda (4.2) sistemi (4.51) özdeğer problemine indirgenir. Böylece (4.3) ve (4.33) den

$$\begin{aligned} 1 &< \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \int_a^b \frac{\zeta_i(s) \eta_i(s)}{\zeta_i(s) + \eta_i(s)} f_j^+(s) ds \\ &= \prod_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j^{\alpha_j/p_j} \prod_{i=1}^n \left(\int_a^b \frac{\zeta_i(s) \eta_i(s)}{\zeta_i(s) + \eta_i(s)} q(s) ds \right)^{\frac{\alpha_i}{p_i}} \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j \alpha_j^{\alpha_j/p_j} \prod_{i=1}^n \left(\int_a^b \frac{[s-a]^{p_i-1} [b-s]^{p_i-1}}{s-a + b-s} q(s) ds \right)^{\frac{\alpha_i}{p_i}} \end{aligned} \quad (4.53)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\lambda_n > \frac{1}{\alpha_n} \left(\prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j \alpha_j^{\alpha_j/p_j} \prod_{i=1}^n \left(\int_a^b \frac{[s-a]^{p_i-1} [b-s]^{p_i-1}}{s-a + b-s} q(s) ds \right)^{\frac{\alpha_i}{p_i}} \right)^{-\frac{p_n}{\alpha_n}} \quad (4.54)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi Aktaş, Çakmak ve Tiryaki [1] nin (4.1) ve (4.2) sistemleri için elde ettikleri Lyapunov-tipi eşitsizlikler incelenecektir. Burada $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\zeta_i(t) = \int_a^t [r_i(s)]^{1/1-p_i} ds \text{ ve } \eta_i(t) = \int_t^b [r_i(s)]^{1/1-p_i} ds \quad (4.55)$$

olsun.

4.5. Teorem [1, Teorem 2.1]: (H1) hipotezi sağlansın. (4.1) sistemi her $t \in [a, b]$ için $x_1(t) \not\equiv 0$ ve $x_2(t) \not\equiv 0$ olmak üzere (4.4) sınır şartlarını sağlayan bir $x_1(t), x_2(t)$ çözümüne sahipse

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b 2^{p_1-2} \left(\frac{\zeta_1(s) \eta_1(s)}{\zeta_1(s) + \eta_1(s)} \right)^{p_1-1} f_1^+(s) ds \right)^{\frac{\alpha_1 \beta_1}{p_1^2}} \left(\int_a^b 2^{p_1-2} \left(\frac{\zeta_1(s) \eta_1(s)}{\zeta_1(s) + \eta_1(s)} \right)^{p_1-1} f_2^+(s) ds \right)^{\frac{\beta_1 \alpha_2}{p_1 p_2}} \\ & \times \left(\int_a^b 2^{p_2-2} \left(\frac{\zeta_2(s) \eta_2(s)}{\zeta_2(s) + \eta_2(s)} \right)^{p_2-1} f_1^+(s) ds \right)^{\frac{\beta_1 \alpha_2}{p_1 p_2}} \left(\int_a^b 2^{p_2-2} \left(\frac{\zeta_2(s) \eta_2(s)}{\zeta_2(s) + \eta_2(s)} \right)^{p_2-1} f_2^+(s) ds \right)^{\frac{\alpha_2 \beta_2}{p_2^2}} > 1 \end{aligned} \quad (4.56)$$

eşitsizliği sağlanır.

4.6. Teorem [1, Teorem 2.2]: (H2) hipotezi sağlansın. (4.2) sistemi her $t \in [a, b]$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i(t) \not\equiv 0$ olmak üzere (4.32) sınır şartlarını sağlayan bir $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ çözümüne sahipse

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \left(\int_a^b 2^{p_i-2} \left(\frac{\zeta_i(s) \eta_i(s)}{\zeta_i(s) + \eta_i(s)} \right)^{p_i-1} f_j^+(s) ds \right)^{\frac{\alpha_i \alpha_j}{p_i p_j}} > 1 \quad (4.57)$$

eşitsizliği sağlanır.

$t > 0$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $1 < p_i < 2$ iken $z(t) = t^{p_i-1}$ fonksiyonu konkav olduğundan

$w = \frac{1}{\zeta_i t}$ ve $v = \frac{1}{\eta_i t}$ olarak alındığında Jensen eşitsizliğinden

$$z\left(\frac{w+v}{2}\right) \geq \frac{1}{2} z(w) + \frac{1}{2} z(v) \text{ sağlanır yani}$$

$$\frac{\left[\frac{\zeta_i t}{\zeta_i^{p_i-1} t + \eta_i^{p_i-1} t}\right]^{p_i-1}}{\left[\frac{\zeta_i t}{\zeta_i^{p_i-1} t + \eta_i^{p_i-1} t}\right]^{p_i-1}} \geq 2^{p_i-2} \left[\frac{\zeta_i t}{\zeta_i^{p_i-1} t + \eta_i^{p_i-1} t}\right]^{p_i-1} \quad (4.58)$$

eşitsizliği sağlanır.

$i = 1, 2, \dots, n$ için $p_i > 2$ ise $z(t)$ fonksiyonu $t > 0$ için konveks olduğundan (4.58)

eşitsizliği tersine döner yani

$$\frac{\left[\frac{\zeta_i t}{\zeta_i^{p_i-1} t + \eta_i^{p_i-1} t}\right]^{p_i-1}}{\left[\frac{\zeta_i t}{\zeta_i^{p_i-1} t + \eta_i^{p_i-1} t}\right]^{p_i-1}} \leq 2^{p_i-2} \left[\frac{\zeta_i t}{\zeta_i^{p_i-1} t + \eta_i^{p_i-1} t}\right]^{p_i-1} \quad (4.59)$$

eşitsizliği sağlanır.

$i = 1, 2, \dots, n$ için $1 < p_i < 2$ olsun. (4.58) eşitsizliği gerçekleşeneğinden (4.56) ve (4.57) eşitsizlikleri sırasıyla (4.5) ve (4.33) eşitsizliklerinden daha güçlüdür. Yani Teorem 4.5 ve Teorem 4.6 sırasıyla Teorem 4.1 ve Teorem 4.3 den daha iyidir. Benzer şekilde $i = 1, 2, \dots, n$ için $p_i > 2$ olduğunda (4.59) eşitsizliği gerçekleşeneğinden Teorem 4.1 ve Teorem 4.3 sırasıyla Teorem 4.5 ve Teorem 4.6 den daha iyidir. Ayrıca $i = 1, 2, \dots, n$ için $p_i = 2$ alındığında Teorem 4.5 ve Teorem 4.6 sırasıyla Teorem 4.1 ve Teorem 4.3 ile çıkarılır.

(4.57) eşitsizliğinin bir uygulaması olarak $\alpha > 1$ $\phi_\alpha u = |u|^{\alpha-2} u$, $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i a = x_i b = 0$, her $t \in a, b$ için $x_i t > 0$, $r_i t$ ve $q t$ $\mathbb{R}$ üzerinde reel değerli, pozitif ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere $1 < p_i < +\infty$ şartını sağlayan p_i ile negatif olmayan α_i parametreleri (4.50) şartını sağladığında

$$-r_i t \phi_{p_i} x_i' = \lambda_i \alpha_i q t \phi_{\alpha_i} x_i \prod_{k=1, k \neq i}^n |x_k|^{\alpha_k} \quad (4.60)$$

özdeğer problemi için aşağıdaki teoremi verelim:

4.7. Teorem [1, Teorem 2.3]:

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}) = \frac{1}{\alpha_n} \left[\prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j \alpha_j^{\alpha_j / p_j} \prod_{i=1}^n \left(\int_a^b 2^{p_i-2} \left(\frac{\zeta_i s \eta_i s}{\zeta_i s + \eta_i s} \right)^{p_i-1} q s ds \right)^{\alpha_i / p_i} \right]^{\frac{p_n}{\alpha_n}} \quad (4.61)$$

olmak üzere (4.60) özdeğer probleminin her genelleştirilmiş $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğeri için $\lambda_n > g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$ olacak şekilde bir $g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$ fonksiyonu vardır.

$i = 1, 2, \dots, n$ için $r_i t = 1$ ve $1 < p_i < 2$ alınırsa (4.58) eşitsizliği kullanılarak $g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}) > h(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$ eşitsizliği elde edilir. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, n$ için $r_i t = 1$ ve $1 < p_i < 2$ olduğunda Teorem 4.7 Teorem 4.4 den daha iyi bir alt sınır verir. Benzer şekilde (4.59) eşitsizliğinden $i = 1, 2, \dots, n$ için $r_i t = 1$ ve $p_i > 2$ olduğunda Teorem 4.4 Teorem 4.7 den daha iyi bir alt sınır verir. Ayrıca $i = 1, 2, \dots, n$ için $r_i t = 1$ ve $p_i = 2$ alınırsa Teorem 4.7 ve Teorem 4.4 çıkarır.

Teorem 4.5 ve Teorem 4.6'nın ispatları Sim ve Lee [28] ve Tang ve He [30] nin kullandıkları metodların bazı kısımları birleştirilerek aralarında çok az bir değişiklikle kolaylıkla elde edilebilmektedir. Dolayısıyla sadece Teorem 4.6'nın ispatı verilecektir.

İspat: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a < b$ için $a, b \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i(t)$ nin $x_i(a) = 0 = x_i(b)$ olacak şekilde ardışık sıfırları ve $t \in (a, b)$ için $x_i(t) \neq 0$ olsun. (4.2) sisteminin i -ninci denklemini x_i ile çarpıp $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i(a) = 0 = x_i(b)$ olduğunu hesaba katarak a dan b ye integre edersek $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\int_a^b r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds = \int_a^b f_i(s) \prod_{k=1}^n |x_k(s)|^{\alpha_k} ds \leq \int_a^b f_i^+(s) \prod_{k=1}^n |x_k(s)|^{\alpha_k} ds \quad (4.62)$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan (4.55), $i = 1, 2, \dots, n$ için (4.32) ve Hölder eşitsizliğinden $i = 1, 2, \dots, n$ ve her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |x_i(t)|^{p_i} &= \left| \int_a^t x_i'(s) ds \right|^{p_i} \\ &\leq \left(\int_a^t [r_i(s)]^{1/p_i} ds \right)^{p_i-1} \int_a^t r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds \\ &= \zeta_i^{p_i-1}(t) \int_a^t r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds \end{aligned} \quad (4.63)$$

ve

$$|x_i(t)|^{p_i} = \left| \int_t^b x_i'(s) ds \right|^{p_i}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_t^b [r_i(s)]^{1-p_i} ds \right)^{p_i-1} \int_t^b r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds \\
&= \eta_i^{p_i-1} t \int_t^b r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds
\end{aligned} \tag{4.64}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

$i = 1, 2, \dots, n$ için $\zeta_i(a) = 0 = \eta_i(b)$, $\zeta_i(b) > 0$, $\eta_i(a) > 0$ ve $t \in (a, b)$ için $\zeta_i(t)$ azalmayan ve $\eta_i(t)$ artmayan olduğundan $\zeta_i(c_i) = \eta_i(c_i)$ olacak şekilde en az bir $c_i \in (a, b)$ vardır. Bu durumda $t \in (a, c_i)$ için $\zeta_i(t) \leq \eta_i(t)$ ve $t \in (c_i, b)$ için $\eta_i(t) \leq \zeta_i(t)$ sağlanır. $a \leq t \leq c_i$ için $\zeta_i(t) \leq \frac{2\zeta_i(t)\eta_i(t)}{\zeta_i(t) + \eta_i(t)}$ olduğunu dikkate alarak (4.63) den $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$|x_i(t)|^{p_i} \leq \left(\frac{2\zeta_i(t)\eta_i(t)}{\zeta_i(t) + \eta_i(t)} \right)^{p_i-1} \int_a^t r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds \tag{4.65}$$

eşitsizliği sağlanır. $c_i \leq t \leq b$ için $\eta_i(t) \leq \frac{2\zeta_i(t)\eta_i(t)}{\zeta_i(t) + \eta_i(t)}$ olduğunu dikkate alarak

(4.64) den $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$|x_i(t)|^{p_i} \leq \left(\frac{2\zeta_i(t)\eta_i(t)}{\zeta_i(t) + \eta_i(t)} \right)^{p_i-1} \int_t^b r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds \tag{4.66}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.65) ve (4.66) eşitsizlikleri toplanarak $i = 1, 2, \dots, n$ ve $a \leq t \leq b$ için

$$|x_i(t)|^{p_i} \leq 2^{p_i-2} \left(\frac{\zeta_i(t) \eta_i(t)}{\zeta_i(t) + \eta_i(t)} \right)^{p_i-1} \int_a^b r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds \quad (4.67)$$

eşitsizliği sağlanır. Teorem 4.3 ün ispatına benzer bir teknik kullanarak $i = 1, 2, \dots, n$ ve $a \leq t \leq b$ için

$$|x_i(t)|^{p_i} < 2^{p_i-2} \left(\frac{\zeta_i(t) \eta_i(t)}{\zeta_i(t) + \eta_i(t)} \right)^{p_i-1} \int_a^b r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds \quad (4.68)$$

eşitsizliği sağlanır. (4.62), (H2) ve genelleştirilmiş Hölder eşitsizliğini kullanarak (4.68) in her iki tarafını $j = 1, 2, \dots, n$ için $f_j^+(t)$ ile çarpıp a dan b ye integre edersek $i, j = 1, 2, \dots, n$ için

$$M_{ij} = 2^{p_i-2} \int_a^b \left(\frac{\zeta_i(s) \eta_i(s)}{\zeta_i(s) + \eta_i(s)} \right)^{p_i-1} f_j^+(s) ds \quad (4.69)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_a^b f_j^+(s) |x_i(s)|^{p_i} ds &< 2^{p_i-2} \int_a^b \left(\frac{\zeta_i(s) \eta_i(s)}{\zeta_i(s) + \eta_i(s)} \right)^{p_i-1} f_j^+(s) ds \int_a^b r_i(s) |x_i'(s)|^{p_i} ds \\ &\leq M_{ij} \int_a^b f_i^+(s) \prod_{k=1}^n |x_k(s)|^{\alpha_k} ds \\ &\leq M_{ij} \prod_{k=1}^n \left(\int_a^b f_i^+(s) |x_k(s)|^{p_k} ds \right)^{\frac{\alpha_k}{p_k}} \end{aligned} \quad (4.70)$$

eşitsizliği sağlanır. Teorem 4.3 ün ispatına benzer bir teknik kullanarak $i, j = 1, 2, \dots, n$ için

$$\int_a^b f_i^+ (s) |x_j(s)|^{p_j} ds > 0 \quad (4.71)$$

olduğu görülür.

$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{p_i} = 1$ şartını kullanarak (H2), (4.70) ve (4.71) den

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n M_{ij}^{\frac{\alpha_i \alpha_j}{p_i p_j}} > 1 \quad (4.72)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

1. Aktaş, M.F., Çakmak, D. and Tiryaki, A., “A note on Tang and He’s paper”, *Appl. Math. Comput.*, 218: 4867-4871 (2012).
2. Brown, R.C. and Hinton, D.B., “Opial’s inequality and oscillation of 2nd order equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1123-1129 (1997).
3. Cheng, S.S., “Lyapunov inequalities for differential and difference equations”, *Fasc. Math.*, 23: 25-41 (1991).
4. Çakmak, D., “Lyapunov-type integral inequalities for certain higher order differential equations”, *Appl. Math. Comput.*, 216: 368-373 (2010).
5. Çakmak, D. and Tiryaki, A., “On Lyapunov-type inequality for quasilinear systems”, *Appl. Math. Comput.*, 216: 3584-3591 (2010).
6. Çakmak, D. and Tiryaki, A., “Lyapunov-type inequality for a class of Dirichlet quasilinear systems involving $p_1, p_2, \dots, p_n$ -Laplacian”, *J. Math. Anal. Appl.*, 369: 76-81 (2010).
7. Dosly, O. and Rehak, P., “Half-Linear Differential Equations”, *Mathematics Studies* 202, North-Holland, (2005).
8. Eliason, S.B., “A Lyapunov inequality”, *J. Math. Anal Appl.*, 32: 461-466 (1970).
9. Eliason, S.B., “A Lyapunov inequality for a certain nonlinear differential equation”, *J. London Math. Soc.*, 2: 461-466 (1970).
10. Eliason, S.B., “A Lyapunov inequality for certain second order functional differential equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, 27 (1): 180-199 (1974).
11. Guseinov, G.Sh. and Kaymakçalan, B., “Lyapunov inequalities for discrete linear Hamiltonian systems”, *Comput. Math. Appl.*, 45: 1399-1416 (2003).
12. Guseinov, G.Sh. and Zafer A., “Stability criteria for linear periodic impulsive Hamiltonian systems”, *J. Math. Anal Appl.*, 335: 1195-1206 (2007).
13. Hartman, P., “Ordinary Differential Equations”, *Wiley*, New York, (1964) And *Birkhauser*, Boston, 344-346, (1982).
14. He, X. and Tang, X.H., “Lyapunov-type inequalities for even order differential equations”, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 11 (2): 465-473 (2012).

15. Kelley, P. and Peterson, A., "The Theory of Differential Equations", **Pearson**, New Jersey, 185, 244-252, (2004).
16. Kwong, M.K., "On Lyapunov's inequality for disfocality", **J. Math. Anal Appl.**, 83: 486-494 (1981).
17. Lee, C., Yeh, C., Hong, C. and Agarwal, R.P., "Lyapunov and Wirtinger inequalities", **Appl. Math. Lett.**, 17: 847-853 (2004).
18. Liapunov, A.M., "Probleme général de la stabilité du mouvement", (French Translation of a Russian paper dated 1893), **Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse**, 2: 203-474, (1907), (Reprinted as Ann. Math. Studies, No. 17, Princeton, 1947).
19. Napoli, P. L. and Pinasco, J.P., "Estimates for eigenvalues of quasilinear elliptic systems", **J. Differential Equations**, 227: 102-115 (2006).
20. Pachpatte, B.G., "On Lyapunov-type inequalities for certain higher order differential equations", **J. Math. Anal Appl.**, 195: 527-536 (1995).
21. Pachpatte, B.G., "Lyapunov-type integral inequalities for certain differential equations", **Georgian Math. J.**, 4: 139-148 (1997).
22. Pachpatte, B.G., "Inequalities related to the zeros of solutions of certain second order differential equations", **Facta Univ. Ser. Math. Inform.**, 16: 35-44 (2001).
23. Pachpatte, B.G., "Mathematical Inequalities", **Elsevier**, Amsterdam, vii-viii, (2005).
24. Panigrahi, S., "Lyapunov-type integral inequalities for certain higher order differential equations", **Electron. J. Differential Equations.**, 28: 1-14 (2009).
25. Parhi, N. and Panigrahi, S., "On Liapunov-type inequality for third-order differential equations", **J. Math. Anal Appl.**, 233: 445-460 (1999).
26. Parhi, N. and Panigrahi, S., "Liapunov-type inequality for higher order differential equations", **Math. Slovaca**, 52(1): 31-46 (2002).
27. Pinasco, J.P., "Lower bounds for eigenvalues of the one-dimensional p-Laplacian", **Abstr. Appl. Anal.**, 227: 147-153 (2004).
28. Sim, I. and Lee, Y., "Lyapunov Inequalities for One-Dimensional p-Laplacian Problems with a Singular Weight Function", **J. Inequal. Appl.**, Art. ID: 865096, 9 pp (2010).
29. Tang, X.H., Zhang, Q. and Zhang, M., "Lyapunov-type inequalities for the first-order nonlinear Hamiltonian Systems", **Comput. Math. Appl.**, 62: 3603 3613

(2011)

30. Tang, X.H. and He, X., “Lower bounds for generalized eigenvalues of the quasilinear systems”, *J. Math. Anal Appl.*, 385: 72-85 (2012).
31. Tiriyaki, A., Ünal, M. and Çakmak, D., “Lyapunov-type inequalities for nonlinear systems”, *J. Math. Anal Appl.*, 332: 497-511 (2007).
32. Tiriyaki, A., “Recent developments of Lyapunov-type inequalities”, *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, 5: 231-248 (2010).
33. Tiriyaki, A., Çakmak, D. and Aktaş, M.F., “Lyapunov-type inequalities for a certain class of nonlinear systems”, *Comput. Math. Appl.*, 64: 1804-1811 (2012).
34. Wang, X., “Stability criteria for linear periodic Hamiltonian systems”, *J. Math. Anal Appl.*, 367: 329-336 (2010).
35. Wang, X., “Lyapunov type inequalities for second-order half-linear differential equations”, *J. Math. Anal Appl.*, 382: 792-801 (2011).
36. Yang, X., “On Liapunov-type inequality for certain higher order differential equations”, *Appl. Math. Comput.*, 134: 307-317 (2003).
37. Yang, X., “On inequalities of Lyapunov type”, *Appl. Math. Comput.*, 134: 293-300 (2003).
38. Yang, X. and Lo, K., “Lyapunov-type inequality for a class of even-order differential equations”, *Appl. Math. Comput.*, 215: 3884-3890 (2010).
39. Yang, X., Kim, Y. and Lo, K., “Lyapunov-type inequality for a class of odd-order differential equations”, *J. Comput. Appl. Math.*, 234: 2962-2968 (2010).
40. Yang, X., Kim, Y. and Lo, K., “Liapunov-type inequality for a class of quasilinear systems”, *Math. Comput. Modell.*, 53: 1162-1166 (2011).
41. Zhang, Q. and He, X., “Lyapunov-type inequalities for a class of even-order differential equations”, *J. Inequal. Appl.*, 5: 7 (2012).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÖZTÜRK MIZRAK, Özlem
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 28.03.1988 Karabük
Medeni hali : Evli
Telefon : 0 (370) 433 85 13
e-mail : ozlemozturk@karabuk.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2010
Lise	75. Yıl Karabük Anadolu Lisesi	2006

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2010 - ...	Karabük Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Resim, Kitap Okuma, Bisiklet Biniciliği, Kültür Gezileri