

4439

MARKOV ZİNCİRLERİNDE DURUM TAHMİNİ VE İÇ
GÖÇE UYGULAMASI

DOKTORA TEZİ
(İSTATİSTİK)

Salih ÇELEBİOĞLU

Nisan 1988

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

Bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onay-
larım.

Fikri Öztürk

Danışman

Yrd.Doç.Dr. Fikri Öztürk

Sınav Jürisi

Başkan : Prof.Dr. Özkam Ünver *Özkam Ünver*

Üye : Prof.Dr. Soner Gönen *Soner Gönen*

Üye : Y.Doç.Dr. Fikri Öztürk *Fikri Öztürk*

Bu Tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Tez Yazım Esaslarına Uygundur. *Ali Rıza*

MARKOV ZİNCİRLERİNDE DURUM TAHMİNİ VE İÇ
GÖÇE UYGULAMASI
(Doktora Tezi)

Salih ÇELEBİOĞLU
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Nisan 1988

ÖZ

Bu çalışmada, önce kesikli parametrelî Makrov zincirlerinde doğrusal istatistiksel modeller kullanılarak eşit zamanlı gözlemlerde yalnızca durum oranlarına ilişkin veriler bulunduğunda çeşitli tahmin ediciler incelendi. Daha sonra sürekli parametrelî Markov zincirlerinde gözlem mekanizmasına bağlı olarak durum tahminleri araştırıldı. Son olarak Poisson örnekleme tekniği kullanılarak Türkiye erkek nüfusunun ele alınan beş bölge arasındaki iç göçü tartışıldı.

THE STATE ESTIMATION IN MARKOV CHAINS AND
AN APPLICATION TO INTERNAL MIGRATION

(Ph. D. Thesis)

Salih ÇELEBİOĞLU
GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
April 1988

ABSTRACT

In this study various state estimators for the discrete parameter Markov chains are examined using linear statistical models when there is an observation at equally spaced times and the observed data just as the state proportions that relating to the number of individuals in each state for each time period n are known. And then the state estimators for the continuous time parameter Markov chains depending on the observation mechanisms are investigated. Finally the internal migration of Turkish male population among the given five regions is discussed via the sampling at Poisson times.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesine değerli katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Fikri ÖZTÜRK'e, beni bu alana yönelten hocam Sayın Prof. Dr. İmdat KARA'ya, bilgisayar kullanımı aşamasında yardımcı olan TAEK'dan Sayın Mak. Müh. Gökalp AKYÜZ'e ve arkadaşım Sayın Araş. Gör. İhsan ALP'e, ve teşviklerinden dolayı Yrd. Doç. Dr. Hasan BAL'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
Öz	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
GİRİŞ	1
BÖLÜM 1	
MARKOV ZİNCİRLERİ	5
1.1. Giriş	5
1.2. Tanımlar, Kesikli Zincirin Temel Özellik- likleri	6
1.3. Durumların Sınıflandırılması	10
1.4. Kesikli Zincirlerde Limit Teoremleri...	12
1.5. Sürekli Parametrelili Markov Zincirleri- Temel Özellikleri	14
1.6. Sürekli Parametrelili Markov Zincirle- rinde Limit Teoremleri	20
1.7. Homojen Olmayan Markov Zincirleri, Ergodiklik	23
1.8. Nedensel Matrisler-Kesikli Durum	44
1.9. Nedensel Matrisler-Sürekli Durum	49
BÖLÜM 2	
MARKOV ZİNCİRLERİNDE DURUM TAHMİNLERİ	53
2.1. Kesikli Parametrelili Markov Zincirle- rinde Durum Tahmini	53
a. Kısıtsız ve Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmin Edicileri	55
b. Eşitsizlik Kısıtlı Tartılı En Küçük Kareler Tahmin Edicileri.....	59
c. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicisi	63
d. Minimum Ki-Kare Tahmin Edicileri	64

	<u>Sayfa</u>
e. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi	66
f. Bayes Tahmin Edicisi	69
g. Minimum Mutlak Sapmalı Tahmin Edici	76
2.2. Kesikli Tahmin Edicilerin Özellikleri ...	78
2.3. Sürekli Parametrelili Markov Zincirlerinde Durum Tahmini	80
a. Giriş	80
b. Eşit Zamanlı Gözlemler Halinde Durum Tahmini	81
c. Tesadüfi Değişen Eşit Aralıklı Gözlemler Halinde Durum Tahmini	83
d. Poisson Zamanlarında Durum Tahmini	84
e. Ortalamalı Gözlemler Halinde Durum Tahmini	88
f. Markov Zincirinin Fonksiyonu Gözlemlendiğinde Durum Tahmini	93
2.4. Sürekli Tahmin Edicilerin Özellikleri ...	97
BÖLÜM 3	
UYGULAMA	98
3.1. Giriş	98
3.2. Göçlerin Dayandırıldığı Teorik Görüşler..	99
3.3. Göç İlişkin Kestirim Yöntemleri	104
a. İç Göçün Doğrudan Yöntemlerle Belirlen- mesi	104
b. İç Göçün Dolaylı Yoldan Belirlenmesi	104
3.4. Türkiye'de Erkek Nüfusun İç Göçü	115
3.5. Varsayımlar	117
3.6. Gözlem Süreci	118
3.7. Bölgelerin Nüfusları ve Nüfus Oranları ..	120
3.8. Gözlem Zincirinin Geçiş Matrisi ve Üreti- ci Matris	123
3.9. Geçiş Olasılıkları Fonksiyonu, Limit Dağı- lım, Tahminler	125
3.10. Bölgelerarası ilk Geçiş Zamanları	129
3.11. Bölgelerarası Durum İşgalleri	132
3.12. Hayat Boyu Göç Oranının Tahmini	137
3.13. Sonuç	138
KAYNAKLAR	141
ÖZGEÇMİŞ	148

GİRİŞ

Uygulamalarda ilgilenilen sürece ilişkin bütün değerlerin elde edilmesi mümkün değildir, hatta gerekli de değildir. Bu bakımdan sürecin belirli aralıklarda veya belirli zaman aralıklarıyla, yada belirli kurallara dayanarak amaca uygun bir şekilde gözlenmesi yeterli ve gereklidir.

Kısmen gözlenmiş örnek fonksiyonlarının tekrar oluşturulması, $X = \{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ veya $Y = \{Y(t); t \geq 0\}$ sürecinin gözlemlenmemiş tesadüfi durumlarının tahminini, bir başka deyişle gözlem yapılmamış aralık veya noktalarda sürecin nerelerde bulunduğunun tahminini gerekli kılar. Bu amaç için yapılan tahmin işlemine "durum tahmini", ilgili tahmin edicilere de "durum tahmin edicileri" denir(1). Özetle durum tahmini, sürecin durumlarına ilişkin koşullu olasılık dağılımının hesaplanmasıdır.

Parametre tahmin edicilerinde olduğu gibi, durum tahmin edicilerinin de belirli bazı özellikleri taşıması istenir. Bunlar, tahmin edicilerin etkin bir şekilde hesaplanabilmesi, ek gözlemler yapıldığında elde edilen tüm gözlemlere dayanarak tahmin edicilerin tekrar baştan hesaplanmasından çok ardışık olarak hesaplanabilmesi gibi uygulamaya yönelik özellikler, ve tutarlılık, asimptotik normallik v.b. istatistiksel özellikler olarak özetlenebilir(1).

Kesikli parametrelili Markov zincirlerinde durum tahmini üzerinde yapılmış ilk önemli çalışma A Madansky'nin en küçük kareler yöntemiyle yaptığı tahminlerdir(2). Bundan sonraki çalışmalar da homojen zincirlerde H.Theil ve G.Rey'in kuadratik programlamayla yaptığı tahminler(3), T.C.Lee, G.G.Judge ve A.Zellner'in en çok olabilirlik ve Bayes teoremine dayalı tahminleri(4), ve homojen olmayan zincirlerde yine T.C.Lee ve G.G.Judge'ın tahminleri(5) önemlidir. Daha sonra kesikli parametrelili tahmin edicilerin büyük bir kısmı, yeni tahmin ediciler de eklenerek T.C.Lee, G.G.Judge ve A.Zellner tarafından bir kitap biçiminde derlenmiştir(6).

Sürekli parametrelili Markov süreçlerinde durum tahmini çalışmalarında R.L.Stratonovich'in aynı zamanda kesikli parametrelili Markov zincirlerini de içeren sürekli parametrelili yayılma süreçlerine ilişkin tahminleri(7), H.J. Kushner'in yayılma süreçlerine ilişkin tahminleri(8), W.M.Wonham(9) ve A.N.Shiryaev'in(10) gözlemlenmiş bir yayılma sürecini etkileyen sürekli parametrelili Markov zincirleri üzerine çalışmaları, A.I.Yashin'in bileşenlerinden biri $\{\xi_t\}$ gözlemlenen iki bileşenli bir $\{(\xi_t, \xi_t)\}$ sürekli parametrelili Markov zincirine ilişkin tahminleri(11), M.Rudemo'nun sürekli parametrelili Markov zincirinin bir fonksiyonu gözlemlendiği duruma ilişkin tahminleri(12), E.Masry'nin Poisson örnekleme aracılığıyla çalıştığı spektral tahminleri(13), A.F.Karr'ın sürekli parametrelili 0-1'li Markov süreçlerine ilişkin tahminleri(1), ve son olarak L.C.G.Rogers ve D.Williams'ın

Dirichlet formları aracılığıyla sürekli parametrelili ve sonsuz durumlu Markov zincirlerinde tahminleri ele alan çalışması(14) önemlidir. Bu alanda yapılmış diğer çalışmalar Markov sürecinin özel bir durumu olan Poisson süreçleri üzerindedir. Biz bu çalışmamızda yalnızca kesikli ve sürekli parametrelili homojen zincirlerde durum tahminleriyle ilgileneceğiz.

1. Bölüm'de kesikli ve sürekli parametrelili Markov zincirlerinin temel özellikleri ve limit teoremleri, ardından homojen olmayan kesikli parametrelili Markov zincirlerinde ergodiklik katsayıları aracılığıyla ergodiklik özellikleri verilmiştir. Markov zincirlerinin indirgenemezlik ve ergodiklik gibi temel özelliklerinin incelenmesinde kullanılmaya başlanan ve son yıllarda geliştirilen nedensel matrisler bu bölümün son kavramı olmuştur.

2. Bölüm'de kesikli parametrelili Markov zincirleri için Kısıtlı ve Kısıtsız En Küçük Kareler, Eşitsizlik Kısıtlı Tartılı En Küçük Kareler, Genelleştirilmiş En Küçük Kareler, Minimum Ki-Kare, En Çok Olabilirlik, Bayes ve Minimum Mutlak Sapmalı tahmin ediciler verilmiştir. Sürekli parametrelili Markov zincirleri için de Eşit Zamanlı Gözlemler, Tesadüfi Eşit Aralıklı Gözlemler Halinde, Poisson Zamanlarında, Ortalamalı Gözlemler Halinde ve Markov zincirinin fonksiyonu gözlemlendiğinde durum tahminleri verilmiştir.

3. Bölüm'de sürekli parametrelili Markov zincirleriyle Türkiye erkek nüfusunun iç göçü incelenmeden önce, iç

göç olayına ilişkin teorik görüşler ve önceki uygulamalara yer verilmiştir. Son olarak erkek nüfusun iç göçüne ilişkin geçiş olasılıkları fonksiyonu ve bazı göstergeler elde edilmiştir.



BÖLÜM 1

MARKOV ZİNCİRLERİ

1.1. Giriş

Modern gelişmeler belirsizlik, karmaşıklık ve dinamizmin etkilerini artırmaktadır. Birey ve teknoloji yalnızca birkaç yıl önce değeri takdir edilemeyen, çok daha az formüle edilmiş veya çözümlenmiş olan problemlerle uğraşmak zorunda kalmaktadır. Ancak sevinilecek bir durum, rasyonel sistemleri algılama ve yürütmede göze çarpan ilerlemelerin yapılmış olmasıdır. Kişinin kendi fiziksel çevresini anlamasını ve kontrol etmesini engelleyen bu belirsizlik, karmaşıklık ve dinamizmin etkilediği türde olayları tanımlamak için mantıksal yapıların geliştirilmesinde Andrei Andreivich Markov (1856-1922)'un biçimlendirdiği model temel bir başarı olarak yer almaktadır. Belirsizliği çözümlmeyi amaçlayan önceki çalışanların belirsizliği bağımsız olayların bir sonucu olarak modellemelerine karşılık, Markov her bir denemenin kendinden hemen önce gelen denemenin sonucuna bağlılığını ileri sürmenin daha avantajlı olacağını gördü. Daha sonraları halihazırda denemenin geçmişteki denemelerin sonuçlarına çok daha karmaşık bir biçimde bağımlılığı teşvik edici olmuşsa da, bu düşüncenin çoğunlukla çözümlene ve hesaplamalar yönünden işlenemeyen, yani üzerinde işlem yapılamayan

sonuçlara götürdüğü görülmüştür(15).

Problemler metodolojik açıdan üç sınıfa ayrılır :

(i) hareket biçiminin ortaya koyduğu sonucun veya sonuçların bilindiği, deterministik yapıya sahip belirlilik problemleri, (ii) mümkün sonuçlara karşı getirilebilecek olasılıkların bilindiği veya tahmin edilebileceği risk problemleri, (iii) mümkün sonuçlarla ilgili olasılıkların bilinmediği belirsizlik problemleri(16).

Belirsizlik çalışılan alana göre çok sayıda nedenden kaynaklanır. Sözgelimi, insangücü plânlamasında belirsizlik iki nedenden ortaya çıkar : birincisi, çevreden doğan belirsizlikler.Bunlar, emek talebini belirleyebilen havanın kestirilemezliğinden yönetim veya hükümetin kararlarına kadar değişir. İkincisi, kişinin bireysel seçme özgürlüğünden, özellikle işini bırakmasından kaynaklanan belirsizlikler (17).

Yöneticiler genellikle belirsizlik ortamında, çok değişik ölçütler kullanarak karar verirler(18).

1.2. Tanımlar, Kesikli Zincirin Temel Özellikleri

1.2.1. Tanım : Bir $X = \{X(t); t = 0,1,2,\dots\}$ kesikli parametrelili stokastik sürecini veya sürekli parametrelili bir $X = \{X(t); t \geq 0\}$ stokastik sürecini ele alalım. $T = \{0,1,2,\dots\}$ veya $T = \{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}$ parametre uzayındaki herhangi n tane $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ noktası için $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_{n-1})$ sürecin bilinen değerleri olmak üzere, $X(t_n)$ 'nin koşullu dağılımı yalnızca $X(t_{n-1})$ 'e bağımlıysa, X sürecine bir Markov sürecidir, denir. Bunu

formüle edersek : $x_1, x_2, \dots, x_n$, n tane gerçel sayısı için

$$\begin{aligned} P\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \\ = P\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

bağıntısı gerçekleştiğinde $\{X(t)\}$ süreci bir Markov sürecidir(19). Buradaki x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ gerçel sayılarının herbiri sürecin durumu adını alır ve T 'de $\forall h > 0$, $h \in \mathbb{R}$ için $P\{x_i - h < X(t) < x_i + h\} > 0$ olacak biçimde bir $t \in T$ vardır. Sürecin bütün durumlarının oluşturduğu kümeye durum uzayı diyecek ve bunu E ile göstereceğiz. Bizim çalışmamızda sonlu durum uzayına sahip ve $E \subseteq \mathbb{IN}$ olan süreçlere yer vereceğiz.

Genelde durum uzayı kesikli olan Markov süreci, Markov zinciri (MZ) olarak adlandırılır, ve bunun yanında parametre uzayının kesikli veya sürekli olduğu belirtilir.

Kesikli parametrelili bir $\{X(t); t = 0, 1, 2, \dots\}$ Markov zincirini sürekli parametrelili olandan ayırmak için $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$, $\{X(n); n \in \mathbb{IN}\}$ biçimlerinden biriyle veya daha kısaca $\{X_n\}$ ile göstereceğiz.

Bir $\{X_n\}$ Markov zincirinin olasılık yasasını belirlemek için bütün $n \geq m \geq 0$ zaman parametreleri ve $j, k \in E$ durumları için

$$P_j(n) = P\{X_n = j\} \quad (1.2)$$

ve

$$P_{jk}(m, n) = P\{X_n = k \mid X_m = j\} \quad (1.3)$$

koşullu olasılık fonksiyonunun bilinmesi gerekir. Her $m, n \in T$ ve $j, k \in E$ için $P_{jk}(m, n)$ fonksiyonuna Markov zincirinin geçiş olasılıkları fonksiyonu diyeceğiz.

Eğer bir zincirin $P_{jk}(m, n)$ fonksiyonu yalnızca $n-m$ farkına bağlıysa, bu zincire zamanca homojendir veya kısaca homojendir, yada durağan geçiş olasılıklarına sahiptir, denir(19). Bu, bir anlamda $P_{jk}(m, n)$ değerlerinin n ve m 'den bağımsız olması ve yalnızca j ve k 'ya bağımlı olması demektir. Aksi durumda, yani $P_{jk}(m, n)$ değerlerinin j ve k 'dan başka n 'ye yada m 'ye bağlı olduğunda ilgili zincire homojen olmayan veya durağan olmayan zincir, denir. Bu tanımlar sürekli parametrelili zincir için matrisel biçimde $0 \leq s \leq t$ olmak üzere $P(s, t) = P(t-s)$ ise zincir homojendir, aksi halde homojen olmayan bir zincirdir, diye özetlenebilir(20).

Markov zincirleri incelenirken genelde geçiş olasılıkları fonksiyonu, N zincirin durum sayısı olmak üzere $N \times N$ tipinde bir matris biçiminde gösterilir. Yani $P(m, n) = \{P_{ij}(m, n)\}$, $i, j \in E$; $m, n \in T$, $m \leq n$ ile

$$P(m, n) = \begin{bmatrix} P_{11}(m, n) & P_{12}(m, n) & \dots & P_{1N}(m, n) \\ P_{21}(m, n) & P_{22}(m, n) & \dots & P_{2N}(m, n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{N1}(m, n) & P_{N2}(m, n) & \dots & P_{NN}(m, n) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

dir, ve bu matrise geçiş olasılıkları veya kısaca geçiş matrisi, denir.

Bir geçiş matrisi aşağıdaki özellikleri gerçekler :
(19,20) :

- (i) $P_{ij}(m,n) \geq 0$, her $i,j \in E$, $m,n \in T$ için.
- (ii) $\sum_j P_{ij}(m,n) = 1$, ($\forall i \in E$)
- (iii) $P(m,n) = P(m,u)P(u,n)$, $m \leq u \leq n$.

nc zellik Chapman-Kolmogorov denklemleri olarak adlandırılır. Zincirin kesikli parametrelili olması durumunda ardışık bağıntılar ve sürekli olması durumunda diferansiyel denklemler biçimini alan Chapman-Kolmogorov denklemleri, Markov zincirinin temel özellikleri çalışılırken çok sık başvurulan bir araçtır. Bu denklemleri $n > u > m \geq 0$ olmak üzere daha açık bir şekilde

$$\sum_{k=0}^N P_{ik}(m,u)P_{kj}(u,n) = P_{ij}(m,n) \quad (1.5)$$

olarak yazabiliriz.

Bir $\{X_n\}$ zinciri verildiğinde (i),(ii) ve (iii) zelliklerini gerçekleyen bir $\{P(m,n)\}$ matrisleri ailesi tanımlanabilir. Tersine (i),(ii) ve (iii) zelliklerini gerçekleyen bir $\{P(m,n)\}$ matrisler ailesi verildiğinde, elemanları $P_{ij}(m,n)$ 'ler

$$P_{ij}(m,n) = P\{X_n = j | X_m = i\} \quad (1.6)$$

bağıntısını gerçekleyen bir $P(m,n)$ geçiş olasılıkları matrisine sahip bir $\{X_n\}$ zinciri tanımlanabilir(19).

(iii) zelliğı uzun süre Markov zincirini tanımlamada kullanılmıştır. Ancak bu özelliğı gerçekleyen Markov ol-

mayan bir süreç gösterilince bu yol terkedilmiştir(21).

Kesikli parametrelili bir MZ'nin geçiş matrisinin bütün $m \leq n$ 'ler için belirli olması için bir adımlık geçiş olasılıkları matrisi denilen

$$P(0,1), P(1,2), \dots, P(n-1,n)$$

dizisinin bilinmesi gerekir. Zincir homojen olduğunda bütün bir adımlık geçiş olasılıkları matrisleri sabit bir P matrisine eşit olacağından

$$P(m,n) = P^{n-m} \quad (1.7)$$

olacaktır. Buna göre sistemin başlangıçtan n dönem sonra j ($j = 1, 2, \dots, N$) durumlarında bulunma olasılıkları

$$P_j(n) = P\{X_n = j\}, \quad (1.8)$$

$P(n) = \{P_j(n)\}$, $j = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere

$$P(n)^* = P(0)^* P(0,n) = P(0)^* P^n \quad (1.9)$$

bağıntısıyla verilir. Buradaki $P(0,n)$ matrisine n-adımlık geçiş olasılıkları matrisi diyeceğiz.

1.3. Durumların Sınıflandırılması (19,22)

1.3.1. Tanımlar : $A \subseteq E$ durum uzayında bir küme, $i, j \in E$ herhangi iki durum olsun. Ayrıca T_{ij} , X homojen MZ'nde herhangi bir j durumuna ilk giriş zamanını ve N_j , j durumuna yapılan toplam girişlerin sayısını göster-sin, ve $P_i\{A\} = P\{A|X_0 = i\}$, $E_i[A] = E\{A|X_0 = i\}$ olarak tanımlansın.

(i) Eğer i ve j için $P_{ij} > 0$ ise, i 'den j 'ye ulaşılır, denilir ve bu durum $i \rightarrow j$ ile gösterilir.

(ii) Eğer $A \subseteq E$ kümesinden dışındaki hiçbir duruma ulaşamazsa, A 'ya kapalıdır, denir.

(iii) Herhangi bir $A \subseteq E$ kümesinin kapalı hiçbir öz altkümesi yoksa, A 'ya indirgenemez bir kümedir, denir.

(iv) Eğer bir MZ 'nin, durum uzayı E indirgenemez bir kümeysse, bu zincire de indirgenemez bir zincirdir, denir.

(v) $P_j\{T_{1j} < \infty\} = 1$ ise j 'ye tekrarlı, $P_j\{T_{1j} = \infty\} > 0$ ise j 'ye geçişli bir durum denir.

(vi) Tekrarlı durumlar $E_j[T_{1j}]$ beklenen ilk giriş zamanının sonsuz olup olmamasına göre ikiye ayrılır:

$E_j[T_{1j}] = \infty$ ise j tekrarlı durumuna etkisiz, $E_j[T_{1j}] < \infty$ ise j 'ye etkili bir durumdur, diyeceğiz.

(vii) Bir j tekrarlı durumu için

$$P\{\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \ni T = n\delta, X(T) = j\} = 1 \quad (1.10)$$

olacak şekilde bir $\delta \geq 2$, $\delta \in \mathbb{Z}^+$ varsa, j 'ye periyodiktir ve periyodu δ 'dır, aksi halde-yani $\delta = 1$ ise- j 'ye aperiyoiktir, denir.

(viii) Tekrarlı durumları bir tek kapalı ve aperiyoikt küme oluşturan bir geçiş matrisine ve zincirine düzenlidir, diyeceğiz ve düzenli geçiş matrislerinin kümesini G_1 ile göstereceğiz.

1.4. Kesikli Zincirlerde Limit Teoremleri

n -adımlık geçiş olasılıkları matrisi $n \rightarrow \infty$ durumunda genelde, belirli bir matrise yakınsar. Bu $P(0, \infty)$ matrisine bakıldığında bütün satırların birbirine eşit olduğu, yani herhangi bir j durumunda bulunan sistemin sonraki adımda diğerk bütün durumlarda ve j 'de bulunma olasılıklarının birbirine eşit olduğu görülür. Fiziksel olarak mümkün akışların dengelenmesi olarak yorumlanabilecek olan bu durum, MZ teorisinde çok önemli bir yer tutar(15). Ancak bazı özel durumlarda $n \rightarrow \infty$ için $P(0, n)$ matrisi belirli bir matrise yakınsamaz.

1.4.1. Teorem : X homojen MZ, indirgenemez aperiyo-
dik sonlu durumlu bir zincir olsun. Bu durumda

$$v'P = v', \quad v'l = 1 \quad (1.11)$$

sisteminin bir tek çözümü vardır. Bu tek çözüm v , kesin pozitifdir ve

$$v(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(i, j), \quad \forall i, j \in E \quad (1.12)$$

gerçeklenir(20).

1.4.1. Teorem'de geçen v 'ye zincirin durağan dağı-
lımı diyeceğiz.

X tekrarlı indirgenemez ve δ -periyotlu MZ için $P^n(i, j)$ 'lerin bütün durumların etkisiz olma hali dışında limiti yoktur[Bütün durumların etkisiz olması halinde $n \rightarrow \infty$ iken $P^n(i, j) \rightarrow 0 (\forall i, j)$ 'dir]. Bununla birlikte n için $P^{n\delta+m}(i, j)$ 'lerin limitinin i başlangıç durumuna bağlı olmak üzere varlığını izleyen teorem vermektedir.

1.4.2. Teorem : P , homojen indirgenemez tekrarlı

δ -periyotlu bir MZ'nin geçiş matrisi ve B_α , $i \in B_1$ ve $j \in B_2$, veya $i \in B_2$ ve $j \in B_3, \dots$, veya $i \in B_\delta$ ve $j \in B_1$ iken $P(i, j) = 0$ olacak şekilde ayırık $B_1, \dots, B_\delta$ kümeleri içinde

$$P_\alpha(i, j) = P^\delta(i, j) \quad (1.13)$$

olan i ve $j \in E$ durumlarının kümesi olsun. Ayrıca zincirin etkili olduğunu varsayalım. Bu durumda her $m \in \{0, 1, \dots, \delta-1\}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{n\delta+m}(i, j) = \begin{cases} v(j), i \in B_\alpha, j \in B_\beta, \beta = \alpha + m \pmod{\delta} \\ 0, \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.14)$$

dır. Buradaki $v(j)$ ($j \in E$) değerleri

$$v'P = v', \quad v'1 = \delta \quad (1.15)$$

sisteminin tek çözümü olan v vektörünün bileşenleridir(20).

İkinci teoreme dikkatle bakılırsa v çözüm vektörünün bir olasılık vektörü olmadığı görülür. Bu teoremden v 'nin bir olasılık vektörü olabilmesi için $\delta = 1$ olması gerekir ki, bu zincirin indirgenemez aperiodyik olması, dolayısıyla ilk limit teoremine (1.4.1. Teorem) dönülmesi demektir.

1.4.1. Teorem aşağıdaki hale genişletilebilir.

1.4.3. Teorem : P düzenli bir MZ'nin geçiş matrisi

ve v_1 , P 'nin tekrarlı durumlarının oluşturduğu P_1 alt-matrisine karşı gelen durağan dağılım olsun. $v' = (v'_1, 0')$,

P matrisine karşı gelen tek durağan dağılımdır ve
 $k \rightarrow \infty$ iken

$$p^k \rightarrow lv' \quad (1.16)$$

elemanca yakınsar; yani

$$p^k(i,j) \rightarrow v(j) \quad (1.17)$$

dir(22). Üstelik bu yakınsama geometrik hızdadır; yani
 her $i, j \in E$ için

$$|p^k(i,j) - v(j)| \leq \alpha \beta^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

olacak şekilde $\alpha > 0$, $0 \leq \beta < 1$ sabitleri vardır(20).

Bu teoremden geçen özellikler indirgenemez, ancak
 δ -periyotlu periyodik bir P matrisi varlığında da şu bi-
 çimde geçerlidir: P^δ matrisinin köşegeni üzerinde yer
 alan $P_1, P_2, \dots, P_\delta$ matrisleri için $k \rightarrow \infty$ iken

$$p_m^k(i,j) \rightarrow lv'_m$$

$$|p_m^k(i,j) - v_m(j)| \leq \alpha_m \beta_m^k, \quad (1.19)$$

$$k = 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots, \delta; \quad i, j \in E;$$

$$\alpha > 0; \quad 0 \leq \beta_m < 1$$

dir(20).

1.5. Sürekli Parametrelili Markov Zincirleri-Temel Özellikler

Sürekli parametrelili bir MZ'ni daha belirgin bir bi-
 çimde kesikli parametrelili zincirden ayırmak için

$Y = \{Y(t); t \geq 0\}$ ile gösterelim.

Kesikli parametrelili MZ'nde olduğu gibi sürekli parametrelili MZ'nde de $(P(t))$ geçiş fonksiyonu

$$(i) P_{ij}(t) \geq 0$$

$$(ii) \sum_{k \in E} P_{ik}(t) = 1$$

$$(iii) \sum_{k \in E} P_{ik}(t)P_{kj}(s) = P_{ij}(t+s)$$

Özelliklerini gerçekler. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ Doğal sayısı için, $T = [0, \infty)$ parametre uzayının $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ biçiminde sıralı anlarında sürecin sırasıyla $i_0, i_1, \dots, i_n \in E$ durumlarında bulunmasına ilişkin ortak dağılım, $(P(t))$ geçiş fonksiyonu ve sürecin başlangıçtaki dağılımı, yani $Y(0)$ 'ın dağılımı $\Pi(\cdot)$ aracılığıyla verilir. Bu durum formülle

$$P\{Y(t_0) = i_0, Y(t_1) = i_1, \dots, Y(t_n) = i_n\} \quad (1.20)$$

$$= \Pi(i_0)P_{i_0 i_1}(t_1 - t_0)P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \dots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$$

biçiminde ifade edilir. Bu sonucun tersi de doğrudur :

Bir $\Pi(\cdot)$ olasılık dağılımı ve bir E durum uzayı üzerinde

de (i), (ii) ve (iii) özelliklerini gerçekleyen bir $(P(t))$

geçiş fonksiyonu verildiğinde, bir Ω örnek uzayı, geçiş fonksiyonu

$Y(t): \Omega \rightarrow E$ tesadüfi değişkenleri, (Ω, P) bir olasılık uza-

yı olacak şekilde Ω üzerinde bir P olasılık ölçümü, ve

durum uzayı verilen E , başlangıç dağılımı verilen $\Pi(\cdot)$

ve geçiş fonksiyonu verilen $(P(t))$ olan sürekli paramet-

reli bir MZ, Y oluşturulabilir. Böyle bir durumda Ω ,

$Y(t)$ ve Ω üzerindeki P olasılık ölçümü genel olarak aşağıdaki gibi kurulur :

$$\Omega = \{w | w: [0, \infty) \rightarrow E \text{ fonksiyon}\}$$

$$Y(t, w) = w(t), t \geq 0, w \in \Omega ; \quad (1.21)$$

ve

$$A = \{Y(t_0) = i_0, Y(t_1) = i_1, \dots, Y(t_n) = i_n\} \quad (1.22)$$

şeklinde tanımlanmış bir olaysa, bunun olasılık ölçümü

$$P(A) = \sum_{i \in E} \Pi(i) P_{i i_0}(t_0 - 0) P_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \dots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}) \quad (1.23)$$

dir(20).

Sürekli parametrelili MZ'nde geçişler arası zamanlar, ardışık olarak giriş yapılan durumlar bilinmek üzere birbirinden koşullu olarak bağımsızdır. Ayrıca her bir durumdaki konaklama(bekleme) zamanı, parametresi bulunan, aynı giriş yapılmış olan duruma bağlı bir üstel dağılıma sahiptir(23). Buna göre i durumunda konaklamaya ait dağılım $w_i(t)$: i durumunda konaklama süresi ve $\lambda(i)$ bu dağılımın parametresi olmak üzere

$$f(\tau) = \lambda(i) e^{-\lambda(i)\tau}, \tau \geq 0 \quad (1.24)$$

biçiminde olur. Burada özel olarak $\lambda(i) = w_i(0)$ olarak alınır. Bütün durumların konaklama zamanına ait parametreleri bir matris halinde

$$\Lambda = Ksg(\lambda(i)), i = 1, 2, \dots, N \quad (1.25)$$

biçiminde gösterilir. Bu matrisin tersi M ile gösterilir ve zincirin ortalama konaklama zamanı matrisi olarak

adlandırılır(23).

Sürekli parametrelili bir MZ'nde ard arda giriş yapılan durumlar kesikli parametrelili bir MZ oluşturur. Bu kesikli parametrelili zincire sürekli parametrelili MZ'nin temelinde yatan zincir de denilmektedir(20).

Konaklama zamanlarının üstel dağılışı ve temelde yatan MZ, sürekli parametrelili MZ'nin yapısını aydınlatmada çok önemli bir rol oynamaktadır. Aşağıdaki teorem bu durumu özetlemektedir.

1.5.1. Teorem : $n \in \mathbb{N}$, $j \in E$ ve $u \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$T_0, T_1, T_2, \dots$ ile $Y = \{Y(t); t \geq 0\}$ zincirinin geçiş zamanlarını ve $X = \{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ ile temelde yatan MZ'ni gösterelim. $X_n = i$ ise, yani zincir n.adımda i durumdaysa

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n > u \mid X_0, \dots, X_n; T_0, \dots, T_n\} \\ = Q(i, j)e^{-\lambda(i)u} \end{aligned} \quad (1.26)$$

yazılabilir. Burada $Q(i, j) \geq 0$, $Q(i, j) = 0$ ve

$\sum_j Q(i, j) = 1$ olup, Q, X kesikli parametrelili MZ'nin geçiş matrisidir(20).

Uygulamalarda sürekli parametrelili bir MZ'ne ait veriler $\lambda(i)$ parametreleri ve $Q(i, j)$ geçiş olasılıklarıyla verilir. Bu bakımdan 1.5.1.Teorem sürekli parametrelili zincire ilişkin çok sayıda hesaplamanın başlangıç noktası olur. Yalnız zincirde emen durumlar bulunması halinde hesaplamalarda dikkatli olunması gerekir. Emen durumların varlığında T_n :Zincirin geçiş zamanları, $W(t)$:Zincirin

konaklama zamanlarını göstermek üzere temelde yatan zincir

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y(T_{n+1}), & T_{n+1} < \infty \\ X_n, & T_{n+1} = \infty \end{cases} \quad (1.27)$$

biçiminde tanımlanır(20).

Şimdi $\lambda(i)$ parametreleri ve Q matrisi yardımıyla $(P(t))$ geçiş fonksiyonunu belirlemeye doğru bir adım atıyoruz.

1.5.2. Teorem : Bütün $i, j \in E$ durumları için $t \rightarrow P_{ij}(t)$ fonksiyonu diferansiyellenebilirdir ve türevi süreklidir. $t = 0$ 'da bu türev

$$A(i, j) = \begin{cases} -\lambda(i), & i = j \\ \lambda(i)Q(i, j), & i \neq j \end{cases} \quad (1.28)$$

ile verilir. $t \geq 0$ noktasında bu türev

$$\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \sum_{k \in E} A(i, k) P_{kj}(t) = \sum_{k \in E} P_{ik}(t) A(k, j) \quad (1.29)$$

dir(20,23).

Yukarıdaki teoremden $t \geq 0$ durumunda verilen türevler matrisyel biçimde

$$\frac{d}{dt} P(t) = AP(t), \quad \frac{d}{dt} = P(t)A \quad (1.30)$$

olarak gösterilebilir. Zincir homojen değilse yukarıdaki matrisyel denklemlerde A yerine $A(t)$ yer alır. Bu denklemlere İleriye ve Geriye Kolmogorov denklemleri denir.

1.5.2. Teorem'deki A matrisine zincirin üretici matrisi veya geçiş oranı matrisi denir. Üretici matrisin önceki tanımlanan Λ matrisi gözönüne alınarak

$$A = \Lambda(Q-I) = -\Lambda(I-Q) \quad (1.31)$$

biçiminde yazılabileceği açıktır. A matrisinin satır toplamı sıfırdır. Bu tür matrislere "diferansiyel matris" de denir.

P geçiş matrisinin kesikli parametrelili MZ'nde oynadığı rolü, A üretici matrisi sürekli parametrelili MZ'lerinde oynar(23).

A matrisine üretici matris dememizin nedenini aşağıdaki teoremden görebiliriz.

1.5.3. Teorem : Herhangi bir $t \geq 0$ anında geçiş fonksiyonu, A zincirin üretici matrisi olmak üzere

$$P(t) = e^{tA} \quad (1.32)$$

ile verilir. Burada

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \quad (1.33)$$

olarak tanımlanmıştır(20).

1.5.3. Teorem'in ifadesinden de görüleceği gibi, A üretici matrisi bilindiğinde $P(t)$ fonksiyonu bütün $t \geq 0$ noktalarında belirlenmiş olmaktadır, yani bütün $t \geq 0$ noktalarındaki geçiş olasılıkları A matrisiyle üretilmektedir. Öte yandan A üretici matrisinin sıfıra eşit olan en az bir özdeğeri vardır. A'nın bu sıfıra

eşit özdeğerlerinin sayısı A 'nın temelinde yatan kesikli parametrelili MZ 'nin kapalı küme sayısını verir. A 'nın diğer özdeğerlerinin de 1.5.3.Teorem'in ifadesinde geçen $P(t) = e^{tA}$ 'nin spektral gösterimi düşünüldüğünde, $P(t)$ geçiş olasılıklarında üstel artmadan çok üstel bozunmaya (yani azalmaya) neden olacak şekilde negatif gerçel kısımlara sahip karmaşık(veya gerçel) sayılar olduğu söylenebilir(23).

$v_i(t)$, t anında zincirin i durumunda bulunma olasılığını gösterebilir. $v(t)$ bütün durumların olasılıklarını gösteren vektör olmak üzere, bu vektör geçiş olasılıkları matrisiyle

$$v(t) = v(0)P(t) = v(0)e^{tA} \quad (1.34)$$

şeklinde ilişkilendirilebilir. Bu, başlangıçtaki olasılık dağılımı ve geçiş olasılıkları matrisi bilindiğinde, sistemin gelecek herhangi bir andaki olasılık dağılımını belirleyebiliriz, demektir.

1.6. Sürekli Parametrelili Markov Zincirlerinde Limit Teoremleri

$Y = \{Y(t); t \geq 0\}$ sürekli parametrelili MZ 'nin temelinde yatan $X = \{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ kesikli parametrelili MZ için $i, j \in E$ herhangi iki durum ve $A = E - \{j\}$ olmak üzere i 'den j 'ye k adımda (dönemde) ilk geçiş olasılığı

$$f_{ij}^k = \begin{cases} P_{ij}, & k = 1 \\ \sum_{b \in A} P_{ib} f_{bj}^{k-1}, & k \geq 2 \end{cases} \quad (1.35)$$

biçiminde ve f_{ij}^k yardımıyla "i'den j'ye herhangi bir adımda" yada "eninde sonunda geçme" olasılığı

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^k \quad (1.36)$$

biçiminde tanımlanır.

Bu tanımlar aşağıdaki önermede yardımcı olmaktadır
(20) :

1.6.1.Önerme : $j \in E$ geçişli durumu için aşağıdaki özellikler gerçekleşir :

$$(i) P_i \left\{ \int_0^{\infty} 1_j(Y_s) ds \leq t \right\} = 1 - f_{ij} \exp[-t\lambda(j)(1-f_{jj})] .$$

$$(ii) E_i \left[\int_0^{\infty} 1_j(Y_s) ds \right] = \frac{R_{ij}}{\lambda(j)} < \infty .$$

Burada Q, X zincirinin geçiş matrisi olmak üzere

$R = \sum_{m=0}^{\infty} Q^m$ dir ve R_{ij} , i'den başlayan zincirin j'ye yapması beklenen giriş sayısıdır.

$$(iii) \lim_{t \rightarrow \infty} P_i \{Y(t) = j\} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = 0 .$$

Bu önermeyi şöyle yorumlayabiliriz : (i) şıkında $A \subseteq E$ bir küme olmak üzere, A'nın gösterge fonksiyonu

$$1_j(A) = \begin{cases} 1, & j \in A \\ 0, & j \notin A \end{cases} \quad (1.37)$$

yardımla, başlangıçta i durumunda bulunan zincirin j geçişli durumunda $[0, \infty)$ süresi boyunca geçirdiği sürenin dağılım fonksiyonu verilmektedir. (ii) şıkkı i'den baş-

layan zincirin j geçişli durumunda geçirmesi beklenen sürenin sonlu olduğunu söylemektedir. (iii) şıkkı zincirin limit dağılımında (i,j) elemanın sıfır olacağı, yani zaman bakımından oldukça ileriye gidildiğinde i durumundan j durumuna geçişin mümkün olamayacağı belirtiliyor.

Aşağıdaki teorem hangi şartlar altında zincirin limit olasılık dağılımının varlığını vermektedir.

1.6.2.Teorem : $Y = \{Y(t); t \geq 0\}$ indirgenemez tekrarlı bir MZ olsun. Her $j \in E$ için

$$\Pi(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Y(t) = j\} \quad (1.38)$$

vardır ve $Y(0)$ dağılımından bağımsızdır. Zincirin limit olasılık dağılımı, A zincirin üretici matrisi olmak üzere

$$\begin{aligned} \Pi'A &= 0' \\ \Pi'1 &= 1 \end{aligned} \quad (1.39)$$

sisteminin tek çözümüdür(20,23).

Öte yandan temelde yatan kesikli zincirin limit dağılımı

$$\begin{aligned} v'Q &= v' \\ v'1 &= 1 \end{aligned} \quad (1.40)$$

sisteminin çözümüdür ve $v = (v(1), v(2), \dots, v(N))$ çözümünden elde edilen $v(i)/v(j)$ oranı " j 'ye yapılan iki giriş arasında i 'ye yapılması beklenen giriş sayısı" olarak yorumlanır. Şimdi j durumuna girişle başlayan ve yine j 'ye sonraki girişle biten bir devreyi ele alalım. Bu devre

j 'de konaklamakla harcanan ve beklenen uzunluğu $1/\lambda(j)$ olan zaman aralığıyla başlar, daha sonra $i \neq j$ durumlarında harcanan ve herbirinin süre olarak beklenen uzunluğu $1/\lambda(i)$ birim olan diğer aralıklar gelir. Yukarıda da geçtiği gibi bu $i (\neq j)$ 'ye yapılan girişlerin beklenen sayısı $v(i)/v(j)$ 'dir. Buna göre sözü geçen devrenin beklenen uzunluğu

$$\frac{1}{\lambda(i)} + \sum_{i \neq j} \frac{v(i)}{v(j)} \cdot \frac{1}{\lambda(i)} = \frac{1}{v(j)} \sum_{i \in E} \frac{v(i)}{\lambda(i)} \quad (1.41)$$

olur(20).

1.7. Homojen Olmayan Markov Zincirleri, Engodiklik

İlk kesimde geçiş fonksiyonu $P_{jk}(m,n)$ 'nin j ve k 'dan başka n 'ye yada m 'ye bağımlı olması durumunda MZ'ne homojen olmayan bir zincir demiştik. Bu, bir başka deyişle zincir kesikli olduğunda her dönem için öncekilerden farklı bir geçiş matrisinin var olması demektir.

Homojen olmayan MZ daha önce verilen MZ tanımındaki özellikleri gerçekler, yalnızca geçiş olasılıkları için, sözgelimi $X = \{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ bir homojen olmayan MZ ise,

$$P\{X_n = j / X_{n-1} = i\} = P(n, i, j) \quad (1.42)$$

yazılabilir. Yani zincirin geçiş olasılıkları bulunulan döneme, n 'ye de bağımlıdır.

Homojen olmayan MZ'lerinde hesaplamalar homojen MZ'lerindeki aynısıdır. Ancak her dönemin farklı bir geçiş matrisi olduğundan durumlara ilk giriş zamanları,

durumlarda konaklama zamanları gibi istatistiklerin hesaplanması çok güçleşir. Aynı şekilde limit olasılık dağılımının hesaplanması da güçleştiğinden, bu kavram homojen olmayan zincirler durumunda önemini büyük ölçüde yitirir. Bu nedenlerle uygulamalarda homojen olmayan MZ'leri çok seyrek kullanılır(15). Ancak, bütün dönemlere ilişkin geçiş matrislerinin dönem indisine bağlı olarak bir dizi biçiminde ifade edilebildiği homojen olmayan zincirlerin limit olasılık dağılımlarının varlığı ve yakınsaklığına ilişkin önemli teknikler de geliştirilmiştir. Bu tekniklerden en önemlileri arasında "stokastik zincirlerde taban", "konveks analiz yöntemiyle yaklaşım" ve "kuyruk σ -cismi yaklaşımı" verilebilir(24,25,26).

Biz bu kesimde ergodiklik kavramı aracılığıyla homojen olmayan MZ'nin davranışını geçiş matrislerinin yakınsaklığı yönünden incelemeyi amaçlıyoruz. Çünkü ancak yakınsaklığın varlığı durumunda homojen olmayan MZ'leri için homojen olanlara benzer biçimde bazı yaklaşık istatistiksel hesaplamalar yapılabilir. Önce ergodiklik kavramına genel bir giriş yapıyoruz.

Stokastik süreçlerin birçok sistemi tanımlamada yararlı bir yöntem olması için, bir $\{X(t); t \geq 0\}$ stokastik sürecine ilişkin gözlemlerden ortalama değer fonksiyonu

$$m(t) = E[X(t)], \quad (1.43)$$

kovaryans çekirdeği

$$K(s, t) = \text{Cov}[X(s), X(t)], \quad (1.44)$$

ve dağılım fonksiyonu

$$F(x) = P\{X(t) \leq x\} \quad (1.45)$$

gibi olasılık niceliklerinin elde edilebilmesi, yani bir anlamda ölçülebilmesi gerekir. Bu düşüncenin ardından doğal olarak şöyle bir soru akla gelir : elimizde kesikli parametrelili bir $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ stokastik sürecinin bir tek sonlu $\{X(n, w); n = 1, 2, \dots, M\}$ gözlemi veya sürekli bir $\{X(t); t \geq 0\}$ stokastik sürecinin sonlu bir $\{X(t, w); 0 \leq t \leq U\}$ gözlemi bulunsun. Bu gözlem bir tek $w \in \Omega$ 'ya aittir, yani elimizde bir tek örnek fonksiyonuna ait sonlu bir zaman boyunca gözlemlenmiş veri bulunmaktadır. Elimizde birden fazla örnek fonksiyonuna ait gözlemler bulunduğunda, sözgelimi ortama değer fonksiyonunun

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(t, w_i), w_i \in \Omega \quad (1.46)$$

şeklinde, genel ortalamayla tahmin edileceği açıktır.

Acaba elimizde bir tek örnek fonksiyonuna ait gözlemler bulunduğunda stokastik sürecin ortalamasını

$$\bar{x} = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U X(t, w) dt \quad (1.47)$$

şeklinde, zamana göre ortalamayla tahmin edebilir miyiz?

Bu problem ergodiklik teorisinin ilgi alanına girer(19).

Ergodiklik teorisinin uğraştığı problemleri genelde üç başlıkta toplayabiliriz(27) :

(i) Hangi koşullar altında (1.47)'yle verilen limit vardır?

(ii) (i)'de sözü geçen limitin değeri w 'ya bağlıdır, yani $\bar{x} = \bar{x}(w)$ 'dır. Bu limit değeri hangi koşullar altında $m(t)$ 'ye eşittir?

(iii) $X(t)$ fiziksel bir niceliği gösteren bir işaret (signal) olduğunda, hangi koşullar altında bu $X(t)$ süreci ergodiklik özelliğini gerçekleyen bir süreçten gözlenmiş bir örnek olarak ele alınabilir?

Ergodiklik teoremlerinden ilki durağan süreçlere aitti ve bu teoremin tatmin edici bir matematiksel ispatını 1931'de G.D.Birkhoff ve daha sonra 1932'de J.von Neumann vermiştir(19) .

Ergodiklik teorisine daha modern anlamda şöyle yaklaşılmaktadır(28) : L , f fonksiyonlarının, üzerinde belirli özellikte bir $\int f$ integrali kavramının -sözelimi, Lebesgue integrali- tanımlandığı bir soyut uzay olsun. Ayrıca T ,

$$\begin{aligned} T : L &\rightarrow L \\ f &\rightarrow \varphi = Tf \end{aligned} \quad (1.48)$$

olan bir operatör olsun. Ergodiklik teorisi aşağıdaki özellikleri sağlayan T operatörlerinin T^n ardıştırmalarıyla uğraşır :

(i) f negatif olmayan bir fonksiyonsa, Tf de negatif olmayan bir fonksiyondur, ve

$$(ii) \int |Tf| \leq \int |f|.$$

Bu anlamda bir yaklaşıma örnek olarak, $L = L_p$ dereceden mutlak integrallenebilir gerçel değerli ölçüle-

bilir fonksiyonlar uzayı ve T onun üzerinde tanımlı Eamperti operatörü verilebilir(29).

Şimdi homojen olmayan MZ'lerinde ergodiklik kavramına dönelim. Homojen olmayan MZ'lerinde v_0 başlangıçtaki dağılım olmak üzere n dönem sonraki dağılım

$$v_n = v_0 P_1 P_2 \dots P_n \quad (1.49)$$

biçiminde verilir. Burada matrislerin çarpımını

$$T_{0,n} = P_1 P_2 \dots P_n \quad (1.50)$$

ile gösterelim ve bu çarpıma zincirin "ileriye çarpımı" diyelim. $T_{0,n}$ 'nin zincirin n adımlık geçiş olasılıkları-
nı verdiği açıktır. Benzer biçimde homojen olmayan zincirin geçiş matrislerinin ters yönde çarpımı da düşünülebilir. Bunu da

$$U_{m,0} = P_m P_{m-1} \dots P_2 P_1 \quad (1.51)$$

ile gösterelim ve bu çarpıma zincirin "geriye çarpımı" diyelim. Zincirlerin geriye çarpımı şu soruyu akla getirmiştir : Zincirin veya sistemin şu anda bulunduğu durum bilindiğinde, sistemin zamanca daha önceki bir anda bulunduğu durum hangisidir, veya zincirin önceki bir dönemdeki olasılık dağılımı nedir? Gerçekten, bir MZ zamanca ters yönde gözlemlendiğinde de bir MZ ortaya çıkar(24). Bunun bir nedeni olarak bir MZ'nde şimdiki durum bilindiğinde, zincirin geçmiş ve gelecekteki durumunun birbirinden bağımsızlığı görülebilir. Homojen olmayan bir (X_n) MZ'nin ters zinciri (L_n) 'nin bir adımlık geçiş matrisi

$$P\{X_{n-1} = j | X_n = i\} = (L_n)_{ij} \quad (1.52)$$

ve çok adımlı geçiş matrisi

$$P\{X_m = j | X_n = i\} = (L_{n,m})_{ij}, \quad m \leq n \quad (1.53)$$

biçiminde ifade edilir. L_n matrisinin elemanları (X_n) zincirinin geçiş matrisinin elemanları, ve zincirin $(n-1)$ adımıdaki dağılımı $\Pi(n-1)$ bir önsel dağılım biçiminde alınarak

$$\Pi_j(n) = P\{X_n = j\} = \sum_{i=1}^N \Pi_i(n-1) P_{ij}(n-1, n) \quad (1.54)$$

yardımla

$$(L_n)_{ji} = \frac{\Pi_i(n-1)}{\Pi_j(n)} P_{ij}(n-1, n), \quad i, j = 1, \dots, N \quad (1.55)$$

olarak belirtilebilir. Benzer biçimde çok adımlı ters geçiş olasılıkları $\Pi(m)$ önsel dağılımı ve $P_{ij}(m, n), m \leq n$ geçiş olasılıkları yardımıyla

$$\Pi_j(n) = \sum_{i=1}^N \Pi_i(m) P_{ij}(m, n) \quad (1.56)$$

olmak üzere

$$(L_{n,m})_{ji} = \frac{\Pi_i(m) P_{ij}(m, n)}{\Pi_j(n)}, \quad m \leq n \quad (1.57)$$

ile verilir. Bu tanımlar, $B(m, n) = [\Pi_i(m)/\Pi_j(n)]$ ile sırasıyla

$$L_n = [B(n-1, n) \square P(n-1, n)]' \quad (1.58)$$

$$L_{n,m} = [B(m, n) \square P(m, n)]' \quad (1.59)$$

olarak matrislerin "benzerlik çarpımı"yla gösterilebilir. Matrislerin benzerlik çarpımı, $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ aynı boyutlu iki matris olmak üzere

$$C = A \square B = [a_{ij}b_{ij}] \quad (1.60)$$

olarak tanımlanır.

(1.56) ve (1.57) tanımları aracılığıyla homojen olmayan bir zincirin ters zincirinin de homojen olmadığı gösterilebilir (23). Yukarıdaki tanımlar homojen MZ'leri için $\Pi = [\Pi_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ önsel dağılımıyla, $B = [b_{ij}] = [\Pi_i/\Pi_j]$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere bir adımlı ters geçiş matrisi

$$L = [B \square P]' \quad (1.61)$$

biçimini alır. Homojen MZ'nin ters zinciri homojen olmayan bir zincir olabilir, ve $L(\infty) = P$ gerçekleşir. Özel olarak

$$L = P \quad (1.62)$$

olan homojen (X_n) zincirine "tersinebilirdir", denir. Homojen bir MZ'nin tersinebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n \quad (1.63)$$

olmak üzere

$$(\Phi \square I)P = [(\Phi \square I)P]' \quad (1.64)$$

olmasıdır (15). Özel olarak simetrik geçiş matrisli, yani çiftte stokastik homojen MZ'leri tersinebilirdir.

Şimdi homojen olmayan zincirlerde ileriye ve geriye çarpımların asimptotik davranışına-ergodikliğe dönüyoruz. Önce ileriye çarpımlardaki ergodikliğe giriyoruz.

İleriye çarpımların asimptotik davranışında genelde iki durum ortaya çıkmaktadır : birincisi, "başlangıçtaki dağılımdan bağımsızlık" olarak yorumlanabilecek olan, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{0,n}$ matrisinin satırlarının birbirine yakınlaması, yani birbirine eşit denebilecek bir hale dönüşmesi. İkincisi, birinci haldekine ek olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{0,n}$ matrisinin sabit bir matrise yakınsaması. Şimdi bu kavramları daha formel olarak tanımlayalım :

1.7.1. Tanımlar : Geçiş matrisleri $P_k = \{P_{ij}(k)\}$, $i, j = 1, \dots, N$ olan homojen olmayan bir MZ'ni ele alalım. Bu zincirin ileriye çarpımları $T_{p,r} = \{t_{ij}(p,r)\}$, $i, j = 1, \dots, N$ olsun.

(i) Eğer $r \rightarrow \infty$ iken her bir i, j, s, p için

$$t_{is}(p,r) - t_{js}(p,r) \rightarrow 0 \quad (1.65)$$

oluyorsa, bu MZ'ne zayıf ergodiktir, denir.

(ii) (i)'deki sıfıra yakınsama gerçekleşiyor ve $t_{is}(p,r)$ 'lerin kendisi belirli bir limite yakınsıyorsa, zincire güçlü ergodiktir denir(22).

Zayıf ve güçlü ergodikliği incelemeye başvurulacak yaklaşımlardan biri de büzülme katsayısı'dır. Stokastik ortamda büzülme katsayısı ergodiklik katsayısı olarak adlandırılır(22). Büzülme katsayısı en ilkel biçimde metrik uzaylarda tanımlanır.

1.7.2. Tanım : (S, d) bir metrik uzay, $f: S \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in S$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad (1.66)$$

$0 \leq \alpha \leq 1$ olacak biçimde bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sabiti varsa, bu sabite büzülme katsayısı ve f 'ye de bir büzülme dönüşümü denilir(30). Burada $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$ metrik fonksiyonudur.

Olasılık dağılımlarının oluşturduğu kümede tanımlanabilen bilinen metrikler P.Lévy, e.k.ü.s. uzaklıkları ve L_p -normları yardımıyla tanımlanan metriklerdir(31). Bunlardan P.Lévy uzaklığı şöyle tanımlanmaktadır : Olasılık dağılımları azalmayan fonksiyonlar oldukları için $x + y = a$ ($-\infty < a < \infty$) doğrusu $y = F(x)$ ve $y = G(x)$ gibi herhangi iki dağılım fonksiyonunun herbiriyle bir tek noktada kesişir. İşte bu iki kesişme noktası arasındaki uzaklığa $d(F, G, a)$ diyelim. F ve G arasındaki Lévy uzaklığı

$$d(F, G) = \text{e.k.ü.s} \quad d(F, G, a) \quad (1.67)$$

$$-\infty < a < \infty$$

ile tanımlanır. Bu uzaklığın metrik özelliklerini sağladığı kolayca gösterilebilir(32).

Biz ergodiklik katsayılarını $(n \times n)$ tipinde stokastik matrisler üzerinde tanımlayacağız. Oysa $(n \times n)$ tipinde matrisler n^2 -boyutlu bir vektör uzayı oluşturur(30, 33). Dolayısıyla $(n \times n)$ 'lik her bir stokastik matris $\mathbb{R}^{n^2}$ de bir nokta olarak düşünülebilir.

1.7.3. Tanım : Herbiri $\mathbb{R}^{n^2}$ uzayında bir nokta olarak görebileceğimiz $(n \times n)$ tipinde stokastik P matrislerinin kümesi üzerinde tanımlı olan ve $0 \leq \tau(P) \leq 1$ bağıntısını gerçekleyen herhangi bir $\tau(\cdot)$ sürekli skaler fonksiyonuna ergodiklik katsayısı denir. τ ergodiklik katsayısı, P stokastik matrisi ve v olasılık vektörü için

$$\tau(P) = 0 \Leftrightarrow P = 1v' \quad (1.68)$$

bağıntısını sağlarsa, 'öz ergodiklik katsayısı', aksi halde "öz olmayan ergodiklik katsayısı" olarak adlandırılır(22). Burada $P = 1v'$ matrisinin bütün satırlarının eşit olduğu açıktır. Bu tür matrisler "kararlı matris" adını alır ve $P^r = P (\forall r \in \mathbb{N})$ özelliğini gerçekler.

Öz ergodiklik katsayısı örnekleri :

$$\tau_1(P) = \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_{s=1}^n |P_{is} - P_{js}| = 1 - \min_{i,j} \sum_{s=1}^n \min(P_{is}, P_{js}), \quad (1.69a)$$

$$a(P) = \max_s \max_{i,j} |P_{is} - P_{js}|, \quad (1.69b)$$

$$b(P) = 1 - \sum_{s=1}^n (\min_i P_{is}) \quad (1.69c)$$

Öz olmayan ergodiklik katsayısı örnekleri :

$$c(P) = 1 - \max_s (\min_i P_{is}), \quad (1.70a)$$

$$\gamma(P) = \min_{i,j} \sum_{s=1}^n \min(P_{is}, P_{js}), \quad (1.70b)$$

Ergodiklik katsayısının değer aralığı $[0,1]$ kümesi olduğundan, her öz ergodiklik katsayısının "bire tamam-

"layanı" bir öz olmayan ergodiklik katsayısıdır, ancak tersi doğru olmayabilir. Buna örnek, yukarıdaki ilk öz ergodiklik katsayısı ile son öz olmayan ergodiklik katsayısı arasındaki

$$\tau_1(P) = 1 - \gamma(P) \quad (1.71)$$

bağıntısı verilebilir.

Not : Önceleri bir ergodiklik katsayısı $\tau(.)$

$$\tau(P) = 1 \Leftrightarrow P = 1v' \quad (1.72)$$

bağıntısını sağladığında öz ergodiklik katsayısı adını alıyordu. Ancak daha sonra tanım, 1.7.3. Tanım'daki hale dönüştü(34).

Aşağıdaki yardımcı teorem metrikler yardımıyla öz ergodiklik katsayısı tanımlama imkânı vermektedir(22).

1.7.4. Yardımcı Teorem : $D = \{Z'; Z \geq 0, Z'1 = 1\}$ olasılık dağılımları kümesini ve onun üzerinde tanımlı d metriğini gözönüne alalım. Herhangi bir $(n \times n)$ 'lik P stokastik matrisi için

$$\tau(P) = e.k.ü.s. \frac{d(x'P, y'P)}{d(x', y')} \quad (1.73)$$

$$x', y' \in D$$

$$x \neq y$$

ile tanımlanan nicelik aşağıdaki özellikleri gerçekler :

(i) P_1, P_2 stokastik matrisleri için

$$\tau(P_1 P_2) \leq \tau(P_1) \tau(P_2) \quad (1.74)$$

dir.

(ii) P stokastik matrisi için

$$\tau(P) = 0 \Leftrightarrow \exists v \in D \text{ } P = 1v' \quad (1.75)$$

dür, yani P kararlıdır.

Ergodiklik katsayısı tanımlamada L_p -normlarından da yararlanılabilir, çünkü bu normlar olasılık dağılımları üzerinde de tanımlanabilmektedir. L_p -normlarının analizi-
de, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\|x'\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p < \infty \quad (1.76a)$$

ve

$$\|x'\|_\infty = \max_i |x_i|, \quad p = \infty \quad (1.76b)$$

ile verildiğini biliyoruz (30,35). Bu durumda 1.7.4.Yar-
dımıcı Teorem'in ifadesinde

$$d(x', y') = \|x' - y'\|_p \quad (1.77)$$

konursa

$$\tau(P) = \text{e.k.ü.s.} \frac{\|x'P - y'P\|}{\|x' - y'\|} = \text{e.k.ü.s.} \left\| \frac{(x-y)'}{\|x' - y'\|} P \right\|$$

$$\begin{array}{cc} x', y' \in D & x', y' \in D \\ x \neq y & x \neq y \end{array} \quad (1.78)$$

veya $\delta = (x-y)' / \|(x-y)'\|$ birimleştirilmiş vektör tanı-
mıyla

$$\tau(P) = \text{e.k.ü.s.} \|\delta'P\| \quad (1.79)$$

$$\|\delta\| = 1.$$

bulunur. Yalnız burada $x, y \in D$ olduğundan, $\delta, \delta \neq 0$,
 $\delta'1 = 0$ özelliklerini sağlayan bir vektördür.

L_p -normlarıyla tanımlanmış ergodiklik katsayıları
 içinde $p = 1$ 'le tanımlanan katsayı. daha önceki verdiğimiz
 $\tau_1(.)$ katsayısına eşit bir öz ergodiklik katsayısıdır
 (31).

Metrik ve normlardan başka "Hilbert izdüşel yalan-
 cı metriği"(36) veya kısaca "izdüşel uzaklık"(22)denilen
 bir fonksiyon yardımıyla da ergodiklik katsayısı tanımla-
 nabilir. Herhangi iki $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x > 0$, $y > 0$ vektörü
 arasındaki izdüşel uzaklık

$$d(x', y') = \ln \frac{\max_i (x_i / y_i)}{\min_i (x_i / y_i)} = \max_{i, j} \ln \left(\frac{x_i y_j}{x_j y_i} \right) \quad (1.80)$$

şeklinde tanımlanır(22,36).

$x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $a > 0$, $y > 0$, $z > 0$ olmak üzere izdüşel
 uzaklık

- (i) $d(x', y') \geq 0$: pozitiflik
- (ii) $d(x', y') = d(y', x')$: simetriklik
- (iii) $d(x', y') \leq d(x', z') + d(z', y')$: üçgen eşitsizliği
- (iv) $d(x', y') = 0 \Leftrightarrow c \in \mathbb{R}, c > 0 \quad x = cy$: aynı taşıyıcı üzerindeki vektörler arasındaki uzaklık sıfır.
- (v) $d(x', y') = d(ax', by')$, $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$: her vektörün taşıyıcısı üzerinde hareket serbestliği özelliklerini sağlar(22).

Yukarıdaki özelliklerden (iv)'sü yalnızca $c = 1$ durumunda gerçekleştirilebildiğinde izdüşey uzaklık bir metrik olur. Buna d izdüşey uzaklığını $D^+ = \{z'; z > 0, z'1 = 1\}$ kümesi üzerinde tanımladığımızda ulaşıyoruz, yani (D^+, d) bir metrik uzay olmaktadır(31). Buna göre tümü sıfırlardan oluşan bir sütunu bulunmayan $P \in S^+$ stokastik matrislerine ilişkin öz ergodiklik katsayısını 1.7.4.Yardımcı Teorem'e göre

$$\tau(P) = e.k.ü.s. \frac{d(x'P, y'P)}{d(x', y')} \quad (1.81)$$

$$x, y \in D^+$$

$$x \neq y$$

olarak tanımlayabiliriz. S^+ :her sütununda en az bir pozitif elemanı bulunan matrislere "sütun erişimli matrisler" diyeceğiz.

E.k.ü.s. uzaklıklarıyla tanımlanan ergodiklik katsayıları olasılık dağılımlarını içerdiğinden uygulanabilirliği yoktur. Bunun yerine L_p -normlarıyla verilen veya geçiş matrisinin elemanları aracılığıyla formüle edilen katsayılardan yararlanılır.

Burada son bir ergodiklik katsayısı olarak Birkhoff ergodiklik katsayısını (22) stokastik matrisler için veriyoruz :

$$\phi(P) = \begin{cases} \min_{i,j,k,l} \frac{P_{ik} P_{il}}{\bar{P}_{jk} P_{jl}}, & P > 0 \\ 0, & P \not> 0 \end{cases} \quad (1.82)$$

olmak üzere

$$\tau(P) = \frac{1-\phi^{1/2}(P)}{1+\phi^{1/2}(P)} . \quad (1.83)$$

Şimdi ileriye çarpımlara ilişkin ergodiklik teoremlerini veriyoruz.

1.7.5. Yardımcı Teorem : $\tau(.)$ bir öz ergodiklik katsayısı olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $\{T_{p,r}\}$ 'nin zayıf ergodikliği

$$\tau(T_{p,r}) \rightarrow 0, \forall p \geq 0 \quad (1.84)$$

olmasına denktir(22).

Bazen her $p \geq 0$ için $T_{p,r}$ ileriye çarpımlar dizisi yerine, asıl $\{P_k\}$, $k \geq 1$ dizisinin ergodiklik katsayıları dizisine bakmakla da ergodiklik durumu incelenebilir.

1.7.6. Teorem : $\{P_k\}$, $k \geq 1$ matris dizisi verilmiş olsun. Eğer

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{1-c(P_k)\} = \infty \quad (1.85)$$

ise, bu diziden oluşturulan ileriye çarpımlar dizisi zayıf ergodiktir(22). Burada $c(.)$ ergodiklik katsayısı daha önce tanımlandığı gibidir ((1.70a)).

Bu teoremden doğrudan elde edilebilecek bir sonuç şöyledir :

1.7.7.Sonuç : Eğer $\{P_k\}$, $k \geq 1$ dizisi için $c(P_k) \leq c_0 < 1$, $k \geq 1$ ise, ileriye çarpımlar dizisi her $p \geq 0$ için c_0 parametresiyle geometrik oranda ergodiktir. Yani her $k \geq 1$ için $c(P_k) \leq c_0 < 1$ olduğunda, 1.4.3.Teorrem $P^k(i,j) = T_{p,r}(i,j)$ ve $\beta = c_0$ ile geçerlidir.

1.7.7.Sonuç'ta geçen $c(A) < 1$ özelliğini sağlayan bir A stokastik matrisine "Markov matrisi" denir. Bu tür matrislerin en az bir sütunu tamamıyla pozitifdir(34). O halde 1.7.7.Sonuç'un düzgün Markov matrisi olan bir $\{P_k\}$, $k \geq 1$ dizisi için gerçekleştiğini söyleyebiliriz.

Aşağıdaki teoremden de ileriye çarpımlar dizisinin elemanları düzenli olduğunda zayıf ergodiklik için yeterli bir koşul verilmektedir.

1.7.8.Teorem : Her $p \geq 0$, $r \geq 1$ için $T_{p,r} \in G_1$ ise ve her $k \geq 1$ için

$$\min_{i,j}^+ P_{ij}(k) \geq \gamma > 0 \quad (1.86)$$

ise, zayıf ergodiklik her $p \geq 0$ için γ geometrik oranında ortaya çıkar(22). Burada 1.7.8. Teorem'in varsayımları özel olarak sonlu sayıda elemandan oluşan bir stokastik matris dizisi için de gerçekleştiğinde, aynı sonucun sağlandığı gösterilmiştir(37).

Şimdi ileriye çarpımlarda güçlü ergodikliğe geçiyoruz. Önce ilginç bir tanım veriyoruz.

1.7.9. Tanım : Satır erişimli bir $\{P_k\}$, $k \geq 1$ stokastik matrisler dizisi verilsin. Bu dizi için $k \rightarrow \infty$ iken

$$D'P_k \rightarrow D'$$

olacak biçimde bir $D \geq 0$, $D'1 = 1$ olasılık vektörü varsa, D' 'ye göre "asimptotik olarak homojendir", denir.

1.7.10. Yardımcı Teorem : $T_{p,r}$, $p \geq 0$, $r \geq 1$ dizisinin v limit vektörüne göre güçlü ergodikliği, $\{P_k\}$, $k \geq 1$ dizisinin v vektörüne göre asimptotik homojen olmasını gerektirir(22).

1.7.11. Teorem : Eğer P_k , $k \geq 1$ matrislerinin herbiri düzenli ve $0 < \gamma \leq \min^+ P_{ij}(k)$, $k \geq 1$ ise, $\{P_k\}$ dizisinin D olasılık vektörüne göre asimptotik homojenliği, $k \rightarrow \infty$ iken

$$e_k \rightarrow e \quad (1.87)$$

olmasına denktir. Burada herbir e_k , P_k matrisine karşı gelen tek türlü belirli durağan dağılım ve e de $\{e_k\}$ dizisinin limitidir. Bu denk özelliklerden yalnızca ikisinden biri gerçekleştiğinde $D = e$ olur(22).

Bu teoremin bir sonucu aşağıdadır :

1.7.12. Sonuç : $\{P_k\}$, $k \geq 1$ indirgenemez matrisler dizisi $0 < \gamma < \min^+ P_{ij}(k)$, $k \geq 1$ özelliğini gerçekleştiriyor ve bir v vektörüyle güçlü ergodikse, $k \rightarrow \infty$ iken, P_k , $k \geq 1$ 'ların tek türlü belirli olasılık dağılımları dizisi için

$$e_k \rightarrow v \quad (1.88)$$

olur. Burada $vP = v$, $v'1=1$ 'dir.

1.7.13. Teorem : $\{P_k\}$, $k \geq 1$ indirgenemez matrisler dizisi için $0 < \gamma < \min^+ P_{ij}(k)$, $k \geq 1$ ve $t \geq 1$ olmak üzere bütün $r \geq t$ olan bütün r 'ler için

$$\tau_1(T_{p,r}) \leq \beta < 1 \quad (1.89)$$

oluyorsa, asimptotik homojenlik $\{P_k\}$ dizisinin güçlü ergodikliği için gerekli ve yeterlidir(22).

Aşağıdaki teorem de $\{P_k\}$ dizisinin elemanca yakınsadığı bir limiti bulunduğunda güçlü ergodiklik durumunu vermektedir :

1.7.14. Teorem : $k \rightarrow \infty$ iken $P_k \rightarrow P$ (elemanca) ve $P \in G_1$ ise, P_k 'nin ileriye çarpımlar dizisi güçlü ergodiktir ve $e_k \rightarrow v$ limit vektörü P 'nin tek türlü belirli durağan dağılım vektörüdür(22).

1.7.15. Örnek : Geçiş matrisleri $n = 1, 2, \dots$

$$P_n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)^2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)^2} \end{bmatrix}$$

olan homojen olmayan kesikli MZ'ni ele alalım. Bu diziden oluşturulan ileriye çarpımlar dizisinin ilk üç elemanının $\mathcal{C}_1$ ergodiklik katsayısına ilişkin ilk beş, ondan sonra gelen onuncu, onbeşinci, yirminci ve yirmibeşinci değerleri, ve ayrıca bu ileriye çarpımların satırlarının yakınsadığı olasılık vektörleri aşağıdadır :

Tablo 1. İleriye Çarpımlar Dizisinin Bazı G_1 Katsayıları ve Yakınsadığı Olasılık Vektörleri

Katsayı No	$T_{0,r+1}$	$T_{1,r+1}$	$T_{2,r+1}$
1	0,755555555556	0,611111111111	0,562500000000
2	0,388888888889	0,25462963000	0,213333333333
3	0,166944444444	0,10760674000	0,08989654200
4	0,06640495100	0,04193475200	0,03448065400
5	0,02622026700	0,01655578800	0,01362775100
10	0,00022839691	0,00014300601	0,00011689292
15	$1,9301951 \times 10^{-6}$	$1,207343 \times 10^{-6}$	$9,8580495 \times 10^{-7}$
20	$1,6152626 \times 10^{-8}$	$1,0099029 \times 10^{-8}$	$8,3819032 \times 10^{-9}$
25	$2,6193447 \times 10^{-10}$	$3,4924597 \times 10^{-10}$	0
Yakınsa-	0,30782701	0,30782174	0,30782701
nan vek-	0,2306829	0,23068628	0,2306829
törler	0,46149009	0,46149198	0,46149009

Bu zincirin geçiş matrisleri dizisi $n \rightarrow \infty$ için elemanca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.91)$$

matrisine yakınsamaktadır ve $P \in G_1$, yani düzenlidir. Dolayısıyla 1.7.14. Teorem gereği $\{P_k\}$ dizisi güçlü ergodiktir. Gerçekten, yukarıdaki tablo incelendiğinde ileriye çarpımların satırlarının yakınsadığı olasılık vektörleri P 'nin durağan dağılım vektörü

$$v = \left(\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{6}{13} \right) \quad (1.92)$$

vektöründen çok farklı değillerdir. Benzer olarak

$\lim_{r \rightarrow \infty} T_{15,r}$ ve $\lim_{r \rightarrow \infty} T_{25,r}$ matrislerinin satırları da

P'nin durağan dağılımından çok farklı olmayan

$$v_{15} = (0,30776703; 0,23072131; 0,46151166) \quad (1.93a)$$

ve

$$v_{25} = (0,3077365; 0,23074087; 0,46152262) \quad (1.93b)$$

vektörlerine yakınsamaktadır. Üstelik bu vektörler P'nin durağan dağılım vektörüne öncekilerden daha yakındır.

Şimdi geriye çarpımlarda ergodiklik kavramına geçiyoruz. Geriye çarpımlarda zayıf ve güçlü ergodiklik kavramları ileriye çarpımlardakine benzer biçimde tanımlanır. Ancak geriye çarpımlarda bu iki kavram birbirine denktir, yani geriye çarpımların zayıf ergodikliği elde edilince güçlü ergodiklik de elde edilmiş olmaktadır. Aşağıdaki teorem bu durumu yansıtmaktadır :

1.7.15. Teorem : $U_{r,k}$, $r \geq 0$, $k \geq 1$ geriye çarpımları için zayıf ve güçlü ergodiklik denktir(22,38).

1.7.16. Teorem : Eğer her $r \geq 0$, $k \geq 1$ için $U_{r,k} \in G_1$ ve her $k \geq 1$ için

$$\min_{i,j}^+ P_{ij}(k) \geq \gamma > 0 \quad (1.94)$$

ise, bütün $r \geq 0$ 'ler için ergodiklik γ geometrik oranıyla elde edilir(38).

Bu teoremin değişik bir biçimi aşağıdadır :

1.7.17. Teorem : P , $n \times n$ tipinde sonlu sayıda stokastik matrisin oluşturduğu küme, ve her $k \geq 1$ için $P_i \in P (i = 1, 2, \dots, k)$ matrisleri için $U_{k,0} = P_k P_{k-1} \dots P_1 \in G_1$ olsun. Bu durumda $i, j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$|U_{k,0}(i,j) - v(j)| \leq \alpha^{\lfloor n/m \rfloor}, \quad n \geq 1 \quad (1.95)$$

olacak şekilde bir $m \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1$ sayıları ve bir $v'1 = 1$, $v \geq 0$ olasılık dağılımı vardır. Burada $\lfloor x \rfloor$, x 'in tam değeridir(37).

Aşağıdaki teorem hiçbir önşart koymaksızın ergodiklik durumunu incelemektedir.

1.7.18. Teorem : $U_{r,k}$ geriye çarpımlar dizisi ergodiktir $\Leftrightarrow r \rightarrow \infty$ iken

$$U_{r,k} \rightarrow 1v'_k, \quad k \geq 0 \quad (1.96)$$

olacak şekilde bir tek v_n , $n \geq 0$ olasılık dağılımları dizisi vardır(22).

1.7.14. Teorem, geriye çarpımlar dizisi için de doğrudur(38), ancak $U_{r,k}$ geriye çarpımlar dizisinin satırlarının yakınsadığı vektör, ileriye çarpımlar dizisindeki gibi tek türlü belirli değildir ve başlangıç dönemine bağlıdır(22).

1.7.19. Örnek : 1.7.15. Örnek'te verilen zincirin geriye çarpımlar dizisini ele alalım. Bu dizinin ilk üç elemanına ilişkin ergodiklik katsayıları ve satırlarının yakınsadığı olasılık vektörleri aşağıdadır.

Tablo 2. Geriye Çarpımlar Dizisinin Bazı $\mathcal{G}_1$ Katsayıları ve Yakınsadığı Olasılık Vektörleri

Katsayı No	$U_{50,50-r-1}$	$U_{49,49-r-1}$	$U_{48,48-r-1}$
1	0,16693367000	0,16694469000	0,16695641000
2	0,06959491300	0,06960126200	0,06960802100
3	0,02554240700	0,02554581400	0,02554944600
4	0,01006971200	0,01007142300	0,01007325100
5	0,00381242020	0,00381326450	0,00381416790
10	0,00003213884	0,00003215860	0,00003218022
15	$2,7107308 \times 10^{-7}$	$2,7165515 \times 10^{-7}$	$2,7214992 \times 10^{-7}$
20	$2,4156179 \times 10^{-9}$	$2,2409949 \times 10^{-9}$	$2,3865141 \times 10^{-9}$
25	$3,4924597 \times 10^{-10}$	0	0
Yakınsanan vektörler	0,35248125	0,41174139	0,35248125
	0,19906881	0,15431999	0,19906881
	0,44844995	0,43393863	0,44844995

Tablodan da görüleceği gibi yakınsanan vektörler geriye çarpımlarının başlangıç dönemine bağlı olup birbirine yakın değildir, ve ayrıca $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$ matrisinin durağan dağılımından da farklıdır. Bu, 1.7.18. Teorem'i doğrulamaktadır. Dolayısıyla $U_{r,k}$ geriye çarpımlar dizisi ergodiktir.

1.8. Nedensel Matrisler-Kesikli Durum

Bu ilk bölümün son iki kesiminde son yıllarda Markov süreçlerinin özelliklerini incelemeye kullanılan nedensel matrisleri ele alacağız.

Nedensel matrisler Markov sürecinde, durumların oynadığı rol bakımından zaman içindeki etkinliğini gösterir. Bu yüzden bir göç çalışmasında nedensel matrisler bölgeler arası rekabetin ve dinamiğin yapısına dikkate değer bir bakış açısı getirir. Dolayısıyla bu matrisler bölgelerarası çeşitli bağımlılık etkilerine ilişkin dinamiği ortaya çıkarmada çekici bir çerçeve oluşturmaktadır(39). Nedensel matrislerin istatistiksel açıdan önemi, bir denge durumunun varlığı ve karakteri üzerine dikkat çekmesidir(40). Bir başka deyişle bu matrisler bölgelerarası süreçlerin denge durumunu da ortaya koymaktadır. Bunun yanında nedensel matrisler, homojen olmayan zincirlerin yakınsaklık özelliklerini belirlemede de yardımcı olmaktadır. Sözgelimi, N.Pulman ve G.Styan sabit nedensel matrisli homojen olmayan kesikli parametrelili Markov zincirlerinin yakınsaklığını bu yolla incelemişlerdir (39,41).

Göç olayında varış yerlerini birbirleriyle karşılaştırmaya yarayan "rekabet eden varış yerleri" ve çıkış yerlerini birbirleriyle karşılaştırmada kullanılan "rekabet eden çıkış yerleri" kavramlarına bağlı olarak nedensel matrisler, sırasıyla sağ ve sol nedensel matrisler olarak tanımlanır. $P(n)$, n .dönemdeki geçiş matrisi olmak üzere sağ nedensel matris

$$C^R = P(n)^{-1}P(n+1), \quad (1.97)$$

ve sol nedensel matris de

$$C^L = P(n+1)P(n)^{-1} \quad (1.98)$$

ile tanımlanır. Bu matrislerin tanımlı olabilmesi için $P(n)$ 'nin singular olmayan bir matris olması gerekir. Gerçekten $P(n)$ hemen hemen bütün göç uygulamalarında singular olmayan bir matristir, çünkü "köşegensel olarak baskın"dır, yani $P_{ii} > 0,5$ 'tir, ve L.McKenzie köşegensel olarak baskın matrislerin singular olmadığını göstermiştir(39).

Bir nedensel matrisin elemanları geçiş matrisindeki değişmeler ve geçiş matrisinin kofaktörleri yardımıyla ifade edilebilir(39). Bu bölgelerarası bağımlılık etkilerini yorumlamada çok yararlıdır. Buna göre bir sağ nedensel matris için

$$\epsilon_{kj} = P_{kj}(n+1) - P_{kj}(n) \quad (1.99)$$

sözkonusu değişme ve A_{ki} , $P(n)$ matrisinin (k,i) indisli kofaktörü ve $|P(n)|$, $P(n)$ 'nin determinanı olmak üzere köşegen haricindeki elemanlar

$$C_{ij} = \sum_k \epsilon_{kj} A_{ki} / |P(n)| \quad (1.100)$$

ve özel olarak köşegen elemanları

$$C_{ii} = 1 + \sum_k \epsilon_{ki} A_{ki} / |P(n)| \quad (1.101)$$

olur. Bu durum matrisyel olarak, A kofaktörler matrisi olmak üzere

$$C^R = I + A'(P(n+1) - P(n)) / |P(n)| \quad (1.102)$$

biçiminde ifade edilebilir(1.100). formülünde $A_{ki} / |P(n)|$ sabitleri birer tartı olarak görülebilir, çünkü stokastik bir matrisin tersinin satır toplamı da 1 olduğundan

$$\sum_k A_{ki} = |P(n)| \text{ 'dir.}$$

Şimdi c_{ij} terimlerinin yorumuna geçelim(39): c_{ij} terimlerinin bütün k bölgelerinin etkilerine göre i bölgesinin, bir göçmen varış yeri olarak j bölgesinin değişen çekiciliği üzerine etkisini gösterdiği düşünülebilir. i bölgesine ait etki de p_{ij} 'deki değişmelerle doğru-
dan ifade edilebilir. j , i ile yüz yüze daha çekici olursa, ϵ_{ij} pozitif olacaktır. Bununla birlikte j 'yle yüz yüze diğer bölgelerin rekabeti de değişirse, bundan i 'nin j 'nin değişen çekiciliğine olan katkısı da etkilenecektir. $\epsilon_{kj} > 0$, $k \neq i$ için i 'nin j 'nin artan çekiciliği üzerine olan görelî etkisi azalacaktır. Tersine $\epsilon_{kj} < 0$, $k \neq i$ olursa, i 'nin j üzerine görelî etkisi artacaktır. i 'nin j 'nin değişen çekiciliği üzerine harcadığı toplam etki, doğrudan ve dengeleyen veya artıran etkilerin tartılı toplamıdır ki, buradaki tartılar yukarıda kofaktörler aracılığıyla oluşturduğumuz tartılardır.

Tartıların rolünü daha iyi anlamak için köşegendeki A_{ii} kofaktörlerini ele alalım. $|P(n)|$ değeri temelde köşegendeki elemanlardan etkilendiğinden, $|P(n)|$ değeriyle sistemde sergilenen hareketlilik arasında ters bir ilişki vardır. Bu yüzden herbir A_{ii} 'nin i 'nin sistemin geri kalan kısmına göre önemini gösterdiği düşünülebilir. Buna göre, görelî olarak yüksek bir A_{ii} değeri, i bölgesinin sistemin geri kalan kısmına göre daha hareketli olduğunu gösterir. Bir başka deyişle bu, i bölgesi sistemin yapısında önemli bir rol oynuyor, demektir.

Yukarıda verilen kavramın bir sonucu olarak "bütün bölgelerin bir varış yeri olan j üzerine toplam etkisi" şöyle verilebilir :

$$\xi_j = \sum_i c_{ij} = 1 + [\sum_k (\epsilon_{kj} \cdot \sum_i A_{ki}) / |P(n)|] \quad (1.103)$$

Bu ξ_j değeri, " j varış yerinin çekiciliğindeki toplam değişiklik" olarak da yorumlanabilir. Bu durumda 1'den büyük bir sütun toplamı artan çekiciliği, 1'den küçük bir toplam azalan çekiciliği gösterir(39).

Bir C^L matrisinin yorumuna gelince, bu matrisin elemanları çıkış bölgelerinin varış bölgelerini göç vererek ne derece desteklediğini gösterir. Buna göre C^L nedensel matrisinde bir i .sütun toplamının 1'den büyük olması bölgenin diğer çıkış yerlerine göre nüfusunu tutma yeteneğinin arttığını, 1'den küçük olması küçük olduğu derecede göçü desteklediğini gösterir(39).

Sol nedensel matrisler için (1.102) eşitliği

$$C^L = I + (P(n+1) - P(n))A' / |P(n)| \quad (1.104)$$

biçimini alır. Sağ nedensel matrislerde olduğu gibi sol nedensel matrislerde de A_{ki} kofaktörlerinin "rekabet eden çıkış yerleri" kavramına bağlı olarak yorumu verilebilir.

C^R ve C^L matrislerinin özdeğerleri birbirine eşittir, ve bu özdeğerlerin sistemin yakınsaklık özelliklerini incelemeye önemli bir yeri vardır(39,41). Nedensel matrisin özdeğerlerinin hepsi mutlak değerce 1'den küçük-

se Markov zinciri bir Bernoulli sürecine yakınsar, dolayısıyla göç bakımından herbir bölge nüfusunun kararlı kalan bir oranına ulaşır. En az bir özdeğer 1'den büyükse zincir ıraksar, yani birden fazla yutan durum(bölge) vardır. En büyük özdeğer 1'e eşit olduğunda sistemin gelecekteki durumu için ikinci büyük özdeğer yakınsaklık oranını verir. İkinci büyük özdeğer 1'e yaklaştıkça sistemin yakınsaklığı artar(hızlanır). İlk özdeğer yukarıda anlatıldığı gibi sistemin yakınsaklığının bir ölçüsü olduğundan sistemin "kararlılık indeksi" olarak da adlandırılır.

Özet olarak, sistem düzeyinde C^R ve C^L nedensel matrislerinin basit olarak sistemin ayrıntılı yapısal değişikliğine ilişkin iki tamamlayıcı tasviri olduğu söylenebilir(39).

1.9. Nedensel Matrisler-Sürekli Durum(42)

Nedensel matris tanımı sürekli parametrelili Markov zincirlerine de genişletilmiştir. Ancak sürekli parametrelili halde geliştirilen ve henüz ilk tanım olan sabit nedensel matrislerdir, ve bu özelliğiyle "sürekli parametrelili sabit nedensel matrisli Markov zincirleri" sınıfını ortaya çıkarmıştır. Benzer olarak önceki kesimde kesikli parametrelili sabit nedensel matrisli Markov zincirlerinden söz edildiğini hatırlatalım.

Bu kesimde ele alacağımız sürekli parametrelili Markov zinciri homojen olmayan bir zincir, yani $P(s,t) \neq P(t-s)$ olan bir zincir olacaktır. Bu durumda üretici matrisin yerini

$$Q(t) = \lim_{h+k \rightarrow 0^+} \frac{P(t-h, t-k) - I}{h + k} \quad (1.105)$$

{h=0 veya k=0}

ile tanımlayacağımız "şiddet matrisi" olacaktır..

1.9.1. Tanım : Sürekli parametrelili bir $X(t)$ Markov zinciri için --eğer varsa-- sabit nedensel matris aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir $C(s, t)$ matrisidir :

$$(i) \quad C(s, h+k) = C(s, h)C(s, k), \quad \{s, h, k\} \subset [0, \infty)$$

(ii) $0 \leq s \leq t$ olmak üzere $P(s, t)$ geçiş fonksiyonu

$$P(s, t) = P(s-h, t-h)C(t-s, h), \quad 0 \leq h \leq s \quad (1.106)$$

biçiminde yazılabilir.

Aşağıdaki teorem sabit nedensel matrisli bir Markov zincirinin şiddet matrisi için bir ayrışım vermektedir.

1.9.2. Teorem : $X(t)$ Markov zinciri sabit nedensel matrisli bir zincir olsun ve $C(s, t)$ nedensel matrisinin birinci mertebeden kısmi türevleri tanımlı olsun. Bu durumda, C ve Q iki sürekli parametrelili homojen Markov zincirinin üretici matrisi olmak üzere $X(t)$ 'nin şiddet matrisi

$$Q(t) = tC + Q \quad (1.107)$$

biçiminde yazılabilir.

Bu teoreme göre şiddet matrisinin zaman parametresine göre lineer olduğu söylenebilir.

1.9.2. Teorem'de geçen C ve Q matrislerinin değişmeli olduğu, yani $CQ = QC$ olduğu durumda, sabit nedensel

matrisli Markov zincirlerinin indirgenemezlik ve ergodiklik özellikleri kesikli parametrelili homojen Markov zincirlerinin karşı gelen özellikleriyle kolayca belirlenebilmektedir. Söz konusu durumda

$$Q = \{q_{ij}\}, \text{ e.k.ü.s. } \{|q_{ii}|\} < q < \infty \text{ ve } C = \{c_{ij}\}, \\ i \in E$$

$$\text{e.k.ü.s. } \{|c_{ii}|\} < c < \infty \text{ olmak üzere} \\ i \in E$$

$$\tilde{P} = I + Q/q \text{ ve } \tilde{R} = I + C/c \quad (1.108)$$

matrisleri sırasıyla $\tilde{X}(n)$ ve $\tilde{Y}(n)$ ile göstereceğimiz kesikli parametrelili homojen Markov zincirleri yardımcı olmaktadır. Bilindiği gibi bu kesikli zincirler üretici matrisleri sırasıyla Q ve C olan sürekli homojen zincirlerin temelinde yatan zincirlerdir(20).

Aşağıdaki teorem ve sonuçlar $X(t)$ zincirinin indirgenemezliği için gerek (ve yeter) şartları vermektedir.

1.9.3. Teorem : $X(t)$ indirgenemezdir $\Leftrightarrow \tilde{P}\tilde{R}$ kesikli indirgenemez homojen bir Markov zincirinin geçiş matrisidir.

1.9.4. Sonuç : Eğer $\tilde{X}(n)$ veya $\tilde{Y}(n)$ indirgenemezse, $X(t)$ de indirgenemezdir.

1.9.5. Sonuç : $X(t)$ indirgenemezdir $\Leftrightarrow \frac{1}{2} (\tilde{P} + \tilde{R})$ kesikli indirgenemez homojen bir Markov zincirinin geçiş matrisidir.

C ve Q değişmeliyken, $\tilde{P}$ ve $\tilde{R}$ de değişmeli olur ve bu durumda $X(t)$ nin ergodikliği için $\tilde{X}(n)$ veya $\tilde{Y}(n)$ 'den bi-

rinin ergodikliği yeterlidir. Aşağıdaki teorem bu durumu ifade etmektedir.

1.9.6. Teorem : $\tilde{X}(n)$ veya $\tilde{Y}(n)$ bir Π limit dağılı-
mıyla ergodik olsun. Bu durumda $X(t)$ de aynı limit dağı-
lımıyla ergodiktir.

Sabit nedensel matrisli Markov zincirinin gúçlü er-
godikliği de $\tilde{X}(n)$ ve $\tilde{Y}(n)$ zincirlerinin ergodikliğiyle
incelenebilir. Sürekli parametrelili bir Markov zincirinin
gúçlü ergodikliği $\|A\| = \text{e.k.ü.s.} \{ \sum_{j \in E} \{ a_{ij} \} \}$ normu yardı-
 $i \in E$

mıyla tanımlanabilir. Eğer her $s \geq 0$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|P(s, t) - L\| = 0 \quad (1.109)$$

olacakşekilde satırları birbirine eşit bir L stokastik
matrisi varsa, zincire gúçlü ergodiktir, denilir.

1.9.7. Teorem : Eğer $\tilde{X}(n)$ veya $\tilde{Y}(n)$, Π limit dağı-
lımıyla gúçlü ergodikse, $X(t)$ de aynı dağılımla gúçlü
ergodiktir.

BÖLÜM 2

MARKOV ZİNCİRLERİNDE DURUM TAHMİNLERİ

2.1. Kesikli Parametrelili Markov Zincirlerinde Durum Tahmini

Biz elimizde M dönem boyunca yığının tümüne ait $n_{ij}(t)$, $t = 1, 2, \dots, M$: Önceki dönemde i durumunda olup bulunulan t döneminde j durumunda bulunan birimlerin sayısının bulunmadığı, yalnızca $n_j(t) = \sum_i n_{ij}(t)$, yani bulunulan dönemde j durumundaki birimlerin sayısının var olması halinde doğrusal istatistiksel modeller aracılığıyla durum tahminini vereceğiz. Bu durumda aşağıdaki yol izlenir : $\{X_t; t \in \mathbb{N}\}$ ilgili MZ olmak üzere

$$P\{X_{t-1} = i, X_t = j\} = P\{X_{t-1} = i\}P\{X_t = j | X_{t-1} = i\} \quad (2.1)$$

eşitliğinde olasılığın "genel toplam kuralı" nı uygularsak, r durum sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^r P\{X_{t-1} = i, X_t = j\} = \sum_{i=1}^r P\{X_{t-1} = i\}P\{X_t = j | X_{t-1} = i\} \quad (2.2)$$

$$P\{X_t = j\} = \sum_{i=1}^r P\{X_{t-1} = i\}P\{X_t = j | X_{t-1} = i\} \quad (2.3)$$

bulunur. Burada $q_j(t) = P\{X_t = j\}$ ve MZ'nde geçiş olasılıkları tanımıyla, son bağıntı

$$q_j(t) = \sum_{i=1}^r q_j(t-1)p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (2.4)$$

halini alır. Bu bağıntıda $q_j(t)$ ler yerine gerçek gözlemlenmiş $y_j(t)$ oranları konulsa, 1 olasılıkla, yani yüzde yüz olasılıkla bu bağıntıyı gerçekleyen bir p_{ij} :

$i, j = 1, 2, \dots, r$ geçiş olasılıkları kümesi bulunamaz. Ancak p_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, r$ geçiş olasılıklarının bir hata terimi farkıyla yukarıdaki bağıntıyı sağladığı söylenebilir. Bir başka deyişle örnek gözlemleriyle geçiş olasılıkları arasında, $u_j(t)$ hata terimi olmak üzere

$$y_j(t) = \sum_{i=1}^r y_i(t-1)p_{ij} + u_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (2.4)$$

biçiminde stokastik bir bağıntı vardır. (2.4) bağıntısını, $y_j = \{y_j(t)\}$: Mx1 tipinde gözlem oranlarının vektörü, $p_j = (p_{1j}, p_{2j}, \dots, p_{rj})$: rx1 tipinde tahmin edilen geçiş matrisinin j.sütunu, u_j : Mx1 tipinde hata vektörü ve X_j : Mxr tipinde

$$X_j = \begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \dots & y_r(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1(t-1) & y_2(t-1) & \dots & y_r(t-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1(M-1) & y_2(M-1) & \dots & y_r(M-1) \end{bmatrix}$$

biçiminde bir matris olmak üzere

$$y_i = X_j p_j + u_j, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (2.5)$$

olarak matrisyel biçimde ifade edebiliriz.

Bundan sonraki altkesimlerde X_j matrisi ve u_j hata vektörüne ilişkin varsayımlara göre (2.5) modelinden

p_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, r$ parametrelerini tahmin etmeye çalışacağız.

a. Kısıtsız ve Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmin Edicişi

Bu tahmin edicilerde (2.5) modelinde X_j 'nin rankının r olduğunu, ve ayrıca w_{jj} : $M \times M$ pozitif tanımlı köşegen bir matris olmak üzere hata vektörü için

$$E[u_j] = 0 \quad (2.6a)$$

$$E[u_j u_j'] = \sigma_j^2 w_{jj}, \quad \sigma_j^2 \in \mathbb{R} \quad (2.6b)$$

gerçeklendiğini varsayıyoruz. Burada şu noktayı belirtmekte yarar var : hata vektörünün varyansının $E[uu'] = \sigma^2 I$ biçiminde olması, yani u_j 'lerin eşit varyanslara sahip olması, en küçük kareler (EKK) tahmin edicilerinin en iyi özelliklerinin ortaya çıkması için, özellikle doğrusal sapmasız tahmin ediciler arasında en küçük varyansa sahip olmak için istenir. Ancak EKK yöntemini kullanmak için bu "varyansların eşitliği" varsayımı gerekli değildir(2).

(2.5) bağıntısını $y' = (y_1', y_2', \dots, y_r')$, $p' = (p_1', p_2', \dots, p_r')$ $u' = -(u_1', u_2', \dots, u_r')$ ve

$$X = Ksg[X_j], \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (2.7)$$

olmak üzere daha kısa bir biçimde

$$y = Xp + u \quad (2.8)$$

ile gösterebiliriz. Burada X 'in köşegenindeki X_j matrislerinin tanımından hepsinin birbirine eşit olduğunu bi-

liyoruz : $X_1 = X_2 = \dots = X_r$. Bu yeni gösterimle hata vektörüne ilişkin varsayımlar

$$E[u] = 0 \quad (2.9a)$$

$$E[uu'] = \Sigma \quad (2.9b)$$

biçimine dönüşür. Burada Σ : $M \times M$ tipinde singular bir matristir. Çünkü (2.5)'den

$$u_j = y_j - X_j p_j$$

$$\sum_{j=1}^r u_j = \sum_{j=1}^r y_j - \sum_{j=1}^r X_j p_j$$

$$= 1_M - X_j 1_r = 1_M - 1_M = 0$$

dır. Bu ise Σ 'nin satırlarının doğrusal bağımlı olması demektir. Bu durumda $M > r$ olmak üzere (2.8) modelindeki geçiş olasılıklarının EKK tahmini için

$$\theta = u'u = (y - Xp)'(y - Xp) \quad (2.10)$$

pozitif tanımlı kuadratik formunu enküçükleyen

$$\tilde{p} = (X'X)^{-1}X'y \quad (2.11)$$

çözümü bir başlangıç çözüm olarak kullanılabilir (2,6). Burada X matrisinin yapısı gereği geçiş matrisinin j . sütunu için

$$\tilde{p}_j = (X_j'X_j)^{-1}X_j'y_j, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (2.12)$$

biçiminde bir başlangıç çözüm verilebilir. Yine X matrisinin özel yapısı gereği, $\tilde{p}$, geçiş olasılıklarına ait

$$\sum_{j=1}^r p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.13)$$

koşulunu gerçekler(6). Ancak

$$0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (2.14)$$

koşulu gerçekleşmez. Bu kısıtı da ele alınca problemi-
miz, $I_i: r \times r$ tipinde birim matris ve $G = [I_1, I_2, \dots, I_r]$
olmak üzere

$$\begin{aligned} G_p &= I_r \\ p &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.15a)$$

kısıtları altında

$$u'u = (y - Xp)'(y - Xp) \quad (2.15b)$$

enküçükleyen tahminleri bulmak, oluyor. Oysa bu problem

$$\begin{aligned} Gp &\leq I_r \\ -Gp &\leq -I_r \end{aligned} \quad (2.16a)$$

$$p \geq 0$$

kısıtları altında

$$\text{Enb } Z = (X'y - X'X\tilde{p}^c)'p \quad (2.16b)$$

fonksiyonunu eniyileyen $\tilde{p}^c$ 'yi bulmak biçiminde bir doğru-
sal programlama (DP) problemine indirgenebilir(6). Öte
yandan (2.16) modelinin duali

$$[G', -G'] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \geq X'y - X'X\tilde{p}^c \quad (2.17a)$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

kısıtları altında

$$\text{Enk } w = [\lambda_1' \lambda_2'] \begin{bmatrix} l_r \\ -l_r \end{bmatrix} \quad (2.17b)$$

fonksiyonunu eniyilemektir. Burada $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^r$ dual değişkenlerdir. $\tilde{p}^c$ kısıtlı çözümünü (2.16) ve (2.17) modellerini aşağıdaki gibi birleştirerek problemden çıkarabiliriz: α_1, α_2 asıl modelin ve β dual modelin aylâk değişkenleri olmak üzere

$$\begin{aligned} Gp &= l_r \\ G'\lambda_1 - G'\lambda_2 + (X'X)p - \beta &= X'y \end{aligned} \quad (2.18a)$$

$$p, \lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta \geq 0$$

kısıtları altında

$$(X'y - X'Xp)'p - \lambda_1' l_r + \lambda_2' l_r = -\lambda_1' \alpha_1 - \lambda_2' \alpha_2 - \beta' p \leq 0 \quad (2.18b)$$

fonksiyonunu enbüyüklemek.

Ancak başlangıçta kuadratik programlama (KP) problemi için P.Wolfe'un geliştirdiği KP için standart simpleks algoritması da kullanılabilir. KP için simpleks algoritması aşağıdaki gibi kurulur(3,6).

Tablo 3. Kuadratik Programlamada Simpleks Algoritmasına İlişkin Tablo

B_0	λ_1	λ_2	p	α_1	α_2	β
l_r			G	I		
$-l_r$			G		I	
$X'y$	G'	$-G'$	$X'X$			$-I$

b. Eşitsizlik Kısıtlı Tartılı En Küçük Kareler Tahmin Edicileri

Önceki altkesimde EKK tahmin edicilerinde hataya ilişkin kovaryans matrisi Σ 'nın singular olduğunu göstermiş, öte yandan $\Sigma = \sigma^2 I$ biçiminde olduğunda EKK tahmin edicisinin en küçük varyanslı, yani etkin olacağını belirtmiştik. Σ 'nın singular olduğu ve hata terimlerine ilişkin varyansların eşit olmadığı durumda, önceki kesimdeki EKK tahmin edicilerinden daha etkin bir tahmin edici "tartılama" veya "ağırlıklandırma" yoluyla elde edilebilir. Tartılı EKK yöntemi, Σ singular olmadığında elde edilebilen

$$p = (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} y \quad (2.19)$$

çözümünde Σ yerine singular olmayan bir "ağırlık" veya "tartı" matrisi koymak biçiminde özetlenebilir.

Ağırlık matrisleri çok çeşitli olabilir. Biz burada Monte Carlo teknikleriyle önemli özellikleri ortaya konmuş olanları(6) veriyoruz. Başka ağırlık matrisi örnekleri için (2) ve (3)'e bakılabilir.

İstatistiksel modelimizi tekrar yazalım :

$$y = Xp + u$$

$$E[u] = 0 \quad (2.20)$$

$$E[uu'] = \Sigma$$

ve Σ , köşegensel olmayan singular matristi.

Ağırlığı belirlemede kullanacağımız matris $H: rM \times rM$ olsun. Modelimizi H ile soldan çarpalım :

$$H_y = HXp + H_u \quad (2.21)$$

Bu yeni modelin tartıllı EKK tahmini

$$\hat{p} = (X'H'HX)^{-1}X'H'HXy \quad (2.22)$$

dir.

Gerçekte Σ singular olduğundan hata terimlerinin farklı varyanslarını birbirine eşit olan varyanslara dönüştürecek hiçbir $H'H$ ağırlık matrisi yoktur. Bunu öz-değer kavramı ve Σ 'nın köşegenleştirilmesinden söyleyebiliriz. Ancak tartıllı EKK tahmin edicisi önceki kesimdeki tartısız EKK tahmin edicilerinden daha etkindir.

Ağırlık matrisi belirlenirken şu durumlar karşımıza çıkar : kısıtlardaki denklemlerin ağırlıkları farklı, denklemdeki değişkenlerin ağırlıkları aynı ve kısıtlardaki denklemlerin ağırlıkları farklı, denklemdeki değişkenlerin ağırlıkları farklı. Bu iki durumu kısaca sırasıyla, farklı-aynı ve farklı-farklı olarak ifade edelim.

Farklı-aynı ağırlığı kısıtsız EKK ile uygulandığında elde edilen sonuç, kısıtsız tartısız EKK tahminiyle aynıdır(6). Yani tartılama işlemini kısıtsız tahmin edicilerle birlikte uygulamanın hiçbir kazancı yoktur. Öte yandan farklı-farklı ağırlığı kısıtsız EKK ile birlikte uygulandığında, kısıtsız EKK tahmin edicileri satır toplamı koşulunu gerçekleştirmez duruma düşmektedir(6). O halde tar-

tılama işlemini yalnızca kısıtlı EKK tahmin edicileriyle birlikte kullanabiliriz.

Şimdi bazı özel ağırlık matrisleri veriyoruz. H matrisi $a_i \in \mathbb{R}$, $d_i: M \times M$ ($i = 1, 2, \dots, r$) köşegen matrisler olmak üzere

$$H = Ksg(a_i d_i) \quad (2.23)$$

biçiminde olsun. Bu durumda ağırlık matrisimiz

$$H'H = Ksg(a_i^2 d_i' d_i) \quad (2.24)$$

olur. Şimdi tartılama işlemine örnekler verelim :

1. Farklı-Aynı Ağırlığı. $d_i = I$ ve

(i) $\tilde{p}_i$ kısıtsız tahmin olmak üzere

$$a_i = (M-r) / [(y_i - x\tilde{p}_i)'(y_i - x\tilde{p}_i)], \quad (2.25)$$

yani, "i.denklemin fark(residual) terimine ilişkin kareler toplamı bölü $M-r$ " nin tersi.

$$(ii) a_i = M / (\sum_t y_i(t)), \quad (2.26)$$

bütün gözlem yapılan dönemler üzerinden i.durumdaki bireylerin oranlarının ortalamasının tersi.

$$(iii) a_i = [(\frac{\sum_t y_i(t)}{M}) (1 - \frac{\sum_t y_i(t)}{M})]^{-1}, \quad (2.27)$$

"bütün dönemler üzerinden i.durumdaki bireylerin ortalama oranı çarpı i.durumda olmayanların oranı" nın tersi.

2. Farklı-Farklı Ağırlığı.

Hata terimlerinin varyansının ilgili durumdaki gözlemlerin gerçek parametrik oranıyla orantılı olduğu düşünülebilir. Öte yandan varsayımlarımıza göre örnek değerleri vektörü $y = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t))$; parametreleri $N(t)$ ve $q_j(t)$ olan bir multinomiyal bir $X = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_r(t))$ vektörüyle aynı dağılımdan gelmektedir. Dolayısıyla her bir $X_j(t)$, $N(t)$ ve $q_j(t)$ parametrelili bir binom dağılımına sahiptir ve varyansı

$$\text{Var}(X_j(t)) = N(t)q_j(t)(1-q_j(t)), \quad (2.28)$$

$q_j(t) = 0,5$ 'te en büyük değerine ulaştığından, ilk düşünce

$$\sigma_j^2(t) \propto \begin{cases} q_j(t)/N(t) & , q_j(t) \leq 0,5 \\ (1-q_j(t))/N(t), q_j(t) \geq 0,5 \end{cases} \quad (2.29)$$

biçiminde ifade edilebilir. O halde $q_j(t) \leq 0,5$ olan uygulamalarda ağırlık matrisinin j .köşegen elemanı

$$a_j^2 d_j^2 = K \text{sg}(N(t)/y_j(t)), \quad t = 1, 2, \dots, M \quad (2.30)$$

olur.

Kısıtlı durumlarla birlikte uygulanan tartıtlı tahmin ediciler tartısız tahmin edicilerden üstündür. Tartıtlı tahmin ediciler kendi aralarında "Hata Karelerinin Ortalamasının Karekökü" kriterine göre karşılaştırıldığında, örnek hacmi büyük iken "ortalamanın tersi" tartısı en iyi tahmini vermektedir. "Durum oranlarının çarpı-

manın tersi" tartılı tahmin edici ise, diğer tartılı tahmin ediciler kadar iyi değildir(6).

c. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicisi

a. altkesimde hata vektörüne ilişkin kovaryans matrisi Σ 'nin singular oluşu yüzünden, bilinen EKK yöntemi ile geçiş matrisinin elemanlarını tahmin edemiyorduk. Σ 'nin singularlığı satırlarının aralarında doğrusal bağımlı oluşu, dolayısıyla modelde fazla değişkenlerin bulunuşundan kaynaklanmaktadır(6). Öte yandan $r-1$ tane bağımsız gözlem vektörü y_j ve $r-1$ tane bağımsız parametre vektörü p_j vardır. O halde diğer $r-1$ bağımsız vektöre bağımlı olan r .vektöre ait denklem sistemden çıkarılabilir. Modelimizde genelliği bozmayacağından, (2.5) denklemin-den son satırı çıkarırsak indirgenmiş modelimiz

$$y_{\bar{x}} = X_{\bar{x}} p_{\bar{x}} + u_{\bar{x}}$$

$$E(u_{\bar{x}}) = 0 \quad (2.31)$$

$$E(u_{\bar{x}} u_{\bar{x}}') = \Sigma_{\bar{x}}$$

biçiminde yazılabilir. Bu modelin çözümü, $I_1: r \times r$ tipinde birim matrisler ve $R = [I_1, I_2, \dots, I_{r-1}]$ olmak üzere

$$R p_{\bar{x}} \leq I_r$$

$$p_{\bar{x}} \geq 0 \quad (2.32a)$$

kısıtları altında

$$(y_{\bar{x}} - X_{\bar{x}} p_{\bar{x}})' \Sigma_{\bar{x}}^{-1} (y_{\bar{x}} - X_{\bar{x}} p_{\bar{x}}) \quad (2.32b)$$

fonksiyonunu enküçükmektir. Bu KP problemi de istenirse kısıtlı EKK yönteminde olduğu gibi bir DP problemine dönüştürülerek çözülebilir.

Modelden çıkarılan r.parametre vektörünün tahmini de, $\hat{p}_x$, (2.32) probleminin çözümü olmak üzere

$$\hat{p}_r = I_r - R_{P_x} \quad (2.33)$$

şeklinde elde edilebilir.

Bu tahmin edicide Σ , dolayısıyla Σ_x matrisi y_j oranlarının, ortalaması $q_j(t)$ varyansları $q_j(t)[1-q_j(t)]/N(t)$ ve kovaryansları $-q_i(t)q_j(t)/N(t)$ olan bir multinomiyal dağılımdan geldiği varsayımına dayanılarak oluşturulur.

d. Minimum Ki-Kare Tahmin Edicileri

Önceki altkesimlerdeki gibi, M döneme ilişkin elimizde bulunan $y_j(t)$ oranlarının parametreleri $q_j(t), N(t)$ olan bir multinomiyal dağılımdan geldiğini varsayalım. Ayrıca ilk altkesimde bu $q_j(t)$ olasılıklarının birinci dereceden bir Markov sürecinden geldiğini varsaymış ve $y_j(t)$ gözlenmiş oranlarıyla arasında

$$q_j(t) = \sum_i y_i(t-1)P_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (2.34)$$

şeklinde bir bağıntının varlığını belirtmiştik.

Gözlemlenmiş oranlar $y_j(t)$ 'lerle teorik oranlar $q_j(t)$ 'ler arasındaki farkın örnekleme hatasından kaynaklandığı düşünülebilir. Buna dayanarak $N(t)y_j(t)$ gözlem-

lanmış frekanslar ve $N(t)q_j(t)$ teorik frekanslarının uygunluğu, $N(t)q_j(t) \neq 0$ olmak koşulu altında

$$\chi^2 = \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^r \frac{[N(t)y_j(t) - N(t)q_j(t)]^2}{[N(t)q_j(t)]} \quad (2.35)$$

$M(r-1)$ serbestlik dereceli ki-kare istatistiğiyle sınanabilir(43,44). Aynı istatistik enküçüklenecek geçiş olasılıkları için bir tahmin elde edilebilir. Bu tahmin ediciye "minimum ki-kare (MKK) tahmin edicisi" diyeceğiz.

Gerçekten (2.35) ifadesi $y'_j = [y_j(1), y_j(2), \dots, y_j(M)]$, $y'_x = [y'_1, y'_2, \dots, y'_{r-1}]$, $x_p x = \{q_j(t)\}$, $j = 1, 2, \dots, r-1$, $t = 1, 2, \dots, M$ olmak üzere

$$\chi^2 = (y_x - x_p x)' \Sigma_x^{-1} (y_x - x_p x) \quad (2.36)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\Sigma_x^{-1}: M(r-1) \times M(r-1)$ tipinde bir köşegen matris olup

$$\Sigma_x^{-1} = K_{sg} \left[\frac{N(t)}{q_j(t)} + \frac{N(t)}{q_r(t)} \right], \quad j = 1, 2, \dots, r-1; \quad t = 1, 2, \dots, M \quad (2.37)$$

biçimindedir.

(2.36) modelini doğrudan enküçükleyen çözüm

$$\hat{p}_x = (x' \Sigma_x^{-1} x)^{-1} x' \Sigma_x^{-1} y_x \quad (2.38)$$

kısıtsız en küçük ki-kare tahminini verir. Kısıtlı çözüm, (2.36) modeline $R = [I_1, I_2, \dots, I_{r-1}]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R p_x &< 1_r \\ p_x &\geq 0_r \end{aligned} \quad (2.39)$$

kısıtları eklenerek bulunur. Burada elde edilen ki-kare çözümü genelleştirilmiş EKK tahmin edicisiyle aynıdır(6).

Uygulamada elimizde genelde $q_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, r$; $t = 1, 2, \dots, M$ değerleri bulunmadığından, $\Sigma_{\mathbf{x}}^{-1}$ matrisinde bu değerler yerine $y_j(t)$ 'ler konur ve tahmini olan $\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}}^{-1}$ elde edilir. Bu işlem (2.35)'i enküçükleyen ki-kare değerinin

$$(\hat{\mathbf{x}}')^2 = \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{r-1} \frac{[N(t)y_j(t) - N(t)q_j(t)]^2}{[N(t)y_j(t)]} \quad (2.40)$$

biçiminde alınması demektir. Bu değerink enküçüklenmesiyle elde edilen tahmin ediciye "değiştirilmiş minimum ki-kare (DM-KK) tahmin edicisi" denilir(6).

e. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

Yine herbir döneme ilişkin $y_j(t)$ oranlarının $q_j(t)$, $N(t)$ parametreleriyle bir multinomiyal dağılımdan geldiğini varsayıyoruz. Buna göre çekilen örneklerin dağılımı bilindiğinden, bilinmeyen P_{ij} parametrelerini en çok olabilirlik yöntemiyle de tahmin edebiliriz.

$N(t)$, t anında gözlem yapılan toplam birim sayısı, $n_i(t)$, t anında i .durumda bulunan gözlenen birim sayısı ve bunların arasındaki ilişki

$$\sum_i n_i(t) = N(t) \quad (2.41)$$

dir. Dolayısıyla herhangi bir örnekte herbir i durumunda $n_i(t)$ birimin gözlenmesine ilişkin ortak dağılım

$$f(n(t)|q(t),N(t)) = \frac{N(t)!}{\prod_{i=1}^r n_i(t)!} \prod_{j=1}^r q_j(t)^{n_j(t)} \quad (2.42)$$

olur. Burada $n(t)$ ve $q(t)$, sırasıyla $n_j(t)$ ve $q_j(t)$ 'lerin oluşturduğu vektörlerdir. Öte yandan $t = 1, 2, \dots, M$ dönemleri boyunca yapılan gözlemlerin bağımsızlığını da düşünerek, bu gözlemlerde ortaya çıkan sonuçların ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(n|q,N) = \prod_{t=1}^M \frac{N(t)!}{\prod_{i=1}^r n_i(t)!} \prod_{j=1}^r q_j(t)^{n_j(t)} \quad (2.43)$$

ile verilebilir. Burada $n = [n(1), n(2), \dots, n(M)]$, $q' = [q(1)', q(2)', \dots, q(M)']$ ve $N' = [N(1), N(2), \dots, N(M)]$ olarak tanımlanmıştır. Ayrıca $N(t)$ 'ler belli ve $\sum_i q_i(t) = 1$ olduğundan, $n_j(t)$ 'lerin ve $q_j(t)$ 'lerin herbir t için yalnız $r-1$ tanesi bağımsızdır. Bu ve

$$n_i(t) = N(t)y_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.44)$$

olduğu düşünülerek (2.43)'den olabilirlik fonksiyonu

$$L(p|y) = \prod_{t=1}^M \frac{N(t)}{\prod_m (N(t)y_m(t))! (N(t) - \sum_k (N(t)y_k(t-1)))!} \times \\ \times \prod_j (\sum_i y_i(t-1)p_{ij})^{N(t)y_j(t)} (1 - \sum_{ki} y_i(t-1)p_{ik})^{N(t) - \sum_k (N(t)y_k(t))} \quad (2.45)$$

$m, j, k = 1, 2, \dots, r-1$, $p = [p_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, r$ (sütun vek.)

şeklinde elde edilir. Sonra alışıldığı üzere bu fonksiyonun logaritması alınarak,

$$X'_{\mathbf{x}} \Sigma_{\mathbf{x}}^{-1} y_{\mathbf{x}} - X'_{\mathbf{x}} \Sigma_{\mathbf{x}}^{-1} X_{\mathbf{x}} p_{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.46)$$

matrisyel gösterimine ulaşılır(4,6). Bu eşitlikte X_j 'ler ilk altkesimde tanımlanan gözlem oranlarının matrisi olmak üzere

$$X_{\mathbf{x}} = K \text{şg}[X_j], \quad j = 1, 2, \dots, r-1 \quad (2.47)$$

ve

$$\Sigma_{\mathbf{x}}^{-1} = [\Sigma^{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, r-1 \quad (2.48)$$

biçimindedir. $y_j(t)$ oranlarına ilişkin varyans-kovaryans matrisinin tersi olan bu $\Sigma_{\mathbf{x}}^{-1}$ in elemanları

$$\Sigma^{ij} = K \text{şg}[N(t)/q_r(t)], \quad i \neq j \quad (2.49)$$

ve

$$\Sigma^{jj} = K \text{şg} \left[\frac{N(t)}{q_j(t)} + \frac{N(t)}{q_r(t)} \right], \quad t = 1, 2, \dots, M \quad (2.50)$$

dir.

$\Sigma_{\mathbf{x}}$ bilindiğinde (2.46) sistemini kısıtsız enbüyükleyen çözüm bize en çok olabilirlik (EÇO) tahminini verir. Ancak olabilirlik fonksiyonunun "mod"u geçiş olasılıklarını belirleyen bölgeye düşmeyebilir. Bu bölgede bazı durumlarda olabilirlik fonksiyonunun yerel maksimumu, bazı durumlarda da mutlak maksimumu bulunabilir. Mutlak maksimuma uygun çözüm bölgesinde ulaşıldığında, kısıtsız tahmin ediciyle kısıtlı tahmin edici çakışır. Mutlak maksimum uygun bölgede olmadığında yerel maksimum

şöyle aranır : (2.46) sistemine $R = [I_1, I_2, \dots, I_{r-1}]$ ile

$$R p_x \leq 1_r \quad (2.51a)$$

ve

$$p_x \geq 0 \quad (2.51b)$$

kısıtları eklenerek problem yine EKK yönteminde olduğu gibi DP ve KP ile çözülebilir.

f. Bayes Tahmin Edicisi

EÇO tahmin yöntemi uygulanan verilerde oranlara ek olarak baştaki bir döneme ait bütün geçiş olasılıkları (p_{ij} 'ler) biliniyorsa veya uygun olasılıklar öngörülebiliyorsa, bu bilgiler olabilirlik fonksiyonuyla birleştirilip parametrelerin Bayes tahmini de elde edilebilir.

Biz Önsel dağılım olarak çok değişkenli beta dağılımının alındığı Bayes tahminlerini vereceğiz. Çünkü beta dağılımı çok değişik durumları yansıtabilen bir dağılımdır, ve ayrıca multinomiyal dağılımdan çekilen örnekler için eşlenik bir Önsel dağılımdır, yani beta Önsel dağılım olarak kullanıldığında sonsal dağılım da bir beta dağılımı olmaktadır(45).

Yukarıda anlatılanlara göre, zincirin geçiş matrisinin i .satırı $p_i' = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ir})$ 'nin Önsel dağılımı, $a_i' = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir})$ i .satırın Önsel parametreleri olmak üzere

$$f(p_{ij}|a_i) = \frac{\Gamma(1/a_i)}{\prod_{j=1}^r \Gamma(a_{ij})} \prod_{j=1}^r p_{ij}^{a_{ij}-1} \quad (2.52)$$

ile verilebilir. Beta dağılımının ortalama ve varyansından önsel dağılımın ortalama ve varyansını

$$E(p_{ij}) = a_{ij} / \sum_{j=1}^r a_{ij} = a_{ij} / a_i \quad (2.53a)$$

$$\text{Var}(p_{ij}) = a_{ij}(a_i - a_{ij}) / a_i^2(a_i + 1) \quad (2.53b)$$

olarak yazabiliriz. Benzer şekilde i.satırın herhangi iki elemanı arasındaki önsel kovaryans

$$\text{Cov}(p_{ik}, p_{ih}) = a_{ik}a_{ih} / a_i^2(a_i + 1) \quad (2.53c)$$

olur. Öte yandan geçiş olasılıkları matrisinin r.satırının herbirinin birbirinden bağımsız bir önsel dağılıma sahip olduğunu varsayarsak, tüm geçiş olasılıklarına ait ortak önsel dağılım

$$f(P|A) = \prod_{i=1}^r f(p_i|a_i) \quad (2.54)$$

ile verilebilir. Yine geçiş olasılıklarının multinomiyal bir dağılımdan geldiği varsayımından gözlemlerin elimizde olması koşulu altında olabilirlik fonksiyonu

$$L(p_x|y) = \prod_{t=1}^M \frac{N(t)!}{\prod_m [N(t)y_m(t)]! \prod_k [N(t) - \sum_k N(t)y_k(t)]!} \times$$

$$\times \prod_j [\sum_i y_i(t-1)p_{ij}]^{N(t)y_j(t)} \prod_k [1 - \sum_i y_i(t-1)p_{ik}]^{N(t)[1 - \sum_k y_k(t)]}$$

$$j, k, m = 1, 2, \dots, r-1; i = 1, 2, \dots, r \quad (2.55)$$

olur. Bayes tahmin edicilerin istatistiksel teorisi gereğince, ortak önsel dağılımla olabilirlik fonksiyonunu çarpar ve bu çarpımda $n_j(t) = N(t)y_j(t)$,

$q_j(t) = \sum_{i=1}^r y_i(t-1)p_{ij}$ koyar ve parametre içermeyen sa-

bitleri K altında toplarsak, geçiş olasılıklarına ilişkin sonsal dağılım

$$f(p_x | n) = K \left\{ \prod_{t=1}^M \prod_{j=1}^{r-1} q_j(t)^{n_j(t)} \left[1 - \sum_{m=1}^{r-1} q_m(t) \right]^{N(t) - \sum_{m=1}^{r-1} n_m(t)} \right\} \quad (2.55)$$

$$x \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{r-1} p_{ij}^{a_{ij}-1} \left[1 - \sum_{k=1}^{r-1} p_{ik} \right]^{a_i - (\sum_{k=1}^{r-1} a_{ik} - 1)} \quad (2.56)$$

olarak elde edilir.

Geçiş olasılıklarını tahmin etmek için sonsal dağılımın modundan yararlanacağız. Çünkü mod civarında diğer merkezi eğilim ölçülerinden daha fazla bir yığılma vardır. Bu işlemi yaparken $0 \leq p_{ij} \leq 1$ koşulunu gözardı ediyor ve yalnızca $\sum_j p_{ij} = 1$ koşulunu kullanıyoruz. Buna göre sonsal dağılımın logaritmasının p_{ij} 'ye göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse

$$\sum_{t=1}^M \left[\frac{n_j(t)}{q_j(t)} - \frac{N(t) - \sum_{m=1}^{r-1} n_m(t)}{1 - \sum_{m=1}^{r-1} q_m(t)} \right] y_i(t-1) + \frac{a_{ij}-1}{p_{ij}} - \frac{a_i - (\sum_{k=1}^{r-1} a_{ik} - 1)}{1 - \sum_{k=1}^{r-1} p_{ik}} = 0, \quad (2.57)$$

$i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, r-1$

bulunur. Bu $r(r-1)$ sayıda denklem aşağıdaki gibi matrisyel biçimde yazılabilir (4,6) :

$$x'_{\mathbf{x}} \Sigma_{\mathbf{x}}^{-1} y_{\mathbf{x}} - x'_{\mathbf{x}} \Sigma_{\mathbf{x}}^{-1} x_{\mathbf{x}} p_{\mathbf{x}} + \Sigma_0^{-1} f - \Sigma_0^{-1} J p_{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.58)$$

Burada $\Sigma_{\mathbf{x}}^{-1}$, $y_j(t)$ 'lerin varyans-kovaryans matrisinin tersi olup, EÇÖ tahmin edicisinde olduğu gibi

$$\Sigma_{\mathbf{x}}^{-1} = [\Sigma^{ij}] \quad (2.59a)$$

ile elemanları $t = 1, 2, \dots, M$ olmak üzere

$$\Sigma^{ij} = K_{\text{şg}} [N(t)/q_r(t)], \quad i \neq j \quad (2.59b)$$

ve

$$\Sigma^{jj} = K_{\text{şg}} \left[\frac{N(t)}{q_j(t)} + \frac{N(t)}{q_r(t)} \right] \quad (2.59c)$$

biçimindedir. Σ_0^{-1} önsel varyans-kovaryans matrisinin tersidir ve elemanları

$$\begin{aligned} \Sigma_0^{-1} &= K_{\text{şg}} [\Sigma_0^{kj}], \quad k, j = 1, 2, \dots, r-1 \\ &= K_{\text{şg}} \begin{cases} (a_i + 1) / (1/P_{ir} + 1/P_{jj}), & k = j \\ (a_i + 1) / P_{ir}, & k \neq j, \quad i = 1, 2, \dots, r \end{cases} \end{aligned} \quad (2.60)$$

biçimindedir. Yani Σ_0^{-1} köşegeni üzerinde Σ_0^{kj} matrisleri blok halinde dizilmiş, $r(r-1) \times r(r-1)$ boyutlu bir matris-tir. Aynı boyutlu J matrisi $i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, r-1$ ile

$$J = K_{\text{şg}} [(a_i - r) / (a_i + 1)] \quad (2.61)$$

olup, köşegeni üzerinde birbirinin aynı blok matrisler dizilmiştir. Son olarak $f: r(r-1) \times 1$ boyutlu, $i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, r-1$ ile

$$f = [(a_{ij}-1)/(a_i + 1)] \quad (2.62)$$

biçiminde bir vektördür.

Tanımlarından da görüldüğü gibi $\Sigma_{\mathbf{x}}^{-1}$ ve Σ_0^{-1} matrisleri bilinmeyen p_{ij} parametrelerini de içermektedir. Bu yüzden sonsal dağılımın mod değerini şu yolla buluruz : $\Sigma_{\mathbf{x}}^{-1}$ ve Σ_0^{-1} matrislerinde p_{ij} 'ler ve ilgili değerlerinin yerine önsel parametreleri koyarak $\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}}^{-1}$ ve $\hat{\Sigma}_0^{-1}$ matrislerini oluşturur ve (2.58) sisteminden ilk tahmini

$$\tilde{p}_{\mathbf{x}}(1) = (\mathbf{x}'_{\mathbf{x}} \Sigma_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{x}_{\mathbf{x}} + \hat{\Sigma}^{-1}_0 \mathbf{J})^{-1} (\mathbf{x}'_{\mathbf{x}} \hat{\Sigma}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{y}_{\mathbf{x}} + \hat{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{f}) \quad (2.63)$$

olarak elde ederiz. Sonraki adımda $\tilde{p}_{\mathbf{x}}(1)$ tahmini değerlerini önsel parametreler olarak alıp aynı yolla $\tilde{p}_{\mathbf{x}}(2)$ ikinci tahmini elde ederiz. Bu işleme $\tilde{p}_{\mathbf{x}}(.)$ tahminleri kararlı kalıncaya kadar devam ederiz. En son elde edilen çözüm aranan mod değeridir. Bu değeri $\tilde{p}_{\mathbf{x}}$ ile gösterelim.

Bu tahmindeki sonsal dağılımın varyans-kovaryans matrisi, $\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}}^{-1}$ ve $\hat{\Sigma}_0^{-1}$, $\tilde{p}_{\mathbf{x}}$ yardımıyla oluşturulmuş matrisler olmak üzere

$$V(\mathbf{p}_{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x}'_{\mathbf{x}} \hat{\Sigma}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{x}_{\mathbf{x}} + \hat{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{J})^{-1} \quad (2.64)$$

dir.

Yukarıda anlattığımız ardıştıma yöntemi Bayes yaklaşımında sonsal dağılım bulunurken yapılan ardıştıma işlemine paraleldir. $\tilde{p}_{\mathbf{x}}(1)$ ilk çözümü $0 \leq p_{ij} \leq 1$ koşulunu gerçeklediğinde, istenirse ardıştıma işlemine başvurulmayabilir, çünkü böyle bir durum sonsal dağılımın

modunun, yani mutlak maksimumunun $0 \leq p_{ij} \leq 1$,
 $i = 1, 2, \dots, r$; $j = 1, 2, \dots, r-1$ kapalı bölgesine düştüğünü
gösterir. Aksi durumda ardıştırma işlemiyle sözkonusu
kapalı bölgeye düşen yerel maksimumu mod olarak almış
oluyoruz.

Yukarıda sonsal dağılım kurulurken $\sum_j p_{ij} = 1$ koşulu
 $p_{ir} = 1 - \sum_{j=1}^{r-1} p_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) biçiminde işleme katıl-
mıştı. Bu, $\tilde{p}_x$ tahmininde r.bileşen $\tilde{p}_{ir}$ 'lerin yer almaması
demektir. İşte bu p_{ir} 'lerin oluşturduğu geçiş matrisinin
r.sütunu $\tilde{p}_x$ 'dan, $R = [I_1 I_2 \dots I_{r-1}]$ olmak üzere

$$\tilde{p}_r = I_r - R\tilde{p}_x \quad (2.65)$$

ile, ve ilgili varyans-kovaryans matrisi, $V(p_x)$, (2.64)de
tanımlandığı gibi olmak üzere

$$V(p_r) = RV(p_x)R' \quad (2.66)$$

ile tahmin edilir.

Ardıştırma yönteminden başka mod değerini geçiş
olasılıklarına ilişkin sonsal dağılımı doğrudan yan ko-
şullarımıza bağlı olarak enbüyükleyerek bulabiliriz. Bu
problem önceki altkesimlerde olduğu gibi $R = [I_1, I_2, \dots, I_{r-1}]$
ile

$$\begin{aligned} R\tilde{p}_x &\leq I_r \\ \tilde{p}_x &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.67a)$$

kısıtları altında

$$(x'_{\bar{x}} \Sigma_{\bar{x}}^{-1} y_{\bar{x}} - x'_{\bar{x}} \Sigma_{\bar{x}}^{-1} x_{\bar{x}} \hat{p}_{\bar{x}} + \Sigma_0^{-1} f - \Sigma_0^{-1} J p_{\bar{x}})' p_{\bar{x}} \quad (2.67b)$$

fonksiyonunu enbüyükleyen $\hat{p}_{\bar{x}}$ 'nin bulunmasına indirgenebilir(4,6). Problemin bu hali duali alınarak, λ dual değişkenler vektörü olmak üzere

$$\begin{aligned} R' \lambda &\geq x'_{\bar{x}} \Sigma_{\bar{x}}^{-1} y_{\bar{x}} + \Sigma_0^{-1} f - x'_{\bar{x}} \Sigma_{\bar{x}}^{-1} x_{\bar{x}} p_{\bar{x}} - \Sigma_0^{-1} J p_{\bar{x}} \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.68a)$$

kısıtları altında

$$\lambda' l_r \quad (2.68b)$$

fonksiyonunu enküçükleme haline dönüştürülebilir. (2.67) ve (2.68) problemleri önceki altkesimlerde olduğu gibi birleştirilerek, $p_{\bar{x}}$ ve α aylak değişkenlerin vektörleri olmak üzere

$$R p_{\bar{x}} + p_r = l_r$$

$$R' \lambda + (x'_{\bar{x}} \Sigma_{\bar{x}}^{-1} x_{\bar{x}} + \Sigma_0^{-1} J) p_{\bar{x}} - \alpha = x'_{\bar{x}} \Sigma_{\bar{x}}^{-1} y_{\bar{x}} + \Sigma_0^{-1} f$$

ve

$$p_{\bar{x}}, \lambda, p_r, \alpha \geq 0 \quad (2.69a)$$

kısıtları altında

$$\begin{aligned} &(x'_{\bar{x}} \Sigma_{\bar{x}}^{-1} y_{\bar{x}} + \Sigma_0^{-1} f - x'_{\bar{x}} \Sigma_{\bar{x}}^{-1} x_{\bar{x}} p_{\bar{x}} - \Sigma_0^{-1} J p_{\bar{x}})' p_{\bar{x}} - \lambda' l_r \\ &= -\alpha' p_{\bar{x}} - \lambda' p_r \leq 0 \end{aligned} \quad (2.69b)$$

fonksiyonunu en büyüklemek olarak ifade edilebilir.

Bu problemin simpleks tablosu aşağıdaki gibidir(6):

Tablo 4. Bayes Tahmin Edicisinin Simpleks Algoritmasına İlişkin Tablo

B_0	$\lambda \geq 0$	$p_x \geq 0$	$p_r \geq 0$	$\alpha \geq 0$
1_r	0	R	I	0
$X'_x \Sigma_x^{-1} y_x + \Sigma_0^{-1} f$	R'	$X'_x \Sigma_x^{-1} X_x + \Sigma_0^{-1} J$	0	-I

g. Minimum Mutlak Sapmalı Tahmin Edici

Kesikli Markov zincirinin geçiş olasılıklarını tahmin etmede yararlandığımız doğrusal modelle gerçekte yaptığımız iş, geçiş olasılıklarına uygun olan

$$y = Xp + u \quad (2.70)$$

biçiminde hiperdüzlemler bulmaktır. Şimdiye kadar söz ettiğimiz tahmin edicilerden çok farklı bir tahmin edici de, gerçek parametrik değerlerden sapmaların mutlak değerlerinin toplamını enküçükleyen tahmin edicidir. Bu tahmin ediciye "minimum mutlak sapmalar (MMS) tahmin edicisi" diyeceğiz.

MMS tahmin edicisini şu yolla buluyoruz :

$a' = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)), u_i(t) = (|u_i(1)|, |u_i(2)|, \dots, |u_i(M)|)$ ve 1_{rM} : rM boyutlu 1 'lerden oluşan vektör olmak üzere

$$y = Xp + u$$

$$Gp = 1_r$$

$$p \geq 0 \quad (2.71a)$$

kısıtları altında

$$a' 1_{rM} \quad (2.71b)$$

mutlak sapmaları DP yoluyla enküçüklenir. Bunun için sapmalar vektörü u ,

$$|u_j(t)| = \max\{0, u_j(t)\} + \max\{-u_j(t), 0\} \quad (2.72a)$$

ve

$$u_j(t) = \max\{0, u_j(t)\} - \max\{-u_j(t), 0\} \quad (2.72b)$$

olduğundan, $u_1 = [\max\{0, u_j(t)\}]$ ve $u_2 = [\max\{-u_j(t), 0\}]$ olmak üzere

$$u = u_1 - u_2 \quad (2.72c)$$

biçiminde, "pozitif" ve "negatif sapma" vektörlerinin farkı olarak ifade edilebilir. Bu durumda (2.71) problemi

$$y = Xp + u_1 - u_2$$

$$G_p = l_r$$

$$p, u_1, u_2 \geq 0 \quad (2.73a)$$

kısıtları altında

$$(u_1 + u_2)' l_{rM} \quad (2.73b)$$

mutlak sapmalarının enküçüklenmesi olur. Bu problemin simpleks tablosu aşağıdaki gibi düzenlenebilir(6) :

Tablo 5. En Küçük Mutlak Sapmalar Tahmin Edicisinin Simpleks Tablosu

C_j		0	l_{rM}	l_{rM}
B_0		P	u_1	u_2
l_{rM}	Y	X	I	-I
m	l_r	G	0	0

Burada m temelde olan bir yapay değişkene atanan "çok büyük" bir fiattır (Büyük M yöntemi).

MMS tahmin edicisinde herbir gözlemdeki sapmalar oldukça farklıysa, bir başka deyişle u değişen varyanslı ancak iç ilişkisizse, gözlemler köşelerinde u_1 'lerin standart sapmaları bulunan bir H matrisiyle tartılandırılabilir. Bu, H matrisini

$$\psi(p) = (Ha)'l_{rM} \quad (2.74)$$

biçiminde işleme katmak demektir. Bu haliyle problemimizi bütünüyle formüle edersek,

$$y = Xp + u_1 - u_2$$

$$Gp = l_r$$

$$p, u_1, u_2 \geq 0 \quad (2.75a)$$

kısıtları altında

$$(u_1 + u_2)'H'l_{rM} \quad (2.75b)$$

fonksiyonunu enküçüklemek Problemin bu halinde simpleks tablosunda önceki verilen tablodan farklı olarak l_{rM} yerinde $H'l_{rM}$ yer alır. Yani tartılamayla problemin yalnızca fiyat vektörü l_{rM} , $H'l_{rM}$ olarak değişmiş oluyor.

2.2. Kesikli Tahmin Edicilerin Özellikleri

Ortalama hata karenin karekökü kriterine göre iyilik dereceleri bakımından kesikli durumda kullanılan tahmin ediciler şöyle sıralanabilir(6) : Bayes, En Çok Olabilirlik, Genelleştirilmiş EKK, Minimum Ki-Kare, Kısıtlı EKK,

Minimum Mutlak Sapmalı ve Kısıtsız EKK.

Tahmin ediciler varyansları bakımından sıralandığında da yukarıdaki sonuç elde edilmektedir. Yani tahmin edicilerin varyansları EKK tahmin edicilerinden, EÇÖ ve Bayes tahmin edicilerine doğru küçülmektedir. Bunlardan özellikle Bayes tahmin edicisinin varyansının küçülmesinde, bu tahmin edicinin örnek bilgisi yanında önsel bilgiyi de kullanması etkin olmaktadır.

Öte yandan d.altkesimde de belirttiğimiz gibi, tahmin edilen geçiş olasılıkları yardımıyla kestirilen oranların aynı dağılımdan geldiği; bir başka deyişle gözlemlenen oranların geçiş olasılıkları tahmin edilen Markov süreci tarafından üretildiği Anderson ve Goodman'ın geliştirdiği ki-kare istatistiğiyle sınanabilir. (43,44). Bunun için, multinomiyal dağılımdan geldiğini varsaydığımız r sayıda $n_j(t)$ frekansının asimptotik normal dağıldığı varsayımı altında ilgili ki-kare istatistiği

$$\chi^2_{(r-1)M} = \sum_{ti} (n_i(t) - N(t)\hat{y}_i(t))^2 / N(t)\hat{y}_i(t) \quad (2.76)$$

biçiminde oluşturulur. Bu istatistik bakımından Değiştirilmiş Minimum Ki-Kare tahmin edicisi en iyi tahmin edicidir. Minimum Ki-Kare tahmin edicisi ise, yalnızca küçük örnekli gözlemler durumunda diğer tahmin edicilerden daha büyük olabilen ki-kare değeri verebilmektedir. Bundan başka hata vektörüne ilişkin varyans-kovaryans matrisi bilindiğinde, Minimum Ki-Kare tahmin edicisi, Genelleştirilmiş EKK tahmin edicisiyle çakışır(6). Söz konusu

Varıans-Kovarıans matrısı bilinmediğinde daha önce de belirtildiğı gibi Minimum Ki-Kare tahmin edicisi yerine Değıştirilmiş Minimum Ki-Kare tahmin edicisine başvuru-yorduk. Bu iki tahmin edicinin istatistik teorisinden "en iyi asimptotik normal" tahmin ediciler olduğunu biliyoruz(45).

EÇO ve Minimum Ki-Kare tahmin edicileri biri diğerrinin duali olan iki tahmin edicidir.

En önemli özellik olarak şunu söyleyebiliriz : Monte Carlo deneyleriyle yapılan ve büyük örnekler içeren örnekleme çalışmaları burada verilen bütün tahminlerin gerçek parametre değerrlerine yakınsadığını ve normal dağıldıklarını göstermiştir(6).

2.3. Sürekli Parametrelili Markov Zincirlerinde Durum Tahmini

a. Giriş

Sürekli parametrelili bir MZ'nin yapısını belirlemede değışik yöntemlerden yararlanılmaktadır. Bunlar, sürekli parametrelili MZ'ni Yarı-Markov süreçlerinin özel bir durumu olarak ele almak, sürekli parametrelili zincirin temelinde yatan kesikli parametrelili MZ'nden yararlanmak, ve sürekli parametrelili zincire ait gözlemler doğrudan elde edilemediğinde durum uzayı E üzerinde tanımlı negatif olmayan bir $g(.)$ fonksiyonuna ilişkin gözlemlerden yararlanmak olarak özetlenebilir. Bunlardan ilki olan Yarı-Markov süreçlerine, sözgelimi Kolmogorov diferansiyel denklemleri gibi, bazı güçlü analitik araçlar geçerlili-

ğini yitirdiğinden çok seyrek başvurulur(12). İkinci yöntem araştırma konusunda yapılan gözlemlere bağlı olarak çok değişik biçimlerde uygulanır. Biz önce bu yöntemin kapsamına giren bazı tahminleri ele alacağız. Son yaklaşıma da son yıllarda oldukça sıkça başvurulmaktadır. Bu yöntemde yer alan $g(.)$ fonksiyonları bizi zincirin "toplamsal fonksiyoneli" denilen başka bir stokastik süreç kavramına götürmekte ve bu süreçler aracılığıyla zincire ilişkin istatistikler hesaplanabilmektedir(1). Biz bu yöntemlerin kapsamına giren bazı tahminleri ele alacağız.

b. Eşit Zamanlı Gözlemler Halinde Durum Tahmini

$\Delta > 0$ kabul edilen örnekleme aralığı olmak üzere gözlem değerleri $X(0), X(\Delta), X(2\Delta), \dots$ biçimindeyse, durum tahmini burada anlatıldığı gibi yapılır :

$Y_n = X(n\Delta)$ gözlemlenmiş değerlerinin geçiş olasılıkları matrisi, A sürekli parametrelili zincirin üretici matrisi ve N durum sayısı olmak üzere

$$P_{\Delta} = e^{\Delta A} = \sum_{i=1}^N e^{\Delta \lambda_i} B_i \quad (2.77)$$

biçimindedir(1). Burada λ_i 'ler A matrisinin özdeğerleridir, ve f_i ve Π_i , A matrisinin sırasıyla sütun ve birimleştirilmiş satır özvektörü olmak üzere

$$B_k = [B_k(i, j)] = [f_k(i) \Pi_k(j)] \quad (2.78)$$

biçiminde tanımlanmıştır. İzdüşüm matrisi de denilen B_k 'lar

$$B_m B_n = \begin{cases} B_m, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (2.79)$$

özelliğini gerçekler(33). Sözgelimi, $N = 2$ için

$$A = \begin{bmatrix} -a & a \\ b & -b \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

olmak üzere(2.77) deki matris

$$P_\Delta = \begin{bmatrix} \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} e^{-(a+b)\Delta} & \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b} e^{-(a+b)\Delta} \\ \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b} e^{-(a+b)\Delta} & \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} e^{-(a+b)\Delta} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

biçimindedir. Bizim durum tahmininde yaptığımız iş P_Δ matrisinden A matrisinde yer alan parametrik değerleri $(a, b, \dots)$ çözmek, dolayısıyla A matrisini belirlemektir. $N = 2$ için (2.80)'deki A matrisinin elemanları (2.81)'den $\ln^+(x) = \ln(x^+) = \ln \max\{x, 0\}$ olmak üzere

$$a = \frac{P_\Delta(0,1)}{P_\Delta(0,1) + P_\Delta(1,0)} \left\{ -\frac{1}{\Delta} \ln^+ [1 - P_\Delta(0,1) - P_\Delta(1,0)] \right\} \quad (2.82a)$$

ve

$$b = \frac{P_\Delta(1,0)}{P_\Delta(0,1) + P_\Delta(1,0)} \left\{ -\frac{1}{\Delta} \ln^+ [1 - P_\Delta(0,1) - P_\Delta(1,0)] \right\} \quad (2.82b)$$

olarak elde edilir(1). Burada $P_\Delta(i,j)$ 'lerin tahminleri

$n_{ij}(t) : (Y_{k-1} = i, Y_k = j)$ olan gözlemlerin sayısı ve

$n_{ij} = \sum_t n_{ij}(t)$ olmak üzere

$$\hat{P}_{\Delta}(t, i, j) = \frac{n_{ij}(t)}{\sum_i n_{ij}(t)} \quad (2.83)$$

ile verilir(43).

c. Tesadüfi Değişen Eşit Aralıklı Gözlemler Halinde
Durum Tahmini

Bu halde gözlemler yine bilinen bir örnekleme aralığı, $\Delta > 0$ 'ya göre yapılmaya çalışılmaktadır, ancak gözlem sürecindeki aksamalar yüzünden araştırılan süreç

$$T_n = n\Delta + \delta_n \quad (2.84)$$

zamanlarında gözlenmektedir. Burada δ_n 'ler birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip, X 'den bağımsız ve $P\{|\delta_n| < \Delta/2\} = 1$ olan tesadüfi değişkenlerdir. δ_n 'nin dağılım fonksiyonuna ρ ve ρ 'nun simetrizasyonuna ρ^* diyelim. ρ 'nun simetrizasyonu, ρ^* şöyle tanımlanır : X , dağılımı ρ olan bir tesadüfi değişken olsun. X' , X 'den bağımsız ve X 'le aynı dağılıma sahip bir tesadüfi değişken olmak üzere $W = X - X'$ tesadüfi değişkeninin dağılımı ρ 'nun simetrizasyonudur(21,32).

Aşağıdaki yardımcı teorem ($X(T_n)$) dizisi için geçiş matrisini vermektedir.

2.3.1. Yardımcı Teorem : $L\rho^*$, ρ^* 'ın Laplace dönüştürümünü göstermek üzere, ($X(T_n)$) dizisi geçiş matrisi

$$Q = \sum_{i=1}^N e^{-\lambda_i \Delta} L\rho^*(\lambda_i) B_i \quad (2.84)$$

olan bir MZ'dir. Burada λ_i ve B_i 'ler önceki altkesimde

tanımlandığı gibidir(1). A.F.Karr $N = 2$ için yukarıdaki yardımcı teoremden geçen Q matrisini vermekte ve ρ bilindiğinde $(X(T_n))$ 'nin yasasının $(Y(t))$ 'yi belirlediğini söylemektedir.

ρ bilinmediğinde önce çeşitli yöntemlerle tahminine gidilir ve daha sonra Q 'dan yararlanarak önceki tahmin durumunda olduğu gibi A üretici matrisi tahmin edilir.

d. Poisson Zamanlarında Durum Tahmini

Her stokastik süreç en az sayılabilir sonsuzlukta bir değişken dizisinden oluştuğundan, herhangi bir sürecin stokastik olabilmesi için de bu şartın gerçekleşmesi, yani bu sürecin en az sayılabilir sonsuz sayıda zaman noktasında "gözlemlenebilir" olması gerekir. Stokastik süreçler içinde gözleme bakımından Poisson sürecinin ayrı bir yeri vardır. Çünkü Poisson süreci $[0, \infty)$ sonsuz aralığında sonsuz çoklukta noktanın tesadüfi dağılımını gösterir ve hattâ bu yüzden vurgulu bir şekilde "tesadüfi süreç" veya "tam tesadüfilik modeli" olarak adlandırılır(19). Bu yüzden herhangi bir Poisson sürecinin ortaya çıkış zamanlarında, yani Poisson zamanlarında Markov sürecini gözlemek, sürecin yapısını ortaya koymada önemli bir yoldur. Bu tür gözleme işlemine "Poisson örnekleme" de denilmektedir.

Poisson örnekleme gerçekten incelenen stokastik süreçlerin bazı temel özelliklerini korumaktadır(46) :

Poisson örneklemesi "Markov özelliği" ni korumaktadır. Yani $X = \{X(t); t \geq 0\}$ sürecinden Poisson örneklemeyle $Y_n = X(\tau_n)$ şeklinde elde edilen $Y = \{Y_n; n \in \mathbb{N}\}$ süreci bir MZ'ysse, X de sürekli parametrelili MZ'dir. Üstelilik $Y = \{Y_n; n \in \mathbb{N}\}$ zinciri durağan geçiş olasılıklarına sahipse, bunun X için de geçerli olduğunu söyleyebiliyoruz.

Poisson örneklemesi ayrıca süreçlerin durağanlık özelliğini de korumaktadır. Yani $X = \{X(t); t \geq 0\}$ sürecinde $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$F(t_1, \dots, t_n) = P\{X(t_j) \leq x_j; j = 1, 2, \dots, n\} \quad (2.85)$$

değeri yalnızca $t_j - t_{j-1}$ farklarına bağlı olduğunda,

$$\Phi_m = P\{Y_{m+j} \leq x_j; j = 1, 2, \dots, n\} \quad (2.86)$$

değeri, $Y_n = X(\tau_n)$ biçiminde Poisson örneklemeyle elde edilmiş, kesikli zincir için de m 'den bağımsızdır. Bunun tersinin de doğru olduğunu önceki paragrafta belirtmiştik.

$X = \{X(t); t \geq 0\}$ gerçel değerli stokastik süreç ve τ , sürekli dağılım fonksiyonu G olan $\{X(t)\}$ 'den bağımsız bir tesadüfi değişken olduğunda, $X(\tau)$ dağılım fonksiyonu

$$P\{X(\tau) \leq x\} = \int_0^{\infty} P\{X(t) \leq x\} dG(t) \quad (2.87)$$

olan bir tesadüfi değişken olarak düşünülebilir. Ancak $X(\tau)$ 'ya ilişkin bu eşitliğin yazılabilmesi için

$\{X(t); t \geq 0\}$ sürecinin "ölçülebilir" olması gerekir. Dolayısıyla τ 'lar Poisson sürecinde varış anları olarak alındığında, yukarıdaki eşitliğin yazılabilmesi için gözlemlenen süreç ölçülebilir olmak zorundadır. Bu durumda Poisson örneklemesinden elde edilen kesikli parametrelili MZ'nin geçiş olasılıklarını

$$\begin{aligned}\bar{P}_{ij} &= P\{X(\tau_{n+1}) = j | X(\tau_n) = i\} \\ &= \int_0^{\infty} P\{\tau_{n+1} - \tau_n = t\} P_{ij}(t) dt\end{aligned}\quad (2.88)$$

biçiminde tanımlayabiliriz(46). Öte yandan λ parametrelili bir Poisson sürecinde $\tau_{j+1} - \tau_j$ varışlararası zamanları yine λ parametrelili bir üstel dağılıma sahip olduğundan (20), kesikli zincirin geçiş olasılıkları

$$\bar{P}_{ij} = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} P_{ij}(t) dt \quad (2.89)$$

olur. Buradan A , sürekli zincirin üretici matrisi ve

$\bar{P} = [\bar{p}_{ij}]$ olmak üzere, kesikli zincirin geçiş matrisi

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \exp(At) dt \\ &= \lambda(\lambda I - A)^{-1} = \lambda R(\lambda)\end{aligned}\quad (2.90)$$

veya buradan sürekli zincirin üretici matrisi

$$A = \lambda(I - \bar{P}^{-1}) \quad (2.91)$$

olarak elde edilir. Burada geçen $R(z) = (zI - A)^{-1}$ fonksiyonuna $(P(t))$ geçiş fonksiyonunun çözücüsü(resolvent) denir(22). Her λ için $R(\lambda)$ matrisi aşağıdaki özellikleri gerçektir(14) :

(i) Her i, j, λ için $r_{ij}(\lambda) \geq 0$,

$$(ii) \lambda \rightarrow \infty \text{ için } \lambda r_{ij}(\lambda) \rightarrow \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

(iii) Düzenli bir MZ için

$$\lambda \sum_j r_{ij}(\lambda) = 1 \quad (\forall i, \lambda)$$

dir.

Bu üç özellik $\lambda R(\lambda)$ 'nın gerçekten bir stokastik matris olduğunu göstermektedir.

Poisson örnekleme sürecinin λ parametresi bilinmediğinde N_t , $(0, t]$ aralığındaki varışların sayısını göstermek üzere

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{N_t}{t} \quad (2.92)$$

şeklinde tahmin edilebilir(1). λ parametresine ait bir başka tahmin "sabit parçacık sayma yöntemi"ne göre şu yolla yapılabilir(47) : L^* ile λ 'nın tahmin edilecek değerini gösterelim. γ , L^* 'ın λ 'dan λ 'nın yüzde 100 γ 'dan daha fazla farklı olamayacağı bir gerçel sayı yani

$$\lambda(1-\gamma) \leq L^* \leq \lambda(1+\gamma) \quad (2.93)$$

olan sayı olsun. Yine $(0, t]$ aralığında Poisson sürecinin varış sayısı N_t olsun. Bu durumda

$$b^* = \frac{N_t(1-\gamma^2)}{2\gamma} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \quad (2.94)$$

olmak üzere λ 'nın tahmini γ 'ya bağlı olarak

$$L^x = \frac{b^x}{t} \quad (2.95)$$

ile verilir. λ 'ya ilişkin güven katsayısı da b^x 'a bağlı olarak

$$P\{\lambda \in D\} = \int \frac{x^{N_t-1} e^{-x}}{(N_t-1)!} \cdot dx = \psi_Y^x(N_t) \quad (2.96)$$

ile verilir. Burada

$$D = \left[\frac{N_t(1-\gamma)}{2\gamma} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma}, \frac{N_t(1+\gamma)}{2\gamma} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right],$$

$\psi_Y^x(N_t)$ güven düzeyinde λ 'ya ilişkin güven aralığıdır.

$\psi_Y^x(N_t)$ fonksiyonunun değerleri $N_t \leq 40$ için tablo biçiminde düzenlenmiştir. $N_t > 40$ durumunda

$(\sqrt{4\lambda t} - \sqrt{4N_t-1})$ değişkeni yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir. Bu durumda $\psi_Y^x(N_t)$ fonksiyonunun değeri, Z standart normal değişkeni için $\Phi(u) = P\{Z \leq u\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi_Y^x(N_t) &= \Phi\left(\sqrt{\frac{4N_t(1+\gamma)}{2\gamma} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma}} - \sqrt{4N_t-1}\right) \\ &\quad - \Phi\left(\sqrt{\frac{4N_t(1-\gamma)}{2\gamma} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma}} - \sqrt{4N_t-1}\right) \end{aligned} \quad (2.97)$$

ile verilir(47).

e. Ortalamalı Gözlemler Halinde Durum Tahmini(1)

Bu altkesimde $\Delta > 0$ yine örnekleme aralığımız olmak üzere, sürecin tam kendi değeri olan $X(n\Delta)$ yerine

$$Y_n = \frac{1}{\gamma} \int_{n\Delta-\gamma}^{n\Delta} X(u) du, \quad (2.98)$$

$\gamma \in (0, \Delta)$, biçiminde $(n\Delta-\gamma, n\Delta)$ aralığı üzerindeki ortalama değerini gözlemlediğimizde durum tahminini vereceğiz. Burada Δ ve γ bilinen değerler olmak üzere

$$X_t = \mathcal{H}_{\Delta \llbracket t/\Delta \rrbracket} = \sigma(Y_n; 0 \leq n \leq \llbracket t/\Delta \rrbracket) \quad (2.99)$$

sürecin $(0, t]$ gözlem aralığı üzerindeki σ -cebiri veya geçmişidir.

X MZ üstel konaklama zamanlarına sahip olduğundan, bazı Y_n 'ler durum uzayı E 'deki durumları değer olarak alır ve bu değerler X 'in sonradan yapılmış ve öncekileri de kapsayan, veya tam (exact) dediğimiz gözlemlerini verir. Bu tam gözlemler durum tahminine temel teşkil eder.

2.3.2. Yardımcı Teorem: $Y_0 = X_0$ 'ın gözlemlenebildiğini ve $Z_0 = Y_0, Z_1, X_2, \dots$ ardışık $Y_n \in E$ değerlerini gösterebilir. Bu durumda (Z_n) geçiş matrisi aşağıda verildiği gibi olan bir MZ'dir.

$$Q(i, j) = e^{-\lambda(i)\gamma} \sum_{L \in E} P_{\Delta-\gamma}(i, L) \sum_{k=1}^{\infty} U^k(L, j) \quad (2.100)$$

dir. Burada

$$U(i, j) = \int_0^{\gamma} \lambda(i) e^{-\lambda(i)t} P_{\Delta-t}(i, j) dt \quad (2.101)$$

ve $\lambda(i)$, i .durumda sürecin konaklama süresine ilişkin üstel dağılımın parametresidir. Öte yandan (2.100) formülündeki $\sum_k U^k(L, j)$ 'ler

$$\sum_{k=1}^{\infty} U^k = (I-U)^{-1} - I \quad (2.102)$$

matrisinin elemanları olarak verilir.

Yukarıdaki yardımcı teoremdaki elemanları şöyle yorumlayabiliriz : $e^{-\lambda(i)\gamma}$, X sürecinin $(k\Delta-\gamma, k\Delta]$ aralığı boyunca i.durumda bulunması olasılığına karşı gelir. $P_{\Delta-\gamma}(i, :)$ ise sonraki Δ -aralığının başlangıcında i.tam gözlem elde edildikten hemen sonra geçerli olan X'e ilişkin dağılımı verir. U^k da tam gözlemler elde edilemeyen bir Δ -aralığında sürecin k.dönemde $i \rightarrow j$ geçişlerini yapma olasılığıdır.

Bu tür gözlemlerde üretici matrisin parametrelerinin tahmini şöyle yapılır : X MZ'nin başlangıçta bir X_0 başlangıç dağılımının varlığı varsayımı altında, A üretici matrisindeki parametre sayısı s olmak üzere

$$A_1 = E[Y_n], A_2 = E[Y_n Y_{n+1}], \dots, A_s = E\left[\prod_{i=0}^{s-1} Y_{n+i}\right] \quad (2.103)$$

tanımlarıyla

$$(a_1, a_2, \dots, a_s) = F(A_1, A_2, \dots, A_s) \quad (2.104)$$

oluşturulur. Burada A_i , $i = 1, 2, \dots, s$ değerlerinin tahmini Y_n gözlemlenmiş sürecinden r durum sayısı ile

$$\hat{A}_i(t) = \frac{1}{\lfloor t/\Delta \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor t/\Delta \rfloor} \prod_{i=0}^{r-1} Y_{k-i} \quad (2.105)$$

şeklinde tahmin edilir. Burada verilen parametre tahminleri $t \rightarrow \infty$ iken

$$\sqrt{t}(a_1, a_2, \dots, a_s) \rightarrow N(0, J_F \Sigma J_F^T) \quad (2.106)$$

özelliğini gerçekler; yani "asimptotik normal" tahminlerdir. Burada J_F , yukarıdaki F dönüşümünün jakobyeninin $(A_1, \dots, A_s)$ noktasındaki değeridir, ve Σ

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \prod_{i=0}^m Y_{k-i} \right), \quad m = 0, 1, \dots, r-1 \quad (2.107)$$

vektörünün limit kovaryans matrisinin Δ katıdır. Ayrıca sözkonusu tahminler tutarlıdır.

Bu tür gözlemlerde durum tahmini de oldukça zordur. Bunun için iki tane yardımcı süreç tanımlıyoruz : son tam(exact) gözlemde beri geçen Δ -aralıkları sayısını gösteren

$$N_n = \min\{k; Y_{n-k} \in E\} \quad (2.108)$$

ve W_n , N_n sayısına giren gözlemlerin değerleri olsun, yani

$$W_n = Y(n - N_n) \quad (2.109)$$

olsun.

Durum tahmininde ayrıca $P\{X(t) = j | \mathcal{H}_t\}$, $j \in E$ olasılıklarının $P\{X(n\Delta) = j | \mathcal{H}_{n\Delta}\}$ olasılıkları yardımıyla belirlendiğinden yararlanacağız.

Aşağıdaki teoremden yararlanarak $P\{X(n\Delta) = j | \mathcal{H}_{n\Delta}\}$, $j \in E$ olasılıklarını belirleyeceğiz.

2.4.3. Teorem : $C \subset (1, 2) \cup (2, 3) \cup \dots \cup (r-1, r)$ olmak üzere

$$P_i\{X_{\gamma} = j, \gamma^{-1} \int_0^{\gamma} X(u) du \in C\} = \int_C \Lambda(i, j, \gamma) d\gamma \quad (2.110)$$

olan $\Lambda(i, j, \gamma)$ fonksiyonlarını, dolayısıyla γ 'nin matris değerli Λ fonksiyonunu ele alalım. Yine γ 'nin matris değerli

$$\Gamma(\gamma) = P_{\Delta-\gamma} \Lambda(\gamma) \quad (2.111)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} P\{X(n\Delta) = j | \mathcal{H}_{n\Delta}\} &= 1, \quad Y_n = j \\ &= 0, \quad Y_n \neq j, \quad Y_n \in E \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\prod_{i=0}^{N_n-1} \Gamma(Y_n - i) (W_n, 0, \dots, 0)}{\prod_{i=0}^{N_n-1} \Gamma(Y_n - i) 1(W_n)}, \quad Y_n \notin E \end{aligned}$$

dir. Burada $\Lambda(\gamma)$ matrisinin elemanları $X = \{X(t); t \geq 0\}$ sürecinin geçiş zamanlarına bağlı olarak Bessel fonksiyonları yardımıyla belirlenebilir, (2.112) formülündeki oran, Lebesgue ölçümüne göre iki yoğunluğun ölçümlerinin Radon-Nikodym türevi tamamıyla bu yoğunlukların oranı olması gerçeğiyle birlikte yalnızca Bayes formülüdür.

Yukarıdaki teoreme dayanılarak $P\{X(n\Delta) = j | \mathcal{H}_{n\Delta}\}$, $j \in E$ olasılıkları aşağıdaki gibi güncelleştirilebilir :

1.Adım : $K(0) = I$, r : durum sayısı olmak üzere rxr 'lik bir birim matris olarak alınır.

2.Adım : Gözlemlerden W_n belirlenmiş ve daha sonra Y_{n+1} gözlemlenmiş olmak üzere

$$\begin{aligned}
K(n+1) &= I, & Y_n &\in E \text{ ise} \\
&= K(n) \Gamma(Y_{n+1}), & Y_n &\notin E \text{ ise}
\end{aligned} \tag{2.113}$$

olarak ardışık hesaplamalarla bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
W_{n+1} &= Y_{n+1}, & Y_{n+1} &\in E \text{ ise} \\
&= W_n, & Y_{n+1} &\notin E \text{ ise}
\end{aligned} \tag{2.114}$$

olarak alınır.

3.Adım : Sonraki adımdaki geçiş olasılıkları

$$\begin{aligned}
P\{X((n+1)\Delta) = j | \mathcal{K}_{(n+1)\Delta}\} & \tag{2.115} \\
&= \frac{K(n+1)(W_{n+1}, 0, \dots, j, 0, \dots, 0)}{K(n+1)(W_{n+1}, 1, 0, \dots, 0) + \dots + K(n+1)(W_{n+1}, 0, \dots, 0, r)}
\end{aligned}$$

ile tahmin edilir. Bu durumda durum tahmini

$$\begin{aligned}
P\{X(t) = j | \mathcal{K}_t\} &= \sum_{i \neq j} P_{t-n} (i, j) \\
&+ (P_{t-n\Delta}(j, j) - \sum_{i \neq j} P_{t-n\Delta}(i, j)) P\{X(n\Delta) = j | \mathcal{K}_{n\Delta}\}
\end{aligned} \tag{2.116}$$

ile elde edilir.

Bu altkesimde geçen Y_n sürecinin bir MZ olmadığına dikkat edilmelidir.

f. Markov Zincirinin Fonksiyonu Gözlemlendiğinde
Durum Tahmini(12)

$\{X(t); t \geq 0\}$ sürekli parametrelili MZ ve durum uzayı E , sonlu boyutlu olsun. Bu sürecin

$$P_{ij}(t) = P\{X(s+t) = j | X(s) = i\}, t \geq 0 \quad (2.117)$$

durağan durum olasılıklarının $\lim_{t \rightarrow 0} P_{ij}(t) = \delta_{ij}$ özelliğini sağladığını, yani MZ'nin standart bir geçiş fonksiyonuna (14,20) sahip olduğunu varsayalım. Bu altkesimde gözlemlerin

$$\xi(t) = g(X(t)), t \geq 0, \quad (2.118)$$

biçiminde X MZ'nin kendisi değil de, onun bir fonksiyonu olduğunda durum tahminini ele alacağız. Bu gözlemlenen sürecin durum uzayı

$$B = g(E) \quad (2.119)$$

olsun. Ayrıca

$$E_a = g^{-1}(\{a\}) = \{i \in E : g(i) = a\}. \quad (2.120)$$

ve $t \geq 0$, $i, j \in E$ olmak üzere

$$P_{ij}(a, t) = P\{X(s+t) = j, X(u) \in E_a, s \leq u \leq s+t | X(s) = i\} \quad (2.121)$$

olarak tanımlayalım. Standart geçiş fonksiyonlu bir MZ için

$$q_i = -q_{ii} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 - p_{ii}(t))/t \quad (2.122a)$$

ve

$$q_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t)/t, j \neq i \quad (2.122b)$$

limitleri vardır. Biz q_i 'lerin sonlu olduğunu ve X zincirinin

$$\sum_{j \in E} q_{ij} = 0, \quad i \in E \quad (2.123)$$

özelliğini gerçeklediğini varsayıyoruz. Ayrıca X zincirinin sağdan sürekli ve χ_n , zincirin n .geçiş(sıçrama) inden sonra bulunduğu durum olmak üzere

$$P\left\{\sum_n (1/q_{\chi_n}) = \infty\right\} = 1 \quad (2.124)$$

olduğunu varsayıyoruz.(2.124) varsayımı hemen hemen emin olarak örnek fonksiyonlarının her sonlu zaman aralığında sonlu sayıda geçiş(sıçrama) yapmasını gerektirir. Öte yandan sağdan süreklilik varsayımı (2.121) bağıntısıyla i veya j , E_a 'nın elemanı olmadığında $P_{ij}(a,t) = 0$ olmasını gerektirir. Buna göre

$$P(a,t) = \{P_{ij}(a,t)\} \quad (2.125)$$

matrisini tanımlayabiliriz. Bu matris de

$$P(a,t+s) = P(a,t)P(a,s) \quad (2.126)$$

Chapman-Kolmogorov denklemini sağlar, ve ayrıca

$$\lim_{t \rightarrow 0} P(a,t) = I \text{ (elemanca)} \quad (2.127)$$

gerçeklenir. $P(a,t)$ matrisi için

$$\frac{dP_{ik}(a,t)}{dt} = \sum_{j \in E_a} q_{ij} P_{jk}(a,t), \quad i \in E_a \quad (2.128a)$$

ve

$$\frac{dP_{ik}(a,t)}{dt} = \sum_{j \in E_a} P_{ij}(a,t) q_{jk}, \quad k \in E_a \quad (2.128b)$$

geriye ve ileriye Kolmogorov denklemleri sağlanır.

$a \neq b$ için $Q(a,b)$ matrisini

$$\begin{aligned} Q_{ik}(a,b) &= q_{ik}, \quad (i,k) \in E_a \times E_b \\ &= 0, \quad (i,k) \notin E_a \times E_b \end{aligned} \quad (2.129)$$

olarak oluşturalım. Ayrıca $\xi = \{\xi_t; t \geq 0\}$ sürecinin gözlemlenmiş kısmı $\{\xi_s; 0 \leq s \leq t\}$ 'deki geçişlerin sayısına N_t diyelim ve $\hat{p}(t)$, elemanları

$$\hat{p}_k(t) = P\{X(t) = k | \xi_s, 0 \leq s < t\} \quad (2.130)$$

olan satır vektörü olsun.

İzleyen teorem $\hat{p}(t)$ geçiş olasılıklarının tahminini vermektedir :

2.3.4. Teorem : $\{\xi_t\}$ 'nin $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ noktalarında geçiş yaptığını kabul edelim. Ayrıca $\alpha_0 = \xi_0$ ve $\alpha_v = \xi_{\tau_v}$, $v \geq 1$ diyelim. Bu durumda $p(0), \{X(t); t \geq 0\}$ sürecinin başlangıç dağılımı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \hat{p}(t) &= p(0)P(\alpha_0, \tau_1)Q(\alpha_0, \alpha_1)P(\alpha_1, \tau_2 - \tau_1) \times \\ &\times Q(\alpha_1, \alpha_2) \dots Q(\alpha_{N_t-1}, \alpha_{N_t})P(\alpha_{N_t}, t - \tau_{N_t})N \end{aligned} \quad (2.131)$$

dir. Burada N , çarpım matrisinin satırlarının toplamını 1 yapan "normalleştirme" işlemidir.

2.3.4. Teorem'den $\hat{p}(t)$ tahminleri ardışık olarak elde edilebilir. Sözelimi, ξ_u , $s \leq u \leq t$ aralığında hiçbir geçiş yapmamışsa, $\alpha = \xi_s$ olmak üzere

$$\hat{p}(t) = \hat{p}(s)P(\alpha, t-s)N$$

biçiminde, ve özel olarak bir τ geçiş(sıçrama) noktasında, $\alpha = \xi_{\tau-0}$, $\beta = \xi_{\tau}$ olmak üzere

$$\hat{p}(\tau) = \hat{p}(\tau-0)Q(\alpha, \beta)N$$

biçiminde verilir.

2.4. Sürekli Tahmin Edicilerin Özellikleri

b.-e. Altkesimler'de verilen üretici matrisin elemanlarına ilişkin tahmin ediciler tutarlı ve asimptotik normaldir(1). f. Altkesim'de verilen $\hat{p}(t)$ tahminlerinin oluşturduğu $\{\hat{p}(t); t \geq 0\}$ sürecinin kendisi r durum sayısı olmak üzere durum uzayı $[0,1]^r$ olan bir Markov sürecidir(12).

Tahmin edicilerin biçimi kuvvetli olarak gözlem mekanizmasına bağlıdır. Ancak durum tahmininde en ideal yöntem incelenen süreci Poisson zamanlarında gözlemlemektir. Bunun yanında üretici matrisin parametrelerinin tahmininde aranan önemli bir özelliğin de ardışık olarak hesaplanabilirlik, yani önceki tahminlerin daha sonra yapılacak tahminlerde kullanılabilmesidir. b.-e. Altkesimler'deki A üretici matrisinin parametreleri için, son altkesimde de $\{\hat{p}(t)\}$ geçiş olasılıkları için bu özellik gerçekleşmektedir.

BÖLÜM 3

UYGULAMA

3.1. Giriş

Göç, nüfusun büyüklüğünü değiştiren hayati süreçlerden biridir. Doğal artış dışında bir ülkenin nüfusu için tek değişkenlik kaynağıdır. Çoğunlukla kestirilemeyen göçün çalışılması güçtür. Göç olgusu aşırı ekonomik değişiklikler ve önemli ulusal olaylarla yakından ilişkilendirilir ve demografideki diğer konulardan daha fazla dikkat çekmektedir(48).

Farklı tanımları olmasına rağmen göç olayının çoğunlukla kabul gören tanımı şöyledir :

"Göç, kent, köy gibi yerleşim birimleri arasında yerleşmek amacıyla ortaya çıkan nüfus hareketlerine denir "(49).

Göç hareketi iç ve dış göç olmak üzere iki kısımda incelenir. Bunlardan iç göç, ülke içinde bir yerden(bölge,kent,kasaba,köy vb.) diğerine yerleşmek amacıyla olan nüfus hareketidir. Bir ülke sınırlarını her iki yönde-içeriye veya dışarıya- aşmak suretiyle meydana gelen ve çalışmak, yerleşmek amacıyla yapılan nüfus hareketlerine de dış göç veya bazen aynı anlama gelmek üzere uluslararası göçler adı verilir. Bazı amaçlar için her iki yöndeki göçlerin arasındaki fark bulunur. Bu farka da net göç denir(48,49). Bunlardan bizim ilgileneceğimiz

iç göçler olacaktır.

İç göç hareketlerinin incelenmesine ilk kez E.G. Ravenstein 1885'te Journal of Royal Statistical Society' de ABD'deki eyaletlerarası göçü konu alan bir makalesiyle başlamıştır. Aynı yazar 1889'da yine aynı dergide eyaletlerarası göçle ilgili bir makale yayınlanmıştır. Ülkemizde de özellikle II.Dünya Savaşı'ndan sonra kente göç edenlerin ani ve büyük bir artış göstermesi sonucu göç hareketlerinin incelenmesi önem kazanmıştır. Bu konuda ilk yayın verenler arasında Sami Öngör ve Erol Tümer'lerin sayılabilir(50,51).

Göç hareketleri bazı sosyolojik özelliklerin denge-lenmesinde önemli bir rol oynadığından sosyal bilimcilerin büyük bir kısmı tarafından "toplum hedeflerine ulaşılmasında bir araç"(52), veya "insan kaynaklarına ilişkin üretkenliği artırmak için bir yatırım türü" olarak görülmektedir(53,54). Öte yandan göç hareketlerine gereğinden fazla işgücünün, dolayısıyla nüfusun yığılması sonucu ortaya çıkan sorunlar bakımından dikkat edilmesi gereken bir olgu olarak bakılması da bir başka görüştür(55).

3.2. Göçlerin Dayandırıldığı Teorik Görüşler

Çok çeşitli olan teorik görüşlerin başlıcaları şunlardır :

i) İnsan Kapitali. Önceden de söylendiği gibi insan kaynaklarının üretkenliğini artırmada göçün bugünkü değeri, varış ve çıkış yerlerindeki hayat boyu kazançların

bugünkü değerleri arasındaki fark, eksi göçün maliyeti-
dir. Bu kavramsal çerçeve istenirse, sözgelimi göç eden-
lerin yakınlarından ayrılmalarıyla ilişkili psişik fiyat-
lar gibi, göçe ilişkin bütün maliyet ve faydaları göz
önüne alacak şekilde genişletilebilir. Ancak en önemli
bir etken olarak ele alınan varış yerindeki parasal ka-
zanca ait beklenti ölçüsü, oradaki iş bulma olasılığıyla
çarpılmalıdır(53).

ii) Uzaklık ve Önceki Göçler. Özellikle bir yöreden
dışa olan -sözgelimi bir ilden diğer illere, bir bölgeden
diğer bölgelere- göç incelenirken çıkış ve varış yerleri
arasındaki uzaklık gündeme gelir. Bir ilden yakın çevre-
de bulunan illere olan göç hareketi ile uzak illere olan
göçler farklı özelliklere sahiptir. Bu bakımdan göç hare-
ketleri gerek yurtdışında, gerekse yurtiçinde yapılan
çalışmalarda uzun uzaklıklı göçler, orta uzaklıklı göç-
ler ve yakın uzaklıklı göçler olarak incelenmiştir. Bun-
lardan uzun uzaklıklı göçlerin varış yerleri genelde ül-
kenin metropol alanları, orta uzaklıklı göçlerin yöneldiği
alanlar bölge merkezi durumundaki iller ve diğer tür
göçü alan yerler de çıkış ilinin çevresinde bulunan il-
ler olmaktadır(55).

Uzaklık kavramı bazı çalışmalarda nakil maliyeti,
psişik fiyatları ve belirsizliği gösteren gösterge değiş-
kenler biçiminde "insan kapitali" yaklaşımıyla da birleş-
tirilmektedir(53). Öte yandan önceki göçlerin, (sonraki)
göçler üzerindeki etkisi şöyle açıklanmaktadır : Göçmen-

lerin büyük bir kısmı tekrar göç edenler veya geriye dönenlerdir. Buna göre belirli bir bölge ele alındığında, bu bölge içine olan göçlerin artması, tekrar göç edenlerin dışarıya göçlerinin artmasına neden olması beklenir. Çünkü daha önce göç hareketine katılmış kişiler gittikleri yerlerde bir çevre edindikleri için, aynı yere tekrar göç edilmesi durumunda psikik maliyet(fiyatlar) düşer. Bu yüzden bazen önceki göç, daha sonra ortaya çıkan dışa göç olayını kestirmede kullanılmıştır. Bu kestirme ters yönde de yapılmaktadır(56). Buna paralel bir çalışma ülkemizde 1970 sayımı sonuçlarına göre 1965-1970 dönemi göç akımlarının incelenmesinde yapılmıştır(57).

iii) Sosyoekonomik Etkenler. Yapılan araştırmalar yaş, cinsiyet, ırk, eğitim ve meslek bakımından göç oranlarında farklılıklar bulunduğunu göstermiştir. Kentler özellikle ilk büyüme yıllarında, ve özellikle erkek göçmenleri çektiğinden, cinsiyet oranı $[(\text{Erkek Nüfus}/\text{Kadın Nüfus}) \times 1000]$ genel ülke ortalamasının üzerindedir. 1950-1955 döneminde gelen göç dalgalarında da erkekler ağır basmaya devam etmişlerdir. İkinci dönemde 1960-1965 yılları arasında bazı kentlerde, 1965-1970 döneminde de daha başka kentlerde göçmenlerin cinsiyet oranı dengelenmeye başlamıştır. Bunun yanında erkeklerin göçleri genç çalışma dönemlerinde, özellikle 20-30 yaşları arasında olmaktadır ve bu yüzden hızlı büyüyen bütün kentlerde bu yaşlardaki erkek sayısı çok yüksektir. Kadınlarda ise yaşlara göre göç etme oranları eğrisi daha yavaş bir yükselişe sahip olup en üst noktaya daha geç yaşlarda ula-

sır ve daha yavaş bir düşüşle çocuk doğurma döneminde erkek göç oranlarının üstünde kalarak devam eder(57).

Göç hareketlerini incelemede iş imkânlarının çekiciliği özel dikkat çekmiştir. Örgütlü etkinliklerde çalışmanın ve genellikle göç edenlerin çalıştığı örgütlenmiş veya marjinal işlerin her ikisinin de çekici yanları vardır. Bunlardan ilki uzun dönemli, ikincisi de göçmenin genellikle atlama taşı olarak görebileceği kısa dönemli işlerdir. Ancak bu düşünceye paralel olarak ele alınan çıkış yerindeki gelir, işsizlik ve ücretlerden oluşan ekonomik koşulları ölçen değişkenler sıklıkla anlamsız bulunmuştur(53). Benzer şekilde kentsel bir iş edinmenin çekiciliğini tanımlamak için çok çaba harcanmış olmasına rağmen, ampirik bulgular bu olguların kır-kent göçlerinin hacmini ve yönünü belirleyeceği beklentisini tam olarak doğrulamamıştır(57).

iv) Alternatif Fırsatlar. Göçün modellenmesinde yer alan bir diğer önemli kavram da "alternatif fırsatlar"dır. Bu kavramın kapsamı şudur : Varış yerleri arasından özel birinin seçilmesi kısmen alternatif varış yerlerindeki koşullara bağlıdır. Literatürde uygun bir alternatifler kümesi tanımlanmasında bazı uyumsuzluklar olmakla birlikte, göç akımlarına ilişkin kesit-regresyon çalışmalarında başarılı sonuçlar veren değişik ölçüler kullanılmıştır. Bu ölçülerden bazıları en fazla nüfus, en düşük işsizlik oranı, ve çıkışla varış yeri arasındaki uzaklıktan daha yakın yerlerde yer alan diğer bütün bölgeler arasındaki en yüksek ortalama ücrettir. Ancak bu kav-

ramların her biri éle alınırken uzaklık etkeninin alternatiflerin çekiciliğini azalttığını ve göç eden için aşırı uzaklığın alternatif bölgelere ilişkin bilgilenmeyi sınırladığı da gözönünde bulundurulmalıdır(53).

v) Hayat Düzeyi. Göç olayını inceleyen az sayıda çalışmada da hayat düzeyi ve sosyal zevkleri ele alan ölçüler kullanılmıştır. Bunlardan B.C.Liu'nin yaptığı ve göç olayını çok az açıklayabilen (% 8) bir çalışmada ABD'de her bir eyalet için bir "hayat düzeyi indeksi" hesaplanmıştır. Bu indeksin hesaplanmasında 100 değişken 9 kategoride toplanmıştır. Sözgelimi, bu kategorilerden "bireysel statü"de işgücüne katılma oranı, fert başına motorlu araç, fert başına eğitim harcamaları ve tıbbî hizmet düzeyi indeksi ile birlikte 14 değişken, "yaşama şartları" kategorisinde suç indeksi, yoksul ailelerin yüzdesi, fert başına düşen yeşil alan, fert başına düşen telefon, fert başına düşen kütüphane kitapları, fert başına senfoni orkestrası, fert başına motorlu araç ölümleri, ortalama güneşli gün sayısı, ortalama yıllık nem, ve başka on değişken yer almaktadır. Ancak bugüne kadar yapılan regresyon analizine dayalı çalışmalarda göç olayını açıklamada ekonomik değişkenlerin diğer değişkenlerden daha etkin olduğu, bunu sırayla iklim değişkenleri, ücret farklılıkları, nüfus yoğunluğu ve hayat düzeyinin izlediği görülmüştür (53).

3.3. Göçe İlişkin Kestirim Yöntemleri

İç göçler doğrudan veya dolaylı yöntemlerle belirlenebilir.

a. İç Göçün Doğrudan Yöntemlerle Belirlenmesi.

Bu yöntemlere konu olan göç "net göç"tür ve şöyle tanımlanır :

$$\text{Net Göç} = \text{Tahminlenen Nüfus Değişikliği} - \text{Doğumlar} + \text{Ölümler} \quad (3.1)$$

İç göçün doğrudan yöntemlerle belirlenmesinde bazı güçlüklerle karşılaşilmektedir. Bu durumlarda iç göçler için doğrudan yöntem aşağıda belirtildiği şekilde uygulanmaktadır(49) :

(i) Sürekli bir nüfus kayıt sisteminin varlığında adres değişiklikleri de belirlenebileceğinden, belirli aralıklarla iç göçlerin bir ölçüsü elde edilebilir.

(ii) Nüfus sayımlarına sayım devresi içindeki göç hareketleri hakkında ek sorular konulabilir ve alınacak cevapların tasnifiyle sayım devresindeki iç göçler tesbit edilebilir.

(iii) Son olarak, bir sondaj araştırmasıyla belirli bir devredeki iç göçler yönü, hacmi ve bütün özellikleriyle tesbit edilebilir.

b. İç Göçün Dolaylı Yoldan Belirlenmesi.

Bu alandaki yöntemler

(i) Demografik Yöntemler

(ii) İstatistiksel Yöntemler

olarak guruplandırılabilir.

(i) Demografik Yöntemler. Bu yöntemlerin başlıcaları arasında

- a) Doğum Yeri İstatistiklerine Dayanan Yöntem
- b) Sayım ve Hayati Kayıtlar Yöntemi
- c) Hayatta Kalma Oranlarına Dayanan Yöntem

sayılabılır.

a) Doğum Yeri İstatistiklerine Dayanan Yöntem. Bu yöntemle "hayat boyu göç edenler" tespit edilebilmektedir(57).

Bu yöntemin bazı ciddi sakıncaları şunlardır(49,57) :

1) Bu yöntemle bireylerin hayatları boyunca yaptığı göç hareketlerinin tamamı değil, yalnızca tek bir göç hareketi tesbit edilebilir. Yöntemin bu eksikliği bir oranda nüfus sayımında "ikamet eden nüfus" kavramına başvurularak iki sayım arasındaki göçler yakalanarak giderilebilir. Ancak bu yolda iki sayım arasındaki göçlerin kaçırılmasını tam olarak engelleyemez.

2) Bu yöntem önceden göç etmiş, ancak sayımdan önce tekrar doğum yerine dönmüş olan kişilerin hareketlerini yakalayamaz.

3) Sayımda "hazır bulunan nüfus" kullanıldığında, her kişi ikamet ettiği yerde değil, o anda bulunduğu yerde kaydedilir. Bu yüzden doğum yeri istatistiklerine dayanan yöntem, "ikamet eden nüfus" tanımı da kullanıldığında iyi

sonuçlar verir.

4) Bu yöntemin en önemli sakıncası, bulunan sonuçların hangi zaman devresine ait olduğunun bilinmemesidir. Sözelimi, 1975 yılına ait istatistiklerde, 5 yaşında olup başka yerden Ankara'ya 1973'de göç eden bir kişiyle, 65 yaşında olup 1962'de Ankara'ya göç eden bir kişi aynı işlemi görür.

b) Sayım ve Hayati Kayıtlar Yöntemi. Bu yöntemde de net göç belirlenebilir. Bu formülle

$$M_i - M_d = (P_{t+n} - P_t) - (B - D) \quad (3.2)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada P_t : t tarihindeki genel nüfus, B : sayım devresindeki doğumlar, D : sayım devresindeki ölümler, M_i : sayım devresindeki içe göç, M_d : sayım devresindeki dışa göçtür. Formülden de görülebileceği gibi belirli bir döneme ait göçün hesaplanabilmesi için o dönemdeki hayati kayıtların (doğumlar ve ölümlerin) tutulmuş olması gerekir. Yine bu dönemde bir bölgenin göç durumu araştırılırken, bu bölgeden dışa gidenlerin nereye gittiği ve içe göç edenlerin nereden geldikleri bilinmez. Bu yöntemde yalnızca söylenebilecek $M_i - M_d < 0$ iken o bölgenin "göç veren" bir bölge, $M_i - M_d > 0$ iken "göç alan" bir bölge olduğudur. Bu yöntem belirli bir yaş grubu veya cinsiyetteki göçü de yukarıdaki tanımlar doğrultusunda verir.

c) Hayatta Kalma Oranlarına Dayanan Yöntem. Hayati kayıtlar elde olmadığında ve ilgilenilen nüfusa uygun

bir hayat tablosu varlığında (uydurulabildiğinde) bu yöntem (i) ileriye doğru, (ii) geriye doğru, ii) (i) ve (ii)'nin ortalaması şeklinde uygulanır.

(i) t ve $t + n$ tarihlerindeki nüfus sayımlarından x ve $x + n$ yaşlarındaki nüfusları biliyoruz. $t + n$ tarihinde $x > n$ halinde x yaşında olanların göçü

$$M_x^i = P_{x+n}^{t+n} - n p_x P_x^t \quad (3.3)$$

şeklinde bulunur. Burada P_x^t : t tarihindeki sayımdan elde edilen nüfus, $n p_x$: x yaşındakilerin n yıl sonra hayatta kalma olasılığı (hayat tablosundan alınır) olarak tanımlanmıştır. $t + n$ tarihinde $x \leq n$ iken x yaşındakilerin göçü

$$M_x^i = P_x^{t+n} - x p_0^B$$

ile bulunur. Yani x yıl önceki doğumlar (B), x yıl sonra hayatta kalma olasılığıyla çarpılarak ilgilenilen bölgede $t + n$ tarihinde x yaşında olması "beklenen" nüfus bulunmaktadır. Bu sonuç $t + n$ tarihindeki sayımdan elde edilen x yaş nüfusuyla karşılaştırılıp net göç bulunmaktadır. Bu bulunan M_x^i değerleri bütün mümkün x yaşları için toplanırsa toplam net göç elde edilir.

Bu yöntemin avantajı yaşlar ve cinsiyet itibarıyla net göçü vermesidir. Sakıncaları ise,

- İlk formülde $n p_x P_x^t$ ifadesi, P_x^t nüfusunu $n p_x$ ile çarptığımızda, nüfusun $1 - n p_x$ 'lik kısmının ilgilenilen bölgede n yıl sonrasına ulaşmadan ölmüş olduğunu kabul etmiş

oluyoruz. Oysa bu ölenlerin bir kısmı kesinlikle dışa göç edenler arasındadır. Dolayısıyla bu yöntem "beklenen nüfusu" az, o yaştaki net göçü daha fazla bulmaktadır.

- Nüfus sayımlarının yapıldığı n yıllık devre aralarında içe göçen göçmenlerin ölmüş olanları hesaba katılmaktadır. Bu durumda ise net göç daha az bulunmaktadır.

(ii) Yöntemin Geriye Doğru Uygulanışı. İleriye doğru uygulanıştakine benzer düşüncelerle geriye doğru yöntemle x yaşındakilerin net göçü

$$M_x^g = \frac{p_{x+n}^{t+n}}{n p_x} - p_x^t = \frac{p_x^{t+n}}{n p_0} - B \quad (3.4)$$

formülleriyle hesaplanabilir. Burada B : t yılındaki doğumlardır.

Bu yöntemde de önceki yöntemin aksine net göç fazla bulunmaktadır.

(iii) Ortalama Yöntemi. Hayatta kalma oranlarına dayanan yöntemin önceki iki uygulaması incelendiğinde, ileriye doğru uygulamanın göçlerin n yıllık devrenin sonunda, geriye doğru uygulamanın da göçlerin n yıllık devrenin başında olduğunu varsaydığı görülür. Bu varsayımların gerçekleşmediği açıktır. Bilindiği gibi gerçek durumyla göç bütün devreye yayılmış bir biçimde gerçekleşir. Bu durum ve ayrıca net göçün ileriye doğru uygulanışta az, geriye doğru uygulanışta fazla olarak elde edilmesi göz önüne alınarak ilgilenilen devredeki net göç ileriye ve

geriye doğru uygulamada bulunanların aritmetik ortalaması olarak alınır. Yani

$$M_x^0 = \frac{M_x^i + M_x^g}{2} \quad (3.5)$$

olarak alınır. Önceki tanımlardan

$$M_x^i < M_x^0 < M_x^g \quad (3.6)$$

olduğu söylenebilir.

Ülkemizde Hayatta Kalma Oranları Yöntemi D.İ.E. tarafından 1968 yılında başlatılan bir projede değiştirilerek uygulandı. "Burch tekniği" olarak bilinen bu yöntem yalnızca göçmen nüfusla ilgilenir ve çapraz yaş-cinsiyet tablolarını doğum yeri-oturma yeri tablolarıyla birleştirerek "dışarıda doğmuş nüfus"u, yani sayım sırasında il dışında doğmuş nüfusu belirler. Daha sonra ileriye doğru hayatta kalma yöntemini uygulayarak bir sayımdan bir sonrakine dışarıda doğmuşlardan hayatta kalanların tahminini yapar. Ancak ülkemizde Burch tekniğinin uygulanması için gerekli tablolardan yalnızca 1965 sayımına ait olanı hazırlanmıştır(57).

(ii) İstatistiksel Yöntemler. İstenilen anlamda verilerin bulunamayışı göç hareketlerinin kestiriminde çok değişik istatistiksel yöntemlerin kullanılmasını engellemektedir. Üstelik kestirimde kullanılan istatistiksel yöntemlere ilişkin veriler dolaylı yollardan türetilmektedir. Göç olayının kestirilmesinde kullanılan istatistiksel yöntemlerin başlıcaları

- a) Zaman Serileri Modelleri
- b) Kesit Modelleri
- c) Markov Modelleridir.

a) Zaman Serileri Modelleri. Bilindiği gibi bu modellerde kullanılan veriler yıllık veriler olmak zorundadır. Ancak ABD'de bile göçe ait yıllık veriler bulunmamaktadır. Bu yüzden daha değişik yollarla veri türetileme yoluna gidilmiştir. Bu türden bir çalışma ABD'de yapılmıştır. ABD'de ekonomik çalışmaların çoğunun başlangıcı olarak alınan 1958 yılından 1975'e kadar geçen süre içerisinde çalışan ve bir "sosyal güvenlik numarası" bulunan kişilerin % 1'inin Sürekli Çalışma Özgeçmiş Örneği'nden göçle ilgili veriler derlenmiştir(53). Derlenen bu verilerden çok sayıda çalışmada yararlanılmıştır.

Ülkemizde de göçle ilgili veriler Frederic C. Shorter'in öncülüğünde 1965 sayımında doğum yerleri oturma yerlerinden farklı olan 0-4 yaş grubundaki çocukların incelenmesi sırasında türetilmeye çalışılmıştır. İlgilenilen 0-4 yaş grubunun kesinlikle ve tümüyle göç edenlerden oluştuğu bilindiğinden, bu grubun yetişkinlerin yer değiştirme yönlerini saptamakta kullanılıp kullanılamayacağı irdelenmiş, alınan olumlu sonuçtan sonra 1960-1965 arası dönem içinde iller arası akımlar incelenebilmiştir (57). Ancak 0-4 yaş grubuna ait verileri kullanırken özellikle kısa sürelerde göç, yaş ve cinsiyet bakımından farklılık gösterdiğinden, 0-4 yaş grubunun kısa aralıklarda gerçek göç örgüsünü göstermediği unutulmamalıdır(58).

Zaman serilerinde de kestirilen göç oranları net göç kavramına dayandırılmaktadır. (3.1)bağıntısından "tahminlenmiş nüfus değişikliği" ndeki hatanın doğrudan net göçe yansıdığı görülmektedir. Bu dezavantajına rağmen netgöç ilişkisi ABD'de birçok araştırmada kullanılmıştır. Bunlardan en önemlisi Plaut modelidir. "İnsan kapitali" görüşünü hemen hemen tümüyle modellendirebilen Plaut'un bu çalışması göç olayını açıklamada çok zayıf kalmıştır (53).

Göç olayına zaman serileri uygulamalarının en önemlilerinden bir diğeri de Ballard'ın yaklaşımıdır. Ballard, Plaut'un göç oranı denklemine benzeyen denklemiyle göç oranını değil, beş gruba ayırdığı nüfusun herbir yaş grubunu kendisinin gecikmeli bir fonksiyonu olarak kestirmektedir. Ancak Plaut'un modeli de istenilen düzeyde başarılı değildir(53).

Sonuç olarak, içe ve dışa göçlere ilişkin güvenilir veriler olmaması yüzünden 3.2.Kesim'de verilen görüşleri yansıtan değişkenlerin yer aldığı modellerin zaman serileriyle kestirimi pek parlak görünmemektedir.

b) Kesit Modelleri. Genellikle ekonometrik yöntemlerde kullanılan kesit modeller, göçü modellemede en zengin kaynak olan ve sayımlardan elde edilen "nüfusun sosyoekonomik karakteristikleri"nin göç kestirimi için kullanılmasıda ortaya çıkan iki probleme karşı ele alınmaktadır : (i) Eğitim başarısı ve gelir dağılımı gibi bağımsız değişkenlerin kestirimindeki güçlük, (ii) Göç-

le ilişkilendirilmiş ekonomik değişkenleri kestirebilen ekonomik modellerle göç verilerinin uygunluğu.

Bilindiği gibi istihdamdaki değişme, işsizlik, ücret düzeyleri v.b. göçle ilişkilendirilebilen ve kendileriyle ilgili yıllık veriler bulunabilen nitelikler her bir bölge için ekonometrik modellerle kestirilebilir. Öte yandan kesit modellerinde verilerin aynı devreye -aynı zamana, aynı uzunluklu süreye- ait olması gereklidir. Bu bir sorun çıkarır. Çünkü demografide yıllık göçlerin beş yıllık göçlerin (1/5)'inden -çıkış yerine dönme, ikinci göçler yüzünden- fazla olması beklenir. Bu soruna karşı ekonometrik modelde yıllık veriler yerine beş yıllık veriler kullanılacak olsa, çok değerli olan ekonomik verilerin kullanılmaması durumuyla karşılaşılır(53). Bu yüzden kesit modellerin daha etkin kullanımı için ekonometrik modellerle ilişkisini daha ayrıntılı olarak araştırmaya ihtiyaç vardır.

c) Markov Modelleri. Özellikle son yıllarda "çok bölgesi demografi" nin gelişmesiyle birlikte demografide Markov modellerinin çeşitli uygulamalarına rastlanmaktadır. Göç de bu uygulamalardan biridir. Ülkemizde de şehirlere göç sonucu ortaya çıkan "şehirleşme" olgusuna Markov modelinin uygulanabileceği bir çalışmada önerilmiştir(58). Bu çalışmada Tankut-Saatçiöğlü sosyoekonomik şartların hızla değişmesi nedeniyle Bakiye Metodu (Sayım ve Hayati Kayıtlara Dayanan Yöntem) ve Hayat Tablosu Metodu (Hayatta Kalma Oranları Yöntemi) nun uzun vadeli göç tahminle-

rinde kullanılamayacağını ileri sürmüş ve bunun yerine sosyoe-
konomik ve çevresel etkenlerin topyekün stokastik model-
lenmesi yolunu önermişlerdir. Durum uzayının elemanlarını
köy, kasaba ve şehir olarak belirleyen yazarlar çalışma-
larını öneri aşamasında bırakmışlardır.

Genelde i.bölgeden j.bölgeye olan göç

$$M_{ij}^*(t) = P_i(t-1) \left[\frac{M_{ij}(b)}{P_i(b-1)} \right] \quad (3.7)$$

denklemleriyle tahmin edilmektedir. Burada $P_i(t-1)$: i.
bölge nüfusunun t yılına kadar hayatta kalan kısmı, b:se-
çilen temel yıl $M_{ij}(b)$: [b-1,b) aralığında i.bölgeden j.
bölgeye göç eden nüfustur. Göç olayına yapılan bu yakla-
şım da bölgelerarası geçiş olasılıkları sabit, yani b te-
mel yılında bulunan geçiş olasılıklarının göç tahmini ya-
pılan dönemler boyunca değişmez kaldığı kabul edilmiş
oluyor. Ancak geçiş olasılıklarının sabit kaldığı varsay-
ımı yapılan uygulamalarda iyi sonuç vermemiştir. 1979'da
Rogerson adlı bir araştırmacı iki veya daha fazla sayıda
geçiş matrisi kullanarak daha güzel sonuçlar elde edile-
bileceğini göstermiştir(52,45). Daha sonra bölgelerin
"görelî çekicilik" katsayıları denen bir kavram aşağıda-
ki şekilde modele katılmıştır :

$$M_{ij}^*(t) = P_i(t-1) \left[\frac{M_{ij}(b)}{P_i(b-1)} \right] \left[\frac{A_j(t-1)}{A_n(t-1)} \right] \left/ \frac{A_j(b-1)}{A_n(b-1)} \right] \quad (3.8)$$

Burada $A_n(t-1)$: t yılındaki ülke nüfusunun ve $A_j(t-1)$:

j.bölgenin $[t-1, t)$ zaman aralığındaki çekicilik indeksini göstermektedir. Dolayısıyla (3.8) formülünde (3.7) formülünden fark eden terim, $(b-1)$. dönemle karşılaştırıldığında j.bölgenin $(t-1)$.dönemdeki "diğer bütün bölgelere göre çekiciliğini" ifade eder(53). (3.8) denklemi k bütün bölgeleri göstermek üzere

$$\sum_k M_{ik}^*(t) = P_i(t-1) \quad (3.9)$$

olacak biçimde düzenlenebilir. Son bulunan (3.9) eşitliğinden yararlanarak (3.8) denklemi

$$\frac{M_{ij}^*(t)}{P_i(t-1)} = \left\{ M_{ij}(b) \left[\frac{A_j(t-1)}{A_j(b-1)} \right] \right\} / \left\{ \sum_k M_{ik}(b) \left[\frac{A_k(t-1)}{A_k(b-1)} \right] \right\} \quad (3.10)$$

biçiminde düzenlenebilir. Hatta bu denkleme "değişen çekiciliğe karşı göçün büyüklüğünü" ölçen bir γ parametresi aşağıdaki gibi ilâve edilebilir(53) :

$$\frac{M_{ij}^*(t)}{P_i(t-1)} = \left\{ M_{ij}(b) \left[\frac{A_j(t-1)}{A_j(b-1)} \right]^\gamma \right\} / \left\{ \sum_k M_{ik}(b) \left[\frac{A_k(t-1)}{A_k(b-1)} \right]^\gamma \right\}. \quad (3.11)$$

Göç olayına Markov modelleriyle yaklaşma, bir başka görüşe göre bölgeler arası bağımlılık etkilerinin dinamik biçimde modellenmesidir(39). Önceleri yalnızca belirli "rekabet eden etkenler"e göre incelenen göç olayı, daha sonra gözönüne alınmayan ve kontrol edilemeyen etkenleri de hesaba katarak özel bir varış yeri açısından baktığında "rekabet eden orijinler (çıkış yerleri)" ve

özel bir çıkış yeri açısından bakıldığında "rekabet eden varış yerleri" biçiminde incelenmeye başlamıştır. Markov modelleri ve nedensel matrisler bu incelemeyi temin etmektedir(39).

3.4. Türkiye'de Erkek Nüfusun İç Göçü

Bu kesimde ülkemiz erkek nüfusunun ülke içindeki göçünü sürekli parametrelili Markov zincirleri aracılığıyla incelemeye çalışacağız. Sözkonusu olguyu incelemeye sürekli parametrelili Markov zincirlerinden yararlanmak istememizin en önemli nedeni, göç olayının yılın tüm zamanlarına yayılmış olmasıdır. Bundan başka ikinci neden olarak, göç olayını incelemeye nüfus bilimciler arasında son yıllarda model olarak alınan homojen olmayan kesikli parametrelili Markov zincirlerinde bazı Markov zincirleri istatistiklerinin hesaplanma güçlüğü, hatta imkânsızlığını, ve üçüncü neden olarak da göç sürecine ilişkin limit dağılımının belirlenebilmesi için en az yirmi dönemlik geçiş olasılıklarının bilinmesi zorunluluğunu görüyoruz(23,36). 1.7.19.Örnek de limit dağılımın belirlenmesinde gereken dönem sayısının büyüklüğünü doğrulamaktadır. Bunun yanında ülkemizde göç hareketlerini belirlemede en güvenilir kaynak olarak görülen nüfus sayımlarının beş yılda bir yapıldığı düşünülürse, homojen olmayan kesikli Markov zincirleriyle göç olayını inceleyebilmek için yerleşim birimleri arasındaki geçişlerin tümünü verecek biçimde en az yüz yıllık (yirmi nüfus sayımını içeren) verilerin elimizde olması gerekmektedir.

Kaldı ki, ülkemizde daha önce yapılan türdeki çalışmalarda göçe ilişkin bilgiler nüfus sayımlarından dolaylı yollarla türetilmektedir; bu yüzden bu verilerin gerçek gözlem değerlerine yakın olacağı da şüphelidir. Öte yandan yüz yıl boyunca bir ülke nüfusunda ani değişmelerin olmaması da beklenemez. Sözelimi, bizim çalışmamızda 1939 yılında ülkemize katılan Hatay ilimizin ülke nüfusuna eklenmesi dolayısıyla 1940 öncesi sayımları analizimize dahil edemiyoruz.

Bu çalışmada 1974 yılında H.Tezmen tarafından yapılan bir göç çalışmasında (61) ülkemizin sosyal, ekonomik ve coğrafi bölgeleme bakımından ayrıldığı birbirine benzer beş bölgeyi temel olarak aldık. Yalnızca bizim çalışmamızda Tezmen'in bölgelemesinden bir fark, 1955 yılında Kocaeli ilinden ayrılıp bir il olan ve son yıllarda sosyoekonomik yapısında görülen değişmeye paralel olarak Sakarya ilinin 3.bölge'de yer alması oldu.

Çalışmadaki bölgeler ve içerdikleri iller aşağıdadır :

1.Bölge. Orta Anadolu Bölgesi : Afyon,Ankara,Çankırı,Çorum,Eskişehir,Kayseri,Kırşehir,Konya,Nevşehir,Niğde,Sivas,Tokat,Yozgat.

2.Bölge. Karadeniz Bölgesi : Amasya,Artvin,Bolu,Giresun,Gümüşhane,Kastamonu,Ordu,Rize,Samsun,Sinop,Trabzon,Zonguldak.

3.Bölge. Marmara-Ege Bölgesi : Aydın,Balıkesir,Bilecik,Bursa,Çanakkale,Edirne,İstanbul,İzmir,Kırklareli,Kocaeli,Kütahya,Manisa,Sakarya,Tekirdağ,Uşak.

4.Bölge. Akdeniz Bölgesi : Adana,Antalya,Burdur,Denizli,Gaziantep,Hatay,Isparta,İçel,Kahramanmaraş,Muğla.

5.Bölge. Doğu-Güneydoğu Anadolu Bölgesi : Adıyaman,Ağrı,Bingöl,Bitlis,Diyarbakır,Elâzığ,Erzincan,Erzurum,Hakkari,Kars,Malatya,Mardin,Muş,Siirt,Tunceli,Urfa,Van.

3.5. Varsayımlar

Çalışmamıza temel olarak alınan varsayımlarımız aşağıdadır :

(i) Sosyal yapıların farklılığı gereği bölgelerin birbirinden farklı olan doğum oranlarının zamana bağlı olarak ülkemizin doğum oranına etkisi sabit kalmıştır. Bir başka deyişle, bölgelerin doğum oranları uzun dönemde iç göç üzerinde aynı etkiyi gösterir.

(ii) Benzer biçimde bölgelerin birbirinden farklı olan ölüm oranlarının zaman içinde ülkemizin ölüm oranına etkisi aynı kalmıştır. Yani bölgelerin ölüm oranlarının uzun dönemde iç göçe olan etkisi aynı kalmıştır.

(iii) Bu çalışmada, özellikle 1960'lı yıllarda Avrupa ülkelerine işçi göçü olarak ortaya çıkan dışa göçün iç göçe etkisi, daha önceki iç göç çalışmalarında 1965 ve 1970 nüfus sayımlarından bu etki arındırılarak elde edilen veriler kullanıldığı için ortadan kalkmıştır.

(iv) İkinci Dünya Savaşı sonrasında özellikle Balkan ülkelerinden gelen ve büyük bir kısmı 3.bölgeye olan içe göçün etkisi daha sonra söz edilecek olan "düzgünleştirme" işlemiyle giderilmiştir.

(v) Ayrıca bu çalışmanın analizine uygunluğu bakımından gözlem zamanları olan nüfus sayım tarihlerinin birbirinden bağımsızlığı varsayılmıştır.

3.6. Gözlem Süreci

Bu çalışmada gözlem zamanları olan nüfus sayımı tarihlerini, (v) varsayımı da dikkate alınarak gün ve ay da dahil olmak üzere bir Poisson sürecinde varış zamanları olarak alabiliriz. Gerçekten, eğer gözlem süreci bir Poisson süreciyse, $U_j, j = 1, 2, \dots, n$ tesadüfi değişkenleri gözlem süresinin başlangıcından j . varışın gözleendiği zamana kadar geçen süre olmak üzere, $U_1, U_2, \dots, U_n$ 'ler $(0, T]$ gözlem aralığı üzerinde bağımsız ve düzgün dağılıma sahiptir. Bu durumda Kolmogorov-Smirnov testiyle gözlem zamanlarının düzgün dağılıma uygunluğu sınanabilir, veya orta büyüklükteki gözlem değerleri için

$$S_n = \sum_{i=1}^n U_i \sim N\left(\frac{nT}{2}, \frac{nT^2}{12}\right) \quad (3.12)$$

yazılabileceğinden, normal dağılımla da bu sınamaya yaklaşabiliriz(19). Buna göre, 1.1.1927 tarihi 0 başlangıç yılı, 1.1.1986 tarihi son gözlem zamanı olarak alınarak j 'ler herhangi bir sırada $j = 1, 4, 11, 7, 8, 10, 5, 2, 6, 12, 3, 9$ olmak üzere U_i 'ler

$$\begin{aligned}
U_1 &= 0,8247; U_2 = 18,7616; U_3 = 53,7863; U_4 = 33,7726; \\
U_5 &= 38,7753; U_6 = 48,7808; U_7 = 23,7644; U_8 = 8,7534; \\
U_9 &= 28,7671; U_{10} = 58,7890; U_{11} = 13,7589; \\
U_{12} &= 43,7781
\end{aligned}$$

ve

$$S_{12} = \sum_{i=1}^{12} U_i = 372,3122 \quad (3.13)$$

dir. İlgili normal dağılım $T = 59,0411$ ile

$N(354,2466; 3485,8515)$ tir. Bu bilgilerle

$$\begin{aligned}
354,2466 - 1,96(59,0411) &\leq 372,3122 \leq 354,2466 + 1,96(59,0411) \\
238,5260 &\leq 372,3122 \leq 469,9672
\end{aligned} \quad (3.14)$$

olduğundan, gözlem sürecini bir Poisson sürecinde varış zamanları olarak alabiliriz.

Gözlem süreci olan Poisson sürecinin parametresini (2.92) Denklem'de de belirtildiği gibi

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{N_t}{t} \quad (3.15)$$

ile veya sabit parçacık sayma yöntemine göre yapılabilir.

Analize dahil ettiğimiz 1.1.1940-1.3.1981 aralığı üzerinden sabit parçacık sayma yöntemine göre, (2.94). Denklem'den $\dot{\gamma} = 0,35$ ile

$$b^* = 8,2460 \quad (3.16)$$

ve (2.95). Denklem'den

$$L^* = \frac{8,2460}{41,2767} = 0,1997737 \quad (3.17)$$

olarak Poisson sürecinin parametresini tahmin ederiz.

3.7. Bölgelerin Nüfusları ve Nüfus Oranları

Bölgelerin sayım yıllarına göre erkek nüfusları 6. Tablo'da ve bu nüfusların oranları 7. Tablo'da verilmiştir.

Tablo 6. Sayım Yıllarına Göre Bölgelerin Erkek Nüfusları

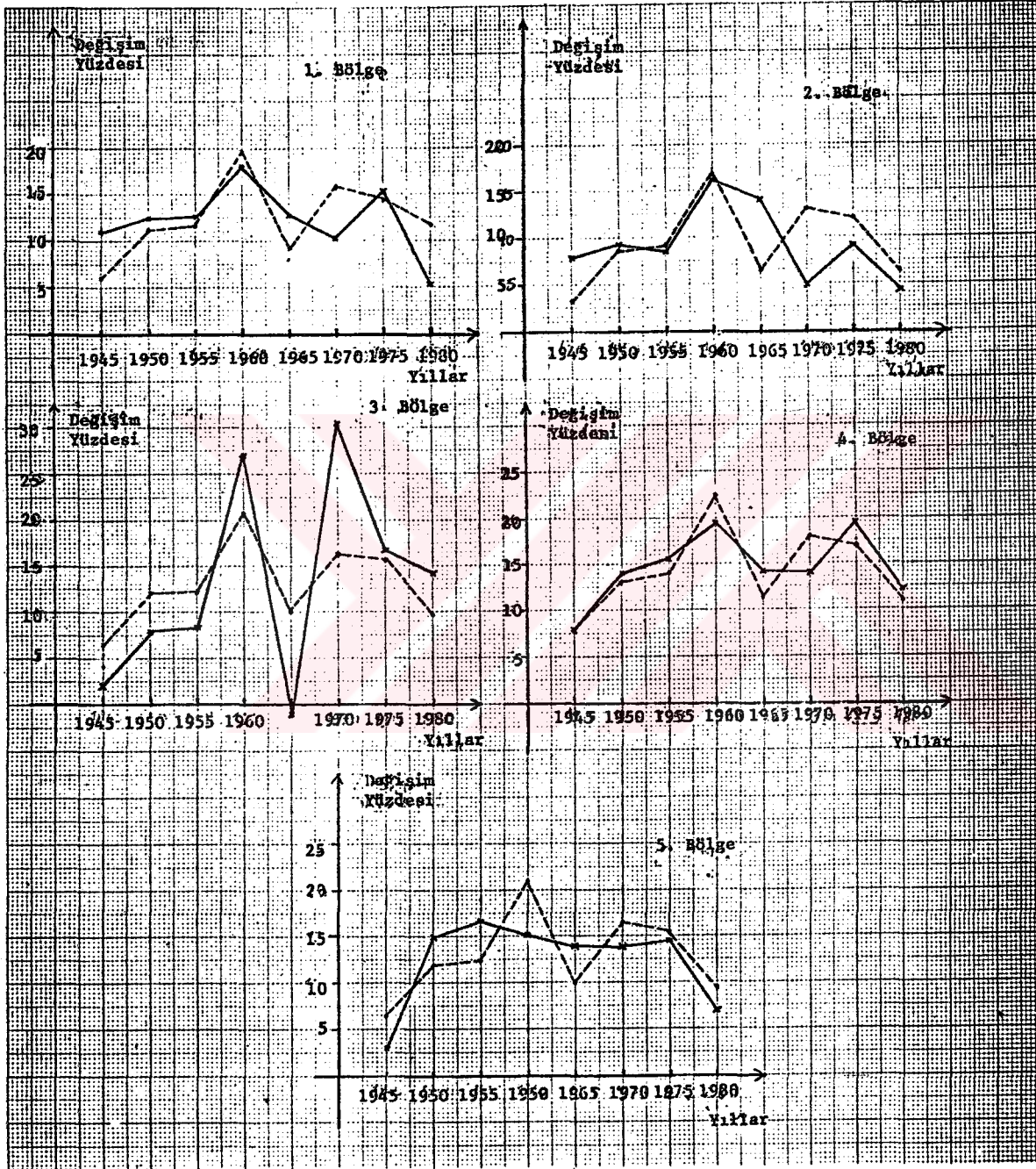
Sayım Yıl- ları	1	B 2	ö 3	l 4	e 5	r
1940	1978737	1485696	2703734	1204157	1526588	
1945	2197444	1608143	2762810	1302164	1576019	
1950	2478107	1763717	2989097	1484311	1811853	
1955	2788635	1921516	3239520	1716483	2115748	
1960	3303112	2245791	4124137	2056391	2434457	
1965	3727567	2565925	4087720	2350023	2777322	
1970	4135570	2692360	5333729	2681879	3163448	
1975	4767013	2943192	6213026	3203840	3617659	
1980	5045017	3075400	7100480	3600738	3873727	

Tablo 7. Sayım Yıllarına Göre Bölgelerin Erkek Nüfus Oranları

Sayım Yıl- ları	1	B 2	ö 3	l 4	e 5	r
1940	0,22235718	0,16695255	0,30382748	0,13531508	0,17154771	
1945	0,23261794	0,17023547	0,29246669	0,13784502	0,16683488	
1950	0,23540296	0,16754087	0,28394347	0,14099924	0,17211346	
1955	0,23668801	0,16268545	0,27536233	0,14568811	0,17957610	
1960	0,23320659	0,15855752	0,29117266	0,14518549	0,17187774	
1965	0,24035550	0,16520228	0,26382829	0,15153073	0,17908320	
1970	0,22966475	0,14951753	0,29620332	0,14893547	0,17567893	
1975	0,22979393	0,14187661	0,29949901	0,15444115	0,17438930	
1980	0,22229286	0,13550786	0,31286040	0,15865524	0,17068364	

7.Tablo'daki erkek nüfus oranları ve sonraki sayfa-
da erkek nüfusta bir önceki sayıma göre değişim oranı
yüzde olarak sürekli çizgili diyagramlar biçiminde 1.Şe-
kil'de verilmiştir.

Bu diyagramlar incelendiğinde özellikle 3.bölgede
2.Dünya Savaşı sonrasında ülkemize olan göçün etkisi be-
lirgin bir biçimde görülmektedir. Ayrıca 1960-1970 yıl-
ları arasında ve son olarak 1978 yılında Bulgaristan'dan
toplu göçler olmuştur. Bunun yanında daha önce söz edilen
1960 sonrasında Avrupa ülkelerine olan işçi göçünün 1974
yılına kadar devam ettiğini ve bu yıldan sonra giderek
durgunlaştığını belirtmekte yarar vardır(62). Bu durum-
lar dikkate alınarak tüm bölge nüfus oranları üzerinde
üçlü hareketli ortalamalar biçiminde bir "düzgünleştirme"
işlemi uyguladık ve 8.Tablo'da verilen bölge nüfus oran-
larını elde ettik. Düzgünleştirilmiş bu nüfus oranları
temel alınarak nüfustaki bir önceki sayıma göre değişim
oranları yüzde olarak kesik çizgili diyagramlar biçi-
minde yine 1.Şekil'de verilmiştir.



Şekil-1. Gerçek Gözlemlenmiş ve Düzgünleştirilmiş Erkek Nüfusunda Bir Önceki Sayıma Göre Değişim Oranları

Tablo 8. Sayım Yıllarına Göre Bölgelerin Düzgünleştirilmiş Erkek Nüfus Oranları

Sayım Yıl- ları	B	ö	l	g	e	l	e	r
1	2	3	4	5				
1940	0,2349127	0,1749483	0,2824253	0,1360673	0,1716464			
1945	0,2344634	0,1709397	0,2836303	0,1386643	0,1723023			
1950	0,2340141	0,1669312	0,2848353	0,1412613	0,1729581			
1955	0,2335649	0,1629226	0,2860402	0,1438583	0,1736140			
1960	0,2331156	0,1589141	0,2872452	0,1464552	0,1742699			
1965	0,2326662	0,1549055	0,2884502	0,1490522	0,1749258			
1970	0,2322170	0,1508970	0,2896551	0,1516492	0,1755817			
1975	0,2317677	0,1468884	0,2908601	0,1542462	0,1762376			
1980	0,2313184	0,1428799	0,2920651	0,1568432	0,1768934			

3.8. Gözlem Zincirinin Geçiş Matrisi ve Üretici Matris

8.Tablo'da verilen oranlardan tahmin edilen ve kendisi de aynı zamanda kesikli parametreler Markov zinciri olan gözlem zincirine ilişkin bir geçiş olasılıkları matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 0,98916270 & 0,00000000 & 0,01083730 & 0,00000000 & 0,00000000 \\ 0,00275310 & 0,97539630 & 0,00000000 & 0,00000000 & 0,02185060 \\ 0,00000000 & 0,00000000 & 0,98815540 & 0,01184460 & 0,00000000 \\ 0,00000000 & 0,00000000 & 0,00549870 & 0,99450130 & 0,00000000 \\ 0,00940791 & 0,00000000 & 0,00731989 & 0,00000000 & 0,98327220 \end{bmatrix}$$

(3.18)

dir. Bu matrisi (6)'da verilen IBM-4097 sistemi için Fortran 77 dilinde yazılmış programı IBM PC sistemlerine uyarlayarak elde ettik. Söz konusu tahmin, Minimum Mutlak Sapmalı tahmin edici olup, ayrıca köşegen elemanları gözlem

oranlarının ortalamalarının çarpımının tersi olan köşegen bir matrisle tartılanmıştır. Bir başka Minimum Mutlak Sapmalı tahmin, ağırlık matrisi köşegen elemanları gözlem oranlarının ortalamasının tersi ve köşegen bir matris olan

$$P = \begin{bmatrix} 0,98528017 & 0,00000000 & 0,01471983 & 0,00000000 & 0,00000000 \\ 0,00387002 & 0,97539630 & 0,00000000 & 0,00233185 & 0,01840183 \\ 0,00000000 & 0,00000000 & 0,99224900 & 0,00775100 & 0,00000000 \\ 0,00000000 & 0,00000000 & 0,00000000 & 1,00000000 & 0,00000000 \\ 0,01358330 & 0,00000000 & 0,00000000 & 0,00000000 & 0,98641670 \end{bmatrix}$$

(3.19)

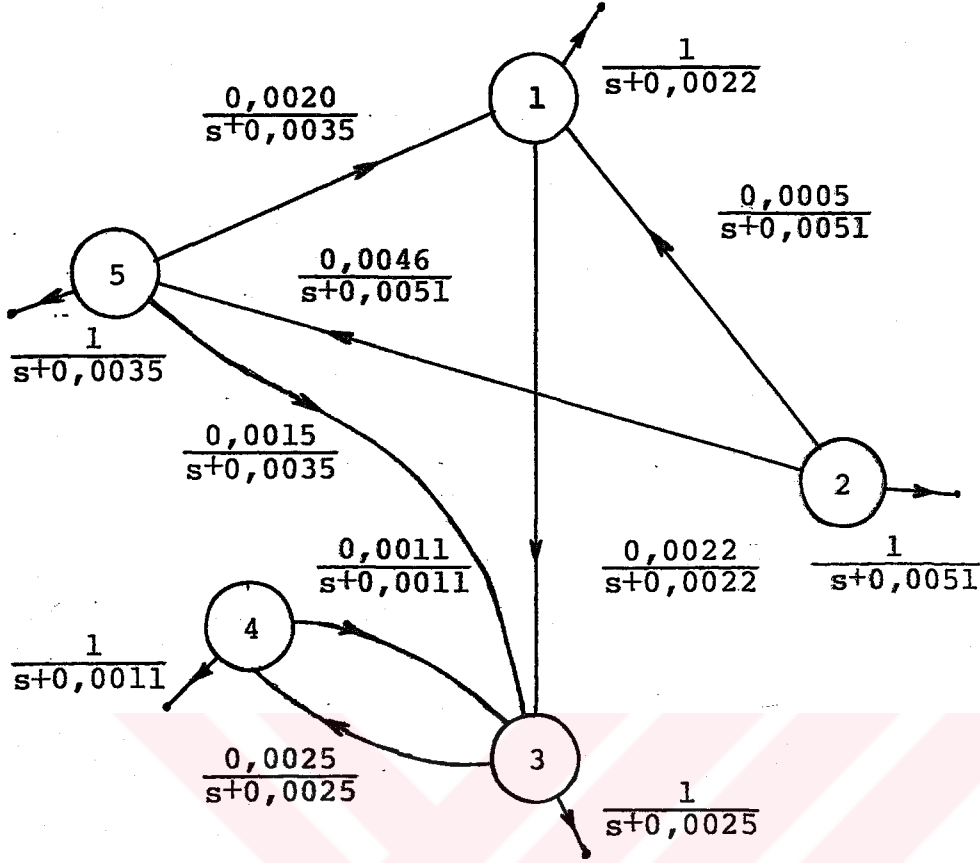
dir. Ancak bu ikinci tahminde 4.bölge yutan bir durum olduğundan ve bu durum uygulamalarda pek fazla tercih edilmediğinden biz ilk tahmin üzerinden analizlerimize devam edeceğiz.

İlk tahmin edilen geçiş matrisinden sürekli parametrelili Markov zincirinin üretici matrisi (2.91) Denklemi'ne göre

$$A = \begin{bmatrix} -0,0022 & 0,0000 & 0,0022 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0005 & -0,0051 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0046 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0025 & 0,0025 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0011 & -0,0011 & 0,0000 \\ 0,0020 & 0,0000 & 0,0015 & 0,0000 & -0,0035 \end{bmatrix}$$

(3.20)

biçiminde elde edilir. A üretici matrisi yardımıyla çizilen ve durum işgal oranlarıyla ilk geçiş zamanlarını belirlemede yararlanacağımız bölgelerarası akış grafiği 2.Şekil'de verilmiştir :



Şekil 2. Bölgelerarası Akış Grafiği.

3.9. Geçiş Olasılıkları Fonksiyonu, Limit Dağılım, Tahminler

Elemanları $p_{ij}(t)$, başlangıçta i durumunda bulunan sürecin t anında j durumuna geçiş olasılığını göstermek üzere $P(t)$, geçiş olasılıkları fonksiyonu yada "aralık geçiş olasılıkları" matrisi $(sI-A)^{-1}$ matrisinden ters Laplace dönüştürümleri kullanılarak bulunur(23). Buna göre $P(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$ geçiş olasılıkları fonksiyonunun elemanları

$$\begin{aligned}
P_{11}(t) &= e^{-0,0022t}, \quad P_{12}(t) = P_{15}(t) = 0, \\
P_{13}(t) &= 0,3056 + 0,7857e^{-0,0022t} - 1,0913e^{-0,0036t}, \\
P_{14}(t) &= 0,6944 - 1,7857e^{-0,0022t} + 1,0913e^{-0,0036t}, \\
P_{21}(t) &= 2,6127e^{-0,0022t} - 4,4231e^{-0,0035t} + 1,8104e^{-0,0051t}, \\
P_{22}(t) &= e^{-0,0051t}, \quad P_{23}(t) = 0,3056 + 2,0529e^{-0,0022t} - \\
&- 37,1538e^{-0,0035t} + 34,6230e^{-0,0036t} + 0,1724e^{-0,0051t}, \\
P_{24}(t) &= 0,6944 - 4,6656e^{-0,0022t} + 38,7019e^{-0,0035t} - \\
&- 34,6230e^{-0,0036t} - 0,1078e^{-0,0051t}, \\
P_{25}(t) &= 2,8750(e^{-0,0035t} - e^{-0,0051t}), \\
P_{31}(t) &= P_{32}(t) = P_{35}(t) = 0, \\
P_{33}(t) &= 0,3056 + 0,6944e^{-0,0036t}, \\
P_{34}(t) &= 0,6944(1 - e^{-0,0036t}), \\
P_{41}(t) &= P_{42}(t) = P_{45}(t) = 0, \\
P_{43}(t) &= 0,3056(1 - e^{-0,0036t}), \\
P_{44}(t) &= 0,6944 + 0,3056e^{-0,0036t}, \\
P_{51}(t) &= 1,5385(e^{-0,0022t} - e^{-0,0035t}), \\
P_{52}(t) &= 0, \\
P_{53}(t) &= 0,3056 + 1,2088e^{-0,0022t} - 12,9230e^{-0,0035t} + \\
&+ 11,4087e^{-0,0036t}, \\
P_{54}(t) &= 0,6944 - 2,7473e^{-0,0022t} + 13,4615e^{-0,0035t} - \\
&- 11,4087e^{-0,0036t}, \\
P_{55}(t) &= e^{-0,0035t}
\end{aligned}
\tag{3.21}$$

olur.

Yukarıdaki geçiş olasılıkları fonksiyonu incelendiğinde sürecin limit dağılımının

$$v = (0,0000; 0,0000; 0,3056; 0,6944; 0,0000) \quad (3.22)$$

olduğu görülür. Bu sonuç bize koşulların gözlem yapılan yıllardakinin aynı kalmak şartıyla 3. ve 4. bölgelerde erkek nüfus bakımından bir yığılma olacağını gösterir.

Geçiş olasılıkları fonksiyonunun 1980 yıl başındaki değeri

$$P(40) = \begin{bmatrix} 0,91576 & 0,00000 & 0,08017 & 0,00407 & 0,00000 \\ 0,02366 & 0,81546 & 0,00582 & 0,00010 & 0,15495 \\ 0,00000 & 0,00000 & 0,90687 & 0,09313 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,00000 & 0,04098 & 0,95902 & 0,00000 \\ 0,07139 & 0,00000 & 0,05651 & 0,00274 & 0,86936 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

ve $v(40) = v(0)P(40)$ bağıntısından aynı yıldaki erkek nüfusun bölgelere göre dağılımına ilişkin tahmin

$$\hat{v}(40) = (0,23151; 0,14266; 0,29125; 0,15825; 0,17633) \quad (3.24)$$

olarak bulunur. O sayımdaki gözlemlenen dağılım

$$v_g(40) = (0,22229; 0,13551; 0,31286; 0,15866; 0,17068) \quad (3.25)$$

ve düzgünleştirilmiş gözlemlenen dağılım

$$v_{dg}(40) = (0,23132; 0,14288; 0,29207; 0,15684; 0,17689) \quad (3.26)$$

olup, gözlemlenen dağılımla tahmin edilen dağılım ara-

sında fark görülmekle birlikte düzgünleştirilmiş gözlemlenen dağılımla tahmin edilen dağılım arasında düzgünleştirme gereği önemli bir fark görülmemektedir.

1980 yılındakine benzer biçimde 2000 yılında erkek nüfusun bölgelere göre dağılımı

$$\hat{v}(60) = (0,22978; 0,12883; 0,29562; 0,16931; 0,17646) \quad (3.27)$$

olarak tahmin edilir. Beş yıllık aralarla sayım günleri itibariyle erkek nüfusun bölgelere göre dağılımı 9.Tablo'da verilmiştir.

Tablo 9. Sayım Günleri İtibariyle Bölgelerin Tahmini Erkek Nüfus Oranları

Sayım Tarihi	B ö l g e l e r				
	1.	2	3	4	5
21.10.1945	0,23443	0,16990	0,28369	0,13927	0,17271
22.10.1950	0,23399	0,16556	0,28483	0,14207	0,17355
23.10.1955	0,23357	0,16139	0,28590	0,14487	0,17427
23.10.1960	0,23315	0,15733	0,28703	0,14763	0,17486
24.10.1965	0,23272	0,15341	0,28808	0,15038	0,17541
25.10.1970	0,23230	0,14950	0,28922	0,15318	0,17580
26.10.1975	0,23187	0,14572	0,29030	0,15597	0,17614
12.10.1980	0,23145	0,14208	0,29142	0,15871	0,17634

3.10. Bölgelerarası İlk Geçiş Zamanları

Bölgelerarası akış grafiğinden yararlanarak Laplace dönüştürmelerini elde ettiğimiz bölgelerarası ilk geçiş zamanlarına ilişkin yoğunluk fonksiyonları aşağıdadır;
 $t \geq 0$ ile

$$\begin{aligned}
 f_{11}(t) &= f_{12}(t) = f_{15}(t) = 0, \quad f_{13}(t) = 0,0022e^{-0,0022t}, \\
 f_{14}(t) &= 0,0183(e^{-0,0022t} - e^{-0,0025t}), \\
 f_{21}(t) &= 2,467741 \times 10^{-3}e^{-0,0020t} - 2,467741 \times 10^{-3}e^{-0,0051t}, \\
 f_{22}(t) &= 0, \quad f_{23}(t) = 1,916 \times 10^{-3}e^{-0,0015t} - \\
 &\quad - 1,269607846 \times 10^{-3}e^{-0,0051t} - 6,4705882 \times 10^{-4}e^{-0,0022t}, \\
 f_{24}(t) &= 3,17059 \times 10^{-4}e^{-0,0051t} + 0,047900088e^{-0,0022t} - \\
 &\quad - 0,06176282e^{-0,0025t} + 0,013545673e^{-0,0035t}, \\
 f_{25}(t) &= 0,0046e^{-0,0046t}, \quad f_{31}(t) = f_{32}(t) = f_{35}(t) = 0, \\
 f_{33}(t) &= f_{44}(t) = 1,964285714 \times 10^{-3}(e^{-0,0011t} - e^{-0,0025t}), \\
 f_{34}(t) &= 0,0025e^{-0,0025t}, \quad f_{41}(t) = f_{42}(t) = f_{45}(t) = 0, \\
 f_{43}(t) &= 0,0011e^{-0,0011t}, \quad f_{51}(t) = 0,0020e^{-0,0020t}, \\
 f_{52}(t) &= f_{55}(t) = 0, \quad f_{53}(t) = 3,384615384 \times 10^{-3}e^{-0,0022t} - \\
 &\quad - 0,001884615e^{-0,0035t}, \quad f_{54}(t) = 0,004711538e^{-0,0035t} - \\
 &\quad - 0,032886e^{-0,0025t} + 2,82051282 \times 10^{-2}e^{-0,0022t} \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Burada $i = j$ olduğunda $f_{ij}(t)$ ilk geçiş zamanına "ilk geri dönüş zamanı" diyoruz. Yukarıdaki yoğunluk fonksiyonlarına bakıldığında, 1., 2. ve 5. bölgeler için geri dönüş mümkün görülüyor. Bu durumun limit dağılımla da uygun düştüğü açıktır.

θ_{ij} yukarıdaki yoğunluk fonksiyonları verilen tesadüfi değişken, yani başlangıçta i durumunda bulunan sürecin j durumuna ilk geçiş anını göstermek üzere, sürecin ortalama ilk geçiş zamanlarını $f_{ij}^e(s)$ Laplace dönüştürmelerinden

$$\bar{\theta}_{ij} = - \frac{d}{ds} f_{ij}^e(s) \Big|_{s=0} \quad (3.29)$$

veya doğrudan "beklenen değer" tanımından elde edebiliriz. Benzer yolla ilk geçiş zamanlarının ikinci momentlerini

$$\bar{\theta}_{ij}^2 = \frac{d^2}{ds^2} f_{ij}^e(s) \Big|_{s=0} \quad (3.30)$$

ilişkisinden veya tanımdan, dolayısıyla sözkonusu değişkenin varyansını

$$\text{Var}(\theta_{ij}) = \bar{\theta}_{ij}^2 - (\bar{\theta}_{ij})^2 \quad (3.31)$$

ile buluruz. 10. Tablo'da sıfırdan farklı olan ilk geçiş ve geri dönüş zamanlarını ve bunlara ilişkin standart sapmaları gösteriyor.

Tablo 10. Bölgelerarası Ortalama İlk Geçiş Zamanları ve Standart Sapmaları

i_j	$\bar{\theta}_{i_j}$	$\sqrt{\text{Var}(\theta_{i_j})}$
13	454,55	454,55
14	854,55	605,48
21	647,06	2525,46
23	669,35	739,66
24	26,85	1046,63
25	217,39	217,39
33	1309,09	1643,22
34	800,00	7959,90
43	909,09	909,09
44	1309,09	1643,22
51	500,00	500,00
53	545,45	500,30
54	950,25	636,43

10.Tablo'daki bilgilere göre başlangıçta bulunan bölgeler kendi içinde ilk geçiş zamanları bakımından karşılaştırıldığında : 1.bölgeden 4.bölgeye ilk geçiş için gereken zamanın ancak % 53,2'sinde 1.bölgeden 3.bölgeye ilk geçiş yapılmaktadır.

2.bölgeden diğer bölgelere ilk geçişte en fazla zaman 3.bölgeye geçişte gerekli olmaktadır. 23-ilk geçiş zamanının % 96,7'si kadar bir sürede 21-ilk geçişi, % 4 ünde de 24-ilk geçişi ve % 32,5'unda da 25-ilk geçişi olmaktadır.

3.bölgeden yalnızca 4.bölgeye geçiş olmaktadır. Başlangıçta 3.bölgede bulunan nüfusun bölge dışına çıkıp -4.bölgeye geçip-tekrar 3.bölgeye geri dönmesi için geçen süre 4.bölgeye ilk geçişte geçen süreden % 63,6'sı kadar daha fazladır.

4.bölgeden de yalnızca 3.bölgeye geçiş mümkün olup, başlangıçta bu bölgede bulunan bir kişinin 3.bölgeye göçüp oradan tekrar 4.bölgeye geri dönmesi için gerekli süre, 43-ilk geçiş süresinden % 44 daha fazladır.

5.bölgeden 2.bölge dışında tüm bölgelere geçiş olmakta, ancak bu bölgeden ayrılan bir kişi bu bölgeye tekrar geri dönmemektedir. 5.bölgeden en uzun süreli ilk geçiş 4.bölgeye olmakta, bu geçişin % 52,6'sında 51-ilk geçişi, % 57,4'ünde 53-ilk geçişi gerçekleşmektedir.

İlk geçiş zamanları bakımından bütün bölgeler birbiriyle karşılaştırıldığında : en kısa süreli ilk geçiş 24, en uzun süreli ilk geçiş her ikisi de birbirine eşit ve birer ilk geri dönüş olan 33 ve 44 geçişleridir. Bu ilk geçişlerde en kısa süre/en uzun süre oranı % 2,1'dir.

3.11. Bölgelerarası Durum İlgalleri

$v_{ij}(t)$, başlangıçta i durumunda bulunan sürecin $(0,t)$ zaman aralığında j durumunu işgal sayısını gösterebilir. Bu tesadüfi değişkenin olasılık fonksiyonu -ki bu fonksiyon işgal olasılık fonksiyonu diye adlandırılır-,

$$w_{ij}^{ge}(y/s) = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{(1-y)f_{ij}^e(s)}{1-yf_{jj}^e(s)} \right] \quad (3.32)$$

bağıntısından, ve ilk iki momenti, N durum sayısı olmak üzere, sırasıyla

$$\bar{v}_{ij}^e(s) = \frac{f_{ij}^e(s)}{s[1-f_{jj}^e(s)]} \quad (3.33)$$

$$\bar{v}_{ij}^{2e}(s) = \frac{f_{ij}^e(s)[1+f_{jj}^e(s)]}{s[1-f_{jj}^e(s)]^2}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3.34)$$

ilişkilerinden bulunur (23). Burada ilk bağıntıda $w_{ij}^{ge}(y/s)$, $w_{ij}(k/t) = P(v_{ij}(t) = k)$ olasılık fonksiyonunun geometrik-Laplace dönüştürümüdür. Ancak burada yalnızca ilk momentleri vermekle yetineceğiz. $t \geq 0$ ile

$$\bar{v}_{11}(t) = \bar{v}_{12}(t) = \bar{v}_{15}(t) = 0, \quad \bar{v}_{13}(t) = 1 - e^{-0,0022t},$$

$$\bar{v}_{14}(t) = 0,1350 + 7,6389 \times 10^{-4}t + 0,7578e^{-0,0036t} - 0,8928e^{-0,0022t},$$

$$\bar{v}_{21}(t) = 1 - 1,4839e^{-0,0020t} + 0,4839e^{-0,0051t}, \quad \bar{v}_{22}(t) = 0,$$

$$\bar{v}_{23}(t) = 0,1447 + 7,6389 \times 10^{-4}t - 0,5759e^{-0,0036t} - 0,1623e^{-0,0015t} - 0,01847e^{-0,0022t} + 0,6120e^{-0,0051t}$$

$$\bar{v}_{24}(t) = -0,0774 + 7,6389 \times 10^{-4}t - 24,0438e^{-0,0036t} - 0,0845e^{-0,0051t} + 26,5385e^{-0,0035t} - 2,3328e^{-0,0022t},$$

$$\bar{v}_{25}(t) = 1 - e^{-0,0046t}, \quad \bar{v}_{31}(t) = \bar{v}_{32}(t) = \bar{v}_{35}(t) = 0,$$

$$\bar{v}_{33}(t) = -0,2122 + 7,6389 \times 10^{-4}t + 0,2122e^{-0,0036t},$$

$$\bar{v}_{34}(t) = 0,4823 + 7,6389 \times 10^{-4} t - 0,4823 e^{-0,0036t},$$

$$\bar{v}_{41}(t) = \bar{v}_{42}(t) = \bar{v}_{45}(t) = 0,$$

$$\bar{v}_{43}(t) = 9,3364 \times 10^{-2} + 7,6389 \times 10^{-4} t - 9,3364 \times 10^{-2} e^{-0,0036t},$$

$$\bar{v}_{44}(t) = -0,2122 + 7,6389 \times 10^{-4} t + 0,2122 e^{-0,0036t},$$

$$\bar{v}_{51}(t) = 1 - e^{-0,0020t}, \quad \bar{v}_{52}(t) = 0,$$

$$\bar{v}_{53}(t) = 0,3711 + 7,6389 \times 10^{-4} t + 3,4860 e^{-0,0036t} - 3,6923 e^{-0,0035t} - 0,1648 e^{-0,0022t},$$

$$\bar{v}_{54}(t) = -571,6891 + 0,6944t + 1248,7512 e^{-0,0022t} - 3846,1538 e^{-0,0035t} + 3169,0917 e^{-0,0036t}, \quad \bar{v}_{55}(t) = 0.$$

(3.35)

11.Tablo'da sırasıyla 1960, 1980 ve 2000 yıllarına ilişkin durum işgallerinin ortalama değerleri verilmiştir.

11. Tablo'da yer alan değerler bir kişinin sözkonusu zaman aralığında verilen bölgeye yapacağı geçiş sayısını verdiğinden, bir bakıma diğer kişiler de gözönüne alındığında bir "durum işgal oranı" olarak alınabilir. Değerlendirmelerimizi bu görüş altında yapacağız.

Tablo 11. 1960, 1980 ve 2000 Yıllarında Ortalama Durum İlgalleri

i_j	$\bar{v}_{ij}(20)$	$\bar{v}_{ij}(40)$	$\bar{v}_{ij}(60)$
13	0,04305	0,08424	0,12366
14	0,00107	0,00413	0,00902
21	0,01126	0,02479	0,04024
23	0,00130	0,00589	0,01242
24	0,00002	0,00019	0,00063
25	0,08789	0,16806	0,24119
33	0,00054	0,00210	0,00461
34	0,04878	0,09524	0,13953
43	0,02176	0,04308	0,06397
44	0,00054	0,00210	0,00461
51	0,03921	0,07688	0,11308
53	0,02982	0,05929	0,08839
54	0,00401	0,03659	0,12415

11.Tablo'daki 1980 yılına ilişkin durum işgalleri incelendiğinde başlangıçtaki 1.bölgede olup 3.bölgeyi işgal edenlerin oranının, aynı dönemde başlangıçta 1.bölgede bulunan kişilerin 3.ve 4.bölgelere geçme olasılıklarının toplamına eşit olduğu görülür. Buna göre ilgili $\bar{v}_{ij}(t)$ ve $p_{ij}(t)$ fonksiyonlarına bakıldığında

$$\bar{v}_{13}(t) = p_{13}(t) + p_{14}(t), t \geq 0 \quad (3.36)$$

fonksiyonel ilişkisi bulunur. Bu ilişki başlangıçta 1. bölgede bulunup 4.bölgeye geçenlerin büyük bir kısmının ikinci geçişlerini 3.bölgeye yaptıkları, veya 13-geçişini yapanların bir kısmının aynı zaman aralığında 4.bölgeye

geçip tekrar 3.bölgeye geri döndükleri biçiminde yorumlanabilir. Benzer biçimde $\bar{v}_{14}(40)$ 'a bakılırsa $p_{14}(40)$ 'dan az büyük olduğu görülür. Bu durumda başlangıçta 1. bölgede bulunan ve 3.bölgeye geçen nüfusun çok az bir kısmının 3.bölgeden 4.bölgeye geçtiği veya 4.bölgeden 3. bölgeye geçip oradan tekrar 4.bölgeye geçtiği söylenebilir.

Bölgeler arasındaki diğer durum işgalleri de bireysel olarak benzer biçimde yorumlanabilir. Sözkonusu işgallerin tümü birbiriyle karşılaştırıldığında oran olarak en fazla işgal 25, en az işgal 24'tür. 25 işgallerinin fazla olmasının bir nedeni olarak bölgenin toprak büyüklüğü, bir ikinci neden olarak da son yıllarda 5.bölgede yeni yeni gelişen göç çekim merkezleri gösterilebilir(61).

Diğer durum işgallerinde bulunan bir başka fonksiyonel ilişki

$$\bar{v}_{34}(t) = \bar{v}_{33}(t) + p_{34}(t), \quad t \geq 0 \quad (3.37)$$

dir. Bu ilişki $(0,t)$ aralığında 34-işgallerinin başlangıçta 3.bölgede olan ve tekrar bu bölgeye geri dönenlerin işgalleri artı 3.bölgeden 4.bölgeye kesin-geri dönmemek şartıyla- göç edenlerin neden olduğu işgaller biçiminde açıklanabilir. Aşağıda da yalnızca 1980 yılı için gerçekleşen iki ilişki veriyoruz :

$$\bar{v}_{43}(40) = \bar{v}_{33}(40) + p_{43}(40), \quad (3.38)$$

$$\bar{v}_{51}(40) = p_{51}(40) + 2p_{54}(40) \quad (3.39)$$

Bu ilişkilerden ilki yalnızca 1980 yılında olmak üzere daha önce verilen ikinci fonksiyonel ilişkiye benzer biçimde yorumlanabilir. İkincisi ise, 51-işgallerinin incelenen 40 yıllık zaman süresinde 51-mümkün geçişlerinden 54-mümkün geçişlerinin iki katı kadar daha fazla olduğu şeklinde açıklanabilir. Bu durum ülkemizdeki göç olayını inceleyen bazı nüfus bilimcilerin yaptığı gibi, 1.bölgeyi göç veren bölgelerle göç alan bölgeler arasında da bir geçiş bölgesi olmasıyla ilişkilendirilebilir(57).

3.12. Hayat Boyu İç Göç Oranının Tahmini

Sözkonusu oranı d , $P(t)$ 'nin köşegen elemanlarından oluşan vektör olmak üzere,

$$\hat{r}(t) = v(0) [P(t) - dI]^{-1} \underline{1}$$

ile tahmin edilebilir. 1980 yılı için bu oran

$$\hat{r}(40) = v(0) [P(40) - dI]^{-1} \underline{1} = 0,106 = \% 10,6$$

olarak bulunur. Bu oran $\% 10,7$ olarak bahsedilen 1965-1970 dönemi ülke içindeki nüfus hareketliliğinden pek farklı değildir(63).

3.13. Sonuç

Ülkemizde özellikle 2.Dünya Savaşı'nın sonrasında ortaya çıkan iç göç olayını incelemek için, özellikle savaş sonrasının ilk yıllarında göçmenleri ve göçmenlerin demoğrafik özelliklerini izlemek için gerekli olan kapsamlı oturma yeri kayıtları ve hayati olaylara (doğum, ölüm, göç) ilişkin güvenilir kayıtlar yoktu. Özellikle 1950'lerden sonra iç göç olayları göç alanında en güvenilir kaynak olan nüfus sayımlarından dolayı yollardan tahmin edilme yoluna gidilmiş ve bu alanda dünyadaki çalışmalara paralel olarak giderek daha çok gelişmiş teknikler kullanılmıştır. Öte yandan 1950'lerden sonra Devlet İstatistik Enstitüsü sayımlara yeni sorular ekleyerek bilim adamları ve plâncılar için gerekli bilgilerin elde edilmesinde işbirliği yapmıştır.

Biz bu çalışmamızda yalnızca sayımların yapıldığı yılları kapsayan süre için yapılan iç göç incelemeleri yerine daha sonraki yıllara yönelik olarak bu olayı incelemeyi ve bunun için olayı stokastik bir ortam içinde ele almayı uygun gördük. Göç olayının zaman olarak yılın tümüne yayılmış olması bakımından daha anlamlı olması, göç olayına ilişkin istatistiklerin daha kolay hesaplanabilmesi ve göç olayında ileriye yönelik tahminler için gözlem yıllarının daha geniş bir zamana yayılmasına gerek olmaması nedenlerinden de sürekli parametrelili Markov zincirlerini göç olayını incelemeye en elverişli model olarak ele aldık.

Analizimizin sonucunda göç olayını etkileyen sosyo-ekonomik şartlar aynı kaldığı sürece 3.bölge olarak alınan Marmara-Ege bölgesiyle, 4.bölge olarak ele alınan Akdeniz bölgesinde erkek nüfusun artacağı, buna karşılık sırasıyla 1.,2. ve 5.bölge olarak alınan Orta Anadolu, Karadeniz ve Doğu-Güneydoğu Anadolu Bölgelerinde sözkonusu nüfusun azalacağı görüldü. Elde edilen geçiş olasılıkları fonksiyonu yardımıyla tahmin edilen gözlem yıllarına ilişkin erkek nüfusun dağılımıyla düzgünleştirilmiş gözlem dağılımının birbirine çok yakın olduğu görüldü. Bu durum geçiş olasılıkları fonksiyonunun tahmininin kabul edilebilir ve tutarlı olduğunu göstermektedir. Bunun yanında önceki başka tekniklere göre yapılan 1.,2. ve 5. bölgelerin erkek nüfus bakımından göç veren bölgeler olduğu doğrulandı. 1940-1980 yılları arasında hayat boyu göçedenlerin oranı % 10,6 olarak belirlendi.

Göçedenlerin göç ettikleri bölgelere ilk geçiş zamanlarına ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonları ve ortalamaları bulundu. Bu bakımdan ortalama en kısa zamanın Karadeniz bölgesinden Akdeniz bölgesine ilk geçişte, en uzun zamanın ise Doğu-Güneydoğu Anadolu bölgesinden Akdeniz bölgesine ilk geçişte ortaya çıkacağı tahmin edildi. Öte yandan Marmara-Ege ve Akdeniz bölgelerine ilk geri dönüş zamanının tüm bölgelerarası ilk geçiş zamanlarından daha uzun olacağı tahmin edilirken, Orta, Doğu-Güneydoğu Anadolu ve Karadeniz bölgelerine geri dönüşün ise mümkün olmadığı görüldü.

Göçedenlerin neden oldukları durum işgalleri elde edilen ortalamaları bakımından karşılaştırıldığında, en az işgaller -sıfırdan farklı olanlar içinde- başlangıçta Karadeniz Bölgesinde bulunanların Akdeniz bölgesine yaptığı geçişlerle, en fazla işgallerin ise, başlangıçta yine Karadeniz bölgesinde bulunanların Doğu-Güneydoğu Anadolu bölgesine yaptığı geçişlerle olduğu görüldü.



KAYNAKLAR

- 1- Karr, A.F., "Estimation and reconstruction for zero-one, Markov processes", Stochastic Process. Appl., 16,219(1984).
- 2- Madansky, A., "Least squares estimation in finite Markov processes", Psychometrika, 24,137(1959)
- 3- Lee, T.C. and Rey, G., "A quadratic programming approach to the estimation of transition probabilities", Management Sci., 12,714(1966).
- 4- Lee, T.C., Judge, G.G. and Zellner, A., "Maximum likelihood and Bayesian estimation of transition probabilities", JASA, 63,1162(1968).
- 5- Lee, T.C. and Judge G.G., "Estimation of transition probabilities in a nonstationary finite Markov chain", Metroeconomica, 24,180(1972).
- 6- Lee, T.C., Judge, G.G. and Zellner, A., Estimating the Parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data, 2nd revised ed, eds:Johnston, J., Sandee, J., Strotz, R.H. et. al., North-Holland, Amsterdam, 1977.
- 7- Stratonovich, R.L., "Conditional Markov processes", Probability Appl., 5, 156(1960).
- 8- Kushner, H.J., "On the dynamical equations of conditional probability functions with applications to optimum stochastic control theory" J.Math. Anal. Appl., 8,332(1964).

- 9- Wonham, W.M., "Some applications of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering", SIAM J.Control, 2,347(1965)
- 10- Shiryaev, A.N., "Stochastic equations of nonlinear filtering of Markovian jump processes", Problems of Information Transmissions,2,1(1966).
- 11- Yashin, A.I., "Filtering of jump processes", Automat. Remote Control, 31,725(1970).
- 12- Rudemo, M., "State estimation for partially observed Markov chains", J.Math. Anal. Appl., 44, 581(1973).
- 13- Masry, E., "Poisson sampling and spectral estimation of continuous time processes", IEEE Trans. Inf. Theory, 24,173(1978).
- 14- Rogers, L.C.G. and D. Williams, "Construction and approximation of transition matrix functions", Suppl. Adv. App. Prob., December, 1986.
- 15- Howard, R.A., Dynamic Probabilistic Systems: Markov Models, Vol. I, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1971.
- 16- Ackoff, R.L., Scientific Method, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962.
- 17- Bartholomew, D.J., "The statistical approach to manpower planning", The Statistician,20, No.1,3(1971).
- 18- Esin,A., Yöneylem Araştırmasında Yararlanılan Karar Yöntemleri, Gazi Üniversitesi Basımevi, Ankara, 1984.

- 19- Parzen, E., Stochastic Processes, Holden-Day, San Francisco, 1962.
- 20- Çinlar, E., Introduction to Stochastic Processes, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- 21- Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol.I, 3rd ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1968.
- 22- Seneta, E., Nonnegative Matrices and Markov Chains, 2nd ed., Springer-Verlag, Inc., New York, 1981.
- 23- Howard, R.A., Dynamic Probabilistic Systems: Semi-Markov and Decision Processes, Vol.II., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1971.
- 24- Mukherjea, A. and Nakassis, A., "Convergence of non-homogeneous stochastic chains with countable states", J. Multivariate Anal., 16,85(1985)
- 25- Kingman, J.F.C., "Geometrical aspects of the theory of nonhomogeneous Markov chains", Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 77,171(1975).
- 26- Cohn, H., "On a class of nonhomogeneous Markov chains", Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 92,527(1982).
- 27- Papoulis, A., Probability, Random Variables and Stochastic Processes, 2nd ed., McGraw-Hill, 1984.
- 28- Karlin, S. and Taylor, H.M., A First Course in Stochastic Processes, 2nd ed., Academic Press, New York, 1975.

- 29- Tonyalı, C. Lamperti Operatörü Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Gazi Üniversitesi, Mart 1986.
- 30- Marsden, J.E., Elementary Classical Analysis, W.H. Freeman and Co., San Fransisco, 1974.
- 31- Seneta, E., "Coefficients of ergodicity: Structure and applications", Adv. Appl. Prob., 11, 576 (1979).
- 32- Moran, P.A.P., An Introduction to Probability Theory, Clarendon Press, Oxford, 1984.
- 33- Lipschutz, S., Linear Algebra, McGraw-Hill, London, 1974.
- 34- Seneta, E., "On the historical development of the theory of finite inhomogeneous Markov chains", Proc. Camb. Phil. Soc., 74, 507 (1973).
- 35- Apostol, T.M., Mathematical Analysis, Ed.L.Loomis, 2nd ed., Addison-Wesley, California, 1974.
- 36- Cohen, E., "Ergodic theorems in Demography", Bull. Amer. Math. Soc., 1, 275 (1979).
- 37- Anthonisse, J.M. and Tijms, H., "Exponential convergence of products of stochastic matrices", J. Math. Anal. Appl., 59, 360 (1977).
- 38- Chatterjee, S. and Seneta, E., "Towards consensus: Some convergence theorems on repeated averaging", J. Appl. Prob., 14, 89 (1977).

- 39- Plane, D.A. and Rogerson, P.A., "Dynamic flow modeling with interregional dependency effects: an application to structural change in the U.S. migration system", Demography, 23,1,91(1986).
- 40- Harary, F., Lipstein, B. and Styan, G., "A matrix approach to non-stationary chains", Oper. Res., 18,1168(1970).
- 41- Pullman, N. and Styan, G., "The convergence of Markov chains with non-stationary transition probabilities and constant causative-matrix", Stochastic Process. Appl., 1,279(1973).
- 42- Johnson, J.T., "Continuous-time, constant causative Markov chains", Stochastic Process. Appl., 26,161(1987).
- 43- Anderson, T.W. and Goodman, L.A., "Statistical inference about Markov chains", Ann. Math. Stat., 28,89(1957).
- 44- Billingsley, P., "Statistical methods in Markov chains", Ann. Math. Stat., 32,12(1961).
- 45- Cramér, H., Mathematical Methods of Statistics, Princeton. University Press, Princeton, New Jersey, 1946.
- 46- Kingman, J.F.C., "Poisson counts for random sequences of events", Ann. Math. Stat., 34,1217(1963).
- 47- Girshick, M.A., Rubin, H. and Sitgreaves, R., "Estimation of bounded relative error in particle counting", Ann. Math. Stat., 26,189(1955).
- 48- Shryock, H.S., Siegel, J.S. and Associates, The Methods and Materials of Demography, Academic Press, New York, 1976.

- 49- Gürtan, K., Demografik Analiz Metodları, İstanbul Üni. İktisat Fak. Yayınları, İstanbul, 1969.
- 50- Öngör, S., "Türkiye'de dahili muhaceret hakkında", Türk Coğrafya Dergisi, Sayı 18 ve 19, 1958-1959.
- 51- Tümertekin, E., "The distribution of sex ratios with special reference to internal migration in Turkey", Review, Geograph Ins. Uni. Ist., No: 4, 1958.
- 52- Price, C.A., "Migration as a means of achieving population targets", Seminar on Demographic Research in Relation to population Growth Targets, 1974 World Population Year, Committee for International Coordination of National Research in Demography, Cicred, 1973.
- 53- Isserman, A.M., "Economic-demographic modelling with endogeneously determined birth and migration rates: theory and prospects", Environment and Planning A, 17, 25 (1985).
- 54- Yener, S., "Migration in Turkey", Third European Population Seminar, Belgrade, 1978.
- 55- Eraydın, A., Türkiye'de 1950-1980 döneminde iller arası göçlerin genel değerlendirilmesi, T.C. Başbakanlık DPT SPD Araştırma Şubesi Yayını, Şubat 1981.
- 56- Greenwood, W., "A simultaneous-equations model of urban growth and migration", JASA, 70, 797 (1975).
- 57- Tekeli, İ. ve Erder, L., İç Göçler, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, D-26, Ankara, 1978.

- 58- Karahasanoğlu, G., Some Aspects of Internal Migration Patterns in Turkey, 1950-1965, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üni. M.S.E. Fak., Ankara, 1971.
- 59- Tankut, G. ve Saatçioğlu, Ö., Markov İşlemi'nin Göç Tahminine Uygulanması, TÜBİTAK, a8,YAE Yayını, 1973.
- 60- Rogerson, P., "Prediction: a modified Markov chain approach", J.Regional Sci.,19,469 (1979) .
- 61- Tezmen, H., "Internal migration and population redistribution in Turkey", The Population of Turkey, HÜNEE, Ankara, 100,(1974).
- 62- Türkiye'de Nüfus, Derleyen: G.Kunt, HÜNEE Yayını, Ankara, 1975.
- 63- Yener, S., 1965-1970 Dönemlerinde İller arası Göçler ve Göçedenlerin Nitelikleri, T.C. Başbakanlık DPT SPD Yayını,1974.
- 64- Genel Nüfus Sayımı, Nüfusun Sosyal ve Ekonomik Nitelikleri, T.C. Başbakanlık D.i.E., 1940-1980 Sayımları.

Ö Z G E Ç M İ Ş

ÖZGEÇMİŞ

Salih Çelebioğlu, 1958 yılında Kırklareli ilinin Pınarhisar ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Pınarhisar'da Atatürk İlkokulu ve Pınarhisar Lisesi'nde tamamladı. Araştırmacı yüksek öğrenimine 1975 yılında Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladı. 1980 yılında yüksek öğrenimini tamamlayan araştırmacı, aynı yıl Ankara İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi'nin İstatistik ve Temel Bilimler Fakültesi'nde asistan olarak çalışmaya başladı. Araştırmacı halen Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

Hüseyin ÇOBANOĞLU

Gazi Büro Degol Caddesi 39/C

Beşevler / ANKARA

Tel: 223 77 73

12.11.2018