



M- METRİK GEOMETRİSİNDE ÜÇGENLER

YÜKSEL LİSANS TEZİ

Öznur YÖNTEM

Danışman

Prof. Dr. Nilgün SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2024

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEL LİSANS TEZİ

M- METRİK GEOMETRİSİNDE ÜÇGENLER

Öznur YÖNTEM

Danışman

Prof. Dr. Nilgün SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2024

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

04 / 07 / 2024

Öznur YÖNTEM

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

M- METRİK GEOMETRİSİNDE ÜÇGENLER

Öznur YÖNTEM

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Nilgün SÖNMEZ

Bu tez çalışmasının amacı M- metrik geometrisinde düzlem lineer yapı olarak hemen hemen Öklid düzlemi ile aynıdır. Fakat uzaklık fonksiyonu farklıdır.

Çalışmamız altı bölümden oluşmakta olup, ilk bölümü girişe ayrılmıştır.

İkinci bölümde tezde yer alan konuların tarihsel gelişimini inceleyen literatür bilgilerine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde çalışmamıza yardımcı olacak temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde d_m metriğindeki uzaklık kavramlarıyla ilgili tanımlar ve teoremler belirtilmiştir.

Beşinci bölümde Öklid düzlemindeki bazı üçgenlerle ilgili formüllerin m düzlemindeki karşılıkları incelenmiştir.

Altıncı bölümde tezde elde edilen sonuçlar ve tartışmalar kısaca özetlenmiş ve sunulmuştur.

2024, x + 110 sayfa

Anahtar Kelimeler: Metrik geometri, Üçgenler

ABSTRACT
M. Sc. Thesis

TRIANGLES IN M- METRIC GEOMETRY

Öznur YÖNTEM

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Nilgün SÖNMEZ

The aim of this thesis is that the plane in M-metric geometry is almost the same as the Euclidean plane in terms of linear structure. But the distance function is different.

Our study consists of six chapters, the first part of which is devoted to the introduction.

In the second chapter, literature information examining the historical development of the topics in the thesis is included.

In the third section, basic definitions and theorems that will help us with our work are given.

In the fourth chapter, definitions and theorems regarding the distance concepts in the d_m metric were stated.

In the fifth chapter, the equivalents of the formulas related to some triangles in the Euclidean plane in the m plane were examined.

In the sixth chapter, the results and discussions obtained in the thesis are briefly summarized and presented.

2024, x + 110 pages

Keywords: Metric geometry, Triangles

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin, başlangıcından sonuna kadar her koşulda yanımda olan ve tez çalışmamın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr Nilgün SÖNMEZ' e büyük katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemde büyük desteği olan uzakta olsalarda her daim yanımda olan annem Nurgül ARSLAN, babam Uğur ARSLAN'a, kardeşlerim İlknur YILMAZ, Aynur ARSLAN BULUŞAN ve Aycan YÖNTEM'e her koşulda desteklerini esirgemeyen annem Filiz YÖNTEM ve babam ZEYNAL YÖNTEM' e, hayatımın her koşulunda yanımda olan biricik eşim Atacan YÖNTEM ve kızım Adel Mira' ya çok teşekkür ederim.

Öznur YÖNTEM

Afyonkarahisar 2024

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR BİLGİLERİ	3
3. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
3.1 Metrik Kavramı ve Metrik Geometri İle İlgili Tanımlar	4
4. UZAKLIK FONKSİYONU	6
4.1 d_m Uzaklık Fonksiyonu.....	6
4.2 d_m Uzaklığının Geometrik Yorumu	10
4.3 d_m Metriği	13
4.4 m -Düzleminde Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı.....	21
4.4.1 Öklid Uzaklığına Göre Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı	22
4.4.2 Maksimum Uzaklığına Göre Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı	22
4.4.3 d_m Metriğine Göre Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı.....	25
4.5 m -Düzleminde Doğruların Sınıflandırılması	27
5. ÖKLİD DÜZLEMİNDEKİ BAZI ÜÇGEN FORMÜLLERİNİN m - DÜZLEMİNDEKİ BENZERLERİ	28
5.1 Thales Bağintıları.....	28
5.1.1 Öklid Düzleminde Thales Bağintıları	28
5.1.2 Thales Bağintılarının m - Düzlemi Benzeri	30
5.2 Kenarortay Teoremi	36
5.2.1 Öklid Düzleminde Kenarortay Teoremi.....	36
5.2.2 Kenarortay Teoremi m - Düzlemi Benzeri.....	37
5.3 İç Açıortay Teoremi.....	52
5.3.1 Öklid Düzleminde İç Açıortay Teoremi.....	52
5.3.2 İç Açıortay Teoremi m - Düzlemi Benzeri	53

5.4 Dış Açortay Teoremi	61
5.4.1 Öklid Düzleminde Dış Açortay Teoremi	61
5.4.2 Dış Açortay Teoreminin m - Düzlemi Benzeri	62
5.5 Öklid Bağlıntıları	71
5.5.1 Öklid Düzleminde Öklid Bağlıntıları	71
5.5.2 Öklid Bağlıntılarının m - Düzlemi Benzeri	72
5.6 Pisagor Teoremi	84
5.6.1 Öklid Düzleminde Pisagor Teoremi	84
5.6.2 Pisagor Teoreminin m - Düzlemi Benzeri	85
5.7 Stewart Teoremi	88
5.7.1 Öklid Düzleminde Stewart Teoremi	88
5.7.2 Stewart Teoreminin m - Düzlemi Benzeri	89
5.8 Menelaus Teoremi	103
5.8.1 Öklid Düzleminde Menelaus Teoremi	103
5.8.2 Menelaus Teoreminin m - Düzlemi Benzeri	104
5.9 Ceva Teoremi	105
5.9.1 Öklid Düzleminde Ceva Teoremi	105
5.9.2 Ceva Teoreminin m - Düzlemi Benzeri	106
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	108
7. KAYNAKLAR	109
ÖZGEÇMİŞ	110

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

d_M	Maksimum uzaklık
d_E	Öklid uzaklık
d_m	m - Uzaklığı
m_{AB}	AB doğrusunun eğimi
l	Düzlemde bir doğru
$\in$	Elemanı
$<$	Küçük
$\leq$	Küçük eşit
$>$	Büyük
$\geq$	Büyük eşit
$\parallel$	Paralel
$\nparallel$	Paralel değil
L_a	$x=a$ doğrusu
$L_{m,b}$	$y=mx+b$ doğrusu

Kısaltmalar

max	Maksimum
-----	----------

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 σ (m) çift fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığı	8
Şekil 4.2 Pozitif eğimli doğru parçalarında d_m uzaklığı	10
Şekil 4.3 Negatif eğimli doğru parçalarında d_m uzaklığı	11
Şekil 4.4 y-eksenine paralel doğru parçalarında d_m uzaklığı	11
Şekil 4.5 x-eksenine paralel doğru parçalarında d_m uzaklığı.....	12
Şekil 4.6 Çakışık noktalar arası d_m uzaklığı	12
Şekil 4.7 $d_E(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ durumu	15
Şekil 4.8 $d_E(A, B) \leq d_E(A, C) + d_M(C, B)$ durumu.....	17
Şekil 4.9 Öklid uzaklığına göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı.....	22
Şekil 4.10 Maksimum uzaklığına göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı.....	23
Şekil 4.11 y eksenine paralel doğrularda bir noktanın bir doğruya uzaklığı.....	24
Şekil 4.12 Pozitif eğimli bir l doğrusu için A noktasının l doğrusuna uzaklığı	25
Şekil 4.13 Negatif eğimli bir l doğrusu için A noktasının l doğrusuna uzaklığı.....	26
Şekil 4.14 m düzleminde doğruların sınıflandırılması.....	27
Şekil 5.1 Thales uzunluğu.....	29
Şekil 5.2 Öklid düzleminde Thales uzunluğu	29
Şekil 5.3 d_1, d_2, d_3 doğruları negatif eğimli iken m düzleminde Thales uzunluğu.....	30
Şekil 5.4 d_1, d_2, d_3 doğruları pozitif eğimli iken m düzleminde Thales uzunluğu	33
Şekil 5.5 Öklid düzleminde Kenarortay uzunluğu.....	36
Şekil 5.6 A köşesinde hiç temel doğrusu olmayan ve $m_a < 0$ durumundaki Kenarortay uzunluğu.....	40
Şekil 5.7 A köşesinde hiç temel doğrusu olmayan ve $m_a > 0, m_b < 0$ durumundaki Kenarortay uzunluğu.....	42
Şekil 5.8 A köşesinde bir tek temel doğrusu olan ve $m_a < 0$ durumundaki Kenarortay uzunluğu.....	42

Şekil 5.9 A köşesinde bir tek temel doğrusu olan ve $m_a < 0, m_b > 0$ durumundaki Kenarortay uzunluğu	44
Şekil 5.10 A köşesinde bir tek temel doğrusu olan ve $m_a > 0, m_b > 0$ durumundaki Kenarortay uzunluğu	45
Şekil 5.11 A köşesinde iki temel doğrusu olan ve E noktası A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalan ve $m_a < 0, m_b > 0$ durumundaki Kenarortay uzunluğu	47
Şekil 5.12 A köşesinde iki temel doğrusu olan ve E noktası A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalan ve $m_a > 0$ durumundaki Kenarortay uzunluğu.....	48
Şekil 5.13 A köşesinde iki temel doğrusu olan ve E noktası A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalmayan ve $m_a < 0, m_b < 0$ durumundaki Kenarortay uzunluğu	49
Şekil 5.14 A köşesinde iki temel doğrusu olan ve E noktası A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalmayan ve $m_a > 0, m_b > 0$ durumundaki Kenarortay uzunluğu	50
Şekil 5.15 İç Açıortay uzunluğu	52
Şekil 5.16 Öklid düzleminde İç Açıortay uzunluğu.....	53
Şekil 5.17 $m_a > 0, m_b > 0, m_c > 0$ iken m düzleminde İç Açıortay uzunluğu	54
Şekil 5.18 $m_a < 0, m_b > 0, m_c > 0$ iken m düzleminde İç Açıortay uzunluğu	54
Şekil 5.19 $m_a > 0, m_b > 0, m_c < 0$ iken m düzleminde İç Açıortay uzunluğu	55
Şekil 5.20 $m_a < 0, m_b > 0, m_c < 0$ iken m düzleminde İç Açıortay uzunluğu	55
Şekil 5.21 $m_a > 0, m_b < 0, m_c > 0$ iken m düzleminde İç Açıortay uzunluğu	57
Şekil 5.22 $m_a < 0, m_b < 0, m_c > 0$ iken m düzleminde İç Açıortay uzunluğu	57
Şekil 5.23 $m_a > 0, m_b < 0, m_c < 0$ iken m düzleminde İç Açıortay uzunluğu	59
Şekil 5.24 $m_a < 0, m_b < 0, m_c < 0$ iken m düzleminde İç Açıortay uzunluğu	59
Şekil 5.25 Dış Açıortay uzunluğu	61
Şekil 5.26 Öklid düzleminde Dış Açıortay uzunluğu	62
Şekil 5.27 m düzleminde Dış Açıortay uzunluğu	63

Şekil 5.28 $m_a > 0, m_b > 0, m_c > 0$ iken m düzleminde Dış Açortay uzunluğu.....	63
Şekil 5.29 $m_a < 0, m_b > 0, m_c > 0$ iken m düzleminde Dış Açortay uzunluğu	63
Şekil 5.30 $m_a > 0, m_b > 0, m_c < 0$ iken m düzleminde Dış Açortay uzunluğu	65
Şekil 5.31 $m_a < 0, m_b > 0, m_c < 0$ iken m düzleminde Dış Açortay uzunluğu	65
Şekil 5.32 $m_a > 0, m_b < 0, m_c > 0$ iken m düzleminde Dış Açortay uzunluğu	67
Şekil 5.33 $m_a < 0, m_b < 0, m_c > 0$ iken m düzleminde Dış Açortay uzunluğu	67
Şekil 5.34 $m_a > 0, m_b < 0, m_c < 0$ iken m düzleminde Dış Açortay uzunluğu	69
Şekil 5.35 $m_a < 0, m_b < 0, m_c < 0$ iken m düzleminde Dış Açortay uzunluğu	69
Şekil 5.36 Öklid düzlemde Öklid uzunluğu.....	71
Şekil 5.37 $m_h > 0, m_k < 0$ iken m düzleminde Öklid uzunluğu.....	73
Şekil 5.38 $m_h < 0, m_k < 0$ iken m düzleminde Öklid uzunluğu.....	73
Şekil 5.39 $m_h > 0, m_k > 0$ iken m düzleminde Öklid uzunluğu.....	76
Şekil 5.40 $m_h < 0, m_k > 0$ iken m düzleminde Öklid uzunluğu.....	76
Şekil 5.41 $m_h = \infty, m_k < 0$ iken m düzleminde Öklid uzunluğu	79
Şekil 5.42 $m_h = 0, m_k > 0$ iken m düzleminde Öklid uzunluğu.....	79
Şekil 5.43 $m_h < 0, m_k = 0$ iken m düzleminde Öklid uzunluğu.....	81
Şekil 5.44 $m_h > 0, m_k = \infty$ iken m düzleminde Öklid uzunluğu	81
Şekil 5.45 Pisagor uzunluğu.....	84
Şekil 5.46 Öklid düzleminde Pisagor uzunluğu.....	85
Şekil 5.47 m düzleminde Pisagor uzunluğu.....	86
Şekil 5.48 Öklid düzlemde Stewart uzunluğu	88
Şekil 5.49 A köşesinde hiç temel doğrusu olmayan ve $m_a < 0$ durumundaki Stewart uzunluğu.....	91
Şekil 5.50 A köşesinde hiç temel doğrusu olmayan ve $m_a > 0, m_b < 0$ durumundaki Stewart uzunluğu.....	93
Şekil 5.51 A köşesinde bir tek temel doğrusu olan ve $m_a < 0$ durumundaki Stewart uzunluğu.....	93

Şekil 5.52 A köşesinde bir tek temel doğrusu olan ve $m_a < 0, m_b > 0$ durumundaki Stewart uzunluğu.....	95
Şekil 5.53 A köşesinde bir tek temel doğrusu olan ve $m_a > 0, m_b > 0$ durumundaki Stewart uzunluğu	96
Şekil 5.54 A köşesinde iki tane temel doğrusu olan ve X noktası A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalan ve $m_a < 0, m_b > 0$ durumundaki Stewart uzunluğu	98
Şekil 5.55 A köşesinde iki tane temel doğrusu olan ve X noktası A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalan ve $m_a > 0$ durumundaki Stewart uzunluğu.....	99
Şekil 5.56 A köşesinde iki tane temel doğrusu olan ve X noktası A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalmayan ve $m_a < 0, m_b < 0$ durumundaki Stewart uzunluğu.....	100
Şekil 5.57 A köşesinde iki tane temel doğrusu olan ve X noktası A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalmayan ve $m_a > 0, m_b > 0$ durumundaki Stewart uzunluğu.....	101
Şekil 5.58 Menelaus uzunluğu	103
Şekil 5.59 Öklid düzleminde Menelaus uzunluğu	104
Şekil 5.60 m düzleminde Menelaus uzunluğu	105
Şekil 5.61 Öklid düzlemde Ceva uzunluğu.....	106
Şekil 5.62 m düzleminde Ceva uzunluğu.....	107

1. GİRİŞ

Öklid'in yaşıamı konusunda hemen hemen hiçbir şey bilinmiyordu. Öklid, gelmiş geçmiş matematikçiler içerisinde adı geometri ile en çok özdeşleştirilen kişidir. Geometri dünyasında kapladığı bu seçkin yeri kendisinin büyük bir matematikçi olmasından çok, geometrinin başlangıcından kendi zamanına kadar bilinen bütün bilgileri ismi ile "Elements (Elemanlar)" adını taşıyan kitabında toplamasıyla elde etmiştir. Bu yapıt binlerce yıl geometri derslerinde kaynak olarak kullanıldı ve günümüzde hala kullanılmaya devam etmektedir.

Elemanlar da nokta, çizgi, yüzey ve cisim gibi geometrik kavramlar tanımlandıktan sonra, aksiyomlara geçilmiştir. Önce bazı tanımlar, ardından aksiyomlar ve postulatlar verilerek teoremler bunlara dayalı olarak ispatlanmıştır.

Aksiyom; doğruluğu açık olan önermedir. Öklid' in aksiyomları:

1. Aynı şeye eşit olan şeyler birbirlerine eşittir.
2. Eşit miktarlara eşit miktarlar eklenirse, eşitlik bozulmaz.
3. Eşit miktarlardan eşit miktarlar çıkarılırsa, eşitlik bozulmaz.
4. Birbirine çakışan şeyler birbirine eşittir.
5. Bütün parçadan büyüktür.

Aksiyomlardan sonra postulatlara geçilmiştir.

Postulat; ispat edilmeksizin doğru olduğu kabul edilen önermedir. Öklid' in postulatları:

1. İki nokta arasını birleştiren en kısa yol bir doğrudur.
2. Bir doğru, doğru olarak sonsuza kadar uzatılabilir.
3. Bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bir çemberdir.
4. Bütün dik açılar birbirine eşittir.
5. İki doğru bir üçüncü doğru tarafından kesilirse, içte meydana gelen açılarının toplamının iki dik açıdan küçük olduğu yönde bu iki doğru kesişir (Türk 2010).

Öklid' in "Elemanlar" adlı eserinde ele aldığı düzlem geometrisinde başka bir deyişle Öklid geometrisinde düzlemde bulunan koordinatları $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olan noktaların arasındaki uzaklık

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu uzaklık üzerinde tanımlandığı düzlemle bir metrik geometrisi oluşturmaktadır. Bu uzaklığa aynı zamanda Öklid uzaklığı da denilmektedir.

Ancak bunun dışında farklı uzaklık fonksiyonları kullanılarak oluşan metrik geometriler de söz konusudur. Farklı uzaklıklardan bazıları şunlardır: (Krause 1975, Turan 2004, Senlin, Donghai, Alonso 2005, Salihova 2006, Şimşek 2013)

$$d_T(A, B) = |(x_1 - x_2)| + |(y_1 - y_2)|$$

$$d_M(A, B) = \max \{ |(x_1 - x_2)|, |(y_1 - y_2)| \}$$

$$d_S(A, B) = \min \{ |(x_1 - x_2)|, |(y_1 - y_2)| \}$$

$$d_C(A, B) = \max \{ |(x_1 - x_2)| + (\sqrt{2} - 1) \cdot |(y_1 - y_2)|, |(y_1 - y_2)| + (\sqrt{2} - 1) \cdot |(x_1 - x_2)| \}$$

$$d_3(A, B) = \sqrt[3]{(x_1 - x_2)^3 + (y_1 - y_2)^3}$$

$$d_m(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, & (x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \geq 0 \text{ ise} \\ \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}, & (x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

2. LİTERATÜR BİLGİLERİ

Metrik ve metrik geometrinin temel yapısı uzaklık fonksiyonu (Martin 1998) referansında verilmiştir. Öklid uzaklığı ile maksimum uzaklık arasındaki ilişki de gösterilmiştir. Bu ilişki kullanılarak d_m uzaklık fonksiyonu ve bu fonksiyonun metrikliği belirtildi.

d_m uzaklık fonksiyonu (Senlin, Donhai, Alonso 2005, Şimşek 2013) referanslarında verilmiştir. d_m metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı (Şimşek 2013) referansında verilmiştir.

Bu incelemeler sonucunda (Kaya 2005, Özcan, Kaya 2002, Özcan, Kaya 2003, Çolakoğlu 2005) referanslar dikkate alınarak Öklid düzlemindeki Thales Bağlantıları, Kenarortay Teoremi, İç Açıortay Teoremi, Dış Açıortay Teoremi, Öklid Bağlantıları, Pisagor Teoremi, Stewart Teoremi, Menelaus Teoremi ve Ceva Teoremi' nin m düzlemindeki benzerleri incelenmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1 Metrik Kavramı ve Metrik Geometri İle İlgili Tanımlar

Tanım 3.1.1 : Elemanları noktalar olarak tanımlanan bir P kümesi, P nin doğrular olarak tanımlanan bazı alt kümelerinin topluluğu L , I da nokta ve doğrular arasında üzerinde olma (incidence) bağıntısı olmak üzere (P, L, I) sistemi aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa bu sistem bir **soyut geometri** olarak adlandırılır.

i) Her $A, B \in P$ için $A \in l$ ve $B \in l$ olacak şekilde en az bir $l \in L$ doğrusu vardır.

ii) Her doğru en az iki noktayı kapsar.

(P, L, I) soyut geometrisi $S = (P, L, I)$ şeklinde gösterilir (Şimşek 2013).

Tanım 3.1.2: $S = (P, L, I)$ soyut geometrisi aşağıdaki şartları sağlıyorsa **incidence geometridir**, denir.

i) L de farklı iki noktayı üzerinde bulunduran bir tek doğru vardır.

ii) Doğrudaş olmayan üç $A, B, C \in P$ noktası vardır (Şimşek 2013).

Tanım 3.1.3: Bir $d : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa bir **metriktir**, denir.

M₁: Her $A, B \in P$ için $d(A, B) \geq 0$ ve $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

M₂: Her $A, B \in P$ için $d(A, B) = d(B, A)$

M₃: Her $A, B, C \in P$ için $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (Şimşek 2013)

Tanım 3.1.4: $S = (P, L, I)$ incidence geometrisinin bir doğrusu l olsun. d , S üzerindeki uzaklık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $f : l \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu l için bir cetveldir, denir.

i) f fonksiyonu bire-bir ve örtendir.

ii) l üzerindeki her P, Q nokta çifti için

$$|f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$$

dir. Bu denkleme **cetvel denklemi** denir (Şimşek 2013).

Tanım 3.1.5: (P, L, I) incidence geometrisi d uzaklık fonksiyonu ile beraber her $l \in L$ için bir cetvele sahip ise cetvel postulatını sağlıyor, denir. Bu durumda $M = (P, L, I, d)$ ye bir **metrik geometri** denir (Salihova 2006, Şimşek 2013).



4. UZAKLIK FONKSİYONU

4.1 d_m Uzaklık Fonksiyonu

Bu bölümde (Martin 1998, Salihova 2006, Şimşek 2013) kaynaklarından yararlanılarak Öklid ve maksimum uzaklıklarının tanımı yapılmış ve Öklid ile maksimum uzaklık arasındaki ilişki incelenmiştir. Sonrasında d_m uzaklık fonksiyonunun tanımı yapıp, bu fonksiyon geometrik olarak yorumlanmıştır.

Tanım 4.1.1 : $d_E : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^2$, $B \in \mathbb{R}^2$ ve $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ olmak üzere,

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

şeklinde tanımlı d_E uzaklık fonksiyonuna **Öklid uzaklık fonksiyonu** denir ve bu fonksiyon bir metrik belirtir.

Tanım 4.1.2: $d_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^2$, $B \in \mathbb{R}^2$ ve $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ olmak üzere,

$$d_M(A, B) = \max\{|(x_1 - x_2)|, |(y_1 - y_2)|\}$$

şeklinde tanımlı d_M uzaklık fonksiyonuna **maksimum uzaklık** fonksiyonu denir ve bu fonksiyon bir metrik belirtir.

Teorem 4.1.1 : l , analitik düzlemde $A=(x_1, y_1)$ ve $B=(x_2, y_2)$ noktalarından geçen bir doğru olsun. $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$ iken l nin eğimi m ise

$$d_M(A, B) = \sigma(m) d_E(A, B),$$

$$\sigma(m) = \begin{cases} 1/\sqrt{1+m^2} & , \quad |m| < 1 \text{ ise} \\ |m|/\sqrt{1+m^2} & , \quad |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: Eğer l , x - eksenine paralel ise $m = 0$ ve $\sigma(m)=1$, y - eksenine paralel ise $|m| \rightarrow \infty$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(m) = 1$ olur. Bu durumda $d_M(A, B) = d_E(A, B)$ dir. l doğrusu x ve y - eksenine paralel olmasın. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ olmak üzere A ve B den geçen doğru $ax+by+c = 0$

olsun. O halde $A = (x_1, -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b})$ ve $B = (x_2, -\frac{a}{b}x_2 - \frac{c}{b})$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 d_M(A, B) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\
 &= \max\left\{|x_1 - x_2|, \left| \left(-\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}\right) - \left(-\frac{a}{b}x_2 - \frac{c}{b}\right) \right|\right\} \\
 &= \max\left\{|x_1 - x_2|, \left| -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b} + \frac{a}{b}x_2 + \frac{c}{b} \right|\right\} \\
 &= \max\left\{|x_1 - x_2|, \left| -\frac{a}{b}(x_1 - x_2) \right|\right\} \\
 &= \max\left\{|x_1 - x_2|, \left| -\frac{a}{b} \right| |x_1 - x_2|\right\} = |x_1 - x_2| \left\{1, \left| \frac{a}{b} \right| \right\}
 \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$d_E(A, B) = |x_1 - x_2| \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

bulunur. O halde,

$$\frac{d_M(A, B)}{d_E(A, B)} = \frac{|x_1 - x_2| \max\left\{1, \left| \frac{a}{b} \right|\right\}}{|x_1 - x_2| \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}} = \frac{\max\left\{1, \left| \frac{a}{b} \right|\right\}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}}$$

elde edilir. Buradan da,

$$d_M(A, B) = \frac{\max\left\{1, \left| \frac{a}{b} \right|\right\}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}} d_E(A, B)$$

bağıntısı bulunur. $-\frac{a}{b} = m$ olduğunu biliyoruz. O halde yukarıdaki bağıntı şöyle ifade edilebilir:

$$d_M(A, B) = \frac{\max\{1, |m|\}}{\sqrt{1 + |m|^2}} d_E(A, B)$$

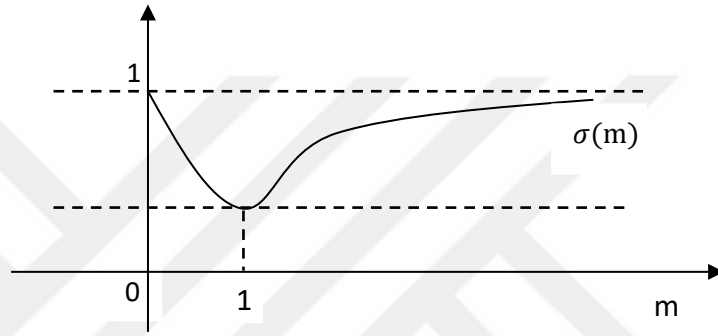
Bu bağıntıdan görüldüğü gibi, d_M – uzaklığı aynı doğru boyunca Öklidyen uzaklıkta pozitif bir sabitin çarpımına eşittir. Bu sabiti $\sigma(m)$ ile gösterelim.

$$\sigma(m) = \begin{cases} 1/\sqrt{1+m^2} & , \quad |m| < 1 \text{ ise} \\ |m|/\sqrt{1+m^2} & , \quad |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$d_M(A, B) = \sigma(m) d_E(A, B)$$

elde edilir. Ayrıca $\sigma(m)$ çift fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığındaki grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.1 $\sigma(m)$ çift fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığındaki grafiği

Teorem 4.1.2 : $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde farklı iki nokta olsun.

Eğer $Q=(x,y)$ noktası P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru üzerinde ise,

$$\frac{d_E(P_1, Q)}{d_E(Q, P_2)} = \frac{d_M(P_1, Q)}{d_M(Q, P_2)}$$

dir.

İspat : P_1, P_2 noktalarından geçen doğru x veya y- eksenine paralel ise

$d_M(P_1, P_2) = d_E(P_1, P_2)$, dolayısıyla oranlar eşittir. $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ ve P_1, P_2 noktalarından geçen doğrunun eğimi m olsun.

$$d_E[P_1 Q] = d_E(P_1, Q) = |x_1 - x|\sqrt{1+m^2},$$

$$d_E[QP_2] = d_E(Q, P_2) = |x - x_2|\sqrt{1+m^2},$$

$$d_M[P_1Q] = d_M(P_1, Q) = |x_1 - x| \max\{1, |m|\},$$

$$d_M[QP_2] = d_M(Q, P_2) = |x - x_2| \max\{1, |m|\},$$

dir. Buradan

$$\frac{d_E[P_1Q]}{d_E[QP_2]} = \frac{|x_1 - x| \sqrt{1 + m^2}}{|x - x_2| \sqrt{1 + m^2}} = \frac{|x_1 - x|}{|x - x_2|}$$

olduğu açıktır. $|m| < 1$ ise $\max\{1, |m|\} = 1$ olduğundan $d_M[P_1Q] = |x_1 - x|$ ve

$d_M[QP_2] = |x - x_2|$ olur. Bu durumda

$$\frac{d_E[P_1Q]}{d_E[QP_2]} = \frac{|x_1 - x|}{|x - x_2|}$$

elde edilir. Benzer şekilde $|m| \geq 1$ ise $\max\{1, |m|\} = |m|$ olduğundan

$$\frac{d_M[P_1Q]}{d_M[QP_2]} = \frac{|x_1 - x|}{|x - x_2|}$$

olur. Böylece her iki durumda da oranlar eşittir.

Teorem 4.1.3 : $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktalarından geçen l doğrusunun eğimi $m < 0$ iken maksimum uzaklık kullanılacağından maksimum uzaklıklar oranı ile Öklid uzaklıklar oranı eşittir.

Genel olarak,

$$\frac{d_E(P_1, Q)}{d_E(P_2, Q)} = \frac{d_M(P_1, Q)}{d_M(P_2, Q)}$$

Tanım 4.1.3 : $d_m : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^2$, $B \in \mathbb{R}^2$ ve $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ olmak üzere, d_m uzaklık fonksiyonu,

$$d_m(A, B) = \begin{cases} d_E(A, B), & (x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \geq 0 \text{ ise} \\ d_M(A, B), & (x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

veya

$$d_m(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, & (x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \geq 0 \text{ ise} \\ \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}, & (x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

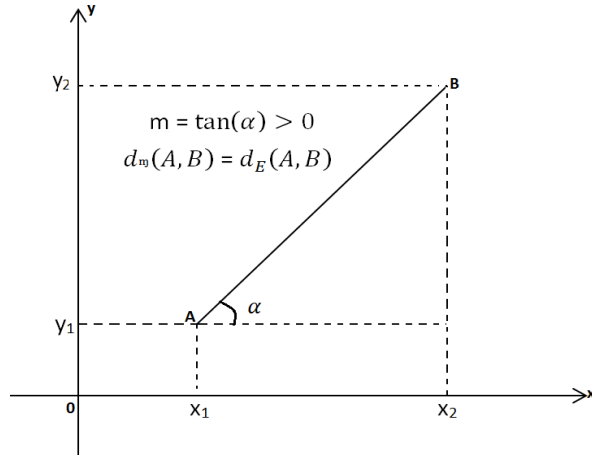
şeklinde tanımlıdır (Senlin, Donghai, Alonso 2005, Şimşek 2013).

m - Düzlemi veya $\mathbb{R}_m^2$ nin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Dolayısıyla, üçgenler aynıdır ve açılarda aynı yolla ölçülür.

4.2 d_m Uzaklığının Geometrik Yorumu

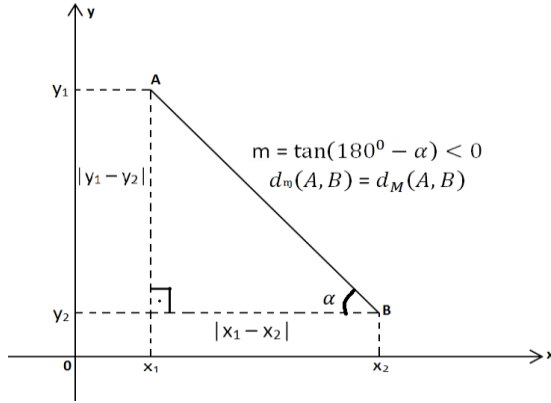
d_m uzaklık fonksiyonunda A noktası ile B noktası arasındaki uzaklığı hesaplarken $(x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2)$ çarpımının işaretine göre işlem yapılmaktadır. İki ifadenin çarpımı ile bölümünün işareti aynı olacağından $(x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2)$ ifadesi ile $\frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}$ ifadesinin işareti aynıdır. Bu bölüm ise aynı zamanda AB nin eğimidir. Bu durum göz önünde bulundurulduğundan aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar. Bu sonuçlar şunlardır:

A) $(x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) > 0$ ise $m_{AB} > 0$ dır (Şekil 4.2).



Şekil 4.2 Pozitif eğimli doğru parçalarında d_m uzaklığı

B) $(x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) < 0$ ise $m_{AB} < 0$ dır (Şekil 4.3).



Şekil 4.3 Negatif eğimli doğru parçalarında d_m uzaklığı

C) $(x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) = 0$ ise aşağıdaki durumlar söz konusudur:

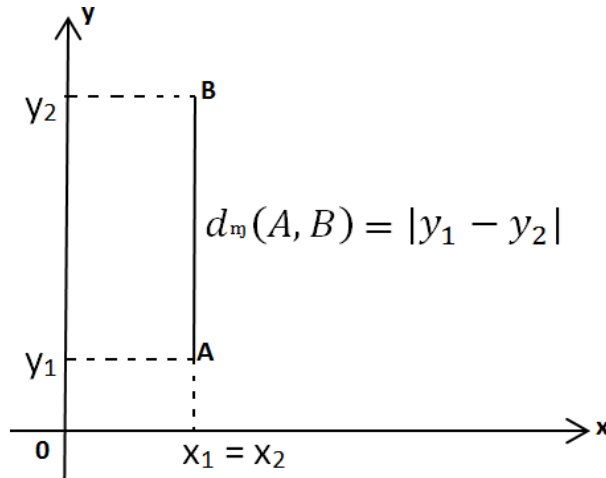
C1) $(x_1 - x_2) = 0$ ve $(y_1 - y_2) \neq 0$ ise m_{AB} tanımsızdır. Yani AB, y- eksenine paraleldir. Böylece $d_m(A, B) = d_E(A, B)$,

$$d_m(A, B) = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|$$

$$d_m(A, B) = d_M(A, B),$$

$$d_m(A, B) = \max \{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \} = |y_1 - y_2|$$

dir. Bu durumda da $d_E(A, B) = d_M(A, B) = |y_1 - y_2|$ olduğu açıktır (Şekil 4.4).

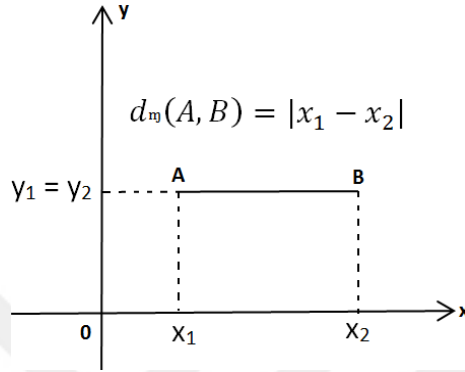


Şekil 4.4 y-eksenine paralel doğru parçalarında d_m uzaklığı

C₂ $(x_1 - x_2) \neq 0$ ve $(y_1 - y_2) = 0$ ise $m_{AB} = 0$ dır. Yani AB, x- eksenine paraleldir. Böylece C₁ seçeneğine benzer bir inceleme yapıldığında,

$$d_m(A, B) = d_M(A, B) = d_E(A, B) = |x_1 - x_2|$$

sonucu elde edilir (Şekil 4.5).

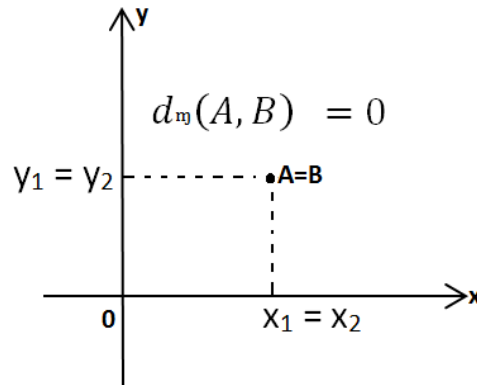


Şekil 4.5 x-eksenine paralel doğru parçalarında d_m uzaklığı

C₃ $(x_1 - x_2) = 0$ ve $(y_1 - y_2) = 0$ ise $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olduğundan $A = B$ dir. Bu ise, geometrik olarak A ve B noktalarının üst üste çakışık olduğu anlamına gelir. Böylece,

$$d_m(A, B) = d_M(A, B) = d_E(A, B) = 0$$

dır (Şekil 4.6).



Şekil 4.6 Çakışık noktalar arası d_m uzaklığı

C₁, C₂, C₃ seçeneklerinin incelenmesi sonucunda $(x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) = 0$ ise

$d_m(A, B) = d_M(A, B) = d_E(A, B)$ olduğu açıktır (Şimşek 2013).

4.3 d_m Metriği

Önerme 4.3.1 : $d_m : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^2$, $B \in \mathbb{R}^2$ ve $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ olmak üzere,

$$d_m(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, & (x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \geq 0 \text{ ise} \\ \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}, & (x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı d_m fonksiyonu bir metriktir.

İspat: Aşağıda Tanım 3.1.3 de belirtilen M_1 , M_2 , M_3 şartlarının ispatı yapılmıştır.

$\mathbb{R}^2$ den seçilmiş herhangi $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ noktaları için,

M_1 :

a) $(x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \geq 0$ olsun.

$(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ ve $(y_1 - y_2)^2 \geq 0$ olduğundan $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \geq 0$ dır. Bu durumda $d_E(A, B) \geq 0$ olduğundan $d_m(A, B) \geq 0$ dır.

$$A=B \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 = y_2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) = 0 \text{ ve } (y_1 - y_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0 \text{ ve } (y_1 - y_2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow d_m(A, B) = 0$$

b) $(x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \leq 0$ olsun.

$|x_1 - x_2| \geq 0$ ve $|y_1 - y_2| \geq 0$, mutlak değer pozitif tanımlı bir fonksiyon olduğundan $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \geq 0$ dır. Bu durumda $d_M(A, B) \geq 0$ olduğundan $d_m(A, B) \geq 0$ dır.

$$A=B \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 = y_2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) = 0 \text{ ve } (y_1 - y_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$$

$$\Leftrightarrow d_m(A, B) = 0$$

M₂ :

a) $(x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \geq 0$ olsun.

Buna göre

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d_E(B, A)$$

olduğundan dolayı

$$d_m(A, B) = d_E(A, B) = d_E(B, A) = d_m(B, A)$$

sonucu elde edilir.

b) $(x_1 - x_2) \cdot (y_1 - y_2) \leq 0$ olsun.

Buna göre

$$d_M(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} = d_M(B, A)$$

olduğundan dolayı

$$d_m(A, B) = d_M(A, B) = d_M(B, A) = d_m(B, A)$$

sonucu elde edilir.

M₃ :

A, B, C noktaları için $d_m(A, B) \leq d_m(A, C) + d_m(C, B)$ olduğunu göstermek için aşağıdaki sekiz ifadenin doğru olduğu ispatlanmalıdır.

a) $d_E(A, B) \leq d_E(A, C) + d_E(C, B)$

b) $d_E(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$

c) $d_E(A, B) \leq d_E(A, C) + d_M(C, B)$

d) $d_E(A, B) \leq d_M(A, C) + d_E(C, B)$

e) $d_M(A, B) \leq d_E(A, C) + d_E(C, B)$

f) $d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$

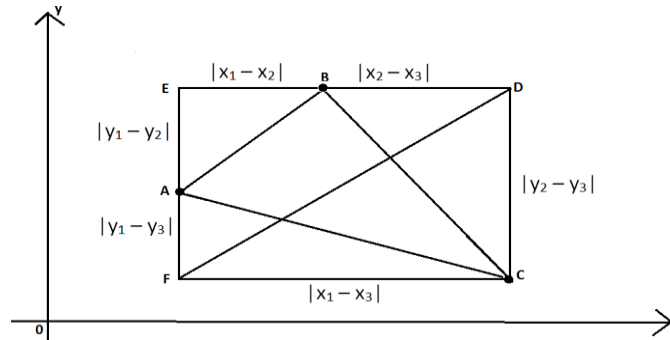
g) $d_M(A, B) \leq d_E(A, C) + d_M(C, B)$

h) $d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_E(C, B)$

Herhangi bir koşula bağlı olmaksızın $d_M(A, B) \leq d_E(A, B)$ olduğundan ilk dört ifade kanıtlandığında son dört ifade de ispatlanmış olur.

a) Üçgen eşitsizliğinden doğruluğu açıktır.

b) $m_{AB} \geq 0$, $m_{AC} \leq 0$, $m_{CB} \leq 0$ olması veya bu eğimlerden herhangi birisinin tanımsız olması durumunda $d_E(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ ifadesi yazılabilir. Bu durumu sağlayan noktaları analitik düzlemde işaretleyelim. Daha sonra bu noktaların belirttiği üçgenin etrafına bir dikdörtgen çizelim (Şekil 4.7).



Şekil 4.7 $d_E(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ durumu

Şekil dikdörtgen olduğundan DFC üçgeni dik üçgendir. Bu durumda pisagor teoreminden aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$[d_E(F, D)]^2 = [d_E(F, C)]^2 + [d_E(C, D)]^2 \Rightarrow$$

$$[d_E(A, B)]^2 \leq [d_E(F, D)]^2 = |x_1 - x_3|^2 + |y_2 - y_3|^2 \leq (|x_1 - x_3| + |y_2 - y_3|)^2 \text{ ise}$$

$$d_E(A, B) \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3| \text{ dir.}$$

Şimdi maksimum uzaklık için incelemeye başlayalım.

$$\mathbf{b_1)} |y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3| \text{ ve } |x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3| \text{ ise,}$$

$$d_E(A, B) \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3| \leq |y_1 - y_3| + |x_2 - x_3| = d_M(A, C) + d_M(C, B)$$

$$\mathbf{b_2)} |y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3| \text{ ve } |x_2 - x_3| \leq |y_2 - y_3| \text{ ise,}$$

$$d_E(A, B) \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3| \leq |y_1 - y_3| + |y_2 - y_3| = d_M(A, C) + d_M(C, B)$$

$$\mathbf{b_3)} |y_1 - y_3| \leq |x_1 - x_3| \text{ ve } |x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_3| \text{ ise,}$$

$$d_E(A, B) \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3| \leq |x_1 - x_3| + |x_2 - x_3| = d_M(A, C) + d_M(C, B)$$

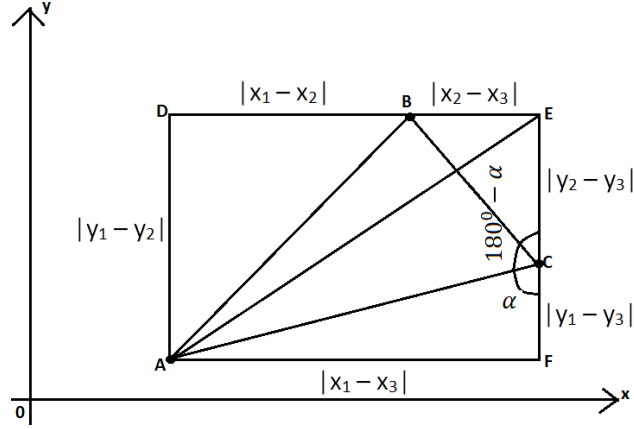
$$\mathbf{b_4)} |y_1 - y_3| \leq |x_1 - x_3| \text{ ve } |x_2 - x_3| \leq |y_2 - y_3| \text{ ise,}$$

$$d_E(A, B) \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3| = d_M(A, C) + d_M(C, B) \text{ olur ki sonuç olarak,}$$

$$d_E(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$$

olur.

c) $m_{AB} \geq 0$, $m_{AC} \geq 0$, $m_{AB} \leq 0$ olması veya bu eğimlerden herhangi birinin tanımsız olmasında $d_E(A, B) \leq d_E(A, C) + d_M(C, B)$ yazılabilir. Bu durumu sağlayan noktaları analitik düzlemde işaretleyelim. Daha sonra bu noktaların belirttiği üçgenin etrafına bir dikdörtgen çizelim (Şekil 4.8).



Şekil 4.8 $d_E(A, B) \leq d_E(A, C) + d_M(C, B)$ durumu

AEC üçgeni geniş açılı bir üçgendir. Bu üçgende kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$[d_E(A, E)]^2 = [d_E(A, C)]^2 + [d_E(C, E)]^2 + 2 \cdot d_E(A, C) \cdot d_E(C, E) \cdot \cos \alpha$$

$$[d_E(A, B)]^2 \leq [d_E(A, E)]^2 = [d_E(A, C)]^2 + |y_2 - y_3|^2 + 2 \cdot d_E(A, C) \cdot |y_2 - y_3| \cos \alpha$$

$0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \Rightarrow 0 \leq \cos \alpha \leq 1$ olduğunda,

$$2 \cdot d_E(A, C) \cdot |y_2 - y_3| \cos \alpha \leq 2 \cdot d_E(A, C) \cdot |y_2 - y_3| \text{ dir.}$$

Bu durumda,

$$[d_E(A, B)]^2 \leq [d_E(A, C)]^2 + |y_2 - y_3|^2 + 2 \cdot d_E(A, C) \cdot |y_2 - y_3| \cos \alpha$$

$$\leq (d_E(A, C) + |y_2 - y_3|)^2$$

$\Rightarrow d_E(A, B) \leq d_E(A, C) + |y_2 - y_3|$ dir. Şimdi maksimum uzaklık için incelemeye başlayalım.

c1) $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ olsun.

$$d_E(A, B) \leq d_E(A, C) + |y_2 - y_3| = d_E(A, C) + d_M(B, C)$$

c2) $|y_2 - y_3| \leq |x_2 - x_3|$ olsun.

$d_E(A, B) \leq d_E(A, C) + |y_2 - y_3| \leq d_E(A, C) + |x_2 - x_3| = d_E(A, C) + d_M(B, C)$ olur ki sonuç olarak

$$d_E(A, B) \leq d_E(A, C) + d_M(B, C)$$

olur.

d) c şıkında yapılan incelemede A noktası ile B noktasının yeri değiştirildiğinde,

$$d_E(A, B) \leq d_M(A, C) + d_E(B, C)$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç olarak d_m fonksiyonu M_1, M_2, M_3 şartlarını sağladığından bir metriktir

(Şimşek 2013).

Teorem 4.3.1 : Kartezyen düzlem d_m uzaklık fonksiyonu ile birlikte bir metrik geometri belirtir.

İspat : d_m uzaklık fonksiyonuna göre kartezyen düzlemin P ve Q noktaları arasındaki uzaklık için ya d_E ya da d_M uzaklığı söz konusudur (Tanım 4.1.3). Bu nedenle iki durum için ayrı ayrı ispat yapılmalıdır. Her iki durum içinde alınan her l doğrusu için bir f cetveli bulunduğu ispat tamamlanmış olur (Tanım 3.1.5).

1. Durum : P ve Q noktaları arasında d_E uzaklığı söz konusu ise

i) $l = L_a$ olacak şekilde bir $P \in L_a$ noktası alalım. $P(a, y)$ noktaları için $f : l \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(P) = f((a, y)) = y$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyonun bire-bir ve örten olduğu açıktır. $P(a, y_1), Q(a, y_2)$ noktaları için

$$|f(P) - f(Q)| = |y_1 - y_2| = d_E(P, Q)$$

olduğundan f bir cetveldir (Tanım 3.1.4).

ii) $l = L_{m,b}$ olacak şekilde $P \in L_{m,b}$ noktası alalım. $y = mx+b$ şartını sağlayan $P(x, y)$ noktaları için $f: l \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(P) = f((x, y)) = x\sqrt{1+m^2}$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu tanımlayalım. $t \in \mathbb{R}$ için $P(x, y) \in L_{m,b}$ olacak şekilde,

$$x = \frac{t}{\sqrt{1+m^2}}, \quad y = \frac{mt}{\sqrt{1+m^2}} + b$$

alalım. Diğer taraftan,

$$f(P) = \frac{t}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \sqrt{1+m^2} = t$$

olduğundan f örtendir. Bire-bir olduğu da açık olduğundan f bire-bir, örten bir fonksiyondur.

Şimdi de $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ noktalarını alalım. Bu noktaların üzerinde bulunduğu $L_{m,b}$ doğrusu için,

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

dir.

$$|f(P) - f(Q)| = |x_1\sqrt{1+m^2} - x_2\sqrt{1+m^2}| = \sqrt{1+m^2} |x_1 - x_2|$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} d_E(P, Q) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{1+m^2} |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

olduğundan

$$|f(P) - f(Q)| = d_E(P, Q)$$

dır. Bu nedenle f , bir cetveldir.

2.Durum : P ve Q noktaları arasında d_M uzaklığı söz konusu ise,

i) $l = L_a$ olacak şekilde bir $P \in L_a$ noktası alalım. $P(a, y)$ noktaları için $f : l \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(P) = f((a, y)) = y$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyonun bire-bir ve örten olduğu açıktır.

$P(a, y_1), Q(a, y_2)$ noktaları için,

$$|f(P) - f(Q)| = |y_1 - y_2| = d_M(P, Q)$$

olduğundan f bir cetveldir (Tanım 3.1.4).

ii) $l = L_{m, b}$ olacak şekilde $P \in L_{m, b}$ noktası alalım. $y = mx+b$ şartını sağlayan $P(x, y)$ noktaları için $f : l \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(P) = f((x, y)) = \begin{cases} x, & |m| < 1 \text{ ise} \\ |m|x, & |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu tanımlayalım (Salihova 2006). $m \geq 1$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$P(x, y) \in L_{m, b}$ olacak şekilde,

$$x = \frac{t}{|m|}, \quad y = \frac{mt}{|m|} + b$$

alalım. Diğer taraftan,

$$f(P) = \frac{t}{|m|} \cdot |m| = t$$

olduğundan f örtendir. Bire-bir olduğu da açık olduğundan f bire-bir, örten bir fonksiyondur.

Şimdi de $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ noktalarını alalım. Bu noktaların üzerinde bulunduğu $L_{m, b}$ doğrusu için,

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

dir.

$$|f(P) - f(Q)| = ||m|x_1 - |m|x_2| = |m||x_1 - x_2|$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} d_M(P, Q) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= \max\{|x_1 - x_2|, |m| |x_1 - x_2|\} \\ &= |x_1 - x_2| \max\{1, |m|\} = |m| |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

olduğundan $|f(P) - f(Q)| = d_E(P, Q)$ dır. Bu nedenle f , bir cetveldir. $|m| < 1$ için de bu durumun sağlandığı açıktır.

Tanım 3.1.5 sağlandığından kartezyen düzlem d_m uzaklık fonksiyonu ile birlikte bir metrik geometri belirtir. Bu metrik geometriye m - Metrik Geometrisi denilir

(Şimşek 2013).

4.4 m -Düzleminde Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Bu bölümde öncelikle bir noktanın bir doğruya uzaklığının tanımı verilmiştir. d_m metriğinde bir noktanın bir doğruya uzaklığı maksimum ve Öklid uzaklıklarındaki bir noktanın bir doğruya uzaklığı ile yakından ilişkili olduğundan, önce Öklid uzaklığına göre ve Maksimum uzaklığına göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı üzerinde durulmuş, daha sonra da d_m metriğinde bir noktanın bir doğruya uzaklığı ile ilgili sonuçlar ortaya konmuştur.

Tanım 4.4.1: Herhangi bir kartezyen düzlemdeki bir $A(x_0, y_0)$ noktasının bir

$l: ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığını $d_m(A, l)$ ile gösterelim. $P(x, y) \in l$ olmak üzere,

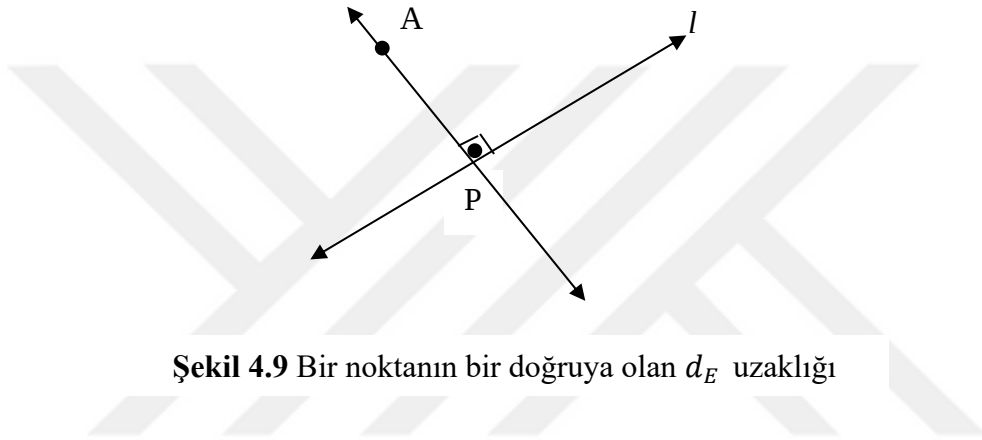
$$d_m(A, l) = \min d_m(A, P)$$

dir.

4.4.1 Öklid Uzaklığına Göre Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Herhangi bir $A \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $A(x_0, y_0)$ noktasının $l: ax + by + c = 0$ doğrusuna olan Öklid uzaklığı, l doğrusuna dik olan ve A noktasından geçen doğru ile l doğrusunun kesim noktası P olmak üzere $d_E(A, P)$ dir (Şekil 4.9).

$$d_E(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

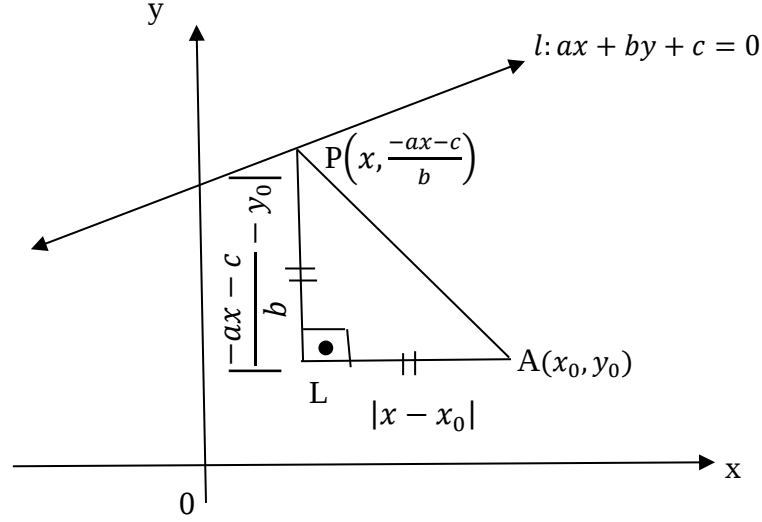


Şekil 4.9 Bir noktanın bir doğruya olan d_E uzaklığı

4.4.2 Maksimum Uzaklığına Göre Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Bir $A(x_0, y_0)$ noktasının maksimum metriğine göre herhangi bir

$l: ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı; $P \in l$, m_{PL} tanımsız, $m_{LA} = 0$ ($PL \perp LA$) ve $|LP| = |LA|$ olacak şekilde seçilen P noktaları için $|AP|$ uzunluklarından en küçüğüdür (Şekil 4.10).



Şekil 4.10 Bir noktanın bir doğruya olan d_M uzaklığı

Bu durumda $P\left(x, \frac{-ax-c}{b}\right)$ ve $A(x_0, y_0)$ için $|x - x_0| = \left|\frac{-ax-c}{b} - y_0\right|$ şartını sağlayan P noktasının l doğrusuna maksimum metriğine göre uzaklığı, $|x - x_0|$ veya $\left|\frac{-ax-c}{b} - y_0\right|$ dır.

$|x - x_0| = \left|\frac{-ax-c}{b} - y_0\right|$ için,

a) $x - x_0 = \frac{-ax-c}{b} - y_0$ ise P noktasının koordinatları aşağıdaki gibidir :

$$x = \frac{bx_0 - by_0 - c}{a + b}, y = \frac{-ax_0 + ay_0 - c}{a + b}$$

b) $x - x_0 = \frac{ax+c}{b} + y_0$ ise P noktasının koordinatları aşağıdaki gibidir :

$$x = \frac{bx_0 + by_0 + c}{b - a}, y = \frac{-ax_0 - ay_0 - c}{b - a}$$

a ve b şıkındaki sonuçlara göre $|PL| = |LA|$ olacak şekilde $|PL|$ uzunlukları ,

$$\left|\frac{bx_0 - by_0 - c}{a + b} - x_0\right| = \left|\frac{-ax_0 - by_0 - c}{a + b}\right| = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{a + b}\right|$$

$$\left| \frac{-ax_0 + ay_0 - c}{a + b} - y_0 \right| = \left| \frac{-ax_0 - by_0 - c}{a + b} \right| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a + b} \right|$$

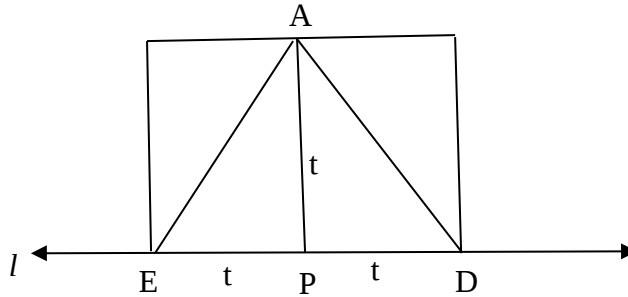
$$\left| \frac{bx_0 + by_0 + c}{b - a} - x_0 \right| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{b - a} \right|$$

$$\left| \frac{-ax_0 - ay_0 - c}{b - a} - y_0 \right| = \left| \frac{-ax_0 - by_0 - c}{b - a} \right| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{b - a} \right|$$

şeklinde yazılır. Buna göre karşımıza $\left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a + b} \right|$ ve $\left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{b - a} \right|$ olmak üzere iki farklı maksimum uzaklığı çıkmaktadır. Bu uzaklıklardan küçük olanı seçilmelidir.

$l: ax + by + c = 0$ doğrusunda a ile b aynı işaretli ise yani doğrunun eğimi negatif ise A noktasının l doğrusuna olan uzaklığı $\left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a + b} \right|$ dir. Eğer a ile b zıt işaretli ise yani doğrunun eğimi pozitif ise A noktasının l doğrusuna olan uzaklığı $\left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{b - a} \right|$ dir.

a veya b den herhangi birinin sıfır olması durumunda doğrular koordinat eksenlerine paraleldir ve maksimum metriğine göre uzaklıkla Öklid metriğine göre uzaklık aynıdır.



Şekil 4.11 Bir noktanın x-eksenine paralel bir l doğrusuna uzaklığı

Şekildeki gibi x-eksenine paralel bir l doğrusu alalım. l doğrusu üzerinde

$|EP| = |PD| = |AP| = t$, $t \in \mathbb{R}^+$ ve $AP \perp l$ olacak şekilde P , E , D noktaları seçelim. ED doğru parçası üzerinde seçilecek herhangi bir $P'(x, y)$ noktası için maksimum metriğine göre A noktasının l doğrusuna olan uzaklığı $t \in \mathbb{R}^+$ dır. Bu da aynı zamanda

Öklid metriğine göre A noktasının l doğrusuna olan uzaklığıdır. Benzer durum y-eksenine paralel doğrular için de geçerlidir.

Buna göre maksimum metriğine göre bir $A(x_0, y_0)$ noktasının $l: ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı,

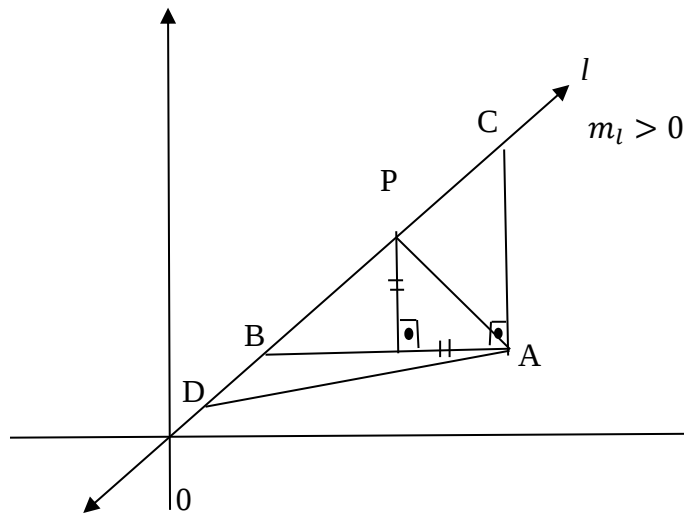
$$\begin{cases} \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a + b} \right|, & m_l < 0 \text{ ise} \\ \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{b - a} \right|, & m_l > 0 \text{ ise} \\ \left| x_0 + \frac{c}{a} \right|, & m_l \text{ tanımsız ise} \\ \left| y_0 + \frac{c}{b} \right|, & m_l = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanabilir.

4.4.3 d_m Metriğine Göre Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

d_m metriğine göre uzaklık hesabı eğimle yakından alakalı olduğundan pozitif ve negatif eğimli doğrular için bir noktanın doğruya olan uzaklığı ayrı ayrı incelenmelidir.

a) Pozitif eğimli bir l doğrusu için $A(x_0, y_0)$ noktasının l doğrusuna olan uzaklığı,

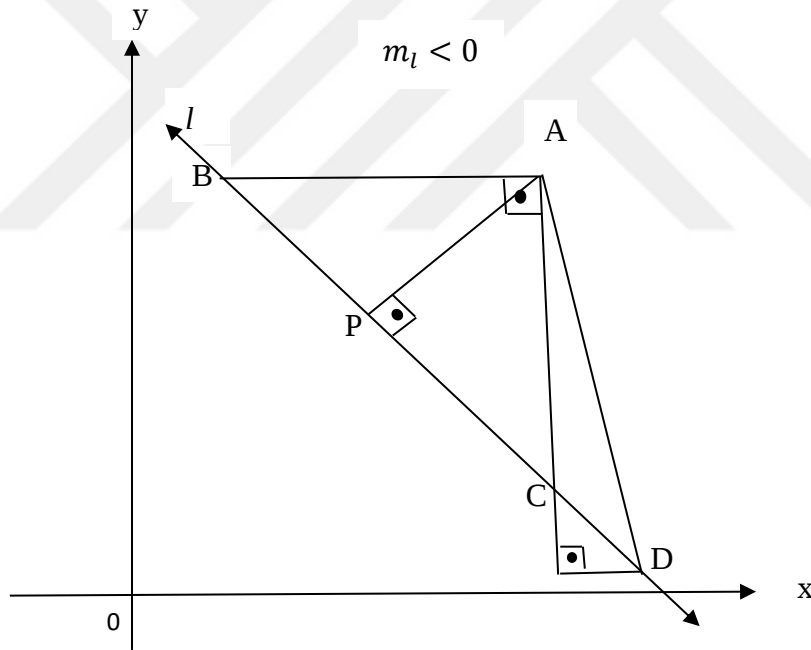


Şekil 4.12 $m_l > 0$ için bir noktanın bir doğruya olan d_m uzaklığı

Pozitif eğimli bir l doğrusu üzerinde $[AB]$ ve $[AC]$ eksenlere paralel ve $AB \perp AC$ olacak şekilde B ile C noktaları seçelim (Şekil 4.12). BC doğru parçası üzerinde seçilecek her P noktası için AP nin eğimi negatif, sıfır veya tanımsız olur. Bu durumda BC doğru parçası üzerinde seçilecek her nokta için maksimum metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı hesaplanmalıdır. BC doğru parçasının dışında alınacak herhangi bir D noktası için ise AD nin eğimi pozitif olacağından Öklid metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı hesaplanmalıdır. Bu uzaklıklar içerisinde minimum olanın maksimum metriği için hesaplanan uzaklık olduğu açıktır.

Doğrunun eğiminin pozitif olması durumunda d_m metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı ile d_M metriğine göre noktanın doğruya uzaklığı aynıdır.

b) Negatif eğimli bir l doğrusu için $A(x_0, y_0)$ noktasının l doğrusuna olan uzaklığı,



Şekil 4.13 $m_l < 0$ için bir noktanın bir doğruya olan d_m uzaklığı

Negatif eğimli bir l doğrusu üzerinde $[AB]$ ve $[AC]$ eksenlere paralel ve $AB \perp AC$ olacak şekilde B ve C noktaları seçelim (Şekil 4.13). BC doğru parçası üzerinde seçilecek her P noktası için AP nin eğimi pozitif, sıfır veya tanımsız olur. Bu durumda BC doğru parçası üzerinde seçilecek her nokta için Öklid metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı hesaplanmalıdır. BC doğru parçasının dışında alınacak herhangi bir D noktası için ise AD

nin eğimi negatif olacağından maksimum metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı hesaplanmalıdır. Bu uzaklıklar içerisinde minimum olanın Öklid metriği için hesaplanan uzaklık olduğu açıktır.

Doğrunun eğiminin negatif olması durumunda d_m metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı ile d_E metriğine göre bir noktanın bir doğruya uzaklığı aynıdır.

Sonuç olarak; d_m metriğine göre bir $A(x_0, y_0)$ noktasının bir $l: ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı,

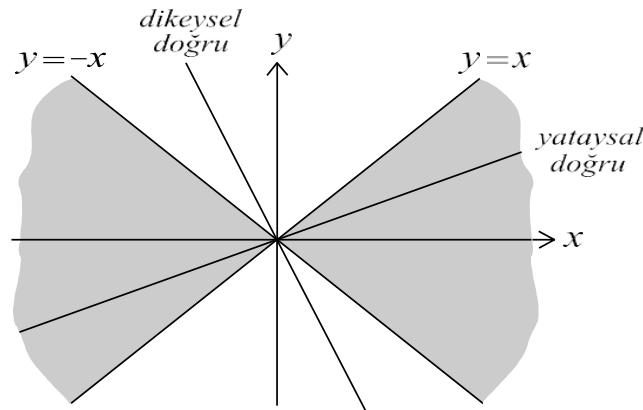
$$\begin{cases} \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{b - a} \right|, & m \geq 0 \text{ veya } m \text{ tanımsız ise} \\ \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & m \leq 0 \text{ veya tanımsız ise} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir (Şimşek 2013).

4.5 m -Düzleminde Doğruların Sınıflandırılması

m -düzleminde $l: ax + by + c = 0$ doğrusu verilsin. l doğrusuna,

$\left| -\frac{a}{b} \right| > 1$ ise, **dikeysel doğru**; $\left| -\frac{a}{b} \right| < 1$ ise, **yataysal doğru**, $\left| -\frac{a}{b} \right| = 1$ ise, **ayıraç doğru** denir (Krause 1986, Çolakoğlu 2005).



Şekil 4.14 m -düzleminde doğruların sınıflandırılması

5. ÖKLİD DÜZLEMİNDEKİ BAZI ÜÇGEN FORMÜLLERİNİN m -DÜZLEMİNDEKİ BENZERLERİ

Bu bölümde Öklid düzlemindeki üçgenlere ait iyi bilinen bazı özelliklerin (Kaya 2005, Özcan, Kaya 2003, Özcan, Kaya 2002, Çolakoğlu 2005) kaynaklarından yararlanarak m -Düzlemindeki benzerleri elde edilecektir.

İncelenecek olan özellikler sırasıyla, Thales bağıntıları, kenarortay teoremi, iç ve dış açıortay teoremleri, Öklid bağıntıları, Pisagor teoremi, Stewart teoremi, Menelaus teoremi ve Ceva teoremidir.

Özelliklerin m benzerleri versiyonları incelenmeden önce Öklidyen anlamda ifade ve ispatları verilecektir.

5.1 Thales Bağıntıları

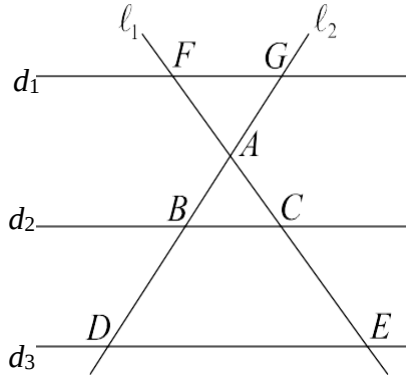
5.1.1 Öklid Düzleminde Thales Bağıntıları

Teorem 5.1.1: Kesişen iki doğru, paralel üç doğruyla kesildiğinde oluşan üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır. Yani, Şekil 5.1 de $d_1 // d_2 // d_3$ ve $\ell_1 \nparallel \ell_2$ ise

$$\text{i) } \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|}$$

$$\text{ii) } \frac{|AB|}{|AG|} = \frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|FG|}$$

dir.

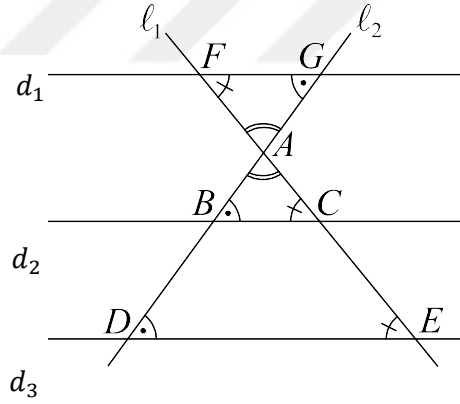


Şekil 5.1 Thales bağıntıları uzunluğu

İspat : ABC ve ADE üçgenlerinin (A.A.A) benzerliğinden $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|}$;

ABC ve AGF üçgenlerinin (A.A.A) benzerliğinden $\frac{|AB|}{|AG|} = \frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|FG|}$ elde edilir

(Çolakoğlu 2005).



Şekil 5.2 Öklid düzlemindeki Thales bağıntısı uzunluğu

$m > 0$ iken Öklid uzaklıklar oranı, $m < 0$ iken maksimum uzaklıklar oranı kullanılacağından ve Teorem 4.1.2 den dolayı oranlar korunur ve Thales bağıntısı geçerlidir.

5.1.2 Thales Bağıntılarının m - Düzlemi Benzeri

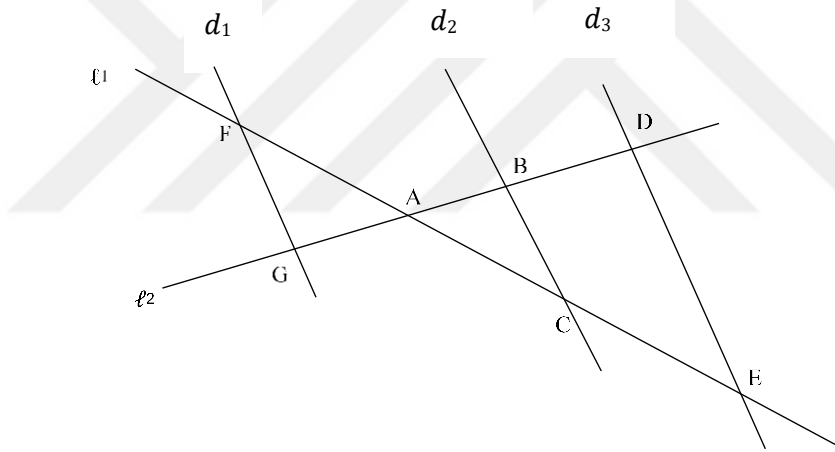
Teorem 5.1.2 : Kesişen iki doğru, paralel üç doğru ile kesildiğinde oluşan üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır. Yani Şekil 5.3 de $d_1 // d_2 // d_3$ ve $\ell_1 \nparallel \ell_2$ ise

$$\text{i. } \frac{d_m(A,B)}{d_m(A,D)} = \frac{d_m(A,C)}{d_m(A,E)} = \frac{d_m(B,C)}{d_m(D,E)}$$

$$\text{ii. } \frac{d_m(A,B)}{d_m(A,G)} = \frac{d_m(A,C)}{d_m(A,F)} = \frac{d_m(B,C)}{d_m(F,G)}$$

dir.

İspat : a) d_1, d_2, d_3 doğruları negatif eğimli, AB doğrusunun eğimi $m_{AB} > 0$; AC doğrusunun eğimi $m_{AC} < 0$ dir.



Şekil 5.3 $d_1, d_2, d_3 < 0$ iken m - Düzleminde Thales uzunluğu

A, B, D noktaları doğrudur ve l_2 pozitif eğimli olduğundan Teorem 4.1.3 gereğince

$$\frac{d_E(A,B)}{d_E(A,D)} = \frac{d_m(A,B)}{d_m(A,D)} \quad (1)$$

dir.

A, C, E noktaları doğrudur olduğundan $m_{AC} = m_{AE}$ dir. O halde

$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1+m_{AC}^2}}{\max\{1, |m_{AC}|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

$$d_E(A, E) = \left(\frac{\sqrt{1+m_{AE}^2}}{\max\{1, |m_{AE}|\}} \right) \cdot d_M(A, E)$$

$$\frac{d_E(A, C)}{d_E(A, E)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1+m_{AC}^2}}{\max\{1, |m_{AC}|\}} \right) \cdot d_M(A, C)}{\left(\frac{\sqrt{1+m_{AE}^2}}{\max\{1, |m_{AE}|\}} \right) \cdot d_M(A, E)} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, E)}$$

dir. Böylece

$$\frac{d_E(A, C)}{d_E(A, E)} = \frac{d_m(A, C)}{d_m(A, E)} \quad (2)$$

dir. $d_2 // d_3$ olduğundan $m_{BC} = m_{DE}$ dir.

$$d_E(B, C) = \left(\frac{\sqrt{1+m_{BC}^2}}{\max\{1, |m_{BC}|\}} \right) \cdot d_M(B, C)$$

$$d_E(D, E) = \left(\frac{\sqrt{1+m_{DE}^2}}{\max\{1, |m_{DE}|\}} \right) \cdot d_M(D, E)$$

$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(D, E)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1+m_{BC}^2}}{\max\{1, |m_{BC}|\}} \right) \cdot d_M(B, C)}{\left(\frac{\sqrt{1+m_{DE}^2}}{\max\{1, |m_{DE}|\}} \right) \cdot d_M(D, E)} = \frac{d_M(B, C)}{d_M(D, E)}$$

dir. Böylece

$$\frac{d_E(B,C)}{d_E(D,E)} = \frac{d_m(B,C)}{d_m(D,E)} \quad (3)$$

dir. Sonuç olarak 1, 2, 3 den dolayı

$$\frac{d_m(A,B)}{d_m(A,D)} = \frac{d_m(A,C)}{d_m(A,E)} = \frac{d_m(B,C)}{d_m(D,E)}$$

bulunur.

Benzer şekilde, A, B, G noktaları doğrudan ve l_2 pozitif eğimli olduğundan Teorem 4.1.3 gereğince

$$\frac{d_E(A,B)}{d_E(A,G)} = \frac{d_m(A,B)}{d_m(A,G)} \quad (4)$$

dir.

A, C, F noktaları doğrudan olduğundan $m_{AC} = m_{AF}$ dir. O halde

$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1+m_{AC}^2}}{\max\{1, |m_{AC}|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

$$d_E(A, F) = \left(\frac{\sqrt{1+m_{AF}^2}}{\max\{1, |m_{AF}|\}} \right) \cdot d_M(A, F)$$

$$\frac{d_E(A, C)}{d_E(A, F)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1+m_{AC}^2}}{\max\{1, |m_{AC}|\}} \right) \cdot d_M(A, C)}{\left(\frac{\sqrt{1+m_{AF}^2}}{\max\{1, |m_{AF}|\}} \right) \cdot d_M(A, F)} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, F)}$$

dir. Böylece

$$\frac{d_E(A,C)}{d_E(A,F)} = \frac{d_m(A,C)}{d_m(A,F)} \quad (5)$$

dir. $d_1 // d_2$ olduğundan $m_{BC} = m_{FG}$ dir.

$$d_E(B, C) = \left(\frac{\sqrt{1+m_{BC}^2}}{\max\{1, |m_{BC}|\}} \right) \cdot d_M(B, C)$$

$$d_E(F, G) = \left(\frac{\sqrt{1+m_{FG}^2}}{\max\{1, |m_{FG}|\}} \right) \cdot d_M(FG)$$

$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(F, G)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1+m_{BC}^2}}{\max\{1, |m_{BC}|\}} \right) \cdot d_M(B, C)}{\left(\frac{\sqrt{1+m_{FG}^2}}{\max\{1, |m_{FG}|\}} \right) \cdot d_M(F, G)} = \frac{d_M(B, C)}{d_M(F, G)}$$

dir. Böylece

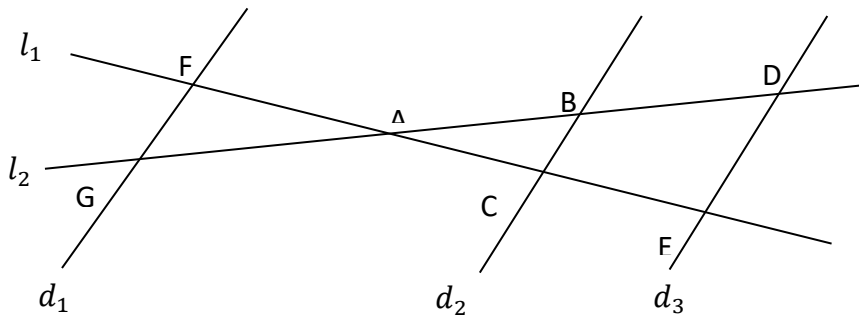
$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(F, G)} = \frac{d_m(B, C)}{d_m(F, G)} \quad (6)$$

dir. Sonuç olarak 4, 5, 6 dan dolayı

$$\frac{d_m(A, B)}{d_m(A, G)} = \frac{d_m(A, C)}{d_m(A, F)} = \frac{d_m(B, C)}{d_m(F, G)}$$

bulunur.

İspat: b) d_1, d_2, d_3 doğruları pozitif eğimli, AB doğrusunun eğimi $m_{AB} > 0$; AC doğrusunun eğimi $m_{AC} < 0$ dir.



Şekil 5.4 $d_1, d_2, d_3 > 0$ iken m - Düzleminde Thales uzunluğu

A, B, D noktaları doğruduş ve l_2 pozitif eğimli olduğundan Teorem 4.1.3 gereğince

$$\frac{d_E(A,B)}{d_E(A,D)} = \frac{d_m(A,B)}{d_m(A,D)} \quad (1)$$

dir.

A, C, E noktaları doğruduş olduğundan $m_{AC} = m_{AE}$ dir. O halde

$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1+m_{AC}^2}}{\max\{1, |m_{AC}|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

$$d_E(A, E) = \left(\frac{\sqrt{1+m_{AE}^2}}{\max\{1, |m_{AE}|\}} \right) \cdot d_M(A, E)$$

$$\frac{d_E(A, C)}{d_E(A, E)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1+m_{AC}^2}}{\max\{1, |m_{AC}|\}} \right) \cdot d_M(A, C)}{\left(\frac{\sqrt{1+m_{AE}^2}}{\max\{1, |m_{AE}|\}} \right) \cdot d_M(A, E)} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, E)}$$

dir. Böylece

$$\frac{d_E(A,C)}{d_E(A,E)} = \frac{d_m(A,C)}{d_m(A,E)} \quad (2)$$

dir.. d_1 ve d_3 doğruları pozitif eğimlidir. $d_2 // d_3$ olduğundan $m_{BC} = m_{DE}$ dir.

$$d_E(B, C) = d_m(B, C)$$

$$d_E(D, E) = d_m(D, E)$$

$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(D, E)} = \frac{d_m(B, C)}{d_m(D, E)}$$

dir. Böylece

$$\frac{d_E(B,C)}{d_E(D,E)} = \frac{d_m(B,C)}{d_m(D,E)} \quad (3)$$

dir. Sonuç olarak 1, 2, 3 den dolayı

$$\frac{d_m(A,B)}{d_m(A,D)} = \frac{d_m(A,C)}{d_m(A,E)} = \frac{d_m(B,C)}{d_m(D,E)}$$

bulunur.

Benzer şekilde, A, B, G noktaları doğrudan ve l_2 pozitif eğimli olduğundan Teorem 4.1.2 gereğince

$$\frac{d_E(A,B)}{d_E(A,G)} = \frac{d_m(A,B)}{d_m(A,G)} \quad (4)$$

dir.

A, C, F noktaları doğrudan olduğundan $m_{AC} = m_{AF}$ dir. O halde

$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1+m_{AC}^2}}{\max\{1, |m_{AC}|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

$$d_E(A, F) = \left(\frac{\sqrt{1+m_{AF}^2}}{\max\{1, |m_{AF}|\}} \right) \cdot d_M(A, F)$$

$$\frac{d_E(A, C)}{d_E(A, F)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1+m_{AC}^2}}{\max\{1, |m_{AC}|\}} \right) \cdot d_M(A, C)}{\left(\frac{\sqrt{1+m_{AF}^2}}{\max\{1, |m_{AF}|\}} \right) \cdot d_M(A, F)} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, F)}$$

dir. Böylece

$$\frac{d_E(A,C)}{d_E(A,F)} = \frac{d_m(A,C)}{d_m(A,F)} \quad (5)$$

dir. d_1 ve d_2 doğruları pozitif eğimlidir. $d_1 \parallel d_2$ olduğundan $m_{BC} = m_{FG}$ dir.

$$d_E(B, C) = d_m(B, C)$$

$$d_E(F, G) = d_m(FG)$$

$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(F, G)} = \frac{d_m(B, C)}{d_m(F, G)}$$

dir. Böylece

$$\frac{d_E(B, C)}{d_E(F, G)} = \frac{d_m(B, C)}{d_m(F, G)} \quad (6)$$

dir. Sonuç olarak 4, 5, 6 dan dolayı

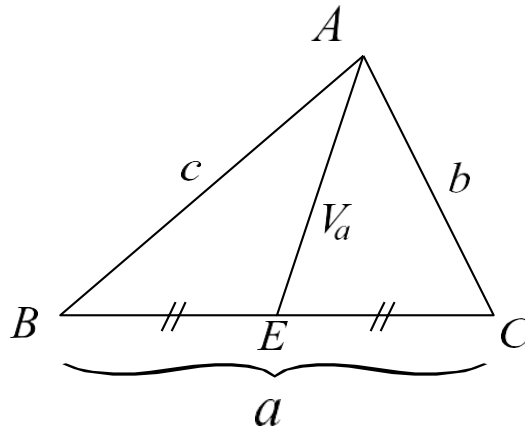
$$\frac{d_m(A, B)}{d_m(A, G)} = \frac{d_m(A, C)}{d_m(A, F)} = \frac{d_m(B, C)}{d_m(F, G)}$$

bulunur.

5.2 Kenarortay Teoremi

5.2.1 Öklid Düzleminde Kenarortay Teoremi

Teorem 5.2.1: Bir üçgende herhangi bir kenara ait kenarortayın karesinin iki katı ile bu kenarın karesinin yarısının toplamı, diğer iki kenarın karelerinin toplamına eşittir.



Şekil 5.5 Öklid düzleminde kenarortay uzunluğu

Yani, Şekil 5.5 e göre $2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$ dir.

İspat :

Şekil 5.5 da AEC açısının derece cinsinden ölçüsü α olarak alınırsa AEB açısının ölçüsü $180 - \alpha$ olur. AEC ve AEB üçgenlerinde kosinüs teoremi gereğince

$$V_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2V_a \frac{a}{2} \cos \alpha = b^2 \text{ ve } V_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2V_a \frac{a}{2} \cos (180 - \alpha) = c^2$$

dir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

elde edilir (Çolakoğlu 2005).

5.2.2 Kenarortay Teoremi *m*- Düzlemi Benzeri

Bir üçgenin herhangi bir kenarına ait kenarortayının uzunluğunu veren formülün *m*- Düzlemindeki benzerlerini bulmak için Özcan ve Kaya (2003) nın belirtilen yöntemle benzer bir yöntem kullanılacaktır. Bu kaynakta kullanılan tanımlar ve parametreler aşağıda belirtilmiştir.

ABC, *m*- düzleminde herhangi bir üçgen olsun. Üçgenin her köşesinde biri *x*- eksenine, diğeri *y*- eksenine paralel olan bir çift doğrunun varlığı açıktır. Bu doğrulardan, geçtiği köşenin karşısındaki kenarla kesişenlere özel olarak ABC üçgeninin **temel doğrusu** diyeceğiz. Yani, eğer *l*, ABC üçgeninin bir temel doğrusu ise koordinat eksenlerinden birine paraleldir. ABC üçgeninin bir köşesinden geçer ve geçtiği köşenin karşısındaki kenarla kesişir. Üçgenin köşelerinden birinin daima bir ya da iki temel doğruya sahip olduğu yine açıktır. Böyle bir köşeye **temel köşe** denir. Temel doğru üzerinde yatan ve temel köşe ile karşısındaki kenarla sınırlı doğru parçasına da **temel doğru parçası** denir.

Özcan ve Kaya (2003) de parametreler şöyle tanımlanmıştır:

D : Bir temel doğrunun karşı kenarı kestiği nokta,

H : Kalan iki köşeden birinin, aynı temel doğru üzerindeki fakat temel doğru parçası üzerinde olmayan dik izdüşüm noktası,

H' : Kalan üçüncü köşenin, yine aynı temel doğru üzerindeki fakat temel doğru parçası üzerinde olmayan dik izdüşüm noktası

olmak üzere

α_m : Üçgenin temel doğru parçasının uzunluğu

dir.

Kenarortay teoreminin bir m - düzlemi benzerini vermek için yukarıdaki tanımları aynen alıp Çolakoğlu (2005) ndaki parametreleri kullanacağız. Şöyle ki, bir ABC üçgeninde A köşesine ait kenarortay bulunacak ise,

E noktası, kenarortayın karşı kenarı kestiği nokta ve

D : A köşesine ait bir temel doğrunun karşı kenarı kestiği nokta,

F : B ve C köşelerinden biri; öyle ki D noktası F ile E noktaları arasında, (D ile E noktaları çakıştığı zaman, köşelerden herhangi biri F noktası olarak alınabilir.)

F' : A ve F köşelerinden farklı olan köşenin aynı temel doğru üzerindeki izdüşümü

olmak üzere ;

$\gamma_m : d_m$ (temel doğru, F)

dir.

Aşağıdaki ispatta Öklid düzlemiyle aynı olan kenarortay uzunluklarının hesaplanması gözardı edilmiştir.

Şimdi bu tanım ve parametrelerle kenarortay teoreminin bir m - düzlemi benzerini verelim.

Teorem 5.2.2: m - düzleminde kenar uzunlukları $a_m = d_m (B,C)$, $b_m = d_m (A,C)$ ve $c_m = d_m (A,B)$ olan bir ABC üçgeninin herhangi bir kenarına ait kenarortay uzunluğu, diyelim ki BC kenarına ait kenarortay uzunluğu V_{a_m} ve BC kenarının orta noktası E olmak üzere,

1) Eğer A köşesinin hiç temel doğrusu yoksa

$$\text{a) } 2V_{a_m} = \max\{(b_m + \beta \cdot c_m), (\alpha \cdot b_m + c_m)\} , m_a < 0$$

2) Eğer A köşesinin yalnız bir temel doğrusu varsa

$$\text{a) } 2V_{a_m} = \max\{(\alpha \cdot b_m + c_m), (\beta \cdot c_m - b_m)\} , m_a < 0, m_b < 0$$

$$\text{b) } 2V_{a_m} = \max\{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} + c_m, (\beta c_m - \gamma_m)\} , m_a < 0, m_b > 0$$

$$\text{c) } 2V_{a_m} = \sqrt{(\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} + c_m)^2 + (\gamma_m - \beta \cdot c_m)^2} , m_a > 0, m_b > 0$$

3) Eğer A köşesinin iki tane temel doğrusu var; E noktası, A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalıyorsa

$$\text{a) } 2V_{a_m} = \max\{(c_m - \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2}), (b_m - \beta \cdot c_m)\} , m_a < 0, m_b > 0$$

$$\text{b) } 2V_{a_m} = \sqrt{(c_m - \alpha \cdot b_m)^2 + (b_m - \beta \cdot c_m)^2} , m_a > 0$$

4) Eğer A köşesinin iki tane temel doğrusu var; E noktası, A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalmıyorsa

$$\text{a) } 2V_{a_m} = \max\{(c_m - \alpha \cdot b_m), (\beta c_m - b_m)\} , m_a < 0, m_b < 0$$

$$\text{b) } 2V_{a_m} = \sqrt{(c_m - \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2})^2 + (\beta c_m - \gamma_m)^2} , m_a > 0, m_b > 0$$

İspat :

B' : B noktasının A dan geçen y- eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

C' : C noktasının A dan geçen x-eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

E' : E noktasının A dan geçen x- eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

T : E noktasının CC' doğrusuna dik izdüşümü,

T' : E noktasının BB' doğrusuna dik izdüşümü

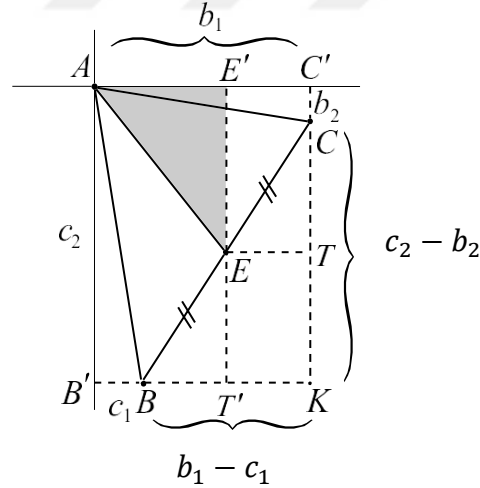
ve $d_E(A, C') = b_1$, $d_E(C, C') = b_2$, $d_E(A, B') = c_2$, $d_E(B, B') = c_1$ ve m_a ; AE nin eğimi, m_b ; AC nin eğimi ve m_c ; AB nin eğimi, $|m_b|^{-1} = \alpha$ ve $|m_c|^{-1} = \beta$ olsun. Böylece

$$V_{a_m} = \begin{cases} \sqrt{(d_E(A, E'))^2 + (d_E(E, E'))^2} & , \quad m_a > 0 \\ \max\{d_E(A, E'), d_E(E, E')\} & , \quad m_a < 0 \end{cases}$$

dir.

1. ABC üçgeni, A köşesinde hiç temel doğrusu olmayan bir üçgen olsun.

a)



Şekil 5.6 $m_a < 0$ durumu

Şekil 5.6 da Teorem 5.1.2 gereğince $d_m(E, T) = \frac{b_1 - c_1}{2}$ ve $d_m(E, T') = \frac{c_2 - b_2}{2}$ dir.

$$d_E(A, E') = b_1 - d_m(E, T) ,$$

$$d_E(E, E') = c_2 - d_m(E, T')$$

ve $m_a < 0$ olduğundan AE doğrusu negatif eğimlidir. Bu durumda

$$V_{a_m} = \max\{d_E(A, E'), d_E(E, E')\} \text{ olduğundan}$$

$$V_{a_m} = \max\left\{b_1 - \frac{b_1 - c_1}{2}, c_2 - \frac{c_2 - b_2}{2}\right\}$$

$$= \max\left\{\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2}\right\}$$

i) ABC üçgeninde $-1 < m_b < 0$, $m_c < -1$ ve $b_1 = b_m$ ve $c_2 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$V_{a_m} = \max\left\{\frac{b_m + |m_c|^{-1} \cdot c_m}{2}, \frac{|m_b|^{-1} \cdot b_m + c_m}{2}\right\}$$

$$2V_{a_m} = \max\{(b_m + |m_c|^{-1} \cdot c_m), (|m_b|^{-1} \cdot b_m + c_m)\}$$

$$2V_{a_m} = \max\{(b_m + \beta \cdot c_m), (\alpha \cdot b_m + c_m)\}$$

bulunur.

ii) ABC üçgeninde $m_b < -1$, $-1 < m_c < 0$ ve $b_2 = b_m$ ve $c_1 = c_m$ olur.

Bu durumda

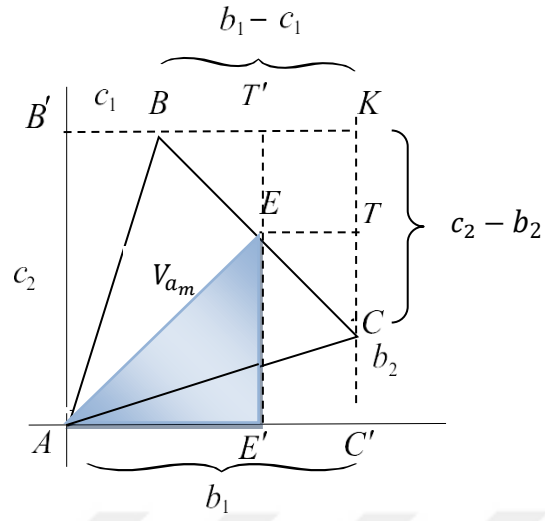
$$V_{a_m} = \max\left\{\frac{|m_b|^{-1} \cdot b_m + c_m}{2}, \frac{b_m + |m_c|^{-1} \cdot c_m}{2}\right\}$$

$$2V_{a_m} = \max\{(|m_b|^{-1} \cdot b_m + c_m), (b_m + |m_c|^{-1} \cdot c_m)\}$$

$$2V_{a_m} = \max\{(\alpha \cdot b_m + c_m), (b_m + \beta \cdot c_m)\}$$

bulunur.

b)

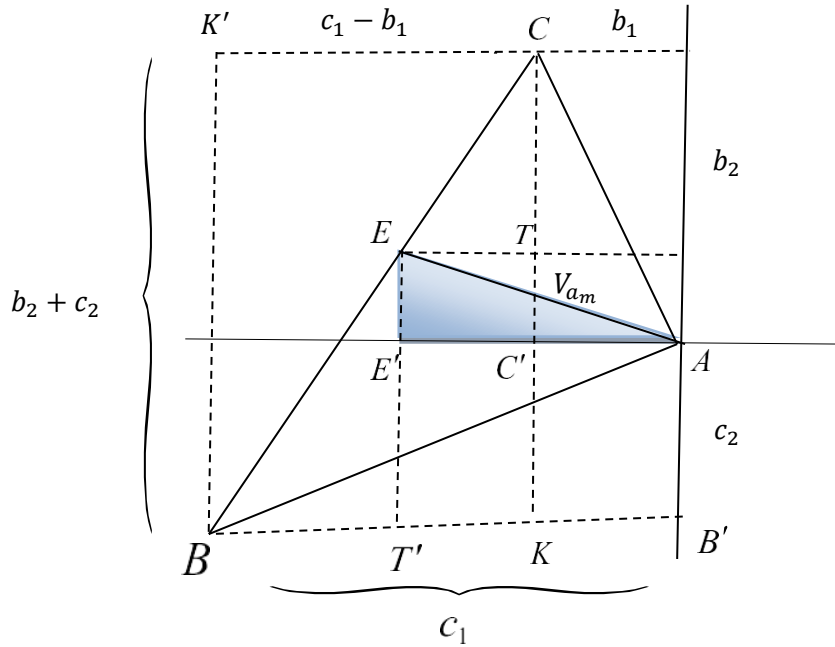


Şekil 5.7 $m_a > 0, m_b > 0$ durumu

Şekil 5.7, Öklid düzlemiyle aynı olduğundan kenarortay uzunluğunun hesaplanması gözardı edilmiştir.

2. ABC üçgeni, A köşesinde bir tek temel doğrusu olan bir üçgen olsun.

a)



Şekil 5.8 $m_a < 0, m_b < 0$ durumu

Şekil 5.8 de Teorem 5.1.2 gereğince $d_m(E, T) = \frac{c_1 - b_1}{2}$ ve $d_m(E, T') = \frac{b_2 + c_2}{2}$ dir.

$$d_E(A, E') = b_1 + d_m(E, T),$$

$$d_E(E, E') = c_2 - d_m(E, T')$$

ve $m_a < 0$ olduğundan AE doğrusu negatif eğimlidir. Bu durumda

$$V_{a_m} = \max\{d_E(A, E'), d_E(E, E')\} \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} V_{a_m} &= \max\left\{\left(b_1 + \frac{c_1 - b_1}{2}\right), \left(c_2 - \frac{b_2 + c_2}{2}\right)\right\} \\ &= \max\left\{\left(\frac{b_1 + c_1}{2}\right), \left(\frac{c_2 - b_2}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

i) ABC üçgeninde $m_b < -1$, $-1 < m_c < 0$ ve $b_2 = b_m$ ve $c_1 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$V_{a_m} = \max\left\{\left(\frac{|m_b|^{-1} \cdot b_m + c_m}{2}\right), \left(\frac{|m_c|^{-1} \cdot c_m - b_m}{2}\right)\right\}$$

$$2V_{a_m} = \max\{(|m_b|^{-1} \cdot b_m + c_m), (|m_c|^{-1} \cdot c_m - b_m)\}$$

$$2V_{a_m} = \max\{(\alpha \cdot b_m + c_m), (\beta \cdot c_m - b_m)\}$$

bulunur.

ii) ABC üçgeninde $-1 < m_b < 0$, $m_c < -1$ ve $b_1 = b_m$ ve $c_2 = c_m$ olur.

Bu durumda

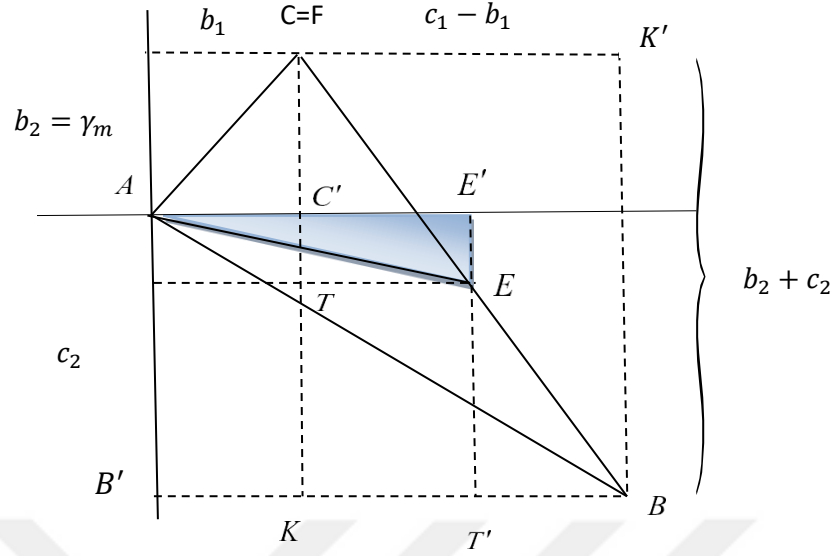
$$V_{a_m} = \max\left\{\left(\frac{b_m + |m_c|^{-1} \cdot c_m}{2}\right), \left(\frac{c_m - |m_b|^{-1} b_m}{2}\right)\right\}$$

$$2V_{a_m} = \max\{(b_m + |m_c|^{-1} \cdot c_m), (c_m - |m_b|^{-1} b_m)\}$$

$$2V_{a_m} = \max\{(b_m + \beta \cdot c_m), (c_m - \alpha \cdot b_m)\}$$

bulunur.

b)



Şekil 5.9 $m_a < 0, m_b > 0$ durumu

Şekil 5.9 da Teorem 5.1.2 gereğince $d_m(E, T) = \frac{c_1 - b_1}{2}$ ve $d_m(E, T') = \frac{b_2 + c_2}{2}$ dir.

$$d_E(A, E') = b_1 + d_m(E, T),$$

$$d_E(E, E') = c_2 - d_m(E, T')$$

ve $m_a < 0$ olduğundan AE doğrusu negatif eğimlidir. Bu durumda

$$V_{a_m} = \max\{d_E(A, E'), d_E(E, E')\} \text{ olduğundan}$$

$$V_{a_m} = \max\left\{\left(b_1 + \frac{c_1 - b_1}{2}\right), \left(c_2 - \frac{b_2 + c_2}{2}\right)\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{b_1 + c_1}{2}\right), \left(\frac{c_2 - b_2}{2}\right)\right\}$$

$$m_b > 0, b_m^2 = b_1^2 + b_2^2$$

$$b_2 = \gamma_m \Rightarrow b_1 = \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2}$$

i) ABC üçgeninde $-1 < m_c < 0$ ve $c_1 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$V_{a_m} = \max \left\{ \left(\frac{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} + c_m}{2} \right), \left(\frac{|m_c|^{-1} \cdot c_m - \gamma_m}{2} \right) \right\}$$

$$2V_{a_m} = \max \left\{ \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} + c_m, (\beta c_m - \gamma_m) \right\}$$

bulunur.

ii) ABC üçgeninde $m_c < -1$ ve $c_2 = c_m$ olur.

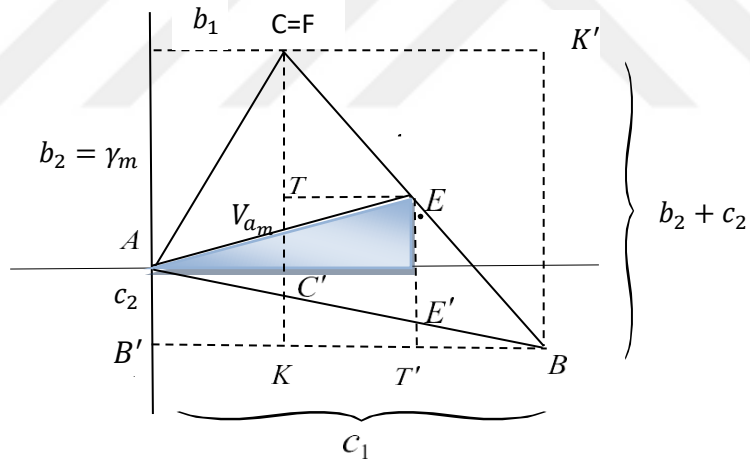
Bu durumda

$$V_{a_m} = \max \left\{ \left(\frac{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} + |m_c|^{-1} \cdot c_m}{2} \right), \left(\frac{c_m - \gamma_m}{2} \right) \right\}$$

$$2V_{a_m} = \max \left\{ \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} + \beta c_m, (c_m - \gamma_m) \right\}$$

bulunur.

c)



Şekil 5.10 $m_a > 0$, $m_b > 0$ durumu

Şekil 5.10 de Teorem 5.1.2 gereğince $d_m(E, T) = \frac{c_1 - b_1}{2}$ ve $d_m(E, T') = \frac{b_2 + c_2}{2}$ dir.

$$d_E(A, E') = b_1 + d_m(E, T),$$

$$d_E(E, E') = d_m(E, T') - c_2$$

ve $m_a > 0$ olduğundan AE doğrusu pozitif eğimlidir. Bu durumda

$$V_{a_m} = \sqrt{(d_E(A, E'))^2 + (d_E(E, E'))^2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} V_{a_m} &= \sqrt{\left(b_1 + \frac{c_1 - b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_2 + c_2}{2} - c_2\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{b_1 + c_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_2 - c_2}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$m_b > 0, b_m^2 = b_1^2 + b_2^2$$

$$b_2 = \gamma_m \Rightarrow b_1 = \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2}$$

i) ABC üçgeninde $-1 < m_c < 0$ ve $c_1 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$V_{a_m} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} + c_m}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_m - |m_c|^{-1} \cdot c_m}{2}\right)^2}$$

$$2V_{a_m} = \sqrt{(\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} + c_m)^2 + (\gamma_m - \beta \cdot c_m)^2}$$

bulunur.

ii) ABC üçgeninde $m_c < -1$ ve $c_2 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$V_{a_m} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} + |m_c|^{-1} \cdot c_m}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_m - c_m}{2}\right)^2}$$

$$2V_{a_m} = \sqrt{(\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} + \beta \cdot c_m)^2 + (\gamma_m - c_m)^2}$$

bulunur.

-

Şekil 5.11 de Teorem 5.1.2 gereğince $d_m(E, T) = \frac{b_1 + c_1}{2}$ ve $d_m(E, T') = \frac{b_2 + c_2}{2}$ dir.

$$d_E(E, E') = d_m(E, T') - c_2$$

$$V_{a_m} = \max\{d_E(A, E'), d_E(E, E')\} \text{ olduğundan}$$

$$= \max \left\{ \left(\frac{c_1 - b_1}{2} \right), \left(\frac{b_2 - c_2}{2} \right) \right\}$$

$$b_2 = \gamma_m \Rightarrow b_1 = \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2}$$

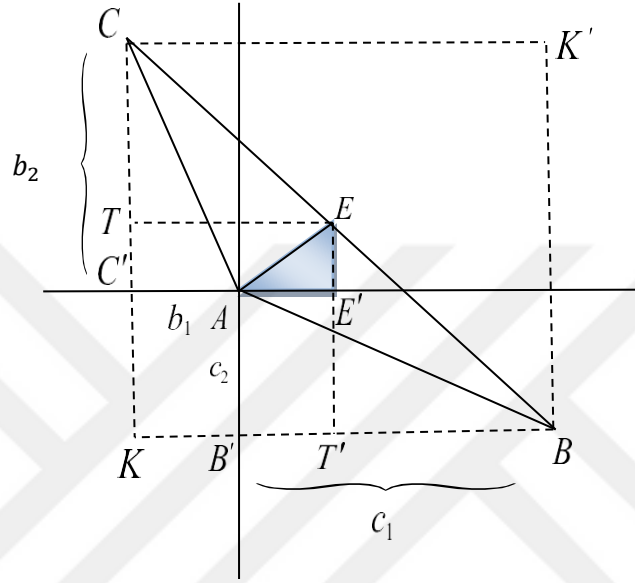
- Bu durumda

$$V_{a_m} = \max \left\{ \left(\frac{c_m - \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2}}{2} \right), \left(\frac{\gamma_m - |m_c|^{-1} \cdot c_m}{2} \right) \right\}$$

$$2V_{a_m} = \max \{ (c_m - \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2}), (b_m - \beta \cdot c_m) \}$$

bulunur.

b)



Şekil 5.12 $m_a > 0$ durumu

Şekil 5.12 de Teorem 5.1.2 gereğince $d_m(E, T) = \frac{b_1 + c_1}{2}$ ve $d_m(E, T') = \frac{b_2 + c_2}{2}$ dir.

$$d_E(A, E') = d_m(E, T) - b_1,$$

$$d_E(E, E') = d_m(E, T') - c_2$$

ve $m_a > 0$ olduğundan AE doğrusu pozitif eğimlidir. Bu durumda

$$V_{a_m} = \sqrt{(d_E(A, E'))^2 + (d_E(E, E'))^2} \text{ olduğundan}$$

$$V_{a_m} = \sqrt{\left(\frac{b_1 + c_1}{2} - b_1 \right)^2 + \left(\frac{b_2 + c_2}{2} - c_2 \right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{c_1 - b_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{b_2 - c_2}{2} \right)^2}$$

- i) ABC üçgeninde $m_b < -1$, $-1 < m_c < 0$ ve $b_2 = b_m$ ve $c_1 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$V_{a_m} = \sqrt{\left(\frac{c_m - |m_b|^{-1} \cdot b_m}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_m - |m_c|^{-1} \cdot c_m}{2}\right)^2}$$

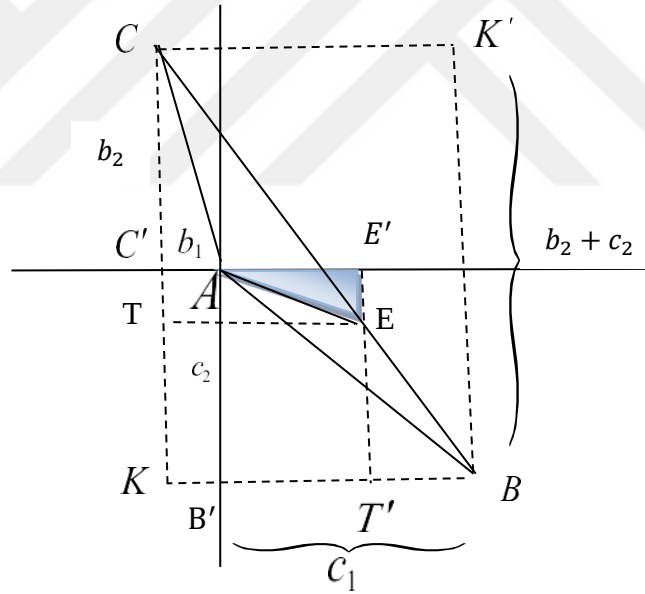
$$2V_{a_m} = \sqrt{((c_m - |m_b|^{-1} \cdot b_m)^2 + (b_m - |m_c|^{-1} \cdot c_m)^2}$$

$$2V_{a_m} = \sqrt{(c_m - \alpha \cdot b_m)^2 + (b_m - \beta \cdot c_m)^2}$$

bulunur.

4. ABC üçgeni, A köşesinde iki tane temel doğrusu olan bir üçgen olsun ve E noktası A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalsın.

a)



Şekil 5.13 $m_a < 0$, $m_b < 0$ durumu

Şekil 5.13 de Teorem 5.1.2 gereğince $d_m(E, T) = \frac{b_1 + c_1}{2}$ ve $d_m(E, T') = \frac{b_2 + c_2}{2}$ dir.

$$d_E(A, E') = d_m(E, T) - b_1 ,$$

$$d_E(E, E') = c_2 - d_m(E, T')$$

ve $m_a < 0$ olduğundan AE doğrusu negatif eğimlidir. Bu durumda

$V_{a_m} = \max\{d_E(A, E'), d_E(E, E')\}$ olduğundan

$$V_{a_m} = \max\left\{\left(\frac{b_1 + c_1}{2} - b_1\right), \left(c_2 - \frac{b_2 + c_2}{2}\right)\right\}$$

$$= \max\left\{\left(\frac{c_1 - b_1}{2}\right), \left(\frac{c_2 - b_2}{2}\right)\right\}$$

i) ABC üçgeninde $m_b < -1$, $-1 < m_c < 0$ ve $b_2 = b_m$ ve $c_1 = c_m$ olur.

Bu durumda

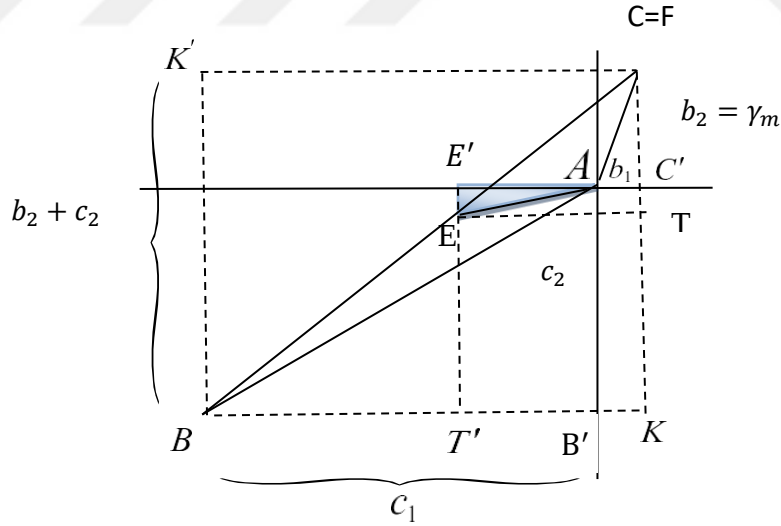
$$V_{a_m} = \max\left\{\left(\frac{c_m - |m_b|^{-1} \cdot b_m}{2}\right), \left(\frac{|m_c|^{-1} c_m - b_m}{2}\right)\right\}$$

$$2V_{a_m} = \max\{(c_m - |m_b|^{-1} \cdot b_m), (|m_c|^{-1} \cdot c_m - b_m)\}$$

$$2V_{a_m} = \max\{(c_m - \alpha \cdot b_m), (\beta \cdot c_m - b_m)\}$$

bulunur.

b)



Şekil 5.14 $m_a > 0$, $m_b > 0$ durumu

Şekil 5.14 de Teorem 5.1.2 gereğince $d_m(E, T) = \frac{b_1 + c_1}{2}$ ve $d_m(E, T') = \frac{b_2 + c_2}{2}$ dir.

$$d_E(A, E') = d_m(E, T) - b_1$$

$$d_E(E, E') = c_2 - d_m(E, T')$$

ve $m_a > 0$ olduğundan AE doğrusu pozitif eğimlidir. Bu durumda

$$V_{a_m} = \sqrt{(d_E(A, E'))^2 + (d_E(E, E'))^2} \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} V_{a_m} &= \sqrt{\left(\frac{b_1 + c_1}{2} - b_1\right)^2 + \left(c_2 - \frac{b_2 + c_2}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{c_1 - b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_2 - b_2}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$m_b > 0, b_m^2 = b_1^2 + b_2^2$$

$$b_2 = \gamma_m \Rightarrow b_1 = \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2}$$

i) ABC üçgeninde $-1 < m_c < 0$ ve $c_1 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$V_{a_m} = \sqrt{\left(\frac{c_m - \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{|m_c|^{-1} \cdot c_m - \gamma_m}{2}\right)^2}$$

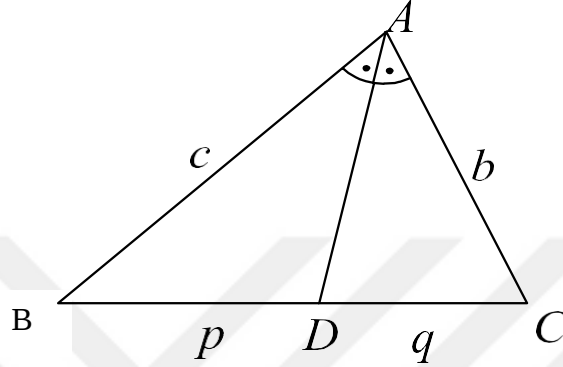
$$2V_{a_m} = \sqrt{\left(c_m - \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2}\right)^2 + (\beta \cdot c_m - \gamma_m)^2}$$

bulunur.

5.3 İç Açıortay Teoremi

5.3.1 Öklid Düzleminde İç Açıortay Teoremi

Teorem 5.3.1: Bir üçgende bir iç açının açıortayı, karşı kenarı komşu kenarlarla orantılı olarak böler.



Şekil 5.15 İç açıortay uzunluğu

Yani; Şekil 5.15 e göre $\frac{p}{q} = \frac{c}{b}$ dir.

İspat :

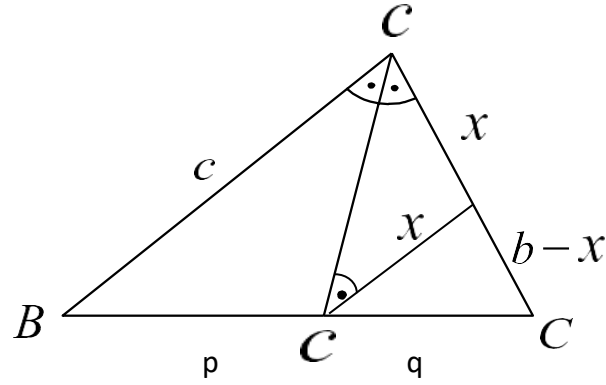
Şekil 5.15 de D noktasından AB doğru parçasına çizilen paralelin AC doğru parçası ile kesişimi E noktası ve $|DE| = x$ alınırsa, (Bkz Şekil 5.16) CED ve CAB üçgenlerinin benzerliğinden ve Thales bağıntısı gereğince

$$\frac{b-x}{x} = \frac{q}{p} \text{ ve } \frac{b-x}{x} = \frac{b}{c}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b}$$

bulunur (Çolakoğlu 2005).



Şekil 5.16 Öklid düzleminde İç Açortay

5.3.2 İç Açortay Teoremi m - Düzlemi Benzeri

Teorem 5.3.2 : m - düzleminde herhangi bir ABC üçgeninin A köşesine ait açortayının BC kenarı ile kesişimi D noktası ;

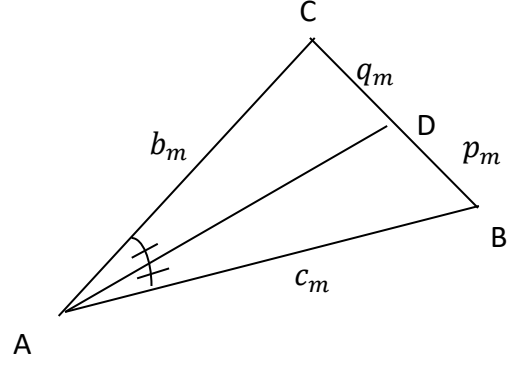
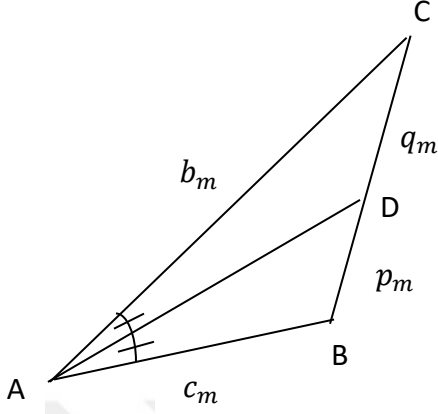
$a_m = d_m(B, C)$; $b_m = d_m(A, C)$; $c_m = d_m(A, B)$; $p_m = d_m(B, D)$; $q_m = d_m(C, D)$; AC kenarının eğimi ; m_b , AB kenarının eğimi ; m_c , BC kenarının eğimi ; m_a olmak üzere,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} & , \text{ Diğer durumlarda} \\ \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) & , \quad m_c < 0 \\ \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \frac{\max\{1, |m_b|\}}{\sqrt{1 + m_b^2}} & , \quad m_b < 0 \\ \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) \cdot \left(\frac{\max\{1, |m_b|\}}{\sqrt{1 + m_b^2}} \right) & , \quad m_b, m_c < 0 \end{array} \right.$$

dir.

İspat :

a)



Şekil 5.17 $m_a > 0, m_b > 0, m_c > 0$ durumu **Şekil 5.18** $m_a < 0, m_b > 0, m_c > 0$ durumu

Şekil 5.17 e göre $m_a > 0, m_b > 0, m_c > 0$ iken

$$d_E(B, D) = d_m(B, D) = p_m$$

$$d_E(C, D) = d_m(C, D) = q_m$$

$$d_E(A, B) = d_m(A, B) = c_m$$

$$d_E(A, C) = d_m(A, C) = b_m$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m}$$

Şekil 5.18 a göre $m_a < 0, m_b > 0, m_c > 0$ iken

$$d_E(B, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max \{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)$$

$$d_E(C, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)$$

$$d_E(A, B) = d_m(A, B) = c_m$$

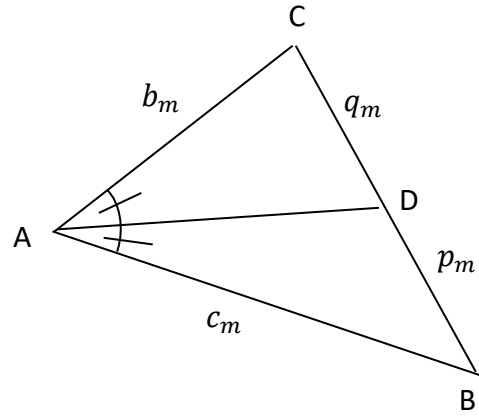
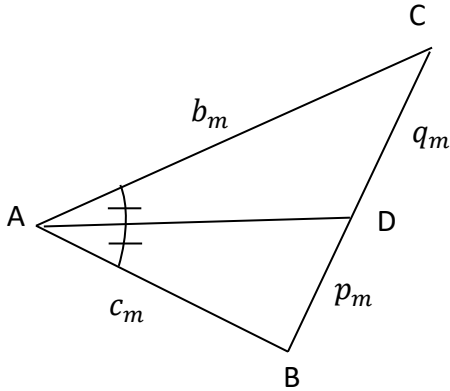
$$d_E(A, C) = d_m(A, C) = b_m$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)}{\left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)} = \frac{c_m}{b_m}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m}$$

b)



Şekil 5.19 $m_a > 0, m_b > 0, m_c < 0$ durumu **Şekil 5.20** $m_a < 0, m_b > 0, m_c < 0$ durumu

Şekil 5.19 e göre $m_a > 0, m_b > 0, m_c < 0$ iken

$$d_E(B, D) = d_m(B, D) = p_m$$

$$d_E(C, D) = d_m(C, D) = q_m$$

$$d_E(A, B) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max \{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)$$

$$d_E(A, C) = d_m(A, C) = b_m$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max \{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)}{b_m}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max \{1, |m_c|\}} \right)$$

Şekil 5.20 e göre $m_a < 0$, $m_b > 0$, $m_c < 0$ iken

$$d_E(B, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max \{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)$$

$$d_E(C, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max \{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)$$

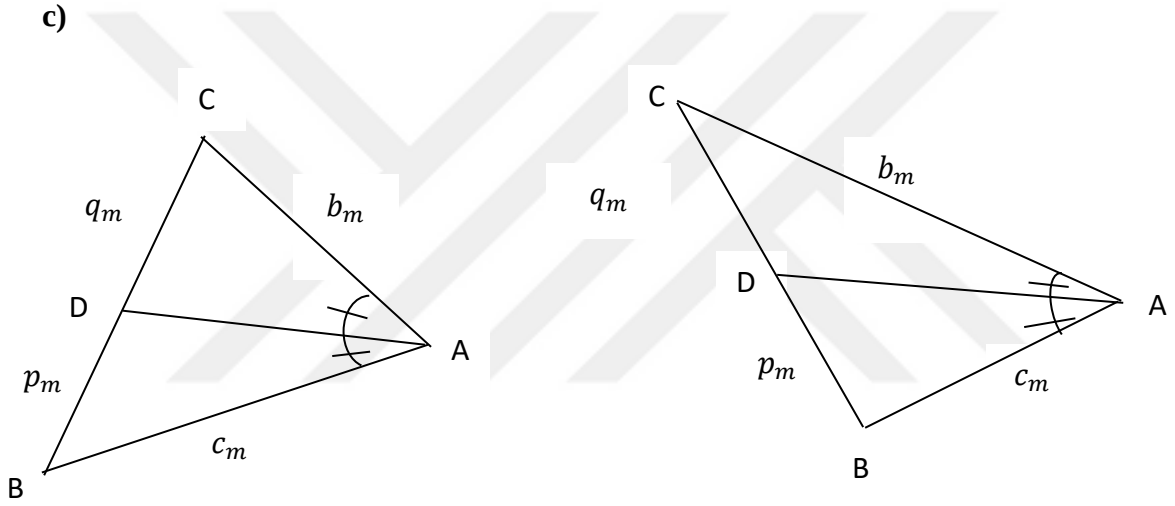
$$d_E(A, B) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max \{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)$$

$$d_E(A, C) = d_m(A, C) = b_m$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max \{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)}{\left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max \{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max \{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)}{b_m}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max \{1, |m_c|\}} \right)$$



Şekil 5.21 $m_a > 0, m_b < 0, m_c > 0$ durumu Şekil 5.22 $m_a < 0, m_b < 0, m_c > 0$ durumu

Şekil 5.21 a göre $m_a > 0, m_b < 0, m_c > 0$ iken

$$d_E(B, D) = d_m(B, D) = p_m$$

$$d_E(C, D) = d_m(C, D) = q_m$$

$$d_E(A, B) = d_m(A, B) = c_m$$

$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max \{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{\left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max\{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \frac{\max\{1, |m_b|\}}{\sqrt{1 + m_b^2}}$$

Şekil 5.22 göre $m_a < 0$, $m_b < 0$, $m_c > 0$ iken

$$d_E(B, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)$$

$$d_E(C, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)$$

$$d_E(A, B) = d_m(A, B) = c_m$$

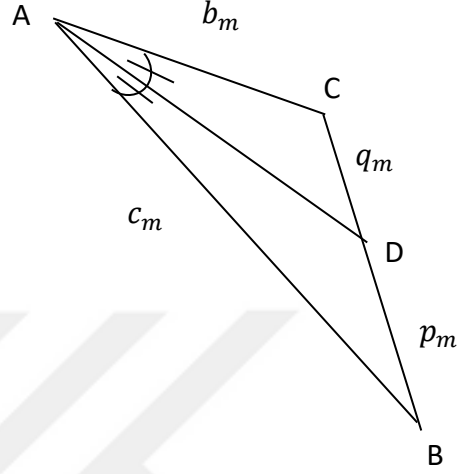
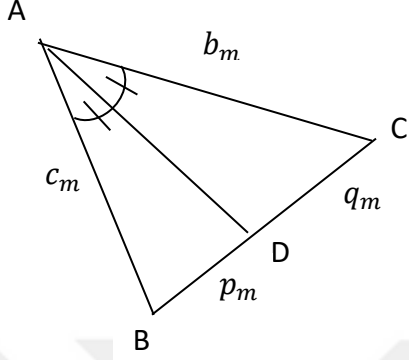
$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max\{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)}{\left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)} = \frac{c_m}{\left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max\{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \frac{\max\{1, |m_b|\}}{\sqrt{1 + m_b^2}}$$

d)



Şekil 5.23 $m_a > 0, m_b < 0, m_c < 0$ durumu Şekil 5.24 $m_a < 0, m_b < 0, m_c < 0$ durumu

Şekil 5.23 e göre $m_a > 0, m_b < 0, m_c < 0$ iken

$$d_E(B, D) = d_m(B, D) = p_m$$

$$d_E(C, D) = d_m(C, D) = q_m$$

$$d_E(A, B) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)$$

$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max\{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)}{\left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max\{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) \cdot \left(\frac{\max\{1, |m_b|\}}{\sqrt{1 + m_b^2}} \right)$$

Şekil 5.24 e göre $m_a < 0$, $m_b < 0$, $m_c < 0$ iken

$$d_E(B, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)$$

$$d_E(C, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)$$

$$d_E(A, B) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)$$

$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max\{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

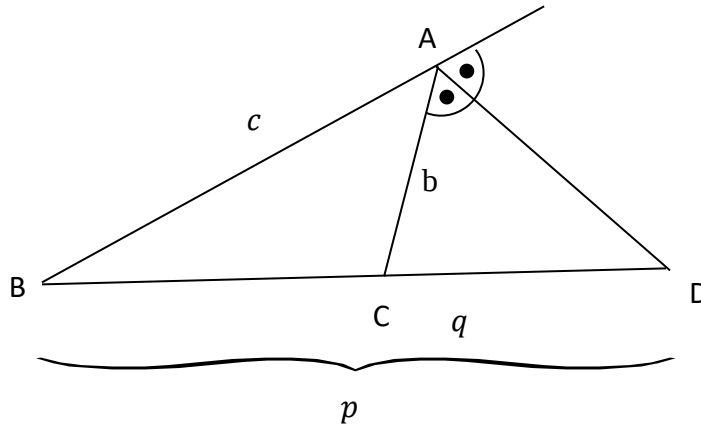
$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)}{\left(\frac{\sqrt{1+m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)}{\left(\frac{\sqrt{1+m_b^2}}{\max\{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)} \\
& \Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) \cdot \left(\frac{\max\{1, |m_b|\}}{\sqrt{1+m_b^2}} \right)
\end{aligned}$$

5.4 Dış Açortay Teoremi

5.4.1 Öklid Düzleminde Dış Açortay Teoremi

Teorem 5.4.1: Bir üçgende bir dış açının açortayı karşı kenarın uzantısını bölerse, komşu kenarlarla orantılı olarak böler.

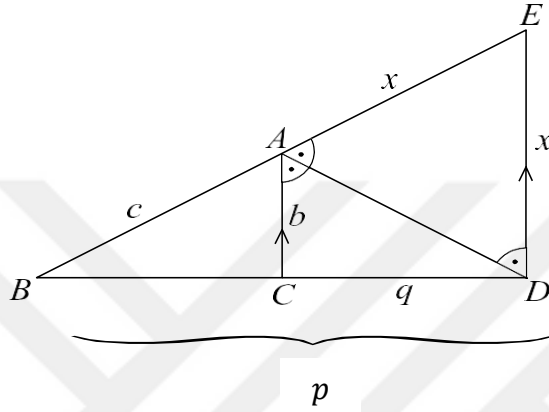


Şekil 5.25 Dış Açortay uzunluğu

Yani, Şekil 5.25 e göre $\frac{p}{q} = \frac{c}{b}$ dir.

İspat : Şekil 5.25 de D noktasından AC doğru parçasına çizilen paralelin BA ışını ile kesişimi E noktası ve $|DE| = x$ alınırsa (Bkz. Şekil 5.26), BAC ve BED üçgenlerinin benzerliğinden ve Thales bağıntısı gereğince

$\frac{x}{x+c} = \frac{q}{p}$ ve $\frac{x}{c+x} = \frac{b}{c}$ eşitlikleri elde edilir. Buradan da $\frac{p}{q} = \frac{c}{b}$ bulunur (Çolakoğlu 2005).



Şekil 5.26 Öklid düzleminde Dış Açortay uzunluğu

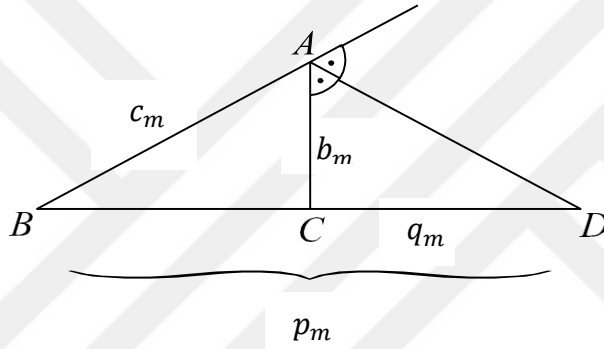
5.4.2 Dış Açortay Teoreminin m - Düzlemi Benzeri

Burada iç açortay teoreminde kullanılan yöntem izlenilecektir. Şimdi, aynı yaklaşımla dış açortay teoreminin m - düzlemindeki benzerini ifade ve ispat edelim.

Teorem 5.4.2 : m - düzleminde herhangi bir ABC üçgeninin A köşesine ait dış açortayının BC kenar uzantısını kestiği nokta D noktası; $a_m = d_m(B, D)$,

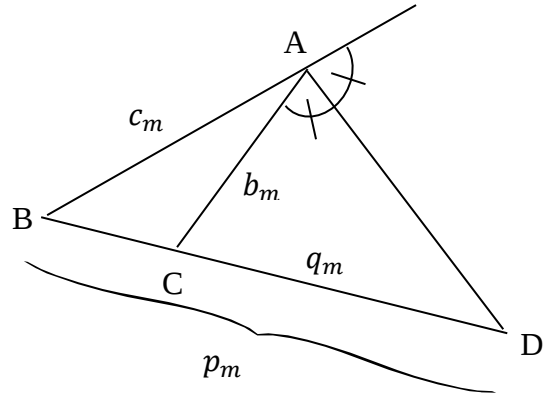
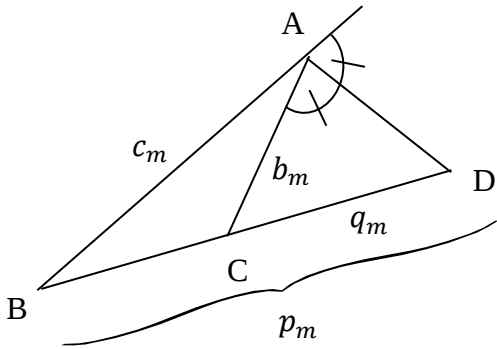
$b_m = d_m(A, C)$, $c_m = d_m(A, B)$, $p_m = d_m(B, D)$, $q_m = d_m(C, D)$, AC kenarının eğimi m_b , AB kenarının eğimi m_c olmak üzere,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} & , \quad \text{Diğer durumlarda} \\ \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) & , \quad m_c < 0 \\ \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \frac{\max\{1, |m_b|\}}{\sqrt{1 + m_b^2}} & , \quad m_b < 0 \\ \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) \cdot \left(\frac{\max\{1, |m_b|\}}{\sqrt{1 + m_b^2}} \right) & , \quad m_b < 0, m_c < 0 \end{array} \right.$$



Şekil 5.27 m - düzleminde Dış Açortay uzunluğu

a)



Şekil 5.28 $m_a > 0, m_b > 0, m_c > 0$ durumu Şekil 5.29 $m_a < 0, m_b > 0, m_c > 0$ durumu

Şekil 5.28 e göre $m_a > 0, m_b > 0, m_c > 0$ iken

$$d_E(B, D) = d_m(B, D) = p_m$$

$$d_E(C, D) = d_m(C, D) = q_m$$

$$d_E(A, B) = d_m(A, B) = c_m$$

$$d_E(A, C) = d_m(A, C) = b_m$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m}$$

Şekil 5.29 a göre $m_a < 0$, $m_b > 0$, $m_c > 0$ iken

$$d_E(B, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)$$

$$d_E(C, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)$$

$$d_E(A, B) = d_m(A, B) = c_m$$

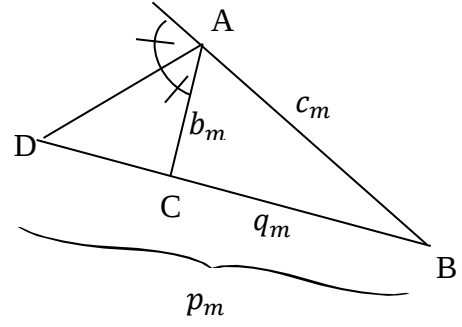
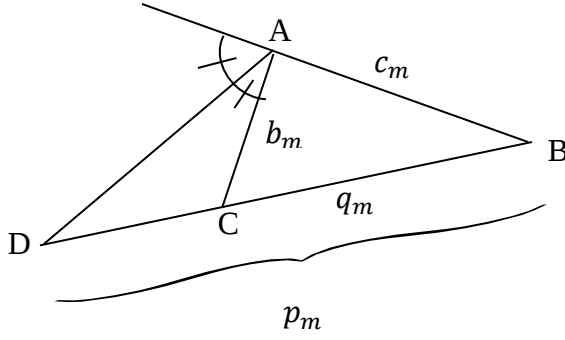
$$d_E(A, C) = d_m(A, C) = b_m$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)}{\left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)} = \frac{c_m}{b_m}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m}$$

b)



Şekil 5.30 $m_a > 0, m_b > 0, m_c < 0$ durumu

Şekil 5.31 $m_a < 0, m_b > 0, m_c < 0$ durumu

Şekil 5.30 e göre $m_a > 0, m_b > 0, m_c < 0$ iken

$$d_E(B, D) = d_m(B, D) = p_m$$

$$d_E(C, D) = d_m(C, D) = q_m$$

$$d_E(A, B) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max \{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)$$

$$d_E(A, C) = d_m(A, C) = b_m$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max \{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)}{b_m}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max \{1, |m_c|\}} \right)$$

Şekil 5.31 e göre $m_a < 0$, $m_b > 0$, $m_c < 0$ iken

$$d_E(B, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)$$

$$d_E(C, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)$$

$$d_E(A, B) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)$$

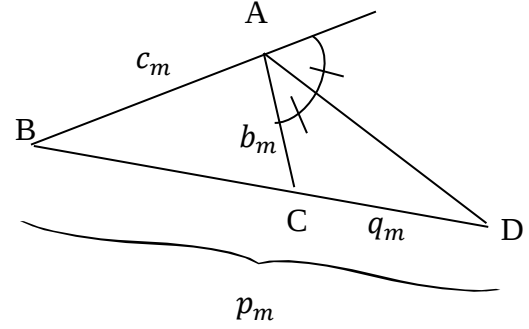
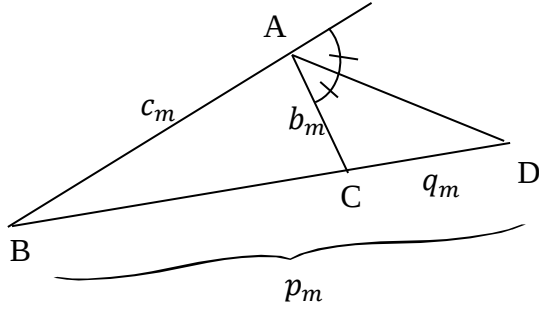
$$d_E(A, C) = d_m(A, C) = b_m$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)}{\left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)}{b_m}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right)$$

c)



Şekil 5.32 $m_a > 0, m_b < 0, m_c > 0$ durumu Şekil 5.33 $m_a < 0, m_b < 0, m_c > 0$ durumu

Şekil 5.32 a göre $m_a > 0, m_b < 0, m_c > 0$ iken

$$d_E(B, D) = d_m(B, D) = p_m$$

$$d_E(C, D) = d_m(C, D) = q_m$$

$$d_E(A, B) = d_m(A, B) = c_m$$

$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max\{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{\left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max\{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \frac{\max\{1, |m_b|\}}{\sqrt{1 + m_b^2}}$$

Şekil 5.33 a göre $m_a < 0$, $m_b < 0$, $m_c > 0$ iken

$$d_E(B, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)$$

$$d_E(C, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)$$

$$d_E(A, B) = d_m(A, B) = c_m$$

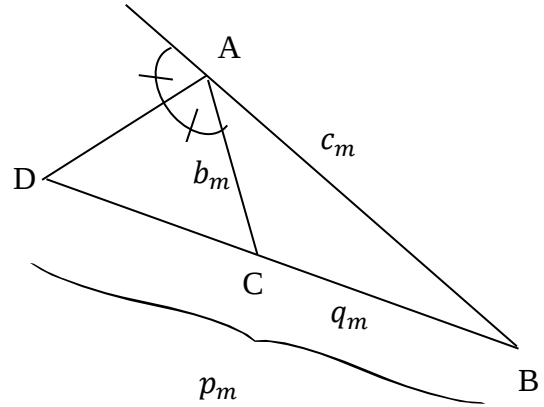
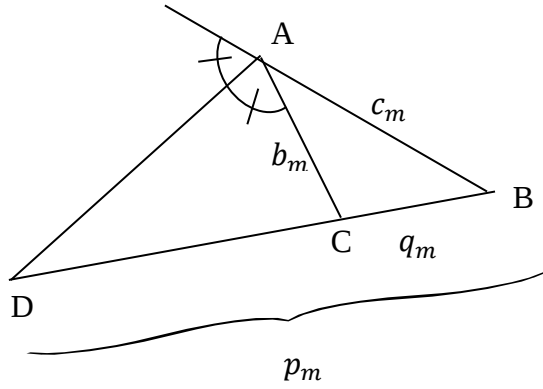
$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max\{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)}{\left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)} = \frac{c_m}{\left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max\{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \frac{\max\{1, |m_b|\}}{\sqrt{1 + m_b^2}}$$

d)



Şekil 5.34 $m_a > 0, m_b < 0, m_c < 0$ durumu Şekil 5.35 $m_a < 0, m_b < 0, m_c < 0$ durumu

Şekil 5.34 e göre $m_a > 0, m_b < 0, m_c < 0$ iken

$$d_E(B, D) = d_m(B, D) = p_m$$

$$d_E(C, D) = d_m(C, D) = q_m$$

$$d_E(A, B) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max \{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)$$

$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max \{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max \{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)}{\left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max \{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) \cdot \left(\frac{\max\{1, |m_b|\}}{\sqrt{1 + m_b^2}} \right)$$

Şekil 5.35 e göre $m_a < 0$, $m_b < 0$, $m_c < 0$ iken

$$d_E(B, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)$$

$$d_E(C, D) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)$$

$$d_E(A, B) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)$$

$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max\{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

$$\frac{d_E(B, D)}{d_E(C, D)} = \frac{d_E(A, B)}{d_E(A, C)}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(B, D)}{\left(\frac{\sqrt{1 + m_a^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(C, D)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) \cdot d_M(A, B)}{\left(\frac{\sqrt{1 + m_b^2}}{\max\{1, |m_b|\}} \right) \cdot d_M(A, C)}$$

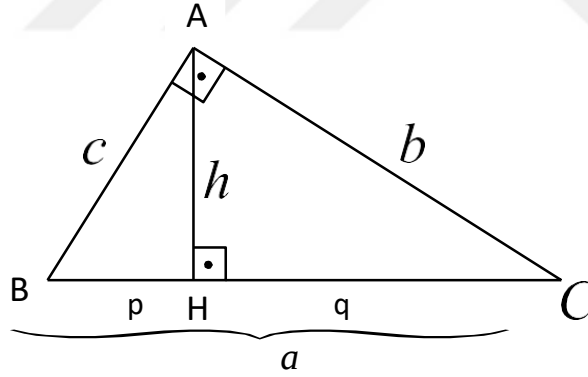
$$\Rightarrow \frac{p_m}{q_m} = \frac{c_m}{b_m} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_c^2}}{\max\{1, |m_c|\}} \right) \cdot \left(\frac{\max\{1, |m_b|\}}{\sqrt{1 + m_b^2}} \right)$$

5.5 Öklid Bağlılıkları

5.5.1 Öklid Düzleminde Öklid Bağlılıkları

Teorem 5.5.1:

- i. Bir dik üçgende hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğunun karesi, bu yüksekliğin hipotenüste ayırdığı parçaların uzunluklarının çarpımına eşittir.
- ii. Bir dik üçgende bir dik kenarın uzunluğunun karesi, hipotenüs uzunluğuyla hipotenüse ait yüksekliğin hipotenüsü ayırdığı parçalardan kendisi tarafında kalan parçanın uzunluğunun çarpımına eşittir.



Şekil 5.36 Öklid düzleminde Öklid uzunluğu

Yani, Şekil 5.36 e göre $h^2 = p \cdot q$, $b^2 = q \cdot a$ ve $c^2 = p \cdot a$ dir.

İspat :

- i. Şekil 5.36 de ABH ve CAH dik üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$ elde edilir.

Buradan da $h^2 = p \cdot q$ bulunur.

ii. Şekil 5.36 de CAH ve CBA dik üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{b}{q} = \frac{a}{b}$;

ABH ve CBA dik üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{c}{p} = \frac{a}{c}$ elde edilir. Buradan da $b^2 = q \cdot a$ ve $c^2 = p \cdot a$ eşitlikleri bulunur (Çolakoğlu 2005).

5.5.2 Öklid Bağntılarının m - Düzlemi Benzeri

Teorem 5.5.2 :

i. m - düzlemde herhangi bir ABC dik üçgenlerinin hipotenüsüne ait yüksekliğinin uzunluğunun karesi, yüksekliğin hipotenüste ayırdığı parçaların uzunluklarının çarpımına eşittir.

ii) m - düzlemde A açısı dik olan bir ABC üçgeninde hipotenüsün eğimi m_h ; AB veya AC kenarlarının eğimi m_k ise ;

$$\rho(m_h) = \frac{1 + m_h^2}{(\max\{1, |m_h|\})^2} , \quad \rho(m_h^{-1}) = \frac{1 + (m_h^{-1})^2}{(\max\{1, |m_h^{-1}|\})^2}$$

$$\rho(m_k) = \frac{1 + m_k^2}{(\max\{1, |m_k|\})^2}$$

ve

$$\rho(m_h, m_k) = \frac{1 + m_k^2}{1 + m_h^2} \cdot \frac{(\max\{1, |m_h|\})^2}{(\max\{1, |m_k|\})^2}$$

olmak üzere,

$$h_m^2 = \begin{cases} \rho^{-1}(m_h^{-1})p_m \cdot q_m & , \quad m_h > 0, m_k < 0; \quad m_h > 0, m_k > 0; \quad m_h > 0, m_k = \infty \\ \rho(m_h)p_m \cdot q_m & , \quad m_h < 0, m_k < 0; \quad m_h < 0, m_k > 0; \quad m_h < 0, m_k = 0 \\ p_m \cdot q_m & , \quad m_h = \infty, m_k < 0; \quad m_h = 0, m_k > 0 \end{cases}$$

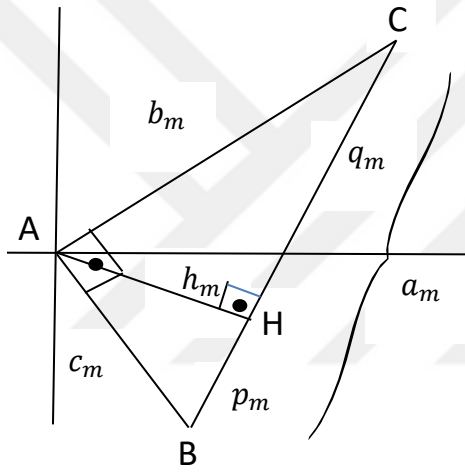
$$b_m^2 = \begin{cases} q_m \cdot a_m & , \quad m_h > 0, m_k < 0; m_h = \infty, m_k < 0; m_h > 0, m_k = \infty \\ \rho(m_h) q_m \cdot a_m & , \quad m_h < 0, m_k < 0; m_h < 0, m_k = 0 \\ \rho^{-1}(m_k) q_m \cdot a_m & , \quad m_h > 0, m_k > 0; m_h = 0, m_k > 0 \\ \rho^{-1}(m_h, m_k) q_m \cdot a_m & , \quad m_h < 0, m_k > 0 \end{cases}$$

$$c_m^2 = \begin{cases} \rho^{-1}(m_k) p_m \cdot a_m & , \quad m_h > 0, m_k < 0; m_h = \infty, m_k < 0 \\ \rho^{-1}(m_h, m_k) p_m \cdot a_m & , \quad m_h < 0, m_k < 0 \\ p_m \cdot a_m & , \quad m_h > 0, m_k > 0; m_h = 0, m_k > 0; m_h > 0, m_k = \infty \\ \rho(m_h) p_m \cdot a_m & , \quad m_h < 0, m_k > 0; m_h < 0, m_k = 0 \end{cases}$$

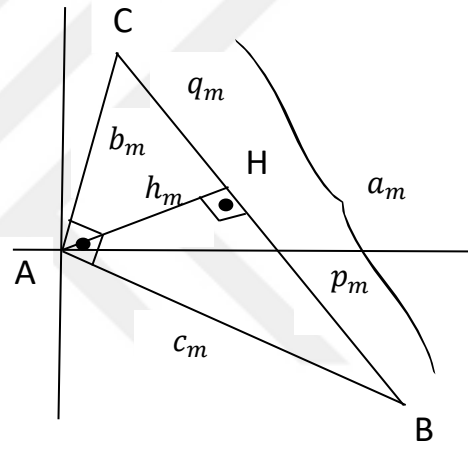
dir.

İspat :

a)



Şekil 5.37 $m_h > 0, m_k < 0$ durumu



Şekil 5.38 $m_h < 0, m_k < 0$ durumu

Şekil 5.37 e göre $m_h > 0, m_k < 0$ iken

$$d_E(B, H) = d_m(B, H) = p_m$$

$$d_E(H, C) = d_m(H, C) = q_m$$

$$d_E(B, C) = d_m(B, C) = a_m$$

$$d_E(A, C) = d_m(A, C) = b_m$$

$$d_E(A, B) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_k^2}}{\max \{1, |m_k|\}} \right) \cdot d_M(A, B)$$

$$d_E(A, H) = \left(\frac{\sqrt{1 + (-m_h^{-1})^2}}{\max \{1, |-m_h^{-1}|\}} \right) \cdot d_M(A, H)$$

$$\textbf{i)} \quad [d_E(A, H)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(H, C)$$

$$\left(\frac{\sqrt{1 + (-m_h^{-1})^2}}{\max \{1, |-m_h^{-1}|\}} \cdot d_M(A, H) \right)^2 = d_m(B, H) \cdot d_m(H, C)$$

$$\Rightarrow \frac{1 + (m_h^{-1})^2}{(\max \{1, |m_h^{-1}|\})^2} \cdot h_m^2 = p_m \cdot q_m$$

$$h_m^2 = \rho^{-1}(m_h^{-1}) \cdot p_m \cdot q_m$$

$$\textbf{ii)} \quad [d_E(A, C)]^2 = d_E(H, C) \cdot d_E(B, C)$$

$$[d_m(A, C)]^2 = d_m(H, C) \cdot d_m(B, C)$$

$$\Rightarrow b_m^2 = q_m \cdot a_m$$

$$\textbf{iii)} \quad [d_E(A, B)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(B, C)$$

$$\left(\frac{\sqrt{1 + m_k^2}}{\max \{1, |m_k|\}} \cdot d_M(A, B) \right)^2 = d_m(B, H) \cdot d_m(B, C)$$

$$\Rightarrow \frac{1 + m_k^2}{(\max \{1, |m_k|\})^2} \cdot c_m^2 = p_m \cdot a_m$$

$$c_m^2 = \rho^{-1}(m_k) p_m \cdot a_m$$

Şekil 5.38 e göre $m_h < 0$, $m_k < 0$ iken

$$d_E(B, H) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, H)$$

$$d_E(H, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(H, C)$$

$$d_E(B, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, C)$$

$$d_E(A, C) = d_m(A, C) = b_m$$

$$d_E(A, B) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_k^2}}{\max \{1, |m_k|\}} \right) \cdot d_M(A, B)$$

$$d_E(A, H) = d_m(A, H) = h_m$$

$$\textbf{i)} \quad [d_E(A, H)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(H, C)$$

$$[d_m(A, H)]^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, H) \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(H, C)$$

$$\Rightarrow \frac{(\max \{1, |m_h|\})^2}{1 + m_h^2} \cdot h_m^2 = p_m \cdot q_m$$

$$h_m^2 = \rho(m_h) p_m \cdot q_m$$

$$\textbf{ii)} \quad [d_E(A, C)]^2 = d_E(H, C) \cdot d_E(B, C)$$

$$[d_m(A, C)]^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(H, C) \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, C)$$

$$\Rightarrow \frac{(\max \{1, |m_h|\})^2}{1 + m_h^2} \cdot b_m^2 = q_m \cdot a_m$$

$$b_m^2 = \rho(m_h) \cdot q_m \cdot a_m$$

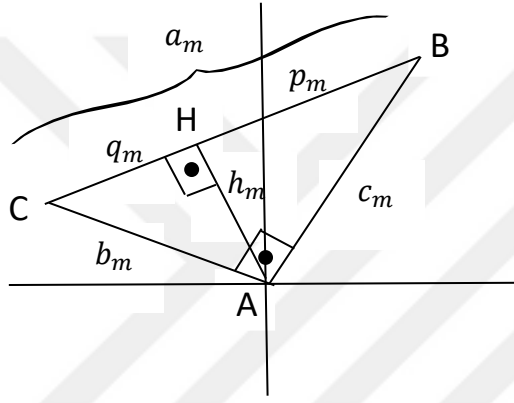
iii) $[d_E(A, B)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(B, C)$

$$\left(\frac{\sqrt{1 + m_k^2}}{\max \{1, |m_k|\}} \cdot d_M(A, B) \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, H) \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, C)$$

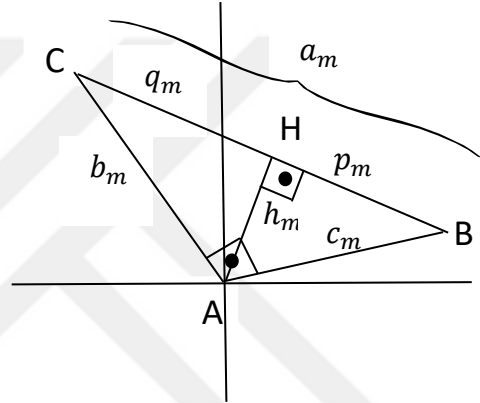
$$\Rightarrow \frac{1 + m_k^2}{1 + m_h^2} \cdot \frac{(\max \{1, |m_h|\})^2}{(\max \{1, |m_k|\})^2} \cdot c_m^2 = p_m \cdot a_m$$

$$c_m^2 = \rho^{-1}(m_h, m_k) p_m \cdot a_m$$

b)



Şekil 5.39 $m_h > 0, m_k > 0$ durumu



Şekil 5.40 $m_h < 0, m_k > 0$ durumu

Şekil 5.39 e göre $m_h > 0, m_k > 0$ iken

$$d_E(B, H) = d_m(B, H) = p_m$$

$$d_E(H, C) = d_m(H, C) = q_m$$

$$d_E(B, C) = d_m(B, C) = a_m$$

$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_k^2}}{\max \{1, |m_k|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

$$d_E(A, B) = d_m(A, B) = c_m$$

$$d_E(A, H) = \left(\frac{\sqrt{1 + (-m_h^{-1})^2}}{\max \{1, |-m_h^{-1}|\}} \right) \cdot d_M(A, H)$$

$$\textbf{i)} \quad [d_E(A, H)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(H, C)$$

$$\left(\frac{\sqrt{1 + (-m_h^{-1})^2}}{\max\{1, |(-m_h^{-1})|\}} \cdot d_M(A, H) \right)^2 = d_m(B, H) \cdot d_m(H, C)$$

$$\Rightarrow \frac{1 + (m_h^{-1})^2}{(\max\{1, |m_h^{-1}|\})^2} \cdot h_m^2 = p_m \cdot q_m$$

$$h_m^2 = \rho^{-1}(m_h^{-1}) \cdot p_m \cdot q_m$$

$$\textbf{ii)} \quad [d_E(A, C)]^2 = d_E(H, C) \cdot d_E(B, C)$$

$$\left(\frac{\sqrt{1 + m_k^2}}{\max\{1, |m_k|\}} \cdot d_E(A, C) \right)^2 = d_m(H, C) \cdot d_m(B, C)$$

$$\Rightarrow \frac{1 + m_k^2}{(\max\{1, |m_k|\})^2} \cdot b_m^2 = q_m \cdot a_m$$

$$b_m^2 = \rho^{-1}(m_k) q_m \cdot a_m$$

$$\textbf{iii)} \quad [d_E(A, B)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(B, C)$$

$$[d_m(A, B)]^2 = d_m(B, H) \cdot d_m(B, C)$$

$$\Rightarrow c_m^2 = p_m \cdot a_m$$

Şekil 5.40 a göre $m_h < 0$, $m_k > 0$ iken

$$d_E(B, H) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max\{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, H)$$

$$d_E(H, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max\{1, |m_a|\}} \right) \cdot d_M(H, C)$$

$$d_E(B, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, C)$$

$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_k^2}}{\max \{1, |m_k|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

$$d_E(A, B) = d_m(A, B) = c_m$$

$$d_E(A, H) = d_m(A, H) = h_m$$

$$\textbf{i)} \quad [d_E(A, H)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(H, C)$$

$$[d_m(A, H)]^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, H) \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(H, C)$$

$$\Rightarrow \frac{(\max\{1, |m_h|\})^2}{1 + m_h^2} \cdot h_m^2 = p_m \cdot q_m$$

$$h_m^2 = \rho(m_h) \cdot p_m \cdot q_m$$

$$\textbf{ii)} \quad [d_E(A, C)]^2 = d_E(H, C) \cdot d_E(B, C)$$

$$\left(\frac{\sqrt{1 + m_k^2}}{\max \{1, |m_k|\}} \cdot d_M(A, C) \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(H, C) \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, C)$$

$$\Rightarrow \frac{1 + m_k^2}{1 + m_h^2} \cdot \frac{(\max\{1, |m_h|\})^2}{(\max\{1, |m_k|\})^2} \cdot b_m^2 = q_m \cdot a_m$$

$$b_m^2 = \rho^{-1}(m_h, m_k) q_m \cdot a_m$$

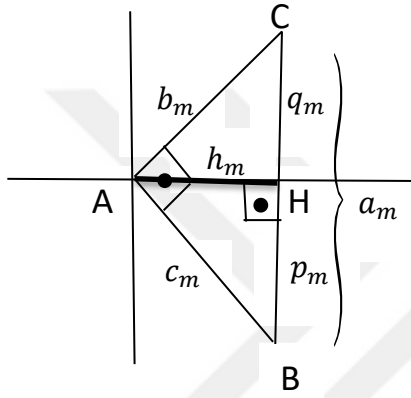
$$\textbf{iii)} \quad [d_E(A, B)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(B, C)$$

$$[d_m(A, B)]^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, H) \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, C)$$

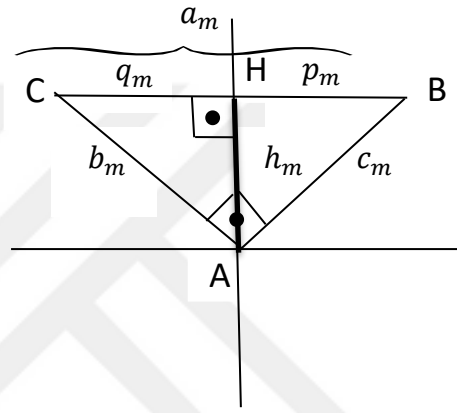
$$\Rightarrow \frac{(\max \{1, |m_h|\})^2}{1 + m_h^2} \cdot c_m^2 = p_m \cdot a_m$$

$$c_m^2 = \rho(m_h) p_m \cdot a_m$$

c)



Şekil 5.41 $m_h = \infty$, $m_k < 0$ durumu



Şekil 5.42 $m_h = 0$, $m_k > 0$ durumu

Şekil 5.41 e göre $m_h = \infty$, $m_k < 0$ iken

$$d_E(B, H) = d_m(B, H) = p_m$$

$$d_E(H, C) = d_m(H, C) = q_m$$

$$d_E(B, C) = d_m(B, C) = a_m$$

$$d_E(A, C) = d_m(A, C) = b_m$$

$$d_E(A, B) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_k^2}}{\max \{1, |m_k|\}} \right) \cdot d_M(A, B)$$

$$d_E(A, H) = d_m(A, H) = h_m$$

i) $[d_E(A, H)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(H, C)$

$$[d_m(A, H)]^2 = d_m(B, H) \cdot d_m(H, C)$$

$$h_m^2 = p_m \cdot q_m$$

$$\text{ii)} \quad [d_E(A, C)]^2 = d_E(H, C) \cdot d_E(B, C)$$

$$[d_m(A, C)]^2 = d_m(H, C) \cdot d_m(B, C)$$

$$b_m^2 = q_m \cdot a_m$$

$$\text{iii)} \quad [d_E(A, B)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(B, C)$$

$$\left(\frac{\sqrt{1 + m_k^2}}{\max\{1, |m_k|\}} \cdot d_M(A, B) \right)^2 = d_m(B, H) \cdot d_m(B, C)$$

$$\Rightarrow \frac{1 + m_k^2}{(\max\{1, |m_k|\})^2} \cdot c_m^2 = p_m \cdot a_m$$

$$c_m^2 = \rho^{-1}(m_k) p_m \cdot a_m$$

Şekil 5.42 a göre $m_h = 0$, $m_k > 0$ iken

$$d_E(B, H) = d_m(B, H) = p_m$$

$$d_E(H, C) = d_m(H, C) = q_m$$

$$d_E(B, C) = d_m(B, C) = a_m$$

$$d_E(A, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_k^2}}{\max\{1, |m_k|\}} \right) \cdot d_M(A, C)$$

$$d_E(A, B) = d_m(A, B) = c_m$$

$$d_E(A, H) = d_m(A, H) = h_m$$

$$\text{i)} \quad [d_E(A, H)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(H, C)$$

$$[d_m(A, H)]^2 = d_m(B, H) \cdot d_m(H, C)$$

$$h_m^2 = p_m \cdot q_m$$

ii) $[d_E(A, C)]^2 = d_E(H, C) \cdot d_E(B, C)$

$$\left(\frac{\sqrt{1 + m_k^2}}{\max \{1, |m_k|\}} \cdot d_E(A, C) \right)^2 = d_m(H, C) \cdot d_m(B, C)$$

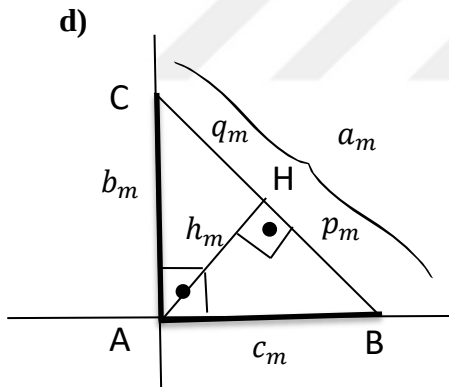
$$\Rightarrow \frac{1 + m_k^2}{(\max\{1, |m_k|\})^2} \cdot b_m^2 = q_m \cdot a_m$$

$$b_m^2 = \rho^{-1}(m_k) q_m \cdot a_m$$

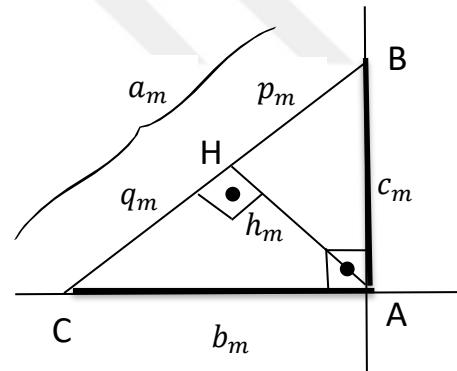
iii) $[d_E(A, B)]^2 = d_E(B, H).d_E(B, C)$

$$[d_m(A, B)]^2 = d_m(B, H) \cdot d_m(B, C)$$

$$\Rightarrow c_m^2 = p_m \cdot a_m$$



Şekil 5.43 $m_h < 0$, $m_k = 0$ durumu



Şekil 5.44 $m_h > 0$, $m_k = \infty$ durumu

Şekil 5.43 e göre $m_h < 0$, $m_k = 0$ iken

$$d_E(B, H) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, H)$$

$$d_E(H, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(H, C)$$

$$d_E(B, C) = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, C)$$

$$d_E(A, C) = d_m(A, C) = b_m$$

$$d_E(A, B) = d_m(A, B) = c_m$$

$$d_E(A, H) = d_m(A, H) = h_m$$

$$\textbf{i)} \quad [d_E(A, H)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(H, C)$$

$$\begin{aligned} [d_m(A, H)]^2 &= \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, H) \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(H, C) \\ &\Rightarrow \frac{(\max \{1, |m_h|\})^2}{1 + m_h^2} \cdot h_m^2 = p_m \cdot q_m \end{aligned}$$

$$h_m^2 = \rho(m_h) p_m \cdot q_m$$

$$\textbf{ii)} \quad [d_E(A, C)]^2 = d_E(H, C) \cdot d_E(B, C)$$

$$\begin{aligned} [d_m(A, C)]^2 &= \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(H, C) \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max \{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, C) \\ &\Rightarrow \frac{(\max \{1, |m_h|\})^2}{1 + m_h^2} \cdot b_m^2 = q_m \cdot a_m \end{aligned}$$

$$b_m^2 = \rho(m_h) \cdot q_m \cdot a_m$$

$$\textbf{iii)} \quad [d_E(A, B)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(B, C)$$

$$[d_m(A, B)]^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max\{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, H) \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + m_h^2}}{\max\{1, |m_h|\}} \right) \cdot d_M(B, C)$$

$$\Rightarrow \frac{(\max\{1, |m_h|\})^2}{1 + m_h^2} \cdot c_m^2 = p_m \cdot a_m$$

$$c_m^2 = \rho(m_h) p_m \cdot a_m$$

Şekil 5.44 e göre $m_h > 0$, $m_k = \infty$ iken

$$d_E(B, H) = d_m(B, H) = p_m$$

$$d_E(H, C) = d_m(H, C) = q_m$$

$$d_E(B, C) = d_m(B, C) = a_m$$

$$d_E(A, C) = d_m(A, C) = b_m$$

$$d_E(A, B) = d_m(A, B) = c_m$$

$$d_E(A, H) = \left(\frac{\sqrt{1 + (-m_h^{-1})^2}}{\max\{1, |-m_h^{-1}|\}} \right) \cdot d_M(A, H)$$

$$\textbf{i)} \quad [d_E(A, H)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(H, C)$$

$$\left(\frac{\sqrt{1 + (-m_h^{-1})^2}}{\max\{1, |-m_h^{-1}|\}} \cdot d_M(A, H) \right)^2 = d_m(B, H) \cdot d_m(H, C)$$

$$\Rightarrow \frac{1 + (m_h^{-1})^2}{(\max\{1, |m_h^{-1}|\})^2} \cdot h_m^2 = p_m \cdot q_m$$

$$h_m^2 = \rho^{-1}(m_h^{-1}) \cdot p_m \cdot q_m$$

$$\textbf{ii)} \quad [d_E(A, C)]^2 = d_E(H, C) \cdot d_E(B, C)$$

$$[d_m(A, C)]^2 = d_m(H, C) \cdot d_m(B, C)$$

$$b_m^2 = q_m \cdot a_m$$

$$\text{iii) } [d_E(A, B)]^2 = d_E(B, H) \cdot d_E(B, C)$$

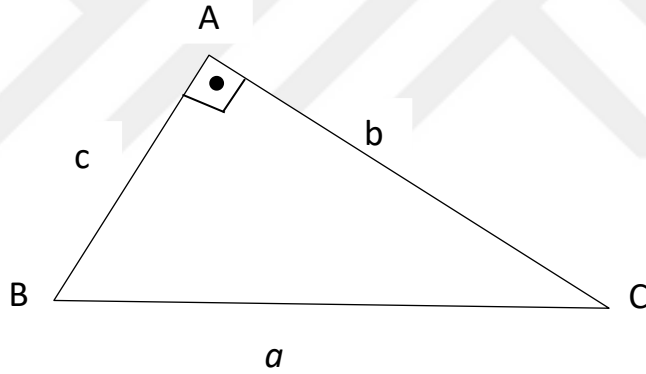
$$[d_m(A, B)]^2 = d_m(B, H) \cdot d_m(B, C)$$

$$\Rightarrow c_m^2 = p_m \cdot a_m$$

5.6 Pisagor Teoremi

5.6.1 Öklid Düzleminde Pisagor Teoremi

Bir dik üçgende, hipotenüsün karesi, dik kenarların kareleri toplamına eşittir.

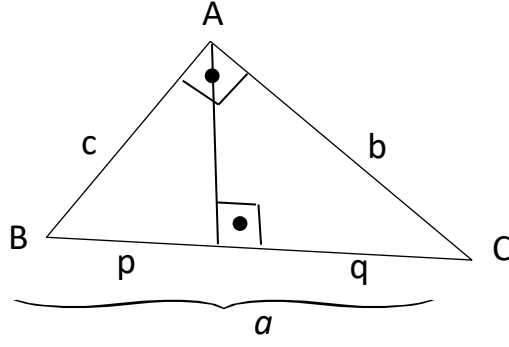


Şekil 5.45 Pisagor uzunluğu

Yani Şekil 5.45 e göre $a^2 = b^2 + c^2$ dir.

İspat : Şekil 5.45 de A noktasından BC doğru parçasına indirilen dikmenin ayağı H noktası; $|BH|=p$ ve $|HC|=q$ olarak alınırsa (Bkz Şekil 5.46), Öklid bağıntısı gereğince $b^2 = q \cdot a$ ve

$c^2 = p \cdot a$ dir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa, $b^2 + c^2 = a \cdot (p + q)$ elde edilir. Buradan da $p + q = a$ olduğundan $a^2 = b^2 + c^2$ bulunur (Çolakoğlu 2005).



Şekil 5.46 Öklid düzleminde Pisagor uzunluğu

5.6.2 Pisagor Teoreminin m - Düzlemi Benzeri

Bu teorem için iki farklı yöntem izlenerek teoremin m - Düzlemi versiyonu olan farklı iki formül elde edilecektir.

Teorem 5.6.2: m - Düzleminde bir ABC dik üçgeninde, hipotenüs uzunluğu a_m ; dik kenarların uzunlukları b_m ve c_m ; hipotenüsün eğimi m_h ; AB veya AC nin eğimi m_k ise,

$$\rho(m_h) = \frac{1 + m_h^2}{(\max\{1, |m_h|\})^2} , \quad \rho(m_h^{-1}) = \frac{1 + (m_h^{-1})^2}{(\max\{1, |m_h^{-1}|\})^2}$$

$$\rho(m_k) = \frac{1 + m_k^2}{(\max\{1, |m_k|\})^2}$$

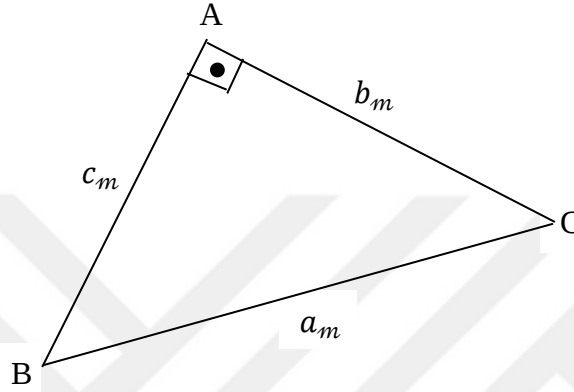
ve

$$\rho(m_h, m_k) = \frac{1 + m_k^2}{1 + m_h^2} \cdot \frac{(\max\{1, |m_h|\})^2}{(\max\{1, |m_k|\})^2}$$

olmak üzere,

$$a_m^2 = \begin{cases} b_m^2 + \rho(m_k) \cdot c_m^2 & , \quad m_h > 0, m_k < 0 ; m_h = \infty, m_k < 0 \\ \rho^{-1}(m_h) \cdot b_m^2 + \rho(m_k, m_h) \cdot c_m^2 & , \quad m_h < 0, m_k < 0 \\ \rho(m_k) \cdot b_m^2 + c_m^2 & , \quad m_h > 0, m_k > 0 ; m_h = 0, m_k > 0 \\ \rho(m_k, m_h) \cdot b_m^2 + \rho^{-1}(m_h) \cdot c_m^2 & , \quad m_h < 0, m_k > 0 \\ \rho^{-1}(m_h) (b_m^2 + c_m^2) & , \quad m_h < 0, m_k = 0 \\ b_m^2 + c_m^2 & , \quad m_h > 0, m_k = \infty \end{cases}$$

dir.



Şekil 5.47 m - Düzleminde Pisagor uzunluğu

İspat :

Öklid bağıntısının m benzeri gereğince Teorem 5.5.2 deki durumları düşünelim. Buradan

a) $m_h > 0, m_k < 0$ ise (bkz Şekil 5.37)

$$b_m^2 = q_m \cdot a_m \text{ ve } \frac{1+m_k^2}{(\max\{1, |m_k|\})^2} \cdot c_m^2 = p_m \cdot a_m$$

$$b_m^2 = q_m \cdot a_m \text{ ve } \rho(m_k) \cdot c_m^2 = p_m \cdot a_m \text{ ise}$$

$$b_m^2 + \rho(m_k) \cdot c_m^2 = a_m^2$$

b) $m_h < 0, m_k < 0$ ise (bkz Şekil 5.38)

$$\frac{(\max\{1, |m_h|\})^2}{1+m_h^2} \cdot b_m^2 = q_m \cdot a_m \text{ ve } \frac{1+m_k^2}{1+m_h^2} \cdot \frac{(\max\{1, |m_h|\})^2}{(\max\{1, |m_k|\})^2} \cdot c_m^2 = p_m \cdot a_m$$

$$\rho^{-1}(m_h) \cdot b_m^2 = q_m \cdot a_m \text{ ve } \rho(m_k, m_h) \cdot c_m^2 = p_m \cdot a_m \text{ ise}$$

$$\rho^{-1}(m_h).b_m^2 + \rho(m_k, m_h).c_m^2 = a_m^2$$

c) $m_h > 0, m_k > 0$ ise (bkz Şekil 5.39)

$$\frac{1+m_k^2}{(\max\{1, |m_k|\})^2}.b_m^2 = q_m.a_m \text{ ve } c_m^2 = p_m.a_m$$

$$\rho(m_k).b_m^2 = q_m.a_m \text{ ve } c_m^2 = p_m.a_m \text{ ise}$$

$$\rho(m_k).b_m^2 + c_m^2 = a_m^2$$

d) $m_h < 0, m_k > 0$ ise (bkz Şekil 5.40)

$$\frac{1+m_k^2}{1+m_h^2} \cdot \frac{(\max\{1, |m_h|\})^2}{(\max\{1, |m_k|\})^2}.b_m^2 = q_m.a_m \text{ ve } \frac{(\max\{1, |m_h|\})^2}{1+m_h^2}.c_m^2 = p_m.a_m$$

$$\rho(m_k, m_h).b_m^2 = q_m.a_m \text{ ve } \rho^{-1}(m_h).c_m^2 = p_m.a_m \text{ ise}$$

$$\rho(m_k, m_h).b_m^2 + \rho^{-1}(m_h).c_m^2 = a_m^2$$

e) $m_h = \infty, m_k < 0$ ise (bkz Şekil 5.41)

$$b_m^2 = q_m.a_m \text{ ve } \frac{1+m_k^2}{(\max\{1, |m_k|\})^2}.c_m^2 = p_m.a_m$$

$$b_m^2 = q_m.a_m \text{ ve } \rho(m_k).c_m^2 = p_m.a_m \text{ ise}$$

$$b_m^2 + \rho(m_k).c_m^2 = a_m^2$$

f) $m_h = 0, m_k > 0$ ise (bkz Şekil 5.42)

$$\frac{1+m_k^2}{(\max\{1, |m_k|\})^2}.b_m^2 = q_m.a_m \text{ ve } c_m^2 = p_m.a_m$$

$$\rho(m_k).b_m^2 = q_m.a_m \text{ ve } c_m^2 = p_m.a_m \text{ ise}$$

$$\rho(m_k).b_m^2 + c_m^2 = a_m^2$$

g) $m_h < 0, m_k = 0$ ise (bkz Şekil 5.43)

$$\frac{(\max\{1, |m_h|\})^2}{1+m_h^2}.b_m^2 = q_m.a_m \text{ ve } \frac{(\max\{1, |m_h|\})^2}{1+m_h^2}.c_m^2 = p_m.a_m$$

$$\rho^{-1}(m_h).b_m^2 = q_m.a_m \text{ ve } \rho^{-1}(m_h).c_m^2 = p_m.a_m \text{ ise}$$

$$\rho^{-1}(m_h)(b_m^2 + c_m^2) = a_m^2$$

h) $m_h > 0$, $m_k = \infty$ ise (bkz Şekil 5.44)

$$b_m^2 = q_m \cdot a_m \text{ ve } c_m^2 = p_m \cdot a_m \text{ ise}$$

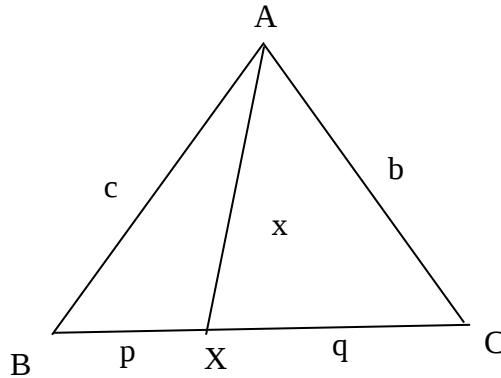
$$b_m^2 + c_m^2 = a_m^2$$

5.7 Stewart Teoremi

5.7.1 Öklid Düzleminde Stewart Teoremi

ABC herhangi bir üçgen ve $X \in [BC]$ olmak üzere; $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $|BX| = p$, $|CX| = q$ ve $|AX| = x$ ise aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$x^2 = \frac{b^2 \cdot p + c^2 \cdot q}{p + q} - p \cdot q$$



Şekil 5.48 Öklid düzleminde Stewart uzunluğu

İspat : $B = X$ iken, yani $p = 0$ için ve $C = X$ iken, yani $q = 0$ için bağıntı geçerlidir.

$X \in (BC)$ için Şekil 5.48 de AXC açısının derece cinsinden ölçüsü α olarak alınırsa AXB açısının ölçüsü $180 - \alpha$ olur. AXC ve AXB üçgenlerinde kosinüs teoremi gereğince,

$$b^2 = x^2 + q^2 - 2xq\cos\alpha \quad \text{ve} \quad c^2 = x^2 + p^2 - 2xpcos(180 - \alpha)$$

dir. İlk eşitliğin her iki yanını q ile, ikinci eşitliğin her iki yanını p ile bölünüp, eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{b^2}{q} + \frac{c^2}{p} = x^2 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) + p + q$$

elde edilir. Buradan da

$$x^2 = \frac{b^2 \cdot p + c^2 \cdot q}{p + q} - p \cdot q$$

bulunur (Çolakoğlu 2005).

5.7.2 Stewart Teoreminin m - Düzlemi Benzeri

Kenarortay teoreminde verilen parametreler cinsinden formülün bir m - düzlemindeki benzeri verilecektir.

Teorem 5.7.2 :

ABC m - düzleminde herhangi bir üçgen; $X \in [BC]$, $a_m = d_m(B, C)$, $b_m = d_m(A, C)$, $c_m = d_m(A, B)$, $p_m = d_m(B, X)$, $q_m = d_m(C, X)$ ve $x_m = d_m(A, X)$, $|m_b|^{-1} = \alpha$, $|m_c|^{-1} = \beta$ olmak üzere,

1) Eğer A köşesinin hiç temel doğrusu yoksa

$$\text{a) } x_m = \max \left\{ \frac{b_m \cdot p_m + \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m}, \frac{\alpha b_m \cdot p_m + c_m \cdot q_m}{p_m + q_m} \right\}, m_a < 0$$

2) Eğer A köşesinin yalnız bir temel doğrusu varsa

$$\text{a) } x_m = \max \left\{ \frac{\alpha b_m \cdot p_m + c_m \cdot q_m}{p_m + q_m}, \frac{-b_m \cdot p_m + \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m} \right\}, m_a < 0, m_b < 0$$

$$\text{b) } x_m = \max \left\{ \frac{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}, \frac{-\gamma_m \cdot p_m + \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m} \right\}, m_a < 0, m_b > 0$$

$$\text{c) } x_m = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_m \cdot p_m - \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m} \right)^2}, m_a > 0, m_b > 0$$

- 3) Eğer A köşesinin iki tane temel doğrusu var; X noktası, A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalıyorsa

$$\text{a) } x_m = \max \left\{ \frac{-\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}, \frac{b_m \cdot p_m - \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m} \right\}, m_a < 0, m_b > 0$$

$$\text{b) } x_m = \sqrt{\left(\frac{-\alpha b_m \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m} \right)^2 + \left(\frac{b_m \cdot p_m - \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m} \right)^2}, m_a > 0$$

- 4) ABC üçgeni, A köşesinde iki tane temel doğrusu olan bir üçgen olsun ve X noktası A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalsın.

$$\text{a) } x_m = \max \left\{ \left(\frac{-\alpha \cdot b_m \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m} \right), \left(\frac{-b_m p_m + \beta c_m q_m}{p_m + q_m} \right) \right\}, m_a < 0, m_b < 0$$

$$\text{b) } x_m = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m} \right)^2 + \left(\frac{-\gamma_m p_m + \beta c_m q_m}{p_m + q_m} \right)^2}, m_a > 0, m_b > 0$$

dir.

Aşağıdaki ispatta Öklid düzlemiyle aynı olan Stewart uzunluklarının hesaplanması gözardı edilmiştir.

İspat :

$B' = B$ noktasının A dan geçen y- eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

$C' = C$ noktasının A dan geçen x- eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

$X' = X$ noktasının A dan geçen x-eksenine paralel olan doğruya dik izdüşümü,

$T = X$ noktasının CC' doğrusuna dik izdüşümü,

$T' = X$ noktasının BB' doğrusuna dik izdüşümü

ve $d_E(A, C') = b_1$, $d_E(C, C') = b_2$, $d_E(A, B') = c_2$, $d_E(B, B') = c_1$ m_a ; AX nin eğimi,

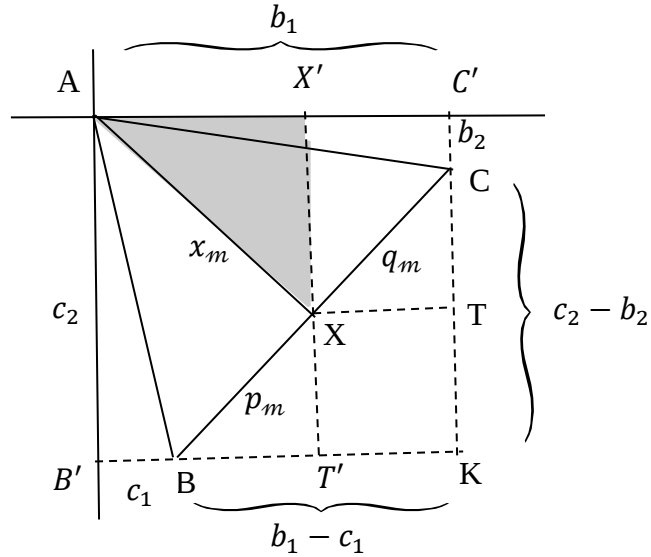
m_b ; AC nin eğimi ve m_c ; AB nin eğimi, $|m_b| - 1 = \alpha$ ve $|m_c| - 1 = \beta$ olsun.olsun.

Böylece

$$x_m = \begin{cases} \sqrt{(d_E(A, X'))^2 + (d_E(X, X'))^2} & , \quad m_a > 0 \\ \max\{d_E(A, X'), d_E(X, X')\} & , \quad m_a < 0 \end{cases}$$

1) ABC üçgeni A köşesinde hiç temel doğrusu olmayan bir üçgen olsun.

a)



Şekil 5.49 $m_a < 0$ durumu

Şekil 5.49 de Teorem 5.1.2 gereğince $d_m(X, T) = \frac{q_m(b_1 - c_1)}{p_m + q_m}$ ve $d_m(X, T') = \frac{p_m(c_2 - b_2)}{p_m + q_m}$ dir.

$$d_E(A, X') = b_1 - d_m(X, T)$$

$$d_E(X, X') = c_2 - d_m(X, T')$$

ve $m_a < 0$ olduğundan AX doğrusu negatif eğimlidir. Bu durumda

$x_m = \max\{d_E(A, X'), d_E(X, X')\}$ olduğundan

$$x_m = \max\left\{b_1 - \frac{q_m(b_1 - c_1)}{p_m + q_m}, c_2 - \frac{p_m(c_2 - b_2)}{p_m + q_m}\right\}$$

$$x_m = \max\left\{\frac{b_1 p_m + c_1 q_m}{p_m + q_m}, \frac{b_2 p_m + c_2 q_m}{p_m + q_m}\right\}$$

i) ABC üçgeninde $-1 < m_b < 0$, $m_c < -1$ ve $b_1 = b_m$ ve $c_2 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$x_m = \max\left\{\frac{b_m p_m + |m_c|^{-1} c_m q_m}{p_m + q_m}, \frac{|m_b|^{-1} \cdot b_m \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}\right\}$$

$$x_m = \max\left\{\frac{b_m \cdot p_m + \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m}, \frac{\alpha b_m \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}\right\}$$

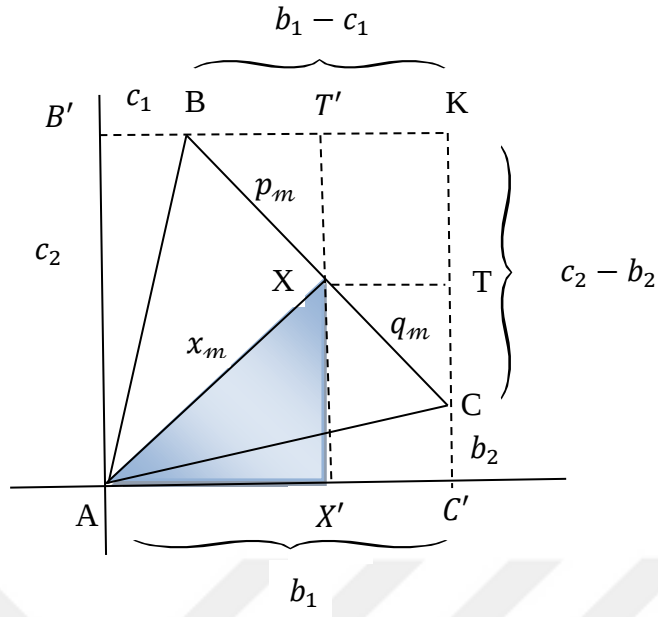
ii) ABC üçgeninde $m_b < -1$, $-1 < m_c < 0$ ve $b_2 = b_m$ ve $c_1 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$x_m = \max\left\{\frac{|m_b|^{-1} \cdot b_m \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}, \frac{b_m p_m + |m_c|^{-1} c_m q_m}{p_m + q_m}\right\}$$

$$x_m = \max\left\{\frac{\alpha b_m \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}, \frac{b_m \cdot p_m + \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m}\right\}$$

b)

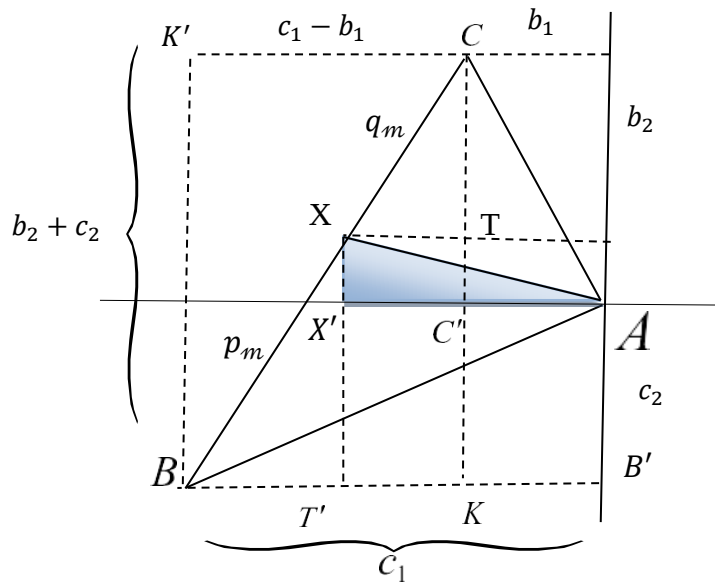


Şekil 5.50 $m_a > 0$ durumu

Şekil 5.50, Öklid düzlemiyle aynı olduğundan Stewart uzunluğunun hesaplanması gözardı edilmiştir.

2) ABC üçgeni A köşesinde bir tek temel doğrusu olan bir üçgen olsun.

a)



Şekil 5.51 $m_a < 0, m_b < 0$ durumu

Şekil 5.51 da Teorem 5.1.2 gereğince $d_m(X, T) = \frac{q_m(c_1 - b_1)}{p_m + q_m}$ ve $d_m(X, T') = \frac{p_m(b_2 + c_2)}{p_m + q_m}$ dir.

$$d_E(A, X') = b_1 + d_m(X, T)$$

$$d_E(X, X') = c_2 - d_m(X, T')$$

ve $m_a < 0$ olduğundan AX doğrusu negatif eğimlidir. Bu durumda

$x_m = \max\{d_E(A, X'), d_E(X, X')\}$ olduğundan

$$x_m = \max\left\{b_1 + \frac{q_m(c_1 - b_1)}{p_m + q_m}, c_2 - \frac{p_m(b_2 + c_2)}{p_m + q_m}\right\}$$

$$x_m = \max\left\{\frac{b_1 p_m + c_1 q_m}{p_m + q_m}, \frac{-b_2 p_m + c_2 q_m}{p_m + q_m}\right\}$$

i) ABC üçgeninde $m_b < -1$, $-1 < m_c < 0$ ve $b_2 = b_m$ ve $c_1 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$x_m = \max\left\{\frac{|m_b|^{-1} \cdot b_m \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}, \frac{-b_m p_m + |m_c|^{-1} c_m q_m}{p_m + q_m}\right\}$$

$$x_m = \max\left\{\frac{\alpha b_m \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}, \frac{-b_m \cdot p_m + \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m}\right\}$$

ii) ABC üçgeninde $-1 < m_b < 0$, $m_c < -1$ ve $b_1 = b_m$ ve $c_2 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$x_m = \max\left\{\frac{b_m p_m + |m_c|^{-1} c_m q_m}{p_m + q_m}, \frac{-|m_b|^{-1} \cdot b_m \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}\right\}$$

$$x_m = \max\left\{\frac{b_m \cdot p_m + \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m}, \frac{-\alpha b_m \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}\right\}$$

$$x_m = \max \left\{ \frac{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}, \frac{-\gamma_m p_m + |m_c|^{-1} c_m q_m}{p_m + q_m} \right\}$$

$$x_m = \max \left\{ \frac{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}, \frac{-\gamma_m \cdot p_m + \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m} \right\}$$

Bu durumda

$$x_m = \max \left\{ \frac{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} p_m + |m_c|^{-1} c_m q_m}{p_m + q_m}, \frac{-\gamma_m \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m} \right\}$$

$$x_m = \max \left\{ \frac{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} \cdot p_m + \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m}, \frac{-\gamma_m \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m} \right\}$$

Şekil 5.53 de Teorem 5.1.2 gereğince $d_m(X, T) = \frac{q_m(c_1 - b_1)}{p_m + q_m}$ ve $d_m(X, T') = \frac{p_m(b_2 + c_2)}{p_m + q_m}$ dir.

96

$$d_E(X, X') = d_m(X, T') - c_2$$

ve $m_a > 0$ olduğundan AX doğrusu pozitif eğimlidir. Bu durumda

$$x_m = \sqrt{(d_E(A, X'))^2 + (d_E(X, X'))^2} \text{ olduğundan}$$

$$x_m = \sqrt{\left(b_1 + \frac{q_m(c_1 - b_1)}{p_m + q_m}\right)^2 + \left(\frac{p_m(b_2 + c_2)}{p_m + q_m} - c_2\right)^2}$$

$$x_m = \sqrt{\left(\frac{b_1 p_m + c_1 q_m}{p_m + q_m}\right)^2 + \left(\frac{b_2 p_m - c_2 q_m}{p_m + q_m}\right)^2}$$

$$m_b > 0, b_m^2 = b_1^2 + b_2^2$$

$$b_2 = \gamma_m \Rightarrow b_1 = \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2}$$

i) ABC üçgeninde $-1 < m_c < 0$ ve $c_1 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$x_m = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_m p_m - |m_c|^{-1} c_m q_m}{p_m + q_m}\right)^2}$$

$$x_m = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_m \cdot p_m - \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m}\right)^2}$$

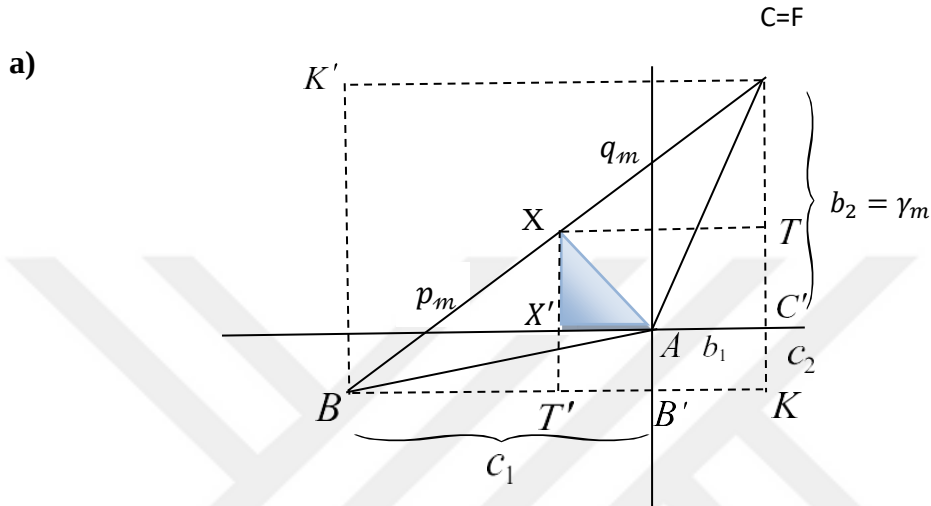
ii) ABC üçgeninde $m_c < -1$ ve $c_2 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$x_m = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} p_m + |m_c|^{-1} c_m q_m}{p_m + q_m}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_m \cdot p_m - c_m q_m}{p_m + q_m}\right)^2}$$

$$x_m = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} \cdot p_m + \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_m \cdot p_m - c_m q_m}{p_m + q_m}\right)^2}$$

3) ABC üçgeni A köşesinde iki tane temel doğrusu olan bir üçgen olsun. X noktası da A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalsın.



Şekil 5.54 $m_a < 0$, $m_b > 0$ durumu

Şekil 5.54 de Teorem 5.1.2 gereğince $d_m(X, T) = \frac{q_m(b_1+c_1)}{p_m+q_m}$ ve $d_m(X, T') = \frac{p_m(b_2+c_2)}{p_m+q_m}$ dir.

$$d_E(A, X') = d_m(X, T) - b_1$$

$$d_E(X, X') = d_m(X, T') - c_2$$

ve $m_a < 0$ olduğundan AX doğrusu negatif eğimlidir. Bu durumda

$x_m = \max\{d_E(A, X'), d_E(X, X')\}$ olduğundan

$$x_m = \max \left\{ \frac{q_m(b_1 + c_1)}{p_m + q_m} - b_1, \frac{p_m(c_2 + b_2)}{p_m + q_m} - c_2 \right\}$$

$$x_m = \max \left\{ \frac{-b_1 p_m + c_1 q_m}{p_m + q_m}, \frac{b_2 p_m - c_2 q_m}{p_m + q_m} \right\}$$

$$m_b > 0, b_m^2 = b_1^2 + b_2^2$$

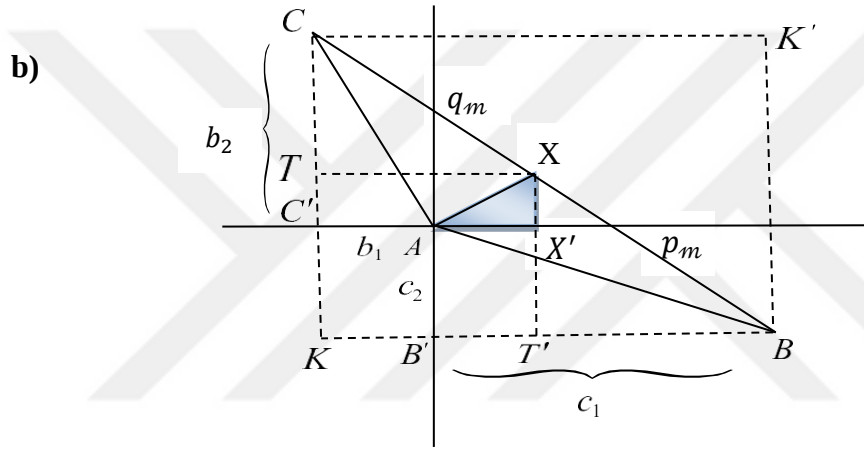
$$b_2 = \gamma_m \Rightarrow b_1 = \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2}$$

i) ABC üçgeninde $1 < m_c < 0$ ve $c_1 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$x_m = \max \left\{ \frac{-\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}, \frac{\gamma_m p_m - |m_c|^{-1} c_m q_m}{p_m + q_m} \right\}$$

$$x_m = \max \left\{ \frac{-\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}, \frac{\gamma_m \cdot p_m - \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m} \right\}$$



Şekil 5.55 $m_a > 0$ durumu

Şekil 5.55 de Teorem 5.1.2 gereğince $d_m(X, T) = \frac{q_m(b_1 + c_1)}{p_m + q_m}$ ve $d_m(X, T') = \frac{p_m(b_2 + c_2)}{p_m + q_m}$ dir.

$$d_E(A, X') = d_m(X, T) - b_1$$

$$d_E(X, X') = d_m(X, T') - c_2$$

ve $m_a > 0$ olduğundan AX doğrusu pozitif eğimlidir. Bu durumda

$$x_m = \sqrt{(d_E(A, X'))^2 + (d_E(X, X'))^2} \text{ olduğundan}$$

$$x_m = \sqrt{\left(\frac{q_m(b_1 + c_1)}{p_m + q_m} - b_1 \right)^2 + \left(\frac{p_m(b_2 + c_2)}{p_m + q_m} - c_2 \right)^2}$$

$$x_m = \sqrt{\left(\frac{-b_1 p_m + c_1 q_m}{p_m + q_m}\right)^2 + \left(\frac{b_2 p_m - c_2 q_m}{p_m + q_m}\right)^2}$$

i) ABC üçgeninde $m_b > -1$, $-1 < m_c < 0$ ve $b_2 = b_m$ ve $c_1 = c_m$ olur.

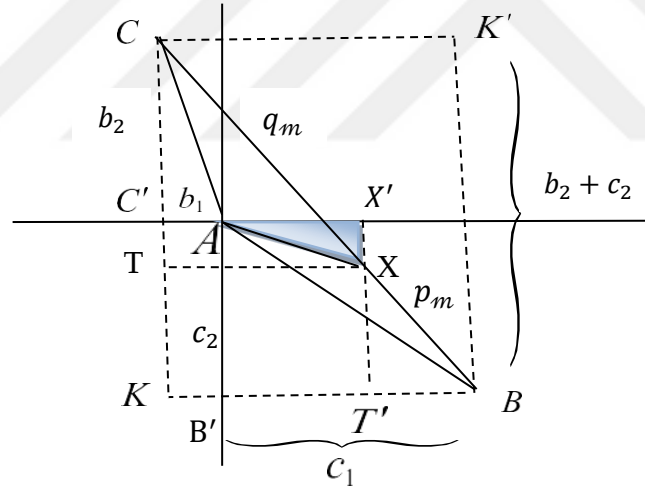
Bu durumda

$$x_m = \sqrt{\left(\frac{-|m_b|^{-1} \cdot b_m \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}\right)^2 + \left(\frac{b_m p_m - |m_c|^{-1} c_m q_m}{p_m + q_m}\right)^2}$$

$$x_m = \sqrt{\left(\frac{-\alpha b_m \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}\right)^2 + \left(\frac{b_m \cdot p_m - \beta c_m \cdot q_m}{p_m + q_m}\right)^2}$$

4. ABC üçgeni, A köşesinde iki tane temel doğrusu olan bir üçgen olsun ve X noktası A köşesine ait temel doğrularla karşı kenarın kesişim noktaları arasında kalsın.

a)



Şekil 5.56 $m_a < 0$, $m_b < 0$ durumu

Şekil 5.56 de Teorem 5.1.2 gereğince $d_m(X, T) = \frac{q_m(b_1 + c_1)}{p_m + q_m}$ ve $d_m(X, T') = \frac{p_m(b_2 + c_2)}{p_m + q_m}$ dir.

$$d_E(A, X') = d_m(X, T) - b_1,$$

$$d_E(E, X') = c_2 - d_m(X, T')$$

ve $m_a < 0$ olduğundan AX doğrusu negatif eğimlidir. Bu durumda

$$d_E(X, X') = c_2 - d_m(X, T')$$

ve $m_a > 0$ olduğundan AX doğrusu pozitif eğimlidir. Bu durumda

$$x_m = \sqrt{(d_E(A, E'))^2 + (d_E(E, E'))^2} \text{ olduğundan}$$

$$x_m = \sqrt{\left(\frac{q_m(b_1 + c_1)}{p_m + q_m} - b_1\right)^2 + \left(c_2 - \frac{p_m(b_2 + c_2)}{p_m + q_m}\right)^2}$$

$$x_m = \sqrt{\left(\frac{-b_1 p_m + c_1 q_m}{p_m + q_m}\right)^2 + \left(\frac{-b_2 p_m + c_2 q_m}{p_m + q_m}\right)^2}$$

$$m_b > 0, b_m^2 = b_1^2 + b_2^2$$

$$b_2 = \gamma_m \Rightarrow b_1 = \sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2}$$

i) ABC üçgeninde $-1 < m_c < 0$ ve $c_1 = c_m$ olur.

Bu durumda

$$x_m = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}\right)^2 + \left(\frac{-\gamma_m p_m + |m_c|^{-1} c_m q_m}{p_m + q_m}\right)^2}$$

$$x_m = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{b_m^2 - \gamma_m^2} \cdot p_m + c_m q_m}{p_m + q_m}\right)^2 + \left(\frac{-\gamma_m p_m + \beta c_m q_m}{p_m + q_m}\right)^2}$$

bulunur.

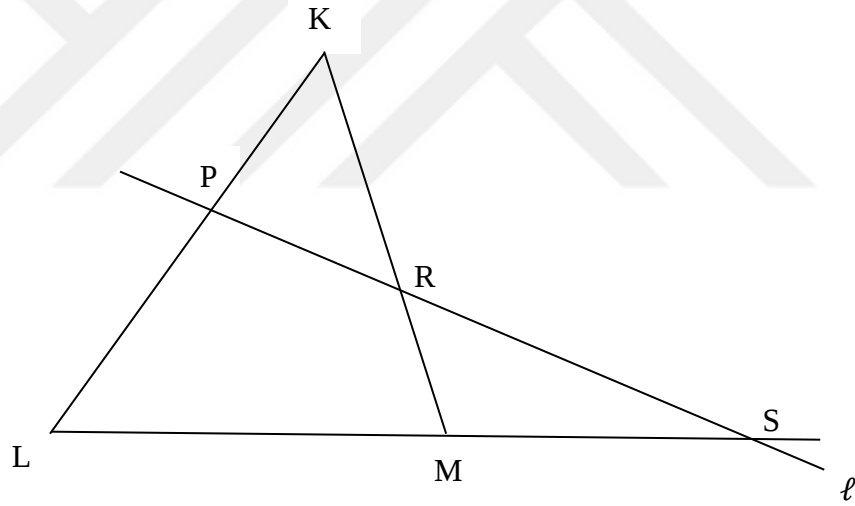
5.8 Menelaus Teoremi

5.8.1 Öklid Düzleminde Menelaus Teoremi

KLM herhangi bir üçgen ve ℓ bu üçgenin iki kenarı olan KL ve LM kenarını sırasıyla K, L, M noktalarından farklı P ve R noktalarında kesen bir doğru olsun. ℓ doğrusunun LM kenarının uzantısını kestiği nokta S ise (Bkz. Şekil 5.58)

$$\frac{|SM|}{|SL|} \cdot \frac{|LP|}{|PK|} \cdot \frac{|KR|}{|RM|} = 1$$

dir.



Şekil 5.58 Menelaus uzunluğu

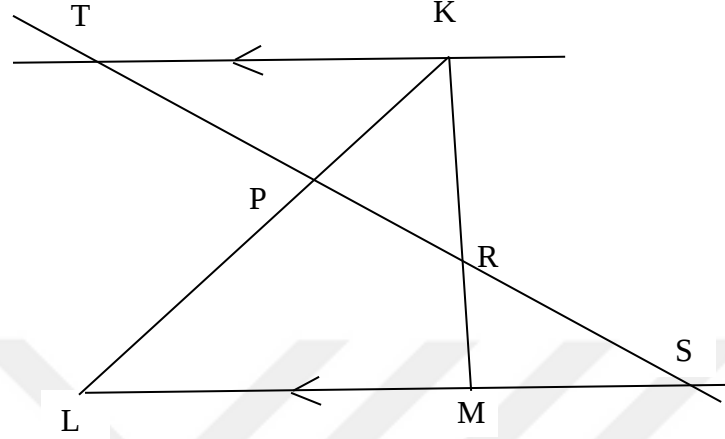
İspat : Şekil 5.58 de K noktasından LM doğrusuna paralel çizildiğinde, çizilen paralelin ℓ doğrusu ile kesişimi T noktası ise KTR ile MSR üçgenleri ve KTP ile LSP üçgenlerinin benzerliklerinden (Thales bağıntıları)

$$\frac{|KT|}{|SM|} = \frac{|KR|}{|RM|} \text{ ve } \frac{|KT|}{|SL|} = \frac{|PK|}{|LP|}$$

elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa bölünüp düzenlenirse

$$\frac{|SM|}{|SL|} \cdot \frac{|LP|}{|PK|} \cdot \frac{|KR|}{|RM|} = 1$$

bulunur (Çolakoğlu 2005).



Şekil 5.59 Öklid düzleminde Menelaus uzunluğu

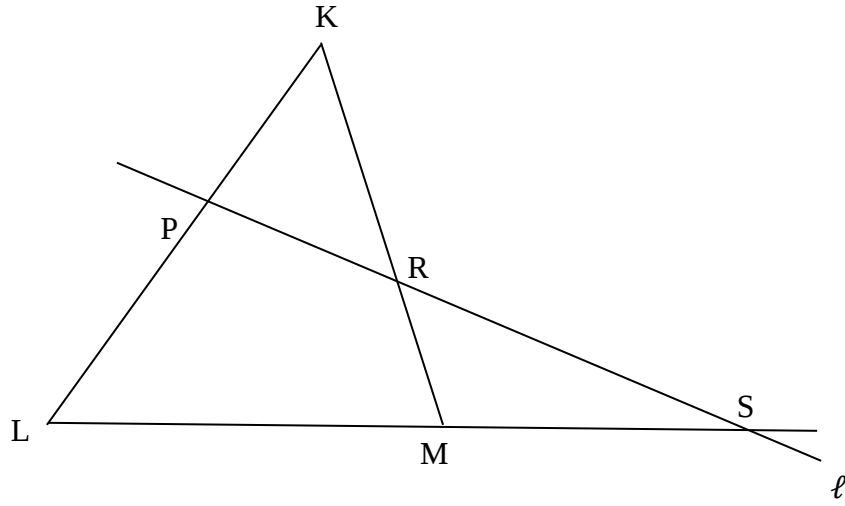
5.8.2 Menelaus Teoreminin m - Düzlemi Benzeri

Thales bağıntıları m - düzleminde geçerli olduğundan Menelaus teoreminin m - düzleminde geçerliliği aşıkardır.

Teorem 5.8.2: m - düzleminde KLM herhangi bir üçgen ve ℓ , bu üçgenin iki kenarını diyelim ki KL ve KM kenarlarını sırasıyla K, L, M noktalarından farklı P ve R noktalarında kesen bir doğru olsun. ℓ doğrusunun LM kenarının uzantısını kestiği nokta S ise (Bkz. Şekil 5.60),

$$\frac{d_m(S, M)}{d_m(S, L)} \cdot \frac{d_m(L, P)}{d_m(P, K)} \cdot \frac{d_m(K, R)}{d_m(R, M)} = 1$$

dir.



Şekil 5.60 m - düzleminde Menelaus uzunluğu

İspat: Bkz. Teorem 4.1.3

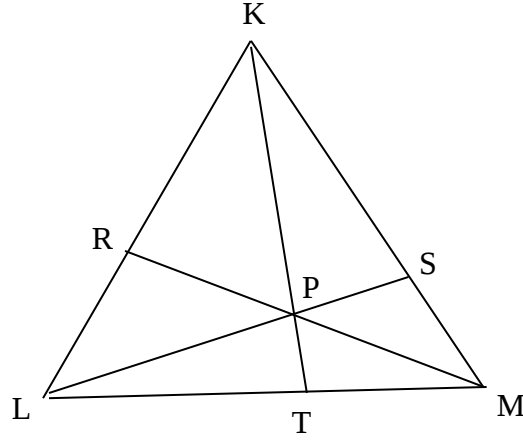
5.9 Ceva Teoremi

5.9.1 Öklid Düzleminde Ceva Teoremi

KLM herhangi bir üçgen ve P, bu üçgen içinde bir nokta olsun. KP doğrusunun LM doğru parçasını kestiği nokta T; LP doğrusunun KM doğru parçasını kestiği nokta S; MP doğrusunun KL doğru parçasını kestiği nokta R ise (Bkz Şekil 5.61)

$$\frac{|KS|}{|SM|} \cdot \frac{|MT|}{|TL|} \cdot \frac{|LR|}{|RK|} = 1$$

dir.



Şekil 5.61 Öklid düzleminde Ceva uzunluğu

İspat :

Şekil 5.61 de KLT üçgeni ve RPM keseni; KTM üçgeni ve LPS keseni göz önüne alınarak Menelaus teoremi uygulanırsa,

$$\frac{|MT|}{|ML|} \cdot \frac{|LR|}{|RK|} \cdot \frac{|KP|}{|PT|} = 1 \quad \text{ve} \quad \frac{|LT|}{|LM|} \cdot \frac{|MS|}{|MK|} \cdot \frac{|KP|}{|PT|} = 1$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa bölünüp düzenlenirse,

$$\frac{|KS|}{|SM|} \cdot \frac{|MT|}{|TL|} \cdot \frac{|LR|}{|RK|} = 1$$

bulunur (Çolakoğlu 2005).

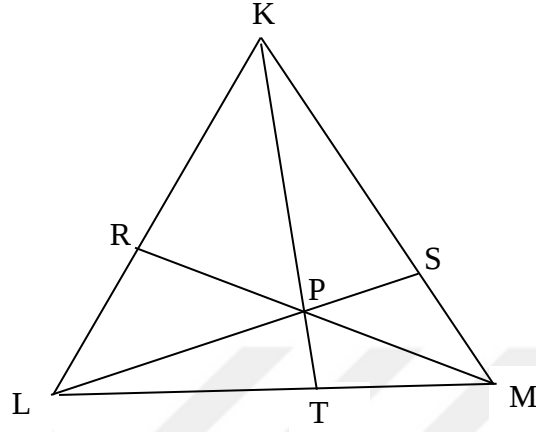
5.9.2 Ceva Teoreminin m - Düzlemi Benzeri

Menelaus teoremi m - düzleminde geçerli olduğundan Ceva teoreminin m - düzleminde geçerliliği aşıkardır.

Teorem 5.9.2: m - düzleminde KLM herhangi bir üçgen ve P, bu üçgen içinde bir nokta olsun. KP doğrusunun LM doğru parçasını kestiği nokta T, LP doğrusunun KM doğru parçasını kestiği nokta S, MP doğrusunun KL doğru parçasını kestiği nokta R ise (Bkz. Şekil 5.62)

$$\frac{d_m(K, S)}{d_m(S, M)} \cdot \frac{d_m(M, T)}{d_m(T, L)} \cdot \frac{d_m(L, R)}{d_m(R, K)} = 1$$

elde edilir.



Şekil 5.62 m - düzleminde Ceva uzunluğu

İspat: Bkz. Teorem 4.1.3

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışması esas olarak, Öklid uzaklık fonksiyonu ve maksimum uzaklık fonksiyonuna bağlı olarak tanımlanan d_m uzaklık fonksiyonu kullanılarak M- metrik geometrisinde üçgenlerin bazı özellikleri incelenmiştir.

Yapılan incelemeler sonucunda Öklid düzlemindeki Thales bağıntısı, Kenarortay Teoremi, İç Açıortay Teoremi, Dış Açıortay Teoremi, Öklid bağıntısı, Pisagor Teoremi, Stewart Teoremi, Menelaus Teoremi ve Ceva Teoremi'nin m - düzlemi benzerleri verilmiştir.



7. KAYNAKLAR

- Çolakoğlu H B, 2005, Bazı Öklidyen Problemlerin Taksi Geometrideki Benzerleri, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 103s, Eskişehir
- Krause E F, 1975, Taxicab Geometry, Addison- Wesley, 88p, Menlo Park
- Krause E F, 1986, Taxicab Geometry: An Adventure in Non Euclidean Geometry, Dover Publications, Inc. 43p, New York
- Kaya R, 2005, Area Formula for Taxicab Triangles, Pi Mu Epsilon Journal, 12(4), 219-220.
- Martin G E, 1998, The Foundations of Geometry and The Non-Euclidean Plane, Springer, 504p, New york, U.S.A.
- Özcan M, Kaya R, 2003, Area of a Triangle in Terms of the Taxicab Distance, Missouri J. of Math Sci., 15, 178-185
- Özcan M, Kaya R, 2002, On the Ratio of Directed Lengths in the Taxicab Plane and Related Properties, Missouri J. of Math Sci., 14, 107-117
- Salihova S, 2006, Maksimum Metriğinin Geometrisi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 149s, Eskişehir
- Senlin W, Donghai J, Alonso J, 2005, Metric Ellipses in Minkowski Planes, Extracta Mathematicae, 20(3), 273-280
- Turan M, 2004, Çin Dama Konikleri, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 156s, Eskişehir
- Türk R, 2010, Nötral ve Nötral olmayan Öklid Geometrisi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 126s, Afyonkarahisar