



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LORENTZİAN 3-UZAYDA YÜZEYLER ÜZERİNDE MANYETİK
EĞRİLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜBRA ŞAHİN

ŞUBAT 2022

KÜBRA ŞAHİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞUBAT 2022

LORENTZİAN 3-UZAYDA YÜZEYLER ÜZERİNDE MANYETİK EĞRİLER

Kübra ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2022

Kübra ŞAHİN tarafından hazırlanan “LORENTZİAN 3-UZAYDA YÜZEYLER ÜZERİNDE MANYETİK EĞRİLER” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Dr. Öğr. Üyesi Gül TUĞ

Matematik Anabilim Dalı, Karadeniz Teknik Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Tefik ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 11/02/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Kübra ŞAHİN

12/02/2022

LORENTZİAN 3-UZAYDA YÜZEYLER ÜZERİNDE MANYETİK EĞRİLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Kübra ŞAHİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ŞUBAT -2022

ÖZET

Bu tez çalışmasında, Lorentzian 3-uzaydaki yüzeyler üzerindeki manyetik yörüngeleri belirleyeceğiz. Bunun için ilk olarak Lorentzian 3-uzayda manyetik vektör alanı ve manyetik yörüngeleri tanıtacağız. Daha sonra yüzeyler üzerindeki Darboux çatısı eğrilikleri ile ilgili Killing eşitliklerini elde edeceğiz. Killing eşitlikleri yardımıyla varyasyonel yaklaşım yaparak Lorentzian 3 uzayda yüzeyler üzerindeki manyetik eğrileri belirleyeceğiz. Uygulama olarak de Sitter uzay olarak adlandırılan zaman-benzeri Lorentz küresinin ve hiperbolik düzlem olarak adlandırılan uzay-benzeri Lorentz küresinin üzerindeki manyetik eğrileri belirleyeceğiz. Ayrıca, elde edilen sonuçlara uygun örnekler vereceğiz ve bu örnekleri bilgisayar programları yardımıyla görselleştireceğiz.

Sayfa Adedi
Anahtar Kelimeler
Danışman

: 42
: Fiziksel uygulamalar, vektör alanları, manyetik alan, adi diferansiyel denklemler, özel eğriler, varyasyon yöntemleri
: Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

MAGNETIC CURVES ON SURFACES IN LORENTZIAN 3-SPACE

(M. Sc. Thesis)

Kübra ŞAHİN

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February-2022

ABSTRACT

In this thesis, we will determine magnetic trajectories on surfaces in Lorentzian 3-space. For this, we will first introduce the magnetic vector field and magnetic curves in Lorentzian 3-space. Then we will obtain the Killing equations of Darboux frame curvatures on the surfaces. We will determine the magnetic curves on the surfaces in Lorentzian 3 space by making a variational approach with the help of Killing equations. In practice, we will determine the magnetic curves on the time-like Lorentz sphere, called de Sitter space, and on the space-like Lorentz sphere, called the hyperbolic plane. In addition, we will give examples suitable for the results obtained and visualize these examples with the help of computer programs.

Page Number : 42
Keywords : Physical applications, vector fields, magnetic field, ordinary differential equations, special curves, variation methods
Supervisor : Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam büyük bir özveriyle, samimiyetiyle, gülen yüzüyle yardımcı olan ve gelecekteki meslek hayatımda örnek alacağım değerli danışman hocam Doç.Dr. Zehra Özdemir'e hayatım boyunca bana maddi manevi desteğini esirgemeyen canım aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Teoriyi Oluşturmak İçin Literatür İncelemesi	1
2. Temel Tanım ve Kavramlar	3
3. Lorentzian 3-Uzayda Manyetik Alan ve Manyetik Yörünge	9
4. Lorentzian 3-Uzayda Manyetik Yörüngeler	11
4.1. Uzay-Benzeri Yüzeyler Üzerindeki Manyetik Yörüngeler	11
4.2. Uzay-benzeri Yüzeyler için Darboux Çatısının Killing Eşitlikleri	11
4.3. Uzay-benzeri Yüzeyler Üzerinde Killing Manyetik Eğriler	15
4.4. Zaman-Benzeri Yüzeyler Üzerindeki Manyetik Yörüngeler	19
4.5. Zaman-benzeri Yüzeyler için Darboux Çatısının Killing Eşitlikleri	20
4.6. Zaman-benzeri Yüzeylerde Killing Manyetik Eğriler	23
5. UYGULAMALAR	29
6. Sonuç ve Öneriler	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	38

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. Sırasıyla $\mathbf{B} = (y, -x, 0)$, $\mathbf{B} = (y, x, 0)$, $\mathbf{B} = (y, z, x)$ manyetik alan denklemlerine karşılık gelen manyetik alanlar.	9
Şekil 5.1. $\mathbb{H}_1^2$ hiperbolik düzlemi üzerindeki bir yüklü parçacığın, $\mathbf{B}(s) = (-\varpi \sinh(\sqrt{2}s), 1, -\varpi \cosh(\sqrt{2}s))$ (kırmızı) manyetik alanı ile ilgili hareketi.	29
Şekil 5.2. $\mathbb{H}_1^2$ hiperbolik düzlemi üzerindeki bir yüklü parçacığın, $\mathbf{B}(s) = (1, s, s^2 + 1)$ (kırmızı) manyetik alanı ile ilgili hareketi.	30
Şekil 5.3. $\mathbb{S}_1^2$ de sitter uzayı üzerindeki uzay-benzeri bir eğri boyunca bir yüklü parçacığın, $\mathbf{B}$ (kırmızı) manyetik alanı ile ilgili hareketi.	31
Şekil 5.4. $\mathbb{S}_1^2$ de sitter uzayı üzerindeki zaman-benzeri bir eğri boyunca bir yüklü parçacığın, $\mathbf{B}$ (kırmızı) manyetik alanı ile ilgili hareketi.	32
Şekil 5.5. $\mathbb{S}_1^2$ de sitter uzayı üzerindeki γ_3 eğrisi boyunca bir yüklü parçacığın, $\mathbf{B}$ (kırmızı) manyetik alanı ile ilgili hareketi.	33
Şekil 5.6. $\mathbb{S}_1^2$ de sitter uzayı üzerindeki γ_4 eğrisi boyunca bir yüklü parçacığın, $\mathbf{B}$ (kırmızı) manyetik alanı ile ilgili hareketi.	34

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbf{B}$	Manyetik Alan
$\mathbb{R}_1^3$	3-Boyutlu Lorentz Uzayı
$S(C)$	Sabit C kesitsel eğrilikli uzay formu
g	Metrik
∇	Levi-Civita Koneksiyonu
$\chi(S)$	S manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi

1. GİRİŞ

Diverjansı sıfır olan vektör alanlarına manyetik vektör alanları denir. Bir yüklü parçacık bir manyetik alana girdiğinde, manyetik alandan etkilenir ve Lorentz kuvveti olarak adlandırılan ve aşağıdaki denkleme sahip bir kuvvet açığa çıkar.

$$\Phi(X) = \mathbf{B} \times X,$$

burada X bir vektör alanı, Φ Lorentz kuvveti ile ilgili anti-simetrik $(1,1)$ -tensör alanı ve $\mathbf{B}$ manyetik vektör alanıdır. Bu kuvvetin etkisiyle parçacık manyetik eğri olarak adlandırılan yeni bir yörünge izlemeye başlar. Lorentz kuvveti, fizikte özellikle elektromanyetik alanların oluşturduğu noktasal yük üzerindeki elektrik ve manyetik kuvvetlerin bileşkesidir. Lorentz kuvveti, manyetik alan vektörü $\mathbf{B}$ ve parçacığın hız vektörü d_1 vektörüne diktir. Yani, Manyetik alan içerisindeki bir yüklü parçacığın hareketi aşağıdaki denklemlerle belirlenebilir.

$$\Phi(d_1) = \mathbf{B} \times d_1 = \nabla_{d_1} d_1.$$

Lorentz kuvvetinin tanımından, parçacık manyetik alana paralel girerse, etkiyen manyetik kuvvet sıfır olur. Parçacık manyetik alana d_1 ve $\mathbf{B}$ arasındaki açı dik açı olacak şekilde girerse Lorentz kuvveti maksimum değerini alır. Manyetik kuvvet parçacığın hızına daima dik olduğundan manyetik kuvvet, parçacığın sadece yönünü değiştirir. Dolayısıyla, yüklü parçacık manyetik alan içerisinde dairesel hareketler yapar (Synge, 1960). Manyetik alan birçok yerde karşımıza çıkar. Örneğin, dünya kendi manyetik alanını üretir ve bu manyetik alan pusulanın temel çalışma prensibini oluşturur. Bunun yanısıra dönen manyetik alan, elektrik motorlarında ve jeneratörlerde kullanılır. Buna benzer daha birçok kullanım alanı mevcuttur. Ayrıca manyetik eğrilerle ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar literatür incelemesi bölümünde ayrıntılı olarak verilmiştir.

1.1. Teoriyi Oluşturmak İçin Literatür İncelemesi

Bu kesimde tez çalışmasına konu olan manyetik yörüngeler ile ilgili çalışmalar üzerinde durulacaktır. Bu alanda yapılan bazı çalışmaları aşağıdaki gibi özetleyebiliriz: 3-boyutlu Riemann manifoldlarında Barros vd. Killing manyetik alanıyla ilgili manyetik alana varyasyonel bir yaklaşım yaparak elde edilen yörüngeleri incelemiştir (Barros ve Romeo 2007), (Barros vd. 2007), (Barros 1997), (Barros vd. 2005), (Barros vd. 2001), (Özdemir 2018). Daha sonra, Ling Xu ve David Mould parçacık üzerindeki yükün sürekli değişerek çeşitli eğriliklere sahip karmaşık bir eğri şeklinde yörünge izlediğini ileri sürdü ve araştırmalarında bu metotla elde edilen manyetik eğriler yardımıyla alev, saç, ve ağaç gibi şekillerin çizilebileceğini gösterdi (Xu ve Mould 2009). Manyetik eğriler fizik ve diferansiyel geometride bir çok uygulama alanına sahip olup bu alanlarda önemli rol oynar. Bir yüklü parçacık bir $\mathbf{B}$ manyetik alanına

girdiği zaman bu parçacığın Serret-Frenet vektörleri bu alandan etkilenirler ve bu etkiyle Lorentz kuvveti denilen bir kuvvet açığa çıkar. Dolayısıyla parçacık bu alan içerisinde bir yörünge izlemeye başlar. Bu yörüngeye manyetik eğri adı verilir. Örneğin; 3-boyutlu Öklid uzayında yüklü parçacığın teğet vektör alanı manyetik alandan etkilendiğinde Lorentz kuvveti açığa çıkar. Manyetik alanın d_1 teğet vektör alanını etkilemesi sonucunda elde edilen yörüngeler d_1 -manyetik eğriler olarak adlandırılır. Lorentz kuvvetinin etkisiyle elde edilen parçacığın hareketini şöyle özetleyebiliriz: Eğer d_1 teğet vektör alanı, $\mathbf{B}$ manyetik alanına paralel ise Lorentz kuvveti sıfır olur. Eğer d_1 teğet vektör alanı, $\mathbf{B}$ manyetik alanına dik ise Lorentz kuvveti maksimum olup elde edilen d_1 -manyetik eğriler çember eğrisi şeklinde yörüngelerdir. Eğer d_1 teğet vektör alanı, $\mathbf{B}$ manyetik alanıyla sabit bir açı yapıyorsa Lorentz kuvvetinin etkisiyle elde edilen d_1 -manyetik eğriler helis eğrisi şeklindeki manyetik yörüngelerdir (Barros ve Romeo 2007).

Daha sonra d_2 ve d_3 vektör alanlarının manyetik alandan etkilenmesi sonucunda elde edilen ve sırasıyla d_2 -manyetik eğri ve d_3 -manyetik eğri olarak adlandırılan yeni manyetik yörüngeler tanımlandı ve bu eğrilerle ilgili bazı karakterizasyonlar verildi (Bozkurt, 2014; Özdemir, 2015). Işık-benzeri manyetik eğriler ise Kazan Vd. tarafından incelenmiştir (Kazan 2017). Işık benzeri yüzeyler üzerindeki manyetik eğriler ise Özdemir tarafından incelenmiştir (Özdemir 2020).

Ayrıca, Lorentz eşitliğinin çözümü, analitik kimya, biyokimya, atmosferik bilim, geokimya, cycloton, proton ve kanser tedavisi gibi birçok alanda yararlı uygulamalara sahiptir. Ayrıca Lorentz eşitliğinin çözümleri Kirchhof elastik çubukları verir. Bu ise Hall etkisiyle birlikte fiziksel model ve klasik elastik teori arasında inanılmaz bir bağlantı sağlar (Barros ve Romeo 2007).

2. Temel Tanım ve Kavramlar

2.1 Tanım S diferansiyellenebilir bir manifold, $\chi(S)$ bu manifold üzerindeki vektör alanlarının kümesi olmak üzere

$$g : \chi(S) \times \chi(S) \rightarrow C^\infty(S, \mathbb{R}) \quad (2.1)$$

dönüşümü her $X, Y \in \chi(S)$ ve $f, h \in C^\infty(S, \mathbb{R})$ için;

i) g simetrik, yani $g(X, Y) = g(Y, X)$,

ii) g bilineer, yani $g(fX + hY, Z) = fg(X, Z) + hg(Y, Z)$,

iii) g degenere olmayan (non-degenere), yani her $Y \in \chi(S)$ için $g(X, Y) = 0$ iken $X = 0$, koşulları sağlanıyorsa g dönüşümüne S üzerinde yarı-Riemann metriği veya metrik tensör, üzerinde g yarı-Riemann metriği tanımlanan manifoldda da yarı-Riemann manifoldu denir (O'Neil 1983).

2.2 Tanım S bir differansiyellenebilir manifold ve S üzerinde bir ∇ koneksiyonu verilsin. Her $X, Y, Z \in \chi(S)$ için

$$\nabla : \chi(S) \times \chi(S) \rightarrow \chi(S); (X, Y) \rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \quad (2.2)$$

ile tanımlı dönüşümü;

i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

ii) $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

iii) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$,

iv) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X[f]Y$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ operatörüne S üzerinde tanımlanan bir Afin koneksiyondur denir (O'Neil 1983).

2.3 Tanım (S, g) yarı-Riemann manifoldu ve ∇ , S üzerinde tanımlı bir koneksiyon olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(S)$ için

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

ii) $Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ koşulları sağlanıyorsa ∇ , S manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu olarak adlandırılır (O'Neil 1983).

2.4 Tanım (S, g) yarı-Riemann manifoldu üzerinde ve ∇ S üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olsun. $R : \chi(S) \rightarrow \chi(S)$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z. \quad (2.3)$$

Bu $(1,3)$ -tensör alanı S üzerinde Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır.

Her $X, Y, Z, W \in \chi(S)$ ve $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ olmak üzere S manifoldunun Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki koşulları sağlar.

$$i) R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

$$ii) R(X, Y, Z, W) = -(R(X, Y, W, Z))$$

$$iii) R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

(O'Neil 1983).

2.5 Tanım (S, g) , C sabit kesitsel eğrilğine sahip yarı-Riemann manifoldu ve ∇ , S üzerinde tanımlı bir koneksiyon olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(S)$ için

$$R(X, Y, Z, W) = C\{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)\} \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlı ise S manifolduna sabit eğrilikli uzay formu adı verilir ve $S(C)$ ile gösterilir (Duggal 1996).

2.6 Tanım gl bir reel vektör uzayı olsun gl üzerinde bilineer operatör aşağıdaki gibi tanımlansın

$$[,] : gl \times gl \rightarrow gl \quad (2.5)$$

$$(X, Y) \rightarrow [,](X, Y) = [X, Y]. \quad (2.6)$$

Eğer, bu operatör,

$$i) [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

$$ii) [X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$$

$$iii) [X, Y] = -[Y, X]$$

$$iv) [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0$$

özelliklerini sağlanıyorsa parantez operatörü olarak adlandırılır ve $(gl, [,])$ ikilisine Lie cebiri denir (Hacısalıhoğlu 2000).

2.7 Tanım $L_X Y$ vektör alanına Y nin X yönünde Lie Türevi denir. Lie türevi her $P \in S$ noktasında $(L_X Y)_P = \lim_{(t \rightarrow 0)} \frac{1}{t} [(\theta - t)(Y_{\theta_t(P)}) - Y_P]$ eşitliğini sağlayacak şekilde tanımlanır. Burada θ_t , 1-parametrel grubu X vektör alanının integral eğrisidir (Boothby 1975).

2.1 Teorem S manifoldu üzerinde X ve Y vektör alanları ve $f \in C^\infty(S, R)$ olmak üzere

$$L_X f = X(f) \quad (2.7)$$

$$(L_X Y)_P = [X, Y]_P \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlıdır (Boothby 1975).

2.8 Tanım S diferansiyellenebilir bir manifold ve g de S de bir metrik tensör olsun. Her $X, Y \in \chi(S)$ için $L_{\mathbf{B}}g(X, Y) = 0$ oluyorsa $\mathbf{B}$ vektör alanına g metriğinin Killing vektör alanı denir (Kobayashi ve Nomizu 1996).

Örneğin, $\mathbb{R}_{\mathbb{K}}^3$ uzayında standart koordinat sistemini x, y, z ve bu uzaydaki metriği de

$$ds^2 = -dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.9)$$

olarak alalım. Bu metriğe karşılık gelen Killing vektör alanları, her $i, j \in \{1, 2, 3\}$ için,

$$(L_{\mathbf{B}}g)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{a=1}^3 \left(\xi_a \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_a}{\partial x_i} g_{aj} + \frac{\partial \xi_a}{\partial x_j} g_{ja} \right) = 0, \quad (2.10)$$

denkleminin çözümleri yapılarak. Killing vektör alanının baz vektörleri

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}, -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} \right\} \quad (2.11)$$

şeklinde elde edilir (O'Neil 1983).

2.9 Tanım $\gamma = \gamma(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$, 3-boyutlu reel uzay form $S(C)$ de bir eğri olsun. γ eğrisinin teğet vektör alanı d_1 ve hızı $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ ile gösterilir. Ayrıca κ ve τ sırasıyla, eğrinin eğriliğini ve burulmasını göstermek üzere, $\{d_1, d_2, d_3\}$, γ eğrisinin Frenet çatısı ve ∇ , S yüzeyinin bir Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere γ eğrisinin Frenet denklemleri ,

$$\nabla_{d_1} d_1 = \varepsilon_{d_2} \kappa d_2, \quad (2.12)$$

$$\nabla_{d_1} d_2 = -\varepsilon_{d_1} \kappa d_1 - \varepsilon_{d_3} \tau d_3, \quad (2.13)$$

$$\nabla_{d_1} d_3 = \varepsilon_{d_2} \tau d_2,$$

şeklinde tanımlanır (Lopez 2014).

2.2 Teorem $\gamma, S(C)$, 3 boyutlu reel uzay formunda

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S; s \rightarrow \gamma(s) \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlı regüler bir eğri olmak üzere, $z = 0$ da, γ eğrisinin hız, eğrilik ve burulma

fonksiyonlarının varyasyonları aşağıdaki gibi verilir

$$\mathbf{B}(v^2) = \frac{(\partial v^2)}{\partial z} \Big|_{(z=0)} = -\varepsilon_{d_1} v g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, d_1), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{B}(\kappa^2) = \frac{(\partial \kappa^2)}{\partial z} \Big|_{(z=0)} = 2\varepsilon_{d_2} \kappa g(\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_2) + 4\varepsilon_{d_1} \kappa^2 g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, T) + 2\varepsilon_{d_2} C \kappa g(\mathbf{B}, d_2), \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\tau^2) = \frac{(\partial \tau^2)}{\partial z} \Big|_{(z=0)} = & -2\varepsilon_{d_2} g\left(\left\{\frac{1}{\kappa} \nabla_{d_1}^3 \mathbf{B} - \frac{\kappa'}{\kappa^2} \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B} + \varepsilon_{d_1} \left(\varepsilon_{d_2} \kappa + \frac{C}{\kappa}\right) \nabla_{d_1} \mathbf{B}, \tau d_3\right\}\right. \\ & \left. + g(-\varepsilon_{d_1} C \frac{\kappa'}{\kappa^2} \mathbf{B}), \tau d_3\right) = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

(Gürbüz 2006).

2.10 Tanım $S(C)$, 3-boyutlu reel uzay formu, $\mathbf{B}$, S üzerinde bir vektör alanı ve

$$\gamma: I \subset R \rightarrow S(C); S \rightarrow \gamma(s) \quad (2.18)$$

birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda γ eğrisi boyunca $\mathbf{B}$ bir Killing vektör alanıdır gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{B}(v^2) = \mathbf{B}(\kappa^2) = \mathbf{B}(\tau^2) = 0 \quad (2.19)$$

eşitlikleri sağlanır (Barros ve Romeo 2007) .

Bu eşitliklerin çözüm uzayı altı boyutlu olan bir lineer sistem belirtir. Açıkça S nin herhangi bir $\mathbf{B}$ Killing vektör alanının γ eğrisine kısıtlanması bir Killing vektör alanı ifade eder. Özel olarak S basit bağlantılı ise izometri gurubunun boyutu 6 dır ve aşağıdaki Lemma elde edilir (Barros ve Rommeo 2007).

S , n -boyutlu bir Riemann Manifoldu olsun. S üzerindeki Lorentz kuvveti F anti simetrik Φ oparetörüyle birlikte aşağıdaki gibi tanımlanır. Her $X, Y \in \chi(S)$ için

$$g(\Phi(X), Y) = F(X, Y) \quad (2.20)$$

S üzerindeki F manyetik alanının yörüngesi olan γ eğrileri

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \Phi(\gamma') \quad (2.21)$$

denklemini sağlayacak şekilde verilir. Her $X, Y, Z \in \chi(S)$ için karma çarpım

$$g(X \times Y, Z) = dv_g(X, Y, Z) \quad (2.22)$$

biçiminde verilir. Eğer $\mathbf{B}$, S üzerinde tanımlı Kiling vektör alanı ise bu vektör alanına karşılık

gelen Killing manyetik alanı $F_{\mathbf{B}} = l_{\mathbf{B}} dv_g$ şeklindedir. Bu durumda Lorentz kuvveti eşitliği

$$\Phi(X) = \mathbf{B} \times X \quad (2.23)$$

olarak verilir. Buradan, Lorentz kuvveti ile ilgili manyetik eğriler aşağıdaki denklemlerle bulunur:

$$\Phi(\gamma') = \nabla_{\gamma'} \gamma' = \mathbf{B} \times \gamma' \quad (2.24)$$

şeklindedir (Barros ve Romeo 2007).

2.11 Tanım Birim hızlı γ manyetik eğrisi $\mathbf{B}$ manyetik alanının yörüngesidir gerek ve yeter şart $\mathbf{B}$ manyetik alanı γ eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{B} = \omega d_1 + \kappa d_3, \quad (2.25)$$

burada ω fonksiyonu her bir $\mathbf{B}$ manyetik alana göre manyetik alanın yarı-eğimi (parçacığın manyetik alana girerken teğet vektör alanıyla manyetik alan arasındaki eğim açısıyla ilgili bir fonksiyondur) olarak adlandırılır (Barros ve Romeo 2007).

2.12 Tanım $\mathbb{R}^3$ uzayı üzerinde, her $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ için

$$g(x, y) = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad (2.26)$$

şeklinde tanımlı metriği göz önüne alalım. Bu metriğe Lorentz metriği denir ve üzerinde tanımlı bu metrikle birlikte $\mathbb{R}^3$ uzayına Lorentz uzayı denir ve $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir. Lorentz uzayında vektörel çarpım $X \times Y = (-x_2 y_3 + x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, -x_1 y_1 + x_1 y_2)$ Lorentz uzayında tanımlanan metriğin tanımından dolayı bir $x \in \mathbb{R}_1^3$ için aşağıdaki karakterizasyonlar mevcuttur:

- i. $g(x, x) > 0$ veya $x = 0$ ise x vektörüne uzay-benzeri vektör denir.
- ii. $g(x, x) < 0$ ise x vektörüne zaman-benzeri vektör denir.
- iii. $g(x, x) = 0, x \neq 0$, ise x vektörüne ışık-benzeri vektör denir.

Her ikisinde aynı anda ışık-benzeri olmayan vektörler için $g(x, y) = 0$ ise bu iki vektör birbirine diktir denir. Her ikisi de aynı anda ışık-benzeri olan iki vektör için $g(x, y) = 0$ olması demek bu iki vektörün lineer bağımlı olması demektir, (Lopez 2014).

2.13 Tanım S , 3-boyutlu Lorentz uzayında bir regüler yüzey olsun. Bu durumda aşağıdaki karakterizasyonlar mevcuttur:

- i. Eğer S yüzeyinin her noktasındaki teğet düzlemi uzay-benzeri bir düzlem ise S yüzeyine uzay-benzeri yüzey denir.
- ii. Eğer S yüzeyinin her noktasındaki teğet düzlemi zaman-benzeri bir düzlem ise S yüzeyine zaman-benzeri yüzey denir.
- iii. Eğer S yüzeyinin her noktasındaki teğet düzlemi ışık-benzeri bir düzlem ise S yüzeyine ışık-benzeri yüzey denir (Lopez 2014).

2.14 Tanım Hiperbolik düzlem, 3-boyutlu Lorentz uzayında

$$\mathbb{H}_1^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 : -x^2 + y^2 + z^2 = -1\} \quad (2.27)$$

şekilde tanımlı olan uzay-benzeri bir yüzeydir.

2.15 Tanım de Sitter uzay 3-boyutlu Lorentz uzayında

$$\mathbb{S}_1^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 : -x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \quad (2.28)$$

şekilde tanımlı olan zaman-benzeri bir yüzeydir.

Bu yüzeyler 3-boyutlu Lorentz uzayındaki metriğe göre Lorentz küresi olarakta tanımlanır.

3. Lorentzian 3-Uzayda Manyetik Alan ve Manyetik Yörünge

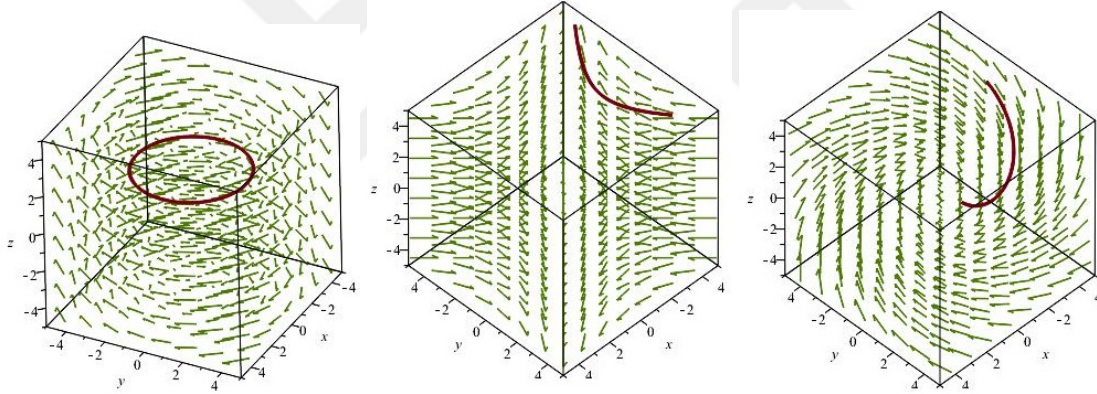
Bir X vektör alanının diverjansı ∇ operatörüyle X vektörünün skaler çarpımı olarak tanımlanır. Diverjansı sıfır olan vektör alanlarına manyetik vektör alanı denir. Yani ∇ operatörü ve $\mathbf{B}$ bir manyetik alan aşağıdaki gibi verilsin,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ ve } \mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3). \quad (3.1)$$

Eğer,

$$g(\nabla, \mathbf{B}) = -\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

sağlanıyorsa $\mathbf{B}$ vektör alanı Lorentzian 3-Uzayında bir manyetik vektör alanıdır. Örnek olarak aşağıda Lorentzian 3-uzayda bazı manyetik alanlar ve bu manyetik alanların şekilleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.1. Sırasıyla $\mathbf{B} = (y, -x, 0)$, $\mathbf{B} = (y, x, 0)$, $\mathbf{B} = (y, z, x)$ manyetik alan denklemlerine karşılık gelen manyetik alanlar.

Manyetik alanlara en önemli örneklerden birisi Killing vektör alanlarıdır. Bir yüklü parçacık bir manyetik alana girdiğinde bu alandan etkilenir ve Lorentz kuvveti denilen bir kuvvet açığa çıkar. Bu kuvvetin etkisiyle parçacık manyetik eğri olarak yeni bir yörünge izlemeye başlar. Manyetik eğriler fizik ve difaransiyel geometride bir çok uygulama alanına sahip olup bu alanlarda önemli rol oynar. Örneğin; 3- boyutlu Öklid uzayında yüklü parçacığın teğet vektör alanı manyetik alandan etkilendiğinde

$$\Phi(d_1) = \mathbf{B} \times d_1 \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlı Lorentz kuvveti açığa çıkar. Lorentz kuvvetinin etkisiyle elde edilen parçacığın hareketini şöyle özetleyebiliriz: Eğer d_1 teğet vektör alanı, $\mathbf{B}$ manyetik alanına paralel ise Lorentz kuvveti sıfır olacağından parçacık manyetik alana paralel ilerler. Eğer d_1 teğet

vektör alanı, $\mathbf{B}$ manyetik alanına dik ise Lorentz kuvveti maksimum olup parçacık çember eğrisi şeklinde bir yörünge izler. Eğer d_1 teğet vektör alanı, $\mathbf{B}$ manyetik alanıyla sabit bir açı yapıyorsa Lorentz kuvvetinin etkisiyle parçacık helis eğrisi şeklinde bir yörünge izler (Barros ve Romeo 2007).

Manyetik alanın d_1 teğet vektör alanını etkilemesi sonucunda elde edilen yörüngeleri d_1 manyetik eğriler olarak adlandıracamız. Bu durumda, $\mathbf{B}$ manyetik alanının d_1 -manyetik eğrileri aşağıdaki Lorentz eşitliğini sağlayan eğrilerdir.

$$\Phi(d_1) = \nabla_{d_1} d_1 = \mathbf{B} \times d_1 \quad (3.4)$$

Bu eşitlik $\nabla_{d_1} d_1 = 0$ olması durumunda geodezikleri genelleştirir diyebiliriz (Barros ve Romeo 2007).

4. Lorentzian 3-Uzayda Manyetik Yörüngeler

4.1. Uzay-Benzeri Yüzeyler Üzerindeki Manyetik Yörüngeler

S uzay-benzeri bir yüzey olduğundan, yüzeyin normali zaman-benzeri bir vektördür. S yüzeyi boyunca birim normal vektörü d_2 ile gösterelim. Bu durumda uzay-benzeri yüzey üzerindeki ortonormal çatı $\{d_1, d_2, d_3\}$, γ eğrisi boyunca Lorentzian Darboux çatısı olarak adlandırılır. Burada $d_1(s)$, γ eğrisinin teğeti, $d_3(s) = d_1(s) \times d_2(s)$ uzay-benzeri birim vektör olmak üzere, γ eğrisi boyunca Darboux çatı formülleri aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} d_1' &= k_n d_2 + k_g d_3, \\ d_2' &= k_n d_1 + \tau_g d_3, \\ d_3' &= -k_g d_1 + \tau_g d_2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

burada $k_n = -g(d_1', d_2)$, $k_g = g(d_1', d_3)$ ve $\tau_g = -g(d_3', d_2)$, sırasıyla, S üzerinde normal eğrilik, geodezik eğrilik ve eğrilik torsiyonudur. Ayrıca, s , γ eğrisinin yay parametresidir. Buradan, aşağıdaki ilişkiler mevcuttur

$$\begin{aligned} g(d_1, d_1) &= g(d_3, d_3) = 1, \quad g(d_2, d_2) = -1, \\ g(d_1, d_2) &= g(d_2, d_3) = g(d_1, d_3) = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

(Solouma 2016). Ayrıca

$$d_1 \times d_2 = -d_3, \quad d_2 \times d_3 = -d_1, \quad d_3 \times d_1 = d_2 \quad (4.3)$$

eşitlikleri sağlanır.

4.2. Uzay-benzeri Yüzeyler için Darboux Çatısının Killing Eşitlikleri

4.1 Yardımcı Teorem Sabit C kesitsel eğriliğe sahip, 3-boyutlu yarı-Riemannian manifoldu (S, g) üzerinde, $\varphi : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $\varphi(U) = S$ uzay-benzeri bir yüzey $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, S üzerinde bir eğri olsun. γ eğrisi boyunca varyasyon fonksiyonu $\Gamma : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S(C)$ şeklinde tanımlanır, burada $\Gamma(s, 0) = \gamma(s)$ başlangıç koşulu sağlanır. Bu durumda, ilgili varyasyon vektör alanı $\mathbf{B}(s) = \frac{\partial \Gamma(s, t)}{\partial s}$ şeklinde tanımlıdır. $W(s, t) = \frac{\partial \Gamma(s, t)}{\partial s} = v(s, t)d_1(s, t)$ koşulunu sağlayan diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. Dolayısıyla, $\gamma_t(s) :$ için aşağıdaki fonksiyonları tanımlayabiliriz.

1. Hız fonksiyonu $v(s, t) = \left\| \frac{\partial \Gamma(s, t)}{\partial s} \right\|$,
2. Geodezik eğrilik fonksiyonu $k_g(s, t)$,
3. Normal eğrilik fonksiyonu $k_n(s, t)$,
4. Eğrilik torsiyonu fonksiyonu $\tau_g(s, t)$,

Bu fonksiyonların $t = 0$ noktasındaki varyasyonelleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(v) &= \left(\frac{\partial v}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = -v\rho \\
\mathbf{B}(k_g) &= \left(\frac{\partial k_g}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = g(-R(\mathbf{B}, d_1)d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_3) \\
&\quad + \frac{k_n}{k_g} g(d_2, -R(\mathbf{B}, d_1)d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}) + 2\rho k_g - 2\rho \frac{k_n^2}{k_g} \\
\mathbf{B}(k_n) &= \left(\frac{\partial k_n}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = g(R(\mathbf{B}, d_1)d_1 - \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_2) \\
&\quad - k_g g(-R(\mathbf{B}, d_1)d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_3) - 2\rho k_g^2 + 2\rho k_n, \\
\mathbf{B}(\tau_g) &= \left(\frac{\partial \tau_g}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = k_g g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, d_2) \\
&\quad + \frac{k_g}{k_n} g(-R(\mathbf{B}, d_1)d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, T) + \frac{k_g^2}{k_n} g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, \xi) + \rho',
\end{aligned} \tag{4.4}$$

burada $\rho = g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, d_1)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon ve R, S yüzeyinin eğrilik tensörüdür.

Kanıt Sabit C kesitsel eğriliğe sahip, 3-boyutlu yarı-Riemannian manifoldu (S, g) üzerinde, $\varphi : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $\varphi(U) = S$ uzay-benzeri bir yüzey $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, S üzerinde bir eğri olsun. Eğer $v(s, t)$ hız fonksiyonunun $\nabla_{\mathbf{B}}$ kovaryant türevini aşağıdaki gibi hesaplarız

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(v) &= \left(\frac{\partial v}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = g\left(\frac{\partial^2 \Gamma(s, t)}{\partial t \partial s}, v d_1\right) \\
&= v g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, d_1) \\
&= -v\rho.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Darboux çatı eşitliklerinden

$$k_g = g(\nabla_{d_1} d_1, d_3) \tag{4.6}$$

olduğunu biliyoruz.

Eğer $k_g(s, t)$ geodezik eğrilik fonksiyonunun $\nabla_{\mathbf{B}}$ kovaryant türevini alırsak

$$\mathbf{B}(k_g) = \left(\frac{\partial k_g}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = g(\nabla_{\mathbf{B}} \nabla_{d_1} d_1, d_3) + g(\nabla_{d_1} d_1, \nabla_{\mathbf{B}} d_3) \tag{4.7}$$

eşitliğini buluruz. Ayrıca, aşağıdaki eşitlikler bilinmektedir

$$\nabla_{\mathbf{B}} \nabla_{d_1} d_1 = -R(\mathbf{B}, d_1)d_1 + \nabla_{d_1} \nabla_{\mathbf{B}} d_1 + \nabla_{[\mathbf{B}, d_1]} d_1 \tag{4.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{B}, W] &= \nabla_{\mathbf{B}} W - \nabla_W \mathbf{B} \\
 &= \frac{\partial^2 \Gamma(s, t)}{\partial t \partial s} - \frac{\partial^2 \Gamma(s, t)}{\partial s \partial t} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$W = v d_1$, eşitliğini kullanırsak

$$[\mathbf{B}, v d_1] = \mathbf{B}(v) d_1 - v \nabla_{d_1} \mathbf{B} + v [\mathbf{B}, d_1] = 0 \tag{4.10}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{B}, d_1] &= -\frac{1}{v} \mathbf{B}(v) d_1; \rho = -\frac{1}{v} \mathbf{B}(v) \\
 &= \rho d_1
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.10) ve (4.11) eşitliklerini ve $\nabla_{\mathbf{B}} d_1 = [\mathbf{B}, d_1] + \nabla_{d_1} \mathbf{B}$ eşitliğinin $\nabla_{\mathbf{B}}$ kovaryant türevini alırsak

$$\nabla_{d_1} \nabla_{\mathbf{B}} d_1 = \rho' d_1 + \rho \nabla_{d_1} d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B} \tag{4.12}$$

hesaplanır. Ayrıca Darboux eşitliğinden

$$d_3 = \frac{1}{k_g} (\nabla_{d_1} d_1 + d_2) \tag{4.13}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan (4.13) eşitliğinin $\nabla_{\mathbf{B}}$ kovaryant türevini alırsak

$$\nabla_{\mathbf{B}} d_3 = \frac{-k'_g}{k_g^2} \frac{\partial k_g}{\partial t} (\nabla_{d_1} d_1 + d_2) + \frac{1}{k_g} (\nabla_{\mathbf{B}} \nabla_{d_1} d_1 + \nabla_{\mathbf{B}} d_2) \tag{4.14}$$

elde ederiz. $\frac{\partial k_g}{\partial t} = 0$ olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{B}} d_3 = \frac{1}{k_g} (\nabla_{\mathbf{B}} \nabla_{d_1} d_1 + \nabla_{\mathbf{B}} d_2) \tag{4.15}$$

hesaplanır. (4.10)-(4.15) eşitliklerinden $\mathbf{B}(k_g)$ varyasyonu aşağıdaki gibi bulunur

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(k_g) &= \left(\frac{\partial k_g}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = g(-R(\mathbf{B}, d_1) d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_3) \\
 &\quad + \frac{k_n}{k_g} g(d_2, -R(\mathbf{B}, d_1) d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}) + 2\rho k_g - 2\rho \frac{k_n^2}{k_g}.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Şimdi de $k_n = -g(\nabla_{d_1} d_1, d_2)$ eşitliğinin varyasyonunu bulalım, kovaryant türev kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(k_n) &= \left(\frac{\partial k_n}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = -g(\nabla_{\mathbf{B}} \nabla_{d_1} d_1, d_2) - g(\nabla_{d_1} d_1, \nabla_{\mathbf{B}} d_2) \\ &= -g(-R(\mathbf{B}, d_1) d_1 + 2\rho \nabla_{d_1} d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_2) - k_g g(d_3, \nabla_{\mathbf{B}} d_2), \end{aligned} \quad (4.17)$$

bulunur. d_2 -nin $\nabla_{\mathbf{B}}$ kovaryant türevi alınır

$$\nabla_{\mathbf{B}} d_2 = (\nabla_{\mathbf{B}} \nabla_{d_1} d_1 + k_g \nabla_{\mathbf{B}} d_3). \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(k_n) &= \left(\frac{\partial k_n}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = g(R(\mathbf{B}, d_1) d_1 - \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_2) \\ &\quad - k_g g(-R(\mathbf{B}, d_1) d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_3) - 2\rho k_g^2 + 2\rho k_n, \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Darboux türev eşitliklerinden

$$\tau_g = -g(d'_3, d_2) \quad (4.19)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\tau_g) &= \left(\frac{\partial \tau_g}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = -g(\nabla_{\mathbf{B}} \nabla_{d_1} d_3, d_2) - g(\nabla_{d_1} d_3, \nabla_{\mathbf{B}} d_2) \\ &= k_g g(\nabla_{\mathbf{B}} d_1, d_2) + k_g g(d_1, \nabla_{\mathbf{B}} d_2) \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir.

$$d_2 = \frac{1}{k_n} \nabla_{d_1} d_1 - \frac{k_g}{k_n} \xi \quad (4.21)$$

eşitliğini kullanıp son eşitliğin kovaryant türevini alırsak

$$\nabla_{\mathbf{B}} d_2 = -\frac{k'_n}{k_n^2} \frac{\partial k_n}{\partial t} \nabla_{d_1} d_1 + \frac{1}{k_n} \nabla_{\mathbf{B}} \nabla_{d_1} d_1 \quad (4.22)$$

$$-\frac{k'_g k_n - k'_n k_g}{k_n^2} \frac{\partial (\frac{k_g}{k_n})}{\partial t} \xi - \frac{k_g}{k_n} \nabla_{\mathbf{B}} \xi \quad (4.23)$$

hesaplanır. Sonuç olarak eğrilik torsiyonunun varyasyonunu aşağıdaki gibi elde ederiz

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\tau_g) &= \left(\frac{\partial \tau_g}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = k_g g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, d_2) \\ &\quad + \frac{k_g}{k_n} g(-R(\mathbf{B}, d_1) d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_1) + \frac{k_g^2}{k_n} g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, \xi) + \rho'. \end{aligned} \quad (4.24)$$

□

4.2 Teorem S üzerinde $\mathbf{B}(s)$, $\mathbf{B}$ Killing vektörünün $\gamma(s)$ eğrisine kısıtlanmış olsun. Bu du-

rumda γ eğrisi boyunca Darboux eşitliklerinin varyasyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$\mathbf{B}(v) = \mathbf{B}(k_g) = \mathbf{B}(k_n) = \mathbf{B}(\tau_g) = 0. \quad (4.25)$$

Kanıt $\mathbf{B}$ Killing vektör alanı tarafından üretilen herhangi bir lokal akış $\{\phi_t\}$ ile tanımlansın. $\mathbf{B}(v)$, $\mathbf{B}(k_g)$, $\mathbf{B}(k_n)$ ve $\mathbf{B}(\tau_g)$, Γ varyasyonuna bağlı olmadığından, $\mathbf{B}(s)$ yönünde, $\gamma(s)$ eğrisinin değişimini aşağıdaki gibi veririz:

$$\gamma_t(s) = \Gamma(s, t) =: \phi_t(\gamma(s)). \quad (4.26)$$

ϕ_t akışı, $v(s, t)$, $k_g(s, t)$, $k_n(s, t)$ ve $\tau_g(s, t)$ fonksiyonlarını verir, ve bu fonksiyonlar t parametresine bağlı olmadıklarından $\mathbf{B}(v) = \mathbf{B}(k_g) = \mathbf{B}(k_n) = \mathbf{B}(\tau_g) = 0$ bulunur. $\square$

Sonuç γ , $\mathbb{H}^2$ hiperbolik düzlemi üzerinde bir eğri ve $\mathbf{B}$, γ eğrisi boyunca bir Killing vektör alanı olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

- i. $g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, d_1) = 0$,
- ii. $k_g g(-R(\mathbf{B}, d_1)d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_3) + g(d_2, -R(\mathbf{B}, d_1)d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}) = 0$,
- iii. $g(R(\mathbf{B}, d_1)d_1 - \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_2) - k_g g(-R(\mathbf{B}, d_1)d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_3) = 0$,
- iv. $k_g g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, d_2) + k_g g(-R(\mathbf{B}, d_1)d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_1) = 0$.

4.3. Uzak-benzeri Yüzeyler Üzerinde Killing Manyetik Eğriler

4.3 Teorem $\varphi : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $\varphi(U) = S$ uzak-benzeri bir yüzey ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, S yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda Darboux eşitlikleri $\{d_1, d_2, d_3\}$ ile ilgili Lorentz eşitlikleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \Phi(d_1) \\ \Phi(d_2) \\ \Phi(d_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_n & k_g \\ k_n & 0 & \varpi \\ -k_g & \varpi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

burada k_g, k_n ve τ_g , S yüzeyi üzerinde, sırasıyla, γ eğrisinin, geodezik eğrilik, normal eğrilik ve eğrilik torsiyonu fonksiyonlarıdır.

Kanıt $\varphi : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $\varphi(U) = S$ uzak-benzeri bir yüzey ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, S yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Manyetik eğri tanımından

$$\Phi(d_1) = \nabla_{d_1} d_1 = k_n d_2 + k_g d_3 \quad (4.28)$$

denklemini biliyoruz. $\Phi(d_2) \in \text{span}\{d_1, d_2, d_3\}$ olduğundan

$$\Phi(d_2) = \lambda d_1 + \mu d_2 + \xi d_3 \quad (4.29)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} \lambda &= g(\Phi(d_2), d_1) = -g(\Phi(d_1), d_2) = k_n, \\ \mu &= -g(\Phi(d_2), d_2) = 0, \\ \xi &= g(\Phi(d_2), d_3) = \varpi. \end{aligned} \quad (4.30)$$

eşitliklerine ulaşırız. Dolayısıyla, $\Phi(d_2)$ aşağıdaki gibi elde edilmiş olur

$$\Phi(d_2) = k_n d_1 + \varpi d_3. \quad (4.31)$$

Benzer hesaplamalarla

$$\Phi(d_3) = -k_g d_1 + \varpi d_2. \quad (4.32)$$

eşitlikleride bulunur. $\square$

4.4 Teorem $\varphi : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $\varphi(U) = S$ uzay-benzeri embedding bir yüzey, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, S üzerinde bir eğri ve $\mathbf{B}$, γ eğrisi boyunca bir Killing vektör alanı olsun. Bu durumda, γ eğrisi $\mathbf{B}$ manyetik alanının bir manyetik yörüngesidir gerek ve yeter şart $\mathbf{B}$, γ eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{B}(s) = -\varpi d_1 + k_g d_2 + k_n d_3 \quad (4.33)$$

burada $\varpi(s)$ herbir manyetik eğri ile ilgili olan ve *yarı eğim* olarak adlandırılan bir fonksiyondur.

Kanıt $\mathbf{B}$ Killing vektör alanını aşağıdaki gibi yazalım

$$\mathbf{B}(s) = \mu d_1 + \varsigma d_2 + \delta d_3 \quad (4.34)$$

burada μ , ς ve δ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. (4.28)-(4.32) eşitlikleri kullanılırsa, $\mu = -\varpi$, $\varsigma = k_g$ ve $\delta = k_n$ olarak hesaplanır. Tersine, (4.34) eşitliği sağlanıyorsa, $\mathbf{B} \times d_1 = \Phi(d_1)$ eşitliğide sağlanır. Dolayısıyla, γ , $\mathbf{B}$ manyetik alanıyla ilgili bir manyetik yörüngedir. $\square$

4.5 Teorem $\varphi : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $\varphi(U) = S$ uzay-benzeri embedding bir yüzey, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, S üzerinde bir eğri ve $\mathbf{B}$, γ eğrisi boyunca bir Killing vektör alanı olsun. Bu durumda, γ eğrisi $\mathbf{B}$ manyetik alanının bir manyetik yörüngesidir gerek ve yeter şart Darboux eğrilikleri

aşağıdaki diferansiyel denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned} k_g(k'_n - \varpi k_g + k_g \tau_g)' + k_g \tau_g(k'_g - \varpi k_n + k_n \tau_g) - k_n(k'_g - \varpi k_n + k_n \tau_g)' \\ - k_n \tau_g(k'_n - \varpi k_g + k_g \tau_g) = 0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} C(k_g - k_g k_n) + (k'_g - \varpi k_n + k_n \tau_g)' + \tau_g(k'_n - \varpi k_g + k_g \tau_g) - k_g(k'_n - \varpi k_g + k_g \tau_g)' \\ - k_g \tau_g(k'_g - \varpi k_n + k_n \tau_g) = 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} -k'_g k_n + \varpi k_n^2 - k_n^2 \tau_g - k_g^2 k'_n - \varpi k_g^2 - k_g^2 \tau_g + k_g k_n k'_g - \varpi k_n^2 k_g + k_n^2 k_g \tau_g + k_g^2 k'_n - \\ \varpi k_g^3 + k_g^3 \tau_g = 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Kanıt γ , $\mathbf{B}$ manyetik alanıyla ilgili bir manyetik yörünge olsun. Bu durumda, $\mathbf{B}$, (4.34) eşitliğini sağlar. (4.34) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır,

$$\nabla_{d_1} \mathbf{B} = -\varpi' d_1 + (k'_g - \varpi k_n + k_n \tau_g) d_2 + (k'_n - \varpi k_g + k_g \tau_g) d_3. \quad (4.38)$$

eşitliğini buluruz. $\mathbf{B}(v) = 0$ denklemi kullanılırsa, ϖ sabit olarak bulunur. (4.38) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B} = (k'_g k_n - \varpi k_n^2 - k'_n k_g + \varpi k_g^2) d_1 + ((k'_g - \varpi k_n + k_n \tau_g)' + \tau_g(k'_n - \varpi k_g + k_g \tau_g)) d_2 \\ + ((k'_n - \varpi k_g + k_g \tau_g)' + \tau_g(k'_g - \varpi k_n + k_n \tau_g)) d_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

elde ederiz. Ayrıca

$$R(\mathbf{B}, d_1) d_1 = C(g(d_1, \mathbf{B}) d_1 - g(d_1, d_1) \mathbf{B}) \quad (4.40)$$

eşitliği ve Darboux formülleri kullanılırsa

$$R(\mathbf{B}, d_1) d_1 = -C(k_g d_2 + k_n d_3). \quad (4.41)$$

bulunur. (4.38) ve (4.39) eşitlikleri Killing eşitliklerindeki ikinci eşitlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} k_n((k'_n - \varpi k_g + k_g \tau_g)' + k_n \tau_g(k'_g - \varpi k_n + k_n \tau_g)) - (k'_g - \varpi k_n + k_n \tau_g)' \\ - \tau_g(k'_n - \varpi k_g + k_g \tau_g) = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

bulunur. (4.38) ve (4.39) eşitliklerini Killing eşitliklerindeki üçüncü eşitlikte kullanırsak

$$\begin{aligned} C(k_g - k_g k_n) + (k'_g - \varpi k_n + k_n \tau_g)' + \tau_g(k'_n - \varpi k_g + k_g \tau_g) - k_g(k'_n - \varpi k_g + k_g \tau_g)' \\ - k_g \tau_g(k'_g - \varpi k_n + k_n \tau_g) = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

elde edilir. Son olarak (4.42) ve (4.43) eşitliklerini birlikte düşünersek aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} -k'_g k_n + \varpi k_n^2 - k_n^2 \tau_g - k_g^2 k'_n - \varpi k_g^2 - k_g^2 \tau_g + k_g k_n k'_g - \varpi k_n^2 k_g + k_n^2 k_g \tau_g + k_g^2 k'_n - \varpi k_g^3 + k_g^3 \tau_g = 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

□

4.6 Teorem $\gamma, \mathbb{H}^2 \subset S$. hiperbolik düzlemi üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda γ aşağıdaki parametrik gösterimlerden birisine sahiptir:

$$\gamma(s) = a_1 s^2 + a_2 s + a_3, \quad k_g = 1 \quad (4.45)$$

veya

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} b_1 \text{MeijerG}([\frac{1}{2}, -\frac{I}{2\varpi}, \frac{I}{2\varpi}], [], [[0, 0], [0]], \\ \frac{1}{\cosh(\varpi(c_1+s))^2}) \tanh(\varpi(c_1+s)) \\ + b_2 \text{MeijerG}([\frac{1}{2}, -\frac{I}{2\varpi}, \frac{I}{2\varpi}], [], [[0, 0, 0], []], \\ -\frac{1}{\cosh(\varpi(c_1+s))^2}) \tanh(\varpi(c_1+s)) \\ b_3 \text{hypergeom}([\frac{1}{2}, -\frac{2\varpi+I}{2\varpi}, \frac{2\varpi+I}{2\varpi}], [1, 1], \\ \frac{1}{\cosh(\varpi(c_1+s))^2}) \tanh(\varpi(c_1+s)) \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

burada $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{E}_1^3$, $k_g = \tanh(\varpi(c_1+s))$, $\varpi = -\frac{k_g''}{k_g k_g'} = \text{sabit}$ ve $c_1 \in \mathbb{R}$.

Kanıt $\gamma, \mathbb{H}^2$ üzerinde bir eğri olduğundan k_g geodezik eğrilik fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki eğriliklere sahiptir

$$k_n = 1, \quad \tau_g = 0. \quad (4.47)$$

Bu durumda (4.42)-(4.44) eşitlikleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$k_g'' + \varpi k_g k_g' = 0, \quad (4.48)$$

$$-k_g' + \varpi - \varpi k_g^2 + k_g k_g' - \varpi k_g - \varpi k_g^3 = 0. \quad (4.49)$$

Bu eşitliklerin çözümleri

$$k_g = 1 \text{ veya } k_g = \tanh(\varpi(c_1+s)) \quad (4.50)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\varpi = -\frac{k_g''}{k_g k_g'} = \text{sabit}$. Darboux eşitliklerini kullanırsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$k_g \gamma''' - k_g' \gamma'' + (k_g^3 - k_g) \gamma' + k_g' \gamma = 0. \quad (4.51)$$

Dolayısıyla aşağıdaki üçüncü mertebeden diferansiyel denklemlere ulaşmış oluruz:

$$\begin{aligned} \gamma''' &= 0, \\ \tanh(\varpi(c_1+s)) \gamma''' - (\tanh(\varpi(c_1+s)))' \gamma'' + ((\tanh(\varpi(c_1+s)))^3 - k_g) \gamma' + k_g' \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Buradan birinci denklemin çözümü aşağıdaki gibi bulunur

$$\gamma(s) = a_1 s^2 + a_2 s + a_3,$$

burada $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{E}_1^3$ dir.

İkinci denklemin çözümü ise

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} b_1 \text{MeijerG}([\frac{1}{2}, -\frac{I}{2\varpi}, \frac{I}{2\varpi}], [], [[0, 0], [0]], \\ \frac{1}{\cosh(\varpi(c_1+s))^2}) \tanh(\varpi(c_1+s)) \\ + b_2 \text{MeijerG}([\frac{1}{2}, -\frac{I}{2\varpi}, \frac{I}{2\varpi}], [], [[0, 0, 0], []], \\ -\frac{1}{\cosh(\varpi(c_1+s))^2}) \tanh(\varpi(c_1+s)) \\ b_3 \text{hypergeom}([\frac{1}{2}, -\frac{2\varpi+I}{2\varpi}, \frac{2\varpi+I}{2\varpi}], [1, 1], \\ \frac{1}{\cosh(\varpi(c_1+s))^2}) \tanh(\varpi(c_1+s)) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burdada $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{E}_1^3$ ve $c_1 \in \mathbb{R}$ dir. □

4.4. Zaman-Benzeri Yüzeyler Üzerindeki Manyetik Yörüngeler

4.1 Tanım Zaman-benzeri regüler bir S yüzeyi üzerinde regüler bir γ eğrisi alalım. d_1 , γ eğrisinin teğet vektör alanı, d_2 zaman-benzeri yüzeyin birim normal vektör alanı ve $d_3 = d_1 \times d_2$ olmak üzere, zaman-benzeri yüzeyler üzerindeki Darboux çatısı $\{d_1, d_2, d_3\}$ için türev formülleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} d_1' &= k_g d_3 - \varepsilon k_n d_2, \\ d_3' &= k_g d_1 + \varepsilon \tau_g d_2, \\ d_2' &= k_n d_1 + \tau_g d_3, \end{aligned} \tag{4.53}$$

burada $k_g = -\varepsilon(d_1', d_3)$, $k_n = \varepsilon(d_1', d_2)$, $\tau_g = \varepsilon g(d_3', d_2)$ ve $\varepsilon = \pm 1$ dir.

Bu bölümde zaman-benzeri yüzeyler ele alınacağından, teğet düzlemlerimiz zaman-benzeri olacaktır. Dolayısıyla, düzlem zaman-benzeri olduğundan bu teğet düzlemin içerisinde sadece bir tane zaman-benzeri vektör vardır ve geriye kalan vektörlerde uzay-benzeri vektörlerdir. O halde zaman-benzeri olan yüzey üzerinde, zaman-benzeri ve uzay-benzeri olmak üzere iki türlü eğri vardır. O halde Darboux çatı elemanlarının karakterizasyonu aşağıdaki gibi verilir.

$$g(d_1, d_1) = -g(d_3, d_3) = \varepsilon, g(d_2, d_2) = 1, g(d_1, d_3) = g(d_3, d_2) = g(d_1, d_2) = 0. \tag{4.54}$$

4.5. Zaman-benzeri Yüzeyler için Darboux Çatısının Killing Eşitlikleri

4.7 Yardımcı Teorem Sabit C kesitsel eğriliğe sahip 3-boyutlu yarı Riemannian manifoldu (S, g) üzerinde, $\varphi : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $\varphi(U) = S$ zaman benzeri bir yüzey ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, bu yüzey üzerinde bir eğri olsun. Bu eğri boyunca $\Gamma : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S(C)$ varyasyon fonksiyonu $\Gamma(s, 0) = \gamma(s)$ başlangıç koşuluyla verilsin. Bu durumda, ilgili varyasyonel vektör alanı şu şekilde verilir: $\mathbf{B}(s) = \frac{\partial \Gamma(s, t)}{\partial t} \Big|_{t=0}$ ve hız fonksiyonu $W(s, t) = \frac{\partial \Gamma(s, t)}{\partial t} = v(s, t)d_1(s, t)$ olarak tanımlanır. Bu hesaplamadan, $\gamma_t(s)$ eğrisinin aşağıdaki fonksiyonlarını tanımlayabiliriz:

1. Eğrilik hız fonksiyonu $v(s, t) = \left\| \frac{\partial \Gamma(s, t)}{\partial t} \right\|$,
2. Geodezik eğrilik fonksiyonu $k_g(s, t)$,
3. Normal eğrilik fonksiyonu $k_n(s, t)$,
4. Torsion eğrilik fonksiyonu $\tau_g(s, t)$,

Fonksiyonlarının varyasyonları aşağıdaki gibi hesaplanır :

$$\mathbf{B}(v) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = -v\rho, \quad (4.55)$$

$$\mathbf{B}(k_g) = \left(\frac{\partial k_g}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = \varepsilon g(R(\mathbf{B}, d_1)d_1, d_3) - \varepsilon g(\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_3) + \frac{k_n}{k_g} g((-R(\mathbf{B}, d_1)d_1, d_2) \quad (4.56)$$

$$+ g(\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_2)) + 2\rho k_g + 2\rho \frac{k_n^2}{k_g}$$

$$\mathbf{B}(k_n) = \left(\frac{\partial k_n}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = \varepsilon g(R(\mathbf{B}, d_1)d_1, d_2) - \varepsilon g(\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_2) + \frac{k_g}{k_n} g((-R(\mathbf{B}, d_1)d_1, d_3) \quad (4.57)$$

$$+ g(\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_3)) - 2\varepsilon \rho \frac{k_g^2}{k_n} + 2\rho k_n,$$

$$\mathbf{B}(\tau_g) = \left(\frac{\partial \tau_g}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = -\varepsilon k_n g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, d_3) - \varepsilon \frac{k_n}{k_g} g((-R(\mathbf{B}, d_1)d_1, d_1) + g(\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_1)) \quad (4.58)$$

$$+ \frac{k_n^2}{k_g} g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, d_2) - \varepsilon \frac{\rho'}{k_g}.$$

burada $\rho = g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, d_1)$ ve R eğrilik tensörü anlamına gelir.

Kanıt Sabit C kesitsel eğriliğe sahip 3-boyutlu yarı Riemannian manifoldu (S, g) üzerinde, $\varphi : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $\varphi(U) = S$ zaman benzeri bir embediding yüzey ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ bu yüzey

üzerinde bir eğri olsun. Hız fonksiyonunu $v(s, t)$ nin $\nabla_{\mathbf{B}}$ kovaryant türevini hesapladığımızda

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(v) &= \left(\frac{\partial v}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = g\left(\frac{\partial^2 \Gamma(s, t)}{\partial t \partial s}, v d_1 \right) \\ &= v g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, d_1) \\ &= -v\rho\end{aligned}\tag{4.59}$$

bulunur. Ayrıca geodezik eğriliğin tanımından

$$k_g = -\varepsilon g(\nabla_{d_1} d_1, d_3)\tag{4.60}$$

olduğu biliniyor. $k_g(s, t)$ geodezik eğriliğin $\nabla_{\mathbf{B}}$ kovaryant türevini alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz

$$\mathbf{B}(k_g) = \left(\frac{\partial k_g}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = -\varepsilon g(\nabla_{\mathbf{B}} \nabla_{d_1} d_1, d_3) - \varepsilon g(\nabla_{d_1} d_1, \nabla_{\mathbf{B}} d_3).\tag{4.61}$$

Ayrıca

$$\nabla_{\mathbf{B}} \nabla_{d_1} d_1 = -R(\mathbf{B}, d_1) d_1 + \nabla_{d_1} \nabla_{\mathbf{B}} d_1 + \nabla_{[\mathbf{B}, d_1]} d_1\tag{4.62}$$

ve

$$\begin{aligned}[\mathbf{B}, W] &= \nabla_{\mathbf{B}} W - \nabla_W \mathbf{B} \\ &= \frac{\partial^2 \Gamma(s, t)}{\partial t \partial s} - \frac{\partial^2 \Gamma(s, t)}{\partial s \partial t} \\ &= 0\end{aligned}\tag{4.63}$$

eşitlikleri ile birlikte $W = vT$ eşitliğini kullanırsak

$$[\mathbf{B}, v d_1] = \mathbf{B}(v) d_1 - v \nabla_{d_1} \mathbf{B} + v [\mathbf{B}, d_1] = 0\tag{4.64}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}[\mathbf{B}, d_1] &= -\frac{1}{v} \mathbf{B}(v) d_1, \quad \rho = -\frac{1}{v} \mathbf{B}(v) \\ &= \rho d_1\end{aligned}\tag{4.65}$$

elde edilir. (4.62) ve (4.65) eşitliklerini ve $\nabla_{\mathbf{B}} d_1 = [\mathbf{B}, d_1] + \nabla_{d_1} \mathbf{B}$, eşitliğinin $\nabla_{\mathbf{B}}$ kovaryant türevini alırsak

$$\nabla_{d_1} \nabla_{\mathbf{B}} d_1 = \rho' d_1 + \rho \nabla_{d_1} d_1 + \nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}\tag{4.66}$$

hesaplanır. Ayrıca Darboux eşitliğinden

$$d_3 = \frac{1}{k_g}(\nabla_{d_1}d_1 + \varepsilon k_n d_2) \quad (4.67)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan (4.67) eşitliğinin $\nabla_{\mathbf{B}}$ kovaryant türevini alırsak, alırsak

$$\nabla_{\mathbf{B}}d_3 = \frac{-k'_g}{k_g^2} \frac{\partial k_g}{\partial t} (\nabla_{d_1}d_1 + \varepsilon k_n d_2) + \frac{1}{k_g} (\nabla_{\mathbf{B}}\nabla_{d_1}d_1 + \varepsilon k_n \nabla_{\mathbf{B}}d_2) \quad (4.68)$$

elde ederiz. $\frac{\partial k_g}{\partial t} = 0$, olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{B}}d_3 = \frac{1}{k_g} (\nabla_{\mathbf{B}}\nabla_{d_1}d_1 + \varepsilon k_n \nabla_{\mathbf{B}}d_2) \quad (4.69)$$

şeklinde hesaplanır. Sonuç olarak (4.65)-(4.69) eşitliğinden $\mathbf{B}(k_g)$ varyasyonu aşağıdaki gibi bulunur

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(k_g) = \left(\frac{\partial k_g}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} &= \varepsilon g(R(\mathbf{B}, d_1)d_1, d_3) - \varepsilon g(\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_3) + \frac{k_n}{k_g} g((-R(\mathbf{B}, d_1)d_1, d_2) \\ &\quad + g(\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_2)) + 2\rho k_g + 2\rho \frac{k_n^2}{k_g}. \end{aligned}$$

Yukarıda elde edilen benzer hesaplamalarla aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(k_n) &= \left(\frac{\partial k_n}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = \varepsilon g(R(\mathbf{B}, d_1)d_1, d_2) - \varepsilon g(\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_2) + \frac{k_g}{k_n} g((-R(\mathbf{B}, d_1)d_1, d_3) \\ &\quad + g(\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_3)) - 2\varepsilon \rho \frac{k_g^2}{k_n} + 2\rho k_n, \\ \mathbf{B}(\tau_g) &= \left(\frac{\partial \tau_g}{\partial t}(s, t) \right) \Big|_{t=0} = -\varepsilon k_n g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, d_3) - \varepsilon \frac{k_n}{k_g} g((-R(\mathbf{B}, d_1)d_1, d_1) + g(\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}, d_1)) \\ &\quad + \frac{k_n^2}{k_g} g(\nabla_{d_1} \mathbf{B}, d_2) - \varepsilon \frac{\rho'}{k_g}. \end{aligned}$$

□

4.8 Teorem S sabit kesitsel eğriliğe sahip zaman-benzeri bir yüzey, $\mathbf{B}$, S yüzeyi üzerinde bir vektör alanı ve S yüzeyi üzerinde Darboux çatı elemanları $\{T, Y, Z, k_n, \tau_g, k_n\}$ olsun. Eğer, $\mathbf{B}$ bir Kiling vektör alanı ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\mathbf{B}(v) = \mathbf{B}(k_g) = \mathbf{B}(k_n) = \mathbf{B}(\tau_g) = 0. \quad (4.70)$$

Kanıt $\mathbf{B}$ Kiling vektör alanı tarafından üretilen herhangi bir lokal akış $\{\Phi_t\}$ ile tanımlansın. $\mathbf{B}(v)$, $\mathbf{B}(k_g)$, $\mathbf{B}(k_n)$ ve $\mathbf{B}(\tau_g)$, Γ varyasyonuna bağlı olmadığından $B(s)$ yönünde, $\gamma(s)$ eğrisinin

değişimi aşağıdaki gibi veririz:

$$\gamma_t(s) = \Gamma(s, t) =: \phi_t(\gamma(s)). \quad (4.71)$$

ϕ_t akışı, $v(s, t)$, $k_g(s, t)$, $k_n(s, t)$ ve $\tau_g(s, t)$, fonksiyonlarını verir, ve bu fonksiyonlarını verir, ve bu fonksiyonlar t parametresine bağlı olmadıklarından $\mathbf{B}(v) = \mathbf{B}(k_g) = \mathbf{B}(k_n) = \mathbf{B}(\tau_g) = 0$ bulunur. $\square$

Sonuç S yüzeyi zaman-benzeri bir uzay olan $\mathbb{S}_1^2$ de Sitter uzayı olsun. Bu durumda Killing eşitliklikleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

- i. $(\nabla_{d_1} \mathbf{B}.d_1) = 0$,
- ii. $-\varepsilon k_g((-R(\mathbf{B}, d_1)d_1.d_3) + (\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}.d_3)) - (R(\mathbf{B}, d_1)d_1.d_2) + (\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}.d_2) = 0$,
- iii. $-\varepsilon(\nabla_{d_1} \mathbf{B}.d_3) + \frac{1}{k_g}(\nabla_{d_1} \mathbf{B}.d_2) - \frac{\varepsilon}{k_g}((-R(\mathbf{B}, d_1)d_1.d_1) + (\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B}.d_1)) = 0$.

Kanıt Teorem 4.8' de açıkça belirtilmiştir. $\square$

4.6. Zaman-benzeri Yüzeylerde Killing Manyetik Eğriler

4.9 Teorem $\varphi : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $\varphi(U) = S$ zaman-benzeri yüzey ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ S yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda Darboux eşitlikleri $\{d_1, d_2, d_3\}$ ile ilgili Lorentz eşitlikleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \Phi(d_1) \\ \Phi(d_2) \\ \Phi(d_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon k_n & k_g \\ k_n & 0 & \varepsilon \varpi \\ k_g & \varpi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

k_g , k_n ve τ_g , S yüzeyi üzerinde sırasıyla, γ eğrisinin, geodezik eğrilik, normal eğrilik ve eğrilik torsiyonu fonksiyonlarıdır.

Kanıt $\varphi : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $\varphi(U) = S$ zaman-benzeri yüzey ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ S yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Manyetik eğrinin tanımından

$$\Phi(d_1) = \nabla_{d_1} d_1 = k_g d_3 - \varepsilon k_n d_2 \quad (4.73)$$

denklemini biliyoruz. $\Phi(d_3) \in \text{span}\{d_1, d_3, d_2\}$ olduğundan

$$\Phi(d_3) = \lambda d_1 + \mu d_3 + \xi d_2 \quad (4.74)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned}\lambda &= \varepsilon(\Phi(d_3).d_1) = -\varepsilon(\Phi(d_1).d_3) = k_g, \\ \mu &= \varepsilon(\Phi(d_3).d_3) = 0, \\ \xi &= (\Phi(d_3).d_2) = \varpi.\end{aligned}\tag{4.75}$$

eşitliklerine ulaşırız. Buradan

$$\Phi(d_3) = k_g d_1 + \varpi d_2 \tag{4.76}$$

şeklinde hesaplanır. Benzer hesaplamalar yaparak aşağıdaki eşitliği buluruz

$$\Phi(d_2) = k_n d_1 + \varepsilon \varpi d_3. \tag{4.77}$$

□

4.10 Teorem $\varphi : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $\varphi(U) = S$ zaman-benzeri bir yüzey, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, S üzerinde bir eğri ve B , γ eğrisi boyunca bir Killing vektör alanı olsun. Bu durumda γ eğrisi B manyetik alanın bir manyetik yörüngesidir gerek ve yeter koşul B , γ eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılır

$$\mathbf{B}(s) = -\varepsilon \varpi d_1 - k_n d_3 + k_g d_2 \tag{4.78}$$

burada $\varpi(s)$ herbir manyetik eğri ile ilişkili bir fonksiyon, $\varepsilon = \pm 1$, ve $\{k_g, k_n\}$ Darboux eğrilikleridir.

Kanıt $\mathbf{B}$ Killing vektör alanını aşağıdaki gibi yazalım

$$\mathbf{B}(s) = \mu d_1 + \varsigma d_3 + \delta d_2, \tag{4.79}$$

buradan μ , ς ve δ diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. (4.73)-(4.77) eşitliklerini kullanırsak $\mu = -\varepsilon \varpi$, $\varsigma = -k_n$ ve $\delta = k_g$ bulunur. Tersine (4.79) eşitliği sağlansın, bu durumda $\mathbf{B} \times d_1 = \Phi(d_1) = \nabla_{d_1} d_1$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla γ , B manyetik alanıyla ilgili bir manyetik yörüngedir. □

4.11 Teorem $\varphi : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $\varphi(U) = S$ zaman-benzeri bir yüzey ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ bu yüzey üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda, γ , $\mathbf{B}$ Killing vektör alanı ile ilgili manyetik eğridir gerek ve yeter koşul γ eğrisinin Darboux eğrilikleri aşağıdaki denklemi, sağlar:

$$\begin{aligned}k_n k_g'' + \varpi k_n k_n' - 2\varepsilon k_n k_n' \tau_r - \varepsilon k_n^2 \tau_r' - \tau_r \varpi k_n k_g + \varepsilon k_n \tau_r^2 k_g + \varepsilon k_g k_n'' + k_g k_g' \varpi - 2\varepsilon k_g k_g' \tau_r - \varepsilon k_g^2 \tau_r' \\ - \varepsilon k_n k_g \tau_r \varpi + k_g \tau_r^2 k_n = 0.\end{aligned}\tag{4.80}$$

Kanıt γ eğrisi $\mathbf{B}$ Killing manyetik vektör alanı ile ilgili bir manyetik bir eğri olsun. Bu durumda, B manyetik alanının d_1 yönündeki türevini alırsak aşağıdaki ifadeyi bulmuş oluruz

$$\nabla_{d_1} \mathbf{B} = -\varepsilon \varpi' d_1 + (-k_n' - \varepsilon \varpi k_g + k_g \tau_r) d_3 + (k_g' + \varpi k_n - \varepsilon k_n \tau_r) d_2. \quad (4.81)$$

$\mathbf{B}(v) = 0$ denklemini kullanılırsa, ϖ sabit olarak bulunur.

$$\nabla_{d_1}^2 \mathbf{B} = (k_g(-k_n' - \varepsilon \varpi k_g + k_g \tau_r) + k_n(k_g' + \varpi k_n - \varepsilon k_n \tau_r)) d_1 \quad (4.82)$$

$$+ ((-k_n' - \varepsilon \varpi k_g + k_g \tau_r)' + \tau_r(k_g' + \varpi k_n - \varepsilon k_n \tau_r)) d_3 \quad (4.83)$$

$$+ ((k_g' + \varpi k_n - \varepsilon k_n \tau_r)' + \varepsilon \tau_r(-k_n' - \varepsilon \varpi k_g + k_g \tau_r)) d_2 = 0. \quad (4.84)$$

Ayrıca Riemann eğrilik tensöründen aşağıdaki eşitliği biliyoruz

$$R(\mathbf{B}, d_1) d_1 = C((d_1 \cdot \mathbf{B}) d_1 - (d_1 \cdot d_1) \mathbf{B}) \quad (4.85)$$

buradan aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$R(\mathbf{B}, d_1) d_1 = \varepsilon C(k_n d_3 - k_g d_2). \quad (4.86)$$

elde edilen eşitlikler Yardımcı Teorem 4.7 kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & (k_g' + \varpi k_n - \varepsilon k_n \tau_r)' + \varepsilon \tau_r(-k_n' - \varepsilon \varpi k_g + k_g \tau_r) - \varepsilon \frac{k_g}{k_n}(-k_n' - \varepsilon \varpi k_g + k_g \tau_r)' \\ & - \varepsilon \frac{k_g \tau_r}{k_n}(k_g' + \varpi k_n - \varepsilon k_n \tau_r) = 0, \end{aligned} \quad (4.87)$$

Son olarak, Yardımcı Teorem 4.7 'deki son denklem otomatik olarak sağlanır. $\square$

Daha sonra de Sitter uzayı $\mathbb{S}_1^2$ üzerindeki manyetik eğrilerin denklemlerini bilgisayar programı kullanarak elde edeceğiz.

4.12 Teorem γ , de Sitter uzayı $\mathbb{S}_1^2 \subset S$ üzerindeki manyetik eğri olsun bu durumda γ eğrisi aşağıdaki parametrik gösterimlerimlerinden birisine sahiptir;

i.

$$\gamma(s) = k_1 \cos s + k_2 \sin s, k_g = 0, \quad (4.88)$$

$$k_1, k_2 \in \mathbb{E}_1^3.$$

ii.

$$\gamma(s) = h_1 + h_2 s + h_3 s^2, k_g = c = 1 \quad (4.89)$$

$$h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{E}_1^3.$$

iii.

$$\gamma(s) = g_1 + g_2 \frac{1}{\sqrt{c^2-1}} e^{\sqrt{c^2-1}s} + g_3 \frac{1}{\sqrt{c^2-1}} e^{-\sqrt{c^2-1}s}, k_g = c \neq 1, \quad (4.90)$$

 $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{E}_1^3.$

$$\text{iv. } k_g = \sqrt{\frac{2c_1}{\varpi}} \tanh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right),$$

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} d_1 \text{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{\varpi+1}{\varpi}, \frac{\varpi-1}{\varpi}\right], \left[\frac{2c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1-\varpi}}{2c_1\varpi}, \frac{-2c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1-\varpi}}{2c_1\varpi}\right], \frac{1}{\cosh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right)^2}\right) \tanh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right), \\ + d_3 \cosh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right) \frac{\sqrt{2c_1\varpi-2}-\sqrt{c_1\varpi}}{\sqrt{c_1\varpi}} \sinh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right) \\ \text{hypergeom}\left(\left[-\frac{-c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1-\varpi}}{2c_1\varpi}, -\frac{-2c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1-\varpi}-2c_1}{2c_1\varpi}, \right. \right. \\ \left. \left. -\frac{-2c_1\varpi\sqrt{2}+\sqrt{2c_1\varpi}\sqrt{c_1\varpi}-2c_1}{2c_1\varpi}\right], \left[-\frac{-c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1-\varpi}}{c_1\varpi}, \right. \right. \\ \left. \left. -\frac{-2c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1-\varpi}}{2c_1\varpi}\right], \frac{1}{\cosh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right)^2}\right) \\ + d_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right) \frac{\sqrt{2c_1\varpi-2}-\sqrt{c_1\varpi}}{\sqrt{c_1\varpi}} \sinh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right) \\ \text{hypergeom}\left(\left[\frac{-c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1-\varpi}}{2c_1\varpi}, -\frac{2c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1-\varpi}+2c_1}{2c_1\varpi}, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2c_1\varpi\sqrt{2}+\sqrt{2c_1\varpi}\sqrt{c_1\varpi}-2c_1}{2c_1\varpi}\right], \left[\frac{c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1-\varpi}}{c_1\varpi}, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1-\varpi}}{2c_1\varpi}\right], \frac{1}{\cosh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right)^2}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.91)$$

Kanıt Eğer γ de Sitter uzayı $\mathbb{S}_1^2$ üzerinde zaman-benzeri bir eğri ise, bu durumda k_g geodezik eğrilik fonksiyonu olmak üzere γ eğrisi aşağıdaki eğriliklere sahiptir

$$k_n = 1, \tau_g = 0.$$

Buradan aşağıdaki değişken katsayılı ikinci derece diferansiyel denklemini elde ederiz

$$k_g'' + \varpi k_g k_g' = 0. \quad (4.92)$$

Diferansiyel denklemi çözersek aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$k_g = c \text{ veya } k_g = \sqrt{\frac{2c_1}{\varpi}} \tanh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right)$$

$\varpi = \text{sabit}$. Darboux çatınısı kullanılırsa aşağıdaki 3. mertebeden diferansiyel denklem elde edilir:

$$k_g \gamma''' - k_g' \gamma'' + (-k_g^3 + k_g) \gamma' + k_g' \gamma = 0.$$

Diferansiyel denklemi çözersek aşağıdaki dört durumu elde ederiz

i.

$$\gamma(s) = k_1 \cos s + k_2 \sin s, k_g = 0, \quad (4.93)$$

burada $k_1, k_2 \in \mathbb{E}_1^3$.

ii.

$$\gamma(s) = h_1 + h_2 s + h_3 s^2, k_g = c = 1 \quad (4.94)$$

burada $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{E}_1^3$.

iii.

$$\gamma(s) = g_1 + g_2 \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} e^{\sqrt{c^2 - 1}s} + g_3 \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} e^{-\sqrt{c^2 - 1}s}, k_g = c \neq 1, \quad (4.95)$$

burada $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{E}_1^3$.

iv. $k_g = \sqrt{\frac{2c_1}{\varpi}} \tanh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right)$ için, diferansiyel denklemin çözümü bize (4.98) eşitliği ile verilen manyetik eğriyi verir. $\square$

4.13 Teorem Eğer γ de Sitter uzayı $\mathbb{S}_1^2 \subset S$ üzerinde zaman-benzeri bir eğri ise , bu durumda γ eğrisi aşağıdaki gösterimlerinden birine sahiptir:

i.

$$\gamma(s) = a_1 e^s + a_2 e^{-s}, k_g = 0. \quad (4.96)$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{E}_1^3$.

ii.

$$\gamma(s) = b_1 + b_2 \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} e^{\sqrt{c^2 + 1}s} + b_3 \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} e^{-\sqrt{c^2 + 1}s}, k_g = c, \quad (4.97)$$

burada $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{E}_1^3$ ve $c \neq 0 \in \mathbb{R}$.

iii. $k_g = \sqrt{\frac{2c_1}{\varpi}} \tanh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right)$

$$\gamma(s) = \left(\begin{array}{l} d_1 \text{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{\varpi+1}{\varpi}, \frac{\varpi-1}{\varpi}\right], \left[\frac{2c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1+\varpi}}{2c_1\varpi}, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{-2c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1+\varpi}}{2c_1\varpi}\right], \frac{1}{\cosh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right)^2} \tanh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right), \right. \\ \left. + d_3 \cosh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right) \frac{\sqrt{2c_1\varpi+2}-\sqrt{c_1\varpi}}{\sqrt{c_1\varpi}} \sinh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right) \right. \\ \left. \text{hypergeom}\left(\left[\frac{-c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1+\varpi}}{2c_1\varpi}, \frac{-2c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1+\varpi}-2c_1}{2c_1\varpi}, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{-2c_1\varpi\sqrt{2}+\sqrt{2c_1\varpi}\sqrt{c_1\varpi}+2c_1}{2c_1\varpi}\right], \left[\frac{-c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1+\varpi}}{c_1\varpi}, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{-2c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1+\varpi}}{2c_1\varpi}\right], \frac{1}{\cosh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right)^2} \right) \\ \left. + d_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right) \frac{\sqrt{2c_1\varpi+2}-\sqrt{c_1\varpi}}{\sqrt{c_1\varpi}} \sinh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right) \right. \\ \left. \text{hypergeom}\left(\left[\frac{-c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1+\varpi}}{2c_1\varpi}, \frac{2c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1+\varpi}+2c_1}{2c_1\varpi}, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2c_1\varpi\sqrt{2}+\sqrt{2c_1\varpi}\sqrt{c_1\varpi}-2c_1}{2c_1\varpi}\right], \left[\frac{c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1+\varpi}}{c_1\varpi}, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2c_1\varpi+\sqrt{2c_1\varpi}+\sqrt{2c_1+\varpi}}{2c_1\varpi}\right], \frac{1}{\cosh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right)^2} \right) \end{array} \right). \quad (4.98)$$

Kanıt $\mathbb{S}_1^2$ zaman-benzeri bir yüzey γ bu yüzey üzerinde bir eğri olsun . bu durumda aşağıdaki eğrilikler mevcuttur

$$k_g, k_n = 1, \tau_g = 0. \quad (4.99)$$

(4.74) eşitliği kullanılırsa aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir

$$k_g'' + \varpi k_g k_g' = 0 \quad (4.100)$$

diferansiyel denklemi çözersek aşağıdaki eşitlikleri bulmuş oluruz

$$k_g = c \text{ veya } k_g = \sqrt{\frac{2c_1}{\varpi}} \tanh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right), \quad (4.101)$$

burada $\varpi = \text{sabit}$ Darbox çatı denkleminden aşağıdaki üçüncü dereceden diferansiyel denklemlere sahiptir

$$k_g \gamma''' - k_g' \gamma'' + (-k_g^3 - k_g) \gamma' - k_g' \gamma = 0. \quad (4.102)$$

diferansiyel denklemi çözersek aşağıdaki üç durumu elde ederiz.

i.

$$\gamma(s) = a_1 e^s + a_2 e^{-s}, k_g = 0, \quad (4.103)$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{E}_1^3$.

ii.

$$\gamma(s) = b_1 + b_2 \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} e^{\sqrt{c^2+1}s} + b_3 \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} e^{-\sqrt{c^2+1}s}, k_g = c, \quad (4.104)$$

$b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{E}_1^3$ and $c \neq 0 \in \mathbb{R}$.

iii. $k_g = \sqrt{\frac{2c_1}{\varpi}} \tanh\left(\frac{\sqrt{2c_1\varpi}(c_2+s)}{2}\right)$, diferansiyel denklemin çözümü bize (4.98) de verilen manyetik eğrileri verir. $\square$

5. UYGULAMALAR

Örnek $\mathbb{H}^2$ hiperbolik düzlemi üzerinde aşağıdaki parametrik denkleme sahip bir eğri alalım

$$\gamma(s) = (\cosh(\sqrt{2}s), 0, \sinh(\sqrt{2}s)).$$

Bu durumda Darboux eşitlikleri

$$d_1 = (\sinh(\sqrt{2}s), 0, \cosh(\sqrt{2}s)),$$

$$d_2 = (\cosh(\sqrt{2}s), 0, \sinh(\sqrt{2}s)),$$

$$d_3 = (0, 1, 0)$$

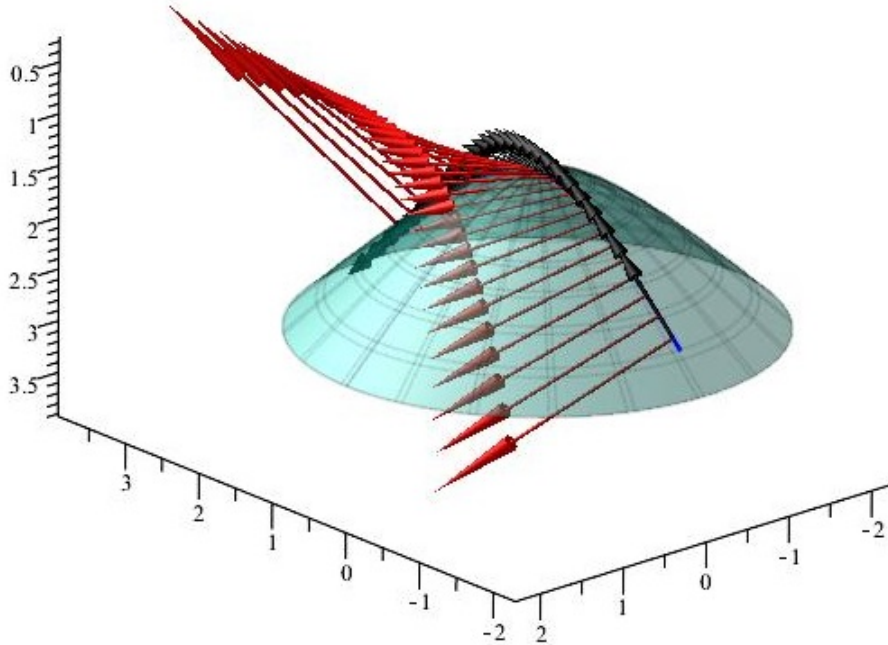
ve Darboux eğrilikleri

$$k_g(s) = 0, k_n(s) = 1, \tau_g = 0.$$

şeklinde hesaplanır. Teorem 4.10 kullanılırsa $\varpi = 0$ olarak hesaplanır ve dolayısıyla γ bir manyetik eğridir. Bu manyetik eğriyle ilgili manyetik vektör alanı ise

$$\mathbf{B}(s) = (-\varpi \sinh(\sqrt{2}s), 1, -\varpi \cosh(\sqrt{2}s)).$$

biçiminde hesaplanır. Eğrinin ve manyetik alan vektörlerinin davranışı Şekil 5.1’de gösterilmiştir.



Şekil 5.1. $\mathbb{H}_1^2$ hiperbolik düzlemi üzerindeki bir yüklü parçacığın,

$\mathbf{B}(s) = (-\varpi \sinh(\sqrt{2}s), 1, -\varpi \cosh(\sqrt{2}s))$ (kırmızı) manyetik alanı ile ilgili hareketi.

Örnek Eğer $a_1 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $a_2 = (0, 1, 0)$ ve $a_3 = (1, 0, 0)$ seçilirse, $\mathbb{H}^2$ üzerindeki eğrinin

parametrik denklemi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\beta(s) = \left(\frac{1}{2}s^2 + 1, s, \frac{1}{2}s^2\right).$$

Eğrinin Darboux formülleri

$$\begin{aligned} d_1 &= (s, 1, s), \\ d_2 &= \left(\frac{1}{2}s^2 + 1, s, \frac{1}{2}s^2\right), \\ d_3 &= \left(-\frac{1}{2}s^2, 0, \frac{1}{2}s^2 + 1\right) \end{aligned}$$

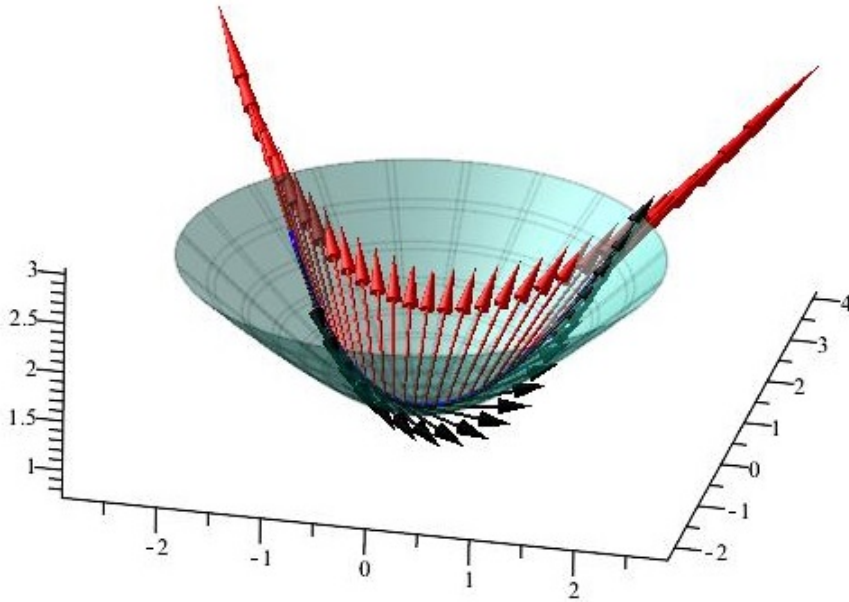
ve Darboux eğrilikleri

$$k_g(s) = 1, k_n(s) = 1, \tau_g = 0.$$

şeklinde hesaplanır. Teorem 4.10 kullanılırsa $\varpi = 0$ hesaplanır ve dolayısıyla γ bir manyetik eğridir. Manyetik eğriyle ilgili manyetik vektör alanı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\mathbf{B}(s) = (1, s, s^2 + 1).$$

Eğrinin ve manyetik vektör alanının gösterimi Şekil 5.2 de verilmiştir.



Şekil 5.2. $\mathbb{H}_1^2$ hiperbolik düzlemi üzerindeki bir yüklü parçacığın, $\mathbf{B}(s) = (1, s, s^2 + 1)$ (kırmızı) manyetik alanı ile ilgili hareketi.

Örnek zaman-benzeri bir yüzey olan de sitter uzayı üzerindeki γ manyetik eğrisi aşağıdaki gibi verilsin

$$\gamma(s) = (0, \cos s, \sin s).$$

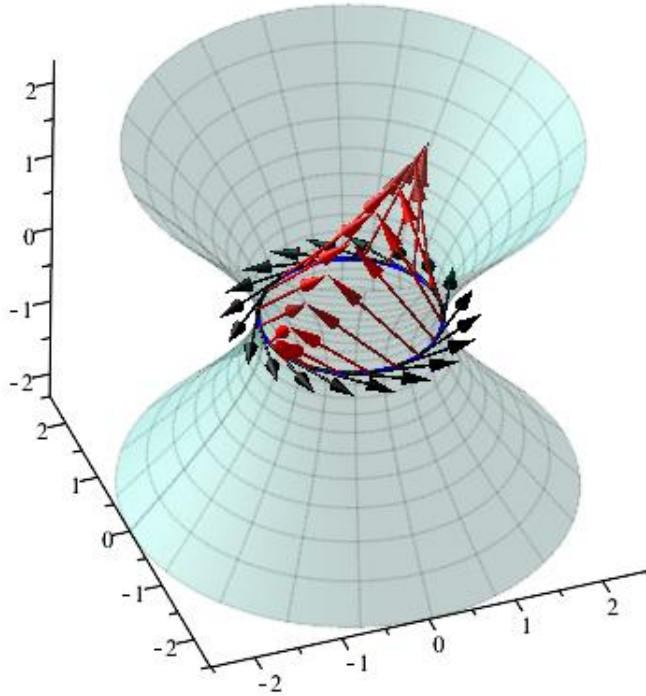
Bu eğri için Darboux eğrilikleri :

$$k_g(s) = 0, k_n(s) = 1, \tau_g = 0.$$

Kiling vektör alanı ise

$$\mathbf{B}(s) = (1, \varpi \sin s, \varpi \cos s)$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, ilgili manyetik eğri (mavi) ve manyetik vektör alanı (kırmızı), Şekil 5.3' de gösterilmiştir



Şekil 5.3. $\mathbb{S}_1^2$ de sitter uzayı üzerindeki uzay-benzeri bir eğri boyunca bir yüklü parçacığın, $\mathbf{B}$ (kırmızı) manyetik alanı ile ilgili hareketi.

Örnek $a_1 = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ve $a_2 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ şeklinde seçilirse de sitter uzayı üzerinde

$$\gamma_2(s) = (\frac{1}{2}e^s - \frac{1}{2}e^{-s}, \frac{1}{2}e^s + \frac{1}{2}e^{-s}, 0).$$

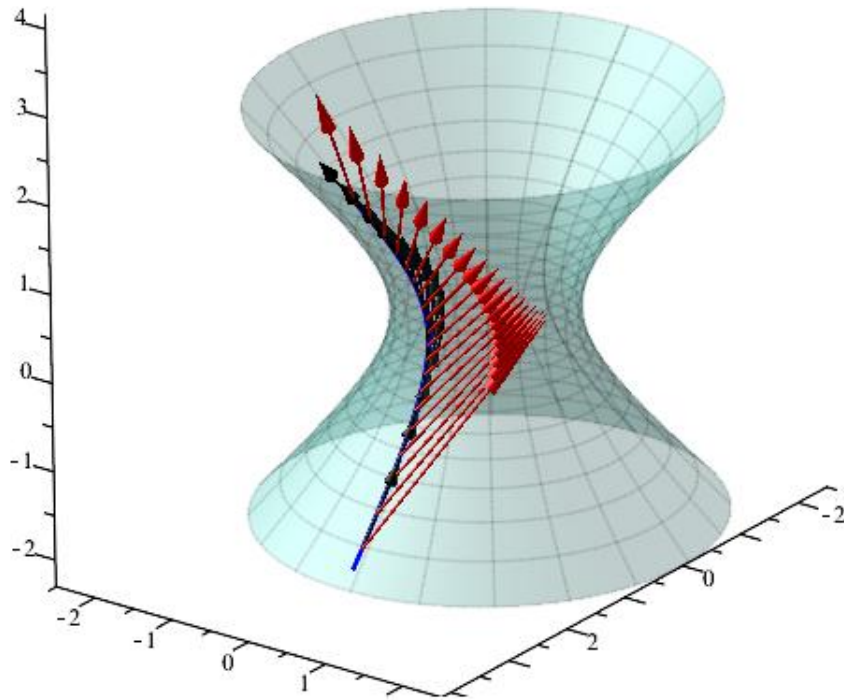
eğrisi bulunur. Bu eğri için Darboux eğrilikleri :

$$k_g(s) = 0, k_n(s) = 1, \tau_g = 0.$$

şeklinde hesaplanır. Kiling vektör alanı ise aşağıdaki şekilde bulunur

$$\mathbf{B}(s) = (\varpi \frac{1}{2}e^s + \varpi \frac{1}{2}e^{-s}, \varpi \frac{1}{2}e^s - \varpi \frac{1}{2}e^{-s}, 1).$$

İlgili manyetik eğri (mavi) ve manyetik vektör alanı (kırmızı), Şekil 5.4' de gösterilmiştir.



Şekil 5.4. $\mathbb{S}_1^2$ de sitter uzayı üzerindeki zaman-benzeri bir eğri boyunca bir yüklü parçacığın, $\mathbf{B}$ (kırmızı) manyetik alanı ile ilgili hareketi.

Örnek $h_1 = (0, -1, 0)$, $h_2 = (0, 0, 1)$ ve $h_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ şeklinde seçilirse manyetik eğrinin parametrik denklemi aşağıdaki gibi bulur

$$\gamma_3 = (\frac{s^2}{2}, \frac{s^2}{2} - 1, s)$$

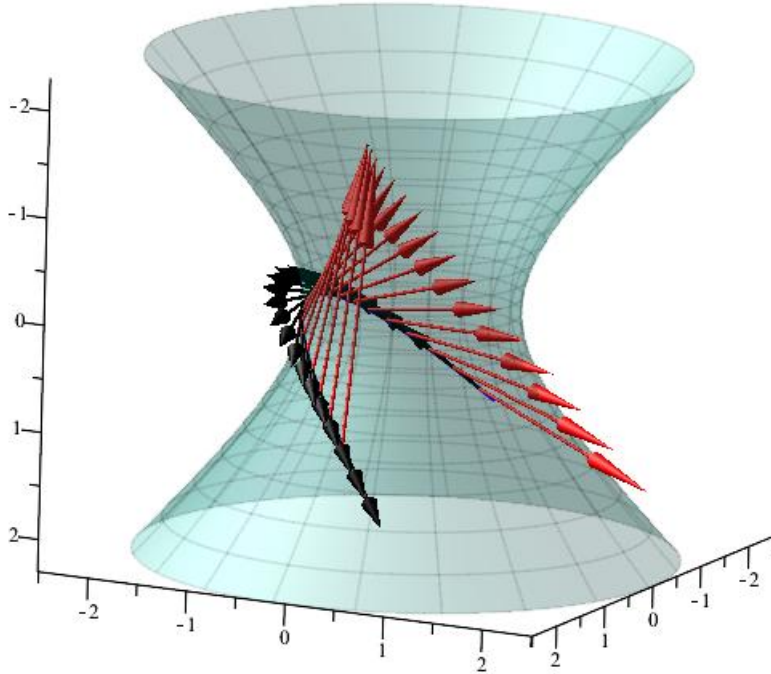
Bu eğri için Darbox eğrilikleri :

$$k_g(s) = 1, k_n(s) = 1, \tau_g = 0.$$

şeklinde hesaplanır. Kiling vektör alanı ise

$$\mathbf{B}(s) = (-\varpi s - 1, -\varpi s - 1, -\varpi s).$$

olarak bulunur. İlgili manyetik eğri (mavi) ve manyetik vektör alanı (kırmızı), Şekil 5.5' de gösterilmiştir.



Şekil 5.5. $\mathbb{S}_1^2$ de sitter uzayı üzerindeki γ_3 eğrisi boyunca bir yüklü parçacığın, $\mathbf{B}$ (kırmızı) manyetik alanı ile ilgili hareketi.

Örnek de Sitter uzayı üzerinde γ manyetik eğrisi aşağıda verilsin

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} \frac{-\cos s}{\sqrt{0.21}}, \\ \frac{-1.1 \cos s \sin(\sqrt{0.21}/1.1)s}{\sqrt{0.21}} + \sin s \cos(\sqrt{0.21}/1.1)s, \\ \frac{1.1 \cos s \cos(\sqrt{0.21}/1.1)s}{\sqrt{0.21}} + \sin s \sin(\sqrt{0.21}/1.1)s \end{pmatrix}.$$

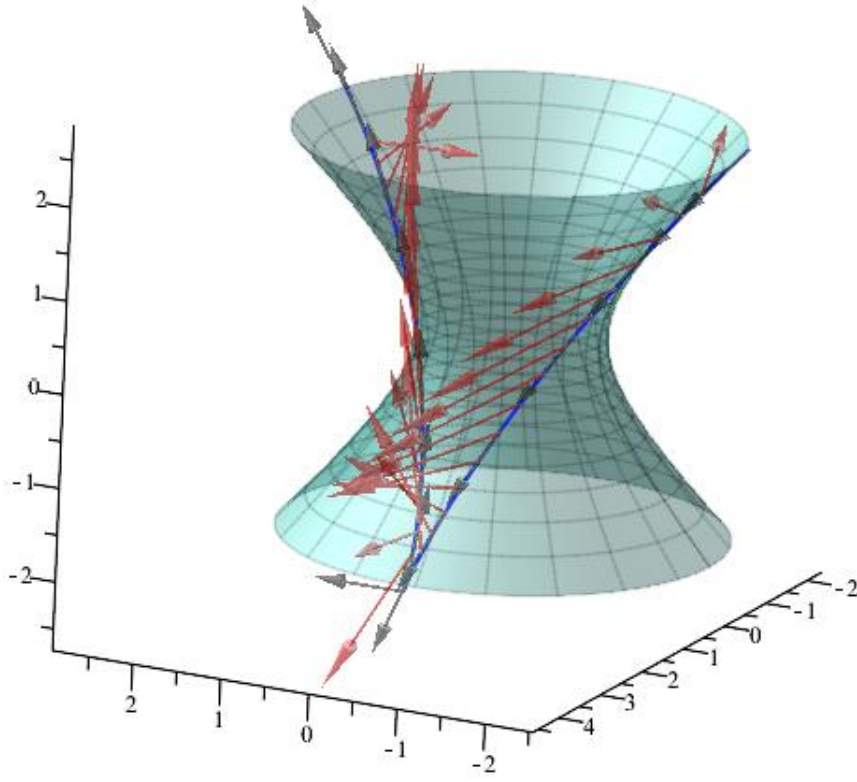
Bu eğri için Darboux eğrilikleri :

$$k_g(s) = \cot s, \quad k_n(s) = 1, \quad \tau_g = 0.$$

Kiling vektör alanı ise

$$\mathbf{B}(s) = 2d_1 - d_2 + \cot s d_3.$$

olarak hesaplanır. İlgili manyetik eğri (mavi) ve manyetik vektör alanı (kırmızı) Şekil 3.4'de verilmiştir.



Şekil 5.6. $\mathbb{S}_1^2$ de sitter uzayı üzerindeki γ_4 eğrisi boyunca bir yüklü parçacığın, $\mathbf{B}$ (kırmızı) manyetik alanı ile ilgili hareketi.

6. Sonuç ve Öneriler

Bu tez çalışmasında, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayında uzay-benzeri ve zaman-benzeri yüzeyler üzerindeki manyetik eğriler incelenmiştir. Bu yüzeyler üzerindeki Darboux çatı elemanlarının varyasyonu yardımıyla Killing eşitlikleri elde edilmiştir. Bu eşitliklerin çözümü ile Lorentz uzayındaki ışık-benzeri olmayan yüzeyler üzerindeki Killing manyetik eğriler için diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Bu denklemlerin çözümleri yapılarak manyetik eğrilerin eğriliklerinin karakterizasyonu bulunmuştur. Özel olarak, Lorentz küreleri olarak adlandırılan, uzay-benzeri $\mathbb{H}_1^2$ hiperbolik düzlemi ve zaman-benzeri $\mathbb{H}_1^2$ de Sitter uzayı üzerindeki manyetik yörüngelerin eğrilikleri hesaplanmıştır. Bu eğrilikler Darboux çatı eşitliklerinde kullanılarak ilgili diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Bu denklemlerin çözümleri yapılarak, Lorentz küreleri üzerindeki manyetik eğrilerin parametrik denklemleri elde edilmiştir. Sonuç olarak, Lorentzian 3-uzayda, ışık-benzeri olmayan tüm manyetik eğrilerin karakterizasyonları elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Barros M, Cabrerizo JL, Fernández M, Romero A. Magnetic vortex filament flows. J Math Phys 2007; 48: 1–27.

Barros M, Ferrandez A, Lucas P, Merono MA. General helices in the 3-dimensional Lorentzian space forms. Rocky Mt J Math 2001; 31: 373-388.

Barros, M. 1997. General helices and a theorem of lancret, Proceeding of the American Mathematical Society, 125(5), 1503-1509.

Bishop, R.L. 1975. There is more than one way frame a curve, The American Mathematical Monthly, 82(3), 246-251

Bozkurt ,Z., Gök. İ., Yay Y., Ekmekci F.N. 2014. A. new approach for magnetic curves in 3D Riemannian manifolds, Journal of Mathematical Physics, 55(5). 053501.

Dede, M., Ekinici, C., Tozak H. 2015. Direccional Tubual Surfaces. International Journal of Algebra, 9(12), 527-535.

Do Carmo, M.P. 1976. Differential geometry of curves and surfaces , Prentice-Hall, New Jersey.

Gürbüz, N. p-Elastica in the 3-Dimensional Lorentzian Space Forms, Turk J Math 30(2006) , 33 – 41.

Hacısalıhoğlu, H.H. 2000a. Diferansiyel Geometri, Cilt I. Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Hacısalıhoğlu Yayıncılık. Ankara.

Hacısalıhoğlu, H.H. 2000.b. Diferansiyel Geometri , Cilt II Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Hacısalıhoğlu Yayıncılık. Ankara.

Hacısalıhoğlu, H.H. 2009. Diferansiyel Geometri, Cilt I Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Hacısalıhoğlu Yayıncılık. Ankara.

Hacısalıhoğlu ,1980. Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları. Elazığ.

Kazan . A., Karadağ. H.B. 2017. Magnetic pseudo null and magnetic null curves in Minkowski 3-sapance. International Mathematical Form, no.3, 119-132.

Lopez, R. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space, International Electronic Journal of Geometry, 7(1), 44 - 107, 2014.

O'Neill, B. Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic press, New York, 198.

Özdemir Z., Gök. I., Yaylı. Y., Ekmekci. F.N. 2015. Notes on magnetic curves in 3D Semi-Riemannian manifolds, Turkish Journal of Mathematics, 412-426.

Özdemir Z. Magnetic Trajectories on Lightlike Surfaces, Differential Equations and Dynamical Systems, DOI: 10.1007/s12591-020-00519-7.

Özdemir Z. Darboux Frame Variations of Semi-Riemannian Manifolds, CSC2018 - Computational Sciences Congress, Amasya, 2018.

Solouma, E.M. Investigation of non-lightlike tubular surfaces with Darboux frame in Minkowski 3-space, CMMA 1, No. 2, 58-65 (2016).

Şahin K. Özdemir Z., Variational equations and Killing magnetic trajectories in semi-Riemannian manifolds, Hacettepe Journal of Mathematics, In Press, 2022.

Xu, L., Mould, D., 2009. Magnetic curves: Curvature-controlled aesthetic curves using magnetic fields. Comput, Aesth. , Eurograph. Assoc. 1.8.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Kübra Şahin

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Ordu Üniversitesi/Matematik	2017
pedagojik formasyon	Ordu Üniversitesi/Eğitim Fakültesi	2015

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. Şahin K. Özdemir Z., Variational equations and Killing magnetic trajectories
Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2022, In Press.
2. Şahin K. Özdemir Z., The charged point-particle trajectories on timelike surface,
18. Geometri sempozyumu, (sözlü sunum), Malatya, 12-13 Temmuz 2021.