



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**MAKSİMUM METRİĞİ GEOMETRİSİNDE UZAKLIK
FORMÜLLERİ ÜZERİNE**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Kadir YILDIRIM**

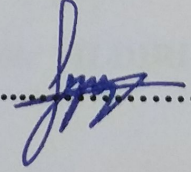
**DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN**

AKSARAY, 2018

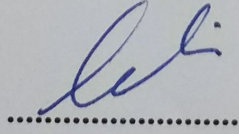
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342622 numaralı Yüksek Lisans, "Kadir YILDIRIM", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "MAKSİMUM METRİĞİ GEOMETRİSİNDE UZAKLIK FORMÜLLERİ ÜZERİNE" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

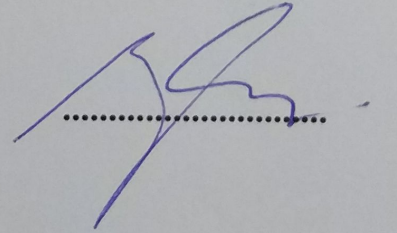
Tez Danışmanı : **Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN**
Aksaray Üniversitesi



Jüri Üyeleri : **Dr. Öğr. Üyesi Pelin TEKİN**
Trakya Üniversitesi



Jüri Üyeleri : **Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIRIM**
Aksaray Üniversitesi



Teslim Tarihi:

Savunma Tarihi: 20/09/2018

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmada kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Kadir YILDIRIM

TEŞEKKÜR

Bu tezin çalışma ve hazırlık aşamalarında sürekli yardım ve desteğini gördüğüm danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN'a ve çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen eşime ve oğluma en derin şükranlarımı sunarım.

Kadir YILDIRIM

AKSARAY, 2018



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
SİMGELER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ	1
1.1. Çokyüzlüler.....	1
1.2. Minkowski Geometrisi Ve Konveks Çokyüzlüler.....	5
2. TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1. Metrik Geometri.....	6
2.2. Öklid Uzayında Doğru ve Düzlem.....	8
2.2.1. Doğru.....	8
2.2.1.1 Verilen bir noktadan geçen ve verilen bir doğrultuya paralel olan doğrunun denklemi.	8
2.2.1.2. Verilen iki noktadan geçen dorunun denklemi	10
2.2.1.3. İki dorunun dik veya paralel durumlu olmala koşulları	11
2.2.1.4. Verilen bir noktadan geçen ve verilen bir doğrultuya dik olan doğrunun denklemi	11
2.2.2. Düzlem	12
2.2.2.1. Verilen bir noktadan geçen ve verilen bir doğrultuya dik olan düzlemin denklemi	12
2.2.2.2. Üç noktadan geçen düzlemin denklemi	13
2.2.2.3. Verilen bir noktadan geçen ve verilen iki farklı doğrultuya paralel olan düzlemin denklemi	13
2.2.2.4. Düzlemin eksenlerden ayırdığı parçalar cinsinden denklemi	14
2.2.3. Bir doğru ve bir düzlemin birbirine göre konumu ve doğru ve bir düzlemin kesişme noktasının bulunması.....	15
2.2.4. Uzayda farklı iki doğrunun birbirine göre konumu ve kesişme noktasının bulunması	16
3. MAKSİMUM UZAKLIĞI VE MAKSİMUM DÜZLEM	18
4. MAKSİMUM UZAY GEOMETRİSİ	28
4.1. Uzayda Maksimum Metriği	28
4.2. Maksimum Uzayda Bazı Uzaklık Formülleri	36
4.2.1. Maksimum uzayda verilen bir noktanın bir doğruya uzaklığı	36
4.2.2. Maksimum uzayda verilen bir noktanın bir düzleme uzaklığı.....	45
4.2.3. Maksimum uzayda verilen iki doğru arasındaki uzaklık	50
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	61
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ.....	64

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKSİMUM METRİĞİ GEOMETRİSİNDE UZAKLIK FORMÜLLERİ
ÜZERİNE

Kadir YILDIRIM

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır ve bu bölümde bazı literatür bilgilerine yer verilmiştir. İkinci bölüm tez için temel kavramların tanımının yapıldığı ve teoremlerden oluşan bölümdür. Üçüncü bölümde düzlemde maksimum uzaklığın tanımı ve bazı özelliklere değinilmiştir. Ayrıca bu bölümde öklidyen uzaklık ile maksimum uzaklığı arasındaki fonksiyonel ilişki belirtilmiştir. Dördüncü bölümde uzayda maksimum uzaklığın bir metrik belirttiği gösterilmiş ve bu metrik oluşturulmuş maksimum geometrideki bir noktanın bir doğruya, bir noktanın bir düzleme uzaklıkları ile iki doğru arasındaki uzaklık araştırılmıştır. Beşinci ve son bölümde ise yapılan çalışma özetlenmiş ve bazı sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çokyüzlüler, Platonik Cisimler, Küp, Metrik, Maksimum Metriği, Maksimum 3- Uzayı

Ekim, 2018; 65 sayfa

M.Sc. THESIS

**ON THE DISTANCE FORMULAE IN THE GEOMETRY OF MAXIMUM
METRIC**

Kadir YILDIRIM

**Aksaray University
Graduate School Of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Zeynep CAN

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to some literature knowledge. The second chapters is the chapter some fundamental definitions and theorems which are needed for the thesis are given. In the third chapter definition of maximum distance in the plane and some of its properties are given. Also in this chapter functional relation between Euclidean distance and Maximum distance is stated. In the fourth chapter it is shown that maximum distance in the space is a metric and in maximum geometry which is generated by this metric, distance of a point to a line, distance of a point to a plane and distance between two lines are searched. In the fifth and final chapter the study is summarized and some suggestions and conclusions are given.

Key Words: Polyhedra, Platonic Solids, Cube, Metric, Maximum Metric, Maximum 3-Space

October, 2018; 65 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1. Platonik cisimlerin bulunan ilk örnekleri.....	1
Şekil 1.2. "Radiolarla" tek hücreli deniz canlılarının platonik cisimlerle form ilişkisi (Thompson, 1945	2
Şekil 1.3. Düzgün çokyüzlüler ve açınımı.....	3
Şekil 1.4. Platonun beş katı cismi.....	4
Şekil 2.1. A noktasından geçen, d vektörüne paralel doğru.....	8
Şekil 2.2. n vektörüne dik olan geçen, ve X noktasından geçen doğru.....	12
Şekil 2.3. N_1, N_2, N_3 noktasından geçen doğru.....	13
Şekil 2.4. Köşeleri N_1, N_2, N_3 eksenler üzerinde olan düzlem parçası.....	15
Şekil 2.5. Bir doğru ve düzlemin uzayda birbirine göre konumu.....	15
Şekil 2.6. Uzayda iki doğrunun birbirine göre konumu	17
Şekil 3.1. A ve B noktaları arasında öklid uzaklığı.....	18
Şekil 3.2. A ve B noktaları arasında maksimum uzaklığı.....	18
Şekil 3.3. Noktanın doğruya uzaklığı	22
Şekil 3.4. A ve B noktalarına minimum uzaklıktaki noktaların kümesi.....	24
Şekil 3.5. A ve B noktalarına minimum uzaklıktaki noktaların kümesi	25
Şekil 3.6. A ve B noktalarına minimum uzaklıktaki noktaların kümesi	25
Şekil 3.7. A ve B noktalarına minimum uzaklıktaki noktaların kümesi	26
Şekil 3.8. A ve B noktalarına minimum uzaklıktaki noktaların kümesi	26
Şekil 3.9. A ve B noktalarına minimum uzaklıktaki noktaların kümesi	27
Şekil 3.10. A ve B noktalarına minimum uzaklıktaki noktaların kümesi.....	27
Şekil 4.1. Maksimum uzayda kürenin ve doğrunun kesişme durumları	38
Şekil 4.2. Maksimum uzayda kürenin ve düzlemin kesişme durumları	46
Şekil 4.3. Maksimum uzayda kürenin ve doğruların kesişme durumları	50

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^2$	: Öklidyen düzlem
$\mathbb{R}^3$	: Öklidyen uzay
$\mathbb{R}_M^2$	: Maksimum düzlemi
$\mathbb{R}_M^3$	: Maksimum uzayı
d_E	: Öklidyen Uzaklık
d_M	: Maksimum Uzaklık



1. GİRİŞ

1.1 Çokyüzlüler

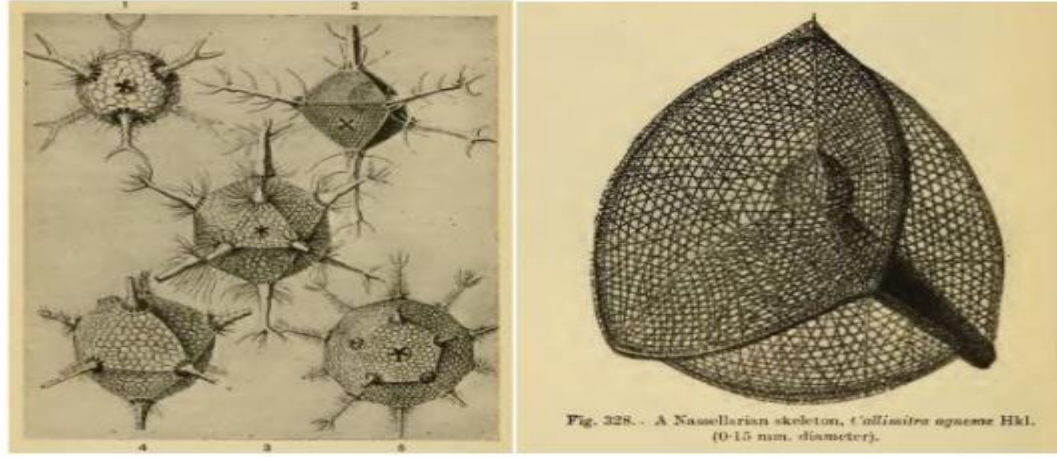
Çokyüzlüler sanat, doğa, geometrik incelemeler gibi birçok disiplinde kendini göstermektedir. Bu disiplinleri inceleme ve hayal etme noktasında çokyüzlü cisimleri farkedip, keşfetmek farklı bakış açıları sağlamaktadır. Doğa ve tasarım gibi disiplinlerde birçok araştırmaya yön vermektedir (Senechal, 2013a).

Çokyüzlüler sahip oldukları, simetrik özelliklerden dolayı yüzyıllardır insanoğlunun ilgisini çekmiştir. Arkeolojik kazılarda İskoçya’da, cıvalı taş devrine ait oyulmuş taşın düzgün çokyüzlüler bulunmuştur. Bu taşlar Oxford Üniversitesi’ndeki *Ashmolean Müzesinde* yer almaktadır (Şekil 1.1).



Şekil 1.1. Platonik cisimlerin bulunan ilk örnekleri.

Çokyüzlülere birçok canlı türünde karşılaşılmaktadır. Genellikle canlı türlerinde çokyüzlü kristallerin yapısından farklı olarak, daha çeşitli geometrilere oluşur. Bu duruma verilebilecek örneklerden birisi Radiolaria adındaki tek hücreli deniz canlısıdır. Bu canlı çok yüzlü yapılara sahiptir. Ernst Haeckel’in Charles Darwin ile birlikte H.M.S. Challenger adlı oşinografik keşif seferinde yaptığı çizimlerde çokyüzlü yapıların doğa ile ilişkisini ortaya koymuştur (Şekil 1.2) (Senechal, 2013b).



Şekil 1.2. "Radiolarla" tek hücreli deniz canlılarının platonik cisimlerle form ilişkisi (Thompson, 1945).

Çokyüzlülerin sonlu çoklukta çokgenle sınırlandırılmış bir cisim olarak tanımlanabileceği gibi sonluçoklukta çokgenlerden oluşan bir yüzey olarak da tanımlanabilir. Çokyüzlüyü oluşturan çokgenlere çok yüzlünün yüzleri, çokgenlerin kenar ve köşelerine ise çokyüzlünün ayrıt ve köşeleri denir. (Alexandrov, 2000).

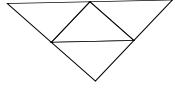
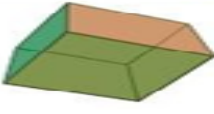
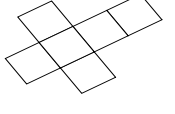
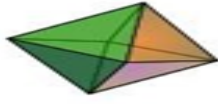
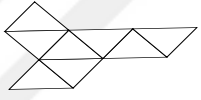
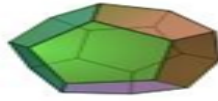
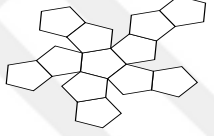
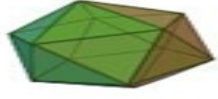
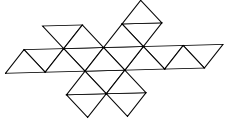
Çokyüzlülerin konveks olması ayrıca önemli bir özelliktir. Konveks çokyüzlüler aşağıdaki özellikleri sağlayan sonlu düzlemsel çokgenden oluşan bir şekildir.

1. Çokgenlerin ortak kenarları ya da kenar parçaları boyunca bir çokgenden diğer bir çokgene geçiş yapmak mümkündür.
2. Şeklin tamamı şekli oluşturan çokgen düzlemlerin sadece bir tarafındadır.

Birinci özellik çokyüzlünün köşelerde parçalara ayrılmayacağını hatta parçalarının hiçbirinin bir diğerinden ayrı olmadığını belirtmektedir. İkinci özellik konvekslik koşulunu belirtmektedir.(Alexandrov, 2000).

Çokyüzlüler özelliklerine göre sınıflandırılmışlardır. Konveks, simetrik çokyüzlüler Platonik cisimler, Arşimed cisimleri ve Katalan cisimleri olarak üç ana grupta incelenebilir. Bütün kenarları eşit ve yüzeyleri düzgün çokgen olan katı cisimlere "Düzgün Katı Cisim" denir. Yalnızca beş tane olduklarından Beş Katı cisim olarak bilinen bu geometrik cisimlere, Platon (Eflâtûn)'un isminden esinlenerek Platonik Cisimler de denilmiştir. Düzgün geometrik cisimlerden üçgen yüzlülerden 3 tane, beşgen yüzlülerden 1 tane ve bir tane de kare yüzlü vardır. Beş Katı Cismin özellikleri:

1. Tüm yüzeyler düzgün çokgendir.
2. Bir köşede kaç yüz birleşiyorsa diğer köşelerde de o kadar yüz birleşmektedir.
3. Bütün yüzeyler aynı büyüklükte ve eşittir. (URL-1)

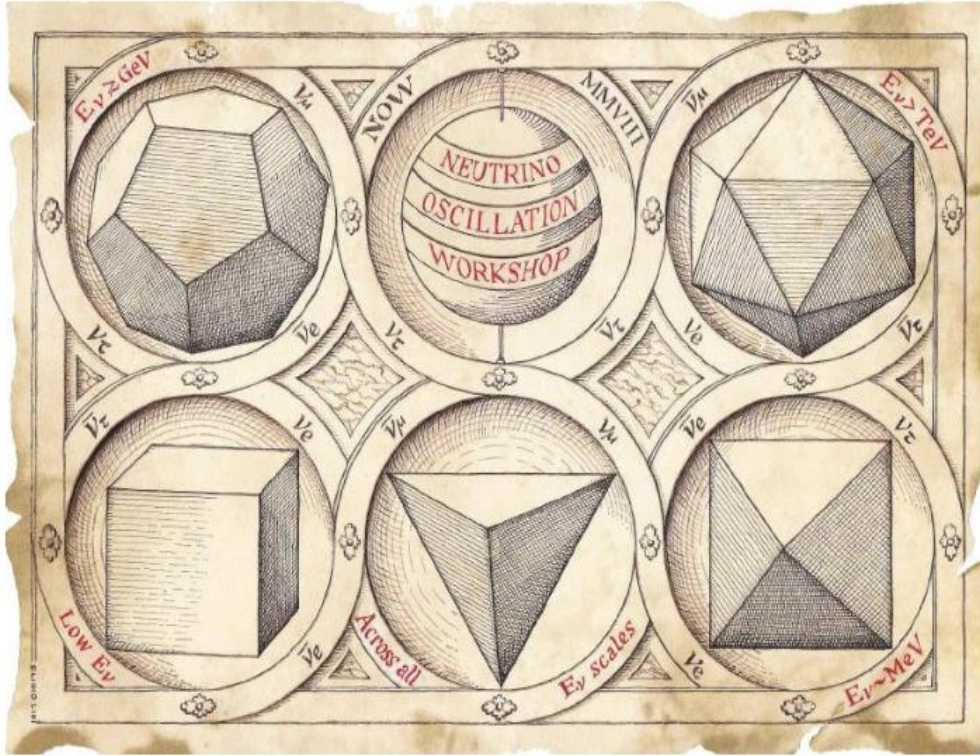
DÜZGÜN ÇOK YÜZLÜLER	DÜZGÜN ÇOKYÜZLÜLERİN AÇILIMI
DÜZGÜN DÖRT YÜZLÜ 	
DÜZGÜN ALTI YÜZLÜ 	
DÜZGÜN SEKİZ YÜZLÜ 	
DÜZGÜN ON İKİ YÜZLÜ 	
DÜZGÜN YİRMİ YÜZLÜ 	

Şekil 1.3. Düzgün çokyüzlüler ve açılımları. (URL-1)

"Timaus" metninde çok yüzlüler olarak belirtilen platonik katıları bilim tarihine kazandıran Antik Yunan filozofu platon (M.Ö.427-M.Ö.347) dur. (Senechal, 2013b). Platon temel geometrik şekillerin envanterini oluşturma imkanı araştırmıştır. Doğadaki yapıların geometrik tanımlamasını yapan ilk kişidir. (Peorce, 1990).

"Timaus" metninde ilk konu elementlerdir. (Waring, 2015). Platon metinde elementlerin en küçük yapı taşlarının geometrik biçimlerini belirtmiştir. (Senechal, 2013b). Platon, platonik cisimlerin, dört elementi temsil ettiğini söylemektedir. Platon bu çok yüzlü cisimlerin doğadaki elementleri anlattığını düşünmektedir. Bunlar; Tetrahedron(düzgün dört yüzlü), ateşi; Icosahedron (düzgün yirmi yüzlü), suyu; Hexahedron (küp - düzgün altı yüzlü), toprağı; Octahedron (düzgün sekiz yüzlü),

havayı; Dodecahedron (düzgün on iki yüzlü), "gerçek dünyayı", "Evreni" temsil eder. Bu durum evrenin ana geometrik şekli olarak kabul edilmiştir. (Stakov, 2009)



Şekil 1.4. Platonun beş katı cismi. (URL-2)

Arşimed cisimleri de Platonik cisimlerden sonra incelenen cisimlerden birisidir. İlk olarak bu çokyüzlü cisimleri Arşimed'in (M.Ö. 287-212) keşfettiği düşünülmektedir. Bu nedenle adı Arşimed cisimleridir (Senechal, 2013b). Fakat Arşimed'in yaptığı çalışmalara ait kitabın yüzyıllar önce kaybolduğu bilinmektedir. Bu sebeple on üç adet Arşimed cisimleri Kepler tarafından yeniden incelenip keşfedilmiştir (Kinsey ve More, 2002; Pearce, 1990). Arşimed cisimleri farklı çeşitlerde yarı düzgün çokgenlerden oluşan yüzeylere sahiptir (Stakhov, 2009). Arşimed cisimleri iki ya da daha fazla düzgün çokgenlerden oluşur ve dışbükey (konveks) çokyüzlü hacimlerdir. Tüm köşeleri aynı türlerde uyumlu çokgenlerden oluşur (Pottman Vd., 2007). Arşimed cisimleri farklı alt gruplara farklı türde oluşum yöntemleri ile bölünebilir. Arşimet cisimlerinin bazıları Platonik cisimlerin köşelerinin kesilmesi tekniği (truncation) ile oluşturulur. (Pottman vd., 2007)

Katalan cisimleri ise Arşimed cisimlerinin duallerine denir. Bu cisimlerde on üç tanedir. Adını ise 1865 yılında Belçikalı matematikçi Eugene Catalan tarafından

tanımlanması sebebiyle almıştır. (Eugene, 1865). Katalan cisimlerinin, Arşimed ve Platonik cisimlerden farkı yüzeylerini oluşturan çokgenlerin düzgün çokgen olmamasıdır ayrıca bu çokgenlerin kenar uzunlukları da aynı olmayabilir.

1.2 Minkowski Geometrisi Ve Konveks Çokyüzlüler

(Thompson, 1996) da ifade edildiği gibi Minkowski geometrisini inceleyen birçok kaynak bulunmaktadır. Bunlara örnek olarak (Kaya, 2002), (Gelişgen, 2007), (Çolakoğlu, 2009) (Krause, 1975), (Martin, 1998), (Millman ve Parker, 1991), (Thompson, 1996) ve (Coxeter, 1961) gösterilebilir. Minkowski geometrisi öklidyen olmayan sonlu boyutlu bir geometri olarak eliptik ve hiperbolik geometriden farklıdır. Space-time Minkowskian geometriden de farklıdır. Minkowski geometrisinin lineer yapısı öklidyen geometrideki ile neredeyse aynıdır. Noktalar, doğrular öklidyen geometridekiyle aynıdır ve açı ölçümleri aynı yöntemle yapılmaktadır. Tek farkı uzaklığın her yönde aynı olmamasıdır. Bu farklılık alınan metriklerle ilgili kavramları değiştirmektedir. Dolayısıyla Minkowski geometrilerinde uzaklıkla ilgili kavramların incelenmesi ilgi çekici konuların ortaya çıkmasını sağlamaktadır. Örnek olarak Öklidyen uzaydaki bilinen kürenin yerine alınan "yeni birim küre" değişebilen bir genel simetrik konveks kümedir ve paralellik aksiyomu geçerli olmasına rağmen, Pisagor teoremi gibi benzeri birçok teorem geçerli değildir. Bu geometrilere örnek verecek olursak Taksi geometrisi, Çin Dama geometrisi ve α geometrisi verilebilir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde öncelikle metrik geometri tanımları(düzlemde) yapılmıştır. Sonrasında Öklid uzayı tanıtılarak bazı temel tanım ve teoremler üzerinde durulmuş ve gerekli görülen kimi teoremler ispatları ile birlikte verilmiştir.

2.1. Metrik Geometri

Bu bölümde yapılan metrik geometri tanımları (düzlemde) ve Maksimum Düzlem Geometrisi ile ilgili verilen bilgiler için (Millman ve Parker, 1991) ve (Salihova, 2006) dan yararlanılmıştır.

Tanım 2.1.1 Elemanları noktalar olarak adlandırılan bir küme $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ nin doğru olarak adlandırılan bazı alt kümelerinin topluluğu $\mathcal{L}$, I , da nokta ve doğrular arasında üzerinde olma (*incidence*) bağıntısı olmak üzere $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ sistemi aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa bu sistem bir *soyut geometri* olarak adlandırılır.

- i) $\forall A, B \in \mathcal{P}$ için $A \in l$ ve $B \in l$ olacak şekilde birtek $l \in \mathcal{L}$ doğrusu vardır.
- ii) Her doğru en az iki noktayı kapsar.

$(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ soyut geometrisi $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.1 $\mathcal{P} = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$ olsun. Doğrular kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın a sabit gerçel sayı olmak üzere $\mathbb{R}^2$ nin

$$\mathcal{L}_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x = a\}$$

şeklindeki her alt kümesine bir *dikey doğru* denir. m ve b sabit gerçel sayılar olmak üzere $\mathbb{R}^2$ nin

$$\mathcal{L}_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = mx + b\}$$

şeklindeki bir alt kümesine *dikey olmayan doğru* denir. $\mathcal{L}_E$ tüm dikey ve dikey olmayan doğruların kümesi olsun. Burada $(x, y) \in \mathcal{L}_a \Leftrightarrow x = a$ ve $(x, y) \in \mathcal{L}_{m,b} \Leftrightarrow y = mx + b$ olmak üzere $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, I)$ bir soyut geometridir. $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, I)$ düzlem modeli *Kartezyen düzlem* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2 $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ soyut geometrisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa *incidence geometridir* denir.

- (i) $\mathcal{L}$ de farklı iki noktayı üzerinde bulunduran bir tek doğru vardır.
- (ii) Doğrudaş olmayan üç $A, B, C \in \mathcal{P}$ noktaları vardır.

Örnek 2.1.2 Kartezyen düzlem bir incidence geometridir.

Tanım 2.1.3 Bir $d: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri sağlarsa, bir *metriktir* denir.

$$M1: Her A, B \in \mathcal{P} \text{ için } d(A, B) \geq 0, \quad (2.1)$$

$$M2: Her A, B \in \mathcal{P} \text{ için } d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B, \quad (2.2)$$

$$M3: Her A, B \in \mathcal{P} \text{ için } d(A, B) = d(B, A), \quad (2.3)$$

$$M4: Her A, B, C \in \mathcal{P} \text{ için } d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B). \quad (2.4)$$

Tanım 2.1.4 $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ incidence geometrisinin bir doğrusu olsun. $d, \mathcal{G}$ üzerinde uzaklık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathcal{L}$ için bir *cetveldir* denir:

i) f fonksiyonu bire-bir ve örtendir.

ii) $\mathcal{L}$ üzerindeki her $\mathcal{P}, Q$ nokta çifti için

$$|f(P) - f(Q)| = d(P, Q) \quad (2.5)$$

dir. Bu denkleme *cetvel denklemi* denir.

Tanım 2.1.5 $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ incidence geometrisi d uzaklık fonksiyonuyla birlikte $\forall l \in \mathcal{L}$ doğrusu için bir *cetvele* sahip ise, *cetvel postülatını* sağlıyor denir. Bu durumda $\mathcal{M} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I, d)$ ye bir *metrik geometri* denir.

Neden metrik geometride çalışıyoruz? $\mathcal{L}$ deki l doğrusuna ilişkin soruları f cetvelini kullanarak, $\mathbb{R}$ ye dönüşüm yaparak cevaplandırabiliriz. Bu düzlemin elemanları $\mathbb{R}$ de “*arada olma*” gibi kavramlar kullanılarak $\mathcal{L}$ ye transfer edilebilir. Bu da metrik yaklaşımın bize sağladığı kolaylıktır.

$\mathcal{M} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I, d)$ nin metrik geometri olduğunu göstermek için her bir $l \in \mathcal{L}$ için bir $f: l \rightarrow \mathbb{R}$, f bire-bir ve örten fonksiyonunu bulmalıyız.

Tanım 2.1.6 (Noktanın doğruya uzaklığı) Verilen bir P noktası ile verilen bir l doğrusunun bu noktaya en yakın noktası arasındaki uzaklığa *bu noktanın bu doğruya uzaklığı* denir ve

$$d(P, l) = \min_{x \in l} d(P, X) \quad (2.6)$$

şeklinde yazılır.

2.2 Öklid Uzayında Doğru Ve Düzlem

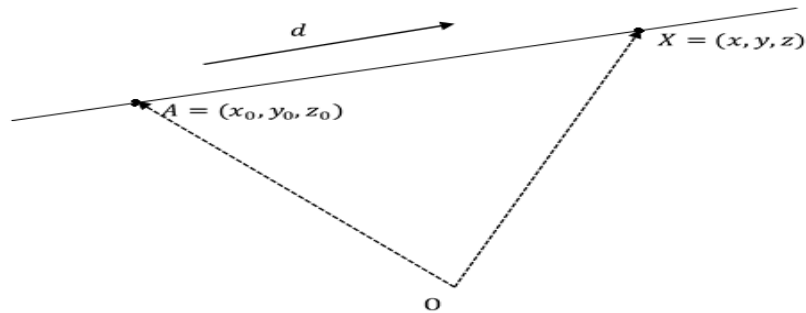
Bu bölümdeki bilgiler (Kaya, 2002) denözetlenerek verilmiştir.

2.2.1 Doğru

Bilindiği gibi geometri de *doğrudan*ilince “*düz bir çizgi*” akla gelir. Uzayda bir doğru, konumunu belirten bazı özellikleri yardımıyla analitik olarak ifade edilebilir. Bazı özel hallerde doğru denkleminin nasıl olduğu ve bir doğrunun hangi farklı temsillerinin (denklemlerinin) bulunduğu aşağıda anlatılmaktadır.

2.2.1.1 Verilen bir noktadan geçen ve verilen bir doğrultuya paralel olan doğrunun denklemi

Verilen bir $A = (x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve verilen bir $d = (p, q, r)$ vektörüne paralel olan doğru üzerindeki değişken $X = (x, y, z)$ noktasını düşünelim. X noktası doğru üzerinde yer değiştirirken daima $AX \parallel d$ kalır.



Şekil 2.1. A noktasından geçen, d vektörüne paralel doğru.

Bu da bir parametre $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $AX = \lambda d$ demektir. Böylece OA ve OX sırayla A ve X noktalarının yer vektörleri olmak üzere

$$OX = OA + \lambda d \quad (2.7)$$

yazılabilir ki bu A noktasından geçen d vektörüne paralel olan doğrunun *vektörel denklemidir*. O halde vektörel denklemi (2.7) olan doğru

$$\{X: OX = OA + \lambda d, \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (2.8)$$

nokta kümesinden ibarettir.

Bundan başka (2.7) ifadesi daha açık olarak

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 = (x_0 + \lambda p)e_1 + (y_0 + \lambda q)e_2 + (z_0 + \lambda r)e_3 \quad (2.9)$$

Biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases} \quad (2.10)$$

elde edilir. (2.10) sistemine (x_0, y_0, z_0) noktasından geçen ve (p, q, r) vektörüne paralel olan doğrunun *parametrik denklemi* denir. λ parametresi değiştikçe $X = (x, y, z)$ noktası bu doğruyu çizer.

(2.10) ifadesindeki denklemler λ ya göre çözülerek hemen

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}, \quad \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}, \quad \frac{x - x_0}{p} = \frac{z - z_0}{r}$$

denklemlerinden herhangi ikisine eşdeğerdir. Yani bir doğru gerçekte iki bağımsız denklemle temsil edilir. Bu nedenle doğru denklemi deyimi yerine *doğru denklemleri* deyimini kullanmak daha anlamlıdır, ancak biz yine de çoğunlukla birinci deyimi kullanacağız.

Özel olarak doğrultu ve vektörün p, q, r koordinatlarından bazıları sıfır olabilir. Örneğin $p = 0$ ise doğrunun standart denklemini

$$x - x_0 = 0, \quad \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} \quad (2.10)$$

biçiminde, $r = 0$ ise

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}, \quad z - z_0 = 0 \quad (2.11)$$

biçiminde, $q = r = 0$ ise

$$y - y_0 = 0, \quad z - z_0 = 0 \quad (2.12)$$

biçiminde v.b. yazmak matematiksel açıdan daha anlamlı olur.

Doğru denkleminin bulunmasında vektör kullanılmasına karşın bu vektörün yalnızca doğrultusu önemlidir, vektörün yönü doğru denklemini etkilemez. Çünkü, bir doğru $d = (p, q, r)$ vektörüne paralelse, d ye paralel olan her vektöre de paraleldir. Yanık $\in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere her $kd = (kp, kq, kr)$ vektörü doğrunun doğrultu vektörü olarak alınabilir. Bu nedenle p, q, r ye söz konusu doğrunun *doğrultu parametreleri* denir.

2.2.1.2 Verilen iki noktadan geçen doğrunun denklemi

Uzayda verilen herhangi $A = (x_0, y_0, z_0)$ ve $B = (x_1, y_1, z_1)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulmak için doğrultu vektörü olarak

$$AB = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \quad (2.13)$$

vektörü alınabilir. Dolayısıyla bu halde doğrunun vektörel denklemi

$$OX = OA + \lambda AB \quad (2.14)$$

ve standart denklemi

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} = \lambda \quad (2.15)$$

biçimindedir.

2.2.1.3 İki doğrunun dik veya paralel durumlu olma koşulları

Uzayda herhangi iki doğru, birbirlerine aykırı konumda olsalar bile dik olabilirler.

Dolayısıyla herhangi iki

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} = \lambda \quad (2.16)$$

ve

$$\frac{x - x'_0}{p'} = \frac{y - y'_0}{q'} = \frac{z - z'_0}{r'} = \mu \quad (2.17)$$

doğrularının dik durumlu olması $d = (p, q, r)$ ve $d' = (p', q', r')$ doğrultu vektörlerinin birbirlerine dik olmaları yani skaler çarpımlarının sıfır olmasına eşdeğerdir. Dolayısıyla bu doğruların birbirlerine dik olması için

$$pp' + qq' + rr' = 0 \quad (2.18)$$

koşulu sağlanmalıdır.

Doğruların paralel olmaları için de d ve d' nin paralel olması gerektiğinden

$$dx d' = 0 \quad (2.19)$$

ya da aynı şey demek olan

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} \quad (2.20)$$

sağlanmalıdır.

2.2.1.4 Verilen bir noktadan geçen ve verilen doğrultuya dik olan doğrunun denklemi

Verilen $A = (x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve hem $a = (a_1, a_2, a_3)$ hem de $b = (b_1, b_2, b_3)$ vektörlerine dik konumda bulunan doğrunun doğrultu vektörü $a \times b$

doğrultusunda olur. Dolayısıyla $d = a \times b = (p, q, r)$ alınırsa geriye bir noktası ve doğrultusu bilinen doğrunun denklemini yazmak kalır

2.2.2 Düzlem

Düzlem denilince “üzerinde hiç girinti çıkıntı olmayan sonsuza kadar uzanan ve derinliği bulunmayan bir satır” kastedilir. Geometrik olarak bu, bir doğru düzlem içinde hareket ettirildiğinde doğrunun her noktasının düzleme değmesi demektir. Düzlem denklemi bulunurken genellikle bu özellikten yararlanılır. Şimdi çeşitli elemanları verilen düzlem denkleminin nasıl bulunacağını görelim.

2.2.2.1 Verilen bir noktadan geçen ve verilen bir doğrultuya dik olan düzlemin denklemi

Verilen bir $n = (A, B, C)$ vektörüne dik olan düzlem üzerinde değişken bir $X = (x, y, z)$ noktası alalım (şekil 2.2). n vektörü düzleme dik olduğundan bu düzlem içindeki her $N_0X = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ vektörüne dik kalır. Yani

$$n \perp N_0X \Rightarrow n \cdot N_0X = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (2.21)$$

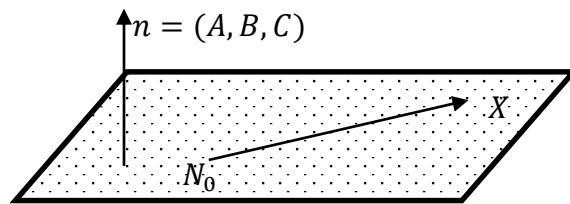
olur. Son denklemde $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ denirse düzlemin denklemi olarak

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2.22)$$

lineer ifadesi bulunur. Karşıt olarak bu ispat tersten ele alınır ve değerlendirilirse her $Ax + By + Cz + D = 0$ lineer denkleminin bir düzlem gösterdiği sonucuna varılır. O halde düzlem gerçel uzayın

$$\{(x, y, z): Ax + By + Cz + D = 0, \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

biçiminde bir altkümesidir.



Şekil 2.2. n vektörüne dik olan geçen, ve X noktasından geçen doğru.

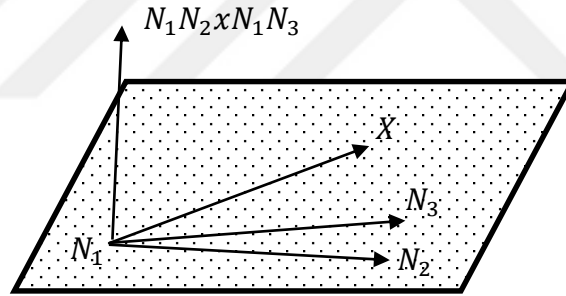
Düzlem denkleminin ilk üç katsayısını koordinat kabul eden $n = (A, B, C)$ vektörüne düzlemin *normal vektörü* denir.

2.2.2.2 Verilen üç noktadan geçen düzlem denklemi

Verilen noktalar $N_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $N_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $N_3 = (x_3, y_3, z_3)$ olsun. Bu noktalar düzlem üzerinde olduğundan N_1N_2 ve N_1N_3 vektörleri düzlem içinde bulunurlar ve $N_1N_2 \times N_1N_3$ vektörü bu iki vektöre dik olduğundan düzleme de diktir. Yani düzlemin normal vektörü olarak $n = N_1N_2 \times N_1N_3$ alınabilir. Dolayısıyla $X = (x, y, z)$ düzlem üzerinde değişken nokta olmak üzere düzlemin denklemi $N_1X \cdot (N_1N_2 \times N_1N_3) = 0$ ifadesinden hesaplanır. Bu ifade $(N_1X, N_1N_2, N_1N_3) = 0$ karma çarpımına eşdeğer olduğundan istenen düzlemin determinant formunda olan

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.23)$$

denklemi bulunur.



Şekil 2.3. N_1, N_2, N_3 noktasından geçen doğru.

2.2.2.3 Verilen bir noktadan geçen ve verilen iki farklı doğrultuya paralel olan düzlemin denklemi

Verilen farklı doğrultular $d = (p, q, r)$ ve $d' = (p', q', r')$ vektörleri ile belli olsun. Bu doğrultular aranan düzleme paralel olduklarından $d \times d'$ vektörü düzleme dik olmak zorundadır. Dolayısıyla düzlemin normali olarak yine $n = d \times d'$ alınabilir. Düzlemin $N_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçtiği de göz önüne alınırsa daha öncekilere benzer olarak düzlemin denklemi $N_0X \cdot n = 0$ koşuluna eşdeğer olan

$$(N_0X, d, d') = 0 \quad (2.24)$$

veya

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = 0 \quad (2.25)$$

ifadeleri ile bellidir.

Not: $d \parallel d'$ ise bu formül geçerli(yeterli) değildir.

2.2.2.4 Düzlemin eksenlerden ayırdığı parçalar cinsinden denklemi

Başlangıç noktasından geçmeyen ve denklemi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2.26)$$

olan herhangi bir düzlem için $D \neq 0$ dır. Dolayısıyla bu denklem

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1 \quad (2.27)$$

biçiminde yazılabilir. Burada,

$$-\frac{A}{D} = \frac{1}{a}, \quad -\frac{B}{D} = \frac{1}{b}, \quad -\frac{C}{D} = \frac{1}{c} \quad (2.28)$$

olarak tanımlanırsa düzlemin denklemi

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = 1 \quad (2.29)$$

şeklini alır. Dikkat edilirse bu son denklemde

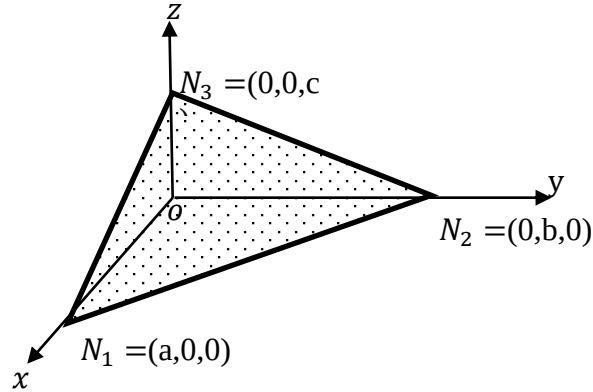
$$y = 0, z = 0 \text{ için } |ON_1| = a = x \quad (2.30)$$

$$x = 0, z = 0 \text{ için } |ON_2| = b = y \quad (2.31)$$

$$x = 0, y = 0 \text{ için } |ON_3| = c = z \quad (2.32)$$

bulunur.

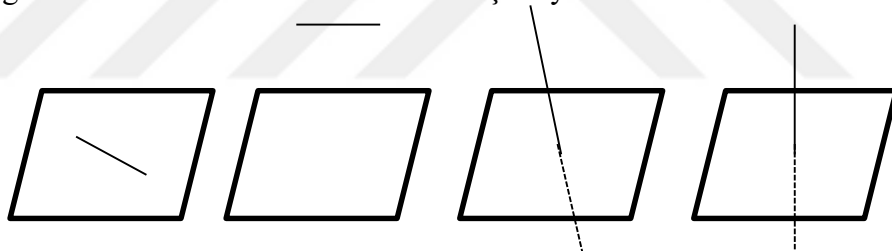
Yani a, b, c bu düzlemin eksenlerden ayırdığı parçalara karşılık gelir. Bu formda verilen bir düzlem kolayca resmedilebilir.



Şekil 2.4. Köşeleri N_1, N_2, N_3 eksenler üzerinde olan düzlem parçası.

2.2.3 Bir doğru ve bir düzlemin birbirlerine göre konumu ve doğru ve bir düzlemin kesişme noktasının bulunması

Uzayda bir doğru ve bir düzlem verildiğinde, doğru ya düzlemin içinde bulunur, ya düzleme paralel konumda olur yahut da düzlemi bir tek noktada keser. Şimdi (şekil 2.5) de görülen bu durumları analitik olarak açıklayalım.



Şekil 2.5. Bir doğru ve düzlemin uzayda birbirine göre konumu.

Denklemleri

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2.33)$$

olan düzlemle denklemi

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} = \lambda \quad (2.34)$$

olan doğrunun ortak noktalarını araştıralım. Burada doğru denklemini

$$x = x_0 + \lambda p, \quad y = y_0 + \lambda q, \quad z = z_0 + \lambda r \quad (2.35)$$

şeklinde parametrik olarak ifade edelim. Herhangi bir kesişme noktasının koordinatları düzlem denklemini sağlayacağından,

$$A(x_0 + \lambda p) + B(y_0 + \lambda q) + C(z_0 + \lambda r) + D = 0 \quad (2.36)$$

olur. Bu ifade λ ya göre çözülerek

$$\lambda = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Ap + Bq + Cr} \quad (2.37)$$

bulunur. Burada

- i. $Ap + Bq + Cr \neq 0$ ise, yani düzlemin normal vektörü doğrunun doğrultu vektörüne dik değilse, (2.37)denkleminde λ bir tek şekilde belirtilir. Bu da doğrunun parametrik denklemi vasıtasıyla bulunabilecek bir tek kesişme noktasının bulunduğunu gösterir. (özel olarak $\frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{C}{r}$ ise doğru düzlemi dik keser.)
- ii. $Ap + Bq + Cr = 0$ ve $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ ise (yani düzlemin normal vektörü doğrunun doğrultu vektörüne dik ama (x_0, y_0, z_0) noktası düzlemde değilse) doğru düzleme paraleldir.
- iii. $Ap + Bq + Cr = 0$ ve $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ ise (yani düzlemin normal vektörü doğrunun doğrultu vektörüne dik ve (x_0, y_0, z_0) noktası düzlemde ise λ ne olursa olsun (2.36)geçerli olacağından doğru düzlemin içindedir.

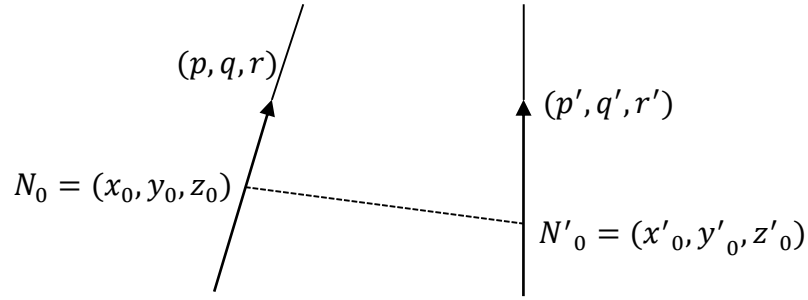
2.2.4 Uzayda farklı iki doğrunun birbirlerine göre konumu ve kesişme Noktasının bulunması

Uzayda iki doğru kesişebileceği gibi aykırı ya da paralel konumda bulunabilir. Şimdi doğrultu vektörleri sırayla $d = (p, q, r)$, $d' = (p', q', r')$ olan ve $N_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $N'_0 = (x'_0, y'_0, z'_0)$ noktalarından geçen

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} = \lambda \quad (2.38)$$

$$\frac{x - x'_0}{p'} = \frac{y - y'_0}{q'} = \frac{z - z'_0}{r'} = \mu \quad (2.39)$$

Doğrularını göz önüne alalım. d, d' ve $N_0N'_0$ vektörlerinin durumlarına göre şu haller mümkündür;



Şekil 2.6. Uzayda iki doğrunun birbirine göre konumu.

- i. $(N_0N'_0, d, d') \neq 0$ ise yani

$$\begin{vmatrix} x'_0 - x_0 & y'_0 - y_0 & z'_0 - z_0 \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.40)$$

ise bu doğrular aynı bir düzlemde olmayacakları için aykırı doğrular olup ortak noktaları yoktur.

- ii. $(N_0N'_0, d, d') = 0$ ama $d \parallel d'$ ise $\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}$ ise bu doğrular aynı düzlemde olmalarına karşın paralel olup yine ortak noktaları yoktur.
- iii. $(N_0N'_0, d, d') = 0$ ve $d \nparallel d'$ ise doğrular aynı düzlemde bulunur ve kesişirler. Kesişme noktasını bulmak için doğruların

$$x = x_0 + \lambda p \quad x = x'_0 + \mu p'$$

$$y = y_0 + \lambda q \quad \text{ve} \quad y = y'_0 + \mu q'$$

$$z = z_0 + \lambda r \quad z = z'_0 + \mu r'$$

Parametrik denklemlerinin karşılıklı olarak eşitlenmesiyle bulunan

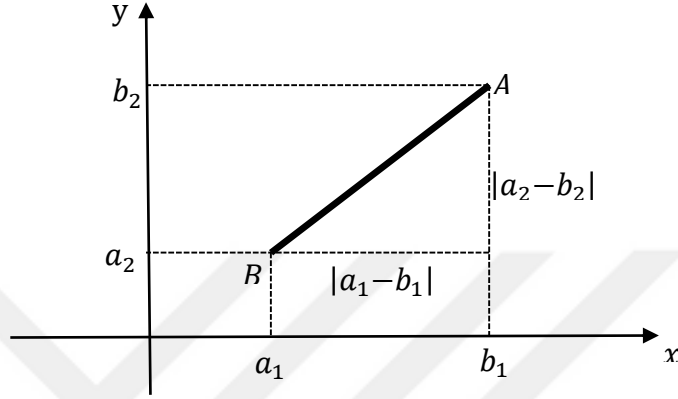
$$\begin{cases} x_0 + \lambda p = x'_0 + \mu p' \\ y_0 + \lambda q = y'_0 + \mu q' \\ z_0 + \lambda r = z'_0 + \mu r' \end{cases} \quad (2.41)$$

lineer denklem sistemine uyan λ ve μ değerlerini bulmak gerekir. Bulunan λ (veya μ) kesişme noktasını belirlemeye yeter.

3. MAKSİMUM UZAKLIĞI VE MAKSİMUM DÜZLEM

Bu bölümde maksimum düzlem geometrisi ile ilgili bilgiler (Salihova, 2006) dan özetlenerek verilmiştir.

Tanım 3.1 Öklid düzleminde alınan $A = (a_1, a_2)$ ve $B = (b_1, b_2)$ noktaları arasındaki Öklid uzaklığı $d_E(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ biçimindedir.

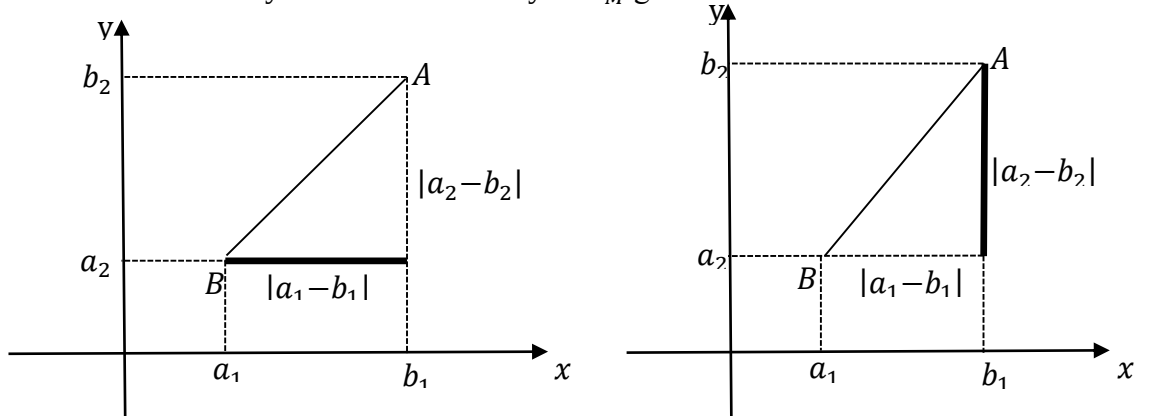


Şekil 3.1. A ve B noktaları arasında öklid uzaklığı.

Tanım 3.2 $d_M: \mathbb{R}_M^2 \times \mathbb{R}_M^2 \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere $A = (a_1, a_2)$ ve $B = (b_1, b_2)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d_M((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanırsa, bu fonksiyona $\mathbb{R}_M^2$ de *Maksimum Uzaklık Fonksiyonu* ve bu uzaklıkla donatılmış düzlemede *Maksimum Düzlemi* denir. Maksimum düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Dolayısıyla, üçgenler de aynıdır ve açılar da aynı yolla ölçülür. Bu çalışmada *Maksimum düzlemi* yerine *M-düzlemi* veya $\mathbb{R}_M^2$ gösterimi kullanılacaktır.



Şekil 3.2. A ve B noktaları arasında maksimum uzaklığı.

Önerme 3.1 d_M uzaklık fonksiyonu metriktir.

İspat: $A, B, C \in \mathbb{R}^2_M$ ve $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3)$ olsun.

1. $d_M(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ biçiminde tanımlı olduğundan maksimum ve mutlak değer fonksiyonlarının tanımından $d_M(A, B) \geq 0$ olduğu açıktır.

2. $d_M(A, B) = 0$ olsun. $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$ dır.

Bu durumda $|x_1 - x_2| = 0, |y_1 - y_2| = 0$ dolayısıyla,

$x_1 = x_2, y_1 = y_2$ olur. Buradan $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ve sonuç olarak $A = B$ olur.

$A = B$ olsun. Bu durumda $d_M(A, A) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$ olur.

Yani, $d_M(A, B) = 0$ dır.

3. $d_M(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$
 $= \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} = d_M(B, A)$ (3.2)

dir.

4. $d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ olduğunu gösterelim.

$$d_M(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$d_M(A, C) = \max\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\}$$

$$d_M(C, B) = \max\{|x_3 - x_2|, |y_3 - y_2|\}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= \max\{|x_1 - x_3 + x_3 - x_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|\} \\ &\leq \max\{|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

olur.

$$d_M(A, B) = \max\{|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|\} \quad (3.4)$$

alalım.

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B) \quad (3.5)$$

eşitsizliğin doğruluğunu ispatlamalıyız. İspat için aşağıdaki durumları inceleyelim.

(i) $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ ise

$$d_M(A, B) \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| = d_M(A, C) + d_M(C, B) \quad (3.6)$$

olur.

(ii) $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ ise

$$d_M(A, B) \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| = d_M(A, C) + d_M(C, B) \quad (3.7)$$

olur.

(iii) $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ (3.8)

ise iki durum söz konusudur.

1.Durum: Eğer $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ ise

$$d_M(A, B) = |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \quad (3.9)$$

dir.

Bu ifadede $|x_3 - x_2|$ yerine $|y_3 - y_2|$ yazarak $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ olduğundan

$$d_M(A, B) \leq |x_1 - x_3| + |y_3 - y_2| = d_M(A, C) + d_M(C, B) \quad (3.10)$$

elde edilir.

2.Durum: Eğer $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ ise

$$d_M(A, B) = |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \quad (3.11)$$

dir. $|y_1 - y_3|$ yerine $|x_1 - x_3|$ yazarsak $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ olduğundan

$$d_M(A, B) \leq |x_1 - x_3| + |y_3 - y_2| = d_M(A, C) + d_M(C, B) \quad (3.12)$$

olur. Her iki durumda da verilen eşitsizlik sağlanıyor.

(iv) $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ ise aşağıdaki iki durum söz konusudur.

1.Durum: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$

2.Durum: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$

Bu iki durum için (iii) dekinе benzer olarak

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B) \quad (3.13)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilebilir. Sonuç olarak tüm durumlarda

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B) \quad (3.14)$$

olduğu gösterilmiş oldu.

Yardımcı Teorem 3.1 Bir dik üçgenin hipotenüsü üzerinde bulunan ve her iki dik kenara eşit uzaklıkta olan tek bir nokta vardır. Üstelik, bu uzaklık u , dik kenarların uzaklıkları a ve b ise

$$u = ab/(a + b) \quad (3.15)$$

dir.

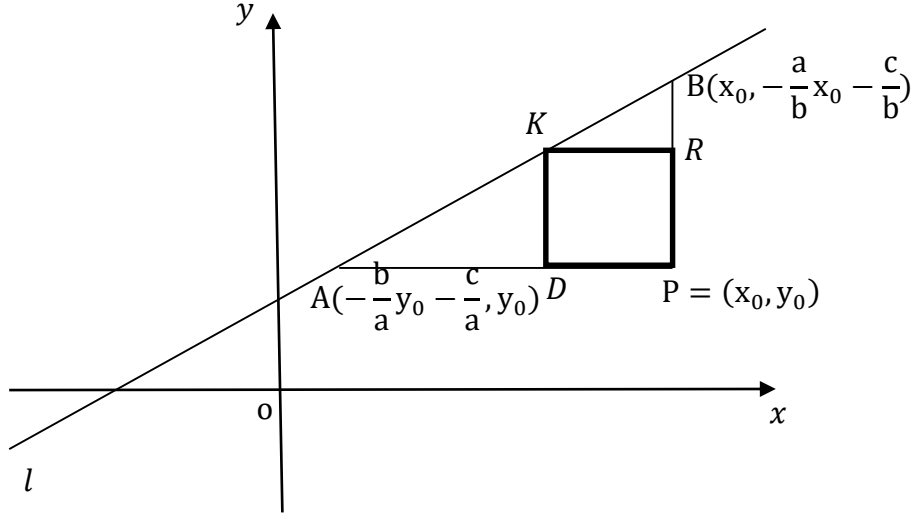
Teorem 3.1 $\mathbb{R}^2_M$ de $P = (x_0, y_0)$ noktasının $\ell \dots ax + by + c = 0$ doğrusuna olan d_M uzaklığı şöyledir.

$$d_M(P, \ell) = \frac{|ax + by + c|}{|a| + |b|} \quad (3.16)$$

İspat: Bir noktanın bir doğruya uzaklığı demek, bu nokta ile doğrunun bu noktaya en yakın noktası arasındaki uzaklık demektir. O halde önce böyle bir noktanın varlığını göstermeliyiz. Yardımcı teorem 3.1 e göre böyle bir nokta vardır. Bu durumda ispata geçebiliriz. $\ell \dots ax + by + c = 0$ doğrusunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$ dir. Verilen nokta ve doğrunun konumuna göre 4 durum söz konusu olabilir:

1. Durum: Doğrunun eğimi $m = -a/b$, $a > 0$ ve $b < 0$ (a ile b farklı işaretli) ve $P = (x_0, y_0)$ noktası ℓ doğrusunun alt bölgesinde olsun

(Şekil 3.3). $A(-\frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a}, y_0)$ ve $B(x_0, -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b})$ olmak üzere doğru üzerinde iki nokta alalım.



Şekil 3.3. Noktanın doğruya uzaklığı.

$$|AP| = (x_0 + \frac{b}{a}y_0 + \frac{c}{a}), |PB| = (-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y_0) \text{ dir.}$$

$d_M(P, K) = |DP| = |PR| = |KD| = u$ olsun. $d_M(P, l) = u$ olduğundan u nun değeri

$$u = |AP||PB|/(|AP| + |PB|) \quad (3.17)$$

ve $|AP| = (x_0 + \frac{b}{a}y_0 + \frac{c}{a})$, $|PB| = (-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y_0)$ olduğundan

$$u = \left(x_0 + \frac{b}{a}y_0 + \frac{c}{a}\right) \cdot \left(-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y_0\right) / \left(\left(x_0 + \frac{b}{a}y_0 + \frac{c}{a}\right) + \left(-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y_0\right)\right)$$

$$= \frac{1}{ab} (ax_0 + by_0 + c) \cdot (-ax_0 - by_0 - c) / \left(\frac{1}{a}(ax_0 + by_0 + c) - \frac{1}{b}(ax_0 + by_0 + c)\right)$$

$$= -\frac{1}{ab} (ax_0 + by_0 + c)^2 / \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) (ax_0 + by_0 + c) = (ax_0 + by_0 + c) / (a - b)$$

olur. Dolayısıyla,

$$u = \frac{ax_0 + by_0 + c}{a - b} \quad (3.18)$$

elde edilir.

2. Durum: $\ell \dots ax + by + c = 0$, $m = -a/b$, $a > 0$, $b < 0$ ve $P = (x_0, y_0)$ noktası ℓ doğrusunun üst bölgesinde olsun. A ve B noktaları (i) durumunda olduğu gibi doğru üzerindeki $A(-\frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a}, y_0)$ ve $B(x_0, -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b})$ koordinatlı noktalardır.

$|AP| = (-\frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a} - x_0)$, $|PB| = (y_0 + \frac{a}{b}x_0 + \frac{c}{b})$ olduğundan benzer şekilde

$$u = \frac{ax_0 + by_0 + c}{-a + b} \quad (3.19)$$

elde edilir.

3. Durum: $\ell \dots ax + by + c = 0$, $m = -a/b$, $a > 0$, $b > 0$ (a ile b aynı işaretli) ve $P = (x_0, y_0)$ noktası ℓ doğrusunun alt bölgesinde olsun.

$|AP| = (-\frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a} - x_0)$, $|PB| = (-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y_0)$ dir. Benzer şekilde

$$u = \frac{ax_0 + by_0 + c}{-a - b} \quad (3.20)$$

elde edilir.

4. Durum: $\ell \dots ax + by + c = 0$, $m = -a/b$, $a > 0$, $b > 0$ (a ile b aynı işaretli) ve $P = (x_0, y_0)$ noktası ℓ doğrusunun üst bölgesinde olsun.

$|AP| = (x_0 + \frac{a}{b}y_0 + \frac{c}{b})$, $|PB| = (y_0 + \frac{b}{a}x_0 + \frac{c}{a})$ olduğundan. Benzer şekilde

$$u = \frac{ax_0 + by_0 + c}{a + b} \quad (3.21)$$

elde edilir. Yukarda elde edilen (1), (2), (3), (4) durumlarını birleştirirsek,

$$u = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a| + |b|} \quad (3.22)$$

dir. Ayrıca

$$a = b \quad \text{iken} \quad d_M(P, l) = |ax_0 + ay_0 + c|/(2|a|)$$

$$a = 0 \quad \text{iken} \quad d_M(P, l) = |by_o + c|/|b|$$

$$b = 0 \quad \text{iken} \quad d_M(P, l) = |ax_o + c|/|a|$$

Tanım 3.3 $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), \mathbb{R}_M^2$ de iki nokta olsun. A dan B ye *minumum uzaklıktaki noktaların kümesi*

$$\{X \mid d_M(A, X) + d_M(X, B) = d_M(A, B)\} \quad (3.23)$$

olarak tanımlanır ve şeklinde gösterir.

A ve B noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = 1$ olsun. $m = 1$ iken $\overline{AB}$, doğru parçasına eşittir.

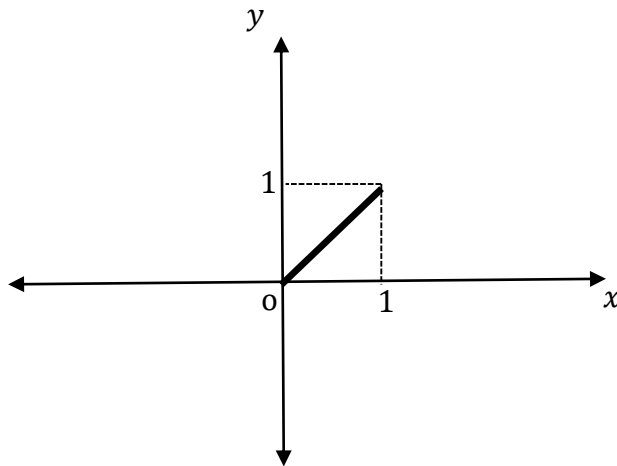
Bu tanım için birkaç örnek verelim;

Örnek 3.1 $A = (0,0)$ ve $B = (1,1)$ ele alalım,

$\max\{|x| + |y|\} + \max\{|x - 1| + |y - 1|\} = \max\{|1|, |1|\}$ denkleminin çözümü için aşağıdaki dört durum söz konusudur.

$$\begin{cases} |x| + |x - 1| = 1 \\ |x| + |y - 1| = 1 \\ |y| + |x - 1| = 1 \\ |y| + |y - 1| = 1 \end{cases}$$

Bu dört denklem çözüldüğünde



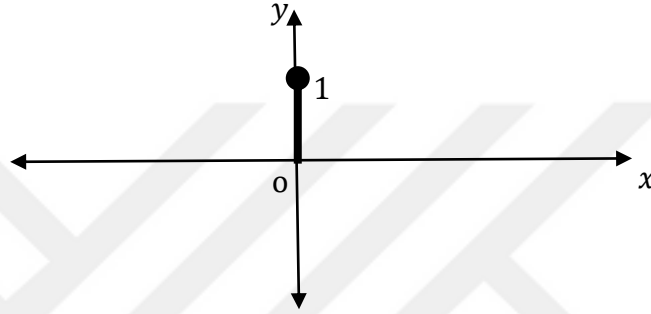
Şekil 3.4. A ve B noktalarına minumum uzaklıktaki noktaların kümesi grafiği.

Örnek 3.2 $A = (0,0)$ ve $B = (0,1)$ ele alalım,

$\max\{|x| + |y|\} + \max\{|x| + |y - 1|\} = \max\{|0|, |1|\} = 1$ denkleminin çözümü için aşağıdaki dört durum söz konusudur.

$$\begin{cases} |x| + |x| = 1 \\ |y| + |x| = 1 \\ |x| + |y - 1| = 1 \\ |y| + |y - 1| = 1 \end{cases}$$

Bu dört denklem çözüldüğünde



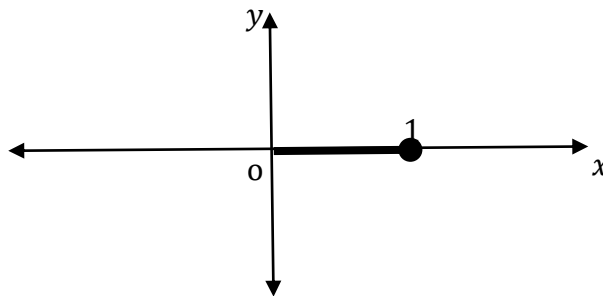
Şekil 3.5. A ve B noktalarına minimum uzaklıktaki noktaların kümesi grafiği.

Örnek 3.3 $A = (0,0)$ ve $B = (1,0)$ ele alalım,

$\max\{|x| + |y|\} + \max\{|x - 1| + |y|\} = \max\{|1|, |0|\} = 1$ denkleminin çözümü için aşağıdaki dört durum söz konusudur.

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ |y| + |y| = 1 \\ |x| + |x - 1| = 1 \\ |y| + |x - 1| = 1 \end{cases}$$

bu dört denklem çözüldüğünde



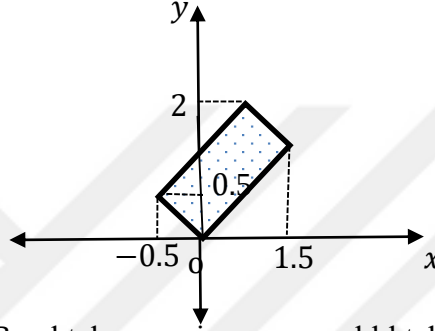
Şekil 3.6. A ve B noktalarına minimum uzaklıktaki noktaların kümesi grafiği.

Örnek 3.4 $A = (0,0)$ ve $B = (1,2)$ ele alalım,

$\max\{|x| + |y|\} + \max\{|x - 1| + |y - 2|\} = \max\{|1|, |2|\} = 2$ denkleminin çözümü için aşağıdaki dört durum söz konusudur.

$$\begin{cases} |x| + |x - 1| = 2 \\ |x| + |y - 2| = 2 \\ |y| + |x - 1| = 2 \\ |y| + |y - 2| = 2 \end{cases}$$

bu dört denklem çözüldüğünde



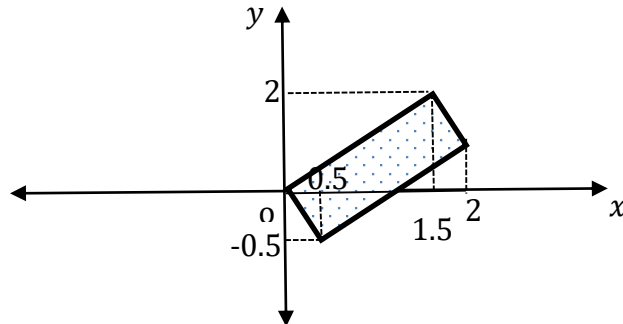
Şekil 3.7. A ve B noktalarına minimum uzaklıktaki noktaların kümesi grafiği.

Örnek 3.5 $A = (0,0)$ ve $B = (2,1)$ ele alalım,

$\max\{|x| + |y|\} + \max\{|x - 2| + |y - 1|\} = \max\{|2|, |1|\}$ denkleminin çözümü için aşağıdaki dört durum söz konusudur.

$$\begin{cases} |x| + |x - 2| = 2 \\ |x| + |y - 1| = 2 \\ |y| + |x - 2| = 2 \\ |y| + |y - 1| = 2 \end{cases}$$

bu dört denklem çözüldüğünde



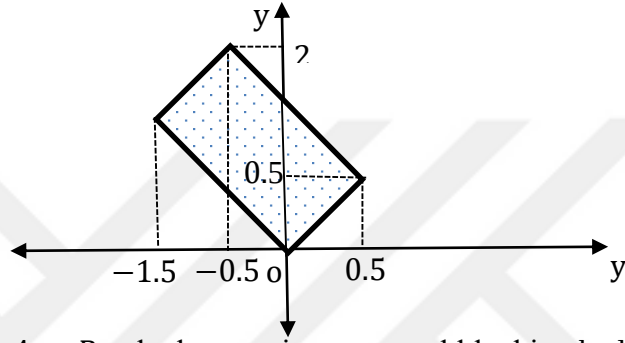
Şekil 3.8. A ve B noktalarına minimum uzaklıktaki noktaların kümesi grafiği.

Örnek 3.6 $A = (0,0)$ ve $B = (-1,2)$ ele alalım,

$\max\{|x| + |y|\} + \max\{|x + 1| + |y - 2|\} = \max\{|-1|, |2|\}$ denkleminin çözümü için aşağıdaki dört durum söz konusudur.

$$\begin{cases} |x| + |x + 1| = 2 \\ |x| + |y - 2| = 2 \\ |y| + |x + 1| = 2 \\ |y| + |y - 2| = 2 \end{cases}$$

bu dört denklem çözüldüğünde



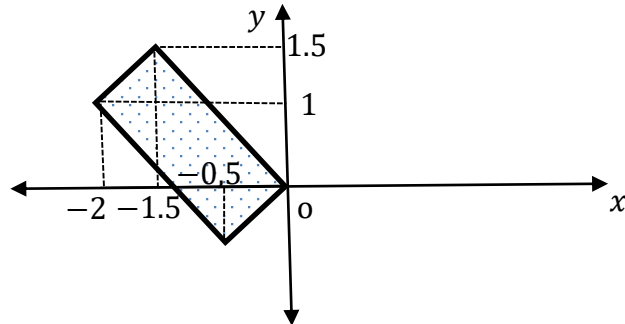
Şekil 3.9: A ve B noktalarına minimum uzaklıktaki noktaların kümesi grafiği.

Örnek 3.7 $A = (0,0)$ ve $B = (-2,1)$ ele alalım,

$\max\{|x| + |y|\} + \max\{|x + 2| + |y - 1|\} = \max\{|-2|, |1|\} = 2$ denkleminin çözümü için aşağıdaki dört durum söz konusudur.

$$\begin{cases} |x| + |x + 2| = 2 \\ |x| + |y - 1| = 2 \\ |y| + |x + 2| = 2 \\ |y| + |y - 1| = 2 \end{cases}$$

bu dört denklem çözüldüğünde



Şekil 3.10. A ve B noktalarına minimum uzaklıktaki noktaların kümesi grafiği.

4. MAKSİMUM UZAY GEOMETRİSİ

Bu bölümde öncelikle kartezyen uzayın d_M uzaklık fonksiyonuyla birlikte bir metrik geometri olduğu gösterilmiştir. Sonrasında bu geometride bir noktanın bir doğruya, bir noktanın bir düzleme olan uzaklık formülleri ile iki doğru arasındaki uzaklığın formülü araştırılmıştır.

4.1 Uzayda Maksimum Metriği

Tanım 4.1.1 $d_M: \mathbb{R}_M^3 \times \mathbb{R}_M^3 \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere $A = (x_1, y_1, z_1)$ ve $B = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d_M(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \quad (4.1)$$

biçiminde tanımlanırsa, bu fonksiyona $\mathbb{R}_M^3$ de *Maksimum uzaklık Fonksiyonu* ve bu donatılmış uzaya da *Maksimum Uzay* denir. Bu uzayın nokta ve doğruları öklidyen uzayın nokta ve doğruları ile aynıdır, açılar da aynı yolla ölçülür. Bu çalışmada Maksimum Uzay yerine M-uzayı veya $\mathbb{R}_M^3$ gösterimi kullanılacaktır.

Önerme 4.1.1 d_M uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İspat: $A, B, C \in \mathbb{R}_M^3$ ve $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3)$ olsun.

I. $d_M(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$ biçiminde tanımlı olduğundan maksimum ve mutlak değer fonksiyonlarının tanımından $d_M(A, B) \geq 0$ olduğu açıktır.

II. $d_M(A, B) = 0$ olsun. $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} = 0$ dır.

Bu durumda $|x_1 - x_2| = 0, |y_1 - y_2| = 0$ ve $|z_1 - z_2| = 0$, dolayısıyla,

$x_1 = x_2, y_1 = y_2$ ve $z_1 = z_2$ olur. Buradan $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$ ve sonuç olarak $A = B$ olur.

$A = B$ olsun. Bu durumda

$$d_M(A, A) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} = 0 \quad (4.2)$$

olur. Yani, $d_M(A, B) = 0$ dır.

III. $d_M(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$
 $= \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|\} = d_M(B, A)$ (4.3)

dir.

IV. $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3)$ olsun.

$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ olduğunu gösterelim.

$$d_M(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \quad (4.4)$$

$$d_M(A, C) = \max\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|, |z_1 - z_3|\} \quad (4.5)$$

$$d_M(C, B) = \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|, |z_2 - z_3|\} \quad (4.6)$$

biçimindedir. Böylece yirmi yedi durum mümkündür.

i. $d_M(A, B) = |x_1 - x_2|, d_M(A, C) = |x_1 - x_3|$ ve $d_M(C, B) = |x_2 - x_3|$ olsun. Bu durumda $|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_2 - x_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$d_M(A, B) = |x_1 - x_2| = |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_2 - x_3| \quad (4.7)$$

olduğundan $d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

ii. $d_M(A, B) = |x_1 - x_2|, d_M(A, C) = |x_1 - x_3|$ ve $d_M(C, B) = |y_2 - y_3|$ olsun. Bu durumda $|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |x_1 - x_2| = |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3| \end{aligned} \quad (4.8)$$

biçimindedir, çünkü $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ dir. Böylece

$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

iii. $d_M(A, B) = |x_1 - x_2|, d_M(A, C) = |x_1 - x_3|$ ve $d_M(C, B) = |z_2 - z_3|$ olsun. Bu durumda $|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |z_2 - z_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |x_1 - x_2| = |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |z_2 - z_3| \end{aligned} \quad (4.9)$$

biçimindedir, çünkü $|z_2 - z_3| \geq |x_2 - x_3|$ dir. Böylece

$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

iv. $d_M(A, B) = |x_1 - x_2|$, $d_M(A, C) = |y_1 - y_3|$ ve $d_M(C, B) = |x_2 - x_3|$ olsun.

Bu durumda $|x_1 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |x_2 - x_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |x_1 - x_2| = |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |x_2 - x_3| \end{aligned} \quad (4.10)$$

biçimindedir, çünkü $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$ dir. Böylece

$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

v. $d_M(A, B) = |x_1 - x_2|$, $d_M(A, C) = |y_1 - y_3|$ ve $d_M(C, B) = |y_2 - y_3|$ olsun.

Bu durumda $|x_1 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_2 - y_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |x_1 - x_2| = |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_2 - y_3| \end{aligned} \quad (4.11)$$

biçimindedir, çünkü $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$ ve $|y_2 - y_3| \geq |x_2 - x_3|$ dir. Böylece

$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

vi. $d_M(A, B) = |x_1 - x_2|$, $d_M(A, C) = |y_1 - y_3|$ ve $d_M(C, B) = |z_2 - z_3|$ olsun.

Bu durumda $|x_1 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |z_2 - z_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |x_1 - x_2| = |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |z_2 - z_3| \end{aligned} \quad (4.12)$$

biçimindedir, çünkü $|y_1 - y_3| \geq |x_1 - x_3|$ ve $|z_2 - z_3| \geq |x_2 - x_3|$ dir. Böylece

$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

vii. $d_M(A, B) = |x_1 - x_2|$, $d_M(A, C) = |z_1 - z_3|$ ve $d_M(C, B) = |x_2 - x_3|$ olsun.

Bu durumda $|x_1 - x_2| \leq |z_1 - z_3| + |x_2 - x_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |x_1 - x_2| = |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |z_1 - z_3| + |x_2 - x_3| \end{aligned} \quad (4.13)$$

biçimindedir, çünkü $|z_1 - z_3| \geq |x_1 - x_3|$ dir. Böylece

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B) \text{ elde edilir.}$$

viii. $d_M(A, B) = |x_1 - x_2|$, $d_M(A, C) = |z_1 - z_3|$ ve $d_M(C, B) = |y_2 - y_3|$ olsun.

Bu durumda $|x_1 - x_2| \leq |z_1 - z_3| + |y_2 - y_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |x_1 - x_2| = |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |z_1 - z_3| + |y_2 - y_3| \end{aligned} \quad (4.14)$$

biçimindedir, çünkü $|z_1 - z_3| \geq |x_1 - x_3|$ ve $|y_2 - y_3| \geq |x_3 - x_2|$ dir. Böylece

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B) \text{ elde edilir.}$$

ix. $d_M(A, B) = |x_1 - x_2|$, $d_M(A, C) = |z_1 - z_3|$ ve $d_M(C, B) = |z_2 - z_3|$ olsun.

Bu durumda $|x_1 - x_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |x_1 - x_2| = |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_2 - z_3| \end{aligned} \quad (4.15)$$

biçimindedir, çünkü $|z_1 - z_3| \geq |x_1 - x_3|$ ve $|z_2 - z_3| \geq |x_3 - x_2|$ dir. Böylece

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B) \text{ elde edilir.}$$

x. $d_M(A, B) = |y_1 - y_2|$, $d_M(A, C) = |x_1 - x_3|$ ve $d_M(C, B) = |x_2 - x_3|$ olsun.

Bu durumda $|y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_2 - x_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |y_1 - y_2| = |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\ &\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_2 - x_3| \end{aligned} \quad (4.16)$$

biçimindedir, çünkü $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ ve $|x_2 - x_3| \geq |y_3 - y_2|$ dir. Böylece

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B) \text{ elde edilir.}$$

xi. $d_M(A, B) = |y_1 - y_2|$, $d_M(A, C) = |x_1 - x_3|$ ve $d_M(C, B) = |y_2 - y_3|$ olsun.

Bu durumda $|y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
d_M(A, B) &= |y_1 - y_2| = |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\
&\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3|
\end{aligned} \tag{4.17}$$

biçimindedir, çünkü $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ dir. Böylece

$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

xii. $d_M(A, B) = |y_1 - y_2|$, $d_M(A, C) = |x_1 - x_3|$ ve $d_M(C, B) = |z_2 - z_3|$ olsun.
Bu durumda $|y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_3| + |z_2 - z_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
d_M(A, B) &= |y_1 - y_2| = |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\
&\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \leq |x_1 - x_3| + |z_2 - z_3|
\end{aligned} \tag{4.18}$$

biçimindedir, çünkü $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ ve $|z_2 - z_3| \geq |y_3 - y_2|$ dir. Böylece

$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

xiii. $d_M(A, B) = |y_1 - y_2|$, $d_M(A, C) = |y_1 - y_3|$ ve $d_M(C, B) = |x_2 - x_3|$ olsun.
Bu durumda $|y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_3| + |x_2 - x_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
d_M(A, B) &= |y_1 - y_2| = |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\
&\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \leq |y_1 - y_3| + |x_2 - x_3|
\end{aligned} \tag{4.19}$$

biçimindedir, çünkü $|x_2 - x_3| \geq |y_3 - y_2|$ dir. Böylece

$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

xiv. $d_M(A, B) = |y_1 - y_2|$, $d_M(A, C) = |y_1 - y_3|$ ve $d_M(C, B) = |y_2 - y_3|$ olsun.
Bu durumda $|y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_2 - y_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
d_M(A, B) &= |y_1 - y_2| = |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\
&\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|
\end{aligned} \tag{4.20}$$

olduğundan $d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

xv. $d_M(A, B) = |y_1 - y_2|$, $d_M(A, C) = |y_1 - y_3|$ ve $d_M(C, B) = |z_2 - z_3|$ olsun.

Bu durumda $|y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_3| + |z_2 - z_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |y_1 - y_2| = |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\ &\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \leq |y_1 - y_3| + |z_2 - z_3| \end{aligned} \quad (4.21)$$

biçimindedir, çünkü $|z_2 - z_3| \geq |y_3 - y_2|$ dir. Böylece

$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

xvi. $d_M(A, B) = |y_1 - y_2|$, $d_M(A, C) = |z_1 - z_3|$ ve $d_M(C, B) = |x_2 - x_3|$ olsun.

Bu durumda $|y_1 - y_2| \leq |z_1 - z_3| + |x_2 - x_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |y_1 - y_2| = |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\ &\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \leq |z_1 - z_3| + |x_2 - x_3| \end{aligned} \quad (4.22)$$

biçimindedir, çünkü $|y_1 - y_3| \leq |z_1 - z_3|$ ve $|y_3 - y_2| \leq |x_2 - x_3|$ dir. Böylece

$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

xvii. $d_M(A, B) = |y_1 - y_2|$, $d_M(A, C) = |z_1 - z_3|$ ve $d_M(C, B) = |y_2 - y_3|$ olsun.

Bu durumda $|y_1 - y_2| \leq |z_1 - z_3| + |y_2 - y_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |y_1 - y_2| = |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\ &\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \leq |z_1 - z_3| + |y_2 - y_3| \end{aligned} \quad (4.23)$$

biçimindedir, çünkü $|y_1 - y_3| \leq |z_1 - z_3|$ dir. Böylece

$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

xviii. $d_M(A, B) = |y_1 - y_2|$, $d_M(A, C) = |z_1 - z_3|$ ve $d_M(C, B) = |z_2 - z_3|$ olsun.

Bu durumda $|y_1 - y_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |y_1 - y_2| = |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\ &\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_2 - z_3| \end{aligned} \quad (4.24)$$

biçimindedir, çünkü $|y_1 - y_3| \leq |z_1 - z_3|$ ve $|y_3 - y_2| \leq |z_2 - z_3|$ dir. Böylece

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B) \text{ elde edilir.}$$

xix. $d_M(A, B) = |z_1 - z_2|$, $d_M(A, C) = |x_1 - x_3|$ ve $d_M(C, B) = |x_2 - x_3|$ olsun.

Bu durumda $|z_1 - z_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_2 - x_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3 + z_3 - z_2| \\ &\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_2 - x_3| \end{aligned} \quad (4.25)$$

biçimindedir, çünkü $|z_1 - z_3| \leq |x_1 - x_3|$ ve $|z_2 - z_3| \leq |x_2 - x_3|$ dir. Böylece

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B) \text{ elde edilir.}$$

xx. $d_M(A, B) = |z_1 - z_2|$, $d_M(A, C) = |x_1 - x_3|$ ve $d_M(C, B) = |y_2 - y_3|$ olsun.

Bu durumda $|z_1 - z_2| \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3 + z_3 - z_2| \\ &\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \leq |x_1 - x_3| + |y_2 - y_3| \end{aligned} \quad (4.26)$$

biçimindedir, çünkü $|z_1 - z_3| \leq |x_1 - x_3|$ ve $|z_2 - z_3| \leq |y_2 - y_3|$ dir. Böylece

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B) \text{ elde edilir.}$$

xxi. $d_M(A, B) = |z_1 - z_2|$, $d_M(A, C) = |x_1 - x_3|$ ve $d_M(C, B) = |z_2 - z_3|$ olsun.

Bu durumda $|z_1 - z_2| \leq |x_1 - x_3| + |z_2 - z_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3 + z_3 - z_2| \\ &\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \leq |x_1 - x_3| + |z_2 - z_3| \end{aligned} \quad (4.27)$$

biçimindedir, çünkü $|z_1 - z_3| \leq |x_1 - x_3|$ dir. Böylece

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B) \text{ elde edilir.}$$

xxii. $d_M(A, B) = |z_1 - z_2|$, $d_M(A, C) = |y_1 - y_3|$ ve $d_M(C, B) = |x_2 - x_3|$ olsun.

Bu durumda $|z_1 - z_2| \leq |y_1 - y_3| + |x_2 - x_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
d_M(A, B) &= |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3 + z_3 - z_2| \\
&\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \leq |y_1 - y_3| + |x_2 - x_3|
\end{aligned} \tag{4.28}$$

biçimindedir, çünkü $|z_1 - z_3| \leq |y_1 - y_3|$ ve $|z_3 - z_2| \leq |x_2 - x_3|$ dir. Böylece

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B) \text{ elde edilir.}$$

xxiii. $d_M(A, B) = |z_1 - z_2|$, $d_M(A, C) = |y_1 - y_3|$ ve $d_M(C, B) = |y_2 - y_3|$ olsun.
Bu durumda $|z_1 - z_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_2 - y_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
d_M(A, B) &= |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3 + z_3 - z_2| \\
&\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_2 - y_3|
\end{aligned} \tag{4.29}$$

biçimindedir, çünkü $|z_1 - z_3| \leq |y_1 - y_3|$ ve $|z_3 - z_2| \leq |y_2 - y_3|$ dir. Böylece

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B) \text{ elde edilir.}$$

xxiv. $d_M(A, B) = |z_1 - z_2|$, $d_M(A, C) = |y_1 - y_3|$ ve $d_M(C, B) = |z_2 - z_3|$ olsun.
Bu durumda $|z_1 - z_2| \leq |y_1 - y_3| + |z_2 - z_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
d_M(A, B) &= |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3 + z_3 - z_2| \\
&\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \leq |y_1 - y_3| + |z_2 - z_3|
\end{aligned} \tag{4.30}$$

biçimindedir, çünkü $|z_1 - z_3| \leq |y_1 - y_3|$ dir. Böylece

$$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B) \text{ elde edilir.}$$

xxv. $d_M(A, B) = |z_1 - z_2|$, $d_M(A, C) = |z_1 - z_3|$ ve $d_M(C, B) = |x_2 - x_3|$ olsun.
Bu durumda $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |x_2 - x_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
d_M(A, B) &= |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3 + z_3 - z_2| \\
&\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |x_2 - x_3|
\end{aligned} \tag{4.31}$$

biçimindedir, çünkü $|z_3 - z_2| \leq |x_2 - x_3|$ dir. Böylece

$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

xxvi. $d_M(A, B) = |z_1 - z_2|, d_M(A, C) = |z_1 - z_3|$ ve $d_M(C, B) = |y_2 - y_3|$ olsun.

Bu durumda $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |y_2 - y_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3 + z_3 - z_2| \\ &\leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |y_2 - y_3| \end{aligned} \quad (4.32)$$

biçimindedir, çünkü $|z_3 - z_2| \leq |y_2 - y_3|$ dir. Böylece

$d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir.

xxvii. $d_M(A, B) = |z_1 - z_2|, d_M(A, C) = |z_1 - z_3|$ ve $d_M(C, B) = |z_2 - z_3|$ olsun.

Bu durumda $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_M(A, B) &= |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3 + z_3 - z_2| \\ &\leq |z_1 - z_3| + |z_2 - z_3| \end{aligned} \quad (4.33)$$

olduğundan, $d_M(A, B) \leq d_M(A, C) + d_M(C, B)$ elde edilir

Teorem 4.1.1 Kartezyen uzay d_M uzaklık fonksiyonuyla birlikte bir metrik geometridir.

4.2. Maksimum Uzayda Bazı Uzaklık Formülleri

4.2.1 Maksimum uzayda verilen bir noktanın bir doğruya uzaklığı

Teorem 4.2.1.1 Maksimum uzayda bir $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının $\frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r}$

biçimindeki bir ℓ doğrusuna uzaklığı $\alpha = |p(y_0 - b) - q(x_0 - a)|, \beta = |(z_0 - c) - r(x_0 - a)|, \gamma = |q(z_0 - c) - r(y_0 - b)|$

ve

$$\Delta = \begin{cases} \max\{|p + q|, |p - q|\}, & \alpha \geq \beta \text{ ve } \alpha \geq \gamma \\ \max\{|p + r|, |p - r|\}, & \beta \geq \alpha \text{ ve } \beta \geq \gamma \\ \max\{|q + r|, |q - r|\}, & \gamma \geq \alpha \text{ ve } \gamma \geq \beta \end{cases}$$

olmak üzere;

$$d_M(P_0, \ell) = \frac{\max\{\alpha, \beta, \gamma\}}{\Delta} \quad (4.34)$$

ya da;

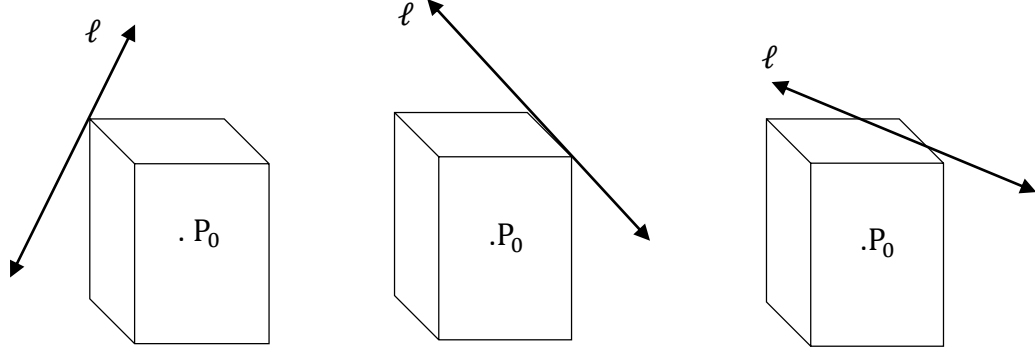
$$d_M(P_0, \ell) = \frac{\max\{|p(y_0 - b) - q(x_0 - a)|, |p(z_0 - c) - r(x_0 - a)|, |q(z_0 - c) - r(y_0 - b)|\}}{\Delta} \quad (4.35)$$

dır.

İspat: Öklidyen uzayda verilen bir $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının $\frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r}$ denklemini verilen bir ℓ doğrusuna olan uzaklığını bulmak için merkezi P_0 noktası olan küre göz önüne alınabilir. Kürenin yarıçapı büyütüldükçe küre yüzeyi verilen doğruya yaklaşacaktır ve kürenin doğruya ilk temas ettiği noktası ile P_0 noktası arasındaki uzaklık, P_0 noktasının ℓ doğrusuna uzaklığı kadar olacaktır. Öklidyen geometride bilinen küre ile düzlemin bu şekilde temas noktası tek bir tanedir ve bu noktada doğru küreye teğettir. Ancak maksimum uzayında küre ayrıtları eksenlere paralel olan bir küptür ve küpün ayrıt uzunluğu (çapı) büyütüldüğünde doğruya bir köşesinden, bir ayrıtından ya da bir yüzeyinden temas edecektir.

Küpün yarıçapını büyütürsek P_0 ile ℓ arasındaki maksimum uzaklığı, P_0 ve küp ile ℓ doğrusunun kesiştikleri nokta arasındaki maksimum uzaklığı ile aynı olacaktır. Merkezi $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktası ve küpün yarıçapını büyütürken küp ile ℓ doğrusunun kesiştiği andaki yarıçapının k olduğu küpü ele alalım. k değeri P_0 noktası ile ℓ doğrusu arasındaki maksimum uzaklığa eşittir. Bu anda küpün dört köşesi şu noktalar olacaktır. $P_1 = (x_0 + k, y_0 + k, z_0 + k)$, $P_2 = (x_0 - k, y_0 + k, z_0 + k)$, $P_3 = (x_0 + k, y_0 - k, z_0 - k)$, $P_4 = (x_0 - k, y_0 - k, z_0 + k)$

ℓ doğrusu ve küp, doğrultu vektörü $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ya da $(0,0,1)$ olan ve P_1 , P_2 , P_3 ya da P_4 noktasından geçen bir doğru üzerindeki bir ayrıtta kesişecektir. Böylece küpün on iki ayrıtı incelenmelidir.



Şekil 4.1. Maksimum uzayda kürenin ve doğrunun kesişme durumları.

1.Durum: P_1 noktası için $\ell_1(1,0,0)$ doğrultusuna sahip x-eksenine paralel, $\ell_2(0,1,0)$ doğrultusuna sahip y-eksenine paralel, $\ell_3(0,0,1)$ doğrultusuna sahip z -eksenine paralel ve P_1 noktasından geçer. Böylece araştırdığımız uzaklık k değeridir. Doğrular ve küpün ℓ doğrusuna değdiği andaki yarıçap uzunluğu k olsun. ℓ_1 doğrusunun denklemi

$$\frac{x - (x_0 + k)}{1} = \frac{y - (y_0 + k)}{0} = \frac{z - (z_0 + k)}{0} = \lambda \quad (4.36)$$

Biçiminde ya da parametrik olarak

$$x = \lambda + x_0 + k, y = y_0 + k, z = z_0 + k \quad (4.37)$$

biçimindedir. Benzer olarak ℓ doğrusunun parametrik denklemi

$$x = p\mu + a, y = q\mu + b, z = r\mu + c \quad (4.38)$$

biçimindedir. Bu denklemler birlikte çözülürse

$\lambda + x_0 + k = p\mu + a, y_0 + k = q\mu + b, z_0 + k = r\mu + c$ denklem sisteminden

$$\mu = \frac{y_0 - b - z_0 + c}{q - r} \quad (4.39)$$

bulunur. Böylece

$$k = \frac{r(y_0 - b) - q(z_0 - c)}{q - r} \quad (4.40)$$

elde edilir.

ℓ_2 doğrusunun denklemi

$$\frac{x - (x_0 + k)}{0} = \frac{y - (y_0 + k)}{1} = \frac{z - (z_0 + k)}{0} = \lambda \quad (4.41)$$

biçiminde ya da parametrik olarak

$$x = \lambda + x_0 + k, y = y_0 + k, z = z_0 + k \quad (4.42)$$

biçimindedir. Benzer olarak ℓ doğrusunun parametrik denklemi $x = p\mu + a, y = q\mu + b, z = r\mu + c$ biçimindedir. Bu denklemler birlikte çözülürse

$x_0 + k = p\mu + a, \lambda + y_0 + k = q\mu + b, z_0 + k = r\mu + c$ denklem sisteminden

$$\mu = \frac{x_0 - a - z_0 + c}{p - r} \quad (4.43)$$

bulunur. Böylece

$$k = \frac{r(x_0 - a) - p(z_0 - c)}{p - r} \quad (4.44)$$

elde edilir.

ℓ_3 doğrusunun denklemi

$$\frac{x - (x_0 + k)}{0} = \frac{y - (y_0 + k)}{0} = \frac{z - (z_0 + k)}{1} = \lambda \quad (4.45)$$

biçimide ya da parametrik olarak

$$x = \lambda + x_0 + k, y = y_0 + k, z = z_0 + k \quad (4.46)$$

biçimindedir. Benzer olarak ℓ doğrusunun parametrik denklemi $x = p\mu + a, y = q\mu + b, z = r\mu + c$ biçimindedir. Bu denklemler birlikte çözülürse

$x_0 + k = p\mu + a, y_0 + k = q\mu + b, \lambda + z_0 + k = r\mu + c$ denklem sisteminden

$$\mu = \frac{x_0 - a - y_0 + b}{p - q} \quad (4.47)$$

bulunur. Böylece

$$k = \frac{q(x_0 - a) - p(y_0 - b)}{p - q} \quad (4.48)$$

elde edilir.

2.Durum: $\ell_4(1,0,0)$ doğrultulu x-eksenine paralel, $\ell_5(0,1,0)$ doğrultulu y-eksenine paralel, $\ell_6(0,0,1)$ doğrultulu z-eksenine paralel ve P_2 noktasından geçen doğrular olsun. Küpün ℓ doğrusuna değdiği andaki yarıçap uzunluğu k olsun. ℓ_4 doğrusunun denklemi

$$\frac{x - (x_0 - k)}{1} = \frac{y - (y_0 + k)}{0} = \frac{z - (z_0 - k)}{0} = \lambda \quad (4.49)$$

biçiminde ya da parametrik olarak $x = \lambda + x_0 - k, y = y_0 + k, z = z_0 - k$ biçimindedir. Benzer olarak ℓ doğrusunun parametrik denklemi $x = p\mu + a, y = q\mu + b, z = r\mu + c$ biçimindedir. Bu denklemler birlikte çözümlerse

$p\mu + k - \lambda = x_0 - a, q\mu - k = y_0 - b, r\mu + k = z_0 - c$ denklem sisteminden

$$\mu = \frac{y_0 - b + z_0 - c}{q + r} \quad (4.50)$$

bulunur. Böylece

$$k = \frac{q(z_0 - c) - r(y_0 - b)}{q + r} \quad (4.51)$$

elde edilir.

ℓ_5 doğrusunun denklemi

$$\frac{x - (x_0 - k)}{0} = \frac{y - (y_0 + k)}{1} = \frac{z - (z_0 - k)}{0} = \lambda \quad (4.52)$$

biçiminde ya da parametrik olarak $x = x_0 - k, y = \lambda + y_0 + k, z = z_0 - k$ biçimindedir. Benzer olarak ℓ doğrusunun parametrik denklemi $x = p\mu + a, y = q\mu + b, z = r\mu + c$ biçimindedir. Bu denklemler birlikte çözülrse

$x_0 - k = p\mu + a, y_0 + k + \lambda = q\mu + b, z_0 - k = r\mu + c$ denklem sisteminden

$$\mu = \frac{x_0 - a - z_0 + c}{p - r} \quad (4.53)$$

bulunur. Böylece

$$k = \frac{p(z_0 - c) - r(x_0 - a)}{p - r} \quad (4.54)$$

elde edilir.

ℓ_6 doğrusunun denklemi

$$\frac{x - (x_0 - k)}{0} = \frac{y - (y_0 + k)}{0} = \frac{z - (z_0 - k)}{1} = \lambda \quad (4.55)$$

biçiminde ya da parametrik olarak $x = x_0 - k, y = y_0 + k, z = \lambda + z_0 - k$ biçimindedir. Benzer olarak ℓ doğrusunun parametrik denklemi $x = p\mu + a, y = q\mu + b, z = r\mu + c$ biçimindedir. Bu denklemler birlikte çözülrse

$x_0 - k = p\mu + a, y_0 + k = q\mu + b, z_0 - k + \lambda = r\mu + c$ denklem sisteminden

$$\mu = \frac{x_0 - a + y_0 - b}{p + q} \quad (4.56)$$

bulunur. Böylece

$$k = \frac{q(x_0 - a) - p(y_0 - b)}{p + q} \quad (4.57)$$

elde edilir.

3. Durum: $\ell_1(1,0,0)$ doğrultulu x-eksenine paralel, $\ell_2(0,1,0)$ doğrultulu y-eksenine paralel, $\ell_3(0,0,1)$ doğrultulu z-eksenine paralel ve P_3 noktasından geçen doğrular olsun. Küpün ℓ doğrusuna değdiği andaki yarıçap uzunluğu k olsun.

ℓ_7 doğrusunun denklemi

$$\frac{x - (x_0 + k)}{1} = \frac{y - (y_0 - k)}{0} = \frac{z - (z_0 - k)}{0} = \lambda \quad (4.58)$$

Biçimde ya da parametrik olarak $x = \lambda + x_0 + k, y = y_0 - k, z = z_0 - k$ biçimindedir. Benzer olarak ℓ doğrusunun parametrik denklemi $x = p\mu + a, y = q\mu + b, z = r\mu + c$ biçimindedir. Bu denklemler birlikte çözülürse

$\lambda + x_0 + k = p\mu + a, y_0 - k = q\mu + b, z_0 - k = r\mu + c$ denklem sisteminden

$$\mu = \frac{y_0 - b - z_0 + c}{q - r} \quad (4.59)$$

bulunur. Böylece

$$k = \frac{q(z_0 - c) - r(y_0 - b)}{q - r} \quad (4.60)$$

elde edilir.

ℓ_8 doğrusunun denklemi

$$\frac{x - (x_0 + k)}{0} = \frac{y - (y_0 - k)}{1} = \frac{z - (z_0 - k)}{0} = \lambda \quad (4.61)$$

Biçiminde ya da parametrik olarak $x = x_0 + k, y = \lambda + y_0 - k, z = z_0 - k$ biçimindedir. Benzer olarak ℓ doğrusunun parametrik denklemi $x = p\mu + a, y = q\mu + b, z = r\mu + c$ biçimindedir. Bu denklemler birlikte çözülürse

$x_0 + k = p\mu + a, y_0 - k + \lambda = q\mu + b, z_0 - k = r\mu + c$ denklem sisteminden

$$\mu = \frac{x_0 - a + z_0 - c}{p + r} \quad (4.62)$$

bulunur. Böylece

$$k = \frac{p(z_0 - c) - r(x_0 - a)}{p + r} \quad (4.63)$$

elde edilir.

ℓ_9 doğrusunun denklemi

$$\frac{x - (x_0 + k)}{0} = \frac{y - (y_0 - k)}{0} = \frac{z - (z_0 - k)}{1} = \lambda \quad (4.64)$$

Biçimde ya da parametrik olarak $x = x_0 + k$, $y = y_0 - k$, $z = \lambda + z_0 - k$ biçimindedir. Benzer olarak ℓ doğrusunun parametrik denklemi $x = p\mu + a$, $y = q\mu + b$, $z = r\mu + c$ biçimindedir. Bu denklemler birlikte çözümlerse

$x_0 + k = p\mu + a$, $y_0 - k = q\mu + b$, $z_0 - k + \lambda = r\mu + c$ denklem sisteminden

$$\mu = \frac{x_0 - a + y_0 - b}{p + q} \quad (4.65)$$

bulunur. Böylece

$$k = \frac{p(y_0 - b) - q(x_0 - a)}{p + q} \quad (4.66)$$

elde edilir.

4.Durum: $\ell_1(1,0,0)$ doğrultulux-eksenine paralel, $\ell_2(0,1,0)$ doğrultuluy-eksenine paralel, $\ell_3(0,0,1)$ doğrultulu z-eksenine paralel ve P_3 noktasından geçen doğrular olsun. Küpün ℓ doğrusuna değdiği andaki yarıçap uzunluğu k olsun.

ℓ_{10} doğrusunun denklemi

$$\frac{x - (x_0 - k)}{1} = \frac{y - (y_0 - k)}{0} = \frac{z - (z_0 + k)}{0} = \lambda \quad (4.67)$$

Biçiminde ya da parametrik olarak $x = \lambda + x_0 - k$, $y = y_0 - k$, $z = z_0 + k$ biçimindedir. Benzer olarak ℓ doğrusunun parametrik denklemi $x = p\mu + a$, $y = q\mu + b$, $z = r\mu + c$ biçimindedir. Bu denklemler birlikte çözülürse

$\lambda + x_0 - k = p\mu + a$, $y_0 - k = q\mu + b$, $z_0 + k = r\mu + c$ denklem sisteminden

$$\mu = \frac{y_0 - b + z_0 - c}{q + r} \quad (4.68)$$

bulunur. Böylece

$$k = \frac{r(y_0 - b) - q(z_0 - c)}{q + r} \quad (4.69)$$

elde edilir.

ℓ_{11} doğrusunun denklemi

$$\frac{x - (x_0 - k)}{0} = \frac{y - (y_0 - k)}{1} = \frac{z - (z_0 + k)}{0} = \lambda \quad (4.70)$$

Biçiminde ya da parametrik olarak $x = x_0 - k$, $y = \lambda + y_0 - k$, $z = z_0 + k$ biçimindedir. Benzer olarak ℓ doğrusunun parametrik denklemi $x = p\mu + a$, $y = q\mu + b$, $z = r\mu + c$ biçimindedir. Bu denklemler birlikte çözülürse

$x_0 - k = p\mu + a$, $y_0 - k + \lambda = q\mu + b$, $z_0 + k = r\mu + c$ denklem sisteminden

$$\mu = \frac{x_0 - a + z_0 - c}{p + r} \quad (4.71)$$

bulunur. Böylece

$$k = \frac{r(x_0 - a) - p(z_0 - c)}{p + r} \quad (4.72)$$

elde edilir.

ℓ_{12} doğrusunun denklemi

$$\frac{x - (x_0 - k)}{0} = \frac{y - (y_0 - k)}{0} = \frac{z - (z_0 + k)}{1} = \lambda \quad (4.73)$$

Biçiminde ya da parametrik olarak $x = x_0 - k$, $y = y_0 - k$, $z = \lambda + z_0 + k$ biçimindedir. Benzer olarak ℓ doğrusunun parametrik denklemi $x = p\mu + a$, $y = q\mu + b$, $z = r\mu + c$ biçimindedir. Bu denklemler birlikte çözülürse

$x_0 - k = p\mu + a$, $y_0 - k = q\mu + b$, $z_0 + k + \lambda = r\mu + c$ denklem sisteminden

$$\mu = \frac{x_0 - a - y_0 + b}{p - q} \quad (4.74)$$

bulunur. Böylece

$$k = \frac{p(y_0 - b) - q(x_0 - a)}{p - q} \quad (4.75)$$

elde edilir.

Böylece incelenen tüm durumlardan bulunan k değerlerinden istenilen formül elde edilir.

4.2.2 Maksimum uzayda verilen bir noktanın bir düzleme uzaklığı

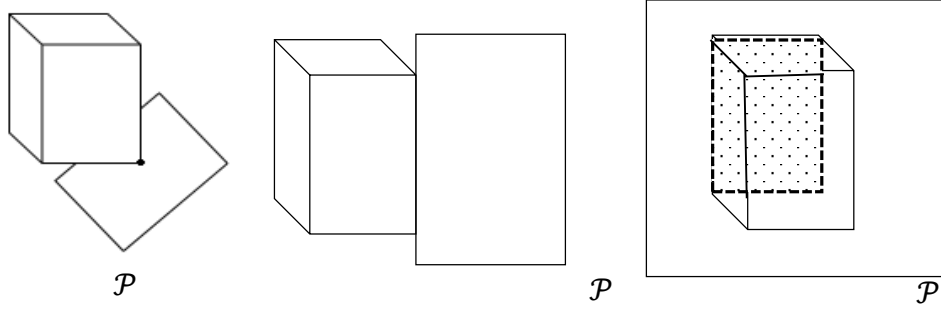
Teorem 4.2.2.1 Maksimum uzayda bir $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının, $\mathcal{P}: Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemine olan uzaklığı

$$d_M(P_0, \mathcal{P}) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\max\{|A + B + C|, |-A + B + C|, |A - B + C|, |A + B - C|\}} \quad (4.76)$$

biçimindedir.

İspat: Öklidyen uzayda $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının $\mathcal{P}: Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemine olan uzaklığını bulmak için merkezi P_0 noktası olan küre göz önüne alınabilir. Kürenin yarıçapı büyütüldükçe küre yüzeyi verilen düzleme yaklaşacaktır ve kürenin düzleme ilk temas ettiği noktası ile P_0 noktası arasındaki uzaklık, P_0 noktasının $\mathcal{P}$ düzlemine uzaklığı kadar olacaktır. Öklidyen geometride bilinen küre ile düzlemin bu şekilde temas noktası tek bir tanedir ve bu noktada düzlem küreye teğettir.

Ancak maksimum uzayında küre ayrıtları eksenlere paralel olan bir küptür ve küpün ayrıt uzunluğu (çapı) büyütüldüğünde düzleme bir noktada (köşesinde) veya bir ayrıtı ya da bir yüzü boyunca temas edecektir.



Şekil 4.2. Maksimum uzayda kürenin ve düzlemin kesişme durumları.

Tüm bu durumları inceleyebilmek için küpün sekiz köşesini göz önüne almalıyız çünkü her bir köşe aynı zamanda bir ayrıt ya da bir yüzün de üzerindedir. Dolayısıyla P_0 noktası ile bu köşeleri birleştiren doğrular ile düzlemin arakesit noktasını bulduğumuzda bu nokta ile P_0 noktası arasındaki uzaklık, P_0 noktasının $\mathcal{P}$ düzlemine olan uzaklığını verecektir ve bu andaki uzaklık küpün yarıçapına eşittir. Küpün bir köşe noktası ile P_0 noktasını birleştiren bir doğrunun doğrultusu $\Delta = \{(1,1,1), (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)\}$ kümesinin bir elemanıdır. Yani dört durum söz konusudur.

1. Durum: P_0 dan geçen l_1 doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (1,1,1)$ ise l_1 in standart denklemi

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{1} = t_1 \quad (4.77)$$

olup doğru üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatları,

$$x = x_0 + t_1, y = y_0 + t_1, z = z_0 + t_1$$

biçiminde yazılabilir. Araştırılan nokta hem doğru hem de düzlem üzerinde olduğundan bu nokta düzlem denklemini de sağlayacaktır. Böylece;

$$A(x_0 + t_1) + B(y_0 + t_1) + C(z_0 + t_1) + D = 0 \quad (4.78)$$

denkleminde

$$t_1 = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{-(A + B + C)} \quad (4.79)$$

elde edilir.

Buna göre t_1 yukarda elde edilen doğru olmak üzere l_1 doğrusu $\mathcal{P}$ düzlemini $P_1 = (x_0 + t_1, y_0 + t_1, z_0 + t_1)$ noktasından keser. O halde P_0 ile P_1 arasındaki Maksimum uzaklığı

$$\begin{aligned} d_M(P_0, P_1) &= \max\{|x_0 - x_0 - t_1|, |y_0 - y_0 - t_1|, |z_0 - z_0 - t_1|\} \\ &= \max\{|t_1|, |t_1|, |t_1|\} = |t_1| \\ &= \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{(A + B + C)} \right| \end{aligned} \quad (4.80)$$

olarak bulunur.

2. Durum: P_0 dan geçen l_2 doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (-1, 1, 1)$ ise l_2 nin standart denklemi

$$\frac{x - x_0}{-1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{1} = t_2 \quad (4.81)$$

olup doğru üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatları,

$$x = x_0 - t_2, y = y_0 + t_2, z = z_0 + t_2 \quad (4.82)$$

biçiminde yazılabilir. Araştırılan nokta hem doğru hem de düzlem üzerinde olduğundan bu nokta düzlem denklemini de sağlayacaktır. Böylece;

$$A(x_0 - t_2) + B(y_0 + t_2) + C(z_0 + t_2) + D = 0 \quad (4.83)$$

denkleminde

$$t_2 = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A - B - C} \quad (4.84)$$

elde edilir.

Buna göre t_2 yukarda elde edilen doğru olmak üzere l_2 doğrusu $\mathcal{P}$ düzlemini $P_2 = (x_0 - t_2, y_0 + t_2, z_0 + t_2)$ noktasından keser. O halde P_0 ile P_2 arasındaki Maksimum uzaklığı

$$\begin{aligned} d_M(P_0, P_2) &= \max\{|x_0 - x_0 + t_2|, |y_0 - y_0 - t_2|, |z_0 - z_0 - t_2|\} \\ &= \max\{|t_2|, |t_2|, |t_2|\} = |t_2| \\ &= \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{-A + B + C} \right| \end{aligned} \quad (4.85)$$

olarak bulunur.

3. Durum: P_0 dan geçen l_3 doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (1, -1, 1)$ ise l_3 ün standart denklemi

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{-1} = \frac{z - z_0}{1} = t_3 \quad (4.86)$$

olup doğru üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatları,

$$x = x_0 + t_3, y = y_0 - t_3, z = z_0 + t_3 \quad (4.87)$$

biçiminde yazılabilir. Araştırılan nokta hem doğru hem de düzlem üzerinde olduğundan bu nokta düzlem denklemini de sağlayacaktır. Böylece;

$$A(x_0 + t_3) + B(y_0 - t_3) + C(z_0 + t_3) + D = 0 \quad (4.88)$$

denkleminde

$$t_3 = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{-A + B - C} \quad (4.89)$$

Elde edilir.

Buna göre t_3 yukarda elde edilen doğru olmak üzere l_3 doğrusu $\mathcal{P}$ düzlemini $P_3 = (x_0 + t_3, y_0 - t_3, z_0 + t_3)$ noktasından keser. O halde P_0 ile P_3 arasındaki Maksimum uzaklığı

$$\begin{aligned}
d_M(P_0, P_3) &= \max\{|x_0 - x_0 - t_3|, |y_0 - y_0 + t_3|, |z_0 - z_0 - t_3|\} \\
&= \max\{|t_3|, |t_3|, |t_3|\} = |t_3| \\
&= \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A - B + C} \right|
\end{aligned} \tag{4.90}$$

olarak bulunur.

4. Durum: P_0 dan geçen l_4 doğrusunun doğrultusu $(p, q, r) = (1, 1, -1)$ ise l_4 ün standart denklemi

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{-1} = t_4 \tag{4.91}$$

olup doğru üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatları,

$$x = x_0 + t_4, y = y_0 + t_4, z = z_0 - t_4 \tag{4.92}$$

biçiminde yazılabilir. Araştırılan nokta hem doğru hem de düzlem üzerinde olduğundan bu nokta düzlem denklemini de sağlayacaktır. Böylece;

$$A(x_0 + t_4) + B(y_0 + t_4) + C(z_0 - t_4) + D = 0 \tag{4.93}$$

denkleminde

$$t_4 = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{-A - B + C} \tag{4.94}$$

elde edilir.

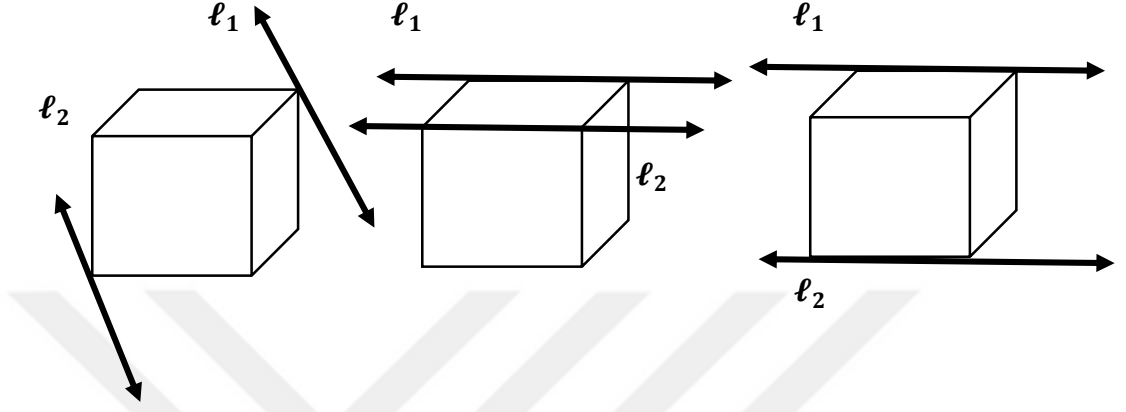
Buna göre t_4 yukarıda elde edilen doğru olmak üzere l_3 doğrusu $\mathcal{P}$ düzlemini $P_3 = (x_0 + t_4, y_0 + t_4, z_0 - t_4)$ noktasından keser. O halde P_0 ile P_4 arasındaki Maksimum uzaklığı

$$\begin{aligned}
d_M(P_0, P_4) &= \max\{|x_0 - x_0 - t_4|, |y_0 - y_0 - t_4|, |z_0 - z_0 + t_4|\} \\
&= \max\{|t_4|, |t_4|, |t_4|\} = |t_4|
\end{aligned}$$

$$= \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A + B - C} \right| \quad (4.95)$$

olarak bulunur.

4.2.3 Maksimum uzayda verilen iki doğru arasındaki uzaklık



Şekil 4.3. Maksimum uzayda kürenin ve doğruların kesişme durumları.

Teorem 4.2.3.1 Uzayda herhangi iki doğru

$$\ell_1 \dots \frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r} = \lambda$$

$$\ell_2 \dots \frac{x-a'}{p'} = \frac{y-b'}{q'} = \frac{z-c'}{r'} = \mu$$

olsun. Bu doğrular arasındaki maksimum uzaklık şu şekildedir;

- i. ℓ_1 ve ℓ_2 birbirine paralelse $d_M(\ell_1, \ell_2) = d_M(A, \ell_2)$ dir. Burada A , ℓ_1 üzerindeki herhangi bir nokta olmak üzere $A = (a, b, c)$ olarak seçilebilir.
- ii. ℓ_1 ve ℓ_2 birbirine paralel değilse (aykırı doğrularsa) $\alpha = p'q - pq'$, $\beta = pr' - p'r$, $\gamma = rq' - r'q$ olmak üzere

$$d_M(\ell_1, \ell_2) = \frac{(a-a')\gamma + (b-b')\beta + (c-c')\alpha}{\max\{|\alpha + \beta + \gamma|, |-\alpha + \beta + \gamma|, |\alpha - \beta + \gamma|, |\alpha + \beta - \gamma|\}} \quad (4.96)$$

dir.

İspat: $d_M(\ell_1, \ell_2) = \min d_M(X, X')$ dır, burada $X \in \ell_1$ ve $X' \in \ell_2$ dir. ℓ_1 ve ℓ_2 birbirine paralel durumda ℓ_1 üzerindeki her bir noktanın ℓ_2 e uzaklığı da aynıdır. Bu durumda $A = (a, b, c)$ ve $A' = (a', b', c')$ seçilirse $d_M(\ell_1, \ell_2) = d_M(A, \ell_2) = d_M(\ell_1, A')$ olup bu da noktanın doğruya maksimum uzaklık formülünden kolaylıkla hesaplanır.

ℓ_1 ve ℓ_2 birbirine paralel değilse bu durumda $p'q - pq', pr' - p'r, rq' - r'q$ den en az biri sıfırdan farklıdır. Aksi halde doğrular birbirlerine paralel olurlardı. Sırasıyla ℓ_1 ve ℓ_2 üzerinde bulunan $P = (p\lambda + a, q\lambda + b, r\lambda + c)$ ve $P' = (p'\mu + a', q'\mu + b', r'\mu + c')$ noktalarını göz önüne alınsın. Bu durumda $d_M(P, P')$ minimum ise P ve P' noktalarından geçen ℓ_3 doğrusunun doğrultu vektörü $\{(1,1,1), (-1,1,1), (1, -1,1), (1,1, -1)\}$ kümesinin bir elemanıdır ki bu kümenin her bir elemanı küpün cisim köşegenlerinin doğrultularıdır. ℓ_3 doğrusunun doğrultu vektörü (p'', q'', r'') olsun

Maksimum uzayda küreler doğru boyunca hareket ettirilirken diğer taraftan küre büyütülüp küçültüldüğünde doğrularla temas ettiği noktalardan maksimum olanı köşeleri kestiği noktalar olmaktadır.

Doğruların uzayda birbirine göre konumları (şekil 4.3) olduğu gibidir. Kesişen doğrular arasındaki minimum uzaklık ise zaten sıfır olacaktır. Ayrıca özel durumlarda ise doğrular birbirlerine paralel düzlemde olabilir.

Uzayda iki doğru arasındaki uzaklık formülü

$$d_M(\ell_1, \ell_2) = \frac{(a - a')\gamma + (b - b')\beta + (c - c')\alpha}{\max\{|\alpha + \beta + \gamma|, |-\alpha + \beta + \gamma|, |\alpha - \beta + \gamma|, |\alpha + \beta - \gamma|\}} \quad (4.97)$$

dir.

Özel durumlarda ise

$$d_M(\ell_1, \ell_2) = \frac{(a - a')\gamma + (b - b')\beta + (c - c')\alpha}{\max\{|\beta + \gamma|, |\alpha + \gamma|, |\alpha + \beta|, |-\beta + \gamma|, |-\alpha + \gamma|, |-\alpha + \beta|\}}$$

dir.

I. Durum: P ve P' den geçen ℓ_3 doğrusunun doğrultu vektörü

$$(p'', q'', r'') = (1, 1, 1) \text{ ise}$$

$$\frac{a + p\lambda - a' - p'\mu}{1} = \frac{b + q\lambda - b' - q'\mu}{1} = \frac{c + r\lambda - c' - r'\mu}{1} \text{ olduğundan}$$

gerekli hesaplamalar ile

$$\mu = \frac{(a - a')(r - q) + (b - b')(p - r) + (c - c')(q - p)}{(p'r - pr') - (q'r - qr') - (p'q - pq')} \quad (4.98)$$

ve

$$\lambda = \frac{(a - a')(r' - q') + (b - b')(p' - r') + (c - c')(q' - p')}{(p'r - pr') - (q'r - qr') - (p'q - pq')} \quad (4.99)$$

elde edilir.

Elde edilen bu değerler P ve P' arasındaki maksimum uzaklığın hesaplamasında kullanılırsa yani

$$d_M(P, P') = \max\{|p\lambda - p'\mu + a - a'|, |q\lambda - q'\mu + b - b'|, |r\lambda - r'\mu + c - c'|\}$$

İfadesinde λ ve μ yerinde yazılırsa;

$$d_M(P, P')$$

$$= \max \left\{ \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(p'r - pr') - (q'r - qr') - (p'q - pq')} \right|, \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(p'r - pr') - (q'r - qr') - (p'q - pq')} \right|, \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(p'r - pr') - (q'r - qr') - (p'q - pq')} \right| \right\}$$

$$= \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(p'r - pr') - (q'r - qr') - (p'q - pq')} \right| \quad (4.100)$$

elde edilir.

II. Durum: P ve P' den geçen ℓ_3 doğrusunun doğrultu vektörü

$$(p'', q'', r'') = (-1, 1, 1) \text{ ise}$$

$$\frac{a + p\lambda - a' - p'\mu}{-1} = \frac{b + q\lambda - b' - q'\mu}{1} = \frac{c + r\lambda - c' - r'\mu}{1} \text{ olduğundan}$$

$$\mu = \frac{(a - a')(q - r) - (b - b')(p + r) + (c - c')(p + q)}{(pr' - p'r) - (q'r - qr') - (pq' - p'q)} \quad (4.101)$$

ve

$$\lambda = \frac{(a - a')(q' - r') - (b - b')(p' + r') + (c - c')(p' + q')}{(pr' - p'r) - (q'r - qr') - (pq' - p'q)} \quad (4.102)$$

elde edilir. Böylece

$$d_M(P, P') = \max\{|p\lambda - p'\mu + a - a'|, |q\lambda - q'\mu + b - b'|, |r\lambda - r'\mu + c - c'|\}$$

ifadesinde λ ve μ yerinde yazılırsa;

$$\begin{aligned} & d_M(P, P') \\ &= \max \left\{ \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(pr' - p'r) - (q'r - qr') - (pq' - p'q)} \right|, \right. \\ & \quad \left| \frac{(a - a')(q'r - qr') + (b - b')(pr' - p'r) + (c - c')(p'q - pq')}{(pr' - p'r) - (q'r - qr') - (pq' - p'q)} \right|, \\ & \quad \left| \frac{(a - a')(q'r - qr') + (b - b')(pr' - p'r) + (c - c')(p'q - pq')}{(pr' - p'r) - (q'r - qr') - (pq' - p'q)} \right| \right\} \\ &= \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(pr' - p'r) - (q'r - qr') - (pq' - p'q)} \right| \quad (4.103) \end{aligned}$$

elde edilir.

III. Durum: P ve P' den geçen ℓ_3 doğrusunun doğrultu vektörü

$$(p'', q'', r'') = (1, -1, 1) \text{ ise}$$

$$\frac{a + p\lambda - a' - p'\mu}{1} = \frac{b + q\lambda - b' - q'\mu}{-1} = \frac{c + r\lambda - c' - r'\mu}{1} \text{ olduğundan}$$

gerekli hesaplamalarla

$$\mu = \frac{(a - a')(-r - q) + (b - b')(p - r) + (c - c')(p + q)}{(pq' - p'q) + (pr' - p'r) + (qr' - q'r)} \quad (4.104)$$

ve

$$\lambda = \frac{(a - a')(-r' - q') + (b - b')(p' - r') + (c - c')(p' + q')}{(pq' - p'q) + (pr' - p'r) + (qr' - q'r)} \quad (4.105)$$

Elde edilir. Böylece

$$d_M(P, P') = \max\{|p\lambda - p'\mu + a - a'|, |q\lambda - q'\mu + b - b'|, |r\lambda - r'\mu + c - c'|\}$$

İfadesinde λ ve μ yerinde yazılırsa;

$$\begin{aligned} d_M(P, P') &= \max \left\{ \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(pq' - p'q) + (pr' - p'r) + (qr' - q'r)} \right|, \right. \\ &\quad \left| \frac{(a - a')(q'r - qr') + (b - b')(pr' - p'r) + (c - c')(p'q - pq')}{(pq' - p'q) + (pr' - p'r) + (qr' - q'r)} \right|, \\ &\quad \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(pq' - p'q) + (pr' - p'r) + (qr' - q'r)} \right| \right\} \\ &= \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(pq' - p'q) + (pr' - p'r) + (qr' - q'r)} \right| \quad (4.106) \end{aligned}$$

elde edilir.

IV. Durum: P ve P' den geçen ℓ_3 doğrusunun doğrultu vektörü

$$(p'', q'', r'') = (1, 1, -1) \text{ ise}$$

$$\frac{a + p\lambda - a' - p'\mu}{1} = \frac{b + q\lambda - b' - q'\mu}{1} = \frac{c + r\lambda - c' - r'\mu}{-1} \text{ olduğundan}$$

$$\mu = \frac{(a - a')(-r - q) + (b - b')(p + r) + (c - c')(p - q)}{(pr' - p'r) + (q'r - qr') + (pq' - p'q)} \quad (4.107)$$

ve

$$\lambda = \frac{(a - a')(-r' - q') + (b - b')(p' + r') + (c - c')(p' - q')}{(pr' - p'r) + (q'r - qr') + (pq' - p'q)} \quad (4.108)$$

elde edilir. Böylece

$$d_M(P, P') = \max\{|p\lambda - p'\mu + a - a'|, |q\lambda - q'\mu + b - b'|, |r\lambda - r'\mu + c - c'|\}$$

İfadesinde λ ve μ yerinde yazılırsa;

$$\begin{aligned} d_M(P, P') &= \max \left\{ \left| \frac{(a - a')(q'r - qr') + (b - b')(pr' - p'r) + (c - c')(p'q - pq')}{(pr' - p'r) + (q'r - qr') + (pq' - p'q)} \right|, \right. \\ &\quad \left. \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(pr' - p'r) + (q'r - qr') + (pq' - p'q)} \right| \right\} \\ &= \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(pr' - p'r) + (q'r - qr') + (pq' - p'q)} \right| \quad (4.109) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bunların dışında bazı özel durumlar olarak doğrular birbirlerine paralel düzlemler üzerinde bulunabilirler. Bu durumda P ve P' den geçen ℓ_3 doğrusunun doğrultusu için altın durum söz konusudur.

I. Durum: P ve P' den geçen ℓ_3 doğrusunun doğrultu vektörü

$$(p'', q'', r'') = (-1, 1, 0) \text{ ise}$$

$$\frac{a + p\lambda - a' - p'\mu}{-1} = \frac{b + q\lambda - b' - q'\mu}{1} = \frac{c + r\lambda - c' - r'\mu}{0} \text{ olduğundan}$$

$$\mu = \frac{(a - a')r + (b - b')r - (c - c')(q + p)}{(p'r - pr') + (q'r - qr')} \quad (4.110)$$

ve

$$\lambda = \frac{(a - a')r' + (b - b')r' - (c - c')(q' + p')}{(p'r - pr') + (q'r - qr')} \quad (4.111)$$

elde edilir. Böylece

$$d_M(P, P') = \max\{|p\lambda - p'\mu + a - a'|, |q\lambda - q'\mu + b - b'|, |r\lambda - r'\mu + c - c'|\}$$

İfadesinde λ ve μ yerinde yazılırsa;

$$\begin{aligned} d_M(P, P') &= \max \left\{ \left| \frac{(a - a')(q'r - qr') + (b - b')(pr' - p'r) + (c - c')(p'q - pq')}{(p'r - pr') + (q'r - qr')} \right|, \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(p'r - pr') + (q'r - qr')} \right| \right\} \\ &= \left| \frac{(a - a')(q'r - qr') + (b - b')(pr' - p'r) + (c - c')(p'q - pq')}{(p'r - pr') + (q'r - qr')} \right| \quad (4.112) \end{aligned}$$

elde edilir.

II. Durum: P ve P' den geçen ℓ_3 doğrusunun doğrultu vektörü

$$(p'', q'', r'') = (0, 1, -1) \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} \frac{a + p\lambda - a' - p'\mu}{0} &= \frac{b + q\lambda - b' - q'\mu}{1} = \frac{c + r\lambda - c' - r'\mu}{-1} \text{ olduğundan} \\ \mu &= \frac{(a - a')(-q - r) + (b - b')p + (c - c')p}{(pq' - p'q) + (pr' - p'r)} \quad (4.113) \end{aligned}$$

ve

$$\lambda = \frac{(a - a')(-r' - q') + (b - b')p' + (c - c')p'}{(pq' - p'q) + (pr' - p'r)} \quad (4.114)$$

elde edilir. Böylece

$$d_M(P, P') = \max\{|p\lambda - p'\mu + a - a'|, |q\lambda - q'\mu + b - b'|, |r\lambda - r'\mu + c - c'|\}$$

İfadesinde λ ve μ yerinde yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& d_M(P, P') \\
&= \max \left\{ \left| \frac{(a - a')(q'r - qr') + (b - b')(pr' - p'r) + (c - c')(p'q - pq')}{(pq' - p'q) + (pr' - p'r)} \right|, \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(pq' - p'q) + (pr' - p'r)} \right| \right\} \\
&= \left| \frac{(a - a')(q'r - qr') + (b - b')(pr' - p'r) + (c - c')(p'q - pq')}{(pq' - p'q) + (pr' - p'r)} \right| \quad (4.115)
\end{aligned}$$

elde edilir.

III. Durum: P ve P' den geçen ℓ_3 doğrusunun doğrultu vektörü

$(p'', q'', r'') = (1, 1, 0)$ ise

$$\begin{aligned}
\frac{a + p\lambda - a' - p'\mu}{1} &= \frac{b + q\lambda - b' - q'\mu}{1} = \frac{c + r\lambda - c' - r'\mu}{0} \text{ olduğundan} \\
\mu &= \frac{(a - a')r - (b - b')r + (c - c')(q - p)}{(qr' - q'r) - (pr' - p'r)} \quad (4.116)
\end{aligned}$$

ve

$$\lambda = \frac{(a - a')r' - (b - b')r' - (c - c')(p' - q')}{(qr' - q'r) - (pr' - p'r)} \quad (4.117)$$

elde edilir. Böylece

$$d_M(P, P') = \max\{|p\lambda - p'\mu + a - a'|, |q\lambda - q'\mu + b - b'|, |r\lambda - r'\mu + c - c'|\}$$

İfadesinde λ ve μ yerinde yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& d_M(P, P') \\
&= \max \left\{ \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(qr' - q'r) - (pr' - p'r)} \right|, \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(qr' - q'r) - (pr' - p'r)} \right| \right\}
\end{aligned}$$

$$= \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(qr' - q'r) - (pr' - p'r)} \right| \quad (4.118)$$

elde edilir.

IV. Durum: P ve P' den geçen ℓ_3 doğrusunun doğrultu vektörü

$$(p'', q'', r'') = (-1, 0, 1) \text{ ise}$$

$$\frac{a + p\lambda - a' - p'\mu}{-1} = \frac{b + q\lambda - b' - q'\mu}{0} = \frac{c + r\lambda - c' - r'\mu}{1} \text{ olduğundan}$$

$$\mu = \frac{(a - a')q - (b - b')(p + r) + (c - c')q}{(p'q - pq') + (r'q - rq')} \quad (4.119)$$

ve

$$\lambda = \frac{(a - a')q' - (b - b')(p' + r') + (c - c')q'}{(p'q - pq') + (r'q - rq')} \quad (4.120)$$

elde edilir. Böylece

$$d_M(P, P') = \max\{|p\lambda - p'\mu + a - a'|, |q\lambda - q'\mu + b - b'|, |r\lambda - r'\mu + c - c'|\}$$

İfadesinde λ ve μ yerinde yazılırsa;

$$\begin{aligned} & d_M(P, P') \\ &= \max \left\{ \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(p'q - pq') + (r'q - rq')} \right|, \left| \frac{(a - a')(q'r - qr') + (b - b')(pr' - p'r) + (c - c')(p'q - pq')}{(p'q - pq') + (r'q - rq')} \right| \right\} \\ &= \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(p'q - pq') + (r'q - rq')} \right| \quad (4.121) \end{aligned}$$

elde edilir.

V. Durum: P ve P' den geçen ℓ_3 doğrusunun doğrultu vektörü

$$(p'', q'', r'') = (0, 1, 1) \text{ ise}$$

$$\frac{a + p\lambda - a' - p'\mu}{0} = \frac{b + q\lambda - b' - q'\mu}{1} = \frac{c + r\lambda - c' - r'\mu}{1} \text{ olduğundan}$$

$$\mu = \frac{(a - a')(r - q) + (b - b')p - (c - c')p}{(pq' - p'q) + (p'r - pr')} \quad (4.122)$$

ve

$$\lambda = \frac{(a - a')(r' - q') + (b - b')p' - (c - c')p'}{(pq' - p'q) + (p'r - pr')} \quad (4.123)$$

elde edilir. Böylece

$$d_M(P, P') = \max\{|p\lambda - p'\mu + a - a'|, |q\lambda - q'\mu + b - b'|, |r\lambda - r'\mu + c - c'|\}$$

İfadesinde λ ve μ yerinde yazılırsa;

$$\begin{aligned} d_M(P, P') &= \max \left\{ \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(pq' - p'q) + (p'r - pr')} \right|, \right. \\ &\quad \left. \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(pq' - p'q) + (p'r - pr')} \right| \right\} \\ &= \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(pq' - p'q) + (p'r - pr')} \right| \quad (4.124) \end{aligned}$$

elde edilir.

VI. Durum: P ve P' den geçen ℓ_3 doğrusunun doğrultu vektörü

$$(p'', q'', r'') = (1, 0, 1) \text{ ise}$$

$$\frac{a + p\lambda - a' - p'\mu}{1} = \frac{b + q\lambda - b' - q'\mu}{0} = \frac{c + r\lambda - c' - r'\mu}{1} \text{ olduğundan}$$

$$\mu = \frac{(a - a')q + (b - b')(r - p) - (c - c')q}{(p'q - pq') + (q'r - qr')} \quad (4.125)$$

ve

$$\lambda = \frac{(a - a')q' + (b - b')(r' - p') - (c - c')q'}{(p'q - pq') + (q'r - qr')} \quad (4.126)$$

elde edilir. Böylece

$$d_M(P, P') = \max\{|p\lambda - p'\mu + a - a'|, |q\lambda - q'\mu + b - b'|, |r\lambda - r'\mu + c - c'|\}$$

İfadesinde λ ve μ yerinde yazılırsa;

$$\begin{aligned} d_M(P, P') &= \max \left\{ \left| \frac{(a - a')(q'r - qr') + (b - b')(pr' - p'r) + (c - c')(p'q - pq')}{(p'q - pq') + (q'r - qr')} \right|, \left| \frac{(a - a')(q'r - qr') + (b - b')(pr' - p'r) + (c - c')(p'q - pq')}{(p'q - pq') + (q'r - qr')} \right| \right\} \\ &= \left| \frac{(a - a')(qr' - q'r) + (b - b')(p'r - pr') + (c - c')(pq' - p'q)}{(pq' - p'q) + (p'r - pr')} \right| \quad (4.127) \end{aligned}$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölüme kadar çokyüzlülerden ve özelliklerinden, konveks çokyüzlülerin bazı sınıfları olan Platonik, Arşimet ve Katalan cisimlerden bahsedilmiştir. Bu cisimlerin matematiksel yapıları, çeşitli bilim dallarındaki rolleri geçmişten günümüze kullanım alanları özetlenmiştir. Ayrıca daha önceden yapılan metrik geometri çalışmalarının ışığında konveks çokyüzlüler ile Minkowski geometrileri arasındaki ilişkiye değinilmiştir.

Daha önceki çalışmalarda düzlemde maksimum uzaklığının bir metrik olduğu gösterilmiş, bu metrikle oluşturulan düzlem maksimum geometrisinin özellikleri incelenmişti. Bütünlük açısından bu incelemelerden de kısaca bahsedilmiştir.

Bu çalışmada Uzayda maksimum uzaklığın bir metrik olduğu ayrıntılı olarak verilmiştir. Maksimum metriği ile döşenmiş uzay maksimum uzaydır. Daha önceki çalışmalardan farklı olarak bu tezde ilk kez maksimum uzayda bir noktanın bir doğruya, bir noktanın bir düzleme uzaklıkları ile iki doğru arasındaki uzaklık formüle edilmiştir. Böylece maksimum uzay geometrisinde yapılabilecek daha ileri çalışmalara ışık tutulmuştur.

KAYNAKLAR

- Alexandrov, A. D., 2000, Convex Polyhedra, Springer, 7-16p.
- Catalan, Eugene, 1865, Memorie sur la Theorie des Polyedres. J. l'Ecole Polytechnique, Paris, 41, 1-71.
- Coxeter, H. S. M., 1961, Introduction to Geometry, John Wiley&Sons Inst., 443p.
- Çolakoğlu, H., B., 2009, Taksi, Maksimum, Çin Dama ve Alfa Düzlemlerinin Bazı Özellikleri ve Genelleştirilmesi, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Ermiş, T., 2014, Düzgün Çokyüzlülerin Metrik Geometrilere İlişkileri Üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Gelişgen, Ö., 2007, Minkowski Geometri Üzerine: Taksi, Çin Dama ve α -Geometrilere Hakkında Gene Bir Analiz, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Hamarat, 2017, M., Form Geometrisi-Türetimi ve Dönüşümü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Kaya, R., 2002, Analitik Geometri, Bilim ve Teknik Yayınevi, 439p, Eskişehir.
- Kinsey, L. ve Moore, T. E., 2002, Symmetry, Shape, and Space: An Introduction to Mathematics Through Geometry, Newyork, Emeryville, CA : Key College Publishing in cooperation With Springer Verlag.
- Krause, E. F., 1975, Taxicab Geometry, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 88p.
- Martin, G. E., 1998, The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane, Springer, 509p.
- Millman, R. S. ve Parker, G. D., 1991, Geometry a Metric Approach with Models, Springer, 370p.
- Pearce, P., 1990, structure in Nature Is a Strategy for Design. Massachusetts, London: The MIT Press.
- Pottman, H., Asperl, A., Hofer, M. ve Kilian, A., 2007, Architectural Geometry. Exton, Pennsylvania, USA: Bentley Institute Press.
- Salihova, S., 2006, Maksimum Metrik Geometri Üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Eskişehir.
- Senechal, M., 2013a, Shaping Space: Exploring Polyhedra in Nature, Art, and the Geometrical Imagination. (M. Senechal, Dü.) Newyork, Springer Verlag.

Senechal, M., 2013b, Exploring the Polyhedron Kingdom. (M. Senechal, Dü.) Shaping Space: Exploring Polyhedra in Nature, Art, and the Geometrical Imagination, 89-107. Newyork: Springer Verlag.

Stakhov, A., 2009, The Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. Singapore: World Scientific Publishing.

Thompson, A. C., 1996, Minkoski Geometry, Cambridge University Press, 346p.

Thompson, D. W., 1945, On Growth and Form. Cambridge Newyork: Cambridge: at The University Press, Newyork: Macmillon Company.

Waring, C., 2015, Sıfırdan Sonsuza Matematiğin Öyküsü, (İ. Hoca, Çev.) İstanbul: Say Yayınları.

URL-1 <<http://www.matematikcanavari.net/2012/07/platonik-cisimler-duzgun-kat-cisimler.html>>, Erişim tarihi 29.08.2018

URL-2 <<https://www.muhendisbeyinler.net/platonun-bes-kati-cismi/>>, Erişim tarihi 30.08.2018

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Kadir YILDIRIM
Adres : Aksaray \ Merkez
E-posta adresi : yildirim3568@hotmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ

Lisans : Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim
Matematik Öğretmenliği 2005-2009

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER

1. Milli Eğitim Bakanlığında öğretmenlik. 2010-