



T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

M-KESİRLİ TÜREVLER İÇİN POMPEIU ORTALAMA DEĞER
TEOREMİ VE EŞİTSİZLİK UYGULAMALARI

PINAR BOLU

DANIŞMAN

DOÇ. DR. SAMET ERDEN

BARTIN-2022



T.C.

BARTIN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

***M*-KESİRLİ TÜREVLER İÇİN POMPEIU ORTALAMA DEĞER TEOREMİ VE
EŞİTSİZLİK UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Pınar BOLU

BARTIN-2022

KABUL VE ONAY

BEYANNAME

Bartın Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre Doç. Dr. Samet ERDEN danışmanlığında hazırlamış olduğum “*M-KESİRLİ TÜREVLER İÇİN POMPEIU ORTALAMA DEĞER TEOREMİ VE EŞİTSİZLİK UYGULAMALARI*” başlıklı yüksek lisans tezimin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

10.02.2022

Pınar BOLU



ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımlarından dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Samet ERDEN'e en içten dileklerimle teşekkür ederim. Tezin gelişmesinde katkı sağlayan sayın jüri üyelerine, katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Pınar BOLU



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

***M*-KESİRLİ TÜREVLER İÇİN POMPEIU ORTALAMA DEĞER TEOREMİ VE EŞİTSİZLİK UYGULAMALARI**

Pınar BOLU

Bartın Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Samet ERDEN

Bartın-2022, sayfa: 63

İntegral eşitsizlikleri hem teorik hem de uygulamalı matematikte kullanılan en önemli araçlardan biridir. Bazı problemlerde integralin tam değeri hesaplanamaz. Böyle durumlarda yaklaşım metotları geliştirmek gereklidir. Bu yüzden, bazı matematikçiler fonksiyonların çeşitli sınıfları için integral eşitsizlikleri üzerine çalışmıştır. Hermite-Hadamard, Ostrowski, Chebyshev, Grüss ve Ostrowski-Grüss eşitsizlikleri, literatürdeki önemli eşitsizliklerden bazılarıdır. Son zamanlarda, bazı araştırmacılar klasik ortalama değer teoremini ve 1946 yılında Pompeiu tarafından sunulan Pompeiu ortalama değer teoremini kullanarak Ostrowski tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir. Sonrasında, Pompeiu ortalama değer teoremini taban alan Ostrowski tipi eşitsizlikler fonksiyonların farklı sınıfları için birçok matematikçi tarafından incelenmiştir.

Diğer yandan, kesirli hesaplamalar son zamanlarda matematiksel analiz için önemli bir alan haline geldi. Kesirli integraller ve türevler genellikle çok sayıda araştırmacı tarafından bilinmezdi ve sadece teorik matematik konularında kullanılmıştı. Ancak bu integraller ve türevler son zamanlarda matematiğin birçok uygulama alanında kullanılmaya başlanmıştır. Bu teori özellikle bilimin bazı alanlarında vazgeçilmez bir konuma geldi. Örneğin; bir kesirli türev olmadan viskoelastik bir süreç tanımlamak mümkün değildir. Uygulama alanlarının

genişliğinden dolayı, lokal, uyumlu, alternatif ve M -kesirli gibi yeni kesirli hesaplama yöntemleri geliştirilmiştir. Ek olarak, matematiğin en önemli alanlarından biri olan eşitsizlik teorisinde kesirli türev ve integraller içeren çok sayıda sonuç elde edilmiştir. Örneğin, Hermite-Hadamard, Ostrowski, Grüss ve Ostrowski-Grüss gibi temel eşitsizlikler 0 ve 1 arasındaki türev ve integral değerlerini hesaplamak için kullanılan uyumlu kesirli hesaplamalar için kurulmuştur. Bunlara ek olarak, bazı araştırmacılar uyumlu ve lokal kesirli hesaplamalar için Pompeiu ortalama değer teoremini kanıtlamış ve bu teoremi kullanarak bazı eşitsizlikler geliştirmişlerdir.

Bu tezde, Pompeiu ortalama değer teoremini taban alan Ostrowski tipli eşitsizlikler üzerine devam eden çalışmaların ışığında M -kesirli türevler için Pompeiu ortalama değer teoremi kanıtlanacaktır. Aynı zamanda, M -kesirli Pompeiu ortalama değer teoremi kullanılarak elde edilen yeni Ostrowski tipli sonuçlar bulunacaktır. Bu Ostrowski tipli sonuçların ağırlıklı versiyonları da elde edilecektir. Son olarak, bu tez kapsamında geliştirilen eşitsizliklerin bazı uygulamaları sonuç olarak verilecektir.

Anahtar Kelimeler: M -Kesirli Türev, Pompeiu Ortalama Değer Teoremi, Sınırlı Fonksiyonlar, Ostrowski Eşitsizliği, Sayısal İntegrasyon

Bilim Alanı Kodu: 26D07, 26D10, 26D15, 26A33, 41A55.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

POMPEIU MEAN VALUE THEOREM FOR M -FRACTIONAL DERIVATIVES AND APPLICATIONS TO INEQUALITIES

Pınar BOLU

Bartın University

Graduate School

Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Samet ERDEN

Bartın-2022, pp: 63

The theory of integral inequalities is one of the most useful mathematical tools in both pure and applied mathematics. The exact value of an integral can not be calculated in some problems. In these cases, it is necessary to develop approximation methods. Therefore, some mathematicians worked on integral inequalities for various classes of functions. Hermite-Hadamard, Ostrowski, Chebyshev, Grüss and Ostrowski-Grüss are some of the important inequalities in literature. Recently, some researchers focused on Ostrowski type inequalities obtained by using classical mean value theorem and Pompeiu mean value theorem which is introduced by Pompeiu in 1946. After that, Ostrowski type inequalities based on Pompeiu mean value theorem for different classes of functions and their weighted versions are examined by many mathematicians.

On the other hand, Fractional calculus has grown into a significant pillar for mathematical analysis in recent years. Fractional integrals and derivatives were not generally known for many researchers and up to recent years has been used only in a pure mathematical context. However, these integrals and derivatives have been used in many application areas of mathematics in the last few decades. This theory have especially become indispensable in some areas of sciences. For example, it is impossible to describe a viscoelastic process without using a fractional derivative. Because of the wide of the application areas, new

fractional computation methods such as local, conformable, alternative and M -Fractional have been developed. In addition, a large number of results involving fractional derivatives and integrals has been obtained in inequality theory which is one of the most important application areas of mathematics. For instance, fundamental inequalities such as Hermite-Hadamard, Ostrowski, Grüss and Ostrowski-Grüss were established by using Conformable Fractional Calculus which is used to calculate the integral and derivative values in between 0 and 1. Furthermore, some researchers gave Pompeiu mean value theorem for conformable and local fractional theory and they also developed some inequalities by using fractional Pompeiu mean value theorem.

Inspired and motivated by ongoing research on Ostrowski type inequalities based on Pompeiu mean value theorem, Pompeiu mean value theorem for M -Fractional derivatives will be proved in this thesis. Additionally, new Ostrowski type inequalities obtained by using M -Fractional Pompeiu mean value theorem will be established. The weighted versions of these Ostrowski type inequalities will be obtained. Finally, some applications of the inequalities which will be developed in this thesis will be also given.

Keywords: M -Fractional Derivatives, Pompeiu Mean Value Theorem, Bounded Functions, Ostrowski's Inequality, Numerical Integration

Scientific Field Code: 26D07, 26D10, 26D15, 26A33, 41A55.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY.....	ii
BEYANNAME.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ.....	6
2.1 Bazı Temel Eşitsizlikler.....	6
2.2 Uyumlu Kesirli Hesaplamalar için Bazı Önemli Kavramlar.....	17
3. <i>M</i> -KESİRLİ TÜREV.....	26
3.1. <i>M</i> -Kesirli Türev İçin Temel Tanım ve Teoremler.....	28
3.2. <i>M</i> -Kesirli İntegraller İçin Temel Tanım ve Teoremler.....	41
3.3. <i>M</i> -Kesirli İntegraller İçeren Ostrowski tipli Eşitsizlikler.....	46
4. <i>M</i> -KESİRLİ TÜREVLER İÇİN POMPEİU TIPLI EŞİTSİZLİKLER VE OSTROWSKI EŞİTSİZLİĞİNE UYGULAMALARI.....	50
4.1. <i>M</i> -Kesirli Türevler İçin Pompei Ortalama Değer Teoremi ve İlgili Eşitsizlikler.. ..	50
4.2. <i>M</i> -Kesirli İntegraller İçeren Ostrowski Tipli Eşitsizlikler.....	51
4.3. <i>M</i> -Kesirli İntegraller için Nümerik Yaklaşım Uygulamaları.....	56
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	58
KAYNAKLAR.....	59
ÖZGEÇMİŞ.....	63

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$[\cdot, \cdot]$	: Kapalı aralık
$(\cdot, \cdot)$	: Açık aralık
$E_\beta(\cdot)$	: tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$D_\alpha(f)(t)$	: f fonksiyonunun α . mertebeden uyumlu kesirli türevi
$T_\alpha(f)$	: f fonksiyonunun α . mertebeden uyumlu kesirli türevi
$D_{RL}^\alpha f(t)$	: f fonksiyonunun Riemann-Liouville anlamında α . mertebeden kesirli türevi
$D_C^\alpha f(t)$	: f fonksiyonunun Caputo anlamında α . mertebeden kesirli türevi
$D_M^{\alpha, \beta} f(t)$	: f fonksiyonunun α mertebeden yerel M -türevi
$D_M^{\alpha, \beta; n} f(t)$	: f fonksiyonunun n . mertebeden yerel M -türevi
${}_M I_a^{\alpha, \beta} f(t)$	: f fonksiyonunun $\alpha - \beta$ mertebeden M -integrali
$J^{m-\alpha}$	: Riemann-Liouville anlamında kesirli integral
$J_\alpha^a(f)$	: f fonksiyonunun α . mertebeden uyumlu kesirli integrali
$L_1[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$L_p[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında p . kuvveti integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$L_\infty[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında integrali sınırlı olan fonksiyonların kümesi
$\ f\ _\infty$	: f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıktaki maksimum değeri

1. GİRİŞ

Matematikte Leibniz ve Newton tarafından geliştirilen tamsayı mertebeden integral ve diferansiyel hesabı fizik, biyoloji, mühendislik ve diğer birçok alanda çeşitli uygulamalara sahip büyük bir keşif olmuştur. Fakat yeni bir şey zamanın matematikçileri için ilgi çekici bir hale gelmek üzereydi. 1695'te, Hospital, Leibniz'e yazdığı bir mektupta, $d^n y/d^n x$ tamsayılı türevinin derecesinin kesir olduğu bir duruma genişletilme olasılığını sormuştur. Bu soru, tamsayılı olmayan hesap olarak ve günümüzde genellikle kesirli hesap olarak adlandırılan yeni bir hesabın tarihini başlatmıştır.

Kesirli hesaplamalar, Newton ve Leibniz tarafından önerilen tamsayı mertebeli hesaplamalar ile aynı zamanda ortaya çıkmasına rağmen, bilim camiasının ilgisini çekmemiş ve uzun yıllar gizli kalmıştır. Kesirli hesaplamaların matematik, fizik, biyoloji ve mühendislik gibi çeşitli alanlarda sayısız uygulamada tanınmaya ve pekiştirilmeye başlaması 1974 yılındaki uluslararası bir kongreden sonra olmuştur.

Bugüne kadar, aralarında Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, Caputo-Hadamard, Riesz ve diğer farklı tanımlarında bulunduğu kesirli türevler tanıtılmıştır. Bu türevlerin çoğu, Riemann-Liouville kesirli integralin temeline dayanılarak tanımlanır.

Kesirli hesaplamaların en çok araştırılan ve çalışılan kesirli türevleri, Riemann-Liouville ve Caputo türevleridir. Her iki tür de kesirli diferansiyel denklemler için temel oluşturmaktadır. Bu kesirli türevler aşağıdaki gibi sunulmaktadır.

Tanım 1.1. $Re(\alpha) > 0$ ve $m - 1 < \alpha \leq m$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. Riemann-Liouville anlamında bir f fonksiyonunun α . mertebeden kesirli türevi, $D_{RL}^\alpha f(t)$, ile gösterilir.

$$D_{RL}^\alpha f(t) := D^m J^{m-\alpha} f(t),$$

$$D_{RL}^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \left[\int_0^t f(\tau) (t-\tau)^{m-\alpha-1} d\tau \right], & m-1 < \alpha \leq m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m \end{cases}$$

burada $D^m = d^m/dt^m$ m . mertebeden klasik türevdir ve $J^{m-\alpha}$, Riemann-Liouville anlamında kesirli integraldir. $\alpha = 0$ ise, $D_{RL}^0 = I$ ifadesini tanımlarız, burada I birim operatörüdür (Podlubny, 1999).

Tanım 1.2. $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun, öyle ki $Re(\alpha) > 0$ ve $m - 1 < \alpha \leq m$ olacak şekilde m sayısı $Re(\alpha) > 0$ 'dan büyük veya ona eşit en küçük tamsayı olsun. Caputo anlamında bir f fonksiyonunun α . mertebeden kesirli türevi, $D_C^\alpha f(t)$ ile gösterilir.

$$D_C^\alpha f(t) := J^{m-\alpha} D^m f(t),$$

$$D_C^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t f^{(m)}(\tau) (t-\tau)^{m-\alpha-1} d\tau, & m-1 < \alpha \leq m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m \end{cases}$$

D^m , m . mertebeden klasik türev olduğunda, $J^{m-\alpha}$ Riemann-Liouville kesirli integrali ve $f^{(m)}(\tau) = \frac{d^m f(\tau)}{d\tau^m}$ (Podlubny, 1999).

Son zamanlarda Khalil ve diğerleri (2014) tamsayı dereceli hesabın klasik özelliklerini genelleştirmek için mertebesi α , $0 < \alpha < 1$ aralığında olan uyumlu kesirli türevi önerdiler. Yine 2014 yılında Katugampola (2014), uyumlu kesirli türevlere benzer, klasik özelliklere sahip yeni alternatif bir kesirli türev önermiştir. Uyumlu kesirli türev ve alternatif kesirli türevin bazı uygulamaları, kesirli hesaplamalar alanında yer kazanmakta ve bu tür türevleri kullanan çok sayıda çalışma yayınlanmaktadır. Bahsedilen bu çalışmaların bazı uygulama alanları; ısı denklemi, Taylor formülü ve dışbükey fonksiyonların bazı eşitsizlikleridir (Cenesiz ve Kurt, 2015; Anderson, 2016).

Şimdi, uyumlu kesirli türevin analiziyle alakalı bazı temel kavramlar verilecektir (Abdeljawad, 2015; Khalil vd., 2014). Ayrıca uyumlu kesirli integrallerle ilgili literatürde bu tezin konusuyla bağlantılı birçok çalışma bulunmaktadır (Abdeljawad vd., 2015; Abu Hammad ve Khalil 2016; Iyiola ve Nwaeze, 2016).

Tanım 1.3. $f: [0, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. $t > 0$ ve $\alpha \in]0,1[$ için f fonksiyonunun uyumlu kesirli türev diye adlandırılan α mertebeli kesirli türevi,

$$D_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer f fonksiyonu $\alpha > 0$ olmak üzere bazı $(0, a)$ aralıklarında α –diferansiyellenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ oluşursa, o zaman

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

olur. f nin α mertebeden uyumlu kesirli türevini göstermek için bazen $D_{\alpha}(f)(t)$ yerine $f^{(\alpha)}(t)$ ifadesi de kullanılabilir. Ayrıca, α mertebeden uyumlu kesirli türev mevcutsa bu durum için f , α –diferansiyellenebilirdir denir (Khalil vd., 2014).

Ayrıca, Katugampola (2014) alternatif bir α –kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 1.4. $f: [0, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $t > 0$ olsun. O halde f fonksiyonunun α . mertebeden alternatif kesirli türevi $\forall t > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$$D_{\alpha}f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon},$$

şeklinde tanımlanır (Katugampola, 2014).

Ayrıca, eğer f fonksiyonu $\alpha > 0$ olmak üzere $(0, \alpha)$ aralığında α -türevlenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} D_{\alpha}f(t)$ varsa, o zaman

$$D_{\alpha}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} D_{\alpha}f(t)$$

özdeşliği sağlanır (Katugampola, 2014).

Bu tanımlara ek olarak, son zamanlarda güncel M -kesirli türev tanımı Sousa ve Oliveira (2018) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 1.5. $f: [0, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $t > 0$ olsun. $0 < \alpha < 1$ için, $D_M^{\alpha, \beta} f(t)$ ile gösterilen f fonksiyonunun α . mertebeden yerel M -türevi $\forall t > 0$ için

$$D_M^{\alpha, \beta} f(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $E_\beta(\cdot), \beta > 0$ tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonudur. Eğer f fonksiyonu $\alpha > 0$ şartını sağlayan $(0, \alpha)$ aralığında α -türevlenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} D_M^{\alpha, \beta} f(t)$ mevcutsa, o halde

$$D_M^{\alpha, \beta} f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} D_M^{\alpha, \beta} f(t)$$

eşitliği sağlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Burada bahsedilen kesirli türev tanımlarından yola çıkarak, kesirli türevleri mevcut olan fonksiyonlar için Ostrowski tipli sonuçlar incelenecektir.

Tez konusu kapsamında literatürde önemli bir yere sahip olan Ostrowski eşitsizliği aşağıdaki şekilde verilmektedir.

Teorem 1.1. $f: [a, b] \rightarrow R$, (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun öyle ki $f': (a, b) \rightarrow R$ aynı aralık üzerinde sınırlı olsun, yani $\|f'\| = \sup_{t \in (a, b)} |f'(t)|$ şartı sağlansın, bu durumda her $x \in [a, b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2} \right] (b-a) \|f'\|_\infty$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\frac{1}{4}$ en iyi sabittir (Ostrowski, 1938).

Ostrowski eşitsizliği, birinci türevleri sınırlı olan, yani birinci türevleri $L_\infty[\alpha, \beta]$ uzayına ait olan fonksiyonlar için elde edilmiştir. Daha sonra birçok araştırmacı tarafından farklı genellemeleri yapılmış ve çeşitli fonksiyon sınıfları için incelenmiştir. Aynı zamanda, 1946 yılında Pompeiu (1946) tarafından sunulan Pompeiu ortalama değer teoremi, Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilmesinde önemli bir yer oynamıştır. Dragomir 2005 yılında kaleme aldığı makalesinde Pompeiu ortalama değer teoreminin Ostrowski eşitsizliğine uygulamalarını incelemiştir (Dragomir, 2005). Gelecek bölümde ayrıntılı bir şekilde bahsedilecek olan çalışmaların yanı sıra, Pompeiu ortalama değer teoreminin kesirli versiyonları da incelenmiştir. Örneğin, Erden ve Sarıkaya (2021) uyumlu kesirli türevler için Pompeiu ortalama değer teoremini kanıtlamış ve bu teoremi kullanarak uyumlu kesirli integraller içeren Ostrowski tipli sonuçlar vermiştir.

Bu tez çalışmasında, M -kesirli türevler için Pompeiu ortalama değer teoremi verilecektir. Böylece M -kesirli integraller içeren Ostrowski tipli sonuçlar bulunacaktır. Ayrıca, elde edilen eşitsizliklerin ağırlıklı versiyonları ve bazı uygulamaları incelenecektir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Bu bölümde; tez çalışmasında elde edilen ana sonuçların bulunmasında önem taşıyan temel kavramlardan bahsedilecektir.

2.1. Bazı Temel Eşitsizlikler

Bu tezin kapsamında elde edilecek yeni eşitsizlikleri temel alan önemli sonuçlardan bahsetmeden önce bazı temel tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1.1. (Sınırlı Fonksiyon). $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve her $x \in I$ için $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir (Balcı, 2012).

Tanım 2.1.2. (Limit) $K \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve k sayısı K kümesinin bir yığılma noktası olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için, $0 < |x - k| < \delta$ iken her $x \in K$ için $|\varphi(x) - L| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, φ fonksiyonunun k noktasındaki limiti L sayısıdır denir ve bu durum

$$\lim_{x \rightarrow k} \varphi(x) = L$$

ile gösterilir (Balcı, 2012).

Tanım 2.1.3. (Süreklilik) $K \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $k \in K$ olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için, $0 < |x - k| < \delta$ iken her $x \in K$ için $|\varphi(x) - \varphi(k)| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, φ fonksiyonu $k \in K$ noktasında süreklidir denir (Balcı, 2012).

Tanım 2.1.4. (Süreklilik) $K \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $k \in K$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow k} \varphi(x) = \varphi(k)$$

ise φ fonksiyonu k noktasında süreklidir denir. Eğer φ fonksiyonu K kümesinin bütün

elemanlarında sürekli ise, o zaman φ fonksiyonu K kümesi üzerinde sürekli olarak denir.

Tanım 2.1.5. (Türev) $K \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $x_0 \in K$, x_0 K 'nin yığılma noktası ve $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

limiti ya da $x = x_0 + h$ alındığında ortaya çıkan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

limiti varsa φ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir denir ve bu limitin değeri φ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevinin değeridir. Ayrıca, φ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi $\varphi'(x_0)$, $\left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ ya da $D\varphi(x_0)$ sembollerinden biri ile gösterilir (Balcı, 2012).

Tez çalışmasında sıklıkla kullanılacak olan ve literatürde önemli bir yere sahip temel eşitsizlikler ise aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 2.1.1. (İntegraller İçin Üçgen Eşitsizliği) φ fonksiyonu $[\alpha, \beta]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)| dx$$

eşitsizliği sağlanır (Balcı, 2012).

Tanım 2.1.6. (Hölder Eşitsizliği). $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n -lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

a. $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

b. $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.(Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.7. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Mitrinović et al.1993)

Sonuç 2.1.1. (Power Mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^p$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Power Mean Eşitsizliği benzer şekilde çift katlı integraller için

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)| dx dy$$

$$= \left(\int_a^b |f(x, y)|^q dx dy \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x, y)| |g(x, y)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.8. (Cauchy -Schwarz Eşitsizliği) $f, g: [a, b] \rightarrow R$ integrallenebilen fonksiyonlar ve λ sabiti için

$$\int_a^t f(x) dx = \lambda \int_a^t g(x) dx \quad t \in [a, b]$$

ilişkisi mevcut ise

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx \right) \left(\int_a^b [g(x)]^2 dx \right)$$

sağlanır. Bu eşitsizliğe Cauchy -Schwarz Eşitsizliği adı verilir.

1938 yılında Ostrowski (1938), daha sonra kendi adıyla anılacak olan aşağıdaki temel integral eşitsizliğini kanıtlamıştır.

Teorem 2.1.2. (Ostrowski Eşitsizliği) $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow R$, (α, β) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun öyle ki $\varphi' : (\alpha, \beta) \rightarrow R$ aynı aralık üzerinde sınırlı olsun, yani $\|\varphi'\|_\infty = \sup_{\xi \in (\alpha, \beta)} |\varphi'(\xi)| < \infty$ şartı sağlansın. Bu bağlamda, her $x \in [\alpha, \beta]$ için

$$\left| \varphi(x) - \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta \varphi(\xi) d\xi \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2}{(\beta - \alpha)^2} \right] (\beta - \alpha) \|\varphi'\|_\infty \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\frac{1}{4}$ elde edilebilecek en iyi sabittir.

Kanıt: $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow R$ fonksiyonu (α, β) açık aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğundan, her $x \in (\alpha, \beta)$ için tanımlanan

$$\Delta(x, \xi) := \begin{cases} (\xi - \alpha) & , \alpha \leq \xi < x \\ (\xi - \beta) & , x \leq \xi \leq \beta \end{cases}$$

ifadesi için

$$\varphi(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \Delta(x, \xi) \varphi'(\xi) d\xi$$

eşitliği sağlanır. Bu özdeşlik aynı zamanda

$$\varphi(x) - \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) d\xi = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \Delta(x, \xi) \varphi'(\xi) d\xi \quad (2.2)$$

olarak ifade edilebilir. (2.2) özdeşliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra integraller için üçgen eşitsizliği ve φ fonksiyonunun sınırlılık özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \varphi(x) - \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) d\xi \right| \\ & \leq \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^x (\xi - \alpha) |\varphi'(\xi)| d\xi + \frac{1}{\beta - \alpha} \int_x^{\beta} (\beta - \xi) |\varphi'(\xi)| d\xi \\ & \leq \frac{\|\varphi'\|_{\infty}}{\beta - \alpha} \left[\int_{\alpha}^x (\xi - \alpha) d\xi + \int_x^{\beta} (\beta - \xi) d\xi \right] \\ & = \frac{\|\varphi'\|_{\infty}}{\beta - \alpha} \left[\frac{(x - \alpha)^2 + (\beta - x)^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

ifadesi elde edilir. Son olarak,

$$\begin{aligned} (x - \alpha)^2 + (\beta - x)^2 & = \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha \right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} - x \right)^2 \\ & = 2(\beta - \alpha)^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2}{(\beta - \alpha)^2} \right] \end{aligned}$$

özdeşliği (2.3) ifadesinin en sağında yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. Böylece, kanıt tamamlanır (Ostrowski, 1938).

Ostrowski eşitsizliği, birçok alanda uygulamalara sahip olduğundan (2.1) eşitsizliği üzerine pek çok araştırmacı yoğunlaşmıştır. Ostrowski eşitsizliği, birinci türevleri sınırlı olan, yani birinci türevleri $L_\infty[\alpha, \beta]$ uzayına ait olan fonksiyonlar için elde edilmiştir. Birinci türevleri $L_p[\alpha, \beta]$ ve $L_1[\alpha, \beta]$ uzaylarına ait fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler ise Dragomir ve Wang (1997; 1998) tarafından sunulmuştur.

Ostrowski eşitsizliği geniş bir uygulama alanına sahip olduğundan, farklı tipte fonksiyonlar ve genelleştirilmiş çekirdekler kullanılarak birçok Ostrowski tipli eşitsizlik kanıtlanmıştır. Bu tarz çalışmaların sayısı çok fazla olduğundan, burada sadece emsal çalışmalardan bahsedilecektir. Örneğin, Dragomir (2015) mutlak sürekli fonksiyonlar için önemli Ostrowski tipli eşitsizlikler vermiştir. Aynı makalede, bu eşitsizliklerle bağlantılı olan çok sayıda uygulama da sunulmuştur. İki değişkenli fonksiyonlar için Ostrowski tipli bazı eşitsizlikler ise Sarıkaya tarafından kanıtlanmıştır (Sarıkaya, 2010; Sarıkaya, 2012). Bu çalışmalara ek olarak, farklı bir fonksiyon türü olan konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler için Tunç (2013) ve Sarıkaya ve Erden (2014) tarafından sunulan çalışmalar incelenebilir. Bu çalışmalara ek olarak, klasik Ortalama değer teoremi ve Pompeiu ortalama değer teoremi kullanılarak elde edilen Ostrowski tipli sonuçlar da literatürde fazlasıyla bulunmaktadır. Bu çalışmalardan bahsedilemeden önce, gerekli bazı temel tanım ve teoremler aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 2.1.3. (Ortalama Değer Teoremi) $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. O halde (a, b) aralığında

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır (Bayraktar, 2012).

Teorem 2.1.4. (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi) $f, g: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. O halde (a, b) aralığında

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır (Bayraktar, 2012).

Teorem 2.1.5. (İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi) f , $[a, b]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır (Bayraktar, 2012).

Teorem 2.1.6. (Pompeiu Ortalama Değer Teoremi) f fonksiyonu 0 değerini içermeyen $[a, b]$ aralığı üzerinde diferansiyellenebilir reel değerli bir fonksiyon olsun. $[a, b]$ aralığındaki $x_1 \neq x_2$ şartını sağlayan x_1 ve x_2 sayı çifti arasında bir ξ noktası vardır öyle ki,

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(\xi) - \xi f'(\xi) \quad (2.4)$$

özdeşliği sağlanır (Pompeiu, 1946).

Kanıt: $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ üzerinde tanımlı reel değerli bir F fonksiyonu

$$F(t) = t f\left(\frac{1}{t}\right) \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu $\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$ aralığında diferansiyellenebilir olduğundan

$$F'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} f'\left(\frac{1}{t}\right) \quad (2.6)$$

özdeşliği yazılabilir. $[x, y] \subset \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ aralığında F fonksiyonuna ortalama değer teoremi uygulandığında herhangi bir $\eta \in (x, y)$ için

$$\frac{F(x) - F(y)}{x - y} = F'(\eta) \quad (2.7)$$

ifadesi elde edilir. $\eta \in (x, y)$ olduğundan $x_1 < \xi < x_2$ eşitsizliği geçerlidir. (2.7) üzerinde (2.5) ve (2.6) denklemleri kullanılarak

$$\frac{xf\left(\frac{1}{x}\right) - yf\left(\frac{1}{y}\right)}{x - y} = f\left(\frac{1}{\eta}\right) - \frac{1}{\eta} f'\left(\frac{1}{\eta}\right)$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra, burada $x_2 = \frac{1}{x}$, $x_1 = \frac{1}{y}$ ve $\xi = \frac{1}{\eta}$ alınırsa

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x - y} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

özdeşliği elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır.

Not: Burada Pompeiu teoreminin geometrik bir yorumundan bahsedilecektir.

$A(x_1, f(x_1))$ ve $B(x_2, f(x_2))$ noktalarından geçen doğru denklemi

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

ile verilir. Bu doğru y eksenini $C(0, y)$ noktasında kestiğinden

$$\begin{aligned} y &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (0 - x_1) \\ &= \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. $E(\xi, f(\xi))$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemi ise

$$y = (x - \xi) f'(\xi) - f(\xi)$$

şeklindedir. Teğet doğrusu y eksenini $C(0, y)$ noktasında keser, buradan

$$y = -\xi f'(\xi) + f(\xi)$$

sonucu bulunur. Dolayısıyla, Pompeiu ortalama değer teoreminin geometrik anlamı, $A(x_1, f(x_1))$ ve $B(x_2, f(x_2))$ noktalarından geçen doğrunun y eksenini kestiği nokta ile $E(\xi, f(\xi))$ noktasındaki teğet doğrusunun y-eksenini kestiği noktanın aynı olmasıdır (Dragomir, 2005).

Dragomir (2005) Pompeiu ortalama değer teoremini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştir.

Teorem 2.1.7. $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu, $0'$ ı içermeyen $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) açık aralığında diferansiyellenebilir olsun. O halde, her $x \in [a, b]$ için

$$\left| \frac{a+b}{2} \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{b-a}{|x|} \left[\frac{1}{4} + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2} \right] \|f - lf'\|_{\infty} \quad (2.8)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, her $t \in [a, b]$ için $l(t) = t$ olarak tanımlanır ve $\frac{1}{4}$ elde edilebilecek en iyi sabittir (Dragomir, 2005).

Kanıt: Pompeiu ortalama değer teoreminden dolayı, herhangi bir $x, t \in [a, b]$ için x ile t arasında bir ξ noktası vardır öyle ki

$$tf(x) - xf(t) = |f(\xi) - \xi f'(\xi)|(t - x)$$

özdeşliği sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} |tf(x) - xf(t)| &\leq \sup_{\xi \in (a, b)} |f(\xi) - \xi f'(\xi)| |x - t| \\ &= \|f - lf'\|_{\infty} |x - t| \end{aligned} \quad (2.9)$$

ifadesi elde edilir. $t \in (a, b)$ üzerinde integral alınırsa

$$\begin{aligned}
\left| f(x) \int_a^b t dt - x \int_a^b f(t) dt \right| &\leq \|f - lf'\|_{\infty} \int_a^b |x - t| dt \\
&= \|f - lf'\|_{\infty} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right] \\
&= \|f - lf'\|_{\infty} \left[\frac{1}{4} (b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{2.10}$$

elde edilir. $\int_a^b t dt = \frac{b^2-a^2}{2}$ olduğundan (2.10) ifadesinden (2.8) eşitsizliği bulunur.

Şimdi, (2.8)' in $k > 0$ sabiti için geçerli olduğu varsayalım, yani $x \in (a, b)$ için

$$\left| \frac{a+b}{2} \cdot \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{b-a} \int_a^b t dt \right| \leq \frac{b-a}{|x|} \left[k + \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)^2 \right] \|f - lf'\|_{\infty} \tag{2.11}$$

eşitsizliği geçerlidir. $f: [a, b] \rightarrow R$ tanımlı bir fonksiyon ve $\alpha, \beta \neq 0$ olmak üzere $f(t) = \alpha t + \beta$ olsun.

$$\|f - lf'\|_{\infty} = |\beta|$$

ve

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = \frac{a+b}{2} \cdot \alpha + \beta$$

olduğundan ve (2.11) eşitsizliğinden

$$\left| \frac{a+b}{2} \left(\alpha + \frac{\beta}{x} \right) - \left(\frac{a+b}{2} \alpha + \beta \right) \right| \leq \frac{b-a}{|x|} \left[k + \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)^2 \right] |\beta|$$

sonucuna ulaşılır. Herhangi bir $x \in [a, b]$ için

$$\left| \frac{a+b}{2} - x \right| \leq (b-a)k + \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)^2 \quad (2.12)$$

ifadesi elde edilir. (2.12)' de $x = a$ veya $x = b$ alınır, $k \geq \frac{1}{4}$ sonucuna ulaşılır ve bu değer elde edilebilecek en iyi sonuçtur.

Dragomir (2005), (2.8) eşitsizliğinin ağırlıklı versiyonunu da aynı makalede sunmuştur. Aynı zamanda, (2.8) eşitsizliği ile bağlantılı olan nümerik yaklaşım metotları ve özel ortalamalar için uygulamalar verilmiştir (Dragomir, 2005). Sonrasında, Pečarić ve Ungar (2006) p -norm için Pompeiu ortalama değer teoremi ile bağlantılı Ostrowski tipli eşitsizlikler kanıtlamıştır. Yazarlar bu çalışmada $p \rightarrow 1$, $p \rightarrow \infty$ ve $p \rightarrow 2$ durumlarında hangi sonuçlar ortaya çıktığını da incelemiştir. Pachpatte (2005) Pompeiu ortalama teoremi ile iki tane Grüss tipli integral eşitsizliği sunmuştur. Pachpatte (2006) başka bir çalışmasında klasik ortalama değer teoremi olan Cauchy ortalama değer teoremi ve Pompeiu ortalama değer teoreminden faydalanarak Ostrowski tipli sonuçlar elde etmiştir.

Dragomir, Pompeiu ortalama değer teoreminin kuvvet ve üstel versiyonlarını kullanarak lede ettiği Pompeiu tipli eşitsizlikleri Ostrowski tipli sonuçlar bulmak için kullanmıştır (Dragomir, 2014; Dragomir, 2015). Sarıkaya ve diğerleri (2015) değişkenin kuvvetleri alınarak elde edilen Pompeiu tipli eşitsizliklerin ve onların Ostrowski tipli sonuçlarının iki değişkenli versiyonlarını incelemiştir. Pompeiu ortalama değer teoreminin üstel versiyonları yardımıyla bulunan Ostrowski Eşitsizliklerinin iki katlı integraller içeren versiyonları da Sarıkaya ve Erden (2016) tarafından sunulmuştur.

Ahmad ve diğerleri (2014) Pompeiu Ortalama değer teoreminin bir varyasyonundan ve sınırlı fonksiyonlardan faydalanarak Ostrowski tipli sonuçlar elde etmiştir. Daha sonra, Sarıkaya (2015) Ahmad ve diğerlerinin sonuçlarını p -normlar için inceleyerek daha genel versiyonlarını sunmuştur. Sarıkaya ve Budak (2014) Pompeiu ortalama değer teoreminin varyantları üzerinden yeni Ostrowski tipli sonuçlar bulmuşlardır. Sarıkaya (2014) Pompeiu ortalama teoreminin bir çeşidini kullanarak Grüss tipli bir integral eşitsizliği oluşturmuştur. Dragomir başka bir çalışmasında, iki mutlak sürekli fonksiyon kullanarak Pompeiu tipli eşitsizlikler elde etmiş ve bu eşitsizlikleri Ostrowski tipli yeni sonuçlar bulmak için kullanmıştır (Dragomir, 2016).

2.2. Uyumlu Kesirli Hesaplamalar için Bazı Önemli Kavramlar

Başta Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleri olmak üzere literatürde yer alan kesirli türev tanımlarının büyük bir çoğunluğu integral tabanlıdır. Literatürde yer alan bütün kesirli türev tanımlarının klasik türevle tek ortak özelliği lineer olmalarıdır. Kesirli türev tanımlarının bunun dışındaki özellikleri klasik türev tanımı ile örtüşmemektedir. Örneğin, sabit fonksiyonun klasik türevi sıfır iken Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır olmamaktadır. Bunun yanı sıra, klasik türevde yer alan iki fonksiyonun çarpımı, iki fonksiyonun bölümü ve zincir kuralları kesirli türevlerde geçerli değildir.

Khalil vd. (2014) klasik türevin doğal bir genelleştirmesi olan kesirli türev tanımını ortaya koymuştur. Bu kesirli türev tanımı klasik türev ile olan uyumundan dolayı uyumlu kesirli türev (conformable fractional derivative) olarak adlandırılmıştır. Önceki paragrafta bahsettiğimiz diğer kesirli türevler için sağlanmayan iki fonksiyonun çarpımı ve bölümü kuralları uyumlu kesirli türevler için sağlanmaktadır. Aynı zamanda, zincir kuralı da klasik türeve çok yakın bir şekilde ifade edilebilmektedir. Bu konu, bütün bu özelliklerinden dolayı birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir. Mesela, Abdeljawad (2015) sağ ve sol uyumlu kesirli türev kavramlarını, kesirli zincir kuralını, integrasyon formüllerini, uyumlu kesirli kuvvet seri açılımını, Laplace dönüşümünü ve Gronwall eşitsizliğini sunarak bu konunun gelişmesine büyük katkılar sağlamıştır.

Şimdi, uyumlu kesirli türevin analiziyle alakalı bazı temel kavramlar ayrıntılı bir şekilde verilecektir (Khalil vd., 2014; Abdeljawad, 2015).

Tanım 2.2.1. (Uyumlu Kesirli Türev) $f: [0, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. $\forall t > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için f fonksiyonunun uyumlu kesirli türev diye adlandırılan α mertebeli kesirli türevi,

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. f nin α . mertebeden uyumlu kesirli türevini göstermek için bazen $T_{\alpha}(f)(t)$ yerine $f^{(\alpha)}(t)$ ifadesi de kullanılabilir. Ayrıca, α . mertebeden uyumlu kesirli türev mevcutsa bu durum için f , α -diferansiyellenebilirdir denir (Khalil vd., 2014).

Eğer f fonksiyonu $a > 0$ olmak üzere bazı $(0, a)$ aralıklarında α –diferansiyellenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ oluşursa, o zaman

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

olur. Aynı zamanda,

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} f'(t) \quad (2.13)$$

özdeşliği sağlanır ve burada

$$f'(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.2.1. $f: [0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu $t_0 > 0$ noktasında $\alpha \in (0,1)$ için α –diferansiyellenebilir ise f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir denir (Khalil vd., 2014).

Aşağıdaki teoremde verilen uyumlu kesirli türev kuralları önemli bir yere sahiptir.

Teorem 2.2.2. $\alpha \in (0,1]$ için f ve g fonksiyonları, $t > 0$ olmak üzere a noktasında α –diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda,

1. Her $a, b \in R$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$,
2. Her sabit $f(t) = \lambda$ fonksiyonu için $T_\alpha(\lambda) = 0$,
3. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$,
4. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$

kuralları sağlanır (Khalil vd., 2014).

Tanım 2.2.2. (Uyumlu Kesirli İntegral) $\alpha \in (0,1]$ ve $0 \leq a < b$ olsun. Eğer

$$\int_a^b f(x) d_\alpha x := \int_a^b f(x) x^{\alpha-1} dx \quad (2.14)$$

integrali var ve sınırlı ise $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında α -kesirli integrallenebilirdir denir (Khalil vd., 2014).

f fonksiyonunun $\alpha \in (0,1]$ için uyumlu kesirli integrali $J_\alpha^a(f)$ ile gösterilmek üzere

$$J_\alpha^a(f)(t) = J_1^a(t^{\alpha-1}f) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx$$

eşitliği sağlanır, bu özdeşliğin sağındaki integral klasik Riemann integralidir (Khalil vd., 2014).

Teorem 2.2.3. $f: (a, b) \rightarrow R$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda tüm $t > a$ değerleri için

$$J_\alpha^a T_\alpha^a f(t) = f(t) - f(a)$$

olur (Khalil vd., 2014).

Teorem 2.2.4. $f: [a, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun öyle ki $n \in N$ olmak üzere $f^{(n)}(t)$ ifadesi sürekli ve $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. O zaman, her $t > a$ için

$$T_\alpha^a J_\alpha^a f(t) = f(t)$$

ifadesi sağlanır (Abdeljawad, 2015).

Teorem 2.2.5. (Uyumlu Kesirli İntegraller için Kısmi İntegrasyon Kuralı) $f, g: [a, b] \rightarrow R$ iki fonksiyon olsun öyle ki f ve g fonksiyonları diferansiyellenebilirdir. Bu durumda,

$$\int_a^b f(x) T_\alpha^a(g)(x) d_\alpha x = fg|_a^b - \int_a^b g(x) T_\alpha^a(f)(x) d_\alpha x$$

kısmi integrasyon kuralı sağlanır (Abdeljawad, 2015).

Teorem 2.2.6. (Uyumlu Kesirli İntegraller için Üçgen Eşitsizliği) $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu $0 \leq a < b$ olmak üzere $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. O halde

$$|J_\alpha^a(f)(x)| \leq J_\alpha^a|f|(x)$$

integral eşitsizliği sağlanır (Anderson, 2016).

Ayrıca uyumlu kesirli integrallerle ilgili literatürde bu tezin konusuyla bağlantılı birçok çalışma bulunmaktadır. Uyumlu kesirli hesaplamaların gelişmesinde ve matematiksel uygulamalarının kullanılmasında öne çıkan bazı çalışmalar referanslarda verilmiştir. (Khalil vd., 2014; Abu Hammad ve Khalil, 2014; Abdeljawad, 2015; Abdeljawad vd., 2015; Iyiola ve Nwaeze, 2016). Bunlara ek olarak, referanslarda uyumlu kesirli integraller içeren eşitsizlikler için bazı örnek çalışmalardan da bahsedilmiştir (Khan vd., 2018; Usta vd., 2018; Erden, 2020). Örneğin, Anderson (2016) klasik Ostrowski eşitsizliğinin uyumlu kesirli integraller içeren versiyonunu aşağıdaki gibi sunmuştur.

Teorem 2.2.7. $0 \leq a < b$ olmak üzere $a, b, s, t \in R$ ve $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu $\alpha \in (0, 1]$ için α -kesirli diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda, $M = \max_{t \in (a, b)} |T_\alpha f(t)|$ şartını sağlayan M değeri için

$$\left| f(t) - \frac{\alpha}{b^\alpha - a^\alpha} \int_a^b f(t) d_\alpha t \right| \leq \frac{M}{2\alpha(b^\alpha - a^\alpha)} [(t^\alpha - a^\alpha)^2 + (b^\alpha - t^\alpha)] \quad (2.15)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır (Anderson, 2016).

Kanıt: Teorem 2.1.2 de verilen Ostrowski eşitsizliğinin kanıtında kullanılan yöntemlerin aynısı uyumlu kesirli türevler ve integraller dikkate alınarak uygulanırsa, istenilen (2.15) sonucu elde edilir.

Anderson (2016) Ostrowski eşitsizliğini verdiği çalışmada, aynı zamanda Hermite-Hadamard, Steffensen ve Chebyshev gibi birçok temel eşitsizliğin uyumlu kesirli integraller içeren versiyonlarını da kanıtlamıştır. Daha sonra, Usta vd. (2018), Hölder eşitsizliğini kullanarak Anderson tarafından sunulan Ostrowski eşitsizliğine yeni bir üst sınır elde etmişlerdir.

Uyumlu kesirli türevler için Rolle ve Ortalama değer teoremleri Khalil ve diğerleri (2014) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 2.2.8. (Uyumlu Kesirli Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar için Rolle Teoremi)

$\alpha \in (0,1]$ ve $f: [a, b] \subseteq R \rightarrow R$ fonksiyonu sürekli ve $\alpha \in (0,1)$ değerleri için α -diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise, o zaman (a, b) aralığında $f^{(\alpha)}(c) = 0$ şartını sağlayan en az bir c noktası vardır.

Teorem 2.2.9. (Uyumlu Kesirli Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar için Ortalama Değer

Teoremi) $\alpha \in (0,1]$, ve $f: [a, b] \subseteq R \rightarrow R$ fonksiyonu sürekli ve $\alpha \in (0,1)$ değerleri için α -diferansiyellenebilir olsun. O halde (a, b) aralığında

$$f^{(\alpha)}(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{b^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha}}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır

Uyumlu kesirli diferansiyellenebilir fonksiyonlar için genişletilmiş ortalama değer teoremi İyiola ve Nwaeze (2016) tarafından kanıtlanmıştır.

Teorem 2.2.10. $\alpha \in (0,1]$ ve $f, g: [a, b] \subseteq R \rightarrow R$ fonksiyonları sürekli ve $\alpha \in (0,1)$ değerleri için α -diferansiyellenebilir olsun. O halde (a, b) aralığında

$$\frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{g^{(\alpha)}(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (2.16)$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

Sonuç: Eğer (2.16) özdeşliğinde $g(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ seçilirse klasik ortalama değer teoremi elde edilir.

Erden ve Sarıkaya (2021) uyumlu kesirli türevler için Pompeiu ortalama değer teoremini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.11. (Uyumlu Kesirli Türevlenebilir Fonksiyonlar için Pompeiu Ortalama Değer Teoremi) $\alpha \in (0,1]$ ve $f: [a,b] \subseteq R \rightarrow R$ fonksiyonu $0 < a < b$ olmak üzere (a,b) açık aralığında α -kesirli diferansiyellenebilir olsun. $[a,b]$ aralığında yer alan ve $x_1 \neq x_2$ şartını sağlayan x_1 ve x_2 değerleri arasındaki bir ξ noktası için

$$\frac{\frac{x_1^\alpha f(x_2) - x_2^\alpha f(x_1)}{\frac{x_1^\alpha}{\alpha} - \frac{x_2^\alpha}{\alpha}} = \alpha f(\xi) - \xi^{2-\alpha} T_\alpha(f)(\xi) \quad (2.17)$$

özdeşliği sağlanır (Erden ve Sarıkaya, 2021).

Kanıt: $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ üzerinde tanımlı bir F fonksiyonu

$$F(t) = t^{-\alpha} f\left(\frac{1}{t}\right) \quad (2.18)$$

şeklinde verilsin. Uyumlu kesirli türevler için verilen

$$T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$$

özelliklerinden

$$T_\alpha(F)(t) = \alpha f\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t^{2-\alpha}} T_\alpha(f)\left(\frac{1}{t}\right) \quad (2.19)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, $[x, y] \subset \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ aralığında verilen uyumlu kesirli türevlenebilir F fonksiyonuna ortalama değer teoremi uygulandığında her $c \in (x, y)$ için

$$\frac{F(x) - F(y)}{\frac{x^\alpha}{\alpha} - \frac{y^\alpha}{\alpha}} = T_\alpha(F)(c) \quad (2.20)$$

eşitliği bulunur. (2.20) denklemi üzerinde (2.18) ve (2.19) denklemleri kullanılırsa

$$\frac{x^\alpha f\left(\frac{1}{x}\right) - y^\alpha f\left(\frac{1}{y}\right)}{\frac{x^\alpha}{\alpha} - \frac{y^\alpha}{\alpha}} = \alpha f\left(\frac{1}{c}\right) - \frac{1}{c^{2-\alpha}} T_\alpha(f)\left(\frac{1}{c}\right)$$

sonucuna varılır. $c \in (x, y)$ olduğundan $x_1 < \xi < x_2$ olur. Burada $x_2 = \frac{1}{x}$, $x_1 = \frac{1}{y}$ ve $\xi = \frac{1}{c}$ alınırsa

$$\frac{x_1^\alpha f(x_2) - x_2^\alpha f(x_1)}{\frac{x_1^\alpha}{\alpha} - \frac{x_2^\alpha}{\alpha}} = \alpha f(\xi) - \xi^{2-\alpha} T_\alpha(f)(\xi)$$

özdeşliği elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır (Erden ve Sarıkaya, 2021).

Erden ve Sarıkaya (2021), aynı çalışmasında uyumlu kesirli Pompeiu ortalama değer teoremini kullanarak aşağıdaki Ostrowski tipli eşitsizliği elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.12. $\alpha \in (0,1]$ ve $f: [a, b] \subseteq R \rightarrow R$ fonksiyonu $0 < a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralığında α -kesirli diferansiyellenebilir olsun. O zaman, her $x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2\alpha} \frac{f(x)}{x^\alpha} - \frac{1}{b^\alpha - a^\alpha} \int_a^b f(t) d_\alpha t \right| \\ & \leq \frac{(b^\alpha - a^\alpha)}{\alpha x^\alpha} \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{x^\alpha - \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}}{b^\alpha - a^\alpha} \right)^2 \right] \|f - uT_\alpha(f)\|_\infty \end{aligned} \quad (2.21)$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada, $u(t) = \frac{t^{2-\alpha}}{\alpha}$, $t \in [a, b]$, ve $\|f - uT_\alpha(f)\|_\infty = \sup_{\xi \in (a,b)} |f(\xi) - uT_\alpha(f)(\xi)| < \infty$ olarak tanımlanmaktadır (Erden ve Sarıkaya, 2021).

Kanıt: Uyumlu kesirli türevlenebilir fonksiyonlar için Pompeiu ortalama değer teoreminin uygulanması ile herhangi bir $x, t \in [a, b]$ için x ve t arasında bir ξ noktası vardır öyle ki

$$t^\alpha f(x) - x^\alpha f(t) = \left[f(\xi) - \frac{\xi^{2-\alpha}}{\alpha} T_\alpha(f)(\xi) \right] (t^\alpha - x^\alpha) \quad (2.22)$$

denkleminde

$$\left| f(\xi) - \frac{\xi^{2-\alpha}}{\alpha} T_\alpha(f)(\xi) \right| \leq \sup_{\xi \in (a,b)} \left| f(\xi) - \frac{\xi^{2-\alpha}}{\alpha} T_\alpha(f)(\xi) \right| = \|f - uT_\alpha(f)\|_\infty$$

ve eşitsizliğinden

$$|t^\alpha f(x) - x^\alpha f(t)| \leq \|f - uT_\alpha(f)\|_\infty |t^\alpha - x^\alpha| \quad (2.23)$$

sonucu elde edilir. (2.23) eşitsizliğinin her iki tarafı da uyumlu kesirli integraller için a ' dan b ' ye t değişkenine göre integral alınarak,

$$\begin{aligned} & \left| f(x) \int_a^b t^\alpha d_\alpha t - x^\alpha \int_a^b f(t) d_\alpha t \right| \\ & \leq \|f - uT_\alpha(f)\|_\infty \int_a^b |t^\alpha - x^\alpha| d_\alpha t \\ & = \|f - uT_\alpha(f)\|_\infty \left(\int_a^x (x^\alpha - t^\alpha) d_\alpha t + \int_x^b (t^\alpha - x^\alpha) d_\alpha t \right) \end{aligned}$$

sonucu bulunur. Böylece kanıt tamamlanır (Erden ve Sarıkaya, 2021).

Pachpatte (2017) uyumlu kesirli türevler için verilen Pompeiu ortalama değer teoremini kullanarak Grüss tipli eşitsizlikler ortaya koymuştur. Erden ve Sarıkaya (2016) Pompeiu ortalama değer teoremini ve bağlantılı Ostrowski tipli eşitsizlikleri lokal kesirli türevler için

incelemiştir. Bu tez konusu kapsamında ise M -kesirli türevler için Pompeiu ortalama değer teoremi elde edilecek ve bu ortalama değer teoremini taban alan yeni Ostrowski tipli sonuçlar incelenecektir.



3. M-KESİRLİ TÜREV

Bugüne kadar, aralarında Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, Caputo-Hadamard, Riesz ve diğer tanımların da bulunduğu birkaç tür kesirli türev tanıtılmıştır. Bu türevlerin çoğu, Riemann-Liouville kesirli integral tanımının temeline dayanılarak tanımlanır. Riemann-Liouville kesirli türevi integrale bağlı olduğundan çarpma, bölme ve zincir kuralı gibi klasik türev özellikleri Riemann-Liouville kesirli türevinde geçerli değildir. Bu durum Riemann-Liouville kesirli türevinde ve bu kesirli türevi taban alan diğer kesirli türev çeşitlerinde işlem yapmayı zorlaştırmaktadır.

Son zamanlarda Khalil ve diğerleri (2014) tamsayı dereceli hesabın klasik özelliklerini genelleştirmek için mertebesi α , $0 < \alpha < 1$ aralığında olan uyumlu kesirli türevi önerdiler. Bu kesirli türev çeşidinde çarpma, bölme ve zincir kuralı gibi klasik türev özellikleri geçerli olduğundan matematiksel işlemler daha kolay yapılabilir. Bu yüzden, Uyumlu kesirli türev ve alternatif kesirli türevin bazı uygulamaları, kesirli hesap alanında yer kazanmış ve bu tür türevleri kullanan çok sayıda çalışma yayınlanmıştır. Bahsedilen bu çalışmalar: ısı denklemi, Taylor formülü ve dışbükey fonksiyonların bazı eşitsizliklerini içermektedir (Anderson, 2016; Cenesiz ve Kurt, 2015). Sonrasında, Katugampola (2014) tarafından uyumlu kesirli türevlere benzer, klasik özelliklere sahip yeni bir alternatif kesirli türev önerilmiştir.

Bu kadar çeşitli tanımlar verildiğinde, doğal olarak, türev veya integrali, kesirli bir operatör olarak adlandırmak için bir operatör tarafından yerine getirilmesi gereken kriterlerin hangileri olduğunu sorulmalıdır. Ortigueira ve Machado bu tanımların altında yatan kavramları tartışmış ve kendilerine göre bu tür operatörlerin (türevler ve integraller) kesirli olarak adlandırılabilmesi için karşılaması gereken bazı özelliklere dikkat çekmişlerdir (Machado, 2011; Ortigueira ve Machado, 2015). Ortigueira ve Machado, Khalil ve diğerleri (2014) ve Katugampola (2014) tarafından sunulan operatörlerin önerilen kriterleri karşılamadığını öne sürmüştür. Bunun üzerine Katugampola, Ortigueira ve Machado tarafından önerilen kriterleri eleştiren bir çalışma yayınlamıştır (Katugampola, 2016). Bu tartışmalar devam ederken, uyumlu kesirli ve alternatif kesirli hesaplamalar üzerine teorik ve uygulama alanlarında birçok çalışma gerçekleştirilmiştir.

Alternatif kesirli türev çalışmasından (Katugampola, 2014) ve uyumlu kesirli türevler içeren güncel makalelerden (Khalil ve diğerleri, 2014; Abdeljawad, 2015; Iyiola ve Nwaeze, 2016) esinlenen Sousa ve Oliveira (2018) M -kesirli türev teorisini ortaya çıkarmıştır. Sousa ve Oliveira (2018), çalışmasında Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren yerel bir M -türev kavramını tanıtarak bu kavram ile ilgili temel özellikleri sunmuşlardır. Onlar aynı zamanda, M -integral tanımını ve integral hesabının temel teoreminin bir genellemesini vermişlerdir. Aynı çalışmada, yerel M -kesirli türevler içeren lineer diferansiyel denklemler de incelenmiştir (Sousa ve Oliveira, 2018).

Bu bölümde; tez konusu kapsamında elde edilecek yeni sonuçlara ilham kaynağı olan M -kesirli türev ile ilgili temel tanım ve teoremlerden bahsedilecektir. Aynı zamanda, literatürde yer alan bir çalışmada verilen M -kesirli türevler içeren Ostrowski tipli sonuçlardan bahsedilecektir.

Ortigueira ve Machado, bir operatörün

- i. Doğrusallık,
- ii. Birim,
- iii. Klasik türev özelliklerinin sağlanması,
- iv. $\forall \alpha < 0$ ve $\beta < 0$ için $D^\alpha D^\beta f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$ üsler yasası,
- v. $D^\alpha(f(t)g(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} D^i f(t) D^{\alpha-i} g(t)$, genelleştirilmiş Leibniz kuralı

özelliklerini sağlaması durumunda kesirli bir türev olarak kabul edilebileceğini öne sürmüştür (Sousa ve Oliveira, 2018).

Uyumlu ve Alternatif kesirli türevler bu tür özellikleri sağlarlar ancak ne Riemann-Liouville ne de Caputo anlamındaki kesirli türevler bunları sağlamaz. Öte yandan, yukarıda belirtilen kriterleri karşılayan kesirli türevlerde bile istenmeyen özellikler bulmak mümkündür.

Örneğin;

1) Çoğu kesirli türev, eğer α bir doğal sayı değilse, $D^\alpha(1) = 0$ özelliğini sağlamaz. Caputo anlamında türev bu durum için istisnadır.

2) Kesirli türevlerin tümü iki fonksiyon için çarpım kuralına uymaz:

$$D^\alpha(f \cdot g)(t) = f(t)D^\alpha g(t) + g(t)D^\alpha f(t).$$

3) Tüm kesirli türevler, iki fonksiyon için bölüm kuralına uymaz:

$$D^\alpha \left(\frac{f}{g} \right) (t) = \frac{f(t)D^\alpha g(t) - g(t)D^\alpha f(t)}{[g(t)]^2}$$

4) Tüm kesirli türevler zincir kuralına uymaz:

$$D^\alpha (f \circ g)(t) = g^{(\alpha)}(t) f^{(\alpha)}(g(t)).$$

5) Kesirli türevler Rolle teoreminde bir karşılığa sahip değildir.

6) Kesirli türevler ortalama değer teoreminde bir karşılığa sahip değildir.

7) Kesirli türevler genişletilmiş ortalama değer teoreminde bir karşılığa sahip değildir.

8) Caputo türevinin tanımı, f fonksiyonunun klasik anlamda türevlenebilir olduğunu varsayar (Sousa ve Oliveira, 2018).

Bu durumda, yeni uyumlu ve alternatif kesirli türevler, özellikle birinci mertebe durumunda, tamsayı dereceli hesabın klasik özelliklerine mükemmel şekilde uyum sağlar.

3.1. M -Kesirli Türev İçin Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, Sousa ve Oliveira (2018) tarafından tanıtılan M -kesirli türevin ana tanımını vererek alternatif kesirli türev için geçerli eşdeğer sonuçları genelleştiren ve klasik matematikte kullanılan sonuçlara büyük benzerlik gösteren birkaç sonuç sunulacaktır. Bu tanıma dayanarak, yerel M -türevimizin lineer olduğunu, çarpım kuralına, bölüm kuralına, zincir kuralına ve iki α -kesirli türevlenebilir fonksiyonlar için bileşim kuralına uyduğu gösterilecektir. Bir sabitin türevinin sıfır olduğu gösterilip Rolle teoreminin, ortalama değer teoreminin ve genişletilmiş ortalama değer teoreminin "kesirli" versiyonları sunulacaktır. Ayrıca, tamsayı mertebe hesabında olduğu gibi, "kesirli" türevin sürekliliği gösterilecektir.

Yerel M -kesirli türev tanımına geçilmeden önce Gamma ve Mittag-Leffler fonksiyonların iyi bilinmesi gereklidir. Bu yüzden, bölüme Gamma ve Mittag-Leffler fonksiyonlarının tanımları ile başlanacaktır.

Tanım 3.1.1. (Gama Fonksiyonu). $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

olarak tanımlanır. Aynı zamanda

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

integraline geçiş yapmak mümkündür (Podlubny, 1999; Gorenflo ve diğerleri, 2014).

Bu fonksiyonun bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

- i. $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n!$
- ii. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Tanım 3.1.2. (Mittag-Leffler Fonksiyonu) Mittag-Leffler fonksiyonu e^x üstel fonksiyonunun bir genelleştirmesi olup kesirli hesaplamalarda önemli bir yere sahiptir. Bir ve iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonları sırasıyla,

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0 \quad (3.1)$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (3.2)$$

kuvvet serileridir. (3.2) serisi (3.1)' in genelleştirmesidir. Bu genelleştirme 1953'de Agarwal tarafından tanımlanmıştır. (3.2)' de verilen tanımın sonucu olarak

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x E_{\alpha,\alpha+\beta}(x) \quad (3.3)$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta+1}(x) \quad (3.4)$$

yazılır. (3.4) eşitliğinden

$$\frac{d}{dx} E_{\alpha, \beta+1}(x) = \frac{1}{\alpha x} [E_{\alpha, \beta}(x) - \beta E_{\alpha, \beta+1}(x)]$$

olur. Burada β yerine $\beta - 1$ yazılırsa

$$\frac{d}{dx} E_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\alpha x} [E_{\alpha, \beta-1}(x) - (\beta - 1)E_{\alpha, \beta}(x)]$$

olur. Şimdi (3.3) eşitliği kanıtlanmak istenirse (3.2) yardımıyla

$$\begin{aligned} E_{\alpha, \beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} x \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k(\alpha + \beta))} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k(\alpha + \beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x E_{\alpha, \alpha+\beta}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $E_{\alpha, \beta}(0) = 1$ dir (Mittag-Leffler, 1903; Podlubny, 1999; Gorenflo ve diğerleri, 2014).

M -kesirli türev tanımı Sousa ve Oliveira (2018) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 3.1.3. $f: [0, \infty) \rightarrow R$ tanımlı bir fonksiyon ve $t > 0$ olsun. $0 < \alpha < 1$ için, $D_M^{\alpha, \beta} f(t)$ ile gösterilen f fonksiyonunun α -mertebeden yerel M -türevi $\forall t > 0$ için

$$D_M^{\alpha, \beta} f(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t E_{\beta}(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $E_{\beta}(\cdot)$, $\beta > 0$ için tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonudur (Sousa ve Oliveira, 2018).

Eğer f fonksiyonu $a > 0$ şartını sağlayan değerler için $(0, a)$ aralığında α -türevlenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} D_M^{\alpha, \beta} f(t)$ mevcut ise, o halde

$$D_M^{\alpha, \beta} f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} D_M^{\alpha, \beta} f(t)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.1. $0 < \alpha \leq 1$ ve $\beta > 0$ olmak üzere $f: [0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu $t_0 > 0$ için α -türevlenebilir ise, o zaman f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: Aşağıdaki denklemi ele alalım.

$$f(t_0 E_\beta(\varepsilon t_0^{-\alpha})) - f(t_0) = \left(\frac{f(t_0 E_\beta(\varepsilon t_0^{-\alpha})) - f(t_0)}{\varepsilon} \right) \varepsilon \quad (3.5)$$

(3.5) denkleminde eşitliğin her iki tarafının $\varepsilon \rightarrow 0$ için limitini alınırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t_0 E_\beta(\varepsilon t_0^{-\alpha})) - f(t_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(t_0 E_\beta(\varepsilon t_0^{-\alpha})) - f(t_0)}{\varepsilon} \right) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \\ &= D_M^{\alpha, \beta} f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \\ &= 0 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. O halde, f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir.

Tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımı kullanılırsa

$$f(t E_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) = f\left(t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon t^{-\alpha})^k}{\Gamma(\beta k + 1)}\right) \quad (3.6)$$

denklemi yazılır.

(3.6) denkleminde eşitliğin her iki tarafının $\varepsilon \rightarrow 0$ için limiti alınırsa, f sürekli bir

fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(tE_{\beta}(\varepsilon t^{-\alpha})) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon t^{-\alpha})^k}{\Gamma(\beta k + 1)}\right) \\ &= f\left(t \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon t^{-\alpha})^k}{\Gamma(\beta k + 1)}\right) \\ &= f(t)\end{aligned}$$

bulunur. Çünkü Mittag-Leffler fonksiyonunun $\varepsilon \rightarrow 0$ için limiti alındığında, toplama katkıda bulunan tek terim $k = 0$ 'dır, böylece

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon t^{-\alpha})^k}{\Gamma(\beta k + 1)} = 1$$

bulunur (Sousa ve Oliveira, 2018).

Aşağıdaki teoremlerde, tez konusu kapsamında yapılması gereken işlemlerde kullanılacak olan M -kesirli türev özelliklerinden bahsedilecektir.

Teorem 3.1.2. $0 < \alpha \leq 1$, $\beta > 0$, $a, b \in R$ ve f, g fonksiyonları $t > 0$ noktasında M -türevlenebilir olsun.

1) Lineerlik: Yerel M -kesirli türevler için

$$D_M^{\alpha, \beta}(af + bg)(t) = aD_M^{\alpha, \beta}f(t) + bD_M^{\alpha, \beta}g(t)$$

eşitliği sağlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: Tanım 3.1.3 kullanılırsa, o zaman

$$\begin{aligned}D_M^{\alpha, \beta}(af + bg)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(af + bg)(tE_{\beta}(\varepsilon t^{-\alpha})) - (af + bg)(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{af(tE_{\beta}(\varepsilon t^{-\alpha})) + bg(tE_{\beta}(\varepsilon t^{-\alpha})) - af(t) - bg(t)}{\varepsilon}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{af(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - af(t)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{bg(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - bg(t)}{\varepsilon} \\
&= aD_M^{\alpha,\beta} f(t) + bD_M^{\alpha,\beta} g(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Lineerlik özelliği sağlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

2) Çarpım Kuralı: Yerel M -kesirli türevler için

$$D_M^{\alpha,\beta}(f \cdot g)(t) = f(t)D_M^{\alpha,\beta} g(t) + g(t)D_M^{\alpha,\beta} f(t)$$

eşitliği sağlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: Yerel M -kesirli türevlerde Çarpım Kuralının kanıtı için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) = g(t)$$

özdeşliği göz önünde bulundurularak, Tanım 3.1.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&D_M^{\alpha,\beta}(f \cdot g)(t) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}))g(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}))g(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) + f(t)g(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)g(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon} \right) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{g(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - g(t)}{\varepsilon} \right) f(t) \\
&= D_M^{\alpha,\beta}(f)(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) + D_M^{\alpha,\beta}(g)(t) f(t) \\
&= D_M^{\alpha,\beta}(f)(t) g(t) + D_M^{\alpha,\beta}(g)(t) f(t)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır (Sousa ve Oliveira, 2018).

3) Bölüm Kuralı: Yerel M -kesirli türevler için

$$D_M^{\alpha,\beta} \left(\frac{f}{g} \right) (t) = \frac{g(t)D_M^{\alpha,\beta} f(t) - f(t)D_M^{\alpha,\beta} g(t)}{[g(t)]^2}$$

özdeşliği sağlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: Yerel M -kesirli türevlerde Bölüm Kuralının kanıtı için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g \left(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}) \right) = g(t)$$

özdeşliği göz önünde bulundurularak, Tanım 3.1.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned} D_M^{\alpha,\beta} \left(\frac{f}{g} \right) (t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{f \left(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}) \right)}{g \left(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}) \right)} - \frac{f(t)}{g(t)}}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{g(t)f \left(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}) \right) - f(t)g \left(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}) \right) + f(t)g(t) - f(t)g(t)}{\varepsilon}}{g \left(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}) \right) g(t)} \\ &= \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t)f \left(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}) \right) - f(t)}{\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t)g \left(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}) \right) - g(t)}{\varepsilon}}{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g \left(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}) \right) g(t)} \\ &= \frac{g(t)D_M^{\alpha,\beta} f(t) - f(t)D_M^{\alpha,\beta} g(t)}{[g(t)]^2} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir (Sousa ve Oliveira, 2018).

4) Sabitin Türevi: Yerel M -kesirli türevler için

$$D_M^{\alpha,\beta}(c) = 0, \quad f(t) = c$$

olur (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: Tanım 3.1.3 kullanılırsa, istenilen sonuca ulaşmak kolaydır.

5) Diferansiyellenebilme: f fonksiyonu

$$D_M^{\alpha,\beta}(f)(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta+1)} \frac{df(t)}{dt}$$

özellikliğini sağlıyorsa diferansiyellenebilirdir (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: Tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} & tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon t^{-\alpha})^k}{\Gamma(\beta k + 1)} \\ &= t + \frac{\varepsilon t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta + 1)} + \frac{t(\varepsilon t^{-\alpha})^2}{\Gamma(2\beta + 1)} + \frac{t(\varepsilon t^{-\alpha})^3}{\Gamma(3\beta + 1)} + \dots + \frac{t(\varepsilon t^{-\alpha})^n}{\Gamma(n\beta + 1)} + \dots \\ &= t + \frac{\varepsilon t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta + 1)} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{3.7}$$

ifadesi elde edilir. Diğer yandan

$$h = \varepsilon t^{1-\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} + O(\varepsilon) \right)$$

alınırsa

$$\varepsilon = \frac{h}{t^{1-\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + O(\varepsilon) \right)}$$

yazılabilir.

Bu durumda, Tanım 3.1.3 ve (3.7) denklemi kullanılırsa, $\beta > 0$ ve $t > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D_M^{\alpha,\beta} f(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(t + \frac{\varepsilon t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta+1)} + O(\varepsilon^2)\right) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{f(t+h) - f(t)}{ht^{\alpha-1}}}{\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}(1 + \Gamma(\beta+1)O(\varepsilon))} \\ &= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta+1)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{f(t+h) - f(t)}{h}}{(1 + \Gamma(\beta+1)O(\varepsilon))} \\ &= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta+1)} \frac{df(t)}{dt}, \end{aligned}$$

sonucu elde edilir (Sousa ve Oliveira, 2018).

6) Zincir Kuralı: f fonksiyonu $g(t)$ fonksiyonunun görüntü kümesinde diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda,

$$D_M^{\alpha,\beta} (f \circ g)(t) = f'(g(t)) D_M^{\alpha,\beta} g(t)$$

olur (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: $g(t) = a$ sabit fonksiyon ise

$$D_M^{\alpha,\beta} (f \circ g)(t) = D_M^{\alpha,\beta} f(g(t)) = D_M^{\alpha,\beta} f(a) = 0$$

olur. Diğer yandan, g fonksiyonunun a 'nın komşuluğunda bir sabit olmadığını, yani $g(x_1) \neq g(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in (a_0 - \varepsilon_0, a_0 + \varepsilon_0)$ olacak şekilde bir $\varepsilon_0 > 0$ olduğunu

varsayalım. Bu bağlamda, g fonksiyonu a ' da sürekli olduğundan, yeterince küçük ε değerleri için

$$\begin{aligned}
 & D_M^{\alpha,\beta}(f \circ g)(a) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(g\left(aE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})\right)\right) - f(g(a))}{\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(g\left(aE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})\right)\right) - f(g(a))}{g\left(aE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})\right) - g(a)} \cdot \frac{g\left(aE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})\right) - g(a)}{\varepsilon}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

ifadesi geçerlidir. (3.8) denkleminde

$$\varepsilon_1 = g\left(aE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})\right) - g(a) \Rightarrow g\left(aE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})\right) = g(a) + \varepsilon_1$$

değişimi uygulanırsa, $a > 0$ için

$$\begin{aligned}
 D_M^{\alpha,\beta}(f \circ g)(a) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(g\left(aE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})\right)\right) - f(g(a))}{\varepsilon_1} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g\left(aE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})\right) - g(a)}{\varepsilon} \\
 &= f'(g(a)) D_M^{\alpha,\beta} g(a)
 \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Böylece kanıt tamamlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Aşağıdaki iki teoremden, bazı özel fonksiyonların yerel M -kesirli türevleri verilmiştir.

Teorem 3.1.3. $a \in R$, $\beta > 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda,

- (1) $D_M^{\alpha,\beta}(1) = 0$
- (2) $D_M^{\alpha,\beta}(e^{at}) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta+1)} a e^{at}$
- (3) $D_M^{\alpha,\beta}(\sin(at)) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta+1)} a \cos(at)$
- (4) $D_M^{\alpha,\beta}(\cos(at)) = -\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta+1)} \sin(at)$
- (5) $D_M^{\alpha,\beta}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}$

$$(6) D_M^{\alpha,\beta}(t^\alpha) = \frac{\alpha}{\Gamma(\beta+1)}$$

eşitlikleri sağlanır. (Sousa ve Oliveira, 2018).

Teorem 3.1.4. $0 < \alpha \leq 1$, $\beta > 0$ ve $t > 0$ olsun. Bu durumda,

$$(1) D_M^{\alpha,\beta} \left(\sin \left(\frac{1}{\alpha} t^\alpha \right) \right) = \frac{\cos \left(\frac{1}{\alpha} t^\alpha \right)}{\Gamma(\beta+1)}$$

$$(2) D_M^{\alpha,\beta} \left(\cos \left(\frac{1}{\alpha} t^\alpha \right) \right) = -\frac{\sin \left(\frac{1}{\alpha} t^\alpha \right)}{\Gamma(\beta+1)}$$

$$(3) D_M^{\alpha,\beta} \left(e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}} \right) = \frac{e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}}{\Gamma(\beta+1)}$$

sonuçlar sağlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.4' te verilen özdeşlikler, Teorem 3.1.2' nin 5. Maddesi kullanılarak kolaylıkla elde edilebilir.

Şimdi, Tanım 3.1.3' te verilen yerel M -türev anlamında α -türevlenebilir fonksiyonlar için Rolle teoreminin, ortalama değer teoreminin ve genişletilmiş ortalama değer teoreminin kanıtları verilecektir.

Teorem 3.1.5. (M -türevlenebilir fonksiyonlar için Rolle teoremi) $a > 0$ ve $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu

- (1) f , $[a, b]$ üzerinde sürekli;dir;
- (2) f , $\alpha \in (0,1)$ için (a, b) üzerinde α -türevlenebilir;
- (3) $f(a) = f(b)$

şartlarını sağlasın. Bu durumda, $\beta > 0$ için $D_M^{\alpha,\beta} f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ vardır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $f(a) = f(b)$ olduğundan, f fonksiyonu $c \in (a, b)$ noktasında yerel ekstremuma sahiptir. O halde,

$$D_M^{\alpha, \beta} f(c) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{f(cE_\beta(\varepsilon c^{-\alpha})) - f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(cE_\beta(\varepsilon c^{-\alpha})) - f(c)}{\varepsilon}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^\pm} E_\beta(\varepsilon c^{-\alpha}) = 1$ olduğundan, yukarıdaki denklemin sağ tarafındaki iki limit aynı sayının ters işaretlisine karşılık gelir. Dolayısıyla $D_M^{\alpha, \beta} f(c) = 0$ olur (Sousa ve Oliveira, 2018).

Teorem 3.1.6. (M -Türevlenebilir Fonksiyonlar İçin Ortalama Değer Teoremi) $a > 0$ ve $f: [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu

- (1) f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli,
- (2) f fonksiyonu $\alpha \in (0, 1)$ için (a, b) üzerinde α -türevlenebilir,

şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. O halde en az bir $c \in (a, b)$ vardır öyle ki $\beta > 0$ için,

$$D_M^{\alpha, \beta} f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{b^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha}}$$

eşitliği sağlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: g fonksiyonu

$$g(x) = f(x) - f(a) - \Gamma(\beta + 1) \left(\frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha} b^\alpha - \frac{1}{\alpha} a^\alpha} \right) \left(\frac{1}{\alpha} x^\alpha - \frac{1}{\alpha} a^\alpha \right) \quad (3.9)$$

özdeşliği ile verilsin. g fonksiyonu, Rolle teoreminin koşullarını sağlar. O halde $D_M^{\alpha, \beta} f(c) = 0$ özdeşliğini sağlayan en az bir $c \in (a, b)$ vardır. (3.9) denkleminde her iki

tarafın Yerel M -türevi $D_M^{\alpha,\beta}$ alındıktan sonra $D_M^{\alpha,\beta} \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} \right) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}$ ve $D_M^{\alpha,\beta}(c) = 0$ ifadeleri kullanırsa c sabiti için

$$D_M^{\alpha,\beta} f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{b^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha}}$$

özdeşliği bulunur (Sousa ve Oliveira, 2018).

Teorem 3.1.7. (Kesirli M - Türevlenebilir Fonksiyonlar İçin Genişletilmiş Ortalama Değer Teoremi) $a > 0$ ve $f, g: [a, b] \rightarrow R$ tanımlı fonksiyonları

- (1) f ve g fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde sürekli,
- (2) f ve g fonksiyonları $\alpha \in (0,1)$ için α -türevlenebilirdir,

özelliklerini sağlıyorsa, o halde $\beta > 0$ için

$$\frac{D_M^{\alpha,\beta} f(c)}{D_M^{\alpha,\beta} g(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

eşitliği sağlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: $[a, b]$ üzerinde tanımlı F fonksiyonu

$$F(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right) (g(x) - g(a)) \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlansın. F fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli, (a, b) aralığında α -türevlenebilir ve $F(a) = 0 = F(b)$ ise Rolle teoreminden en az bir $c \in (a, b)$ noktası vardır öyle ki herhangi bir $\alpha \in (0,1)$ için $D_M^{\alpha,\beta} F(c) = 0$ dır. (3.10) denkleminin her iki tarafına yerel M -türevi $D_M^{\alpha,\beta}$ uygulanır ve $D_M^{\alpha,\beta}(c) = 0$ gerçeği kullanılırsa

$$\frac{D_M^{\alpha,\beta} f(c)}{D_M^{\alpha,\beta} g(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

sonucu elde edilir (Sousa ve Oliveira, 2018).

Tanım 3.1.4. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için f fonksiyonu n . mertebeden türevlere sahip (normal türev anlamında) bir fonksiyon, $\beta > 0$ ve $\alpha \in (n; n + 1]$ olsun. Buna göre f fonksiyonunun n . mertebeden yerel M -türevi

$$D_M^{\alpha,\beta;n} f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(tE_\beta(\varepsilon t^{n-\alpha})) - f^{(n)}(t)}{\varepsilon} \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanır ancak ve ancak (3.11)' in sağındaki limit mevcuttur (Sousa ve Oliveira, 2018).

Zincir kuralı olarak verilen Teorem 3.1.2' nin 6. Maddesinden ve Tanım 3.1.4' ten yararlanarak, $\alpha \in (n; n + 1]$ için $D_M^{\alpha,\beta;n} f(t) = \frac{t^{n+1-\alpha}}{\Gamma(\beta+1)} f^{(n+1)}(t)$ olduğu görülür ve böylece $t > 0$ için f fonksiyonu $(n + 1)$ kez diferansiyellenebilirdir (Sousa ve Oliveira, 2018).

3.2. M -Kesirli İntegraller İçin Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, bir fonksiyonun M -integralinin tanımı ve M -integral ile ilgili özellikleri verilecektir.

Tanım 3.2.1. (M -İntegral) $a \geq 0$ ve $t \geq a$ olmak üzere $0 < \alpha < 1$ ve $(a, t]$ üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu ele alınsın. Bu durumda, f fonksiyonunun α - mertebeden M -integrali $\beta > 0$ değerleri için

$${}_M I_a^{\alpha,\beta} (f)(t) = \Gamma(\beta + 1) \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Teorem 3.2.1. (M-İntegralin Tersi) $a \geq 0$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Ayrıca, f fonksiyonunun M -integrali ${}_M I_a^{\alpha, \beta} f$ mevcut ise f sürekli bir fonksiyondur. Bu durumda, $t \geq a$ ve $\beta > 0$ olduğunda

$$D_M^{\alpha, \beta} \left({}_M I_a^{\alpha, \beta} f(t) \right) = f(t)$$

eşitliği sağlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: M -türevler için zincir kuralı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} D_M^{\alpha, \beta} \left({}_M I_a^{\alpha, \beta} f(t) \right) &= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta + 1)} \frac{d}{dt} \left({}_M I_a^{\alpha, \beta} f(t) \right) \\ &= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta + 1)} \frac{d}{dt} \left(\Gamma(\beta + 1) \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx \right) \\ &= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta + 1)} \left(\frac{\Gamma(\beta + 1)}{t^{1-\alpha}} f(t) \right) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece kanıt tamamlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Şimdi, M -türev anlamındaki integral hesabının temel teoremini kanıtlanacaktır.

Teorem 3.2.2. (İntegral Hesabın Temel Teoremi) $f: (a, b) \rightarrow R$ bir α -türevlenebilir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. O zaman, her $t > a$ ve $\beta > 0$ için

$${}_M I_a^{\alpha, \beta} \left(D_M^{\alpha, \beta} f(t) \right) = f(t) - f(a)$$

özdeşliği sağlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: f fonksiyonu türevlenebilir olduğundan, Teorem 3.1.2'nin 5. ve 6. maddeleri kullanılırsa

$${}_M I_a^{\alpha, \beta} \left(D_M^{\alpha, \beta} f(t) \right) = \Gamma(\beta + 1) \int_a^t \frac{D_M^{\alpha, \beta} f(t)}{x^{1-\alpha}} dx \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma(\beta + 1) \int_a^t \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta + 1)} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \frac{df(t)}{dt} dx \\
&= \int_a^t \frac{df(t)}{dt} dx \\
&= f(t) - f(a)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $f(a) = 0$ olursa, Teorem 3.2.1 ve (3.13) denkleminde ${}_M I_a^{\alpha, \beta} (D_M^{\alpha, \beta} f(t)) = f(t)$ sonucu ortaya çıkar (Sousa ve Oliveira, 2018).

Teorem 3.2.2' nin yüksek mertebeden türevlenebilir fonksiyonlara genelleştirilmiş hali aşağıdaki teoremdedir verilmiştir (Sousa ve Oliveira, 2018).

Teorem 3.2.3. $t > a$ ve $\alpha \in (n; n + 1]$ olmak üzere $f: [a, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu $(n + 1)$. mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O halde, $\forall t > a$ ve $\beta > 0$ için

$${}_M I_a^{\alpha, \beta} (D_M^{\alpha, \beta} f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$

olur.

Kanıt: M -integralin tanımı ve Teorem 3.1.2' de kanıtlanan zincir kuralı yardımıyla,

$$\begin{aligned}
{}_M I_a^{\alpha, \beta} (D_M^{\alpha, \beta} f(t)) &= {}_M I_a^{n+1} [(t-a)^{\beta-1} D_M^{\alpha, \beta} f^{(n)}(t)] \\
&= {}_M I_a^{n+1} [(t-a)^{\beta-1} (t-a)^{1-\beta} f^{(n+1)}(t)] \\
&= {}_M I_a^{n+1} (f^{(n+1)}(t))
\end{aligned} \tag{3.14}$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra, (3.14) denkleminin sağındaki tamsayı türev için kısmi integrasyon tanımı kullanılırsa

$${}_M I_a^{\alpha, \beta} (D_M^{\alpha, \beta} f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$

denkleminde ulaşılır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Tam mertebeli türevlerde kullanılan kısmi integrasyon yöntemine benzer bir kesirli kısmi integrasyon yöntemi aşağıdaki teoremden verilecektir. Bu teoremin ifadesinden önce, M -integraller için verilen (3.12) ifadesi yardımıyla

$${}_M I_a^{\alpha, \beta}(f)(t) = \Gamma(\beta + 1) \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx = \int_a^t f(x) d_\alpha x$$

özdeşliğinin yazılabileceği hatırlatılmalıdır. Burada $d_\alpha x = \frac{\Gamma(\beta+1)}{x^{1-\alpha}} dx$ dir (Sousa ve Oliveira, 2018).

Teorem 3.2.4. $f, g: [a, b] \rightarrow R$ tanımlı iki fonksiyon olsun öyle ki f ve g fonksiyonları diferansiyellenebilir ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Bu durumda, $\beta > 0$ için

$$\int_a^b f(x) D_M^{\alpha, \beta} g(x) d_\alpha x = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) D_M^{\alpha, \beta} f(x) d_\alpha x \quad (3.15)$$

ifadesi geçerlidir (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: M -integralin tanımını, Teorem 3.1.2’ de verilen zincir kuralı ve tamsayı mertebeli türevler için integral hesabının temel teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) D_M^{\alpha, \beta} g(x) d_\alpha x \\ &= \Gamma(\beta + 1) \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} D_M^{\alpha, \beta} g(x) dx \\ &= \Gamma(\beta + 1) \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta + 1)} \frac{dg(x)}{dt} dx \\ &= \int_a^b f(x) g'(x) dx \\ &= f(x)g(x) \Big|_a^b - \Gamma(\beta + 1) \int_a^b \frac{g(x)}{x^{1-\alpha}} \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta + 1)} \frac{df(x)}{dt} dx \end{aligned}$$

$$= f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) D_M^{\alpha, \beta} f(x) d_\alpha x$$

sonucu elde edilir. Burada $d_\alpha x = \frac{\Gamma(\beta+1)}{x^{1-\alpha}} dx$ olarak tanımlanmaktadır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Teorem 3.2.5. $0 < a < b$ ve $f: [a, b] \rightarrow R$ tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $0 < \alpha < 1$ ve $\beta > 0$ için

$$\left| {}_M I_a^{\alpha, \beta} f(t) \right| \leq \left({}_M I_a^{\alpha, \beta} |f(t)| \right)$$

eşitsizliği sağlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: α – mertebeli M -İntegralin tanımından,

$$\begin{aligned} \left| {}_M I_a^{\alpha, \beta} f(t) \right| &= \left| \Gamma(\beta + 1) \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx \right| \\ &\leq |\Gamma(\beta + 1)| \int_a^t \left| \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} \right| dx \\ &= {}_M I_a^{\alpha, \beta} |f(t)| \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ve böylece kanıt tamamlanır (Sousa ve Oliveira, 2018).

Sonuç 3.2.1. $f: [a, b] \rightarrow R$ tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun öyle ki

$$N = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

olarak verilsin. $\forall t \in [a, b]$, $0 < \alpha < 1$ ve $\beta > 0$ için

$$\left| {}_M I_a^{\alpha, \beta} (f)(t) \right| \leq \Gamma(\beta + 1) N \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha} \right)$$

eşitsizliği elde edilir (Sousa ve Oliveira, 2018).

Kanıt: Teorem 3.2.5' te verilen eşitsizlik kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left| {}_M I_a^{\alpha, \beta} f(t) \right| &\leq {}_M I_a^{\alpha, \beta} |f(t)| \\
&= |\Gamma(\beta + 1)| \int_a^t |f(x)| x^{\alpha-1} dx \\
&\leq \Gamma(\beta + 1) N \int_a^t x^{\alpha-1} dx \\
&= \Gamma(\beta + 1) N \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha} \right)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır (Sousa ve Oliveira, 2018).

3.3. *M*-Kesirli İntegraller İçeren Ostrowski tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, ilk olarak Anastassiou (2021) tarafından sunulan sağ ve sol taraflı yerel *M*-kesirli türev tanımları üzerinden ortalama değer teoremleri verilecektir. Daha sonra, bu ortalama değer teoremi kullanılarak elde edilen Ostrowski tipli sonuçlar sunulacaktır.

Tanım 3.3.1. $f: [a; \infty) \rightarrow R$ ve $t > a$, $a \in R$ olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için $D_{M,a}^{\alpha, \beta} f(t)$ ile gösterilen f fonksiyonunun α -mertebesinden sol taraflı yerel *M*-türevin tanımı $\forall t > a$ ve $\beta > 0$ için

$$D_{M,a}^{\alpha, \beta} f(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t E_\beta(\varepsilon(t-a)^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon}$$

ile verilir. $E_\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\beta k + 1)}$ bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonudur. $D_{M,a}^{\alpha, \beta} f(t)$ türevi $\gamma \in R$ için (a, γ) üzerinde tanımlı ve

$$\lim_{t \rightarrow a^+} D_{M,a}^{\alpha, \beta} f(t)$$

limiti var ise, o halde

$$D_{M,a}^{\alpha, \beta} f(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} D_{M,a}^{\alpha, \beta} f(t)$$

olur (Anastassiou, 2021).

Teorem 3.3.1. $f: [a, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu $\beta > 0$ için $\alpha \in (0,1]$ mertebeden sol taraflı yerel M -türevlere sahip ise, o zaman $t_0 > a$ iken f fonksiyonu t_0 noktasında da süreklidir (Anastassiou, 2021).

Teorem 3.3.2. (M -Türevler için Sol Taraflı Ortalama Değer Teoremi) $\gamma > a$ ve $0 \notin [\gamma, \delta]$ olmak üzere $f: [\gamma, \delta] \rightarrow R$ fonksiyonu

(1) f fonksiyonu $[\gamma, \delta]$ üzerinde süreklidir.

(2) Herhangi bir $\alpha \in (0,1]$ için (γ, δ) üzerinde $D_{M,a}^{\alpha,\beta} f$ türevi vardır.

şartlarını sağlıyorsa, o zaman en az bir $c \in (\gamma, \delta)$ vardır öyle ki

$$f(\delta) - f(\gamma) = (D_{M,a}^{\alpha,\beta} f(c)) \left(\frac{\Gamma(\beta + 1)(c - a)^\alpha}{c} \right) (\delta - \gamma)$$

özdeşliği sağlanır (Anastassiou, 2021).

Tanım 3.3.2. $f: (-\infty, b] \rightarrow R$, $t < b$ ve $b \in R$ olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için ${}^{\alpha,\beta}_{M,b} Df(t)$ ile gösterilen f fonksiyonunun α -mertebesinden sağ taraflı yerel M -türevin tanımı vardır ve $\forall t < b$ ve $\beta > 0$ için

$${}^{\alpha,\beta}_{M,b} Df(t) := -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(tE_\beta(\varepsilon(b-t)^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon}$$

ile verilir. ${}^{\alpha,\beta}_{M,b} Df(t)$ türevi $\gamma \in R$ için (γ, b) üzerinde tanımlı ve

$$\lim_{t \rightarrow b^-} D_{M,b}^{\alpha,\beta} f(t)$$

limiti var ise, o halde

$${}^{\alpha,\beta}_{M,b}Df(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} {}^{\alpha,\beta}_{M,b}Df(t)$$

olur (Anastassiou, 2021).

Teorem 3.3.3. $f: (-\infty, b] \rightarrow R$ fonksiyonu $\beta > 0$ için $\alpha \in (0,1]$ mertebeden sağ taraflı yerel M -türevlere sahip ise, o zaman $t_0 < b$ iken f fonksiyonu t_0 noktasında da süreklidir (Anastassiou, 2021).

Teorem 3.3.4. (M -Türevler için Sağ Taraflı Ortalama Değer Teoremi) $\delta < b$ ve $0 \notin [\gamma, \delta]$ olmak üzere $f: [\gamma, \delta] \rightarrow R$ fonksiyonu

- (1) f fonksiyonu $[\gamma, \delta]$ üzerinde süreklidir.
- (2) Bazı $\alpha \in (0,1]$ noktalar için (γ, δ) üzerinde ${}^{\alpha,\beta}_{M,b}Df$ tanımlıdır.

şartlarını sağlıyorsa, o zaman en az bir $c \in (\gamma, \delta)$ vardır öyle ki

$$f(\delta) - f(\gamma) = ({}^{\alpha,\beta}_{M,b}Df(c)) \left(\frac{\Gamma(\beta + 1)(b - c)^\alpha}{c} \right) (\delta - \gamma)$$

özdeşliği sağlanır (Anastassiou, 2021).

Kesirli türevler $D^{\alpha,\beta}_{M,a}$ ve ${}^{\alpha,\beta}_{M,b}D$, normal türev ve üst mertebeden türevlerin tüm temel özelliklerine sahiptir.

Şimdi, Teorem 3.3.2 ve Teorem 3.3.4' te verilen ortalama değer teoremleri yardımıyla elde edilen Ostrowski tipli sonuçlar verilecektir.

Teorem 3.3.5. (M -Kesirli için Ostrowski Tipli Eşitsizlik) $a < \gamma < \delta < b$, $0 \notin [\gamma, \delta]$ ve $f: [a, b] \rightarrow R$, $[\gamma, \delta]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. $\alpha \in (0,1]$ ve $x_0 \in [\gamma, \delta]$ olmak üzere $D^{\alpha,\beta}_{M,a}$ ve ${}^{\alpha,\beta}_{M,b}D$ türevleri sırasıyla $[\gamma, x_0]$ ile $[x_0, \delta]$ aralıklarında var ve sürekli olsunlar. O zaman

$$\left| \frac{1}{\delta - \gamma} \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx - f(x_0) \right| \leq \frac{\Gamma(\beta + 1)}{2(\delta - \gamma)} \\ \cdot \left[\left\| \frac{D_{M,a}^{\alpha,\beta} f(x)}{x} \right\|_{\infty, [\gamma, x_0]} (x_0 - a)^{\alpha} (x_0 - \gamma)^2 + \left\| \frac{D_{M,b}^{\alpha,\beta} f(x)}{x} \right\|_{\infty, [x_0, \delta]} (b - x_0)^{\alpha} (\delta - x_0)^2 \right]$$

ifadesi sağlanır.

Teorem 3.3.6. Teorem 3.3.5 eşitsizliğinde özel olarak $f(x_0) = 0$ alınırsa,

$$\left| \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx \right| \leq \int_{\gamma}^{\delta} |f(x)| dx \leq \frac{\Gamma(\beta + 1)}{2} \\ \cdot \left[\left\| \frac{D_{M,a}^{\alpha,\beta} f(x)}{x} \right\|_{\infty, [\gamma, x_0]} (x_0 - a)^{\alpha} (x_0 - \gamma)^2 + \left\| \frac{D_{M,b}^{\alpha,\beta} f(x)}{x} \right\|_{\infty, [x_0, \delta]} (b - x_0)^{\alpha} (\delta - x_0)^2 \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

4. M-KESİRLİ TÜREVLER İÇİN POMPEIU TIPLİ EŞİTSİZLİKLER VE OSTROWSKI EŞİTSİZLİĞİNE UYGULAMALARI

Bu bölümde; tez konusu kapsamında ortaya çıkan M -Türevler içeren Ostrowski tipli eşitsizlikler ve onların uygulama alanlarından bahsedilecektir.

4.1. M -Kesirli Türevler İçin Pompei Ortalama Değer Teoremi

Bu bölümde, M -kesirli türevler için Pompeiu ortalama değer teoremi ifade ve kanıt edilecektir.

Teorem 4.1.1. (M -Kesirli Türevlenebilir Fonksiyonlar için Pompeiu Ortalama Değer Teoremi) $\alpha \in (0,1]$ ve $f: [a, b] \subseteq R \rightarrow R$ fonksiyonu $0 < a < b$ olmak üzere (a, b) aralığında M -kesirli diferansiyellenebilir olsun. $[a, b]$ aralığında yer alan ve $x_1 \neq x_2$ şartını sağlayan x_1 ve x_2 değerleri arasındaki bir ξ noktası ve $\beta > 0$ için

$$\frac{x_1^\alpha f(x_2) - x_2^\alpha f(x_1)}{\frac{x_1^\alpha}{\alpha} - \frac{x_2^\alpha}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\Gamma(\beta + 1)} f(\xi) - \xi^{2-\alpha} D_M^{\alpha, \beta} f(\xi) \quad (4.1)$$

özdeşliği sağlanır.

Kanıt: $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ üzerinde tanımlı bir G fonksiyonu

$$G(t) = t^{-\alpha} f\left(\frac{1}{t}\right) \quad (4.2)$$

şeklinde verilsin. M -kesirli türevler için çarpım kuralı kullanılırsa

$$D_M^{\alpha, \beta} G(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(\beta + 1)} f\left(\frac{1}{t}\right) - \left(\frac{1}{t}\right)^{2-\alpha} D_M^{\alpha, \beta} f\left(\frac{1}{t}\right) \quad (4.3)$$

elde edilir. Ayrıca, $[x, y] \subset \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ aralığında verilen uyumlu kesirli türevlenebilir G fonksiyonuna ortalama değer teoremi uygulandığında her $c \in (x, y)$ için

$$\frac{G(x) - G(y)}{\frac{x^\alpha}{\alpha} - \frac{y^\alpha}{\alpha}} = D_M^{\alpha,\beta}(G)(c) \quad (4.4)$$

eşitliği bulunur. (4.2) ve (4.3) ifadeleri kullanılarak (4.4) denklemi yeniden yazılırsa

$$\frac{x^\alpha f\left(\frac{1}{x}\right) - y^\alpha f\left(\frac{1}{y}\right)}{\frac{x^\alpha}{\alpha} - \frac{y^\alpha}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\Gamma(\beta + 1)} f\left(\frac{1}{c}\right) - \left(\frac{1}{c}\right)^{2-\alpha} D_M^{\alpha,\beta} f\left(\frac{1}{c}\right)$$

sonucuna varılır. $c \in (x, y)$ olduğundan $x_2 = \frac{1}{x}$, $x_1 = \frac{1}{y}$ ve $\xi = \frac{1}{c}$ alınırsa $x_1 < \xi < x_2$ olur. Burada

$$\frac{x_1^\alpha f(x_2) - x_2^\alpha f(x_1)}{\frac{x_1^\alpha}{\alpha} - \frac{x_2^\alpha}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\Gamma(\beta + 1)} f(\xi) - \xi^{2-\alpha} D_M^{\alpha,\beta} f(\xi)$$

özdeşliği elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır.

4.2. M -Kesirli İntegraller İçeren Ostrowski Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, M -kesirli türevler için Pompeiu ortalama değer teoremi kullanılarak elde edilen Ostrowski tipli sonuçlar incelenecektir.

Teorem 4.2.1. $\alpha \in (0,1]$ ve $f: [a, b] \subseteq R \rightarrow R$ fonksiyonu $0 < a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralığında M -kesirli diferansiyellenebilir olsun. O zaman, her $x \in [a, b]$ ve $\beta > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma(\beta + 1) \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2\alpha} \frac{f(x)}{x^\alpha} - \frac{1}{b^\alpha - a^\alpha} {}_M I_a^{\alpha,\beta} f(b) \right| \\ & \leq \frac{(b^\alpha - a^\alpha)}{\alpha x^\alpha} \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{x^\alpha - \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}}{b^\alpha - a^\alpha} \right)^2 \right] \|f - u D_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty \end{aligned} \quad (4.5)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $u(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\alpha} t^{2-\alpha}$, $t \in [a, b]$, ve $\|f - u D_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty =$

$\sup_{\xi \in (a,b)} |f(\xi) - uD_M^{\alpha,\beta}(f)(\xi)| < \infty$ olarak tanımlanmaktadır.

Kanıt: M -kesirli türevlenebilir fonksiyonlar için Pompeiu ortalama değer teoreminin uygulanması ile herhangi bir $x, t \in [a, b]$ için x ve t arasında bir ξ noktası vardır öyle ki

$$\begin{aligned} & \Gamma(\beta + 1)[t^\alpha f(x) - x^\alpha f(t)] \\ &= \left[f(\xi) - \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\alpha} \xi^{2-\alpha} D_M^{\alpha,\beta} f(\xi) \right] (t^\alpha - x^\alpha) \end{aligned} \quad (4.6)$$

özdeşliği sağlanır. (4.6)'nın her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} & \Gamma(\beta + 1)|t^\alpha f(x) - x^\alpha f(t)| \\ &= \left| f(\xi) - \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\alpha} \xi^{2-\alpha} D_M^{\alpha,\beta} f(\xi) \right| |t^\alpha - x^\alpha| \\ &\leq |t^\alpha - x^\alpha| \sup_{\xi \in (a,b)} \left| f(\xi) - \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\alpha} \xi^{2-\alpha} D_M^{\alpha,\beta} f(\xi) \right| \\ &= |t^\alpha - x^\alpha| \|f - uD_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty \end{aligned} \quad (4.7)$$

ifadesi elde edilir. (4.7) eşitsizliğinin her iki tarafı a 'dan b 'ye t değişkenine göre M -kesirli integrali alınarak,

$$\begin{aligned} & \Gamma(\beta + 1) \left| f(x) \int_a^b t^\alpha d_\alpha t - x^\alpha \int_a^b f(t) d_\alpha t \right| \\ &\leq \|f - uD_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty \int_a^b |t^\alpha - x^\alpha| d_\alpha t \\ &= \|f - uD_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty \left(\int_a^x (x^\alpha - t^\alpha) d_\alpha t + \int_x^b (t^\alpha - x^\alpha) d_\alpha t \right) \end{aligned}$$

sonucu bulunur. (3.12) özdeşliği yardımıyla gerekli M -kesirli integraller hesaplanırsa (4.5) eşitsizliği bulunur.

Şimdi, Pompeiu tipli eşitsizliklerin ağırlıklı versiyonları için aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 4.2.2. $\alpha \in (0,1]$ ve $f: [a,b] \rightarrow R$ fonksiyonu $0 < a < b$ olmak üzere (a,b) açık aralığında M -kesirli türevlenebilir ve $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Eğer negatif olmayan $w: [a,b] \rightarrow R$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında M -kesirli integrallenebilir ise, her $x \in [a,b]$ ve $\beta > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{x^\alpha} {}_M I_a^{\alpha,\beta}(b^\alpha w(b)) - {}_M I_a^{\alpha,\beta}(w(b)f(b)) \right| \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \|f - u D_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty \\ & \quad \times \left\{ [{}_M I_a^{\alpha,\beta} w(x) - {}_M I_x^{\alpha,\beta} w(b)] + \frac{1}{x^\alpha} [{}_M I_x^{\alpha,\beta}(b^\alpha w(b)) - {}_M I_a^{\alpha,\beta}(x^\alpha w(x))] \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $u(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\alpha} t^{2-\alpha}$, $t \in [a,b]$, ve $\|f - u D_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty = \sup_{\xi \in (a,b)} |f(\xi) - u D_M^{\alpha,\beta}(f)(\xi)| < \infty$ olarak tanımlanmaktadır.

Kanıt: (4.7) eşitsizliğinin her iki tarafı $w(t)$ ile çarpıldıktan sonra $[a,b]$ üzerinde t' ye göre M -kesirli integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \Gamma(\beta+1) \left| f(x) \int_a^b t^\alpha w(t) d_\alpha t - x^\alpha \int_a^b w(t) f(t) d_\alpha t \right| \\ & \leq \|f - u D_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty \int_a^b w(t) |t^\alpha - x^\alpha| d_\alpha t \end{aligned} \quad (4.9)$$

ifadesi elde edilir. (4.9)' un sağındaki M -kesirli integral hesaplanırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^b w(t) |t^\alpha - x^\alpha| d_\alpha t \\ & = \int_a^x w(t) (x^\alpha - t^\alpha) d_\alpha t + \int_x^b w(t) (t^\alpha - x^\alpha) d_\alpha t \\ & = x^\alpha \left[\int_a^x w(t) d_\alpha t - \int_x^b w(t) d_\alpha t \right] + \int_x^b t^\alpha w(t) d_\alpha t - \int_a^x t^\alpha w(t) d_\alpha t \end{aligned}$$

sonucu bulunur. M kesirli integralin gösteriminden yararlanılarak (4.8) eşitsizliğine ulaşılır.

Aşağıdaki teoremden, Teorem 4.2.1’ de verilen eşitsizliğin farklı bir versiyonu sağlanacaktır.

Teorem 4.2.3. $\alpha \in (0,1]$ ve $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $0 < a < b$ olmak üzere (a,b) açık aralığında M -kesirli diferansiyellenebilir olsun. O zaman, her $x \in [a,b]$ ve $\beta > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma(\beta + 1) \frac{f(x)}{\alpha x^\alpha} - \frac{1}{b^\alpha - a^\alpha} {}_M I_a^{\alpha,\beta} \left(\frac{f(b)}{b^\alpha} \right) \right| \\ & \leq \frac{2}{\alpha(b^\alpha - a^\alpha)} \|f - uD_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty \left[\ln \frac{x^\alpha}{\sqrt{a^\alpha b^\alpha}} + \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2x^\alpha} - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $u(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\alpha} t^{2-\alpha}$, $t \in [a,b]$, ve $\|f - uD_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty = \sup_{\xi \in (a,b)} |f(\xi) - uD_M^{\alpha,\beta}(f)(\xi)| < \infty$ olarak tanımlanmaktadır.

Kanıt: (4.7) eşitsizliğinin her iki tarafı $x^\alpha t^\alpha$ ile bölünürse

$$\Gamma(\beta + 1) \left| \frac{f(x)}{x^\alpha} - \frac{f(t)}{t^\alpha} \right| \leq \left| \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{t^\alpha} \right| \|f - uD_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty \quad (4.11)$$

sonucu bulunur. Daha sonra, (4.11)’ in her iki tarafında $[a,b]$ üzerinde t ’ ye göre M -kesirli integral alınır

$$\begin{aligned} & \Gamma(\beta + 1) \left| \frac{f(x)}{x^\alpha} \int_a^b d_\alpha t - \int_a^b \frac{f(t)}{t^\alpha} d_\alpha t \right| \\ & \leq \|f - uD_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty \int_a^b \left| \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{t^\alpha} \right| d_\alpha t \end{aligned} \quad (4.12)$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikte yer alan M -kesirli integralleri hesaplamak için (3.12) özdeşliği kullanılırsa

$$\int_a^b d_\alpha t = \Gamma(\beta + 1) \frac{b^\alpha - a^\alpha}{\alpha}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_a^b \left| \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{t^\alpha} \right| d_\alpha t &= \int_a^x \left(\frac{1}{t^\alpha} - \frac{1}{x^\alpha} \right) d_\alpha t + \int_x^b \left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{t^\alpha} \right) d_\alpha t \\ &= \frac{2\Gamma(\beta+1)}{\alpha} \left[\ln \frac{x^\alpha}{\sqrt{a^\alpha b^\alpha}} + \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2x^\alpha} - 1 \right]\end{aligned}$$

sonuçları elde edilir. Bu sonuçlar (4.12)' de yerine yazılırsa, istenilen (4.10) eşitsizliğine ulaşılır.

Bu bölümün son sonucu olarak Teorem 4.2.3' ün ağırlıklı versiyonu incelenecektir.

Teorem 4.2.4. $\alpha \in (0,1]$ ve $f: [a,b] \rightarrow R$ fonksiyonu $0 < a < b$ olmak üzere (a,b) açık aralığında M -kesirli türevlenebilir ve $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Eğer negatif olmayan $w: [a,b] \rightarrow R$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında M -kesirli integrallenebilir ise, her $x \in [a,b]$ ve $\beta > 0$ için

$$\begin{aligned}& \left| \frac{f(x)}{x^\alpha} {}_M I_a^{\alpha,\beta}(w(b)) - {}_M I_a^{\alpha,\beta} \left(\frac{w(b)f(b)}{b^\alpha} \right) \right| \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \|f - uD_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty \\ & \quad \times \left\{ \left[{}_M I_a^{\alpha,\beta} \frac{w(x)}{x^\alpha} - {}_M I_x^{\alpha,\beta} \frac{w(b)}{b^\alpha} \right] + \frac{1}{x^\alpha} \left[{}_M I_x^{\alpha,\beta}(w(b)) - {}_M I_a^{\alpha,\beta}(w(x)) \right] \right\}\end{aligned}\tag{4.13}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $u(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\alpha} t^{2-\alpha}$, $t \in [a,b]$, ve $\|f - uD_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty = \sup_{\xi \in (a,b)} |f(\xi) - uD_M^{\alpha,\beta}(f)(\xi)| < \infty$ olarak tanımlanmaktadır.

Kanıt: (4.11) eşitsizliğinin her iki tarafı $w(t)$ ile çarpıldıktan sonra $[a,b]$ üzerinde t' ye göre M -kesirli integral alınırsa

$$\begin{aligned}& \Gamma(\beta+1) \left| \frac{f(x)}{x^\alpha} \int_a^b w(t) d_\alpha t - \int_a^b \frac{f(t)}{t^\alpha} w(t) d_\alpha t \right| \\ & \leq \|f - uD_M^{\alpha,\beta}(f)\|_\infty \int_a^b \left| \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{t^\alpha} \right| w(t) d_\alpha t\end{aligned}\tag{4.14}$$

yazılabilir. Daha sonra, (4.14) eşitsizliğinin sağındaki M -kesirli integral hesaplanır ve M -

kesirli integral gösterimlerinden yararlanılırsa, istenilen (4.13) Ostrowski tipli eşitsizliği elde edilir.

4.3. M -Kesirli İntegraller için Nümerik Yaklaşım Uygulamaları

Bu kısımda, M -kesirli integraller içeren eşitsizlikler araştırırken ortaya çıkan hata tahminlerinden bahsedilecektir. İlk olarak, formülleri daha kolay ifade etmek için bazı tanım ve gösterimler verilecektir. İlk olarak, formülleri daha kolay ifade etmek için bazı tanım ve gösterimler verilecektir.

I_n : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ifadesi, $0 < a < b$ şartını sağlayan $[a, b]$ kapalı aralığının bir parçalanışı olsun. Aynı zamanda, burada ortaya çıkan alt aralıklar için $i = 0, \dots, n-1$ olmak üzere $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ve $k_i = x_{i+1}^\alpha - x_i^\alpha$ olsun. Bu kabullerden yola çıkarak yazılabilen

$$S(f, y, I_n) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{2\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(y_i)}{y_i^\alpha} (x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha) k_i \quad (4.15)$$

notasyonu aşağıdaki teoremin ifadesinde kolaylık sağlayacaktır.

Teorem 4.3.1. $\alpha \in (0, 1]$ ve $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $0 < a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralığında M -kesirli diferansiyellenebilir olsun. O zaman, f fonksiyonunun M -kesirli integrali $\beta > 0$ için

$${}_M I_a^{\alpha, \beta} f(b) = S(f, y, I_n) + R(f, y, I_n)$$

gösterimi ile yazılabilir. Burada, $S(f, y, I_n)$ ifadesi (4.15) eşitliğinde tanımlandığı gibidir ve $i = 0, \dots, n-1$ değerleri için $k_i = x_{i+1}^\alpha - x_i^\alpha$ olmak üzere $R(f, y, I_n)$ kalan terimi

$$|R(f, y, I_n)| \quad (4.16)$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \|f - uD_M^{\alpha, \beta}(f)\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} \frac{k_i^2}{y_i^\alpha} k_i \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{y_i^\alpha - \frac{x_i^\alpha + x_{i+1}^\alpha}{2}}{k_i} \right)^2 \right]$$

tahminlerini sağlar. Burada, $u(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\alpha} t^{2-\alpha}$, $t \in [a, b]$, ve $\|f - uD_M^{\alpha, \beta}(f)\|_{\infty} = \sup_{\xi \in (a, b)} |f(\xi) - uD_M^{\alpha, \beta}(f)(\xi)| < \infty$ olarak tanımlanmaktadır.

Kanıt: Teorem 4.2.1' de verilen eşitsizlikler $i = 0, 1, \dots, n-1$ olmak üzere $[x_i, x_{i+1}]$ aralığı üzerinde tekrar ele alınır ve elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa toplandıktan sonra üçgen eşitsizliği uygulanırsa (4.16) tahmini bulunur.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, M -kesirli türevler için Pompeiu ortalama değer teoremi kanıtlanmış ve bu ortalama değer teoremi yardımıyla Ostrowski tipli sonuçlar sunulmuştur. Bunlara ek olarak, eşitsizlikleri araştırırken ortaya çıkan hata tahminleri için nümerik integrasyon uygulamaları verilmiştir. Tezin genel yapısı özetlenecek olursa, literatür araştırması sonucunda elde edilen bilgiler tez konusu kapsamında özetlenerek 2. ve 3. Bölümde yazılmıştır. 4. bölümde, M -kesirli türevler için kanıtlanan Pompeiu ortalama değer teoremi, bu teorem ile ilgili eşitsizlikler ve nümerik integrasyon uygulamaları alt başlıklar halinde sunulmuştur.

Bu tez konusu kapsamında eşitsizliklerin gelişim süreci tarihsel bir şekilde anlatıldıktan sonra, yeni eşitsizliklerin nasıl elde edileceği detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Bu doğrultuda, farklı kesirli hesaplamalar ya da farklı tarzda fonksiyonlar kullanılarak yeni eşitsizlikler ve uygulamaları üzerine araştırmalar yapılabilir. Örneğin, bu tezde Sousa ve Oliveira (2018) tarafından verilen M -kesirli türev tanımı kullanılarak sonuçlar elde edilmiştir. Benzer sonuçlar, Anastassiou (2021) tarafından sunulan sağ ve sol taraflı yerel M -kesirli türev tanımları kullanılarak incelenebilir. Aynı zamanda, literatürde M -kesirli türevler ile ilgili çok az sayıda çalışma bulunması, bu tezin M -kesirli türevler için öncü bir çalışma olduğunu göstermektedir. M -kesirli integraller içeren eşitsizlikler ile ilgili çalışmalar ise yok denecek kadar azdır. Sonuç olarak, ilgili okuyucular bu tezde elde edilen sonuçlar üzerinden yeni eşitsizlikler ve uygulama alanları geliştirebilirler.

KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279: 57–66.
- Abdeljawad, T., Horani, M. A. ve Khalil, R. (2015). Conformable fractional semigroup operators. *Journal of Semigroup Theory and Applications*, Article ID 7.
- Abu Hammad, M. ve Khalil, R. (2014). Abel's formula and wronskian for conformable fractional differential equations. *International Journal of Differential Equations and Applications*, 13 (3): 177-183.
- Ahmad, F., Mir, N. A. ve Sarikaya, M. Z. (2014). An inequality of Ostrowski type via variant of Pompeiu's mean value theorem. *J. Basic. Appl. Sci. Res*, 4(4): 204-211.
- Anastassiou, G. (2021). M# fractional integral inequalities. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 29 (6): 1153-1158.
- Anderson, D. R. (2016). Taylor's formula and integral inequalities for conformable fractional derivatives. *Contributions in mathematics and engineering*. Springer, Cham, 25-43.
- Balcı, M. (2012). *Matematik Analiz*. 7. Baskı, İstanbul, Türkiye: Sürat Üniversite Yayınları.
- Cenesiz Y. ve Kurt, A. (2015). The solutions of time and space conformable fractional heat equations with conformable Fourier transform. *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica*, 7, 130-140.
- Cerone, P., Dragomir S. S. ve Roumeliotis, J. (1998). An inequality of Ostrowski type for mappings whose second derivatives are bounded and applications. *Research Group in Mathematical Inequalities and Applications*, 1 (1): Article 4, 35-42.
- Dragomir, S.S. (2005). An inequality of Ostrowski type via Pompeiu's mean value theorem. *J. of Inequal. in Pure and Appl. Math.*, 6(3): Art. 83.
- Dragomir, S. S. (2015). A functional generalization of Ostrowski inequality via Montgomery identity. *Acta Math. Univ. Comenian (N.S.)*, 84(1): 63-78
- Dragomir, S. S. ve Barnett, N. S. (1998). An Ostrowski type inequality for mappings whose second derivatives are bounded and applications. *Research Group in Mathematical Inequalities and Applications*, 1 (2): 67-76.
- Dragomir, S. S., Cerone, P. ve Roumeliotis, J. (2000). A new generalization of Ostrowski's integral inequality for mappings whose derivatives are bounded and applications in numerical integration and for special means. *Applied Mathematics Letters*, 13: 19-25.
- Dragomir, S. S. ve Wang, S. (1997). A new inequality of Ostrowski's type in L_p - norm and applications to some special means and to some numerical quadrature rules. *Tamkang J. of Math.*, 28: 239-244.

- Dragomir, S. S. ve Wang, S. (1998). A new inequality of Ostrowski's type in L_1 -norm and applications to some special means and to some numerical quadrature rules. *Indian Journal of Mathematics*, 40 (3): 299-304.
- Dragomir, S. S. (2016). Ostrowski via a two functions Pompeiu's inequality, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 24 (3): 123-140.
- Dragomir, S. S. (2015). Exponential Pompeiu's type inequalities with applications Ostrowski's inequality, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 184 (1): 39-50.
- Dragomir, S. S. (2014). Power Pompeiu's type inequalities for absolutely continuous functions with applications to Ostrowski's inequality, *Studia Universitatis Babes-Bolyai. Mathematica*, 59(2): 131-140.
- Erden, S. (2020). Weighted inequalities involving Conformable integrals and its applications for Random variables and Numerical integration. *Filomat*, 34 (8): 2785-2796.
- Erden, S., ve Sarikaya, M. Z. (2016). On exponential Pompeiu's type inequalities for double integrals with applications to Ostrowski's inequality, *New Trends Math. Sci*, 4 (1): 25-47.
- Erden, S. ve Sarikaya, M. Z. (2016). Generalized Pompeiu type inequalities for local fractional integrals and Its Applications. *Applied Math. and Computations*, 274: 282-291.
- Erden, S. ve Sarikaya, M. Z. (2021). Pompeiu type inequalities using conformable fractional calculus and its applications, *Jordan Journal of Mathematics and Statistics (JJMS)*, 14(3): 527-544.
- Iyiola, O. S. ve Nwaeze, E. R. (2016). Some new results on the new conformable fractional calculus with application using D'Alembert approach, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2(2): 115-122.
- Gorenflo, R., Kilbas, A. A., Mainardi, F., ve Rogosin, S. V. (2014). Mittag-Leffler functions, related topics and applications (Vol. 2). *Berlin: Springer*.
- Katugampola, U. N. (2014). A new fractional derivative with classical properties. arXiv:1410.6535v2.
- Katugampola, U. N. (2016). Correction to "What is a fractional derivative?" by Ortigueira and Machado [Journal of Computational Physics, volume 293, 15 July 2015, pages 4–13. Special issue on Fractional PDEs]. *Journal of Computational Physics*, 321-1255-1257.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh M. (2014). A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational Applied Mathematics*, 264: 65-70.
- Khan, M. A., Begum, S., Khurshid, Y., ve Chu, Y. M. (2018). Ostrowski type inequalities

- involving conformable fractional integrals. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018(1): 1-14.
- Machado, J. T. (2011). And I say to myself: "What a fractional world!". *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 14 (4): 635-654.
- Mittag-Leffler, G. M. (1903). Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$, *CR Acad. Sci. Paris*, 137: 554-558
- Mitrinovic, D. S. (1970). *Analytic Inequalities. 1th ed., Berlin, Germany: Springer- Verlag*, s. 27-196.
- Ortigueira, M. D. ve Machado, J. T. (2015). What is a fractional derivative?. *Journal of computational Physics*, 293: 4-13.
- Ostrowski, A. M. (1938). Über die absolutabweichung einer differentiebaren funktion von ihrem integralmittelwert. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 10: 226-227.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equation, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego*. 198.
- Pompeiu, D. (1946). Sur une proposition analogue au théorème des accroissements finis, *Mathematica (Cluj, Romania)*, 22: 143-146.
- Pečarić, J. ve Ungar, Š, (2006). On an inequality of Ostrowski type, *J. Ineq. Pure & Appl. Math.* 7 (4): Art. 151.
- Pachpatte, B. G. (2005). On Grüss like integral inequalities via Pompeiu's mean value theorem. *J. Inequal. Pure Appl. Math*, 6 (3): Art. 82.
- Pachpatte, B. G. (2006). New Ostrowski type inequalities via mean value theorems. *J. Inequal. Pure and Appl. Math*, 7(4): Art. 137.
- Pachpatte, D. B. (2017). Some Gruss type Inequalities using Pompeiu's mean value theorem on Conformable Fractional Calculus. *arXiv preprint arXiv:1708.06888*.
- Sarikaya, M. Z. (2010). On the Ostrowski type integral inequality. *Acta Math. Univ. Comenianae*, LXXIX (1): 129-134.
- Sarikaya, M. Z. (2012). On the Ostrowski type integral inequality for double integrals. *Demonstratio Mathematica*, XLV (3): 533-540.
- Sarikaya, M. Z. (2014). On an inequality of Grüss type via variant of Pompeiu's mean value theorem, *Pure and Applied Mathematics, Letters*, 2: 26-30.
- Sarikaya, M. Z. (2015). Some new integral inequalities via variant of Pompeiu's mean value theorem, *Mathematica Moravica*, 19 (2), 89-95.

- Sarikaya, M. Z. ve Budak, (2014). On an Inequality of Ostrowski Type via Variant of Pompeiu's Mean Value Theorem, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2 (3): 80-84.
- Sarikaya, M. Z. ve Erden, S. (2014). On the weighted integral inequalities for convex functions. *Acta Universitatis Sapientiae Mathematica*, 6 (2): 194-208.
- Sarikaya, M. Z., Erden, S. ve Yıldız, H. (2015). On power pompeiu type inequalities for double integrals, *South Bohemia Mathematical Letters*, 23 (1): 13-85.
- Sarikaya, M. Z., Budak, H. ve Erden, S. (2019). On new inequalities of Simpson's type for generalized convex functions, *Korean J. Math.*, 27 (2): 279-295.
- Sarikaya, M. Z. ve Erden, S. (2016). New Weighted Integral Inequalities for Twice Differentiable Convex Functions. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 40 (1): 15-33.
- Sousa, J. V. D. C. ve de Oliveira, E. C. (2018). On the local M -derivative. *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 4 (4): 479-492.
- Tunç, M. (2013). Some Hadamard like inequalities via convex and s -convex functions and their applications for special means. *Mediterr. J. Math.*, 11:1047-1059.
- Usta, F., Budak, H., Tunc, T. ve Sarikaya, M. Z. (2018). New bounds for the Ostrowski type inequalities via conformable fractional calculus. *Arabian Journal of Matheamtics*, 7: 317-328.

ÖZGEÇMİŞ