

MARKOV ZİNCİRLERİNDE İLK GEÇİŞ ZAMANLARI

Murat GÜL

**DOKTORA TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KASIM 2013
ANKARA**

Murat GÜL tarafından hazırlanan “MARKOV ZİNCİRLERİNDE İLK GEÇİŞ ZAMANLARI” adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

.....

Tez Danışmanı, İstatistik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İstatistik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hasan BAL

.....

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

.....

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Reşat KASAP

.....

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa Y. ATA

.....

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Halil AYDOĞDU

.....

İstatistik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 15/11/2013

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Murat GÜL

MARKOV ZİNCİRLERİNDE İLK GEÇİŞ ZAMANLARI**(Doktora Tezi)****Murat GÜL****GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Kasım 2013****ÖZET**

Markov zincirlerinde ilk geçiş zamanı, bir zincirin belli bir duruma veya durumlar kümesine geçtiği ilk zaman olarak tanımlanır. İlk geçiş zamanı zamana bağlı rastgele bir değişkendir. Bu durum veya durumlar şaşırtıcı, az rastlanan, ilgilenilen bir olayın ilk geçiş zamanını gösterebilir. Bu çalışmada durum uzayı sonlu elemanlı ve indirgenemez bir Markov zinciri için ilk geçiş zamanı dağılımının elde edilmesi üzerinde durulmuştur. Ayrıca durum uzayının azaltılmasını amaçlayan ve durumların bir araya getirilmesi ile yapılan öbekleme yöntemi ele alınmıştır. İlk geçiş zamanının dağılımı öbekleme yaparak da belirlenmeye çalışılmıştır. Ele alınan dört duruma sahip indirgenemez Markov zincirinin ilk geçiş zamanının dağılımını belirlemede Johnson SB dağılımı öne çıkmıştır. İlk geçiş zamanı dağılımının deneme sayısına bağlı olarak yakınsaması, Kullback uzaklık ölçüsü ve Wasserstein metriği ile gösterilmeye çalışılmıştır. Bunun yanı sıra ters öbekleme yöntemi kullanılarak istenilen limit dağılıma ve limit dağılımının entropisine yaklaşan geçiş matrisleri elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 205.1.066**Anahtar Kelimeler : Markov zinciri, ilk geçiş zamanı, öbekleme, kullback, wasserstein metriği, ters öbekleme****Sayfa Adedi : 136****Tez Yöneticisi : Prof.Dr. Salih Çelebioğlu**

FIRST PASSAGE TIMES IN MARKOV CHAINS**(Ph.D.Thesis)****Murat GÜL****GAZİ UNIVERSITY****GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES****November 2013****ABSTRACT**

First passage time in Markov chains is defined as the first time one chain's passes a specified state or set of states. First passage time is a random variable depending on time. This state or states may indicate first passage time of an interesting, rare and amazing event . In this study, the distribution of the first passage time has been tried to be obtained for an irreducible Markov chain whose state space is finite. Also, the lumping method which aims at the reduction of the state space and which is done by bringing the states together has been explained. The distribution of the first passage time has been tried to be determined with lumping as well. Johnson SB distribution has come to the forefront in determining the distribution of the first passage time of irreducible Markov chain with four states considered. Depending on the trial number of the first passage time distribution, convergences have been tried to be shown by using Kullback distance measure and Wasserstein metric. Furthermore, transition matrices approaching to the desired limit distribution and entropy of limit distribution have been obtained using the delumping method.

Science Code	: 205.1.066
Key Words	: Markov chain, first passage time, lumping, kullback, wasserstein metric, delumping
Page Number	: 136
Adviser	: Prof.Dr. Salih Çelebioğlu

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren danışmanım sayın Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesi toplantılarındaki değerli katkı ve değerlendirmelerinden dolayı tez izleme komitesi üyeleri sayın Doç.Dr. Mustafa Y. ATA ve sayın Doç.Dr. Halil AYDOĞDU'ya teşekkür ederim.

Tez hazırlama sürecinde; sevgi, metanet ve anlayışla beni sürekli destekleyen yanımdan bir an olsun ayrılmayan, sabır ile bekleyen, çok kıymetli hayat arkadaşım ve eşim Melike GÜL'e şükranlarımı sunarım.

Son olarak tezi hazırlama sürecinde; beni madden ve manen sürekli destekleyen çok kıymetli babam Mahmut GÜL, annem Miyese GÜL, ablam Ebru GÜL'e şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	x
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xiii
1. GİRİŞ	1
2. MARKOV ZİNCİRLERİ VE İLK GEÇİŞ ZAMANLARI	6
2.1. Markov Zinciri Üzerine Yapılan Çalışmalar.....	6
2.2. Temel Kavramlar ve Genel Bilgiler.....	10
2.3. Markov Zinciri Üzerine Bazı Örnekler	13
2.4. Durumların Sınıflandırılması	18
2.5. Limit Teoremleri	22
2.6. Durumların Sınıflandırılması ve İlk Geçiş Zamanına İlişkin Bazı Örnekler	25
2.7. Potansiyel ve Eninde-Sonunda Geçiş Olasılıkları Matrislerin Hesaplanması	28
2.8. Markov Zincirinin Simülasyonu	32
3. BİLGİ TEORİSİ.....	36
3.1. İstatistiksel Belirsizlik ve Entropi	36
3.2. Entropi Türleri.....	37

Sayfa

3.2.1. Shannon entropisi.....	37
3.2.2. Havrda-Charvat entropisi.....	39
3.2.3. Tsallis entropisi	39
3.2.4. Rényi entropisi	39
3.2.5. Mathai entropisi.....	39
3.3. Entropi ve İstatistiksel Bağımsızlık	40
3.4. Karşılıklı Bilgi Ölçüsü	41
3.5. Görelî Entropi ve Kullback-Leibler Bilgisi.....	42
3.6. Markov Zincirlerinde Entropi	43
3.7. Wasserstein metriği.....	44
4. ÖBEKLEME TEORİSİ.....	47
4.1. Tanımlar ve Amaç.....	47
4.2. Markov Zincirinin Öbekleme Özellikleri	49
4.3. Geçiş Olasılık Matrisinin Öz Sistemi.....	53
4.4. Öbekleme Yaklaşımı.....	54
5. İLK GEÇİŞ ZAMANLARINA SÜREKLİ DAĞILIM YAKLAŞIMI VE BİR UYGULAMASI	62
5.1. İlk Geçiş Zamanı Dağılımının Belirlenmesine İlişkin Simülasyon Çalışmalarının Sonuçları.....	63
5.2. Kullback Leibler ve Wasserstein Uzaklığı İle İlgili Simülasyon Çalışmalarının Sonuçları.....	79
5.3. Ters Öbekleme Yöntemi	80
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	87
KAYNAKLAR	90
EKLER.....	95
EK-1 İlk geçiş zamanı dağılımının tahmininde karşılaşılan dağılımların özellikleri.....	96

Sayfa

EK-2 İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri.....	101
EK-3 Değişik geçiş matrisleri ve BIST-100 uygulaması.....	133
ÖZGEÇMİŞ	136

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. r_{ij} 'nin durumlara göre değeri	29
Çizelge 2.2. f_{ij} 'nin durumlara göre değeri	29
Çizelge 4.1. $U = (V^T V)^{-1} V^T$ 'a göre farklı ölçülerin karşılaştırılması $m=2$ ve her öbekde 3 durum.....	58
Çizelge 4.2. $U = (V^T V)^{-1} V^T$ 'a göre farklı ölçülerin karşılaştırılması $m=2$ ve bir öbekde 2 durum diğer öbekte 4 durum	59
Çizelge 4.3. $U = (V^T V)^{-1} V^T$ 'a göre farklı ölçülerin karşılaştırılması $m=3$ ve her öbekde 2 durum.....	60
Çizelge 5.1. Öbekleme biçimlerine göre öbeklenmiş geçiş matrisleri.....	63
Çizelge 5.2. Durumlara göre ilk geçiş zamanı dağılımları.....	65
Çizelge 5.3. Johnson, Beta, Burr dağılımlarının olasılık değerlerinin karşılaştırılması	66
Çizelge 5.4. Öbekleme yapılarak elde edilen ilk geçiş zamanı dağılımları	67
Çizelge 5.5. Bir durumundan başlayan zincirin deneme sayılarına göre ilk geçiş zamanı dağılımları	68
Çizelge 5.6. İki durumundan başlayan zincirin deneme sayılarına göre ilk geçiş zamanı dağılımları	69
Çizelge 5.7. Üç durumundan başlayan zincirin deneme sayılarına göre ilk geçiş zamanı dağılımları	70
Çizelge 5.8. Dört durumundan başlayan zincirin deneme sayılarına göre ilk geçiş zamanı dağılımları	71
Çizelge 5.9. Bir öbekleme yapıldığında ilk geçiş zamanı dağılımları	72
Çizelge 5.10. İki öbekleme yapıldığında ilk geçiş zamanı dağılımları	74
Çizelge 5.11. Bir öbekte üç durumun olması halinde ilk geçiş zamanı dağılımları...	75

Çizelge	Sayfa
Çizelge 5.12. Bir öbekte iki durum olması halinde ilk geçiş olasılıkların karşılaştırılması	76
Çizelge 5.13. Her öbekte iki durum olması halinde ilk geçiş olasılıkların karşılaştırılması	77
Çizelge 5.14. Bir öbekte üç durum olması halinde ilk geçiş olasılıkların karşılaştırılması	78
Çizelge 5.15. İlk geçiş zamanı dağılımının Kullback Uzaklığı ve Wasserstein metriği	79
Çizelge 5.16. Ters öbekleme yöntemine göre elde edilen geçiş matrisleri	85

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Örnek 2.6.1 için durumlar arası geçiş diyagramı.....	25
Şekil 2.2. Örnek 2.6.2 için durumlar arası geçiş diyagramı.....	27
Şekil 2.3. Örnek 2.7.1 için durumlar arası geçiş diyagramı.....	30
Şekil 4.1. Markov zincirinin durum uzayı a) Orjinal durumlar b) Öbeklenmiş durumlar	48
Şekil 4.2. Markov zincirinin durum uzayı a) Orjinal durumlar b) Yanlış Öbeleme.....	49

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
d	Periyot
$D(p \parallel q)$	Görelî entropi(Kullback Leibler)
$T_1^2(\psi_A, \psi_B)$	Wasserstein metriği
$f_{ij}^{(n)}$	i 'den j 'ye n dönemde ilk geçiş olasılığı
f_{ij}	i 'den j 'ye eninde-sonunda geçiş olasılığı
F	i 'den j 'ye eninde-sonunda geçiş olasılıkları matrisi
$H_s(p)$	Shannon entropisi
$H_\alpha(p)$	Havrda-Charvat entropisi
$H_T(p)$	Tsallis entropisi
$H_R(p)$	Renyi entropisi
$H_M(p)$	Mathai entropisi
$H(X,Y)$	Bileşik entropi
$H(X/Y)$	Koşullu entropi
$H(X)$	X rastgele değişkeninin entropisi
$I(X,Y)$	Karşılıklı bilgi ölçüsü
$i \rightarrow j$	i 'den j 'ye ulaşılabilir
$i \leftrightarrow j$	i 'den j 'ye karşılıklı ulaşılabilir (i ve j iletişimli)
P_{ij}	i durumundan j durumuna 1 dönemde geçiş olasılığı
P	Markov matrisi (Geçiş matrisi)
$\tilde{P}$	Öbeklenmiş geçiş matrisi
$P_{ij}^{(m)}$	i 'den j 'ye m dönemde geçiş olasılığı
P_{Kolm}	Kolmogorov-Smirnov p değeri

Simgeler**Açıklama**

R	Potansiyel matris
S	Durum uzayı
T	Parametre uzayı
T_{Kolm}	Kolmogorov-Smirnov test değeri
U	Dağıtıcı matris
V	Toplayıcı matris
X_t	Sürecin t zamanındaki durumu
π'	Markov Zinciri'nin limit dağılımı
π_0	Markov Zinciri'nin başlangıç olasılık dağılımı
μ_{ij}	i 'den j 'ye ortalama ilk geçiş zamanı

Kısaltma**Açıklama**

LST	Laplace Stieltjes Dönüşümü (Laplace Stieltjes Transform)
MZ	Markov Zincirleri
BIST	Borsa İstanbul

1. GİRİŞ

Markov zincirleri, dinamik ve stokastik sistemlerin analizinde ve özellikle bir sistemin zaman boyunca içinde bulunabileceği farklı durumlar arasında yaptığı hareketlerin incelenmesinde yaygın olarak kullanılan modellerdir [Alfa ve Shi, 2000; Schnatter, 2001; Wang ve Puterman, 1999].

Uygulamada birçok süreç, bu modele uymakta ve dolayısıyla da Markov analizi, değişik disiplinlere uygulamaları olduğu için literatürde geniş bir alana sahiptir.

Genelde bağımsız artırlılık özelliğine sahip bir stokastik süreçle ilgili ilk geçiş zamanı bilgisi Markov bağımlılık yapısının kullanılmasıyla elde edilebilir.

İlk geçiş zamanları ise Markov analizinin önemli bir parçasını oluşturmaktadır. İlk geçiş zamanı, stokastik bir sürecin belli bir eşik değerini (önceden varsayılan bir sınırı, kritik bir değeri) geçtiği ilk zaman noktası olarak tanımlanır. Bu eşik değeri genellikle bir sabit olabileceği gibi rastgele bir değişken veya stokastik sürecin kendisi olabilir. [Kammer, 2007]. İlk geçiş zamanı zamana bağlı rastgele bir değişkendir. Eşik değer şaşırtıcı, az rastlanan, ilgilenilen bir olayın ilk geçiş zamanını gösterebilir.

İlk geçiş zamanı uygulamalarına bilim ve mühendisliğin pek çok alanlarında karşılaşmak mümkündür.

Kammer (2007), İlk geçiş zaman sürecini firmaların kredi riski için kullanmış olup, Kammer çalışmasında eşik değerini firmanın borçlarının(pasif) bir fonksiyonu olarak tanımlamayı önermiştir.

Shinozuka ve Wu (1988), ilk geçiş problemi için deprem uyarımını rastgele bir süreç olarak modellediler. İlk geçiş olasılıklarını hesaplamak için Poisson yaklaşımını kullandılar.

Li ve Shaked (1995), stokastik bir süreci t zamanında belli bir aygıtın zarar görme seviyesi olarak gösterdiler ve ilk geçiş zamanını, şoklara ve yıpranmaya maruz kalan aygıtın çalışması sırasında bozulma oranını aşma zamanı olarak tanımladılar. Artan Bozulma oranı(IFR) ve Artan Ortalama Bozulma oranı(IFRA) na sahip ilk geçiş zamanlarının özelliklerini incelediler.

Mandel (2010), doku sertleşmesi hastalığının evrelerini Markov zincirinin özelliklerini kullanarak durumlara ayırmış ve geçiş matrisini elde ederek hastalığın çeşitli evrelerine geçişi için ortalama ilk geçiş zamanını tedavi görenler ve tedavi görmeyenler için tahmin etmiştir. Bu suretle doku sertleşmesi hastalığının seyrini tanımlama ve tahmin yapma imkanı doğmuştur.

İlk geçiş zamanının borsada uygulaması ise yatırımcının borsayı izlemesini kolaylaştırması için borsa izleme programlarında yatırımcıyı uyaran alarm sistemleri mevcuttur. Bu alarm sistemine göre al-sat emirleri ilk geçiş zamanları olup uyarı sinyalleri yatırımcının izlediği hisse senedi belli bir fiyata veya fiyat aralığına geldiğinde yapılır.

İlk geçiş zamanı değişkeni değişik alanlarda farklı anlamlara gelebilir. Örneğin, kumarbazın iflası probleminde oyunun süresini gösterir. Fizikte bir parçacığın bir duruma ulaşması için gereken zaman, güvenilirlik analizi çalışmalarında ilk geçiş zamanının beklenen değeri, ilk bozulma için ortalama süreye karşılık gelir. İlk geçiş zamanının sağ kalım fonksiyonu bir sistemin güvenilirliği olarak görülür.

Fiziksel ve kimyasal süreçlerde yer alan kontrollü reaksiyonlardan kromatografiye (renk çözümü) kadar pek çok alanda kullanılan ilk geçiş zamanı kavramı stokastik süreçlerde önemli rol oynar. Bu yüzden gerçek sistemlerin hareketlerini anlamak için ilk geçiş özelliklerini bilmek gerekir. Bu ilişki birkez kurulduğunda ilk geçiş özelliği cinsinden sistemin dinamiklerini elde etmek oldukça basitleşir. Bu sistemlerle ilgili problemler [Gerstein ve Mandelbrot, 1964; Fienberg, 1974; Tuckwell, 1989; Bulsara, Lowen ve Ress, 1994; Bulsara ve ark., 1996] gibi kaynaklarda bulunabilir.

Süreçlerin ortalama ilk geçiş zamanlarına bakılarak normal veya anormal davranışları ortaya konulabilir. İki süreç çok farklı olmasına rağmen ilk geçiş karakteristiklerini içeren uzun dönem özellikleri aynı olabilir. Sadece ilk geçiş sürecini inceleyen kitaplar [Kemperman,1961; Dynkin ve Yushkovich, 1969; Spitzer, 1976; Syski, 1992] veya stokastik süreçlerde ilk geçiş sürecini alt bir konu olarak inceleyen kitaplar ise [Cox ve Miller, 1965; Feller, 1968; Gardiner, 1985; Risken, 1988; Van Kampen, 1997] verilebilir.

Geçiş zamanları olasılık teorisinde ve uygulamalarında eskiden beri araştırılmıştır. En çok bilinenler ise bekleme zamanları, yutulma problemleri, sönme kavramı, meşgul durumlar ve diğer uygulamaları da içine alacak şekilde bir kümeye ilk geçiş/giriş zamanıdır.

Difüzyon, rastgele yürüyüş gibi stokastik modellerde ilk geçiş olasılıklarını elde etmek için Green fonksiyonu, Fourier ve Laplace dönüşümü gibi matematiksel araçlar kullanılır. Böylece ilk geçiş karakteristikleri ilk geçiş olasılıkları cinsinden ifade edilebilir. Bu anlamda R.Syski(1992) Markov zincirlerinde bir kümeden son çıkış zamanı ve ilk giriş zamanı olarak geçiş zamanlarını ele almış ve geçiş olasılıklarının belirlenmesinde örnek fonksiyonunun rolü üzerinde durmuştur. Ross ve Schechner (1985) kesikli Markov zincirinin ilk geçiş zamanının tahmini için gözlenen riske dayalı tahmin edicileri kullandılar ve daha sonra düzgünleştirme ile sonuçları sürekli zamana genişlettiler. Böylece ilk geçiş zamanının dağılımını tahmin etmek için gama fonksiyonunu kullandılar.

Geçiş zamanları aslında duraklama zamanları olmasına rağmen uygulamada ve teorik açıdan önemli bir yere sahiptir. Markov zincirinin analizinde ve kullanımında ilk geçiş zamanları zincirin uzun dönemli davranışını anlayabilmek için temel kavramlardan biridir [Das Gupta, 2010].

Bu tezin amacı, durum uzayı sonlu elemanlı, indirgenemez bir Markov zinciri için kesikli olan ilk geçiş zamanlarının dağılımlarına sürekli dağılım yaklaşımında bulunmaktır. Buna ilişkin olarak bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Durum uzayı sonlu elemanlı olan Markov zincirinde eğer eleman sayısı çoksa işlem yapmak zorlaştığı için durum uzayının eleman sayısını azaltan, modellemede kolay hesaplama yapmaya yarayan öbekleme yöntemi uygulanarak ilk geçiş zamanı dağılımlarına sürekli bir dağılım ile nasıl yaklaşımda bulunulabileceği üzerinde çalışılması gereken önemli bir problemdir. Bu çalışmada bu problemin çözümü üzerinde durulmuştur.

Ayrıca durum uzayı sonlu elemanlı, indirgenemez bir Markov zincirinin durum uzayının genişlemesi çerçevesinde öbeklemenin ters durumu olan ters öbekleme yöntemi geliştirilmeye çalışılmıştır.

Giriş bölümünde konunun ele alınma nedeni ve çalışmanın amacı tartışıldı.

İkinci bölümde Markov zincirleri ve Markov zincirlerinin ilk geçiş zamanları ile ilgili genel bilgiler verildi.

Üçüncü bölümde uygulamada kullanmak için Entropi, Kullback uzaklık ölçüsü ve Wasserstein metriği gibi kavramlar Bilgi Teorisi içerisinde incelendi.

Dördüncü bölümde durum uzayının azaltılmasını amaçlayan ve durumların bir araya getirilmesi ile yapılan öbekleme yöntemi anlatılmıştır.

Beşinci bölümde Markov zincirinin simülasyonu yapılarak ilk geçiş zamanı dağılımı deneme sayılarına bağlı olarak ortaya konmuş ve bununla beraber öbekleme yöntemi kullanılarak da ilk geçiş zamanlarının dağılımı belirlenmiştir. Öbekleme yöntemi uygulanmadan önce yapılan çalışmada dağılımlar arasından Johnson SB dağılımı kendini ön plana çıkarırken, öbekleme yöntemi uygulandıktan sonra yapılan çalışmada ilk geçiş zamanı dağılımlarının öbekleme biçimine göre değişiklik

gösterdiği görülmüştür. İlk geçiş zamanının dağılımının deneme sayılarına bağlı olarak yakınsamaları, Kullback-Leibler uzaklık ölçüsü ve Wasserstein metriği kullanılarak gösterilmiştir. Bunun yanısıra öbeklemenin ters durumu olan Ters öbekleme yöntemi geliştirilip istenilen limit dağılıma ve limit dağılımın entropisine yaklaşan geçiş matrisleri uygulama bölümünde verilmiştir.

Son bölümde sonuç ve öneriler değerlendirilmiştir.

2. MARKOV ZİNCİRLERİ

Bir Markov zinciri, belirli stokastik sistemlerin uzun ve kısa dönemdeki davranışlarını modellemek için kullanılır [Wu ve Shieh, 2007].

Uygulamada birçok süreç, bu modele uymakta ve dolayısıyla da Markov analizi, olasılık modellerin önemli bir türünü oluşturmaktadır.

Markov süreçleri, halihazırda sürece ilişkin değerler bilindiğinde, sürecin gelecekteki değerlerinin geçmişten koşullu olarak bağımsız olduğu süreçlerdir [Çınlar, 1997].

Yapılan uygulamalardan görüleceği gibi Markov süreçlerinin özel bir hali olan Markov zincirleri ; finans, pazar araştırmaları, genetik, ilaç sektörü, demografi, psikoloji, kuyruk kuramı uygulamaları, güvenilirlik çalışmaları, planlama, işgücü tahminlemesi, performans analizleri, alacak yönetimi, hisse senedi fiyat değişimleri gibi konularda kullanılmaktadır.

2.1. Markov Zincirleri Üzerine Yapılan Çalışmalar

Bu bölümde, MZ üzerine yapılan bazı çalışmalar incelenmiş, MZ'nin hangi bilim dallarında kullanıldığı, yapılan çalışmalarda nasıl bir yol izlendiği ve bu çalışmalarda elde edilen sonuçlar üzerinde durulmuştur.

Kuyruk Teorisine Uygulamaları

Adan ve Kulkarni (2003), Markov zinciri gösterimine sahip tek sunuculu kuyruk üzerinde çalıştılar. Bir müşterinin bekleme zamanı ile kalan müşterilerin sayısı arasındaki ilişkiyi kullanarak ayrış dönemleri ve rastgele zaman noktaları arasındaki kuyruk uzunluğu dağılımının Laplace – Stieltjes (LS) dönüşümünü elde ettiler. LS dönüşümü verildiğinde bekleme zamanları ve kuyruk uzunluğuna ait momentleri buldular. A_n , $n \geq 0$; $(n-1)$. ve n . varışlar arasındaki zaman ve S_n , $n \geq 0$; n .

varışa ilişkin hizmet süresi olsun. Bu değişkenlerin $\{Z_n, n \geq 0\}$ olan bir Markov zinciri oluşturduğunu varsaydılar.

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} \leq x, S_n \leq y, Z_{n+1} = j / Z_n = i) &= P(A_1 \leq x, S_0 \leq y, Z_1 = j / Z_0 = i) \\ &= G_i(y)P_{i,j}(1 - e^{-\lambda_j x}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Burada $x, y \geq 0$; $i, j = 1, \dots, N$. Z_n verildiğinde A_{n+1}, S_n, Z_{n+1} geçmişten bağımsızdır.

Chaudry ve Gupta (2003) korelasyonlu varışların yanı sıra varışların yoğunluğunu da dikkate aldılar. Hizmet sürelerinin rastgele olduğu Markoviyen varış süreçleri üzerinde yoğunlaştılar. Bir ayrılıştan sonra kuyruktaki müşteri sayısının dağılımını hemen elde etmek için gömülü (imbedded) Markov zinciri yöntemini kullandılar.

Stok Yönetimine Uygulamaları

Yin ve ark. (2004), kâğıt endüstrisinde üretim planlaması ve stok uygulamasını ele aldılar. Stokların birkaç haftada bir yenilendiği stok yönetimini düşündüler. Bu literatürde (s, S) politikası olarak bilinir.

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - d_{n+1}, & s < X_n \leq S \\ S - d_{n+1}, & X_n \leq s, \end{cases}$$

burada d_n ; ardarda gelen talepler ve X_n ; stok seviyesi, d_n 'ler bağımsız rastgele değişkenler olarak alındığından X_n bir Markov zinciridir. Bu sayede stok sistemi sonlu sayıda duruma sahip bir Markov zinciri olarak modellenebilir.

Abboud (2001), makine bozulmalarını ve stok durumunu birlikte ele aldı. Sistemi bir Markov zinciri olarak modellemek için bozulma ve onarılma zamanlarının geometrik

dağılıma uyduğunu varsaydı. Sistemin durumunu (i, j) biçiminde gösterdi. Burada i stok durumunu, j ise makine durumunu göstermektedir.

Proje Yönetimine Uygulaması

Choi ve ark. (2004), kısıtlı bir proje planlaması düşündüler. Görev süreleri, maliyetleri ve görev başarıları, başarısızlıkları Markov zinciri ile modellendi. Bu sayede çok karmaşık bir problem çözülebilir bir stokastik optimizasyon problemine dönüşmüştür.

Zaman Serilerine Uygulaması

Gonzales ve ark. (2005), rekabetçi bir enerji piyasasında elektrik fiyatlarını tahmin etmek için Markov zincirlerini kullandılar. Çalışmalarında elektrik fiyatlarının rakiplerin stratejilerine bağlı olarak bir değişimi yansıttığını gösterdiler.

Kalite Kontrol Yöntemlerine Uygulamaları

Saccucci ve Lucas (1990), oluşturulan kontrol şemalarının ARL'lerini (ortalama devre uzunluğu), Markov zincirleri ile hesaplamıştır. Ayrıca Fua, Spiringa ve Xieb (2002), Aparisi ve Diaz (2007), Serel ve Moskowitz (2008), sürecin varyansını ve ortalamasını gözlemlemek için kullanılan üstel hareketli ağırlıklı ortalama istatistiği (EWMA) ile oluşturulan kontrol şemalarının ARL'lerini Markov zincirlerini kullanarak hesaplamıştır. Aparisi ve Diaz (2007), asimetrik kontrol limitleri ile EWMA kontrol şemalarının ARL'sini hesaplamak için Markov zincirlerine dayanan bir prosedür önermiştir.

Magalhaes, Costa ve Neto (2006), uyarlamalı $\bar{X}$ ve R şemaları geliştirmişler ve bu şemaların özelliklerini, Markov zinciri yaklaşımını kullanarak oluşturmuşlardır. Yapılan uygulama örneği, değişken parametrelili kontrol şemalarının, sabit

parametrelî kontrol şemalarından daha gelişmiş istatistiksel performansla sonuçlandığını göstermiştir.

2.2. Temel Kavramlar ve Genel Bilgiler

X_n rastgele değişkeninin değer kümesi S durum uzayı olsun. Aynı olasılık uzayı $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ üzerinde tanımlanmış ve S 'de değerler alan bir $\{X_n \mid n \in N\}$ rastgele değişkenler topluluğuna durum uzayı S olan bir stokastik süreç denilir. N kümesine sürecin parametre uzayı denilir. N sayılabilirse, özellikle $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ ise sürece kesikli parametrelili stokastik süreç, aksi halde N sayılamazsa sürece sürekli parametrelili stokastik süreç denilir.

$\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ sonlu ya da sayılabilir sonsuz durum uzayına sahip bir stokastik süreç olsun. Aksi belirtilmedikçe, sürecin durum uzayını negatif olmayan tamsayılar kümesi olan $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ ile gösterilir. $X_n = i$ ise, sürecin n anında i durumunda olduğu söylenir. Süreç i durumundayken bir sonraki dönemde j durumunda olma olasılığı P_{ij} ile gösterilir.

$i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j$ sürecin durumları ve $n \geq 0$ olmak üzere

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = P_{ij}$$

özelliğini sağlayan $X = \{X_n : n \in N\}$ stokastik sürecine *Markov Zinciri* (MZ) adı verilmektedir. Bu tanıma göre, bir MZ, herhangi bir n için, “şimdiki” durum X_n verildiğinde, “sonraki” durum X_{n+1} 'in $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ “geçmiş” durumlarından koşullu olarak bağımsız olduğu, bir başka deyişle Markov özelliğinin sağlandığı rastgele değişkenler dizisidir.

P_{ij} , i durumundan j durumuna bir dönemde (bir-adımda) geçiş olasılığı olarak anılır. Dolayısıyla, bir-adımda geçiş olasılığı zaman parametresinden bağımsız olduğunda, yani MZ homojen olduğunda, MZ'nin durağan geçiş olasılığına sahip olduğu söylenir ve şu şekilde de yazılabilir.

$$P\{X_{n+1} | X_n = i\} = P(i, j) = P_{ij} ; i, j \in S$$

Tanım 2.2.1. $\forall i, j \in S$ için elemanları P_{ij} 'ler olan bir $P =$

$$\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix}$$

matrisini ele alalım.

a) Herhangi iki $i, j \in S$ için $P_{ij} \geq 0$

b) Her $i \in S$ için $\sum_j P_{ij} = 1$

özelliklerini sağlayan P matrisine S durum uzayı üzerinde bir *Markov matrisi* (*geçiş matrisi*) denir [Çınlar, 1997].

Teorem 2.2.1. $X = \{X_n : n \in N\}$ bir MZ olsun. Herhangi $m, n \in N; m \geq 1$ ve $i_1, i_2, \dots, i_m \in S$ için

$$P\{X_{n+1} = i_1, X_{n+2} = i_2, \dots, X_{n+m} = i_m | X_n = i_0\} = P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \dots P_{i_{m-1} i_m}$$

dir.

Sonuç 2.2.1. S durum uzayı üzerinde MZ'nin π_0 başlangıç olasılık dağılımı verilsin.

Yani, $P\{X_0 = i\} = \pi_0(i)$, ($\forall i \in S$ için) olsun. O zaman $m \in N$ ve $i_0, i_1, i_2, \dots, i_m \in S$ için

$$P\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_m = i_m\} = \pi_0(i_0) P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \dots P_{i_{m-1} i_m} \quad (2.2)$$

olur. Bu sonucu sözle ifade edecek olursak; her m için $X_0, X_1, \dots, X_m$ 'nin ortak dağılımı, π_0 başlangıç dağılımı ve P geçiş matrisi bilindiğinde hesaplanabilir.

Tanım 2.2.2. Herhangi bir $m \in N$ olmak üzere, MZ'nin i durumundan j durumuna n -adımında geçiş olasılığı,

$$P\{X_{m+n}=j \mid X_m=i\} = P_{ij}^{(n)}; i, j \in S \text{ ve } n \in N$$

olarak tanımlanır. Burada, $P^{(n)} = [P_{ij}^{(n)}]$ olup, özel olarak $n = 0$ için $P^0 = I$ dır [Çınlar, 1997].

Aşağıdaki teoremdе verilen Chapman-Kolmogorov denklemleri n -adımında geçiş olasılıklarını hesaplayabilmek için bir metot verir:

Teorem 2.2.2.

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)} ; \quad \forall m, n \in N \text{ ve } \forall i, j \in S$$

dir.

$$\text{İspat : } P_{ij}^{(m+n)} = P\{X_{m+n}=j \mid X_0=i\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{m+n}=j, X_n=k \mid X_0=i\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{m+n}=j \mid X_n=k, X_0=i\} P\{X_n=k \mid X_0=i\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}^{(m)} P_{ik}^{(n)}$$

n -adımında geçiş olasılıkları $P_{ij}^{(n)}$ 'leri matrisyel olarak yukarıdaki eşitlikten $P^{(n)}$ ile gösterirsek,

$$P^{(m+n)} = P^{(m)}P^{(n)}$$

olur. Böylece

$$P^{(n)} = P.P^{(n-1)} = P.P.P^{(n-2)} = \dots = P^n$$

dir [Ross, 1996].

Markov zincirlerinin anlaşılması için izleyen Örnek 2.3.1-Örnek 2.3.2 [Çınlar, 1997], Örnek 2.3.3 [Akyurt, 2005; Hoel ve ark., 2005], Örnek 2.3.4 [Akyurt, 2005] den alınmıştır.

2.3. Markov Zincirleri Üzerine Bazı Örnekler

Örnek 2.3.1. Bernoulli sürecinde başarıların sayısı

N_n , herhangi bir denemede başarı olasılığı p olan n tane bağımsız Bernoulli denemesindeki başarıların sayısını gösterebilir.

$$P\{N_{n+1} = j \mid N_0, N_1, \dots, N_n\} = P\{N_{n+1} = j \mid N_n\}$$

olduğundan $\{N_n : n \in N\}$ bir MZ'dir.

Gerçekten

$$P_{ij} = P\{N_{n+1} = j \mid N_n = i\} = \frac{P\{N_{n+1} = j, N_n = i\}}{P\{N_n = i\}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P\{N_{n+1} - N_n = j - i, N_n = i\}}{P\{N_n = i\}} \\
&= \frac{P\{N_{n+1} - N_n = j - i\}P\{N_n = i\}}{P\{N_n = i\}} \\
&= P\{N_{n+1} - N_n = j - i\} \\
&= P\{X_{n+1} = j - i\} \\
&= \begin{cases} p; j - i = 1 \\ q; j - i = 0 \\ 0; j - i \neq 0, 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla, $\{N_n : n \in N\}$ durum uzayı $S = \mathbb{Z}$ olan bir MZ'dir. Bu MZ'nin geçiş matrisini aşağıdaki gibidir.

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 & \dots \\ 0 & q & p & \dots \\ 0 & 0 & q & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Bu MZ'nde n -adımında geçiş olasılıkları

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(n)} &= P\{N_{m+n} = j \mid N_m = i\} = P\{N_{m+n} - N_m = j - i\} \\
&= P\{N_n = j - i\} \\
&= \frac{n!}{(n - j + i)!(j - i)!} p^{j-i} q^{n-j+i}; j = i, \dots, i + n
\end{aligned}$$

ile hesaplanır.

Örnek 2.3.2. Bağımsız Denemeler Süreci

$X_0, X_1, \dots, X_n$ 'ler ortak dağılımı,

$$P\{X_n = k\} = \begin{cases} \pi(k); k = 0, 1, 2, \dots \\ 0; k < 0 \end{cases}$$

olan bağımsız kesikli rastgele değişkenler olsun. $X_{n+1}, X_0, X_1, \dots, X_n$ 'den bağımsız olduğundan

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_0, X_1, \dots, X_n\} = P\{X_{n+1} = j\}$$

ve X_{n+1}, X_n 'den bağımsız olduğundan

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n\} = P\{X_{n+1} = j\}$$

dır. Dolayısıyla,

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_0, X_1, \dots, X_n\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n\}$$

oldüğundan $\{X_n : n \in N\}$ bir MZ'dir.

Bu MZ'nin durum uzayı, $S = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$ 'dir ve

$$P_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j\} = \pi(j)$$

oldüğundan geçiş matrisi,

$$P = \begin{bmatrix} \pi(0) & \pi(1) & \pi(2) & . & . & . \\ \pi(0) & \pi(1) & \pi(2) & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Bu MZ'nde $\forall m \geq 1$ için $P^m = P$ 'dir.

Örnek 2.3.3. Rastgele Yürüyüş Modeli

Bir MZ'nin durum uzayı $0,1,2,3,\dots$ tamsayıları ile, olasılıkları da, $P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}$; $0 < p < 1$ ile ifade edilirse, bu MZ'ne bir *rastgele yürüyüş modeli* denir. Bu modelin biraz daha genel bir biçimi aşağıda verilmiştir.

$A_1, A_2, \dots$ 'ler ortak olasılık fonksiyonu f olan tamsayı değerli bağımsız rastgele değişkenler ve X_0, A_i 'lerden bağımsız, tamsayı değerli bir rastgele değişken olsun. $X_n = X_0 + A_1 + \dots + A_n$ olarak tanımlanırsa, $\{X_n; n \geq 0\}$ dizisine bir *rastgele yürüyüş* denir. Bu durumda X_n 'ler, durum uzayı tamsayılar ve geçiş fonksiyonu $P_{ij} = P(i,j) = f(j-i)$ olan bir MZ oluşturur.

Bu MZ'ne göre, tamsayılar üzerinde bir parçacığın hareket ettiği düşünülmüştür. Bu parçacık, i durumunda iken bir adım sonra j durumuna $f(j-i)$ olasılığı ile geçer.

Özel bir durum olarak, $f(1) = p$, $f(-1) = q$ ve $f(0) = r$ olan bir basit rastgele yürüyüş modeli düşünölsün. Burada, p, q ve r negatif olmayan ve toplamaları 1'e eşit olan değerlerdir.

Buna göre, geçiş fonksiyonu,

$$P(i,j)=P_{ij}=\begin{cases} p, j=i+1 \\ q, j=i-1 \\ r, j=i \\ 0, d.h. \end{cases}$$

şeklindedir.

Bir parçacığın böyle bir rastgele yürüyüş modeline sahip olduğu göz önüne alınırsa bu parçacık verilen bir gözlemde i durumunda ise, o zaman bir sonraki gözlemde p olasılığı ile $i+1$ durumuna, q olasılığı ile $i-1$ durumuna sıçrar ve r olasılığı ile aynı i durumunda kalır.

Örnek 2.3.4. Kumarbazın İflası Problemi

Bir kumarbazın her oyunda bir para birimi kazanma olasılığı p , bir para birimi kaybetme olasılığı $1-p$ olsun. Kumarbaz oyunu ancak iki şartla bırakır; ya elindeki para sıfıra düşer (iflas) ya da N para birimine ulaşır. Bu durumda MZ'nin geçiş olasılıkları şu şekilde oluşur:

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}; i = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

$$P_{00} = P_{NN} = 1$$

Yukarıdaki denklem rastgele yürüyüş modeliyle 0 ve N durumları haricinde uyuşmakta, fakat oyun 0 ya da N durumuna girdiğinde bir daha buradan çıkamamaktadır, bu iki duruma *yutan durum* denir.

Örneğin, bir kumarbazın elinde 0 zamanında (başlangıçta) 2 Türk Lirası (TL) olsun. Bu kumarbaz her seferinde 1 TL yatırdığı bir oyun oynadığında, kazanırsa yatırdığı 1 TL'yi ve bir o kadar parayı daha alır, kaybetme durumunda ise yatırdığı para geri verilmez. Para 4 TL'ye ulaştığında ya da bittiğinde ise oyun sona erer.

Dikkat edilirse $t + 1$ oyun sonra elde olan para miktarı, t . oyundan sonra eldeki kalan para miktarına bağlıdır. Bu da bu durumun bir MZ olduğunu göstermektedir. Oyunun kuralları da zaman içinde değişmediğinden MZ durağandır. Aşağıda gösterilen geçiş matrisinde, durum elde bulunan paradır:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Geçiş matrisinde, $p_{00} = p_{44} = 1$ olduğu görülmektedir, yani 0 ya da 4 TL para birimine ulaşıldığında oyun bitmektedir, durum değişmemektedir. Diğer durumlarda ise kaybetmenin olasılığı $1-p$, kazanmanın olasılığı ise p olduğu görülmektedir.

2.4. Durumların Sınıflandırılması

Tanım 2.4.1. Eğer i 'den j 'ye sonlu adım sonunda ulaşılabiliriyorsa, j durumu *ulaşılabilir*dir. Yani, $i, j \in S$ olmak üzere

$P_{ij}^{(n)} > 0$ olacak şekilde $\exists n \geq 0$ varsa $i \rightarrow j$ (i den j ye ulaşılabilir);

$P_{ji}^{(n)} > 0$ olacak şekilde $\exists n \geq 0$ varsa $j \rightarrow i$ (j den i ye ulaşılabilir);

$P_{ij}^{(n)} > 0$ olacak şekilde $\exists n \geq 0$ ve $P_{ji}^{(m)} > 0$ olacak şekilde $\exists m \geq 0$ varsa $i \leftrightarrow j$ (i ve j iletişimli) dir; bir başka deyişle karşılıklı olarak ulaşılabilirdir.

Karşıt olarak,

$\forall n \geq 0$ için $P_{ij}^{(n)} = 0$ ise i den j ye ulaşamaz

$\forall n \geq 0$ için $P_{ji}^{(n)} = 0$ ise j den i ye ulaşamaz

$\forall n \geq 0$ için $P_{ij}^{(n)} = 0$ ya da $P_{ji}^{(n)} = 0$ ise, i ve j *iletişimli değildir*.

İletişimli durumların bazı özellikleri aşağıda verilmektedir:

1) *Yansıma özelliği*: $P_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1; i = j \\ 0; i \neq j \end{cases}$ için $i \leftrightarrow i$

2) *Simetri özelliği*: Eğer $i \leftrightarrow j$ ise, o zaman $j \leftrightarrow i$

3) *Geçişlilik özelliği*: Eğer $i \leftrightarrow j$ ve $j \leftrightarrow k$ ise, o zaman $i \leftrightarrow k$ dir. [Bhat, 1984].

Tanım 2.4.2. Bir i durumunun periyodu d , $\{n \geq 1 : P_{ii}^{(n)} > 0\}$ kümesindeki tamsayılarının en büyük ortak böleni olarak tanımlanmaktadır. $d = 1$ ise, duruma *aperiyodik durum* denir [Bhat, 1984].

Teorem 2.4.1. Eğer $i \leftrightarrow j$ ise, o zaman $d(i) = d(j)$ dir.

Bu teoreme göre, iletişimli durumlar aynı periyot değerine sahiptir [Ross, 1996].

Tanım 2.4.3. MZ'nin i 'den j 'ye n dönemde ilk geçiş olasılığı $f_{ij}^{(n)}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f_{ij}^{(n)} = \begin{cases} p_{ij} & ; n = 1 \\ \sum_{b \in E - \{j\}} p_{ib} f_{bj}^{(n-1)} & ; n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Tanım 2.4.4. $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ değerine MZ'nin i 'den j 'ye *eninde-sonunda geçiş olasılığı* veya i 'den j 'ye *her adımda geçiş olasılığı* denir.

Tanım 2.4.5. j 'de başlayan sürecin j 'ye eninde-sonunda geri dönme olasılığı olan $f_{jj} = 1$ ise, j 'ye geri dönüşlüdür denir [Çınlar, 1997].

Tanım 2.4.6. i geri dönüşlü olmak üzere,

$$\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

ile tanımlanan μ_{ii} 'ye i durumuna ilk geri dönüş için gereken ortalama geçiş sayısı denir. Aynı durumlara ilk geri dönüş için gereken geçişlerin sayısı *tekrarlanma zamanı* ve μ_{ii} 'de, i durumunun *ortalama tekrarlanma zamanı* olarak adlandırılır.

μ_{ii} 'den yararlanarak, geri dönüşlü bir durumun etkisiz ya da etkili geri dönüşlü olarak nasıl sınıflandırıldığı aşağıda verilir.

- a) i geri dönüşlü bir durum olmak üzere, i durumunun etkisiz geri dönüşlü olması için gerek ve yeter şart $\mu_{ii} = \infty$ olmasıdır.
- b) i geri dönüşlü bir durum olmak üzere, i durumunun etkili geri dönüşlü olması için gerek ve yeter şart $\mu_{ii} < \infty$ olmasıdır.

Tanım 2.4.7. Eğer $f_{ii} < 1$, yani süreç i durumunda pozitif bir olasılıkla bu duruma eninde sonunda geri dönüş yapamıyorsa i durumuna geçişlidir denir [Çınlar, 1997].

Geri dönüşlü ya da geçişli gibi durumların sınıflandırılmasına başka bir kriter $P_{ii}^{(n)}$ olasılıkları kullanılarak verilebilir:

Teorem 2.4.2.

$$i \text{ durumu geri dönüşlü} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$$

i durumu geçişli $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$ dır.

Teorem 2.4.3. Eğer $i \leftrightarrow j$ (i ve j iletişimli) ve i geri dönüşlü ise, o zaman j de geri dönüşlüdür [Bhat, 1984].

Teorem 2.4.4. Eğer $i \leftrightarrow j$ ve j geri dönüşlü ise $f_{ij} = 1$ dir [Ross, 1996].

Tanım 2.4.8. $P_{ii} = 1$ şartını sağlayan i durumuna yutan bir durum denir.

Tanım 2.4.9. $A \subseteq N$ bir küme olsun. Eğer A kümesi dışındaki durumlara A 'nın içindeki durumlardan ulaşamıyorsa, A kümesine *kapalı küme* denir.

Tanım 2.4.10. Eğer bir kapalı kümenin kendisinden başka hiçbir kapalı öz altkümeye yoksa, bu kümeye *indirgenemez küme* denir.

Tanım 2.4.11. Eğer bir MZ'nde bütün durumların oluşturduğu kümenin kendisi, yani S , indirgenemezse, bu zincire *indirgenemez zincir* denir.

Bir MZ indirgenemez $\Leftrightarrow$ bütün durumlardan birbirine ulaşılabilir [Çınlar, 1997].

S sonlu elemanlı indirgenemezlik şartı altında μ_{ii} ($i \in S$) sonludur. Böylece, yalnızca durum uzayı sayılabilir sonsuz olduğunda durumlar etkisiz geri dönüşlü olabilir.

2.5. Limit Teoremleri

Etkili ya da etkisiz geri dönüşlü durumların sınıflandırılmasına başka bir kriter de π_j olasılıkları kullanılarak verilebilir:

Teorem 2.5.1. $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{jj}^{(nd(j))}$ olmak üzere

$\pi_j > 0$ ise j durumu etkili geri dönüşlüdür.

$\pi_j = 0$ ise j durumu etkisiz geri dönüşlüdür [Ross, 1996].

Teorem 2.5.2. Eğer X , sonlu duruma sahip indirgenemeyen aperiodyk bir MZ ise, o zaman

$$\pi' \cdot P = \pi'$$

$$\pi' \cdot 1 = 1$$

denkleminin tek ve negatif olmayan bir çözümü vardır.

$\pi' = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s) =$ verildiğinde $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \end{bmatrix}$$

Buradan da aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)}$$

$\pi' = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s)$ şeklinde verilen bu vektör, sürecin *limit dağılımı* olarak adlandırılır [Çınlar, 1997].

Tanım 2.5.1. Bir $\{P_j : j \geq 0\}$ olasılık dağılımı için $P_j = \sum_{i=0}^{\infty} P_i P_{ij}$; $j \geq 0$ ise $\{P_j : j \geq 0\}$ olasılık dağılımına MZ'nin durağan dağılımı denir.

Eğer X_0 'ın olasılık dağılımı $P_j = P\{X_0 = j\}$; $j \geq 0$ zincirin bir durağan dağılımı ise, o zaman

$$\begin{aligned} P\{X_1 = j\} &= \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_1 = j \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} P_i \\ &= P_j \end{aligned}$$

dir ve tümevarımla

$$\begin{aligned} P\{X_n = j\} &= \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\} P\{X_{n-1} = i\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} P_i \\ &= P_j \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan şu sonuç elde edilir: Eğer başlangıç olasılık dağılımı durağan dağılım ise, o zaman her n için X_n 'ler aynı dağılıma sahiptir. $\{X_n : n \geq 0\}$ bir MZ olmak üzere, her bir n ve $m \geq 0$ için $X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}$, aynı ortak dağılıma sahip olacaktır. Diğer bir ifadeyle, $\{X_n : n \geq 0\}$ durağan bir süreç olacaktır.

Teorem 2.5.3. İndirgenemez aperiodyik bir MZ aşağıda verilen iki sınıftan birine aittir:

1) Bütün durumlar ya geçişli ya da etkisiz geri dönüşlü ise, bu durumda $\forall i, j$ için $n \rightarrow \infty$ iken $P_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$ dır ve durağan dağılım yoktur.

2) Bütün durumlar etkili geri dönüşlü ise, $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} > 0$ olması demektir ki, bu durumda $\{\pi_j : j = 0, 1, 2, \dots\}$ durağan bir dağılımdır ve bu dağılım zincirin tek durağan dağılımıdır. [Ross, 1996].

Örnek 2.5.1. X , durum uzayı $S = \{1, 2, 3\}$ ve geçiş matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.40 & 0.10 \\ 0.10 & 0.20 & 0.70 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \end{bmatrix}$$

olan MZ'nin limit dağılımını (π' olasılık vektörünü) bulalım.

$$\text{Çözüm: } \pi' \cdot P = \pi' \Rightarrow (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3) \begin{bmatrix} 0.50 & 0.40 & 0.10 \\ 0.10 & 0.20 & 0.70 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \end{bmatrix} = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3)$$

$$0.5\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.05\pi_3 = \pi_1$$

$$0.1\pi_2 + 0.05\pi_3 = 0.5\pi_1$$

$$\Rightarrow 0.4\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.7\pi_3 = \pi_2$$

$$\Rightarrow$$

$$0.4\pi_1 + 0.7\pi_3 = 0.8\pi_2$$

$$0.1\pi_1 + 0.7\pi_2 + 0.25\pi_3 = \pi_3$$

$$0.1\pi_1 + 0.7\pi_2 = 0.75\pi_3$$

$$\pi' \cdot \underline{1} = 1 \Rightarrow (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$\pi_1 = 10k \text{ alarak } 0.1\pi_2 + 0.05\pi_3 = 5k$$

$-0.8\pi_2 + 0.7\pi_3 = -4k$ denklemlerini $\pi_2 = 33.635k$ ve $\pi_3 = 32.73k$ bulunur.

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \Rightarrow 10k + 33.635k + 32.73k = 1$$

$$\Rightarrow \pi_1 = 0.13095, \pi_2 = 0.44045, \pi_3 = 0.42860$$

$$\Rightarrow (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.13095, 0.44045, 0.42860)$$

olarak bulunur.

2.6. Durumların Sınıflandırılması ve İlk Geçiş Zamanına İlişkin Bazı Örnekler

Örnek 2.6.1. Durum uzayı $S = \{1,2,3,4,5\}$ ve geçiş matrisi

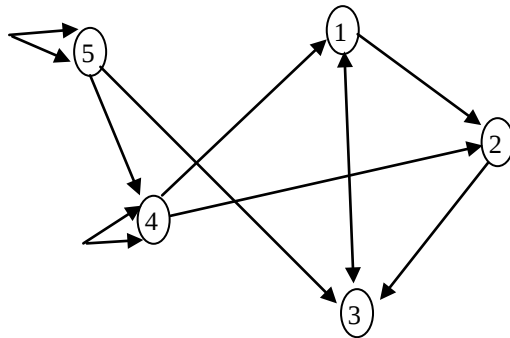
$$P = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.2 & 0.8 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.0 & 0.4 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

olan MZ için

a) Durumları sınıflandıralım.

b) Başlangıçta 5 durumunda bulunan MZ'nin 3 adımda 1 durumuna ilk geçiş olasılığını bulalım.

Çözüm: a)



Şekil 2.1. Örnek 2.6.1 için durumlar arası geçiş diyagramı

$\{1,2,3\}$ kapalı küme, etkili geri dönüşlü ve periyodik
 $\{4,5\}$ geçişlidir.

b) $f_{51}^{(3)} = ?$

YOL:

OLASILIK:

$$5 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

$$(0.2)(0.7)(1)=0.14$$

$$5 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 1$$

$$(0.1)(0.4)(0.3)=0.012$$

$$5 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 1$$

$$(0.2)(0.1)(0.3)=0.006$$

$$f_{51}^{(3)} = 0.14 + 0.012 + 0.006 = 0.158$$

Örnek 2.6.2. Durum uzayı $S = \{1,2,3,4,5\}$ ve geçiş matrisi aşağıda verilen MZ için

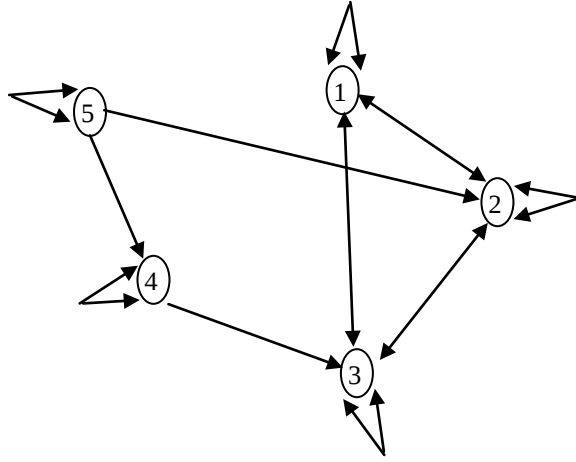
$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

a) Durumları sınıflandıralım.

b) Başlangıçta 4 durumunda bulunan zincirin 3 durumuna eninde sonunda geçiş olasılığını bulalım.

c) Başlangıçta 4 durumunda bulunan zincirin 3 durumuna ortalama ilk geçiş zamanını bulalım.

Çözüm: a)



Şekil 2.2. Örnek 2.6.2 için durumlar arası geçiş diyagramı

$\{1,2,3\}$ kapalı küme, etkili geri dönüşlü ve aperiyoiktir.

$\{4,5\}$ geçişli durumdur.

b) $f_{43} = ?$

m	yol	$f_{43}^{(m)}$
1	$4 \rightarrow 3$	(0.7)
2	$4 \rightarrow 4 \rightarrow 3$	$(0.3)(0.7)$
3	$4 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 3$	$(0.3)^2 (0.7)$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
k	$4 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow 4 \rightarrow 3$	$(0.3)^{k-1} (0.7)$

$$f_{43} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{43}^{(k)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} (0.3)^{k-1} (0.7) \\
&= (0.7) [1 + (0.3) + (0.3)^2 + \dots] \\
&= (0.7) \frac{1}{1-0.3} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$c) E[T] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot f_{43}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (0.3)^{k-1} (0.7) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.7} = 1.43$$

2.7. Potansiyel ve Eninde-Sonunda Geçiş Olasılıkları Matrislerinin Hesaplanması

C , kapalı kümeleri (geri dönüşlü durumların kümesi) ve D ise bütün geçişli durumların kümesini göstermek üzere, P geçiş matrisini aşağıdaki gibi ayrıştırmamız mümkündür:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} K & 0 \\ L & Q \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tanım 2.7.1. r_{ij} , i 'den başlayan MZ 'nin j 'ye yaptığı ortalama geçişlerin sayısı olmak üzere, $R = [r_{ij}]$ matrisine, MZ 'nin *potansiyel matrisi* denir.

j geri dönüşlü durumu için

$$r_{ij} = \begin{cases} 0; & f_{ij} = 0 \\ \infty; & f_{ij} > 0 \end{cases}$$

R matrisinin elde edilmesi için aşağıdaki tablo kullanılabilir:

Çizelge 2.1. r_{ij} nin durumlara göre değeri

r_{ij}	j	Geri dönüşlü	Geçişli
i			
Geri Dönüşlü	Geçiş <u>yok</u> $\rightarrow 0$	0	
	Geçiş <u>var</u> $\rightarrow \infty$		
Geçişli	Geçiş <u>yok</u> $\rightarrow 0$	$S=(I-Q)^{-1}$	
	Geçiş <u>var</u> $\rightarrow \infty$		

f_{ij} , i 'den j 'ye eninde sonunda geçiş olasılığı olmak üzere, $F = [f_{ij}]$ matrisini elde etmek için aşağıdaki tablo kullanılabilir:

Çizelge 2.2. f_{ij} nin durumlara göre değeri

f_{ij}	j	Geri Dönüşlü	Geçişli
i			
Geri Dönüşlü	Geçiş yok $\rightarrow 0$	0	
	Geçiş <u>var</u> $\rightarrow 1$		
Geçişli	Geçiş yok $\rightarrow 0$	Yalnız bir kapalı küme $\rightarrow 1$ Birden fazla kapalı küme $\rightarrow G = SB$	$f_{jj} = 1 - \frac{1}{r_{jj}}$ $f_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_{jj}} ; i \neq j$
	Geçiş <u>Var</u>		

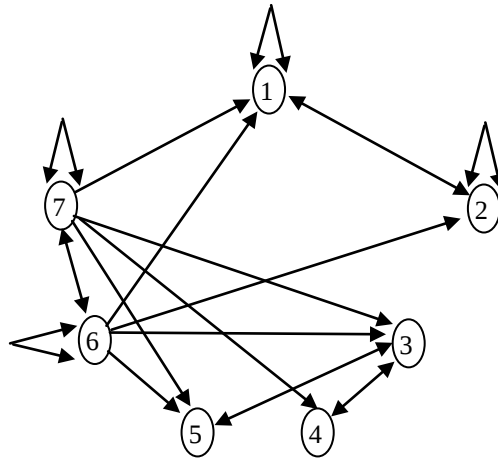
Örnek 2.7.1. X , durum uzayı $S = \{1,2,...,7\}$ ve geçiş matrisi,

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.9 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

olan bir MZ olsun.

- Durumları sınıflandıralım.
- R matrisini hesaplayıp yorumlayalım.
- F matrisini hesaplayıp yorumlayalım.

Çözüm: a)



Şekil 2.3. Örnek 2.7.1 için durumlar arası geçiş diyagramı

$C_1 = \{1,2\}$ kapalı küme, etkili geri dönüşlü ve aperiyoiktir.

$C_2 = \{3,4,5\}$ kapalı küme, etkili geri dönüşlü ve periyodiktir ($d = 2$)

$D = \{6,7\}$ geçişli durumdur.

b) P geçiş matrisini $P = \begin{bmatrix} K & 0 \\ L & Q \end{bmatrix}$ olacak şekilde aşağıdaki gibi ayırabiliriz:

0.6	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.9	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.7	0.3	0.0	0.0
0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.1	0.1	0.0	0.1	0.4	0.2
0.1	0.0	0.2	0.2	0.1	0.1	0.3

$$Q = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \Rightarrow S = (I - Q)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.75 & 0.50 \\ 0.25 & 1.50 \end{bmatrix}$$

Bu durumda,

$$R = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ \infty & \infty & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & \infty & \infty & \infty & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & \infty & \infty & \infty & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & \infty & \infty & \infty & 0.00 & 0.00 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1.75 & 0.50 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0.25 & 1.50 \end{bmatrix}$$

Örneğin, r_{77} : 7'den başlayan MZ 7 durumuna ortalama 1.50 kez geçiş yapar.

$$c) B = \begin{bmatrix} 0.1+0.1 & 0.1+0.0+0.1 \\ 0.1+0 & 0.2+0.2+0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$C_1 \quad C_2$$

$$\Rightarrow G = SB = \begin{bmatrix} 1.75 & 0.50 \\ 0.25 & 1.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$f_{66} = 1 - \frac{1}{r_{66}} = 1 - \frac{1}{1.75} = \frac{3}{7}, \quad f_{67} = \frac{r_{67}}{r_{77}} = \frac{0.50}{1.50} = \frac{1}{3},$$

$$f_{76} = \frac{r_{76}}{r_{66}} = \frac{0.25}{1.75} = \frac{1}{7}, \quad f_{77} = 1 - \frac{1}{r_{77}} = 1 - \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3},$$

Bu durumda,

$$F = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.40 & 0.40 & 0.60 & 0.60 & 0.60 & 0.43 & 0.33 \\ 0.20 & 0.20 & 0.80 & 0.80 & 0.80 & 0.14 & 0.33 \end{bmatrix}$$

Örneğin, f_{66} : 6'dan başlayan MZ'nin 6 durumuna eninde sonunda geçiş olasılığı 0.43'tür [Çınlar, 1997].

2.8. Markov Zincirinin Simülasyonu

Fen Bilimleri, Sosyal Bilimler ve Sağlık bilimlerinde kullanılan süreçlerin birçoğu “Markoviyen” özellik taşımaktadır. Bu kısımda kesikli zamanlı Markov süreçlerin

simülasyonu kısaca ele alındı ve Markov zincirlerinin indirgenemez ve aperiodyik olduğu kabul edildi.

İki durumlu Markov zincirinin simülasyonu

Markov zincirlerinin simülasyonunu daha iyi anlayabilmek için önce iki durumlu bir Markov zinciri göz önüne alınabilir. $\{X_n : n \geq 0\}$ Markov zincirinin durum uzayı $S = \{0,1\}$ ve geçiş olasılıkları matrisinin

$$P = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.80 \\ 0.40 & 0.60 \end{bmatrix}$$

olduğu, süreç sıfır durumunda başladığında $X_0 = 0$ olduğu kabul edilsin. X_1 değerinin simülasyonu yapılmak istendiğinde P geçiş olasılıkları matrisinin ilk satırına göre dağılmış bir X rastgele değişkeni oluşturulur. $P(X = 0) = p_{00} = 0.20$, $P(X = 1) = p_{01} = 0.80$ olacak biçimde X , X_1 'e eşitlenir. $X = X_1$. Böyle bir X rastgele değişkeni oluşturmak için kesikli ters dönüşüm yöntemi kullanılabilir. Buna göre $U \sim U(0,1)$ değeri üretilir. Eğer $U \leq 0.20$ ise $X = 0$ alınır. Eğer $U > 0.20$ ise $X = 1$ alınır. Bu şekilde X_1 değerinin simülasyonu yapılmış olur. X_2 de aşağıdaki gibi üretilir. Eğer $X_1 = 0$ ise P geçiş matrisinin ilk satırına göre önceki gibi X rastgele değişkeni oluşturulur ve $X = X_2$ alınır. Aksi takdirse $X_1 = 1$ ise P geçiş matrisinin ikinci satırına göre $P(X = 0) = p_{10} = 0.40$, $P(X = 1) = p_{11} = 0.60$ ve $X = X_2$ alınır.

Genel olarak X_n 'nin simülasyonu yapıldıktan sonra X_{n+1} 'in simülasyonu aşağıdaki gibi yapılır. Eğer $X_n = i$ ise o zaman X 'in simülasyonu şu şekilde yapılır. $P(X=0) = p_{i0}$, $P(X=1) = p_{i1}$. Eğer $U \leq p_{i0}$ ise $X=0$ alınır. Eğer $U > p_{i0}$ ise $X=1$ alınır ve $X_{n+1} = X$ yapılır.

Bu şekilde $X_1, X_2, \dots, X_n$ dizisinin simülasyonunu elde etmek için sadece $U_1, U_2, \dots, U_n$ gibi düzgün dağılımdan elde edilmiş n tane bağımsız değere ihtiyaç vardır.

Genel Algoritma

Geçiş olasılıkları matrisi $P = (P_{ij})$, $i, j \in S$ olan bir Markov zinciri için $Y_i : P$ matrisinin i . satırına göre dağılmış bir rastgele değişkeni gösterebilir .

$$P(Y_i = j) = p_{ij} , j \in S .$$

Y_i 'yi oluşturmak için ters dönüşüm yöntemi kullanılır. Örneğin durum uzayı $S = \{0,1,2,3,\dots\}$ şeklinde ise Y_i 'nin simülasyonunu yapmak için önce $U \sim U(0,1)$ değeri üretilir. Eğer $U \leq p_{i0}$ ise $Y_i = 0$, eğer $p_{i0} < U \leq p_{i0} + p_{i1}$ ise $Y_i = 1$ alınır. Bu şekilde devam edilerek, eğer

$$\sum_{k=0}^{j-1} p_{ik} < U \leq \sum_{k=0}^j p_{ik} \text{ ise } Y_i = j \text{ alınır.}$$

Aşağıdaki algorithmada Y_i 'nin simülasyonunu yapınız denildiğinde bağımsız düzgün dağılımı kullanarak ters dönüşüm yöntemi yani yukardaki işlem kastedilmektedir. [Sigman,2009]

Bir Markov zincirinin N adıma kadar simülasyonu

- 1) $U \sim U(0,1)$ değerleri üretilir
- 2) $X_0 = i_0$ başlangıç değeri seçilir. $n=1$ olsun.
- 3) Y_{i_0} değerinin simülasyonu ile $X_1 = Y_{i_0}$ ataması yapılır.
- 4) Eğer $n < N$ ise $i = X_n$ eşitlenir. Y_i değerinin simülasyonu yapılır ve n bir artırılır. $X_n = Y_i$ ataması yapılır. Aksi takdirde ($n = N$ ise) durulur.
- 5) 4. adıma geri dönülür.

3. BİLGİ TEORİSİ

Bu bölüm, ters öbekleme yönteminde kullanılan entropi kavramını ve ilk geçiş zamanının deneme sayısına göre yakınsamasında kullanılan Kullback uzaklık ölçüsü ve Wasserstein metriği kavramlarını vermek amacı ile hazırlanmıştır.

Bilgi (Information) teorisi, Claude Shannon'un 1948'de "Bell System Technical Journal" dergisinde "A Mathematical Theory of Communication"adlı makalesi yayımlandıktan ilk birkaç yıl sonra gelişme göstermeye başlamıştır.

Shannon'a göre bir olay hakkında bilgi edinilmesi, o olayın belirsizlik içermesi halinde söz konusu olabilir. Buna göre, ortaya çıkma olasılığı yüksek olayların meydana gelmesi fazla bilgi getirmemekte; aksine, olasılığı düşük olayların oluşması daha fazla bilgi taşımaktadır [Varshney, 2004; Aftab, 2001]

Bilgi teorisi, ilk olarak haberleşme kanalları (telefon, telgraf, radyo ve televizyon kanalları) arasında etkin bilgi aktarımının tanımlanmasında kullanılmıştır ve telefon kanalları üzerinde üretilen ses sinyallerinin gürültü ve bilgi içeriğini ölçmek için bir araç olarak geliştirilmiştir. Daha sonraları ekonomi, bilgisayar bilimleri, fizik, istatistik, psikoloji ve biyoloji gibi farklı disiplinlerde de kullanılmıştır. Bu teori, bilgi ve belirsizliğin ölçülmesi için matematiksel bir temele dayanır [Heckerling, 1990; Wagner, 1978].

3.1. İstatistiksel Belirsizlik ve Entropi

İstatistiksel entropi, bir istatistik deneyin belirsizliğinin ölçüsüdür. Deney sonucu ne ölçüde öngörülemez ise entropi o denli büyük olmaktadır. Yine hilesiz bir madeni paranın atılması deneyinde her iki sonucun ortaya çıkma olasılığı birbirine eşit olduğu için maksimum belirsizlik, maksimum entropi sözkonusudur. Örneğin; tura gelme olasılığının yazı gelme olasılığından bariz bir şekilde büyük olduğu bir paranın atılmasından önceki (deneyin sonucunu tahmin etmeye yönelik) belirsizlik daha azdır. Çünkü büyük olasılıkla tura gelecektir. Bu anlamda bir kişinin böyle bir

deneyi gerçekleştirmekle elde edeceği bilgi az olacaktır. Bu anlamda entropi ile (deneyden elde edilecek) bilgi miktarı birbirleri ile ilişkili iki kavram olmaktadır.

Termodinamik'teki entropinin olasılığa dayalı anlamını ilk vurgulayan bilim adamlarından biri L. Boltzman'dır. Boltzman bir sistemin sahip olduğu belirsizlik ile entropisi arasındaki paralelliği vurgulaması bakımından İstatistiksel Bilgi (Enformasyon) Kuramının öncüleri arasında sayılabilir. Bir gazın sahip olduğu serbestlik derecesi gazın belirsizliği ile (dolayısıyla sistemi oluşturan parçacıkların belirsizliği ile) ilgilidir [Rényi, (2007a)].

3.2. Entropi Türleri

Uygulamada en sık kullanılan entropi Shannon entropisi olmakla beraber, Rényi entropisi de biyolojik çeşitlilik derecesinin ortaya konmasında kullanılmaktadır Yine Tsallis entropisi de son yıllarda istatistiksel çalışmalarda kendine ayrıcalıklı bir yer edinmiştir [Jost, 2006].

3.2.1. Shannon entropisi

Kesikli bir dağılımda X rastgele değişkeni $x_1, x_2, \dots, x_K$ değerlerini $p_1, p_2, \dots, p_K$ olasılıkları ile alsın. Shannon entropisi

$$H_s(p) = - \sum_{i=1}^K p_i \log p_i \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. [Shannon,1948]

Genellikle logaritmanın tabanı önemsiz olmakla birlikte haberleşme mühendisliğinin pratik gereksinimleri çerçevesinde 2 olarak kabul edilmekte ve böylelikle entropi

birimi “bit” olmaktadır. Baz e tabanı olarak seçilecek olursa entropi birimi “nat” olmaktadır [Garcia, 1994]. Ayrıca, $\log 0 = 0$ olarak kabul edilmektedir [Karmeshu ve Pal, 2003].

Kesikli hallerde örnek uzayı S içerisinde bütün sonuçların gerçekleşme şanslarının birbirine eşit olması halinde en büyük belirsizlik (en heterojen durum) gerçekleşmektedir:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{K} \quad i = 1, 2, \dots, K$$

ve bu duruma karşılık gelen maksimum entropi

$$H(X) = - \sum_{i=1}^K \frac{1}{K} \log\left(\frac{1}{K}\right) = \log K \quad (3.2)$$

değerine eşit olacaktır.

Öbür uç durumda herhangi bir $\{X = x_k\}$ kesin olayının gerçekleşmesi halinde ise $H(X)=0$ olarak bulunur. Bu yüzden kesikli dağılımlar için entropinin 0 ve $\log K$ arasında olduğunu belirtmek gerekiyor. Buradan hareketle Shannon entropisinin alacağı üst değer grup sayısı K 'ya bağlı olduğu görülmektedir [Rao, 1984].

Sürekli hallerdeki entropi diferansiyel entropi olarak adlandırılmaktadır. Sürekli dağılımlardaki entropi hesaplamaları için yukarıdaki formüllerdeki toplama sembollerinin integral operatörleri ile yer değiştirmesi gerekmektedir. Yine de sürekli dağılımlarda entropi hesabı kesikli hallerdeki kadar sorunsuz değildir. Bu sorunlar Reza tarafından özetlenmiştir [Reza, 1994].

3.2.2. Havrda-Charvat entropisi

$\alpha > 0$ ve $\alpha \neq 1$ olmak üzere

$$H_\alpha(p) = \frac{\sum_{i=1}^K p_i^\alpha - 1}{2^{1-\alpha} - 1} \quad (3.3)$$

ile verilir [Havrda-Charvat, 1967].

3.2.3. Tsallis entropisi

$\alpha > 0$ ve $\alpha \neq 1$ olmak üzere

$$H_T(p) = \frac{\sum_{i=1}^K p_i^\alpha - 1}{1 - \alpha}$$

ile verilir [Tsallis, 1988].

3.2.4. Rényi entropisi

$\alpha > 0$ ve $\alpha \neq 1$ olmak üzere

$$H_R(p) = \frac{\log \sum_{i=1}^K p_i^\alpha}{1 - \alpha} \quad (3.4)$$

ile verilir [Rényi, 1961].

3.2.5. Mathai entropisi

$\alpha \neq 1$ ve $-\infty < \alpha < 2$ olmak üzere

$$H_M(p) = \frac{\log \sum_{i=1}^K p_i^{2-\alpha} - 1}{1 - \alpha}$$

ile verilir [Mathai, 2007].

3.3. Entropi ve İstatistiksel Bağımsızlık

X ve Y bağımsız olduğunda koşullu dağılımların entropileri marjinal dağılımların entropilerine eşit olur. Dolayısıyla iki bağımsız rastgele değişkeni için

$$H(X/Y)=H(X) \quad (3.5)$$

$$H(Y/X)=H(Y) \quad (3.6)$$

olur. Bunun yanı sıra farklı entropi türleri arasındaki ilişkiler kimi eşitlikler yardımı ile incelenebilir.

X ve Y , aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış iki rastgele değişken olsun.

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) ; i = 1, 2, \dots, n \text{ ve } j = 1, 2, \dots, m$$

$$H(X, Y) = - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n P(X = x_i, Y = y_j) \log P(X = x_i, Y = y_j) \quad \text{birleşik dağılımın entropisi}$$

olmak üzere,

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X/Y) \quad (3.7)$$

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y/X) \quad (3.8)$$

Eş.3.7 ve Eş.3.8'den yola çıkarak birleşik dağılımın entropisinin marjinal bir dağılımın entropisi ile koşullu diğer dağılımın entropisinin toplamına eşit olduğu ortaya çıkar [Cover ve Thomas, 2006].

3.4. Karşılıklı Bilgi Ölçüsü

Karşılıklı Bilgi, bir rastgele değişkeninin diğer bir rastgele değişkeni hakkında içerdiği bilgi miktarının bir ölçüsüdür.

Y'nin X hakkında verdiği bilgi

$$I(X;Y) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n P(X = x_i, Y = y_j) \log \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)P(Y = y_j)} \quad (3.9)$$

şeklindedir. X ve Y'nin bağımsız olması halinde $I(X,Y)=0$ olur. Bu da hiç şüphesiz sezgilere uygun bir durumdur. Bağımsız değişkenlerin birbirlerinin belirsizlikleri hakkında bilgi vermeyeceklerini beklemek doğaldır. Yine bazı elemanter işlemlerden sonra

$$I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y) \quad (3.10)$$

$$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y) \quad (3.11)$$

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X) \quad (3.12)$$

özdeşlikleri elde edilebilir. [Moser ve Chen, 2012]

İki Değişkenli Normal Dağılımda Karşılıklı Bilgi Ölçüsü

(X,Y) iki boyutlu rastgele değişkeni $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$, parametrelili normal dağılımlı olsun. Bu durumda birleşik entropi

$$H(X, Y) = \ln (2\pi\sigma_X\sigma_Y e^{\sqrt{1-\rho^2}}) \quad (3.13)$$

burada ρ^2 : Korelasyon katsayısı

X ve Y'nin marjinal entropileri de

$$H(X) = \ln (\sqrt{2\pi e} \sigma_x) \quad (3.14)$$

$$H(Y) = \ln (\sqrt{2\pi e} \sigma_y) \quad (3.15)$$

olarak bulunur. Hesaplanan bütün entropiler nat cinsindendir ve karşılıklı bilgi ölçüsü de

$$I(X; Y) = -\frac{1}{2} \ln(1-\rho^2) \quad (3.16)$$

olur. $\rho=0$ için $I(X;Y)=0$ olacağına dikkat edilmelidir [Reza, 1994].

3.5. Göreli Entropi ve Kullback-Leibler Bilgisi

$D(p \parallel q)$ ya da göreli entropi gerçek dağılım “p” iken, dağılımın “q” sayılmasından kaynaklanan yetersizliğin bir ölçüsüdür. Aynı zamanda “p” ve “q” gibi iki dağılım arasındaki mesafenin bir ölçüsü olarak da değerlendirilebilir [Rényi, (2007b)]. İki kesikli dağılım arasındaki Kullback-Leibler mesafesi (ya da göreli entropi)

$$D(p \parallel q) = \sum p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlanmıştır. İki dağılım özdeş olduğunda bu mesafe sıfıra eşit olur. Bu ölçü genellikle asimetriktir. Başka bir ifade ile

$$D(p \parallel q) \neq D(q \parallel p) \quad (3.18)$$

Bu istatistik, belirli düzgünlük koşullarında asimptotik olarak ki-kare dağılmaktadır. Bu konu ile ilgili olarak Kullback (1996)'a başvurulabilir. Son olarak karşılıklı bilgi ölçüsü ile görelî entropi arasında bir paralellik kurulabilir. Karşılıklı bilgi miktarı, ortak olasılık fonksiyonu ile iki marjinal olasılık fonksiyonunun çarpımı arasındaki Kullback-Leibler mesafesi ya da görelî entropiye eşit olmaktadır [M.Gray, 2011]. Başka bir ifade ile

$$I(X;Y)=D(f(x,y) \parallel f(x)f(y)) \quad (3.19)$$

3.6. Markov Zincirlerinde Entropi

Başlangıçta i durumunda bulunan bir Markov zincirinde bir dönemde geçiş söz konusu olsun. Bu durumda bir dönemde geçişin entropisi

$$H_i^{(1)} = - \sum_{j=1}^n p_{ij} \log p_{ij} \quad (3.20)$$

olur. Eğer başlangıçta i durumunda bulunulduğu bilinmiyorsa, daha ortalama bir belirsizlik ölçüsü

$$H(X) = \sum_{i=1}^n p_i H_i^{(1)} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_{ij} \log p_{ij} \quad (3.21)$$

şeklinde verilir. Genel olarak r dönemde geçiş için

$$H_i^{(r)} = - \sum_{j=1}^n p_{ij}^{(r)} \log p_{ij}^{(r)} \quad (3.22)$$

$$H^{(r)} = \sum_{i=1}^n p_i H_i^{(r)} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_{ij}^{(r)} \log p_{ij}^{(r)} \quad (3.23)$$

olur (Reza, 1994).

3.7. Wasserstein metriği

Mühendisler ve matematikçiler sistemler arasındaki farklılıkları ölçmek için farklı metrikler geliştirdiler. Örneğin, bilgi teorisyenleri çeşitli verilerin olasılıklarını tanımlayan dağılımlar arasındaki farklılıkları ölçmek için Kullback-Leibler yakınsamasını, kontrol teorisyenleri ise kararsız sistemleri geri beslemeyi kullanarak kararlı hale getirdikleri zamandaki performans sonuçları arasındaki farkı ölçmek için aralık-boşluk(gap) metriğini kullandılar. Çalışmada kullanılan Wasserstein metriği stokastik süreçler arasındaki farklılıkları ölçmek için kullanılır. Wasserstein metriği stokastik süreçlerin davranış farklılıklarını değerlendirmek için bir yaklaşım sağladığı gibi, bu metriği karşılaştırma, doğrulama ve parametre tahmin problemlerinde de kullanmak mümkündür [Thorsley ve Klavin, 2009].

Wasserstein metriğinin diğer bir avantajı ise stokastik süreçler arasındaki uzaklığı pek çok kriter yerine sadece bir tane kritere göre ölçmesidir. Wasserstein metriği 18.yy'da Monge-Kantorovich tarafından taşıma problemini çözmek için önerildi. Bu yüzden Wasserstein metriğinin diğer bir adı Kantorovich metriğidir [Thorsley ve Klavin, 2009].

Taşıma probleminin amacı malların üretildiği yerden tüketildiği yere ortalama taşıma maliyetini en aza indiren en iyi taşıma planını bulmaktır. Stokastik süreçlerde ise stokastik süreçler tarafından izlenen yollar mümkün olduğunca eşleştğinde izlenen yolun birinden diğerine taşınması için ortalama taşıma maliyetini gösterir. Wasserstein metriği en çok görüntü süreçleri, görüntü düzeltme, görüntü tanıma gibi alanlarda kullanılır [Thorsley ve Klavin, 2009].

(X, ψ_A) ve (Y, ψ_B) iki olasılık uzayı , π ; $X \times Y$ çarpım uzayında olasılık ölçüsü, $\Pi(\psi_A, \psi_B) = \{ \pi \in P(X \times Y) : \pi[M \times Y] = \psi_A[M] \text{ ve } \pi[X \times U] = \psi_B[U], M \in \mathcal{X} \ U \in \mathcal{Y} \}$ olasılık ölçülerinin (kabul edilebilir taşıma planlarının) kümesi olsun. $c : X \rightarrow Y$ olmak üzere maliyet fonksiyonu, $\pi \in \Pi(\psi_A, \psi_B)$ ' e göre toplam taşıma maliyeti

$$I[\pi] = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$$

ψ_A ile ψ_B arasındaki optimal taşıma maliyeti

$$T_c(\psi_A, \psi_B) = \inf_{\pi \in \Pi(\psi_A, \psi_B)} I[\pi] \text{ dir.}$$

ψ_A , ψ_B iki olasılık ölçüsü ve bunlara ait dağılım fonksiyonu F ve G , maliyet fonksiyonu $c(x, y)$ olsun.

Optimal taşıma maliyeti

$$T_c(\psi_A, \psi_B) = \int_0^1 c(F^{-1}(t), G^{-1}(t)) dt \text{ dir.}$$

Özellikle maliyet fonksiyonu $c(x, y) = |x - y|$ ise optimal taşıma maliyeti olan Wasserstein metriği

$$T_1(\psi_A, \psi_B) = \int_0^1 |F^{-1}(t) - G^{-1}(t)| dt \quad (3.24)$$

ile tanımlanır [Villani, 2003].

Barrio ve ark. (1999) Eş.3.24'deki uzaklığın L2 versiyonunu dağılımların zayıf yakınsaklığını çalışmak için aşağıdaki gibi önermişlerdir.

$$T_1(\psi_A, \psi_B) = \left[\int_0^1 |(F^{-1}(t) - G^{-1}(t))^2| dt \right]^{1/2} \quad (3.25)$$

Irpino ve Romano (2007) Eş.3.25'deki ifadenin

$$T_1^2(\psi_A, \psi_B) = (\mu_A - \mu_B)^2 + (\sigma_A - \sigma_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B [1 - \text{Corr}_{QQ}(\psi_A, \psi_B)] \quad (3.26)$$

$\text{Corr}_{QQ}(\psi_A, \psi_B)$: iki dağılımın çeyreklikleri arasındaki korelasyon olmak üzere Eş.3.26'daki gibi yazılabileceğini ispat etmişlerdir [Irpino ve Romano, 2007].

4. ÖBEKLEME TEORİSİ

Bir Markov zincirinin durumlar kümesine ilk geçiş zamanının dağılımı öbekleme yapılarak elde edilmesi için öbekleme teorisine ihtiyaç duyulur. Bu yüzden Markov zincirinin öbekleme özellikleri bu bölümde anlatılmıştır.

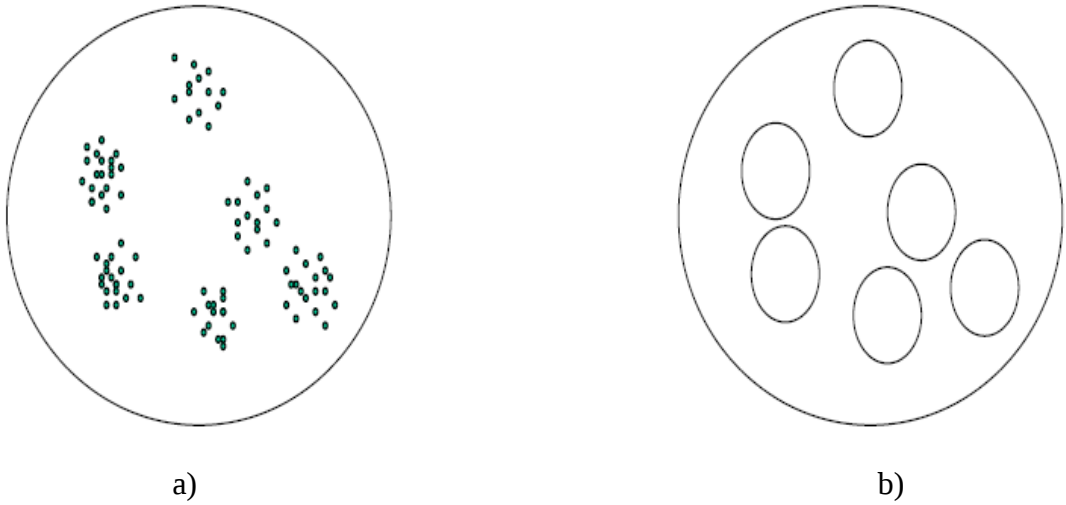
4.1. Tanımlar ve Amaç

Öbekleme teorisi, durum uzayının etkili bir şekilde nasıl öbeklere ayrılacağını gösterir ve orijinal zincirin, öbeklenmiş zincire yakınlığının nasıl ölçüleceğine ilişkin ölçüler verir. Bu yakınlığın ölçülmesine ilişkin önerilen metoda *öbekleme yaklaşımı* denir.

Durum sayısı arttığında, Markov problemleri hızlı bir şekilde büyür. Bu yüzden büyük ölçekli Markov modellerinin çözümü için uğraşmak oldukça zorlaşır. Belli şartlar altında kesikli parametrelili sonlu Markov zincirinin durum uzayı alt kümelerle ayrılabilir. Ayrılan bu alt kümelerin her biri Markov özelliğini koruyan daha küçük bir zincirin durumu gibi davranabilir. Büyük ölçekli Markov zincirleriyle uğraşıldığında bu önemlidir. Çünkü küçük zincirlerle uğraşmak ve hesaplama yapmak daha kolaydır. Thomas ve Barr (1977) öbekleme yapmanın nedenlerinden bahsetmişlerdir. Bunlar kısaca

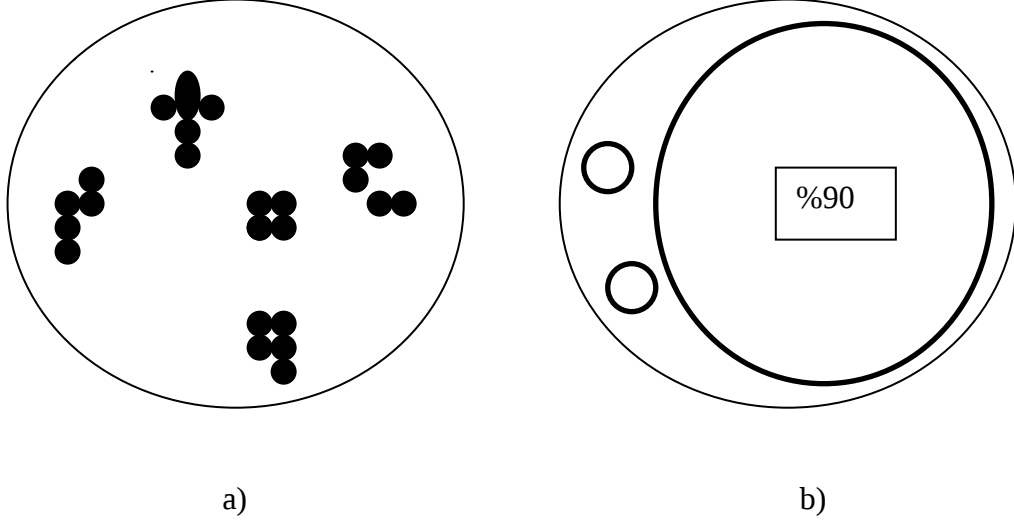
- Analitik faydaları yani hesaplama kolaylığı vardır. Ayrıca orijinal modelin güçlü özelliklerini bilen veya varsayan yeni bir modelin geliştirilmesinde ve indirgenmiş bir model kullanmak gerektiğinde (model indirgemedi)
- İstatistiksel faydaları vardır. Geçiş olasılıklarını tahmin etmede küçük zincirler daha sağlamdır (robusttur.)
- Belki de öyle bir öbekleme yapılır ki sürecin araştırılmasında yeni bir anlayış sağlar. (Büyük sistemlerin davranışlarını kavramak daha zor olduğundan)
- Markov zincirine ait geçiş olasılıklarının seyrekliğini (sıfır veya sıfıra yakın olasılıkları) onarmak için kullanılabilir.

Eğer durumlar rastgele bir araya getirilirse, orijinal sürecin Markov özelliği bakımından, bilgi kaybına neden olacağı unutulmamalıdır. Yani öbekleme yapılması bilgi kaybına neden olur. Uygulamacılar ne kadar bilgiyi kaybettiklerini ve öbeklenmiş zincirin Markov özelliklerinden ne kadar uzaklaştıklarını bilmezler. Uygulamada bu sapmalar önemli olabilir.



Şekil 4.1. Markov zincirinin durum uzayı a) Orijinal durumlar b) Öbeklenmiş durumlar

Öbekleme yaparken dikkat edilecek bir husus da orijinal durumların çoğunun süper-durum dediğimiz bir duruma toplanmasıdır. Böyle bir şey kolaylık sağlamaz. Örneğin, 10^6 (1.000.000) duruma sahip orijinal bir zincir düşünelim. Eğer bir süper-durum çok büyük olursa yani orijinal zincirin durum uzayının %90' ını (yaklaşık 9×10^5 durum) içerirse, doğal olarak diğer durumlara daha az sayıda durum kalacaktır. Dolayısıyla 9×10^5 durumlu bir zincirin çözülmesi durumunda kalınır ki bu da problem açısından pek bir kolaylık sağlamaz.



Şekil 4.2. Markov zincirinin durum uzayı a) Orijinal durumlar
b) Yanlış Öbekleme

Öbekleme yaklaşımı Markov özelliğini koruması bakımından güçlü bir araçtır. Yani öbeklenmiş zincir Markov özelliğini korur. Öbekleme yaklaşımı sayesinde farklı öbeklemeler için bilgi kaybını (bir yerde Markov özellikli bir sürece yakınlığını) ölçerek alternatif öbeklemelerin nasıl seçileceği Bölüm 4.4'te gösterilmiştir. Öbekleme yapabilmek için Markov Zincirinin öbekleme özelliklerine bakılır.

4.2. Markov Zincirinin Öbekleme Özellikleri

$S = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu durum uzaylı kesikli parametrelili indirgenemez

$X = \{X_t : t = 1, 2, \dots\}$ bir Markov zinciri düşünelim. Geçiş olasılıkları $P = [P_{ij}]$ olsun.

A tüm mümkün ilk durum olasılıkların satır vektörlerinin kümesi

$$A = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^n \mid \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\} \quad \zeta = \{C(1), C(2), \dots, C(m)\}$$

S 'nin ayrıntılı öbeklemeleri $m < n$, $\bigcup_{i=1}^m C(i) = S$ ve $C(i) \cap C(j) = \emptyset \quad i \neq j$ olmak üzere öbekleme yapıldıktan sonra karşılık gelen durum uzayı

$\bar{S} = \{1, 2, \dots, m\}$, $\bar{S}$ durum uzaylı öbeklenmiş zincir $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t : t = 1, 2, \dots\}$ olsun.

Tanım 4.2.1

Eğer $\tilde{X}$, herhangi bir ilk durum olasılık vektörü α için Markoviyen ve geçiş olasılıkları α 'nın seçimine bağlı değilse, X Markov zinciri ζ öbeklemeye göre *güçlü öbeklemelidir*. Zincirin limit dağılımı öbekleme yapma biçimini etkilemez. Yani güçlü öbekleme limit dağılımından bağımsızdır. Eğer $\tilde{X}$, bir tane ilk durum olasılık vektörü için Markoviyen ise X Markov zinciri ζ öbeklemeye göre *zayıf öbeklemelidir*. Zayıf öbekleme ilk durum olasılık vektörüne (α) bağlıdır [Zhang, 2006].

Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 ile güçlü öbeklemeyi tanımlayan temel şartlar Kemeny ve Snell(1976) tarafından verilmiştir .

Teorem 4.2.1 Bir Markov Zincirinin güçlü öbeklemeli olması için gerekli ve yeter şart $\zeta = \{C(1), C(2), \dots, C(m)\}$ öbeklemesine göre $C(i)$ ve $C(j)$ kümesinin her çifti için olasılıkların

$$\tilde{P}_{ij} = \sum_{r \in C(j)} P_{kr} \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad \text{tüm } k \in C(i) \text{ için} \quad (4.2)$$

olmasıdır.

Teorem 4.2.2

$$\text{Markov zinciri, } \tilde{X} \text{ , e göre güçlü öbeklemeli} \Leftrightarrow \text{VUPV}=\text{PV} \quad (4.3)$$

olacak biçimde U ve V matrisleri vardır.

burada V , $(n \times m)$ boyutlu ve $C(j)$ 'deki durumlar için j . sütun elemanları bir (1) aksi takdirde sıfır(0) olan matristir. V matrisine *toplayıcı* matris denir. Bu matrisin sütun vektörleri ortogonaldır.

U , $(m \times n)$ boyutlu ve $C(i)$ 'deki durumlar için i . satırı sıfır olmayan, kalan durumlar için sıfır olan matristir. U matrisine *dağıtıcı* matrisi denir. U matrisinin satır vektörleri ortogonaldır. U matrisini hesaplamak için $U = (V^T V)^{-1} V^T$ kullanılır.

Örnek 4.2.1 Geçiş olasılık matrisi aşağıdaki gibi olsun. $\zeta = \{\{1,2\}, \{3\}\}$ öbeklenmesine göre güçlü öbeklemeli olup olmadığını araştıralım ve öbeklenmiş zincir için geçiş olasılıklarını, U , V matrislerini bulalım.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$\zeta = \{\{1,2\}, \{3\}\}$ öbeklemesine göre güçlü öbeklemelidir. Çünkü $P_{11} + P_{12} = \frac{1}{2} = P_{21} + P_{22}$ dir. Öbeklenmiş zincir için geçiş olasılığı matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$\zeta = \{\{1\}, \{2,3\}\}$ öbeklemesine göre $P_{21} = \frac{1}{6} \neq 0 = P_{31}$ olduğundan güçlü öbeklemeli değildir.

Keza $\zeta = \{\{1,3\}, \{2\}\}$ öbeklemesine göre $P_{12} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} = P_{32}$ olduğundan yine güçlü öbeklemeli değildir.

$\zeta = \{\{1,2\}, \{3\}\}$ öbeklenmesine göre

$$\text{toplayıcı matris (V)} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$U = (V^T V)^{-1} V^T$ formülünü kullanılarak dağıtıcı matrisi (U) aşağıdaki gibi olur.

$$U = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{burada } U.V = I \text{ dir.}$$

$\tilde{X}$, in $\tilde{P}$ gibi öbeklenmiş zincir için geçiş olasılık matrisi varsa , $\tilde{P} = UPV$ ' dir. Öbeklenmiş zincirinin k adım sonraki geçiş olasılık matrisi (4.4)' de verilmiştir.

$$(\tilde{P})^k = (UPV)^k = UP^k V = \tilde{P}^k \quad (4.4)$$

Örnek 4.2.1 için limit dağılımı $\pi = (\frac{1}{11}, \frac{9}{22}, \frac{1}{2})$ dir. Limit dağılımı, öbekeleme yapma biçimini etkilemez ve U dağıtıcı matrisi π ' den etkilenmez. Sonuç olarak güçlü öbekeleme π ' den bağımsızdır. Örnek 4.2.1'de her bir öbeklenmiş durumda her

bir durum eşit olasılıkla alındığında $U = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi bu şekilde olur.

İstenirse $U = \begin{pmatrix} 2/11 & 9/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ veya genel olarak $U = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in (0,1)$

matrisi seçilebilir. Kısaca U matrisi limit dağılımına bağlı değildir.

4.3 Geçiş Olasılık Matrisinin Öz Sistemi

Thomas ve Barr (1977), güçlü öbeklemeli olduğunda orijinal geçiş matrisin (P) özdeğerleri ile öbek haline gelmiş geçiş matrisinin ($\tilde{P}$) özdeğerleri arasında bir ilişki olduğunu göstermişlerdir. Öbeklenmiş zincirin özdeğerleri, orijinal Markov zincirin özdeğerlerindendir. Örnek 4.2.1’de (P)’nin özdeğerleri $\{1, \frac{1}{12}, 0\}$ ’dir. Öbeklenmiş zincirinin geçiş matrisinin ($\tilde{P}$) özdeğerleri $\{1, 0\}$ ’dir. Tüm stokastik matrisler bir(1) özdeğerine sahiptir. Stokastik matrisler için eğer özdeğer 1’den farklı ise özdeğer vektörünün bileşen toplamı sıfırdır.

Örnek 4.3.1

	<u>Özdeğerler</u>	<u>Özvektörler</u>
$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 1$	$x_1 = (1/3, 1/3, 1/3)$
	$\lambda_2 = \frac{1}{4}$	$x_2 = (0, -1, 1)$
	$\lambda_3 = \frac{1}{4}$	$x_3 = (-1, 1, 0)$

Eğer $\lambda \neq 1$ ise $x.e = 0$ ’dır. Burada $e = (1, 1, \dots, 1)$. Örnekte görüldüğü gibi $x_2.e = 0$ ve $x_3.e = 0$ ’dır. $x_1.e = 1$ ’dir. Thomas ve Barr (1977) özdeğer ve özvektörleri kullanarak durum uzayı için aday öbeklerin nasıl oluşturulacağını aşağıdaki teoreme göre vermişlerdir.

Teorem 4.3.1. x, P 'nin λ özdeğerlerine göre sol- özvektörleri olsun. Eğer X Markov zinciri, $\tilde{P} = UPV$ geçiş matrisine sahip olacak şekilde öbeklenmiş bir zincir ise o zaman $(xV)\tilde{P} = (xV)\lambda$ eşitliği sağlanır.

Kemeny ve Snell (1976) sabit bir öbeklemeye göre orijinal zincir için öbeklenmiş Markov zincirine ait geçiş olasılık matrisinin tek olduğunu ispatladı. Buna ilişkin teorem aşağıda verilir.

Teorem 4.3.2. Eğer öbeklenmiş Markov Zinciri $\tilde{X}$ 'in geçiş olasılık matrisi $\tilde{P}$ ise o zaman bir Markov zinciri yapan her α (ilk durum olasılık) vektörü için $\tilde{P}$ aynıdır. $\tilde{X}$ 'in geçiş olasılığı matrisi $\tilde{P} = U_{\alpha}PV$ tektir.

Kemeny ve Snell(1976) zayıf öbeklemeli olması için yeterli şartı aşağıdaki gibi vermişlerdir

Teorem 4.3.3. X , Markov zinciri için zayıf öbeklemeli olması için yeterli şart $U_{\pi}PVU_{\pi} = U_{\pi}P$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Bölüm 4.4'de Markov özelliği açısından bilgi kaybını ölçmek için güçlü öbekleme teorisinin nasıl kullanılacağına değinildi ve Markov problemleri için öbekleme yaklaşımı verildi.

4.4 . Öbekleme Yaklaşımı

Bu bölümde öbeklerin nasıl oluşturulduğundan bahsedilecektir. Bir öbekleme diğerine niçin tercih edilir ? Bu sorunun cevabı araştırılmıştır. Süreç hakkında ön bilgi olmaksızın daha iyi sonuçlar elde etmek için öbeklerin iyi bir şekilde dengelenmesi zorunludur. Bu bölümde öbeklerin nasıl iyileştirileceği, geliştireceği tartışılmıştır. Durumların toplanmasından yani bir araya getirilmesinden ne kadar bilginin kaybedildiğini ölçmek gerekli olabilir. Diğer bir deyişle yeni zincirin

Markov özelliğine sahip bir sürece yakınlığı nasıl ölçülebilir? Bu ölçü Tanım 4.4.1’ de verildiği gibidir [Zhang, 2006]

Tanım 4.4.1

$$d_{\infty}(P, \tilde{P}; V, U) = \max_{i,j} |(VUPV - PV)_{ij}| = \max_{i,j} |(V\tilde{P} - PV)_{ij}| \quad (4.5)$$

Eğer $\tilde{P}$ Markoviyen (Markov özelliğine sahip) ise $d_{\infty}(P, \tilde{P}; V, U) = 0$ olur. Markov özelliğinden uzaklaştıkça bu ölçü büyür. Diğer alternatif ölçüler ise

$$d_1(P, \tilde{P}; V, U) = \frac{\sum_{i=1, j=1}^{n,m} |(VUPV - PV)_{ij}|}{n \times m} \quad (4.6)$$

$$d_2(P, \tilde{P}; V, U) = \left(\frac{\sum_{i=1, j=1}^{n,m} |(VUPV - PV)_{ij}|^2}{n \times m} \right)^{1/2} \quad (4.7)$$

Teorem 4.4.1 $0 \leq d_k(P, \tilde{P}; V, U) \leq 1$ için $k=0,1,2,\dots,\infty$

Markov özelliği bakımından bilgi kaybı minimum olan öbeklenmiş zincir için durum uzayının öbeklenmesini bulma, U ve V’ ye göre $d(P, \tilde{P}; V, U)$ uzaklığını minimum yapmaktır. Bu şekilde en iyi öbekleme bulunabilir.

$$\text{Minimum } d(P, \tilde{P}; V, U) \\ U, V$$

Kısıtlar

V (öbeklemeyi tanımlar)

$$U = (V^T V)^{-1} V^T \text{ (dağıtım için)}$$

Uyarı

- $d(P, \tilde{P}; V, U)$ ' nin minimizasyonu , P ' nin biçimine bağlı değildir. Yani aynı Markov zinciri için minimizasyon , P 'nin rastgele permütasyonuna bağlı değildir.
- Minimizasyon için tüm mümkün öbeklemeleri saymak gerektiğinden uygulama açısından bu pek pratik olmaz. Bu yüzden yapılan öneri birkaç örnek öbekleme alıp en küçük olan $d(P, \tilde{P}; V, U)$ ' nin seçilmesidir. Belki bu tam olarak en iyi öbeklemeyi sağlamayacaktır, fakat en iyi öbeklemeye ulaşılması için bir gelişme sağlayacaktır.

Bu ölçüler kullanmanın en avantajlı tarafı limit dağılım vektörü (π)' den bağımsız olmasıdır. Bu ölçüler sadece güçlü öbekleme için tanımlıdır. Zayıf öbekleme için tanımlı değildir. Zayıf öbekleme yaklaşımı için bu tür ölçülerin tanımlanması açık bir problem olarak durmaktadır. Bir ölçü sıfır ise yani $VUPV - PV = 0$ ise, bütün ölçüler sıfır olacaktır. Bir ölçünün küçük olması diğer ölçülerin de küçük olmasını gerektirmez. İlk ölçü (d_∞), fark matrisinin maksimum elemanını kullanır ve tüm ölçüler arasında en hassas olanıdır. Uygulamacılar seçecekleri öbeklemenin her bir öbek için iyi bir gösterim verip vermeyeceğini ölçmek isterlerse, ihtiyaçlarına bağlı olarak ilk ölçüyü(d_∞) kullanabilirler. Eğer büyük hatalı bir öbek tanımlanırsa hassaslığın geliştirilip geliştirilemeyeceğini görmek için öbek sayısı artırılabilir.

Örnek 4.4.1

Aynı dağıtıcı matrisli ($U = (V^T V)^{-1} V^T$) farklı ölçüler kullanılmasının nasıl bir etki yaptığını görmek için aşağıdaki örneğe bakalım. Markov zincirinin geçiş matrisi P olsun.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$\zeta = \{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}\}$ öbeklemesine göre güçlü öbeklemelidir. Öbeklenmiş zincirin matrisi

$$\tilde{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- $m=2$ olduğunda her bir öbekte 3 durum olacağı için $C_6^3 / 2! = 10$ tane mümkün öbekleme sayısı olacaktır. Karşılaştırılan sonuçlar Çizelge 4.1' de gösterilmiştir.
- $m=2$ olduğunda ve bir öbekde 2 durum , diğer öbekde 4 durum olacağı için $C_6^2 = 15$ tane mümkün öbekleme sayısı olacaktır. Karşılaştırılan sonuçlar Çizelge 4.2' de gösterilmiştir.

- $m=3$ olduğunda ve her bir öbekte 2 durum olacağı için $C_6^2 C_4^2 / 3! = 15$ tane mümkün öbekteleme sayısı olacaktır. Karşılaştırılan sonuçlar Çizelge 4.3' de gösterilmiştir.

Toplam $10+15+15=40$ tane öbekteleme var. $\zeta = \{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}\}$ öbektelemesine göre $VUPV=PV$ olduğu için tüm ölçüler sıfırdır yani bu öbektelemeye göre zincir güçlü öbektelemelidir. Fakat diğer öbektelemeler için ölçüler sıfır olmayabilir. Tüm öbektelemeler ve hesaplanan ölçüler Çizelge 4.1, 4.2, 4.3' de verilmiştir.

Çizelge 4.1. $U=(V^T V)^{-1} V^T$ ' a göre farklı ölçülerin karşılaştırılması
 $m=2$ ve her öbekte 3 durum

Sıra	Öbekteleme	d_∞	d_2	d_1
1	$\{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}\}$	0	0	0
2	$\{\{1,3,4\}, \{2,5,6\}\}$	0.1111	0.0620	0.0556
3	$\{\{1,2,6\}, \{3,4,5\}\}$	0.1111	0.0786	0.0741
4	$\{\{1,4,5\}, \{2,3,6\}\}$	0.2083	0.1001	0.1019
5	$\{\{1,4,6\}, \{2,3,5\}\}$	0.2222	0.1496	0.1389
6	$\{\{1,3,6\}, \{2,4,5\}\}$	0.2778	0.1756	0.1481
7	$\{\{1,2,4\}, \{3,5,6\}\}$	0.2778	0.1943	0.1759
8	$\{\{1,2,5\}, \{3,4,6\}\}$	0.3333	0.2421	0.2037
9	$\{\{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$	0.3889	0.2484	0.2222
10	$\{\{1,5,6\}, \{2,3,4\}\}$	0.3889	0.2605	0.2407

Çizelge 4.2. $U=(V^T V)^{-1}V^T$, a göre farklı ölçülerin karşılaştırılması
 $m=2$ ve bir öbekte 2 durum , diğer öbekte 4 durum

Sıra	Öbekteleme	d_{∞}	d_2	d_1
1	$\{\{4,5\},\{1,2,3,6\}\}$	0.1250	0.0932	0.0833
2	$\{\{2,5\},\{1,3,4,6\}\}$	0.1667	0.1178	0.1111
3	$\{\{2,6\},\{1,3,4,5\}\}$	0.1667	0.1361	0.1111
4	$\{\{1,3\},\{2,4,5,6\}\}$	0.1667	0.1306	0.1250
5	$\{\{5,6\},\{1,2,3,4\}\}$	0.2083	0.1129	0.0833
6	$\{\{4,6\},\{1,2,3,5\}\}$	0.2083	0.1341	0.1250
7	$\{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\}$	0.2708	0.1472	0.0972
8	$\{\{1,6\},\{2,3,4,5\}\}$	0.2708	0.1472	0.1250
9	$\{\{1,4\},\{2,3,5,6\}\}$	0.2917	0.1767	0.1528
10	$\{\{3,4\},\{1,2,5,6\}\}$	0.2917	0.1909	0.1806
11	$\{\{2,3\},\{1,4,5,6\}\}$	0.3333	0.1666	0.1111
12	$\{\{3,5\},\{1,2,4,6\}\}$	0.3333	0.1736	0.1389
13	$\{\{1,5\},\{2,3,4,6\}\}$	0.3958	0.2172	0.1319
14	$\{\{3,6\},\{1,2,4,5\}\}$	0.4583	0.2428	0.2083
15	$\{\{2,4\},\{1,3,5,6\}\}$	0.5000	0.2466	0.2083

Çizelge 4.3. $U=(V^T V)^{-1}V^T$, a göre farklı ölçülerin karşılaştırılması
m=3 ve her öbekte 2 durum

Sıra	Öbekleme	d_{∞}	d_2	d_1
1	$\{\{1,6\},\{2,3\},\{4,5\}\}$	0.1667	0.0899	0.0648
2	$\{\{1,3\},\{2,5\},\{4,6\}\}$	0.1667	0.1196	0.1019
3	$\{\{1,3\},\{2,6\},\{4,5\}\}$	0.1667	0.1196	0.1019
4	$\{\{1,2\},\{3,5\},\{4,6\}\}$	0.1667	0.1196	0.1019
5	$\{\{1,5\},\{3,4\},\{2,6\}\}$	0.2083	0.1226	0.1019
6	$\{\{1,2\},\{3,6\},\{4,5\}\}$	0.2500	0.1226	0.0926
7	$\{\{1,4\},\{2,3\},\{5,6\}\}$	0.2500	0.1362	0.0926
8	$\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$	0.2500	0.1510	0.1204
9	$\{\{1,4\},\{2,6\},\{3,5\}\}$	0.2500	0.1417	0.1296
10	$\{\{1,6\},\{3,4\},\{2,5\}\}$	0.2500	0.1510	0.1389
11	$\{\{1,3\},\{2,4\},\{5,6\}\}$	0.3333	0.1455	0.1019
12	$\{\{1,6\},\{2,4\},\{3,5\}\}$	0.3333	0.1701	0.1389
13	$\{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}$	0.3333	0.1667	0.1481
14	$\{\{1,5\},\{2,4\},\{3,6\}\}$	0.3333	0.1956	0.1574
15	$\{\{1,5\},\{2,3\},\{4,6\}\}$	0.3750	0.1608	0.1019

Çizelgelere bakıldığında ölçüler arasında aşağıdaki gibi bir ilişki tespit edilebilir.
 $d_{\infty}(P, \tilde{P}; V, U) \geq d_2(P, \tilde{P}; V, U) \geq d_1(P, \tilde{P}; V, U)$.

Çizelge 4.1' de (d_{∞}) ' a bakıldığında 2 ve 3. sıradaki öbeklemelerin eşit derecede iyi olduğunu, 6 ve 7. sıradaki öbeklemeler, 9 ve 10. sıradaki öbeklemelerinde eşit

derecede iyi olduğu gözükmemektedir. Eğer diğer ölçülere bakılırsa (d_1 ve d_2 'ye) 2. sıradaki öbekleme, 3. sıradaki öbeklemeden daha iyidir. Keza 6. sıradaki öbekleme, 7. sıradaki öbeklemeden, 9. sıradaki öbekleme 10. sıradaki öbeklemeden daha iyidir. Bu zincir $\zeta = \{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}\}$ öbeklemesine göre güçlü öbeklemelidir. $d_\infty = 0$, $d_1 = 0$, $d_2 = 0$ ölçüleri sıfır olduğundan $\zeta = \{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}\}$ öbeklemesi en iyi öbeklemedir. İkinci en iyi öbekleme ise $\zeta = \{\{1,3,4\}, \{2,5,6\}\}$ 'dir. Bu şekilde en iyi öbekleme elde edilmeye çalışılır.

5 . İLK GEÇİŞ ZAMANLARINA SÜREKLİ DAĞILIM YAKLAŞIMI VE BİR UYGULAMASI

Bu bölümünde Markov zincirinin simülasyonu yapılarak ilk geçiş zamanı dağılımı deneme sayılarına bağlı olarak ortaya konmuş ve bununla beraber öbekleme yöntemi kullanılarak da ilk geçiş zamanlarının dağılımı belirlenmiştir. Öbekleme yöntemi uygulanmadan önce yapılan çalışmada dağılımlar arasından Johnson SB dağılımı kendini ön plana çıkarırken öbekleme yöntemi uygulandıktan sonra yapılan çalışmada ilk geçiş zamanı dağılımlarının öbekleme biçimine göre değişiklik gösterdiği görüldü. Elde edilen sonuçları genelleştirmek amacıyla değişik P geçiş matrislerinin de simülasyonları yapıldı. Gerçek verilerle çalışmak içinde 02.01.2004-13.09.2005 tarihleri arasındaki BIST-100 beş dakikalık endeksine göre % 0.1’lik artış ve azalışlar dikkate alınarak 24874 veri için geçiş matrisi oluşturulmuş ve durumlara göre ilk geçiş zamanının dağılımları belirlenmiştir. Bu uygulamaların sonuçları EK-3’de verilmiştir. Bu uygulamalarda yine Johnson SB dağılımının ön plana çıktığı gözlenmiştir.

İlk geçiş zamanlarının dağılımlara uyumunu değerlendirmek için Easy Fit yazılımı kullanılmıştır. İlk geçiş zamanının dağılımı deneme sayılarına bağlı olarak Easy Fit yazılımı aracılığıyla 65 dağılım arasından Kolmogorov-Smirnov testinin sonucuna göre en iyi uyum sağlayan dağılımlar elde edilmiştir. Bu dağılımlar Çizelge 5.5-Çizelge 5.11’de verilmiştir. Çizelge 5.5 – Çizelge 5.11’de geçen P_{Kolm} : Kolmogorov Smirnov testi içi p değerini, T_{Kolm} : Kolmogorov-Smirnov test istatistiğinin değerini göstermektedir.

İlk geçiş zamanının dağılımının deneme sayılarına bağlı olarak yakınsamaları, Kullback-Leibler uzaklık ölçüsü ve Wasserstein metriği kullanılarak gösterildi. Bunun yanısıra Markov zincirinin durum uzayının genişlemesi çerçevesinde öbeklemenin tersi durumu olan Ters öbekleme yöntemi geliştirilip istenilen limit dağılıma ve limit dağılımın entropisine yaklaşan geçiş matrisleri uygulama bölümünde verildi.

5.1. İlk Geçiş Zamanı Dağılımının Belirlenmesine İlişkin Simülasyon Çalışmalarının Sonuçları

Bu kısımda yapılan tüm simülasyon çalışmalarında

$$P = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.22 & 0.18 & 0.20 \\ 0.16 & 0.50 & 0.20 & 0.14 \\ 0.28 & 0.32 & 0.30 & 0.10 \\ 0.33 & 0.17 & 0.35 & 0.15 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

geçiş matrisi kullanıldı. Bir Markov zincirinden simülasyon ile sırasıyla 10.000, 100.000, 1.000.000 gözlem üretilerek ilk geçiş zamanının dağılımı belirlenmeye çalışıldı. Bu dağılımları belirlemek için aşağıdaki öbeklenmiş geçiş matrisleri kullanılmıştır.

Çizelge 5.1. Öbekleme biçimlerine göre öbeklenmiş geçiş matrisleri

Sıra	Öbekleme	Öbeklenmiş geçiş matrisi
1	$\{1,4\}, \{2\}, \{3\}$	$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.540 & 0.195 & 0.265 \\ 0.300 & 0.500 & 0.200 \\ 0.380 & 0.320 & 0.300 \end{bmatrix}$
2	$\{2,3\}, \{1\}, \{4\}$	$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.660 & 0.22 & 0.120 \\ 0.400 & 0.400 & 0.200 \\ 0.520 & 0.330 & 0.150 \end{bmatrix}$
3	$\{3,4\}, \{1\}, \{2\}$	$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.400 & 0.220 & 0.380 \\ 0.160 & 0.500 & 0.340 \\ 0.305 & 0.245 & 0.450 \end{bmatrix}$
4	$\{1,2\}, \{3\}, \{4\}$	$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.640 & 0.190 & 0.170 \\ 0.600 & 0.300 & 0.100 \\ 0.500 & 0.350 & 0.150 \end{bmatrix}$

Çizelge 5.1.(Devam) Öbekleme biçimlerine göre öbeklenmiş geçiş matrisleri

5	$\{2,4\}, \{1\}, \{3\}$	$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.480 & 0.245 & 0.275 \\ 0.420 & 0.400 & 0.180 \\ 0.420 & 0.280 & 0.300 \end{bmatrix}$
6	$\{1,3\}, \{2\}, \{4\}$	$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.580 & 0.270 & 0.150 \\ 0.360 & 0.500 & 0.140 \\ 0.680 & 0.170 & 0.150 \end{bmatrix}$
7	$\{1,2,3\}, \{4\}$	$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.852 & 0.148 \\ 0.850 & 0.150 \end{bmatrix}$
8	$\{1,2,4\}, \{3\}$	$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.755 & 0.245 \\ 0.700 & 0.300 \end{bmatrix}$
9	$\{1,3,4\}, \{2\}$	$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.762 & 0.238 \\ 0.500 & 0.500 \end{bmatrix}$
10	$\{2,3,4\}, \{1\}$	$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.743 & 0.257 \\ 0.600 & 0.400 \end{bmatrix}$
11	$\{1,2\}, \{3,4\}$	$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.640 & 0.360 \\ 0.550 & 0.450 \end{bmatrix}$
12	$\{1,3\}, \{2,4\}$	$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.580 & 0.420 \\ 0.520 & 0.480 \end{bmatrix}$
13	$\{1,4\}, \{2,3\}$	$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0.540 & 0.460 \\ 0.340 & 0.660 \end{bmatrix}$

Orijinal zincir için öbekleme gözönüne alınmaksızın simülasyon çalışmalarından elde edilen sonuçlar aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir.

Çizelge 5.2. Durumlara göre ilk geçiş zamanı dağılımları

Sıra	Başlanan Durum	Girilen Durum	İlk Geçiş Zamanı Dağılımı
1	1	4	Beta
2	1	3	Johnson SB
3	1	2	Johnson SB
4	1	1	Johnson SB
5	2	4	Beta
6	2	3	Johnson SB
7	2	2	Johnson SB
8	2	1	Beta
9	3	4	Burr
10	3	3	Johnson SB
11	3	2	Johnson SB
12	3	1	Johnson SB
13	4	4	Johnson SB
14	4	3	Johnson SB
15	4	2	Johnson SB
16	4	1	Johnson SB

Çizelge 5.2’den ele alınan Markov zincirinin ilk geçiş zamanı dağılımının belirlenmesinde Johnson SB dağılımının daha sık görüldüğü, Beta dağılımının daha az görüldüğü anlaşılmaktadır. Bir özellik olarak ilk geçiş zamanının dağılımını Beta ve Burr dağılımının belirlediği durumlarla Johnson SB dağılımı sağlam kalmıştır. Kısaca Beta ve Burr dağılımının kullanıldığı durumlarda Johnson SB dağılımı da ilk geçiş zamanının dağılımını başarılı bir şekilde modellemiştir. Böylece ele alınan Markov zinciri için ilk geçiş zamanının dağılımı olarak Johnson SB dağılımı kullanılabilir.

Çizelge 5.3. Johnson, Beta, Burr dağılımlarının olasılık değerlerinin karşılaştırılması

Başlanan ve Girilen durumlar	Olasılık Dağılımı	1.000.000 Deneme			
		$P(X < 5)$	$P(X < 15)$	$P(10 < X < 15)$	$P(X > 20)$
1-4	Beta	0,52889	0,89742	0,11710	0,04665
	Johnson SB	0,50137	0,90655	0,11932	0,04244
2-4	Beta	0,50270	0,87421	0,12363	0,06205
	Johnson SB	0,50401	0,90560	0,11857	0,04317
3-4	Burr	0,50764	0,91263	0,11076	0,04319
	Johnson SB	0,50170	0,90652	0,11914	0,04247
2-1	Beta	0,70238	0,97317	0,06516	0,00682
	Johnson SB	0,70171	0,97690	0,05697	0,00666

Yukarıdaki çizelgede Beta, Burr ve Johnson dağılımlarının birbiri yerine kullanılabileceği görülmektedir. Çizelge 5.2’de ilk geçiş zamanlarının dağılımları farklı gibi görünse de olasılıklar yakın olduğundan bu dağılımlar birbirinin yerine kullanılabilir.

Öbekleme yapılarak ilk geçiş zamanı dağılımına ilişkin simülasyon sonuçları aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 5.4. Öbekleme yapılarak elde edilen ilk geçiş zamanı dağılımları

Sıra	Öbekleme	Başlanan	Girilen	İlk Geçiş Zamanı Dağılımı
1	$\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}$	$\{2\}$	$\{1, 4\}$	Weibull
2	$\{2, 3\}, \{1\}, \{4\}$	$\{1\}$	$\{2, 3\}$	Kumaraswamy
3	$\{3, 4\}, \{1\}, \{2\}$	$\{1\}$	$\{3, 4\}$	Johnson SB
4	$\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	Gamma
5	$\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}$	$\{1\}$	$\{2, 4\}$	Kumaraswamy
6	$\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}$	$\{2\}$	$\{1, 3\}$	Weibull
7	$\{1, 2, 3\}, \{4\}$	$\{4\}$	$\{1, 2, 3\}$	Burr(4P)
8	$\{1, 2, 4\}, \{3\}$	$\{3\}$	$\{1, 2, 4\}$	Power Function
9	$\{1, 3, 4\}, \{2\}$	$\{2\}$	$\{1, 3, 4\}$	Lognormal(3P)
10	$\{2, 3, 4\}, \{1\}$	$\{1\}$	$\{2, 3, 4\}$	Power Function
11	$\{1, 2\}, \{3, 4\}$	$\{3, 4\}$	$\{1, 2\}$	Gamma
12	$\{1, 2\}, \{3, 4\}$	$\{1, 2\}$	$\{3, 4\}$	Weibull
13	$\{1, 3\}, \{2, 4\}$	$\{2, 4\}$	$\{1, 3\}$	Lognormal(3P)
14	$\{1, 3\}, \{2, 4\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 4\}$	Kumaraswamy
15	$\{1, 4\}, \{2, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 4\}$	Weibull
16	$\{1, 4\}, \{2, 3\}$	$\{1, 4\}$	$\{2, 3\}$	Lognormal(3P)

Çizelge 5.4'den ilk geçiş zamanının dağılımının belirlenmesinde öbekleme biçiminin oldukça etkili olduğu görülmektedir. Diğer bir ifade ile öbekleme biçimine göre ilk geçiş zamanının dağılımı da değişmektedir.

Çizelge 5.5. Bir durumundan başlayan zincirin deneme sayılarına göre ilk geçiş zamanı dağılımları

Deneme Sayısı	Durumlar			
	1-4	1-3	1-2	1-1
10.000	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,95579$ $T_{Kolm} = 0,07919$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,81004$ $T_{Kolm} = 0,11529$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,70428$ $T_{Kolm} = 0,14335$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,70044$ $T_{Kolm} = 0,13274$
	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,93128$ $T_{Kolm} = 0,08740$	Beta $P_{Kolm} = 0,75385$ $T_{Kolm} = 0,12202$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,67949$ $T_{Kolm} = 0,14646$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,67336$ $T_{Kolm} = 0,13588$
	Burr $P_{Kolm} = 0,89707$ $T_{Kolm} = 0,08914$	Burr $P_{Kolm} = 0,70862$ $T_{Kolm} = 0,12718$	Weibull $P_{Kolm} = 0,67191$ $T_{Kolm} = 0,14741$	Weibull $P_{Kolm} = 0,62671$ $T_{Kolm} = 0,14127$
	Log-Pearson 3 $P_{Kolm} = 0,88150$ $T_{Kolm} = 0,09122$	Weibull $P_{Kolm} = 0,68261$ $T_{Kolm} = 0,13009$	Burr $P_{Kolm} = 0,61139$ $T_{Kolm} = 0,1550$	Burr $P_{Kolm} = 0,57567$ $T_{Kolm} = 0,14721$
100.000	Beta $P_{Kolm} = 0,9745$ $T_{Kolm} = 0,06579$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,77047$ $T_{Kolm} = 0,10786$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,66014$ $T_{Kolm} = 0,12826$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,56708$ $T_{Kolm} = 0,13211$
	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,81679$ $T_{Kolm} = 0,08740$	Burr $P_{Kolm} = 0,62255$ $T_{Kolm} = 0,12282$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,59398$ $T_{Kolm} = 0,1354$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,49894$ $T_{Kolm} = 0,13943$
	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,80988$ $T_{Kolm} = 0,08806$	Weibull $P_{Kolm} = 0,56402$ $T_{Kolm} = 0,12872$	Weibull $P_{Kolm} = 0,56871$ $T_{Kolm} = 0,13816$	Weibull $P_{Kolm} = 0,49205$ $T_{Kolm} = 0,14019$
	Weibull $P_{Kolm} = 0,78401$ $T_{Kolm} = 0,09045$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,55071$ $T_{Kolm} = 0,13008$	Burr $P_{Kolm} = 0,51475$ $T_{Kolm} = 0,14419$	Burr $P_{Kolm} = 0,41322$ $T_{Kolm} = 0,14931$
1.000.000	Beta $P_{Kolm} = 0,83080$ $T_{Kolm} = 0,07289$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,52599$ $T_{Kolm} = 0,1138$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,52226$ $T_{Kolm} = 0,1247$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,3777$ $T_{Kolm} = 0,13223$
	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,58524$ $T_{Kolm} = 0,09101$	Burr $P_{Kolm} = 0,44638$ $T_{Kolm} = 0,12118$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,37239$ $T_{Kolm} = 0,14065$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,32551$ $T_{Kolm} = 0,13825$
	Burr $P_{Kolm} = 0,57448$ $T_{Kolm} = 0,09178$	Weibull $P_{Kolm} = 0,39667$ $T_{Kolm} = 0,12615$	Weibull $P_{Kolm} = 0,37161$ $T_{Kolm} = 0,14074$	Weibull $P_{Kolm} = 0,29496$ $T_{Kolm} = 0,14208$
	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,54993$ $T_{Kolm} = 0,09358$	Chi-Squared $P_{Kolm} = 0,39049$ $T_{Kolm} = 0,12679$	Burr $P_{Kolm} = 0,33699$ $T_{Kolm} = 0,14495$	Burr $P_{Kolm} = 0,2554$ $T_{Kolm} = 0,14749$

Çizelge 5.6. İki durumundan başlayan zincirin deneme sayılarına göre ilk geçiş zamanı dağılımları

Deneme Sayısı	Durumlar			
	2-4	2-3	2-2	2-1
10.000	Burr $P_{Kolm} = 0,91299$ $T_{Kolm} = 0,08473$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,81004$ $T_{Kolm} = 0,11529$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,85694$ $T_{Kolm} = 0,11749$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,75517$ $T_{Kolm} = 0,12868$
	Gen.Gamma $P_{Kolm} = 0,88002$ $T_{Kolm} = 0,08919$	Beta $P_{Kolm} = 0,75385$ $T_{Kolm} = 0,12202$	Weibull $P_{Kolm} = 0,78203$ $T_{Kolm} = 0,12781$	Beta $P_{Kolm} = 0,75094$ $T_{Kolm} = 0,12920$
	Dagum $P_{Kolm} = 0,87546$ $T_{Kolm} = 0,08975$	Burr $P_{Kolm} = 0,70862$ $T_{Kolm} = 0,12718$	Burr $P_{Kolm} = 0,77762$ $T_{Kolm} = 0,12838$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,69336$ $T_{Kolm} = 0,13611$
	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,86416$ $T_{Kolm} = 0,09112$	Weibull $P_{Kolm} = 0,68261$ $T_{Kolm} = 0,13009$	Gen.Gamma $P_{Kolm} = 0,6903$ $T_{Kolm} = 0,13917$	Weibull $P_{Kolm} = 0,68664$ $T_{Kolm} = 0,13690$
100.000	Beta $P_{Kolm} = 0,86058$ $T_{Kolm} = 0,08066$	Beta $P_{Kolm} = 0,91297$ $T_{Kolm} = 0,09161$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,69837$ $T_{Kolm} = 0,12414$	Beta $P_{Kolm} = 0,80136$ $T_{Kolm} = 0,10453$
	Burr $P_{Kolm} = 0,74937$ $T_{Kolm} = 0,09089$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,76257$ $T_{Kolm} = 0,11021$	Weibull $P_{Kolm} = 0,5546$ $T_{Kolm} = 0,13972$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,5084$ $T_{Kolm} = 0,1345$
	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,73055$ $T_{Kolm} = 0,09248$	Burr $P_{Kolm} = 0,65675$ $T_{Kolm} = 0,12109$	Gen.Gamma $P_{Kolm} = 0,54276$ $T_{Kolm} = 0,14103$	Weibull $P_{Kolm} = 0,46672$ $T_{Kolm} = 0,13901$
	Weibull $P_{Kolm} = 0,72214$ $T_{Kolm} = 0,09318$	Weibull $P_{Kolm} = 0,6317$ $T_{Kolm} = 0,12363$	Burr $P_{Kolm} = 0,52582$ $T_{Kolm} = 0,14294$	Gen.Gamma $P_{Kolm} = 0,45378$ $T_{Kolm} = 0,14045$
1.000.000	Beta $P_{Kolm} = 0,91089$ $T_{Kolm} = 0,06729$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,59776$ $T_{Kolm} = 0,11094$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,50526$ $T_{Kolm} = 0,12488$	Beta $P_{Kolm} = 0,71591$ $T_{Kolm} = 0,1016$
	Burr $P_{Kolm} = 0,61358$ $T_{Kolm} = 0,09160$	Burr $P_{Kolm} = 0,48393$ $T_{Kolm} = 0,12138$	Gen.Gamma $P_{Kolm} = 0,38041$ $T_{Kolm} = 0,13805$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,40733$ $T_{Kolm} = 0,13046$
	Gen.Gamma $P_{Kolm} = 0,60805$ $T_{Kolm} = 0,09201$	Weibull $P_{Kolm} = 0,44863$ $T_{Kolm} = 0,12482$	Weibull $P_{Kolm} = 0,36408$ $T_{Kolm} = 0,13995$	Gen.Gamma $P_{Kolm} = 0,34993$ $T_{Kolm} = 0,13685$
	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,59321$ $T_{Kolm} = 0,09310$	Chi-Squared $P_{Kolm} = 0,43414$ $T_{Kolm} = 0,12628$	Burr $P_{Kolm} = 0,33321$ $T_{Kolm} = 0,14369$	Weibull $P_{Kolm} = 0,3145$ $T_{Kolm} = 0,14114$

Çizelge 5.7. Üç durumundan başlayan zincirin deneme sayılarına göre ilk geçiş zamanı dağılımları

Deneme Sayısı	Durumlar			
	3-4	3-3	3-2	3-1
10.000	Beta $P_{Kolm} = 0,89454$ $T_{Kolm} = 0,08838$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,90027$ $T_{Kolm} = 0,10637$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,77948$ $T_{Kolm} = 0,13078$	Beta $P_{Kolm} = 0,90270$ $T_{Kolm} = 0,10796$
	Gen.Gamma $P_{Kolm} = 0,87852$ $T_{Kolm} = 0,09047$	Burr $P_{Kolm} = 0,81219$ $T_{Kolm} = 0,11919$	Weibull $P_{Kolm} = 0,74819$ $T_{Kolm} = 0,13482$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,76972$ $T_{Kolm} = 0,12688$
	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,86777$ $T_{Kolm} = 0,0918$	Chi-Squared $P_{Kolm} = 0,80295$ $T_{Kolm} = 0,12037$	Burr $P_{Kolm} = 0,72339$ $T_{Kolm} = 0,13794$	Weibull $P_{Kolm} = 0,68805$ $T_{Kolm} = 0,13673$
	Weibull $P_{Kolm} = 0,82051$ $T_{Kolm} = 0,09719$	Beta $P_{Kolm} = 0,80092$ $T_{Kolm} = 0,12063$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,71697$ $T_{Kolm} = 0,13874$	Burr $P_{Kolm} = 0,66861$ $T_{Kolm} = 0,13903$
100.000	Beta $P_{Kolm} = 0,83204$ $T_{Kolm} = 0,08198$	Beta $P_{Kolm} = 0,90312$ $T_{Kolm} = 0,09314$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,66567$ $T_{Kolm} = 0,12193$	Beta $P_{Kolm} = 0,67758$ $T_{Kolm} = 0,11733$
	Burr $P_{Kolm} = 0,73486$ $T_{Kolm} = 0,09044$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,73711$ $T_{Kolm} = 0,11289$	Beta $P_{Kolm} = 0,64199$ $T_{Kolm} = 0,12437$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,57403$ $T_{Kolm} = 0,12770$
	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,72613$ $T_{Kolm} = 0,09116$	Burr $P_{Kolm} = 0,64515$ $T_{Kolm} = 0,12226$	Weibull $P_{Kolm} = 0,49154$ $T_{Kolm} = 0,14024$	Weibull (3P) $P_{Kolm} = 0,47918$ $T_{Kolm} = 0,13764$
	Gen.Gamma $P_{Kolm} = 0,70776$ $T_{Kolm} = 0,09266$	Weibull $P_{Kolm} = 0,61117$ $T_{Kolm} = 0,12571$	Gen.Gamma $P_{Kolm} = 0,47288$ $T_{Kolm} = 0,14233$	Gen.Gamma $P_{Kolm} = 0,46002$ $T_{Kolm} = 0,13975$
1.000.000	Burr $P_{Kolm} = 0,6178$ $T_{Kolm} = 0,09061$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,57963$ $T_{Kolm} = 0,11255$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,56821$ $T_{Kolm} = 0,12329$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,38844$ $T_{Kolm} = 0,13250$
	Gen.Gamma $P_{Kolm} = 0,6036$ $T_{Kolm} = 0,09165$	Burr $P_{Kolm} = 0,48126$ $T_{Kolm} = 0,12163$	Gen.Gamma $P_{Kolm} = 0,42603$ $T_{Kolm} = 0,13799$	Gen.Gamma $P_{Kolm} = 0,33724$ $T_{Kolm} = 0,13835$
	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,60185$ $T_{Kolm} = 0,09178$	Weibull $P_{Kolm} = 0,43374$ $T_{Kolm} = 0,12632$	Weibull $P_{Kolm} = 0,41791$ $T_{Kolm} = 0,13890$	Weibull $P_{Kolm} = 0,30923$ $T_{Kolm} = 0,14181$
	Log Pearson3 $P_{Kolm} = 0,57776$ $T_{Kolm} = 0,09358$	Chi-Squared $P_{Kolm} = 0,41793$ $T_{Kolm} = 0,12794$	Burr $P_{Kolm} = 0,38236$ $T_{Kolm} = 0,14301$	Burr $P_{Kolm} = 0,26824$ $T_{Kolm} = 0,14727$

Çizelge 5.8. Dört durumundan başlayan zincirin deneme sayılarına göre ilk geçiş zamanı dağılımları

Deneme Sayısı	Durumlar			
	4-4	4-3	4-2	4-1
10.000	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,92205$ $T_{Kolm} = 0,08769$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,9016$ $T_{Kolm} = 0,10815$	Beta $P_{Kolm} = 0,86738$ $T_{Kolm} = 0,11367$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,72121$ $T_{Kolm} = 0,13032$
	Burr $P_{Kolm} = 0,90918$ $T_{Kolm} = 0,08972$	Burr $P_{Kolm} = 0,80981$ $T_{Kolm} = 0,12176$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,7788$ $T_{Kolm} = 0,12575$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,64977$ $T_{Kolm} = 0,13860$
	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,88231$ $T_{Kolm} = 0,09352$	Chi-Squared $P_{Kolm} = 0,79623$ $T_{Kolm} = 0,12353$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,7204$ $T_{Kolm} = 0,13289$	Weibull $P_{Kolm} = 0,61692$ $T_{Kolm} = 0,1424$
	Pearson 6 $P_{Kolm} = 0,85575$ $T_{Kolm} = 0,0969$	Beta $P_{Kolm} = 0,79094$ $T_{Kolm} = 0,12421$	Weibull $P_{Kolm} = 0,69961$ $T_{Kolm} = 0,13537$	Burr $P_{Kolm} = 0,55047$ $T_{Kolm} = 0,15019$
100.000	Beta $P_{Kolm} = 0,87943$ $T_{Kolm} = 0,07865$	Beta $P_{Kolm} = 0,79503$ $T_{Kolm} = 0,1038$	Beta $P_{Kolm} = 0,71757$ $T_{Kolm} = 0,11491$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,65386$ $T_{Kolm} = 0,12692$
	Burr $P_{Kolm} = 0,76756$ $T_{Kolm} = 0,08933$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,66202$ $T_{Kolm} = 0,11728$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,63142$ $T_{Kolm} = 0,12365$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,55031$ $T_{Kolm} = 0,13799$
	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,76756$ $T_{Kolm} = 0,08933$	Burr $P_{Kolm} = 0,61167$ $T_{Kolm} = 0,12223$	Weibull $P_{Kolm} = 0,51528$ $T_{Kolm} = 0,13566$	Weibull $P_{Kolm} = 0,52002$ $T_{Kolm} = 0,14133$
	Pearson 6 $P_{Kolm} = 0,72294$ $T_{Kolm} = 0,09311$	Chi-Squared $P_{Kolm} = 0,58252$ $T_{Kolm} = 0,12512$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,48446$ $T_{Kolm} = 0,13901$	Burr $P_{Kolm} = 0,46931$ $T_{Kolm} = 0,14712$
1.000.000	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,63702$ $T_{Kolm} = 0,08921$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,59094$ $T_{Kolm} = 0,11155$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,44525$ $T_{Kolm} = 0,12796$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,31319$ $T_{Kolm} = 0,13544$
	Burr $P_{Kolm} = 0,61161$ $T_{Kolm} = 0,09106$	Burr $P_{Kolm} = 0,48884$ $T_{Kolm} = 0,12091$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,34647$ $T_{Kolm} = 0,1388$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,28248$ $T_{Kolm} = 0,13927$
	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,59817$ $T_{Kolm} = 0,09205$	Weibull $P_{Kolm} = 0,44769$ $T_{Kolm} = 0,12492$	Weibull $P_{Kolm} = 0,3354$ $T_{Kolm} = 0,14013$	Weibull $P_{Kolm} = 0,27029$ $T_{Kolm} = 0,14088$
	Weibull $P_{Kolm} = 0,57068$ $T_{Kolm} = 0,09408$	Chi-Squared $P_{Kolm} = 0,44677$ $T_{Kolm} = 0,12501$	Burr $P_{Kolm} = 0,29754$ $T_{Kolm} = 0,14492$	Burr $P_{Kolm} = 0,22967$ $T_{Kolm} = 0,14664$

Öbekleme yapılarak deneme sayılarına göre ilk geçiş zamanı dağılımının simülasyon sonuçları Çizelge 5.9, Çizelge 5.10, Çizelge 5.11’de verilmiştir.

Çizelge 5.9. Bir öbeikleme yapıldığında ilk geçiş zamanı dağılımları

Deneme Sayısı	Durumlar		
	$\{1,2\} , \{3\}, \{4\}$	$\{1,3\} , \{2\}, \{4\}$	$\{1,4\} , \{2\}, \{3\}$
	$\{3\} \rightarrow \{1,2\}$	$\{2\} \rightarrow \{1,3\}$	$\{2\} \rightarrow \{1,4\}$
10.000	Power Function $P_{Kolm} = 0,54334$ $T_{Kolm} = 0,23851$	Weibull $P_{Kolm} = 0,40839$ $T_{Kolm} = 0,24371$	Weibull $P_{Kolm} = 0,54654$ $T_{Kolm} = 0,17977$
	Gamma $P_{Kolm} = 0,30098$ $T_{Kolm} = 0,29153$	Gumbel Max $P_{Kolm} = 0,3947$ $T_{Kolm} = 0,2465$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,50881$ $T_{Kolm} = 0,18524$
	Inv.Gaussian $P_{Kolm} = 0,2821$ $T_{Kolm} = 0,29671$	Log-Logistic $P_{Kolm} = 0,38971$ $T_{Kolm} = 0,24753$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,49261$ $T_{Kolm} = 0,18764$
	Gumbel Max $P_{Kolm} = 0,2785$ $T_{Kolm} = 0,29772$	Normal $P_{Kolm} = 0,36638$ $T_{Kolm} = 0,25246$	Gamma $P_{Kolm} = 0,37794$ $T_{Kolm} = 0,20593$
100.000	PowerFunction $P_{Kolm} = 0,30358$ $T_{Kolm} = 0,26676$	Weibull $P_{Kolm} = 0,23829$ $T_{Kolm} = 0,24748$	Weibull $P_{Kolm} = 0,33759$ $T_{Kolm} = 0,18196$
	Gamma $P_{Kolm} = 0,24423$ $T_{Kolm} = 0,28226$	Gumbel Max $P_{Kolm} = 0,23495$ $T_{Kolm} = 0,24832$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,32006$ $T_{Kolm} = 0,18478$
	Gumbel Max $P_{Kolm} = 0,20485$ $T_{Kolm} = 0,29415$	Normal $P_{Kolm} = 0,21292$ $T_{Kolm} = 0,25413$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,28224$ $T_{Kolm} = 0,19125$
	Inv.Gaussian $P_{Kolm} = 0,19922$ $T_{Kolm} = 0,29599$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,20842$ $T_{Kolm} = 0,25537$	Gamma $P_{Kolm} = 0,20057$ $T_{Kolm} = 0,20773$
1.000.000	Gamma $P_{Kolm} = 0,15941$ $T_{Kolm} = 0,27893$	Weibull $P_{Kolm} = 0,16393$ $T_{Kolm} = 0,24154$	Weibull $P_{Kolm} = 0,24153$ $T_{Kolm} = 0,18213$
	Gumbel Max $P_{Kolm} = 0,13041$ $T_{Kolm} = 0,28999$	Kumaraswamy $P_{Kolm} = 0,15476$ $T_{Kolm} = 0,24436$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,24032$ $T_{Kolm} = 0,18235$
	Inv.Gaussian $P_{Kolm} = 0,123$ $T_{Kolm} = 0,29313$	Gumbel Max $P_{Kolm} = 0,14894$ $T_{Kolm} = 0,24622$	Gen. Gamma $P_{Kolm} = 0,20485$ $T_{Kolm} = 0,18927$
	Weibull $P_{Kolm} = 0,12121$ $T_{Kolm} = 0,29391$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,1293$ $T_{Kolm} = 0,25295$	Gamma $P_{Kolm} = 0,1316$ $T_{Kolm} = 0,2072$

Çizelge 5.9.(Devam) Bir öbekleme yapıldığında ilk geçiş zamanı dağılımları

Deneme Sayısı	Durumlar		
	$\{2,3\}$, $\{1\}$, $\{4\}$	$\{2,4\}$, $\{1\}$, $\{3\}$	$\{3,4\}$, $\{1\}$, $\{2\}$
	$\{1\} \rightarrow \{2,3\}$	$\{1\} \rightarrow \{2,4\}$	$\{1\} \rightarrow \{3,4\}$
10.000	Gen. Gamma (4P) $P_{Kolm} = 0,49362$ $T_{Kolm} = 0,21141$	Weibull $P_{Kolm} = 0,34877$ $T_{Kolm} = 0,21697$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,83051$ $T_{Kolm} = 0,11269$
	Weibull $P_{Kolm} = 0,38837$ $T_{Kolm} = 0,23027$	Inv. Gaussian $P_{Kolm} = 0,28502$ $T_{Kolm} = 0,22971$	Chi-Squared $P_{Kolm} = 0,75903$ $T_{Kolm} = 0,12142$
	Log-Logistic $P_{Kolm} = 0,34379$ $T_{Kolm} = 0,23914$	Lognormal (3P) $P_{Kolm} = 0,26371$ $T_{Kolm} = 0,23441$	Beta $P_{Kolm} = 0,75281$ $T_{Kolm} = 0,12214$
	Inv. Gaussian $P_{Kolm} = 0,33766$ $T_{Kolm} = 0,24041$	Log-Logistic $P_{Kolm} = 0,25754$ $T_{Kolm} = 0,23582$	Burr $P_{Kolm} = 0,73683$ $T_{Kolm} = 0,12398$
100.000	Kumaraswamy $P_{Kolm} = 0,44909$ $T_{Kolm} = 0,19427$	Kumaraswamy $P_{Kolm} = 0,61987$ $T_{Kolm} = 0,16515$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,70173$ $T_{Kolm} = 0,11187$
	Weibull $P_{Kolm} = 0,25366$ $T_{Kolm} = 0,2303$	Weibull (3P) $P_{Kolm} = 0,49979$ $T_{Kolm} = 0,18179$	Beta $P_{Kolm} = 0,65859$ $T_{Kolm} = 0,11607$
	Gumbel Max $P_{Kolm} = 0,23107$ $T_{Kolm} = 0,2356$	Weibull $P_{Kolm} = 0,31171$ $T_{Kolm} = 0,2125$	Burr $P_{Kolm} = 0,58146$ $T_{Kolm} = 0,12358$
	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,20646$ $T_{Kolm} = 0,24184$	Gumbel Max $P_{Kolm} = 0,23205$ $T_{Kolm} = 0,22932$	Weibull $P_{Kolm} = 0,55682$ $T_{Kolm} = 0,12602$
1.000.000	Kumaraswamy $P_{Kolm} = 0,34426$ $T_{Kolm} = 0,19242$	Kumaraswamy $P_{Kolm} = 0,40811$ $T_{Kolm} = 0,17852$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,55271$ $T_{Kolm} = 0,11258$
	Weibull $P_{Kolm} = 0,18086$ $T_{Kolm} = 0,22601$	Weibull $P_{Kolm} = 0,22776$ $T_{Kolm} = 0,21007$	Burr $P_{Kolm} = 0,44773$ $T_{Kolm} = 0,1223$
	Gumbel Max $P_{Kolm} = 0,16043$ $T_{Kolm} = 0,23169$	Gumbel Max $P_{Kolm} = 0,16601$ $T_{Kolm} = 0,2252$	Weibull $P_{Kolm} = 0,41223$ $T_{Kolm} = 0,12584$
	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,13534$ $T_{Kolm} = 0,23952$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,15633$ $T_{Kolm} = 0,22795$	Chi-Squared $P_{Kolm} = 0,3907$ $T_{Kolm} = 0,12807$

Çizelge 5.10. İki öbeikleme yapıldığında ilk geçiş zamanı dağılımları

Deneme Sayısı	Durumlar					
	$\{1,2\}, \{3,4\}$	$\{1,2\}, \{3,4\}$	$\{1,3\}, \{2,4\}$	$\{1,3\}, \{2,4\}$	$\{1,4\}, \{2,3\}$	$\{1,4\}, \{2,3\}$
	$\{3,4\} \rightarrow \{1,2\}$	$\{1,2\} \rightarrow \{3,4\}$	$\{2,4\} \rightarrow \{1,3\}$	$\{1,3\} \rightarrow \{2,4\}$	$\{2,3\} \rightarrow \{1,4\}$	$\{1,4\} \rightarrow \{2,3\}$
10.000	Inv. Gaussian $P_{Ka,b} = 0,29937$ $T_{Ka,b} = 0,29197$	Weibull $P_{Ka,b} = 0,39011$ $T_{Ka,b} = 0,19379$	Burr (4P) $P_{Ka,b} = 0,37689$ $T_{Ka,b} = 0,26073$	Weibull $P_{Ka,b} = 0,43459$ $T_{Ka,b} = 0,22169$	Gen. Gamma $P_{Ka,b} = 0,52937$ $T_{Ka,b} = 0,17758$	Weibull $P_{Ka,b} = 0,37612$ $T_{Ka,b} = 0,24102$
	Gumbel Max $P_{Ka,b} = 0,29683$ $T_{Ka,b} = 0,29265$	Johnson SB $P_{Ka,b} = 0,34737$ $T_{Ka,b} = 0,20092$	Gumbel Max $P_{Ka,b} = 0,33406$ $T_{Ka,b} = 0,27054$	Johnson SB $P_{Ka,b} = 0,3855$ $T_{Ka,b} = 0,23082$	Weibull $P_{Ka,b} = 0,51017$ $T_{Ka,b} = 0,1803$	Gumbel Max $P_{Ka,b} = 0,35648$ $T_{Ka,b} = 0,24507$
	Gamma $P_{Ka,b} = 0,28274$ $T_{Ka,b} = 0,29653$	Gen. Gamma $P_{Ka,b} = 0,29615$ $T_{Ka,b} = 0,21026$	Inv. Gaussian $P_{Ka,b} = 0,30841$ $T_{Ka,b} = 0,27682$	LogLogistic $P_{Ka,b} = 0,35693$ $T_{Ka,b} = 0,23645$	Johnson SB $P_{Ka,b} = 0,46552$ $T_{Ka,b} = 0,18682$	Normal $P_{Ka,b} = 0,33193$ $T_{Ka,b} = 0,25034$
	Weibull $P_{Ka,b} = 0,2785$ $T_{Ka,b} = 0,29772$	Gumbel Max $P_{Ka,b} = 0,24064$ $T_{Ka,b} = 0,22177$	Weibull $P_{Ka,b} = 0,30226$ $T_{Ka,b} = 0,27837$	Gumbel Max $P_{Ka,b} = 0,35505$ $T_{Ka,b} = 0,23683$	Inv. Gaussian $P_{Ka,b} = 0,40292$ $T_{Ka,b} = 0,19653$	Johnson SB $P_{Ka,b} = 0,31939$ $T_{Ka,b} = 0,25313$
100.000	Power Function $P_{Ka,b} = 0,32983$ $T_{Ka,b} = 0,26057$	Weibull $P_{Ka,b} = 0,36492$ $T_{Ka,b} = 0,18905$	Lognormal (3P) $P_{Ka,b} = 0,64589$ $T_{Ka,b} = 0,19369$	Weibull $P_{Ka,b} = 0,30807$ $T_{Ka,b} = 0,2132$	Weibull $P_{Ka,b} = 0,36356$ $T_{Ka,b} = 0,17795$	Lognormal(3P) $P_{Ka,b} = 0,35807$ $T_{Ka,b} = 0,21524$
	Gamma $P_{Ka,b} = 0,22913$ $T_{Ka,b} = 0,28664$	Johnson SB $P_{Ka,b} = 0,32695$ $T_{Ka,b} = 0,19535$	Gen.Gamma(4P) $P_{Ka,b} = 0,29962$ $T_{Ka,b} = 0,25768$	Gumbel Max $P_{Ka,b} = 0,23911$ $T_{Ka,b} = 0,22767$	Johnson SB $P_{Ka,b} = 0,33961$ $T_{Ka,b} = 0,18164$	Weibull $P_{Ka,b} = 0,25928$ $T_{Ka,b} = 0,23542$
	Gumbel Max $P_{Ka,b} = 0,22345$ $T_{Ka,b} = 0,28834$	Gen.Gamma $P_{Ka,b} = 0,29781$ $T_{Ka,b} = 0,20052$	Gumbel Max $P_{Ka,b} = 0,26352$ $T_{Ka,b} = 0,26657$	Johnson SB $P_{Ka,b} = 0,23248$ $T_{Ka,b} = 0,22922$	Gen. Gamma $P_{Ka,b} = 0,30017$ $T_{Ka,b} = 0,18811$	Gumbel Max $P_{Ka,b} = 0,2509$ $T_{Ka,b} = 0,23736$
	Inv.Gaussian $P_{Ka,b} = 0,21455$ $T_{Ka,b} = 0,29107$	Gumbel Max $P_{Ka,b} = 0,23384$ $T_{Ka,b} = 0,21328$	Weibull $P_{Ka,b} = 0,22914$ $T_{Ka,b} = 0,27589$	Inv.Gaussian $P_{Ka,b} = 0,20161$ $T_{Ka,b} = 0,23689$	Gamma $P_{Ka,b} = 0,2233$ $T_{Ka,b} = 0,20271$	Gamma $P_{Ka,b} = 0,20088$ $T_{Ka,b} = 0,25011$
1.000.000	Gamma $P_{Ka,b} = 0,10789$ $T_{Ka,b} = 0,28256$	Weibull $P_{Ka,b} = 0,27889$ $T_{Ka,b} = 0,18484$	Lognormal (3P) $P_{Ka,b} = 0,40568$ $T_{Ka,b} = 0,20684$	Kumaraswamy $P_{Ka,b} = 0,45947$ $T_{Ka,b} = 0,17892$	Weibull $P_{Ka,b} = 0,30641$ $T_{Ka,b} = 0,17707$	Lognormal(3P) $P_{Ka,b} = 0,30503$ $T_{Ka,b} = 0,21378$
	Gumbel Max $P_{Ka,b} = 0,10361$ $T_{Ka,b} = 0,28454$	Johnson SB $P_{Ka,b} = 0,23056$ $T_{Ka,b} = 0,19383$	Gen.Gamma(4P) $P_{Ka,b} = 0,16814$ $T_{Ka,b} = 0,25983$	Weibull $P_{Ka,b} = 0,26628$ $T_{Ka,b} = 0,21122$	Johnson SB $P_{Ka,b} = 0,27899$ $T_{Ka,b} = 0,1816$	Weibull $P_{Ka,b} = 0,20956$ $T_{Ka,b} = 0,23483$
	Inv.Gaussian $P_{Ka,b} = 0,09501$ $T_{Ka,b} = 0,28873$	Gen. Gamma $P_{Ka,b} = 0,21172$ $T_{Ka,b} = 0,19771$	Gumbel Max $P_{Ka,b} = 0,15502$ $T_{Ka,b} = 0,26414$	Gumbel Max $P_{Ka,b} = 0,20396$ $T_{Ka,b} = 0,22515$	Gen.Gamma $P_{Ka,b} = 0,26951$ $T_{Ka,b} = 0,18323$	Gumbel Max $P_{Ka,b} = 0,20086$ $T_{Ka,b} = 0,23708$
	Weibull $P_{Ka,b} = 0,09044$ $T_{Ka,b} = 0,29109$	Kumaraswamy $P_{Ka,b} = 0,20159$ $T_{Ka,b} = 0,19991$	Gamma $P_{Ka,b} = 0,13661$ $T_{Ka,b} = 0,27072$	Johnson SB $P_{Ka,b} = 0,18966$ $T_{Ka,b} = 0,22879$	Gamma $P_{Ka,b} = 0,18253$ $T_{Ka,b} = 0,20072$	Gamma $P_{Ka,b} = 0,15677$ $T_{Ka,b} = 0,24983$

Çizelge 5.11. Bir öbekte üç durumun olması halinde ilk geçiş zamanı dağılımları

Deneme Sayısı	Durumlar			
	$\{1, 2, 3\} , \{4\}$	$\{1, 2, 4\} , \{3\}$	$\{1, 3, 4\} , \{2\}$	$\{2, 3, 4\} , \{1\}$
	$\{4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$	$\{3\} \rightarrow \{1, 2, 4\}$	$\{2\} \rightarrow \{1, 3, 4\}$	$\{1\} \rightarrow \{2, 3, 4\}$
10.000	Power Function $P_{Kolm} = 1,00000$ $T_{Kolm} = 0,05606$	Lognormal (3P) $P_{Kolm} = 0,9988$ $T_{Kolm} = 0,12805$	Lognormal (3P) $P_{Kolm} = 0,61361$ $T_{Kolm} = 0,2154$	Power Function $P_{Kolm} = 0,81148$ $T_{Kolm} = 0,19722$
	Lognormal (3P) $P_{Kolm} = 1,00000$ $T_{Kolm} = 0,06867$	Power Function $P_{Kolm} = 0,99443$ $T_{Kolm} = 0,1419$	Gumbel Max $P_{Kolm} = 0,39221$ $T_{Kolm} = 0,25739$	Gamma $P_{Kolm} = 0,2883$ $T_{Kolm} = 0,30998$
	Beta $P_{Kolm} = 1,00000$ $T_{Kolm} = 0,07311$	Beta $P_{Kolm} = 0,70385$ $T_{Kolm} = 0,24672$	Weibull $P_{Kolm} = 0,34437$ $T_{Kolm} = 0,26811$	Dagum $P_{Kolm} = 0,26375$ $T_{Kolm} = 0,31731$
	Pearson 6 (4P) $P_{Kolm} = 1,00000$ $T_{Kolm} = 0,11489$	Dagum $P_{Kolm} = 0,25492$ $T_{Kolm} = 0,36045$	Normal $P_{Kolm} = 0,34045$ $T_{Kolm} = 0,26903$	Inv. Gaussian $P_{Kolm} = 0,25958$ $T_{Kolm} = 0,31861$
100.000	Power Function $P_{Kolm} = 1,00000$ $T_{Kolm} = 0,07904$	Lognormal (3P) $P_{Kolm} = 0,98988$ $T_{Kolm} = 0,13361$	Gumbel Max $P_{Kolm} = 0,26999$ $T_{Kolm} = 0,25569$	Power Function $P_{Kolm} = 0,50163$ $T_{Kolm} = 0,23559$
	Beta $P_{Kolm} = 0,99995$ $T_{Kolm} = 0,11525$	Kumaraswamy $P_{Kolm} = 0,92537$ $T_{Kolm} = 0,16835$	Weibull $P_{Kolm} = 0,2423$ $T_{Kolm} = 0,26274$	Burr (4P) $P_{Kolm} = 0,45577$ $T_{Kolm} = 0,24437$
	Lognormal (3P) $P_{Kolm} = 0,99943$ $T_{Kolm} = 0,13141$	Power Function $P_{Kolm} = 0,9195$ $T_{Kolm} = 0,17023$	Normal $P_{Kolm} = 0,22864$ $T_{Kolm} = 0,26644$	Gamma $P_{Kolm} = 0,20692$ $T_{Kolm} = 0,30592$
	Pearson 6 (4P) $P_{Kolm} = 0,99902$ $T_{Kolm} = 0,13600$	Beta $P_{Kolm} = 0,50745$ $T_{Kolm} = 0,25802$	Gamma $P_{Kolm} = 0,21483$ $T_{Kolm} = 0,27035$	Inv. Gaussian $P_{Kolm} = 0,17639$ $T_{Kolm} = 0,31673$
1.000.000	Burr(4P) $P_{Kolm} = 0,99599$ $T_{Kolm} = 0,13866$	Power Function $P_{Kolm} = 0,72013$ $T_{Kolm} = 0,19657$	Lognormal(3P) $P_{Kolm} = 0,28311$ $T_{Kolm} = 0,22389$	Power Function $P_{Kolm} = 0,27173$ $T_{Kolm} = 0,26447$
	Lognormal (3P) $P_{Kolm} = 0,99011$ $T_{Kolm} = 0,14904$	Johnson SB $P_{Kolm} = 0,10126$ $T_{Kolm} = 0,35167$	Gumbel Max $P_{Kolm} = 0,17471$ $T_{Kolm} = 0,25078$	Gamma $P_{Kolm} = 0,15734$ $T_{Kolm} = 0,29948$
	Rayleigh $P_{Kolm} = 0,10314$ $T_{Kolm} = 0,43379$	Dagum $P_{Kolm} = 0,09569$ $T_{Kolm} = 0,35503$	Normal $P_{Kolm} = 0,14749$ $T_{Kolm} = 0,25953$	Inv. Gaussian $P_{Kolm} = 0,12796$ $T_{Kolm} = 0,31163$
	Inv. Gaussian $P_{Kolm} = 0,08806$ $T_{Kolm} = 0,44526$	Inv. Gaussian $P_{Kolm} = 0,08522$ $T_{Kolm} = 0,36179$	Weibull $P_{Kolm} = 0,1436$ $T_{Kolm} = 0,26088$	Gumbel Max $P_{Kolm} = 0,1169$ $T_{Kolm} = 0,31679$

Ele alınan Markov zincirine öbekleme yapıldığında ilk geçiş zamanı dağılımlarına ait olasılıkların belli bir değere göre nasıl değiştiğini anlamak için Çizelge 5.12 , Çizelge 5.13, Çizelge 5.14 hazırlanmıştır. Bu çizelgelerden ilk geçiş zamanı olasılıklarının çoğunlukla birbirine yakın oldukları anlaşılmıştır. Bu çizelgeler Markov zincirine öbekleme yapıldığında dağılımların birbiri yerine kullanılması hakkında fikir vermektedir.

Çizelge 5.12. Bir öbekte iki durum olması halinde ilk geçiş olasılıkların karşılaştırılması

Yapılan Öbekleme	Olasılık Dağılımı	1.000.000 Deneme			
		$P(X < 2)$	$P(X < 5)$	$P(2 < X < 4)$	$P(X > 6)$
{1,2} , {3}, {4}	Gamma	0,65473	0,98287	0,29513	0,00561
	Gumbel Max	0,64386	0,98440	0,30952	0,00516
	Inv.Gaussian	0,68759	0,97854	0,26123	0,00920
	Weibull	0,62786	0,99173	0,33391	0,00141
{1,3} , {2}, {4}	Weibull	0,52359	0,94481	0,35133	0,02239
	Kumaraswamy	0,71828	0,86585	0,11738	0,11134
	Gumbel Max	0,52278	0,93774	0,34753	0,02931
	Johnson SB	0,59734	0,93283	0,28438	0,03872
{1,4} , {2}, {3}	Weibull	0,40067	0,82817	0,32777	0,10518
	Johnson SB	0,44183	0,84178	0,32000	0,10634
	Gen.Gamma	0,38513	0,82809	0,34250	0,10598
	Gamma	0,43436	0,82707	0,30466	0,11345
{2,3} , {1}, {4}	Kumaraswamy	0,55155	0,75287	0,15691	0,21221
	Weibull	0,50173	0,93760	0,36040	0,02593
	Gumbel Max	0,50256	0,93084	0,35616	0,03316
	Johnson SB	0,56705	0,92801	0,30506	0,04115
{2,4} , {1}, {3}	Kumaraswamy	0,56004	0,75565	0,15262	0,21059
	Weibull	0,48174	0,92179	0,35818	0,03554
	Gumbel Max	0,47909	0,91530	0,35677	0,04275
	Johnson SB	0,54189	0,91585	0,31323	0,04967
{3,4} , {1}, {2}	Johnson SB	0,28438	0,67361	0,28923	0,25029
	Burr	0,27002	0,69897	0,32304	0,22546
	Weibull	0,27545	0,64035	0,26242	0,27615
	Chi-Squared	0,26424	0,71270	0,32975	0,19915

Çizelge 5.13. Her öbekte iki durum olması halinde ilk geçiş olasılıklarının karşılaştırılması

Yapılan Öbekleme	Olasılık Dağılımı	1.000.000 Deneme			
		$P(X < 2)$	$P(X < 5)$	$P(2 < X < 4)$	$P(X > 6)$
{1,2} , {3,4} ilk öbek	Gamma	0,64329	0,97788	0,29719	0,00793
	Gumbel Max	0,62844	0,98025	0,31620	0,00696
	Inv.Gaussian	0,67703	0,97387	0,26412	0,01187
	Weibull	0,61287	0,98720	0,33767	0,00273
{1,2} , {3,4} ikinci öbek	Weibull	0,41849	0,86036	0,34412	0,07851
	Johnson SB	0,46960	0,86979	0,32531	0,08376
	Gen.Gamma	0,41120	0,86421	0,35744	0,07743
	Kumaraswamy	0,55998	0,74792	0,14673	0,21972
{1,3} , {2,4} ilk öbek	Lognormal(3P)	0,72558	0,78695	0,04934	0,20397
	Gen.Gamma 4P	0,77857	0,93175	0,12811	0,05181
	Gumbel Max	0,59291	0,97126	0,33362	0,01108
	Gamma	0,61299	0,96780	0,30913	0,01291
{1,3} , {2,4} ikinci öbek	Kumaraswamy	0,56004	0,75565	0,15262	0,21059
	Weibull	0,48305	0,92194	0,35731	0,03552
	Gumbel Max	0,48004	0,91620	0,35707	0,04216
	Johnson SB	0,54671	0,91553	0,30874	0,05005
{1,4} , {2,3} ilk öbek	Weibull	0,39857	0,83573	0,33603	0,09784
	Johnson SB	0,44158	0,84893	0,32707	0,09973
	Gen. Gamma	0,39110	0,83973	0,34906	0,09639
	Gamma	0,43332	0,83536	0,31314	0,10565
{1,4} , {2,3} ikinci öbek	Lognormal(3P)	0,66752	0,75068	0,06686	0,23705
	Weibull	0,52261	0,95006	0,35872	0,01908
	Gumbel Max	0,52533	0,94404	0,35386	0,02542
	Gamma	0,55534	0,93915	0,32183	0,02945

Çizelge 5.14. Bir öbekte üç durum olması halinde ilk geçiş olasılıklarının karşılaştırılması

Yapılan Öbikleme	Olasılık Dağılımı	1.000.000 Deneme			
		$P(X < 1,5)$	$P(X < 3)$	$P(1,01 < X < 1,05)$	$P(X > 2)$
{1,2,3} , {4}	Burr (4P)	0,97815	0,99511	0,30604	0,01043
	Lognormal (3P)	0,99988	0,99998	0,00382	5,5683E-5
	Rayleigh	0,72190	0,99402	0,02563	0,10278
	Inv. Gaussian	0,79747	0,99694	0,04045	0,05433
{1,2,4} , {3}	Power Function	0,87092	0,92314	0,05169	0,10335
	Johnson SB	0,69592	0,94824	0,04120	0,15974
	Dagum	0,87460	0,99597	0,07141	0,03086
	Inv. Gaussian	0,63727	0,95367	0,02777	0,18543
{1,3,4} , {2}	Lognormal (3P)	0,64626	0,71783	0,09269	0,31710
	Gumbel Max	0,41205	0,79702	0,01269	0,43044
	Normal	0,36084	0,76006	0,00892	0,50079
	Weibull	0,40440	0,79192	0,01328	0,44005
{2,3,4} , {1}	Power Function	0,83260	0,89475	0,05923	0,13689
	Gamma	0,51912	0,89043	0,01846	0,30712
	Inv. Gaussian	0,54715	0,89847	0,02317	0,27625
	Gumbel Max	0,50173	0,89456	0,01750	0,31314

5.2. Kullback Leibler Uzaklığı ve Wasserstein Metriği ile ilgili Simülasyon Çalışmalarının Sonuçları

1 durumundan başlayıp, 4 durumuna girişler için ilk geçiş zamanı dağılımının 100.000, 200.000, 300.000,..., 1.000.000 denemeleri için Kullback-Leibler uzaklığı ve Wasserstein metriği cinsinden hesaplanmıştır.

Çizelge 5.15. İlk geçiş zamanı dağılımının Kullback Uzaklığı ve Wasserstein metriği

Denemeler	Kullback Leibler	Wasserstein Metriği
100.000	20,00121	0,05526
200.000	14,00506	0,00237
300.000	13,00032	0,00706
400.000	10,00021	0,00197
500.000	9,000154	0,00164
600.000	5,000097	0,00067
700.000	3,000056	0,00005
800.000	3,000037	0,00021
900.000	1,000015	0,00004
1.000.000	0,000000	0,00000

Kullback ölçüsüne bakıldığında 600.000 deneme asimptotik dağılıma (1.000.000 deneme) yakınsamanın % 75'ini gerçekleştiriyor. Asimptotik dağılıma yakınsama bakımından 700.000 deneme ile 800.000 deneme arasında önemli bir fark yoktur.

Wasserstein metriği dikkate alınırsa 200.000 denemeye gelindiğinde asimptotik dağılıma yakınsamanın %96 sı gerçekleşiyor. Kullback uzaklık ölçüsü ile karşılaştırıldığında Wasserstein metriğinin daha hızlı bir yaklaşım gösterdiği söylenebilir. Bununla birlikte Wasserstein metriği, ilk geçiş zamanının yakınsamasında düzensizlik söz konusu iken Kullback uzaklık ölçüsünün yakınsaması daha sağlam bir şekilde olmuştur.

5.3. Ters Öbekleme Yöntemi

4. Bölümde bir Markov zincirinin durumlarının biraraya getirilmesi ile orijinal zincir hakkında ilginç bilgiler veren daha küçük zincirler haline nasıl getireleceği gösterildi.

Öbekleme yöntemi ile daha kesin bir bilgi elde edilmesinden feda edilerek daha yönetilebilir bir zincir elde edilir. Bu bölümde Kemeny ve Snell (1976)'ın Markov zincirinin genişlemesi olarak bahsettiği öbeklemenin ters durumu düşünüldü ve geçiş matrisinin optimizasyonu ile durum uzayı genişletilmeye çalışıldı.

$S_1, S_2, \dots, S_r$ durumlarına sahip bir Markov zinciri olsun. Genişlemiş zincir olarak adlandırılan bu yeni Markov zinciri aşağıdaki gibi oluşturulur.

Genişlemiş zincirde bir durum olan $s_{(ij)}$, orijinal zincirde (s_i, s_j) durumlarının bir çiftidir. Orijinal zincirde s_i 'den s_j 'ye ve s_j 'den s_k 'ya art arda iki adımda geçişin olduğu varsayılın.

Bu geçiş genişlemiş zincirde $s_{(ij)}$ 'den $s_{(jk)}$ 'ye tek adımda geçiş olarak yorumlanır. Bu tanıma göre genişlemiş zincirde $s_{(ij)}$ 'den $s_{(kl)}$ 'ye geçiş $j = k$ iken mümkündür.

Geçiş olasılıkları

$$P_{(ij)(jl)} = p_{jl},$$

$$P_{(ij)(kl)} = 0 \quad j \neq k \text{ olarak verilir.}$$

Genişlemiş zincirin nasıl oluşturulacağı hakkında aşağıda bir örnek verildi.

Örnek 5.3.1. Günlük hava durumunu ele alarak Yağmurlu havalar “Y”, Güneşli havalar “G”, Karlı havalar “K” ile gösterilsin. Y,G,K durumlarına sahip üç durumlu bir Markov zinciri aşağıdaki gibi olsun.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} Y & G & K \end{matrix} \\ \begin{matrix} Y \\ G \\ K \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Bu durumda son iki güne dayalı hava durumu bilgisi sadece önceki güne dayalı hava durumu bilgisinden farklı tahminlere neden olabileceğinden genişlemiş zincir bir yaklaşım olarak sayılabilir. Bu yaklaşımı geliştirmenin tek yolu art arda iki gün için hava durumunu ele almaktadır. Durumlar o zaman GG, GY, GK, YG, YY, YK, KG, KY, KK olacaktır.

Yeni geçiş olasılıklarının tahmin edilmesi gerekir. Hala tek bir adım bir gündür. Bu yüzden GY'den sadece YG, YY ve YK'ye geçilebilir. Bu çeşit örneklerde durumların sayısı artmasına rağmen Markov zinciri teorisini kullanarak genişlemiş zincir yaklaşımını daha da geliştirmek mümkündür.

Bu Markov zincirinden aşağıdaki gibi yeni bir Markov zinciri oluşturulur. Yeni zincirde bir durum, eski zincirdeki durumların bir çifti olacaktır. Yani GG, GY, GK, YG, YY, YK, KG, KY, KK şeklinde olacaktır.

Eski zincirde n'inci adımda Y durumda ve (n+1) inci adımda K durumunda iken, yeni zincirde n'inci adımda YK durumunda olur.

Yeni (Genişlemiş) zincir için geçiş matrisi

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} YY & YG & YK & GY & GK & KY & KG & KK \end{matrix} \\ \begin{matrix} YY \\ YG \\ YK \\ GY \\ GK \\ KY \\ KG \\ KK \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Bu yeni zincir, üç durumlu zincirden elde edilecek bilgiye göre orijinal süreç hakkında daha detaylı bilgi verir. Genişlemiş zincirin durumları YY, YG, YK, GY, GK, KY, KG, KK'dır. Orijinal süreçte $p_{GG}=0$ olduğu için GG bir durum değildir. Orijinal zincir ile genişlemiş zincir karşılaştırıldığında durumların nasıl sınıflandırılacağına bakılabilir. Eğer orijinal zincir geri dönüşlü ise genişlemiş zincir de geri dönüşlüdür. Eğer orijinal zincir d periyoduna sahip ise, genişlemiş zincir de d periyoduna sahip olacaktır. Eğer $i = j$ iken s_j durumu orijinal zincirde yutan durum ise genişlemiş zincirde $s_{(ij)}$ durumu yutan durum olur.

Öbekleme yaparak genişlemiş zincirden orijinal zincire geri gidilebilir. Genişlemiş zincirde özel bir $A = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ öbeklemesi alınarak, her zaman orijinal zincir elde edilir.

Örnek 5.3.1'de öbekler $A = \{(YY, KY, GY), (KG, YG), (YK, GK, KK)\}$ bu şekilde oluşturulursa

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} Y & G & K \end{matrix} \\ \begin{matrix} Y \\ G \\ K \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{orijinal zincir elde edilir.}$$

Bu bölümde öbekleme yönteminin tersi durumu olan ters öbekleme yöntemi geliştirilmeye çalışıldı. Geliştirilen yöntem Kemeny ve Snell (1976)'de anlatılan Markov zinciri genişlemesi durumuna benzemesine rağmen olasılıkların belirlenmesi geçiş matrisinin optimizasyonu ile yapılır.

Geçiş matrisinin belirlenmesi için iki yol izlendi. Birinci yolda ele alınan Markov zincirinin limit dağılımının entropisine yakınsayacak şekilde Markov zincirinin durum uzayı genişletilmeye çalışıldı. İkinci yolda ise Markov zincirinin limit dağılımına yakınsayacak şekilde Markov zincirinin durum uzayı genişletildi. Geliştirilen yöntem aşağıdaki örneğe uygulandı.

Örnek 5.3.2. Kurumsallaşmış bir şirket yönetici kadrosunu üst ve alt diye iki gruba ayırarak yöneticilerini değerlendiriyor, ancak insan kaynakları şirkete yöneticilerin üst, orta ve alt olmak üzere üç gruba ayrılarak değerlendirilmesini öneriyor. Bu durumda istenilen limit dağılıma uygun şekilde yöneticilerin değerlendirilmesine ilişkin geçiş matrisini oluşturunuz.

E durum uzayı olmak üzere,

$$E = \{a, b\} \longrightarrow E = \{a, b, c\}$$

değişmez limit dağılım $\pi = (0.40; 0.30; 0.30)$ olsun.

İki duruma sahip indirgenemez Markov zinciri aşağıdaki gibi olsun.

$$P = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.24 & 0.76 \end{bmatrix}$$



c durumunun eklenmesi ile
Markov zincirinin
genişlemesi

Ters Öbekleme Aşaması



$$P = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25-r & r \\ 0,24 & 0,76-s & s \\ t & u & 1-t-u \end{bmatrix}$$

Üç duruma sahip indirgenemez Markov zinciri için değişmez limit dağılımının entropisine yakınsamasına göre r, s, t, u değerleri bulunmuştur. Bu bulunan değerler Çizelge 5.17’de gösterilmiştir.

Çizelge 5.16. Ters öbekleme yöntemine göre ele edilen geçiş matrisleri

$\pi \pm \varepsilon$	Mümkün çözüm sayısı	Ters Öbekleme Limit Dağılım ve $H(\pi)$	Değişmez Limit Dağılım ve $H(\pi_{inv})$	$ H(\pi) - H(\pi_{inv}) $	Geçiş Matrisi	Olasılık Değerleri
$\varepsilon = 0,025$	1155	$\pi = (0,3982; 0,3025; 0,2993)$ $H(\pi) = 1,571675$	$\pi = (0,40; 0,30; 0,30)$ $H(\pi_{inv}) = 1,570951$	0,000724	$\begin{bmatrix} 0,75 & 0,17 & 0,08 \\ P = \begin{bmatrix} 0,24 & 0,42 & 0,34 \\ 0,09 & 0,36 & 0,55 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$	$r = 0,08$ $s = 0,34$ $t = 0,09$ $u = 0,36$
$\varepsilon = 0,030$	2373	$\pi = (0,3984; 0,3030; 0,2986)$ $H(\pi) = 1,571584$	$\pi = (0,40; 0,30; 0,30)$ $H(\pi_{inv}) = 1,570951$	0,000633	$\begin{bmatrix} 0,75 & 0,19 & 0,06 \\ P = \begin{bmatrix} 0,24 & 0,08 & 0,68 \\ 0,09 & 0,68 & 0,23 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$	$r = 0,06$ $s = 0,68$ $t = 0,09$ $u = 0,68$
$\varepsilon = 0,035$	3603	$\pi = (0,3986; 0,3035; 0,2979)$ $H(\pi) = 1,571488$	$\pi = (0,40; 0,30; 0,30)$ $H(\pi_{inv}) = 1,570951$	0,000537	$\begin{bmatrix} 0,75 & 0,17 & 0,08 \\ P = \begin{bmatrix} 0,24 & 0,60 & 0,16 \\ 0,09 & 0,89 & 0,02 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$	$r = 0,08$ $s = 0,16$ $t = 0,09$ $u = 0,89$
$\varepsilon = 0,040$	4827	$\pi = (0,3988; 0,3039; 0,2972)$ $H(\pi) = 1,571361$	$\pi = (0,40; 0,30; 0,30)$ $H(\pi_{inv}) = 1,570951$	0,000410	$\begin{bmatrix} 0,75 & 0,18 & 0,07 \\ P = \begin{bmatrix} 0,24 & 0,49 & 0,27 \\ 0,09 & 0,28 & 0,63 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$	$r = 0,07$ $s = 0,27$ $t = 0,09$ $u = 0,28$

Ters öbekleme yöntemi kullanılarak istenilen limit dağılıma yaklaşan geçiş matrisinin elde edilmesi, geçiş matrisinin optimizasyonu yolu ile de bulunabilir. Bu problemde Markov zincirinin üçüncü duruma giriş ve çıkış olasılıklarının minimum olması varsayımı altında

$$P = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25-r & r \\ 0,24 & 0,76-s & s \\ t & u & 1-t-u \end{bmatrix}$$

$$\text{Min}\{s+t+u+r\}$$

Kısıtlar

$$\pi'P = \pi'$$

$$r \leq 0,25$$

$$s \leq 0,24$$

$$t+u \leq 1$$

$$r,s,u,t \geq 0$$

optimizasyon modeline göre çözüm yapılırsa $t=0,093$ $r=0,07$ $s,u=0$ olarak bulunur. Sonunda geçiş matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,18 & 0,07 \\ 0,24 & 0,76 & 0 \\ 0,093 & 0 & 0,907 \end{bmatrix}$$

olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Markov zincirlerinin uygulama alanları çok geniş olmasına rağmen ilk geçiş zamanı özelliklerini inceleyen çalışmalar sınırlıdır. Halbuki İlk geçiş zamanları Markov analizinin önemli bir parçasını oluşturmaktadır.

Bu tezde durum uzayı sonlu elemanlı, indirgenemez bir Markov zinciri için ilk geçiş zamanlarının dağılımları kesikli olduğundan kesikli dağılıma sürekli dağılım yaklaşımında bulunuldu. Markov zincirinin simülasyonu yapılarak ilk geçiş zamanı dağılımı deneme sayılarına bağlı olarak ortaya çıkarılmıştır.

Bu çalışmada karmaşık sistemlerin daha kolay incelenmesi için Markov zincirinin durum uzayının azaltılmasını amaçlayan ve durumların bir araya getirilmesi ile yapılan öbekleme yöntemi anlatılmıştır. Bir Markov zincirinin durumlar kümesine ilk geçiş zamanının dağılımı öbekleme yapılarak belirlenmiştir.

İlk geçiş zamanının dağılımı deneme sayılarına bağlı olarak Easy Fit yazılımı aracılığıyla 65 dağılım arasından Kolmogorov-Smirnov testinin sonucuna göre en iyi uyum sağlayan dağılımlar Çizelge 5.5-Çizelge 5.11’de gösterilmiştir.

Uygulama bölümünde ele alınan dört duruma sahip indirgenemez Markov zincirinin öbekleme yapmadan ilk geçiş zamanının dağılımını belirlemede Johnson SB dağılımı öne çıkmıştır. Johnson SB dağılımının, ilk geçiş zamanı dağılımına uyumunu gösteren p değeri en az 0,31319 ile Markov zinciri 4 durumundan 1 durumuna ilk geçişi yaparken olmuştur. Yine Johnson SB dağılımının, ilk geçiş zamanı dağılımına uyumunu gösteren p değeri en fazla 0,63702 ile Markov zinciri 4 durumundan 4 durumuna ilk geçişi yaparken olmuştur. Çizelge 5.2’de görüldüğü gibi ele alınan dört duruma sahip indirgenemez Markov zincirinin 16 tane mümkün ilk geçiş zamanı dağılımının 12 tanesine Johnson SB dağılımı daha iyi uyum sağlamıştır.

Elde edilen sonuçları genelleştirmek amacıyla değişik P geçiş matrisleri içinde simülasyonları yapıldı. Gerçek verilerle örneklendirme içinde 02.01.2004-13.09.2005

tarikhleri arasındaki BIST-100 beş dakikalık endeksine göre % 0,1'lik artış ve azalışlar dikkate alınarak 24.874 veri için geçiş matrisi oluşturulmuş ve durumlara göre ilk geçiş zamanının dağılımları belirlenmiştir. Bu uygulamaların sonuçları Ek-3'de verilmiştir. Bu uygulamalarda yine Johnson SB dağılımının ön plana çıktığı gözlenmiştir.

Öbekleme yapıldığında ise Çizelge 5.4'de görüldüğü gibi ilk geçiş zamanının dağılımı öbekleme biçimine göre değişiklik göstermiştir. Ayrıca çalışmada ilk geçiş zamanının dağılımının grafikleri, parametre tahminleri verilmiştir. Ek-2'de gösterilen durumlara ait olasılık dağılım grafiklerinden ilk geçiş zamanının dağılımının sağa çarpık veya ters J şeklinde olduğu görülmüştür.

Belli bir değere göre olasılıklarının karşılaştırılması ile Çizelge 5.3'de gösterildiği gibi Beta, Burr ve Johnson SB dağılımlarının birbiri yerine kullanılabileceği görülmüştür. Öbekleme yöntemi uygulanmasından sonra belli bir değere göre olasılıklarının karşılaştırılması Çizelge 5.12-Çizelge 5.14'de yapılmıştır. Bu çizelgelerden ilk geçiş zamanının olasılıklarının çoğunlukla birbirine yakın oldukları anlaşılmıştır.

İlk geçiş zamanının deneme sayılarına bağlı olarak yakınsamaları, Kullback-Leibler uzaklık ölçüsü ve Wasserstein metriği kullanılarak Çizelge 5.15'de gösterilmiştir. Bunun yanısıra Markov zincirinin durum uzayının genişlemesi çerçevesinde öbeklemenin ters durumu olan ters öbekleme yöntemi geliştirilmeye çalışıldı. Ters öbekleme yönteminde istenilen limit dağılımın entropisine yaklaşan geçiş matrisleri elde edilip, Çizelge 5.16'da verilmiştir. Geçiş matrisinin optimizasyonu ile ters öbekleme yönteminde de istenilen limit dağılıma yaklaşan geçiş matrisi elde edilmiştir.

Bundan sonraki çalışmalarda daha yüksek dereceden Markov zincirlerinin ilk geçiş dağılımına bakılabilir. Farklı stokastik süreç modelleri için ilk geçiş zamanının dağılımı incelenebilir. Bunun yanında Markov zincirlerinde bir durumdan çıkış

yapmadan önce son kez istenilen bir duruma ziyareti ifade eden son çıkış zamanlarının dağılımı da ortaya konulabilir.

Markov zincirinin durumları bulanık hale getirildikten sonra ilk geçiş dağılımı incelenebilir. Bu bulanık durumlar için öbekleme yapılabilir.

Ağırlıklı Öbekleme gibi değişik öbekleme yöntemlerine göre ilk geçiş zamanının dağılımı da araştırılabilir, bu çerçevede ilk geçiş zamanının dağılımına daha iyi uyum sağlayan dağılımlar ortaya konulabilir.

İlk geçiş zamanları ve öbekleme yöntemi birlikte Markov Karar süreçlerine uygulanabilir. Böylece ilk geçiş zamanı meydana gelinceye kadar beklenen maliyet minimum veya beklenen kazanç maksimum yapılabilir, öbekleme yöntemi ile istenilen/istenmeyen durumlar biraraya getirilip daha esnek stratejiler oluşturulabilir.

Ters öbekleme yöntemi için diğer entropi türlerine göre limit dağılıma yakınsaması incelenebilir. Buradan elde edilen geçiş matrisleri bir biri ile karşılaştırılabilir. Ters öbekleme yönteminde Hedef programlama vb. yaklaşımlar kullanılarak geçiş matrisinin optimizasyonu sağlanabilir.

İstatistikte verilerin dağılımlara uyumunu artırmak için dağılımların genelleştirilmiş halleri dikkate alınır. Son yıllarda Alzaatreh ve ark. (2012), Alzaatreh (2011)'de yapılan çalışmalarda sürekli dağılımlardan dönüşümler yoluyla yeni sürekli dağılımlar veya sürekli dağılımlardan yeni kesikli dağılımların üretilmesi oldukça ilgi çekmiştir. Alzaatreh'in yaptığı çalışmada T-X dağılım ailesi biçiminde yeni sürekli ve kesikli dağılımlar elde etmiştir. Dağılımların genelleştirilmesi çabası içerisinde üretilen ve T-X dağılım ailesi olan Beta-Gama, Beta-Üstel, Üstel-Geometrik gibi dağılımların da ilk geçiş zamanı dağılımına uyumuna bakılabilir, yeni dağılımlar var olan dağılımlardan daha iyi uyum sağlayabilir.

KAYNAKLAR

Abboud, N.E., “A discrete-time Markov production- inventory model with machine breakdowns”, *Computers and Industrial Engineering*, 39: 95-107 (2001).

Adan, I.J.B.F., Kulkarni,V.G., “Single server queue with Markov dependent inter arrival and service times”, *Queueing Systems*, 45: 113-134 (2003).

Akyurt, Z.İ., “Markov zincirleri ve trafik sigortası hasarsızlık indirimi veya zamlı prim sisteminin Markov zinciri ile ifade edilerek analiz edilmesi”, Yüksek Lisans Tezi, *İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü*, İstanbul, 17-105 (2005).

Alfa, A.S., Shi, Y.F., “ A Discrete Time-Limited Vacation Model For The Fair Share Scheduler, *Telecommunication Systems*,13(2): 167-169 (2000).

Alzaatreh, A., “A New Method for Generating Families of Continuous Distributions”, Doktora tezi , Central Michigan Üniversitesi, (2011).

Alzaatreh, A., Lee, C., Famoye, F., “ On the discrete analogues of continuous distributions” , *Statistical Methodology* , 9: 589–603 (2012).

Aparisi, F., Diaz, C.J., “Design and Optimization of EWMA Control Charts for in Control, Indifference, and out-of-Control Regions”, *Computers & Operations Research*, 34: 2096–2108 (2007).

Barrio, E., Matran, C., Rodriguez-Rodriguez, J. and Cuesta-Albertos, J.A. “Tests of goodness of fit based on the L2-Wasserstein distance”, *Annals of Statistics* , 27, 1230-1239 (1999).

Bhat, U.N., “Elements of Applied Stochastic Processes”, *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics*, 2nd ed., New Jersey, 9, 33-48, 587, 306-317 (1984).

Bulsara, A. R, Elston, T. C., Doering, C. R., Lowen, S. B., Lindenberg, K. “Cooperative behavior in periodically driven noisy integrate-fire models of neuronal dynamics” , *Phys. Rev*, E 53, 3958-3969 (1996).

Bulsara, A. R., Lowen, S. B., & Rees, C. D. “Cooperative behavior in the periodically modulated Wiener process: noise-induced complexity in a model neuron”, *Phys. Rev* , E 49,4989-5000 (1994).

Chaudry, M.L., Gupta, U.C., “Analysis of a finite-buffer, bulk-service queue with discrete Markovian arrival process: D- MAP /Ga,b /1/ N ”*Naval Research Logistics*, 50: 345-363 (2003).

Choi, J., Realff, M.J. and Lee, J.H., "Dynamic programming in a heuristically confined state space: A stochastic resource-constrained project scheduling application", **Computers and Chemical Engineering**, 28: 1039-1058 (2004).

Cover, T.M., Thomas, J.A., "Elements of Information Theory", **Wiley Interscience**, Hoboken, New Jersey, 12-18, (2006).

Cox, D., Miller H., "The Theory of Stochastic Processes", **Chapman&Hall**, London, U.K. (1965).

Çınlar, E., "Introduction to Stochastic Processes", **Englewood Cliffs**, New Jersey, 106-277 (1997).

DasGupta, A., "Fundamentals of Probability: A first course", **Springer Texts in Statistics**, (2010).

Dynkin, E. B., Yushkevich A. A., "Markov Processes: Theorems and Problems", **Plenum**, New York (1969).

Feller, W., "An Introduction to Probability Theory and Its Applications" **Wiley**, New York (1968).

Fienberg, S. E., "Stochastic models for single neuron firing trains: a survey", **Biometrics**, 30, 399-427 (1974).

Fua, J.C., Spiringa, F.A. and Xieb, H., "On The Average Run Lengths of Quality Control Schemes Using a Markov Chain Approach", **Statistics & Probability Letters**, 56: 369–380 (2002).

Garcia, A.L., "Probability and Random Processes for Electrical Engineering", **Addison-Wesley Longman**, Toronto, 165-169 (1994).

Gardiner, C. W., "Handbook of Stochastic Methods", **Springer-Verlag**, New York (1985).

Gerstein, G. L., Mandelbrot, B. B., "Random walk models for the spike activity of a single neuron", **Biophys. J.** 4, 41-68 (1964).

Gonzales, A.M., Roque, A.M.S. and Gonzalez, J.G., "Modeling and forecasting electricity prices with input/output hidden Markov models", **IEEE Transactions on Power Systems**, 20(1): 13-24 (2005).

Havrda, J.H., Charvat, F., "Quantification methods of classification process: concepts of structural α entropy", **Kybernetika**, 3, 30-35 (1967).

Heckerling, P.S., "Information Content of Diagnostic Tests in the Medical Literature", **Methods of Information in Medicine**, 29, 61-66 (1990).

Hillier F.S., Lieberman G.J., “Introduction to operations research”, Seventh Edition, **Mcgraw-Hill**, New York, 818 (2001).

Irpino, A. and Romano, E., “Optimal histogram representation of large data sets: Fisher vs piecewise linear approximations” *Revue des Nouvelles Technologies de l'Information*, RNTI-E-9, 99–110 (2007).

Internet : Aftab, Y., Kim, C., “ Information Theory and Digital Age, Massachusetts Institute of Technology”
<http://mit.edu/6.933/www/Fall2001/Shannon2.pdf> (2001).

Internet: Sigman, K., “Simulation of Markov Chain, Columbia University”
<http://www.columbia.edu/~ks20/4703-Sigman/Monte-Carlo-Sigman.html> (2009).

Jones, M.C., “Kumaraswamy’s distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages”, *Statistical Methodology*, 6 : 70–81 (2009).

Jost, L. “Entropy and diversity”, *OIKOS*, 133(2): 363-375, (2006).

Kammer, S., “A general first-passage-time model for multivariate credit spreads and a note on barrier option pricing ”, Doktora Tezi, *Justus-Liebig-Universit at Giessen*, 8-20 (2007).

Karmeshu, Pal, N.R., “Uncertainty, Entropy and Maximum Entropy Principle – An Overview in Entropy Measures, Maximum Entropy Principle and Emerging Applications, **Springer**, Germany, 1-9 (2003).

Kemeny, J.G. and Snell, J.L., “Finite Markov Chains”, **Springer**, Berlin, (1976).

Kemperman, J. H. B., "The Passage Problem for a Stationary Markov Chain" *University of Chicago Press*, Chicago (1961).

Kullback, S., “Information Theory and Statistics”, **Dover Publications**, New York, 90-110 (1996).

Li, H., and Shaked, M., “ On the first passage times for Markov processes with monotone convex transition kernels ”, *Stochastic Processes and their Applications*, 58(2): 205-206 (1995).

M.Gray, R., “Entropy and Information Theory”, **Springer**, Newyork, 80-84 (2011).

Magalhaes, M.S., Costa, A.F.B. and Neto, F.D.M., “Adaptive Control Charts: A Markovian Approach for Processes Subject to Independent Disturbances”, *Int. J. Production Economics*, 99: 236- 246 (2006).

Mandel, M., “ Estimating disease progression using panel data”, *Biostatistics*, 11(2): 1-13 (2010).

Mathai, A.M and Haubold, H.J., "Pathway model, superstatistics, Tsallis statistics and a generalized measure of entropy" , ***Physica A***, 375, 110-122 (2007).

Moser, S.M., Chen, P., “ A Student’s Guide to Coding and Information Theory”, ***Cambridge University Press***, Cambridge, (2012).

Paresol, B.R., “Recovering Parameters of Johnson’s SB Distribution”, The Forest Service, ***United States Department of Agriculture (USDA)***, Research Paper, Asheville, SRS-31 (2003).

Rao, C.R., “Convexity Properties of Entropy Functions and Analysis of Diversity”, ***Proceedings of Symposium on Inequalities in Statistics and Probability***, Nebraska, 68-77 (1984).

Rényi, A., “Probability Theory”, ***Dover Publications***, New York, 550-554 (2007a).

Rényi, A., “Foundations of Probability”, ***Dover Publications***, New York, 173-308 (2007b).

Rényi, A., "On Measure of entropy and information", ***Proc. 4th Berkeley Symp. Maths. Stat. Prob.***, 1, 547-561 (1961).

Reza, F.M., “An Introduction to Information Theory”, ***Dover Publications***, New York, 283-382 (1994).

Risken H., "The Fokker-Plank equation: Methods of Solution and Applications", ***Springer-Verlag***, New York (1988).

Ross, S., Schechner Z. "Using Simulation to estimate first passage distribution", ***Management Science***, Vol. 31, No. 2. pp. 224-234 (1985).

Ross, S.M., “Stochastic Processes”, ***Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics***, 2nd ed., United States of America, 163-177 (1996).

Saccucci, M.S., Lucas, J.M., “Average Run Lengths for Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes using the Markov Chain Approach”, ***Journal of Quality Technology***, 22: 154-162 (1990).

Schnatter, S.F., “Markov Chain Monte Carlo Estimation of Classical and Dynamic Switching and Mixture Models, ***Journal of the American Statistical Association***, 96: 194-199 (2001).

Serel, D.A., Moskowitz, H., “Joint Economic Design of EWMA Control Charts for Mean and Variance” , ***European Journal of Operational Research***, 184:157–168 (2008).

Shannon, C.E., "A Mathematical Theory of Communication", ***Bell SystemTech. J.***, 27, 379–423 (1948).

Shinozuka, M. and Wu, W., “ On the first passage problem and its application to earthquake engineering ”, ***Proceedings of Ninth World Conference on Earthquake Engineering***, Tokyo, 767-772 (1988).

Spitzer, F., “Principle of Random walk”, 2nd ed, ***Springer-Verlag***, NewYork (1976).

Syski, R., "Passage Times for Markov chains", ***IOS***, Amsterdam (1992).

Thomas, M.U., Barr, D.R., “An approximate test of Markov chain lumpability”, ***Journal of American Statistics Association***, 72:175-179 (1977).

Thorsley, D., ve Klavins, E., “Approximating stochastic biochemical processes with Wasserstein pseudometrics” , ***IET Systems Biology***, 193-211 (2009).

Tsallis, C., "Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics" , ***Journal of Statistical Physics***, 52 , 479-487 (1988).

Tuckwell, H. C., "Stochastic Process in the Neurosciences", ***Society for industrial and Applied Mathematics***, Philadelphia, PA (1989).

Van Kampen N. G., "Stochastic Processes in Physics and Chemistry revised edition", ***North-Holland***, Amsterdam (1997).

Varshney, L. R., "Engineering Theory and Mathematics in the Early Development of Information Theory", ***IEEE Conference on the History of Electronics***, Bletchley Park, England, 1-6, (2004).

Villani C., “Topics in Optimal Transportation”. ***American Mathematical Society***, Vol.58 , (2003).

Wagner, R. F., "Some Perspectives on the Decision Theoretic Approach to Medical Images", ***Seminars in Nuclear Medicine***, 8(4): 307-315 (1978).

Wang, P., Puterman M.L., “ Markov Poisson Regression Models for Discrete Time Series, ***Journal of Applied Statistics***, 26(7): 855-869 (1999).

Wu, H.H., Shieh, J., “Applying A Markov Chain Model in Quality Function Deployment”, ***Quality and Quantity***, 42(5): 665-678 (2007).

Yin, K.K., Yin, G.G., Liu, H., “Stochastic modeling for inventory and production planning in the paper industry”, ***AIChE Journal***, 50: 2877-2890 (2004).

Zhang, Lin “ Lumpability Approximation Methods for Markov Models” , Doktora Tezi, ***Purdue Üniversitesi***, 6-16, 27-39 (2006).

EKLER

EK-1. İlk geçiş zamanı dağılımının tahmininde karşılaşılan dağılımların özellikleri

LogLojistik Dağılım¹ $LogLojistik(\alpha, \beta)$

α : Sürekli ölçek (scale) parametresi ($\alpha > 0$)

β : Sürekli biçim (shape) parametresi ($\beta > 0$)

Olasılık Yoğunluk fonksiyonu	$f(x) = \frac{(\beta / \alpha)(x / \alpha)^{\beta-1}}{[1 + (x / \alpha)^{\beta}]^2}$
Birikimli dağılım fonksiyonu	$F(X) = \frac{1}{1 + (x / \alpha)^{-\beta}}$
Ortalaması	$E(X) = \frac{\alpha \pi / \beta}{\sin(\pi / \beta)}, \beta > 1$
Varyansı	$V(X) = \alpha^2(2b / \sin 2b - b^2 / \sin^2 b), \beta > 2, b = \pi / \beta$

LogNormal Dağılım² $LogNormal(\mu, \sigma)$

μ : Sürekli konum (location) parametresi

σ : Sürekli ölçek (scale) parametresi ($\sigma > 0$)

Olasılık Yoğunluk fonksiyonu	$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$
Birikimli dağılım fonksiyonu	$F(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \right]$
Ortalaması	$E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}$
Varyansı	$V(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$

¹ http://en.wikipedia.org/wiki/Log-logistic_distribution adresinden yararlanılmıştır.

² http://en.wikipedia.org/wiki/Log-normal_distribution adresinden yararlanılmıştır.

EK-1.(Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının tahmininde karşılaşılan dağılımların özellikleri

Dagum³ $Dagum(a, b, p)$

a : Sürekli biçim (shape) parametresi ($a > 0$)

b : Sürekli ölçek (scale) parametresi ($b > 0$)

p : Sürekli biçim (shape) parametresi ($p > 0$)

Olasılık Yoğunluk fonksiyonu	$f(x) = \frac{ap}{x} \left(\frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{ap}}{\left(\left(\frac{x}{b}\right)^a + 1\right)^{p+1}} \right)$
Birikimli dağılım fonksiyonu	$F(X) = \left(1 + \left(\frac{x}{b} \right)^{-a} \right)^{-p}$
Ortalaması	$E(X) = -\frac{b}{a} \frac{\Gamma(-\frac{1}{a})\Gamma(\frac{1}{a} + p)}{\Gamma(p)}, a > 1$
Varyansı	$V(X) = -\frac{b^2}{a^2} \left(2a \frac{\Gamma(-\frac{2}{a})\Gamma(\frac{2}{a} + p)}{\Gamma(p)} + \left(\frac{\Gamma(-\frac{1}{a})\Gamma(\frac{1}{a} + p)}{\Gamma(p)} \right)^2 \right), a > 2$

Inverse Gaussian⁴ $Inv.Gaussian(\lambda, \mu)$

λ : Sürekli biçim (shape) parametresi ($\lambda > 0$)

μ : Sürekli konum (location) parametresi

Olasılık Yoğunluk fonksiyonu	$f(x) = \left[\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right]^{1/2} \exp \frac{-\lambda(x - \mu)^2}{2\mu^2 x}$
Birikimli dağılım fonksiyonu	$F(X) = \Phi \left(\sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(\frac{x}{\mu} - 1 \right) \right) + \exp \left(\frac{2\lambda}{\mu} \right) \Phi \left(-\sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(\frac{x}{\mu} + 1 \right) \right)$
Ortalaması	$E(X) = \mu$
Varyansı	$V(X) = \frac{\mu^3}{\lambda}$

³ http://en.wikipedia.org/wiki/Dagum_distribution adresinden yararlanılmıştır.

⁴ http://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_Gaussian_distribution adresinden yararlanılmıştır.

EK-1.(Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının tahmininde karşılaşılan dağılımların özellikleri

Rayleigh⁵ $Rayleigh(\sigma)$

σ : Sürekli ölçek (scale) parametresi ($\sigma > 0$)

Olasılık Yoğunluk fonksiyonu	$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}$
Birikimli dağılım fonksiyonu	$F(X) = 1 - e^{-x^2/2\sigma^2}$
Ortalaması	$E(X) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
Varyansı	$V(X) = \frac{4 - \pi}{2} \sigma^2$

Burr⁶ $Burr(c, k)$

c : Sürekli biçim (shape) parametresi ($c > 0$)

k : Sürekli biçim (shape) parametresi ($k > 0$)

Olasılık Yoğunluk fonksiyonu	$f(x) = ck \frac{x^{c-1}}{(1+x^c)^{k+1}}$
Birikimli dağılım fonksiyonu	$F(X) = 1 - (1+x^c)^{-k}$
Ortalaması	$E(X) = k B(k-1/c, 1+1/c)$

⁵ http://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh_distribution adresinden yararlanılmıştır..

⁶ http://en.wikipedia.org/wiki/Burr_distribution adresinden yararlanılmıştır.

EK-1.(Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının tahmininde karşılaşılan dağılımların özellikleri

Gumbel Max⁷ $Gumbel(\mu, \beta)$

μ : Sürekli konum (location) parametresi ($\mu > 0$)

β : Sürekli ölçek (scale) parametresi ($\beta > 0$)

Olasılık Yoğunluk fonksiyonu	$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-z-e^{-z}}, z = \frac{x-\mu}{\beta}$
Birikimli dağılım fonksiyonu	$F(X) = e^{-e^{-(x-\mu)/\beta}}$
Ortalaması	$E(X) = \mu + \beta \gamma$
Varyansı	$V(X) = \frac{\pi^2}{6} \beta^2$

Kumaraswamy Dağılımı $Kumaraswamy(\alpha_1, \alpha_2)$

α_1 : Sürekli biçim (shape) parametresi ($\alpha_1 > 0$)

α_2 : Sürekli biçim (shape) parametresi ($\alpha_2 > 0$)

[Jones, 2009]

Olasılık Yoğunluk fonksiyonu	$f(x) = \alpha_1 \alpha_2 x^{\alpha_1-1} (1-x^{\alpha_1})^{\alpha_2-1}, 0 \leq x \leq 1$
Birikimli dağılım fonksiyonu	$F(X) = 1 - (1-x^{\alpha_1})^{\alpha_2}$
Ortalaması	$E(X) = \alpha_2 B\left(1 + \frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2\right)$
Varyansı	$V(X) = \alpha_2 B\left(1 + \frac{2}{\alpha_1}, \alpha_2\right) - \left\{ \alpha_2 B\left(1 + \frac{1}{\alpha_1}, \alpha_2\right) \right\}^2$

⁷ http://en.wikipedia.org/wiki/Gumbel_distribution adresinden yararlanılmıştır.

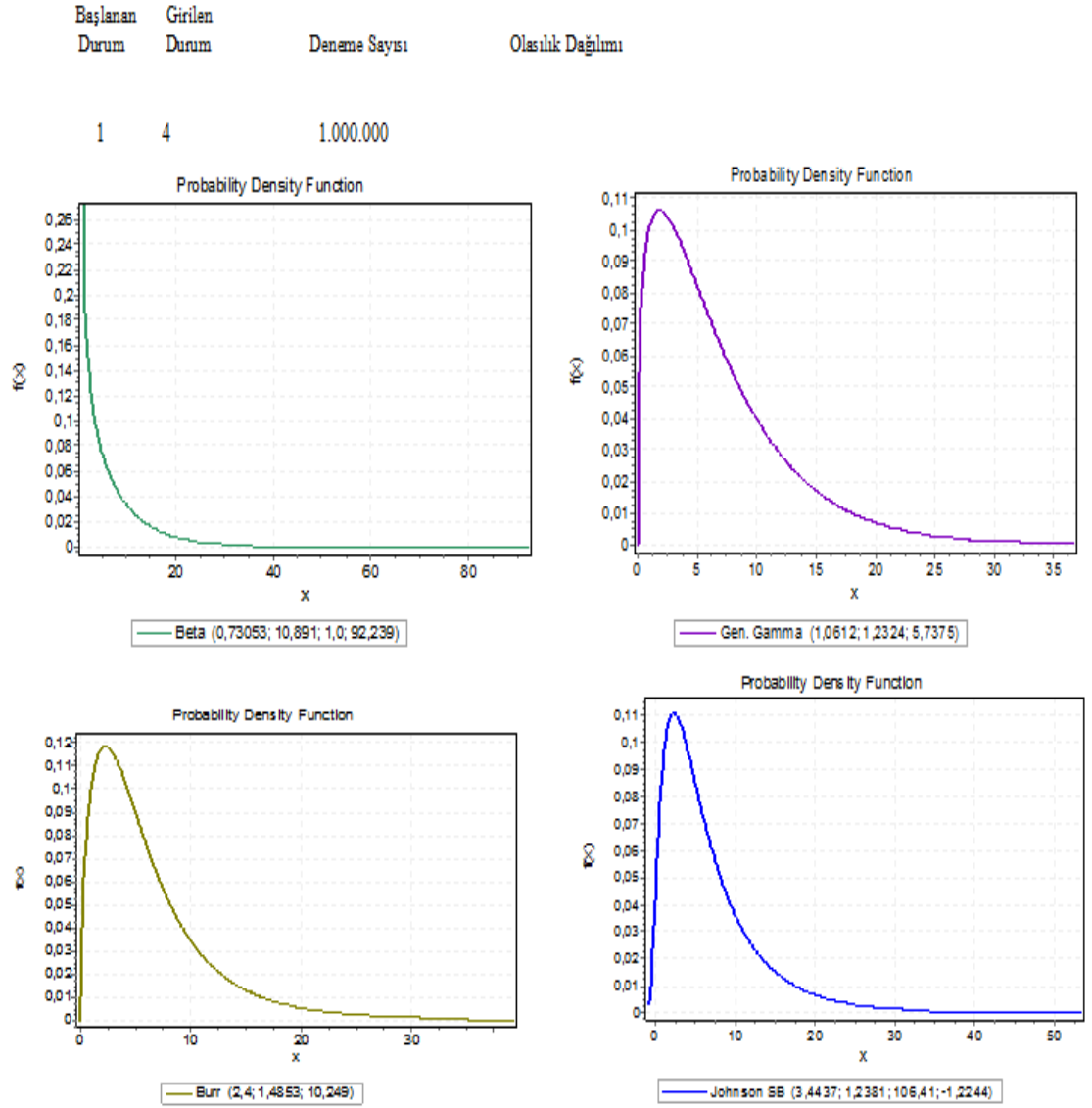
EK-1.(Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının tahmininde karşılaşılan dağılımların özellikleri

Johnson SB Dağılımı *Johnson SB*($\gamma, \delta, \lambda, \xi$)

γ : Sürekli biçim (shape) parametresi
 δ : Sürekli biçim (shape) parametresi ($\delta > 0$)
 λ : Sürekli ölçek (scale) parametresi ($\lambda > 0$)
 ξ : Sürekli konum (location) parametresi
[Paresol, 2003]

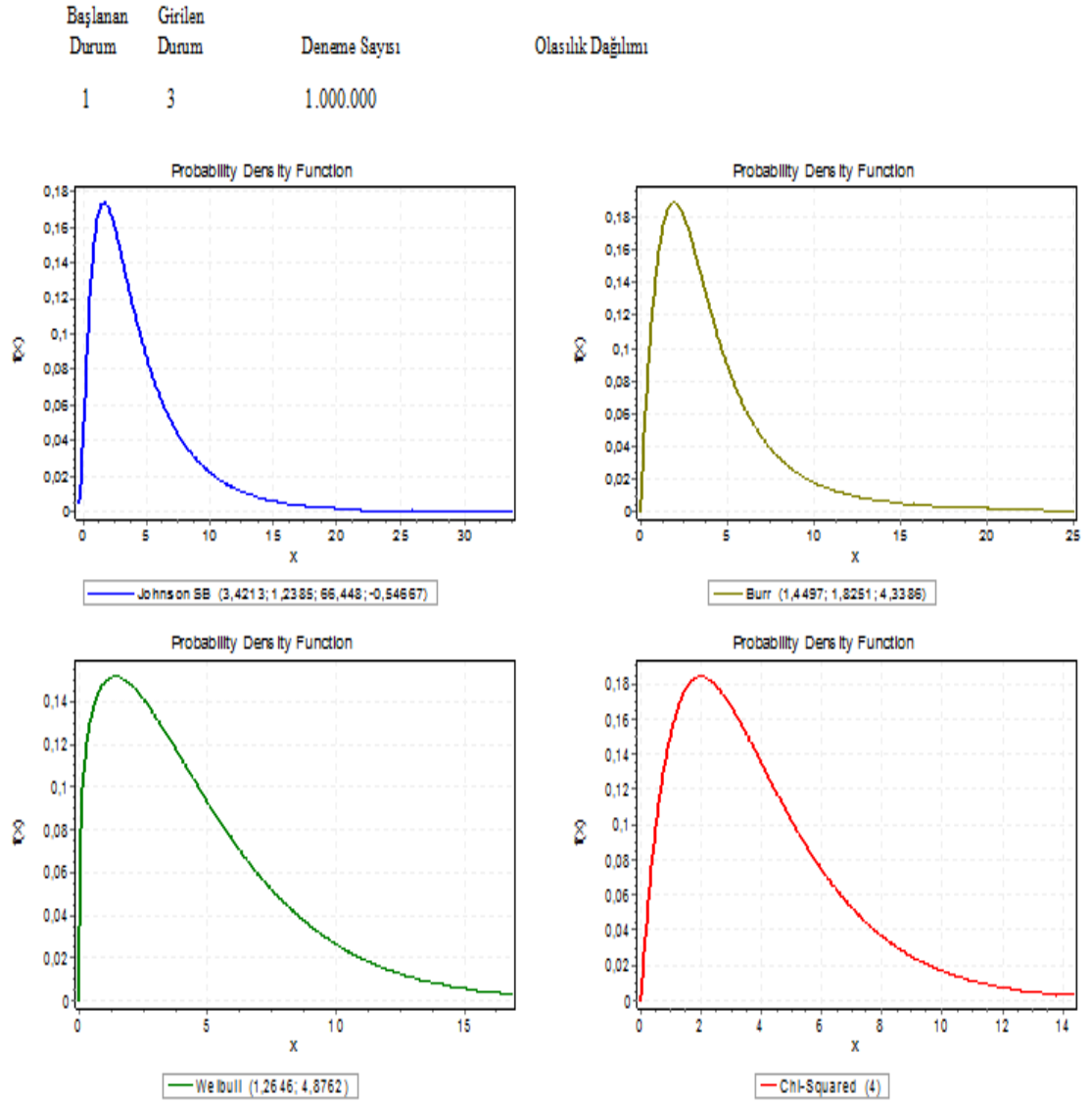
Olasılık Yoğunluk fonksiyonu	$f(y) = \frac{\delta}{\lambda \sqrt{2\pi} y(1-y)} \exp \left(-\frac{1}{2} \left[\gamma + \delta \ln \left(\frac{y}{1-y} \right) \right]^2 \right),$ $y = (x - \xi) / \lambda$
Birikimli dağılım fonksiyonu	$F(Y) = \Phi \left(\gamma + \delta \ln \left(\frac{y}{1-y} \right) \right)$
Ortalaması	$E(Y) = \lambda \mu_1(y) + \xi$ $\mu_r(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2 / 2) / \left[1 + \exp((\gamma - z) / \delta) \right]^r dz$ $z = \gamma + \delta \ln(y / (1-y))$
Varyansı	$V(Y) = \lambda^2 (\mu_2(y) - \mu_1(y)^2)$

EK-2. İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



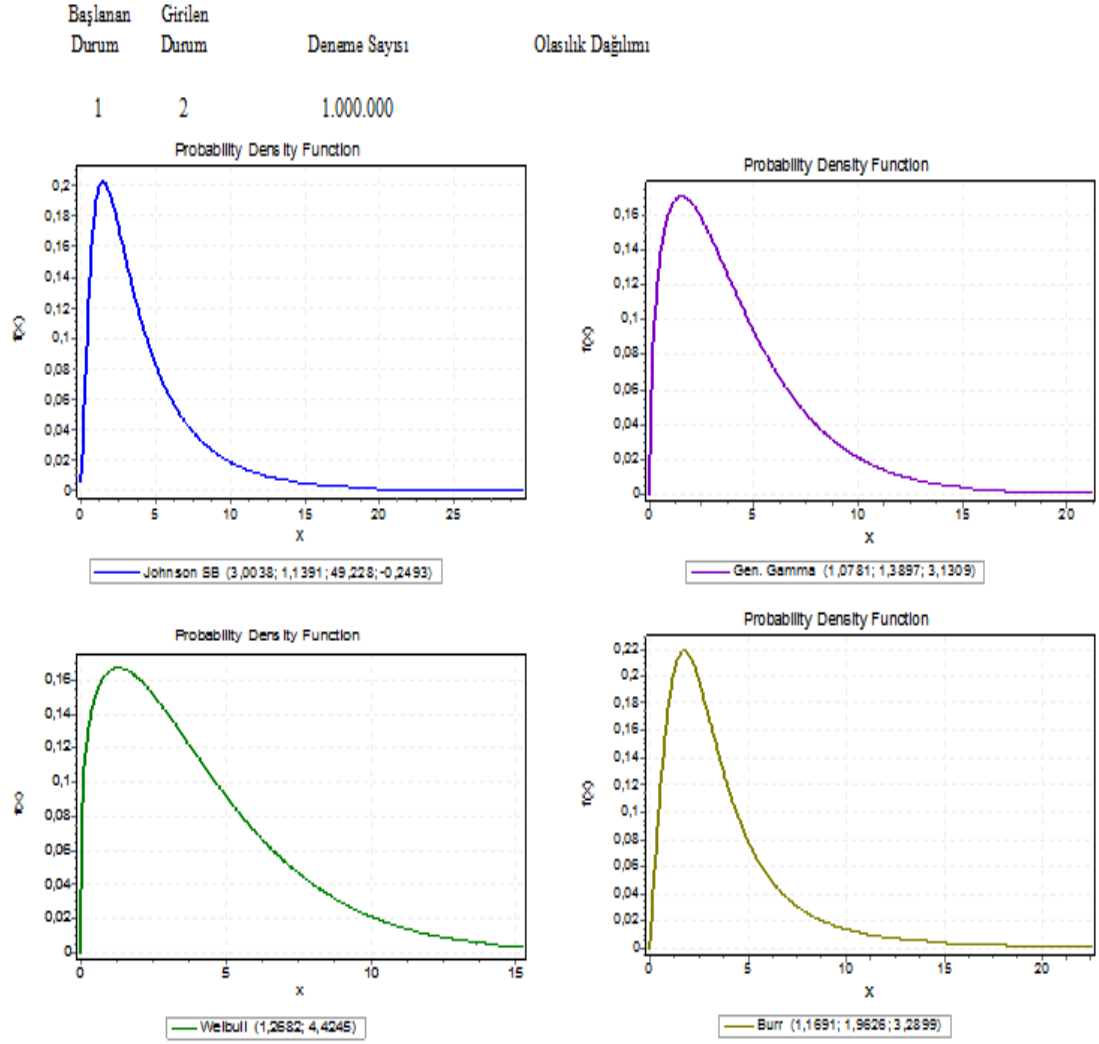
Şekil 2.1. Bir durumundan başlayıp, dört durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



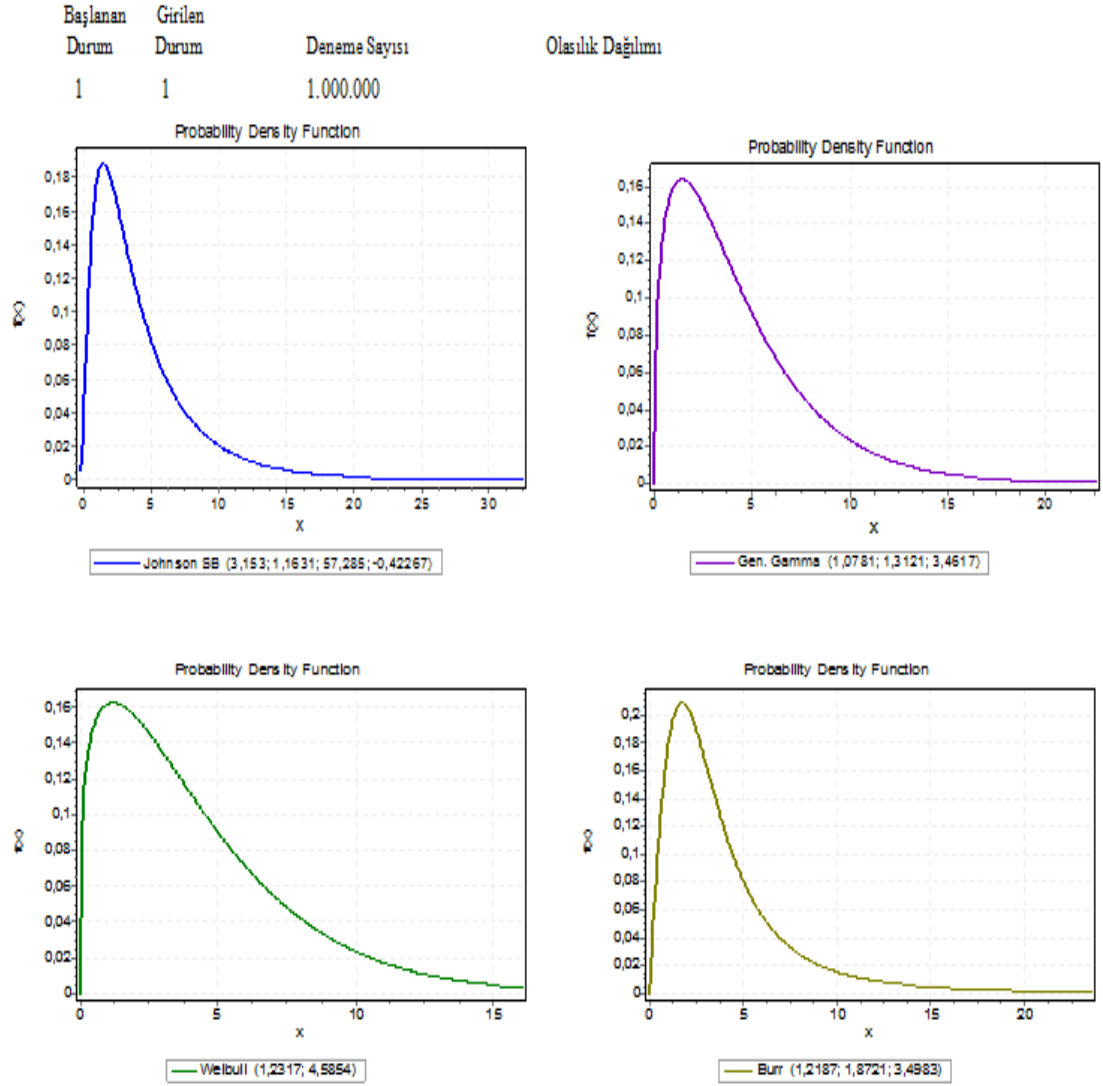
Şekil 2.2. Bir durumundan başlayıp, üç durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



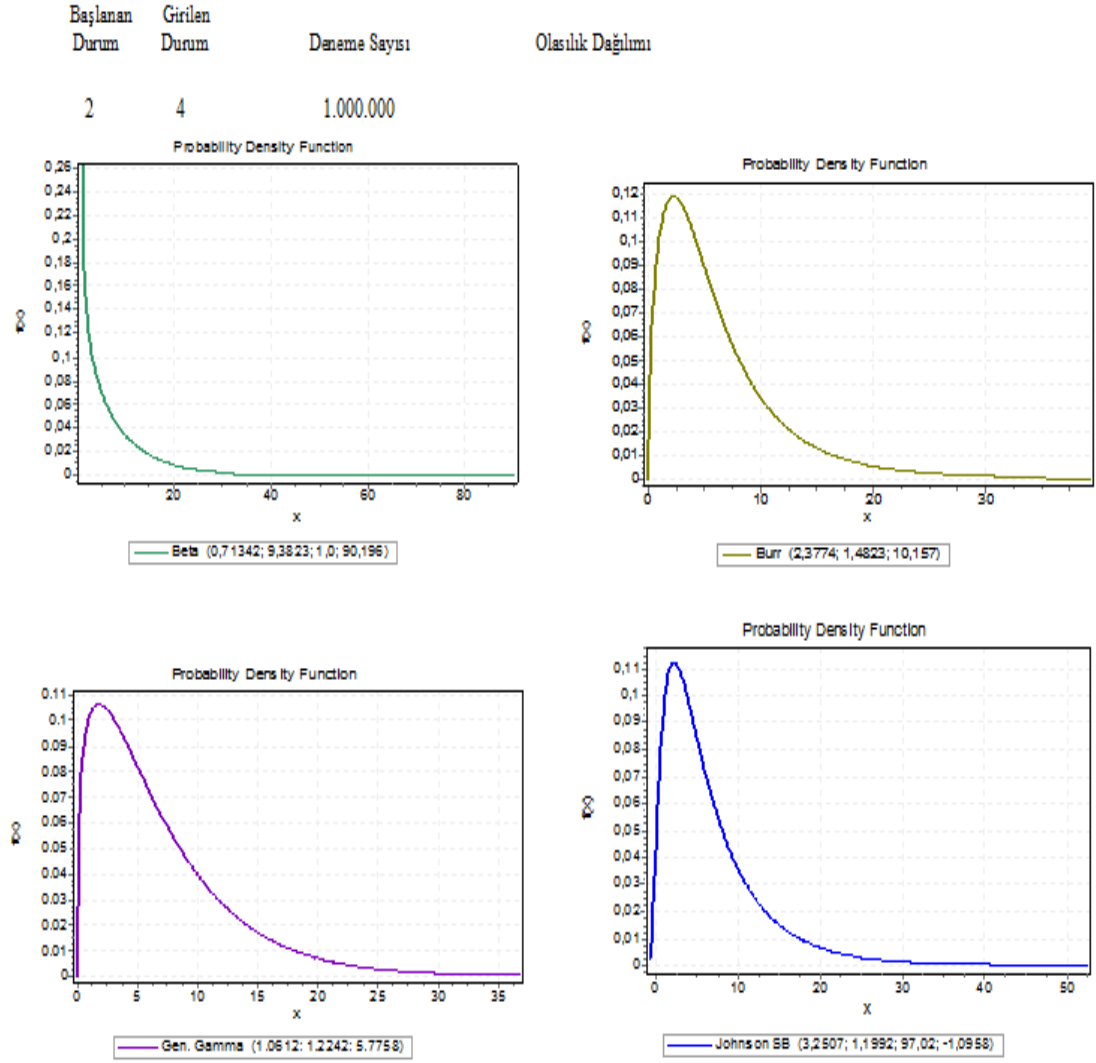
Şekil 2.3. Bir durumundan başlayıp, iki durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



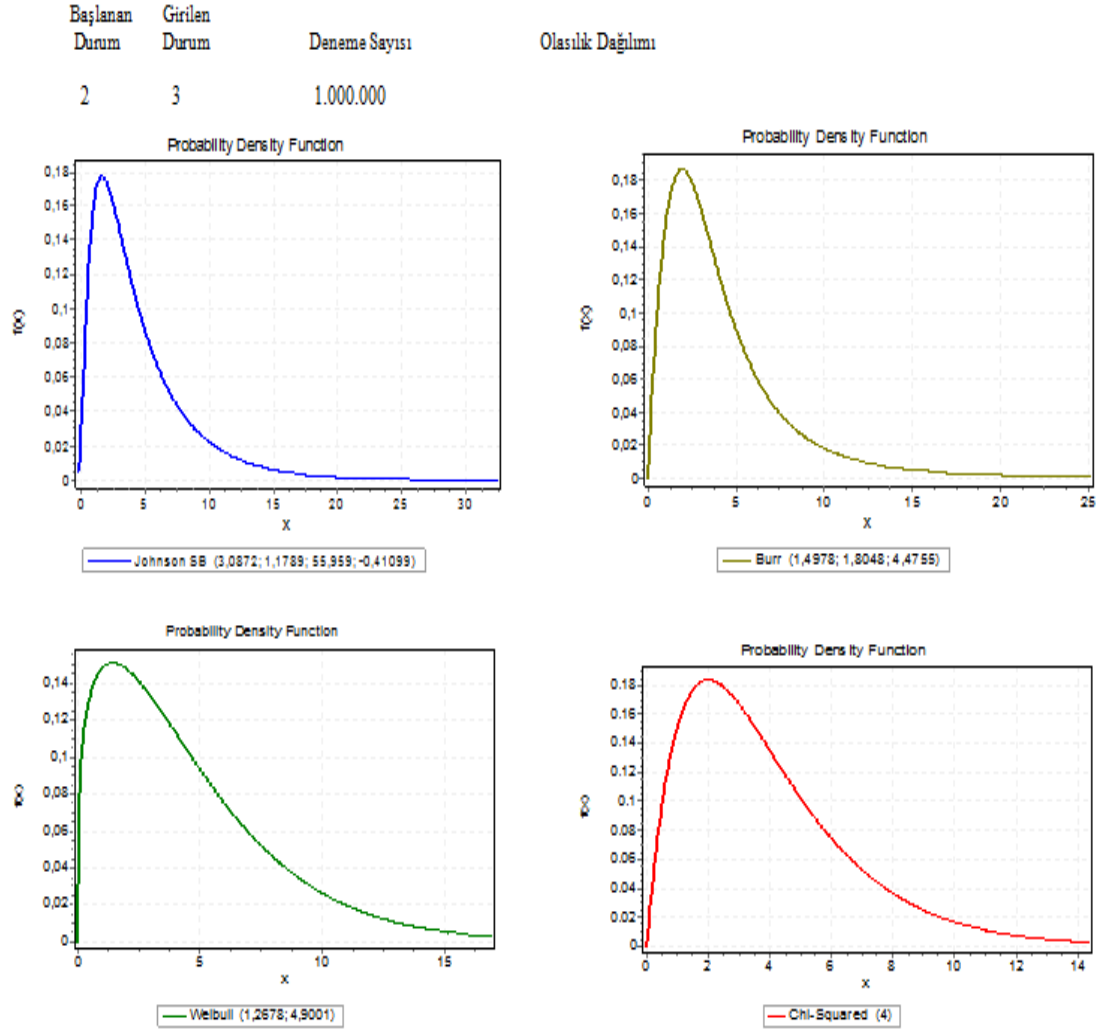
Şekil 2.4. Bir durumundan başlayıp, bir durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



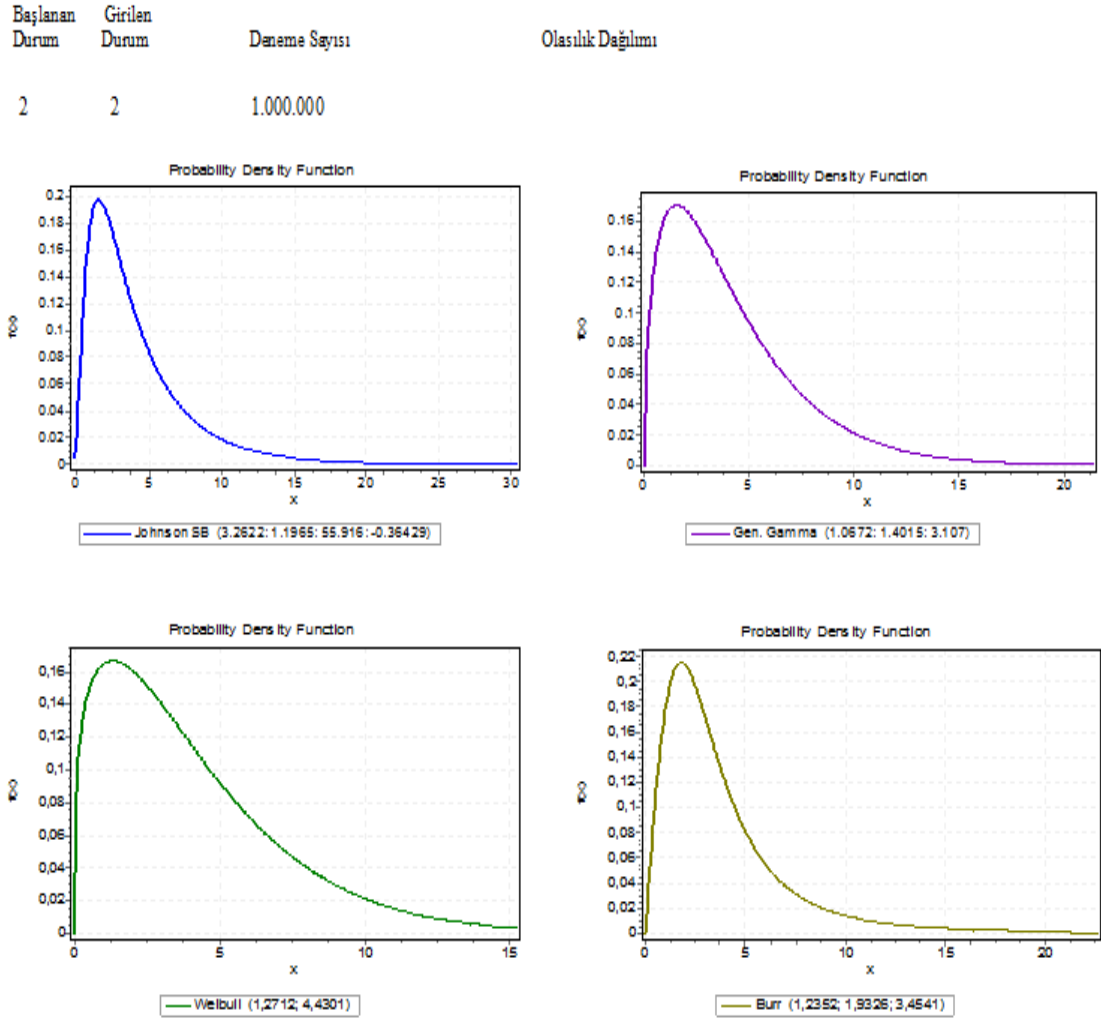
Şekil 2.5. İki durumundan başlayıp, dört durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



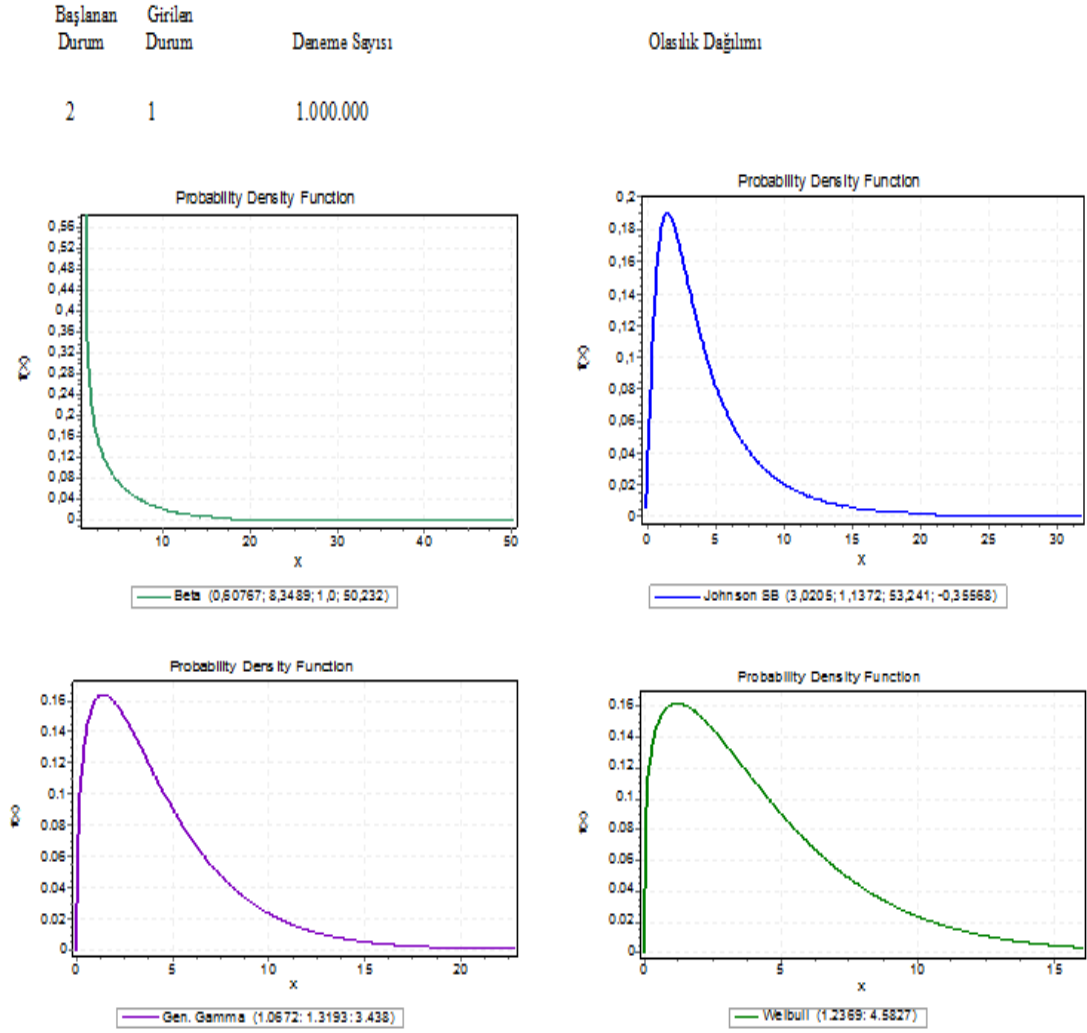
Şekil 2.6. İki durumundan başlayıp, üç durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



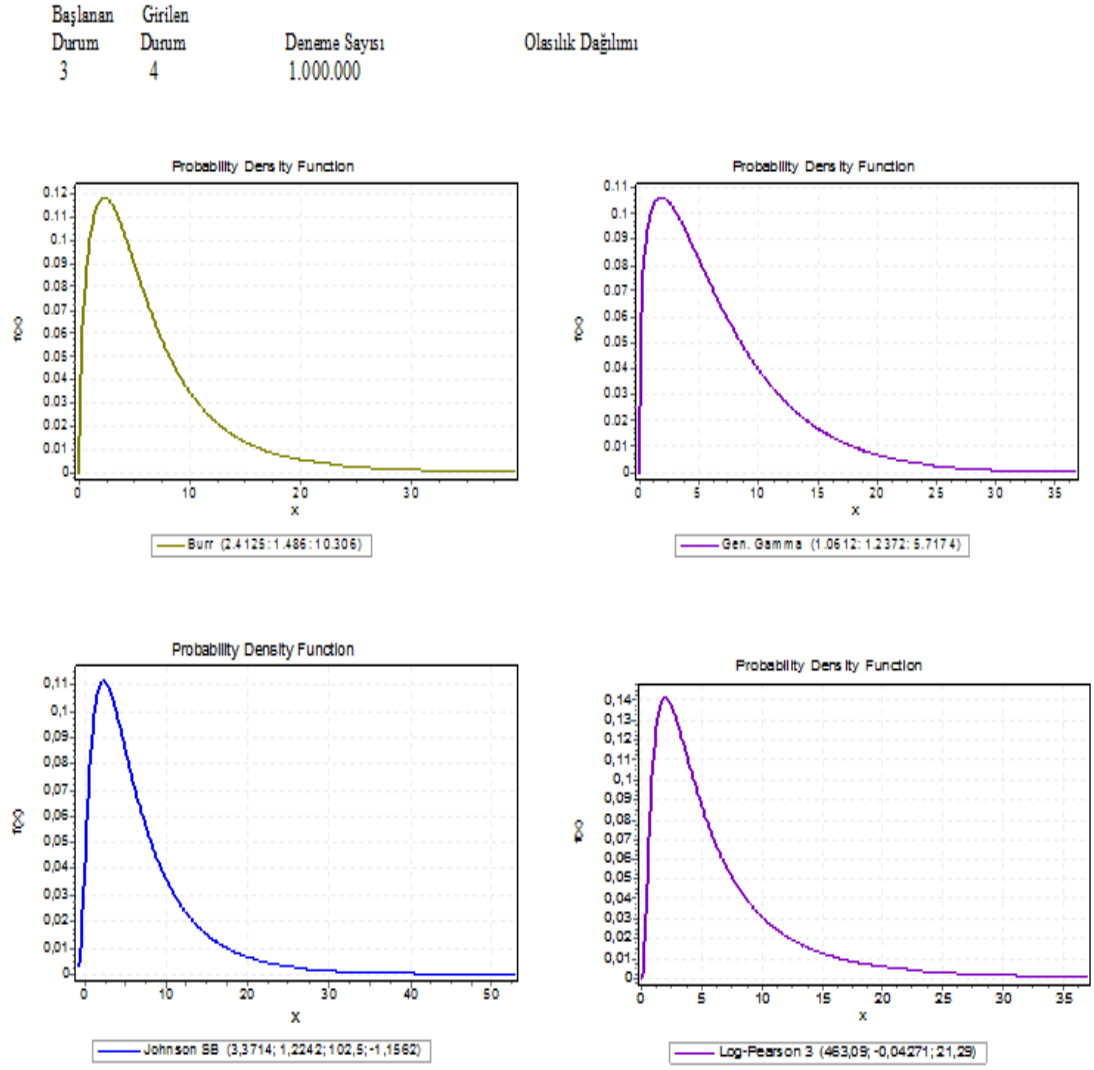
Şekil 2.7. İki durumundan başlayıp, iki durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



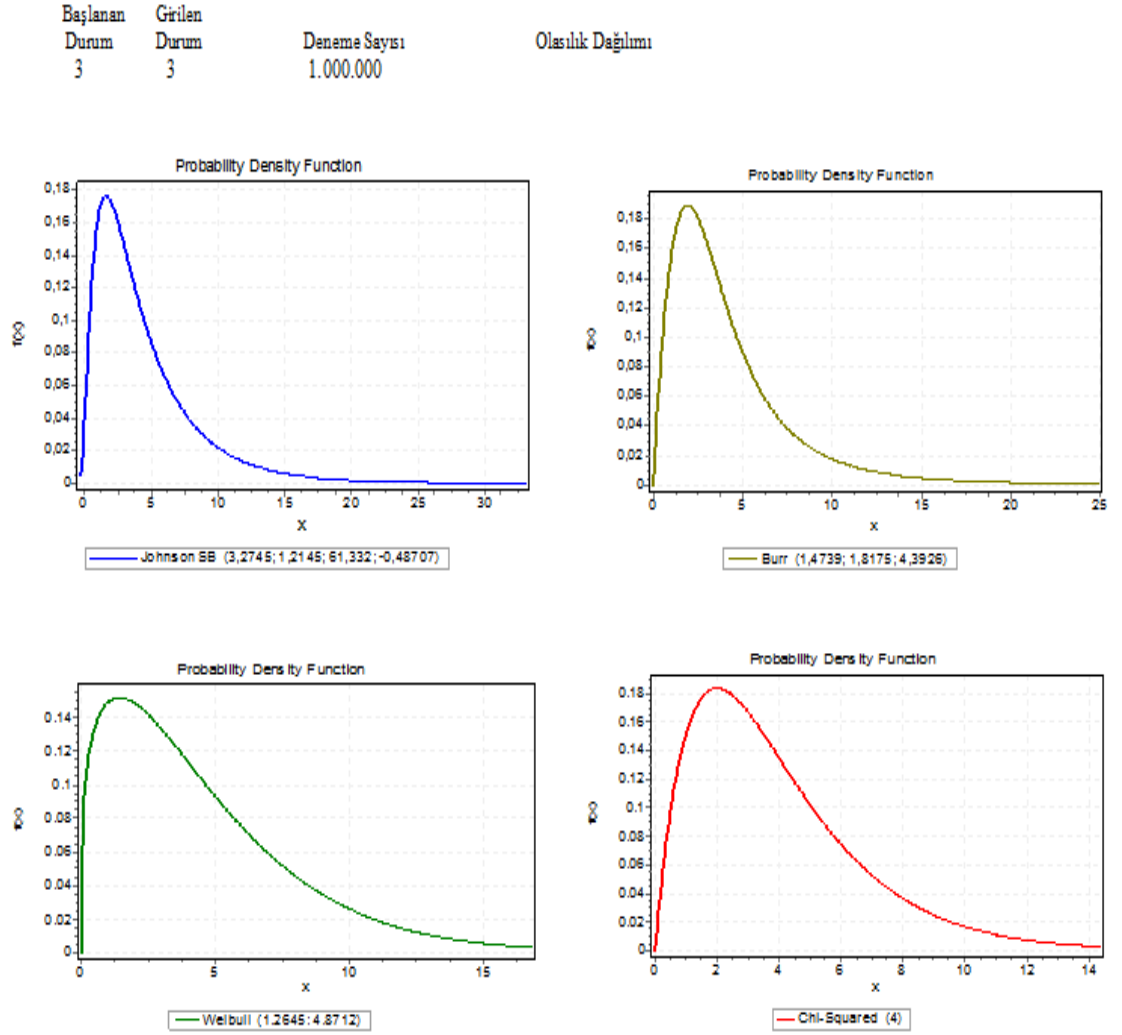
Şekil 2.8. İki durumundan başlayıp, bir durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



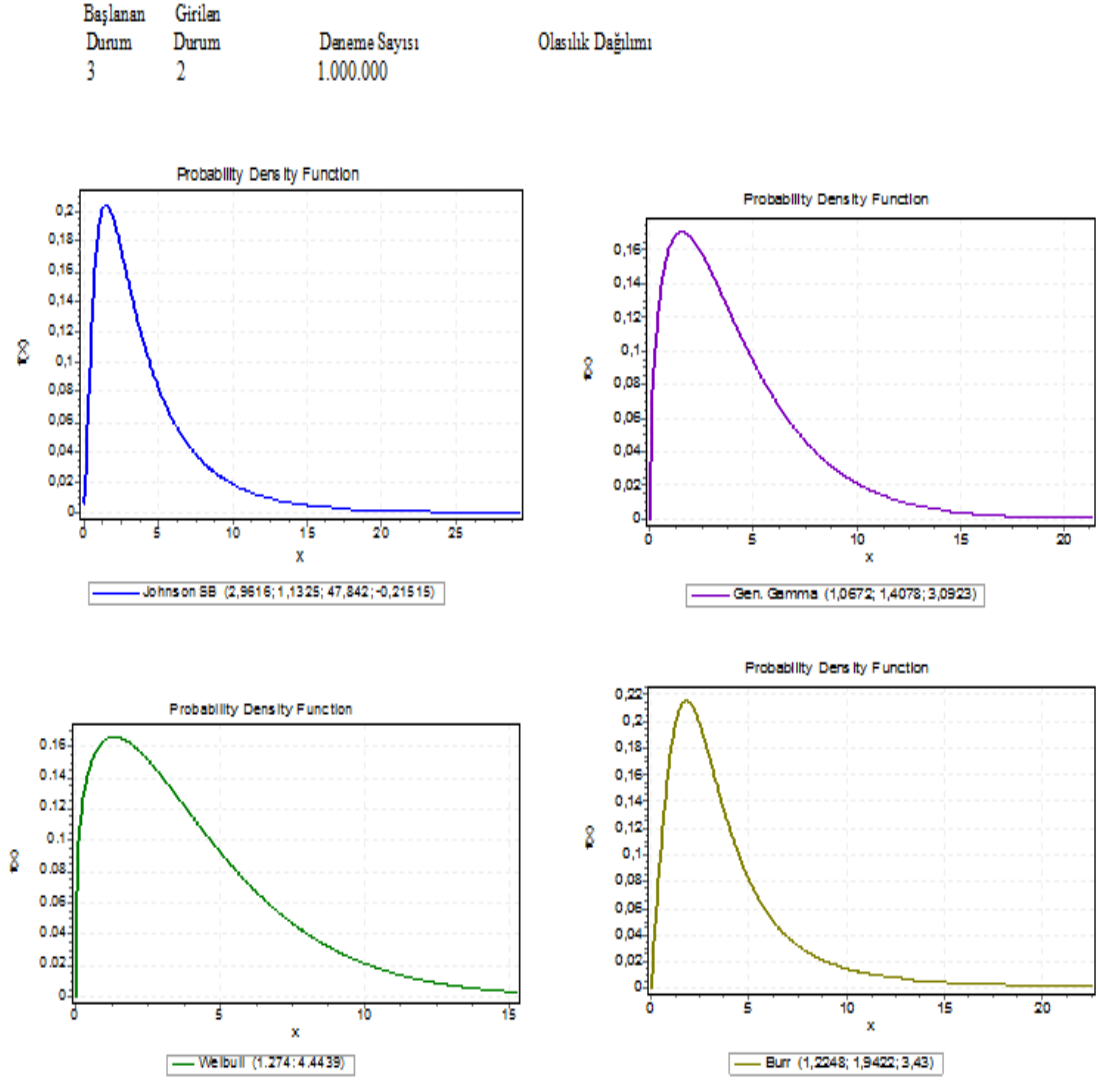
Şekil 2.9. Üç durumundan başlayıp, dört durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



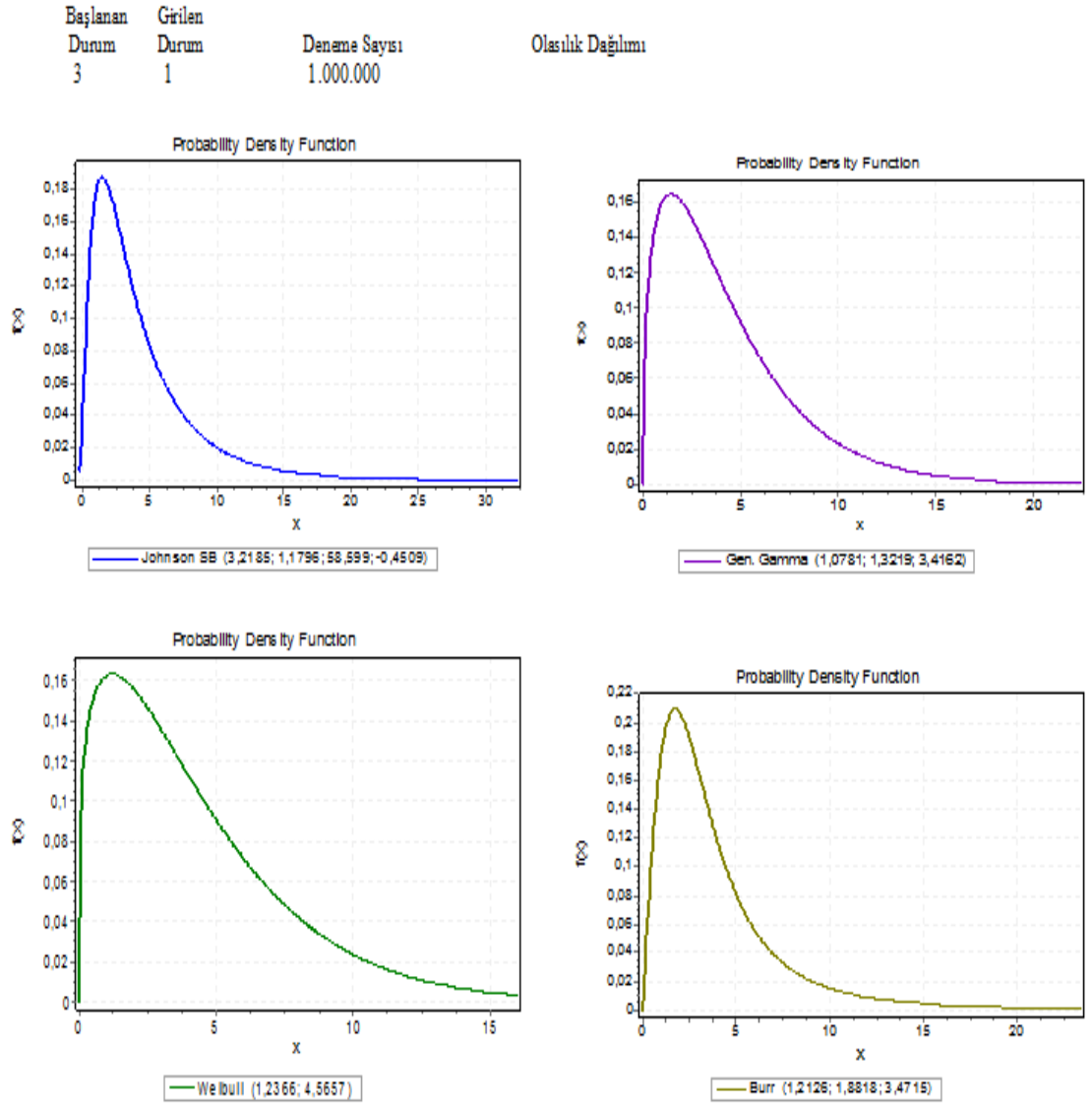
Şekil 2.10. Üç durumundan başlayıp, üç durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



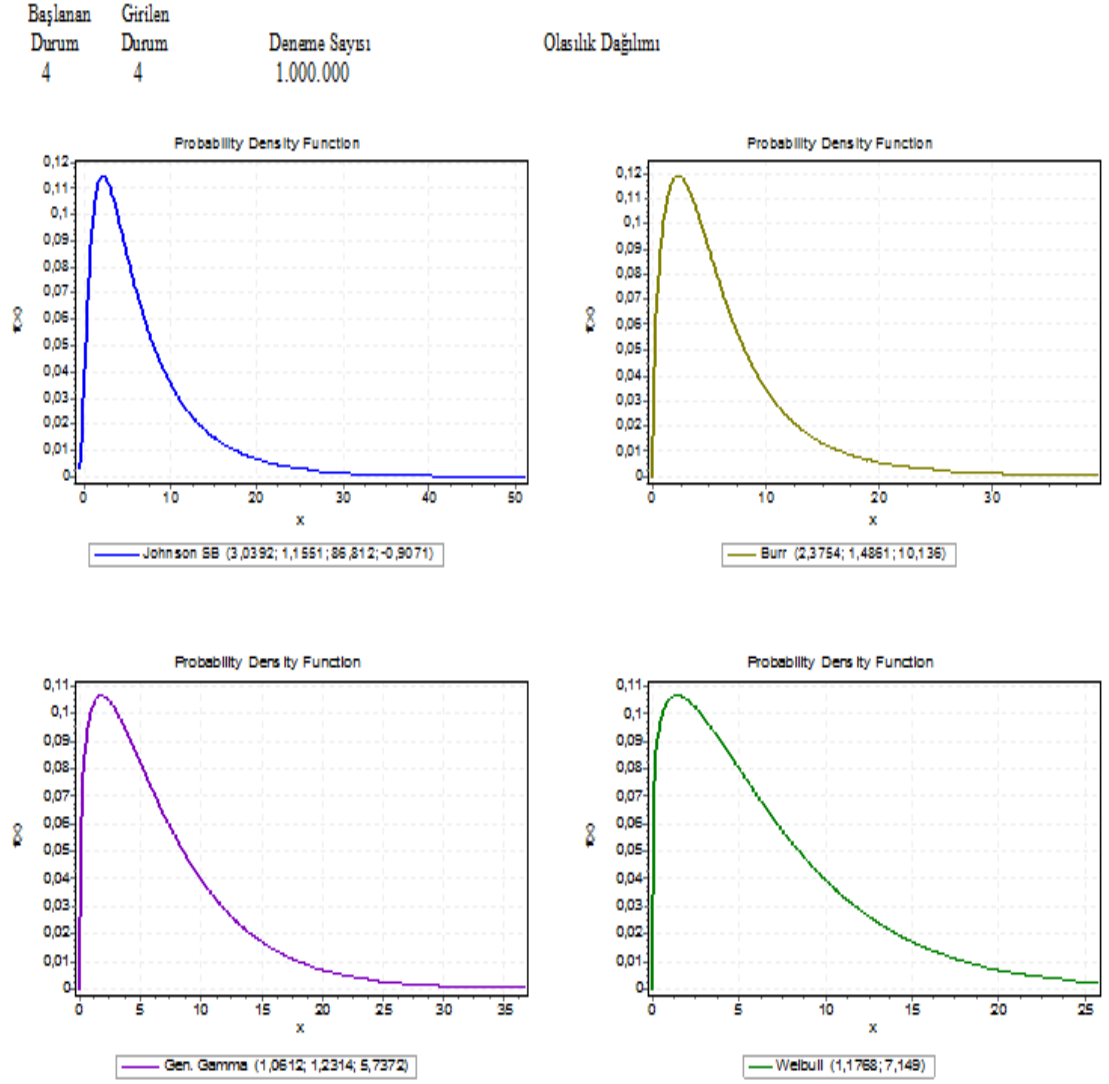
Şekil 2.11. Üç durumundan başlayıp, iki durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



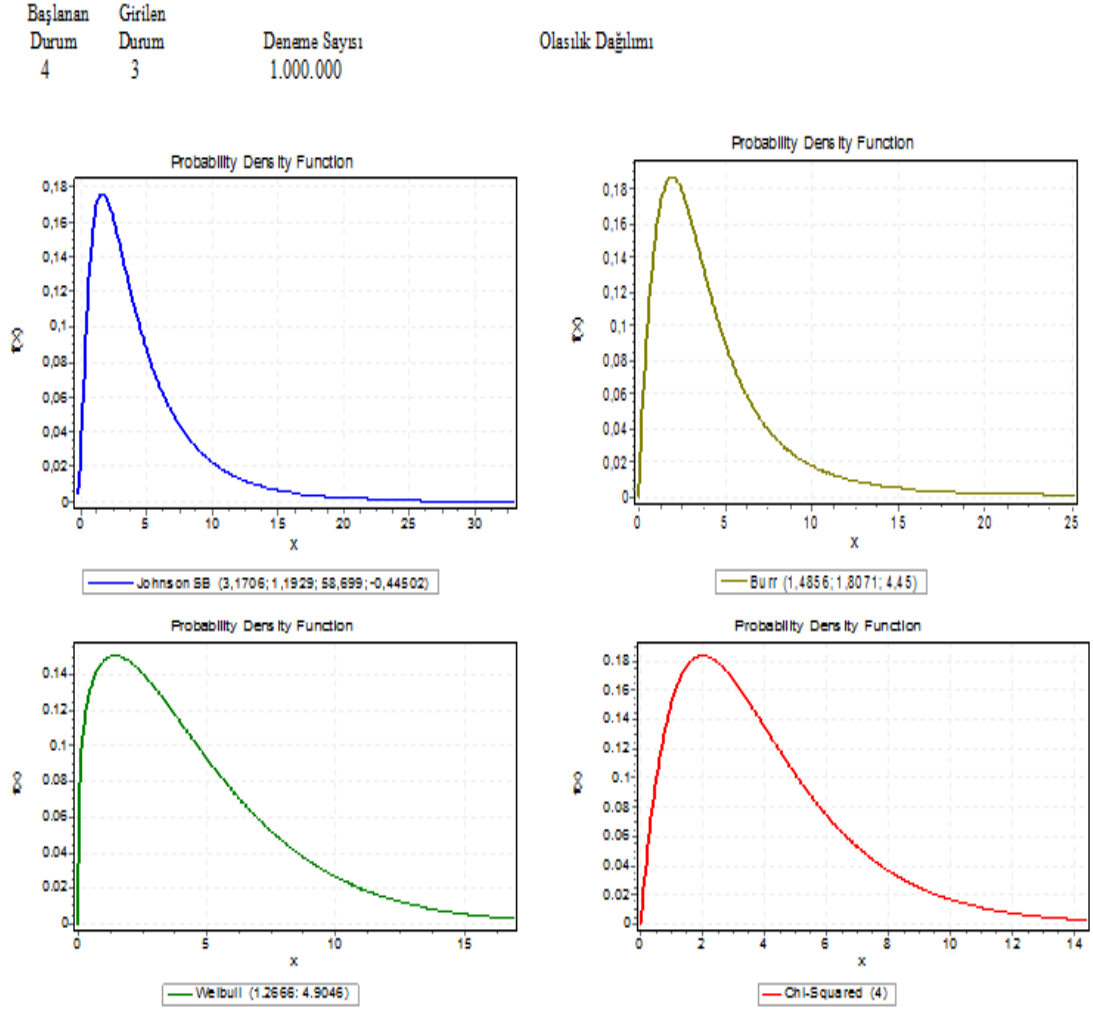
Şekil 2.12. Üç durumundan başlayıp, bir durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



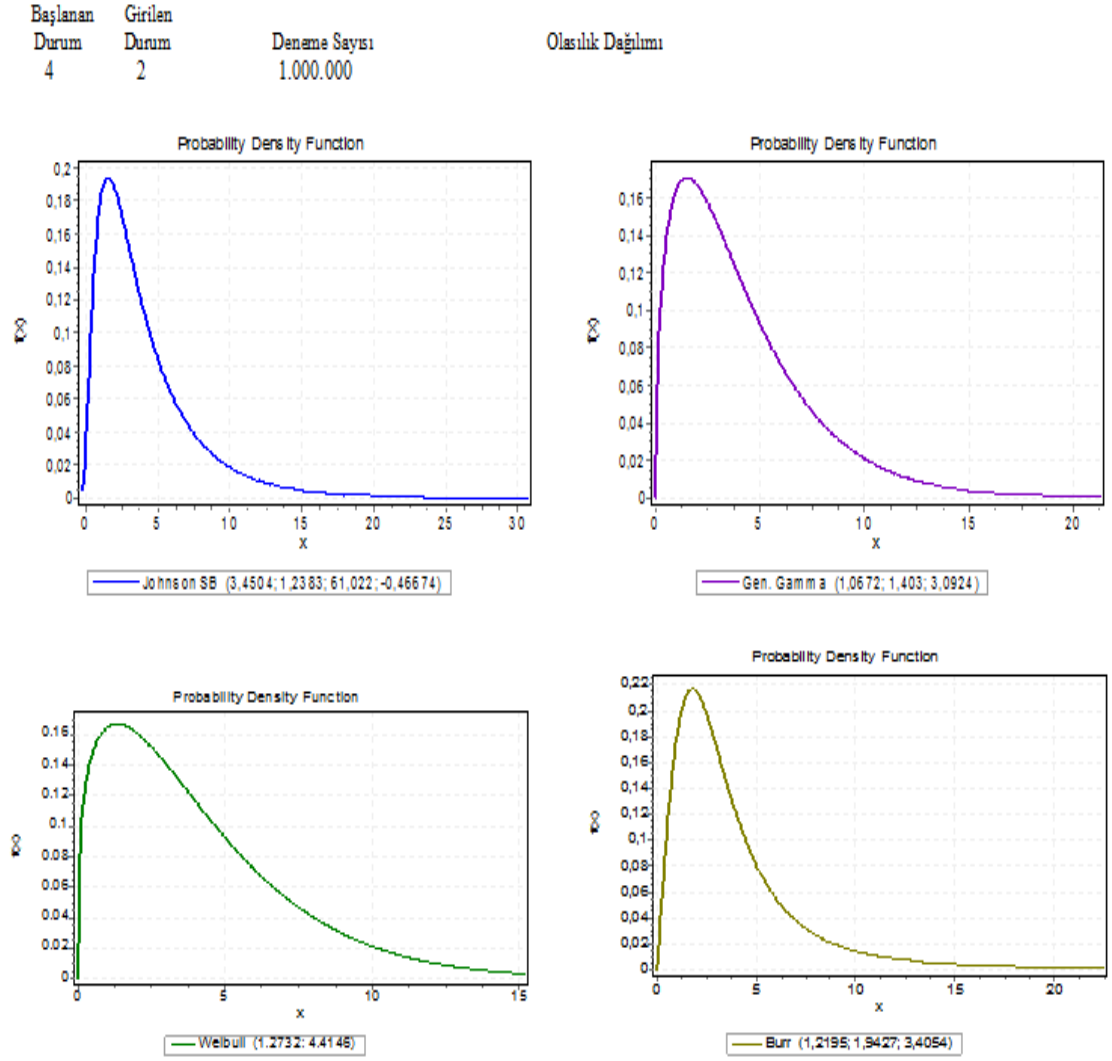
Şekil 2.13. Dört durumundan başlayıp, dört durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



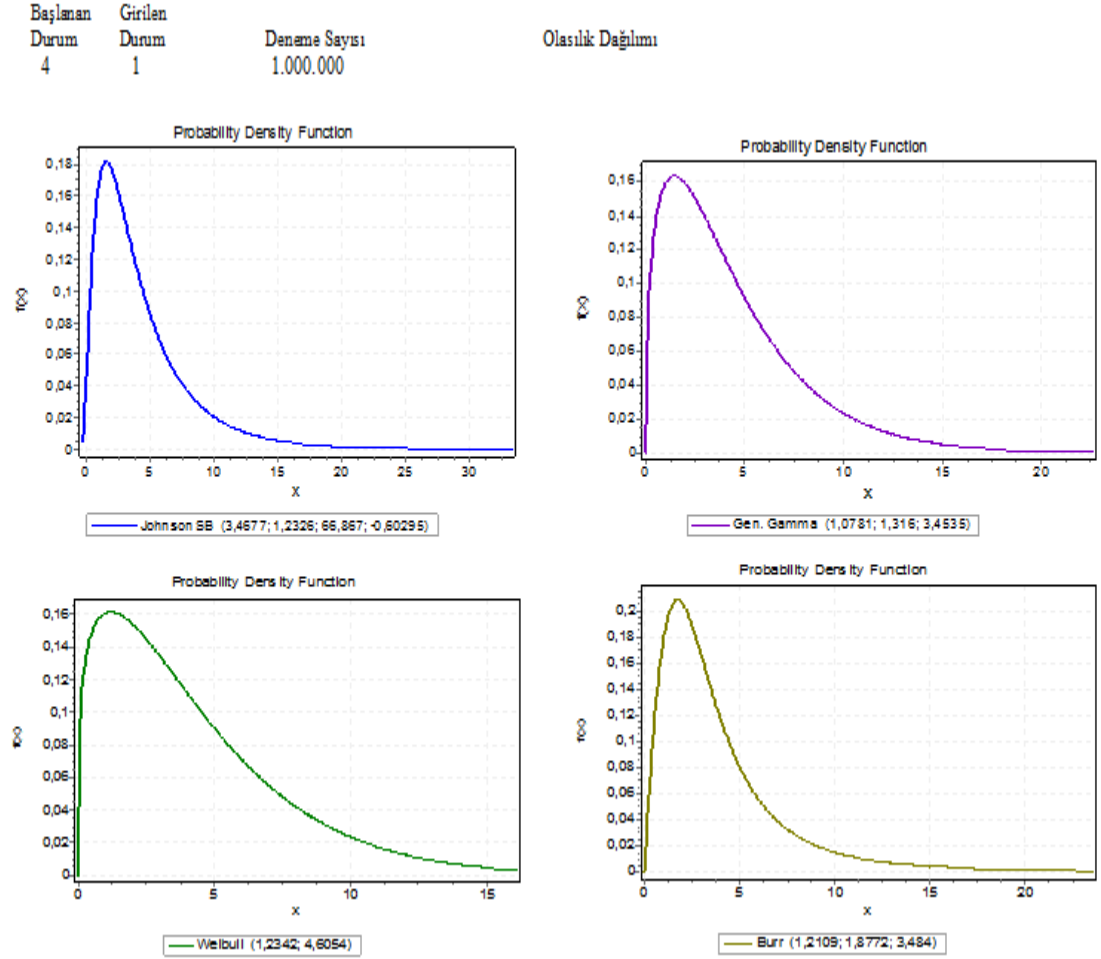
Şekil 2.14. Dört durumundan başlayıp, üç durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



Şekil 2.15. Dört durumundan başlayıp, iki durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



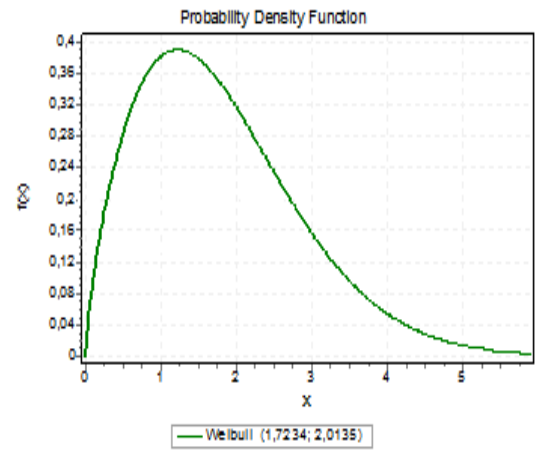
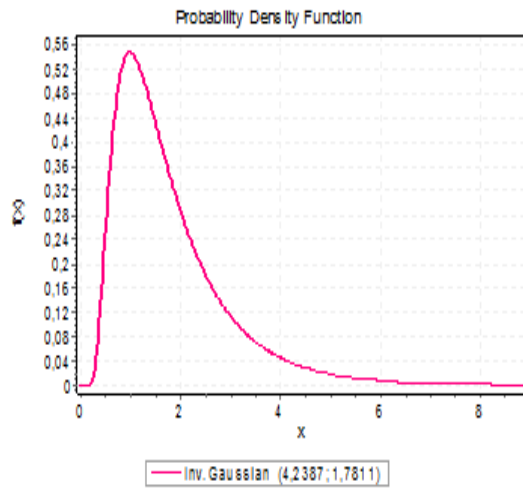
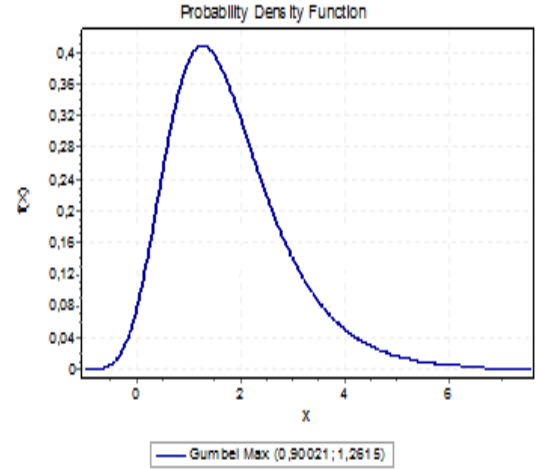
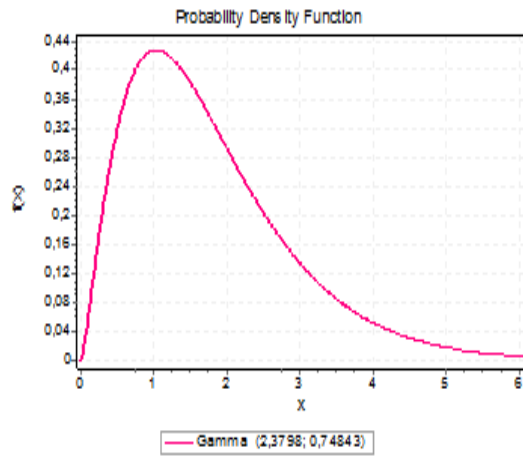
Şekil 2.16. Dört durumundan başlayıp, bir durumuna giriş yapan zincirin ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri

Yapılan Öbkeme
 $\{1,2\}, \{3\}, \{4\}$

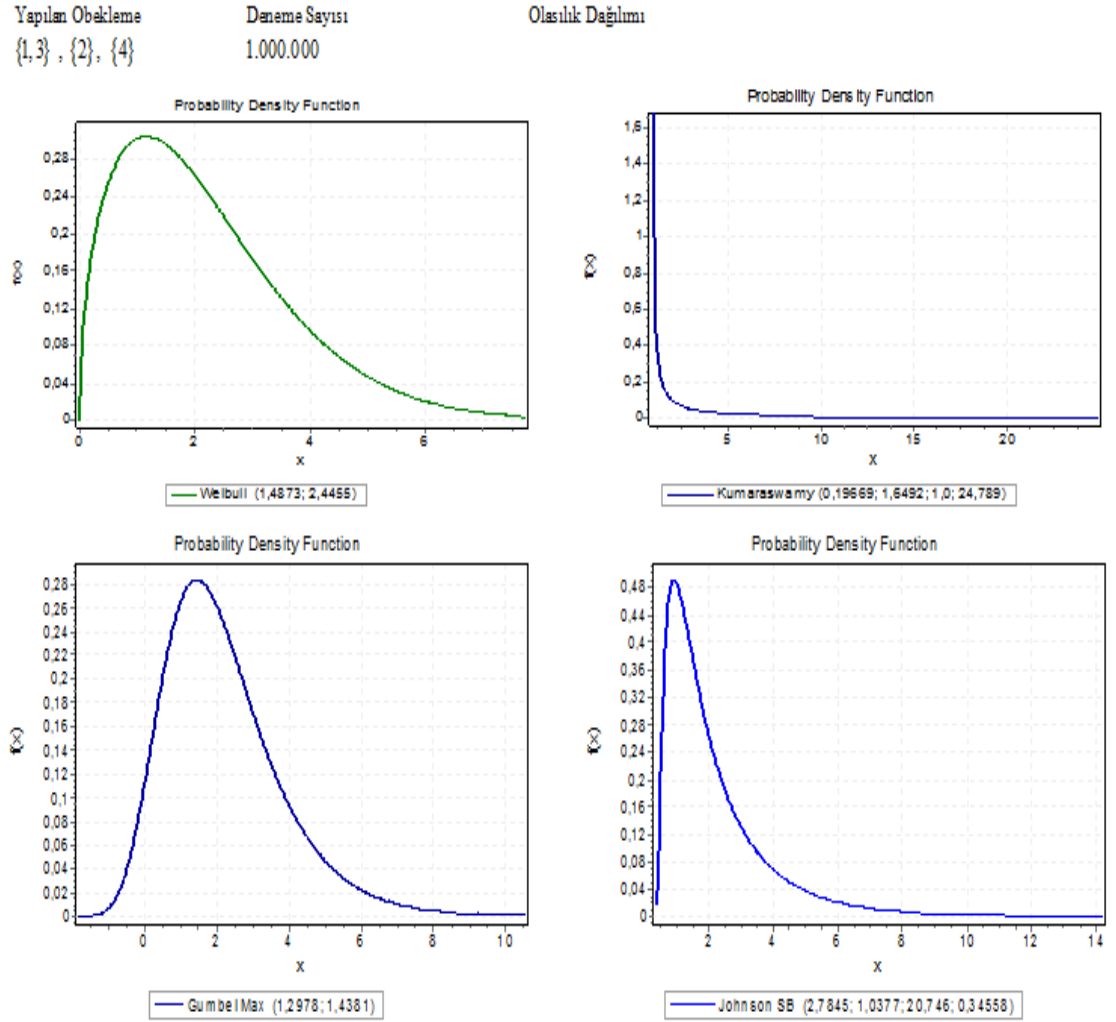
Deneme Sayısı
1.000.000

Olasılık Dağılımı



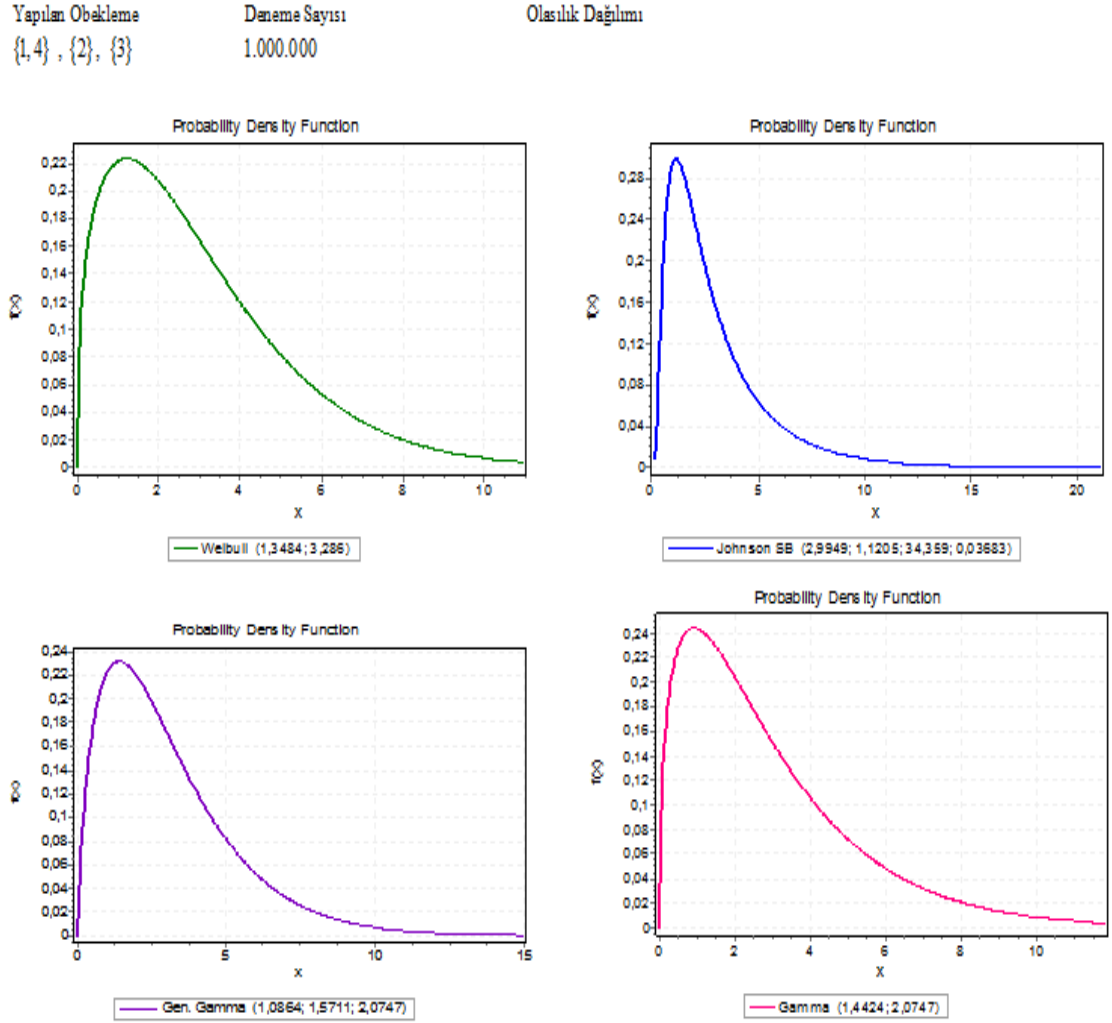
Şekil 2.17. $\{1,2\}, \{3\}, \{4\}$ öbklemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



Şekil 2.18. $\{1,3\}$, $\{2\}$, $\{4\}$ öbelemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



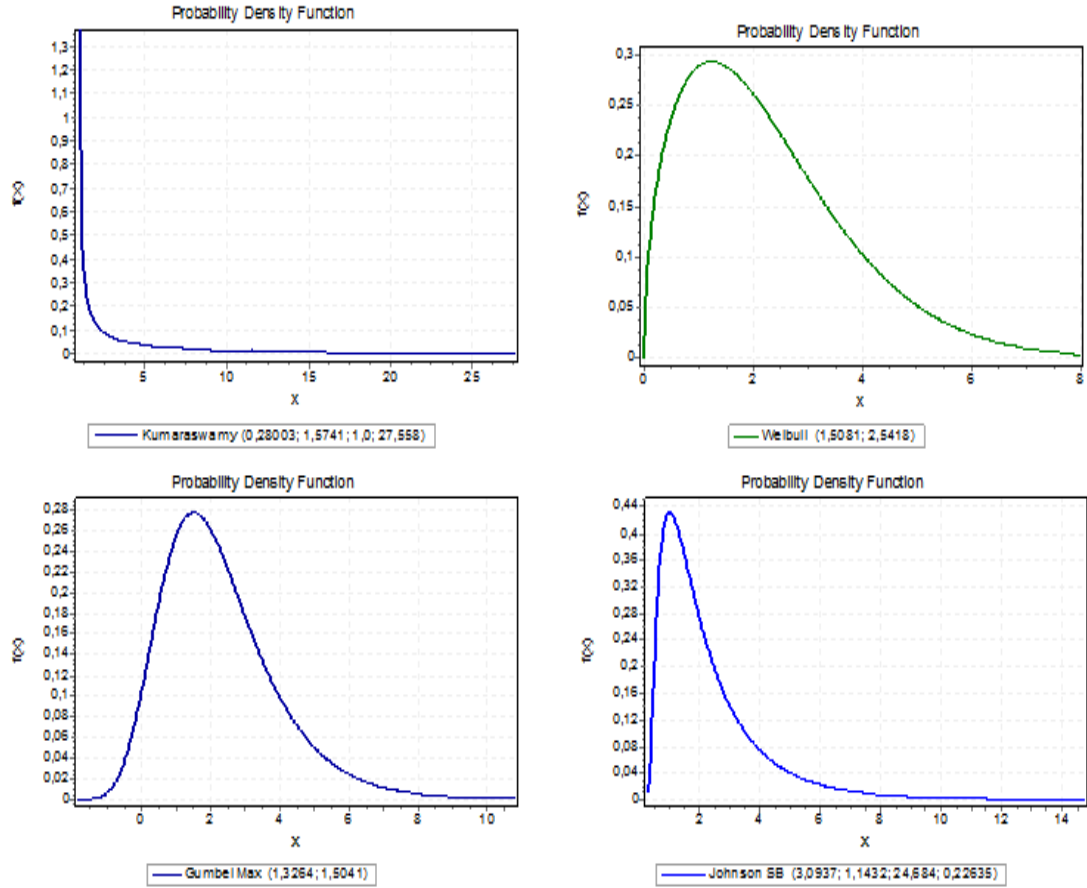
Şekil 2.19. $\{1,4\}, \{2\}, \{3\}$ öbelemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri

Yapılan Öbkeme
 $\{2,3\}, \{1\}, \{4\}$

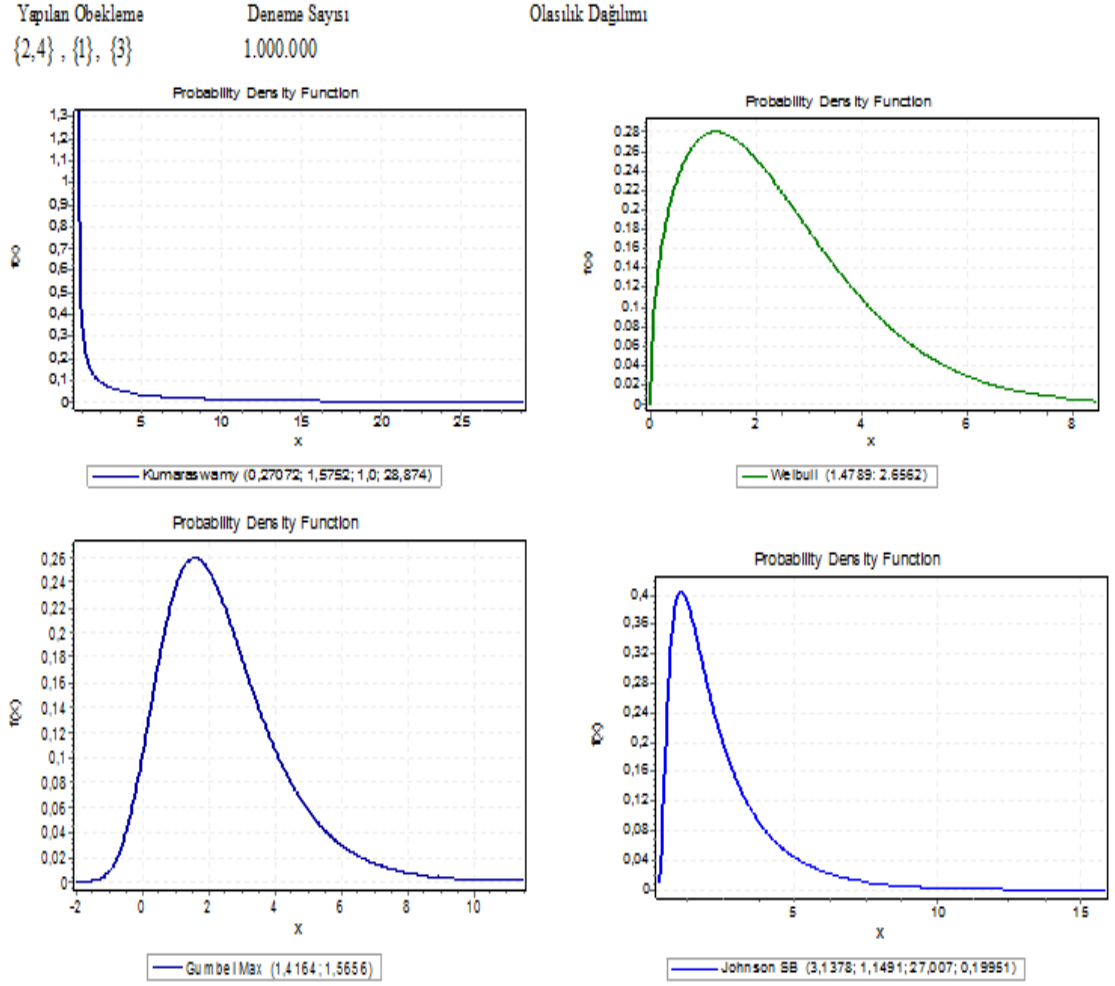
Deneme Sayısı
1.000.000

Olasılık Dağılımı



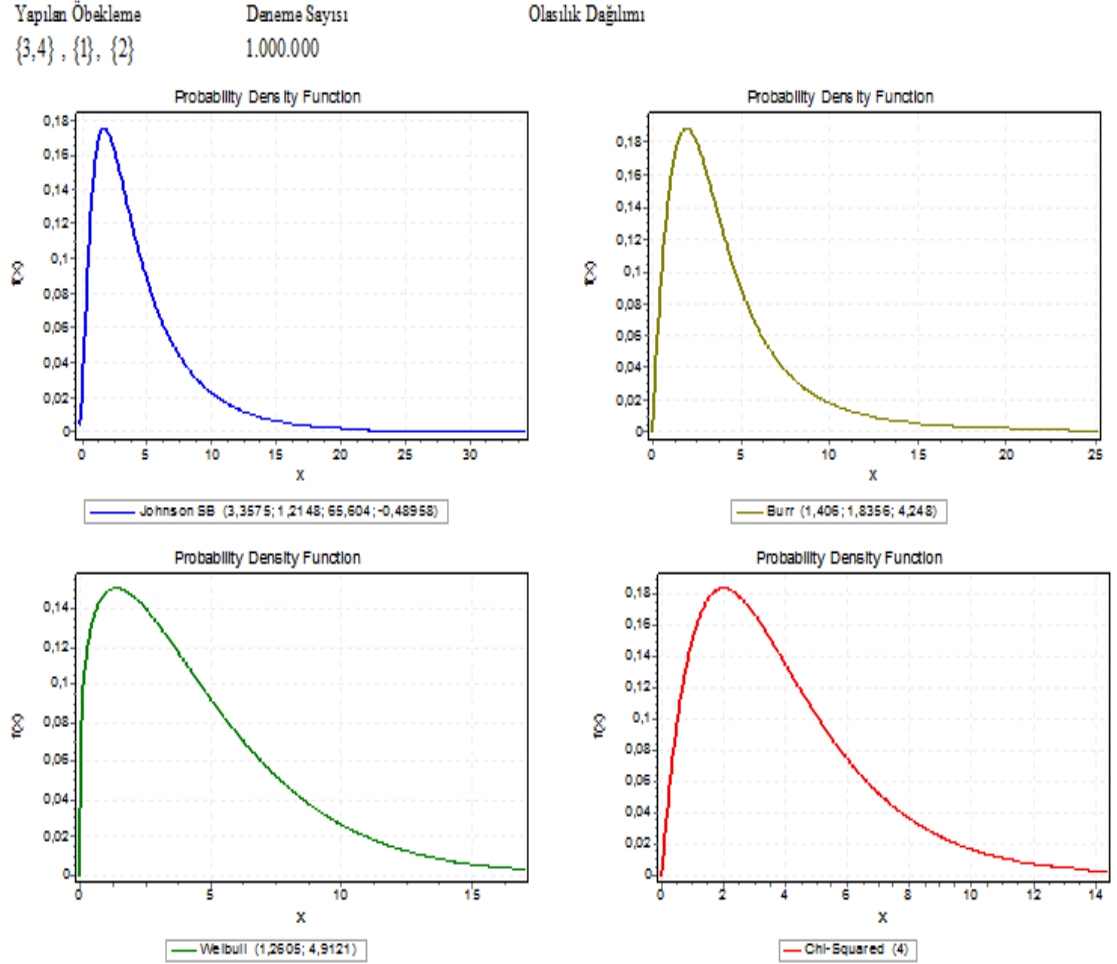
Şekil 2.20. $\{2,3\}, \{1\}, \{4\}$ öbkemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



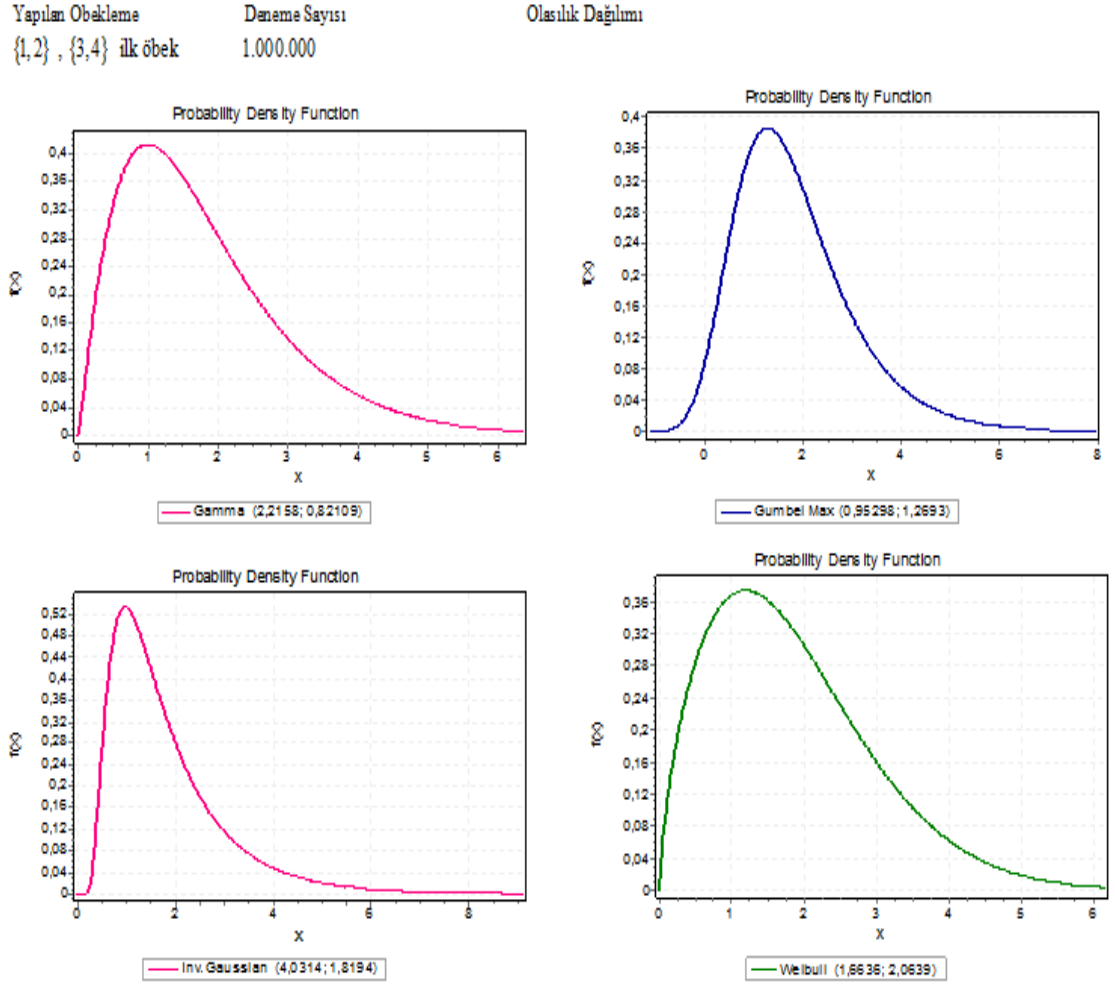
Şekil 2.21. $\{2,4\}, \{1\}, \{3\}$ öbelemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



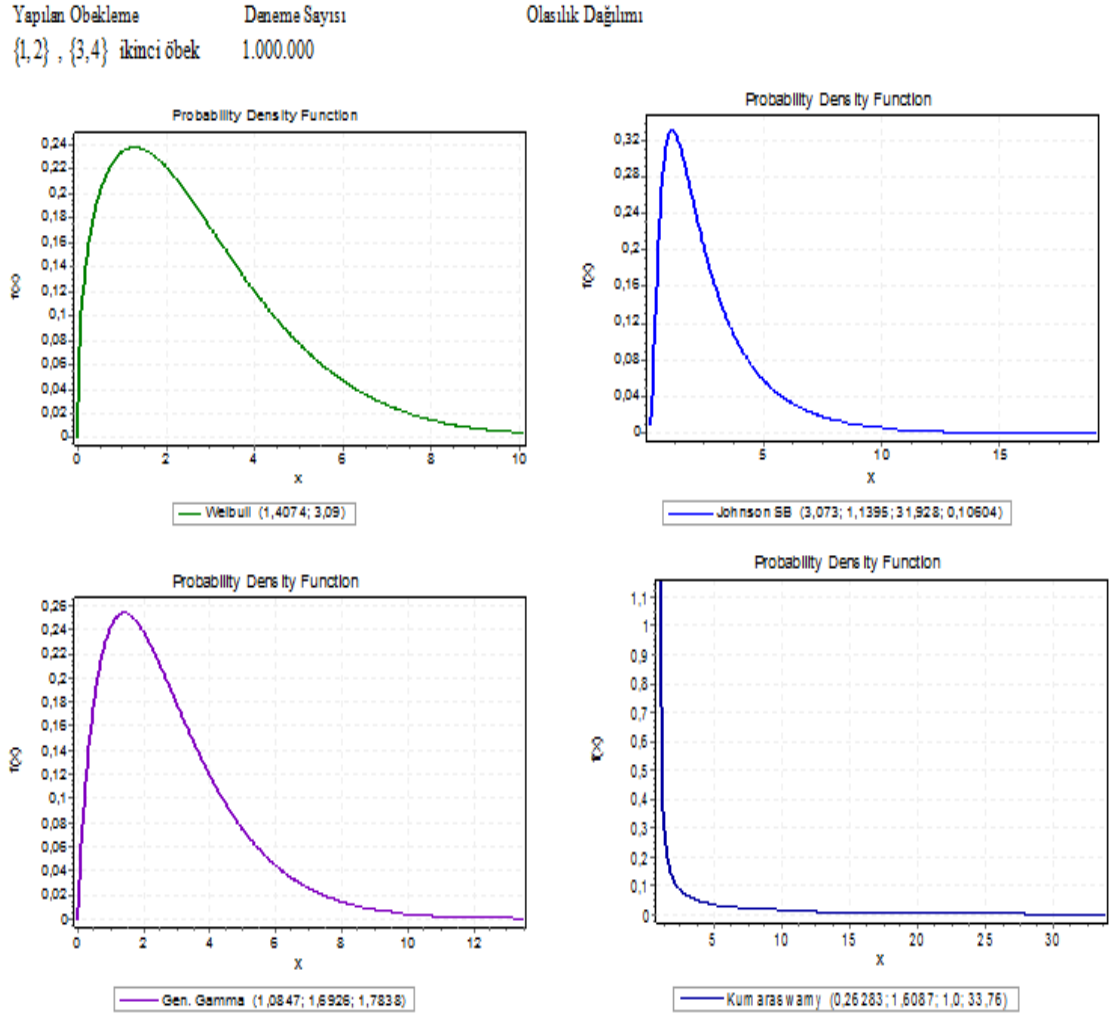
Şekil 2.22. $\{3,4\}, \{1\}, \{2\}$ öbelemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



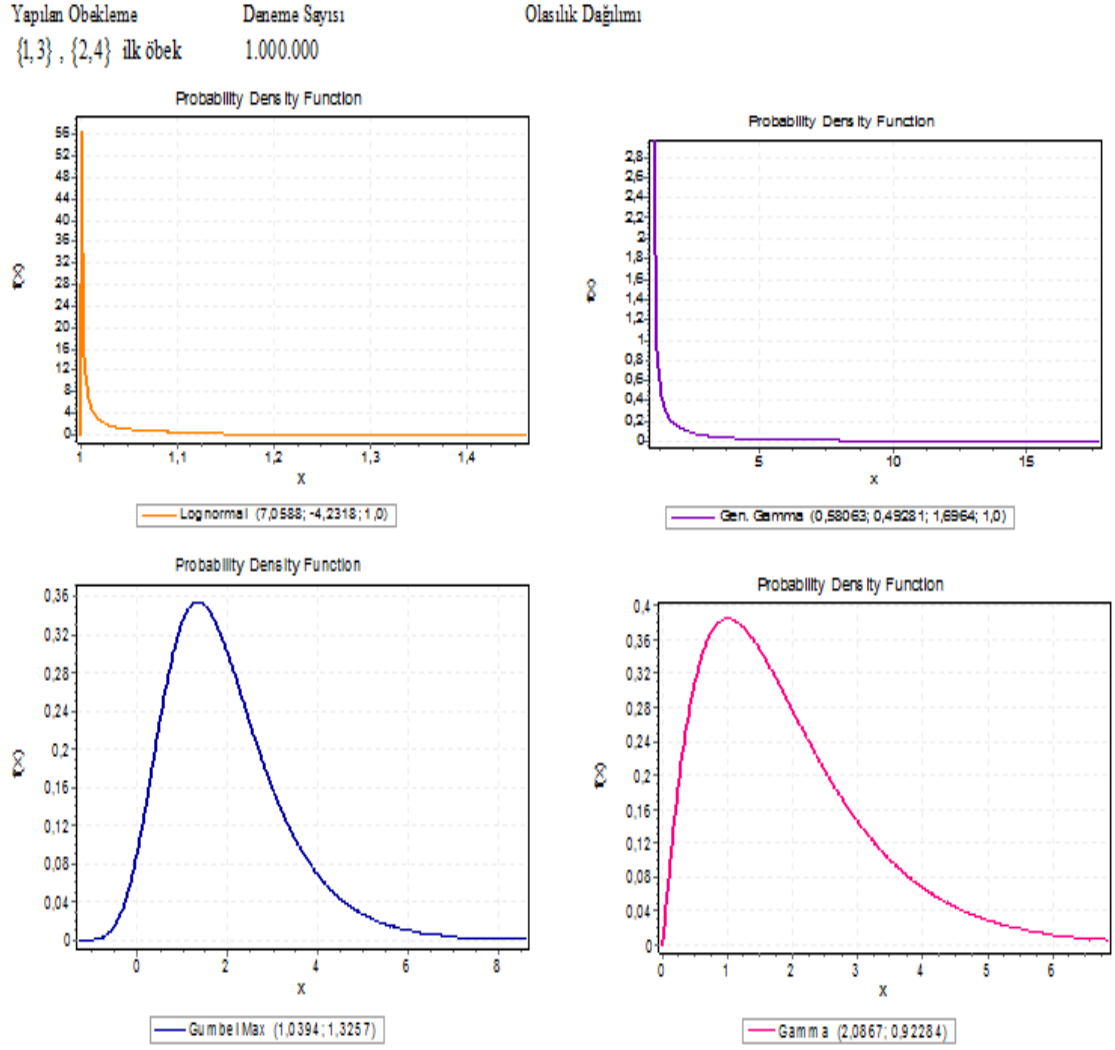
Şekil 2.23. $\{1,2\}$, $\{3,4\}$ ilk öbelemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



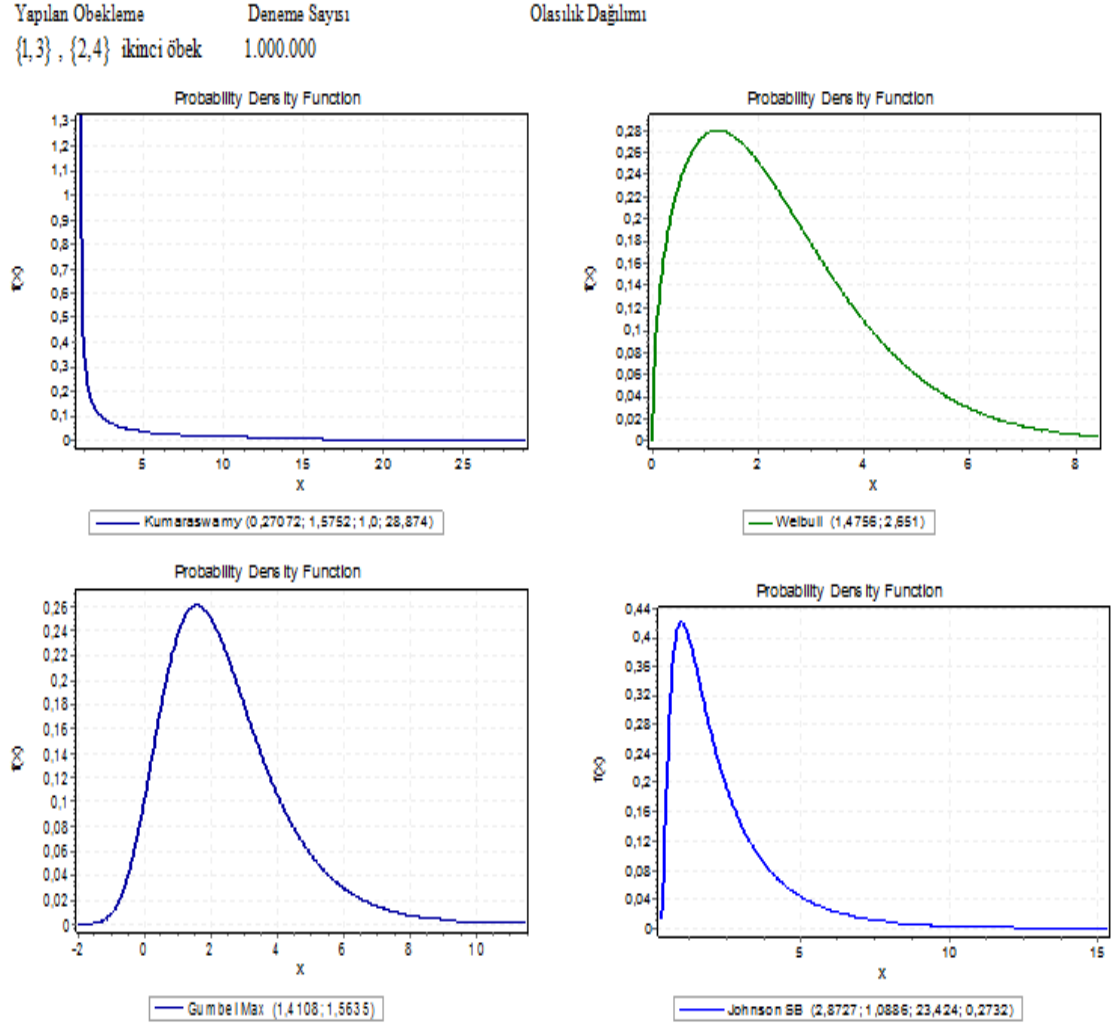
Şekil 2.24. $\{1,2\}$, $\{3,4\}$ ikinci öbelemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



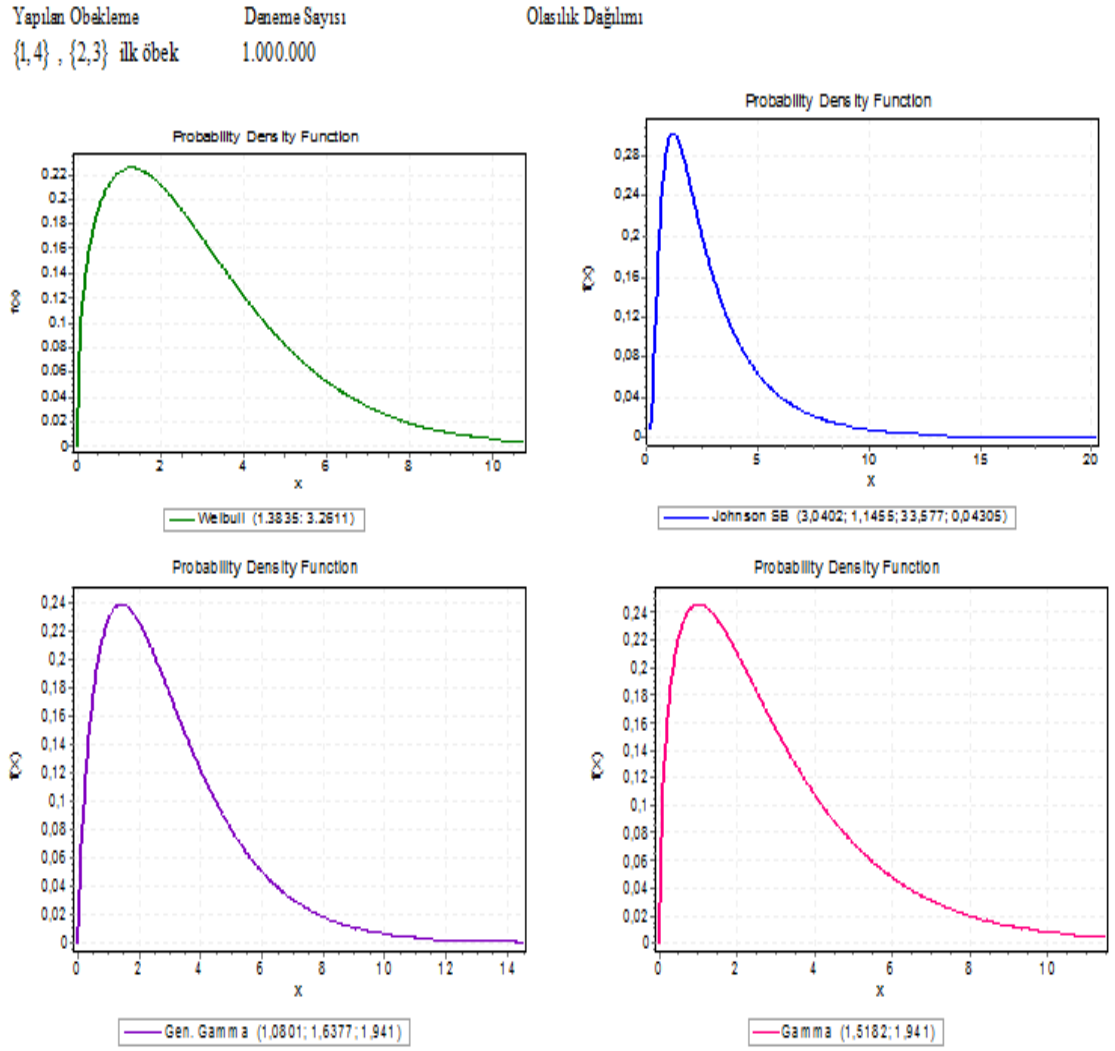
Şekil 2.25. $\{1,3\}, \{2,4\}$ ilk öbeklemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



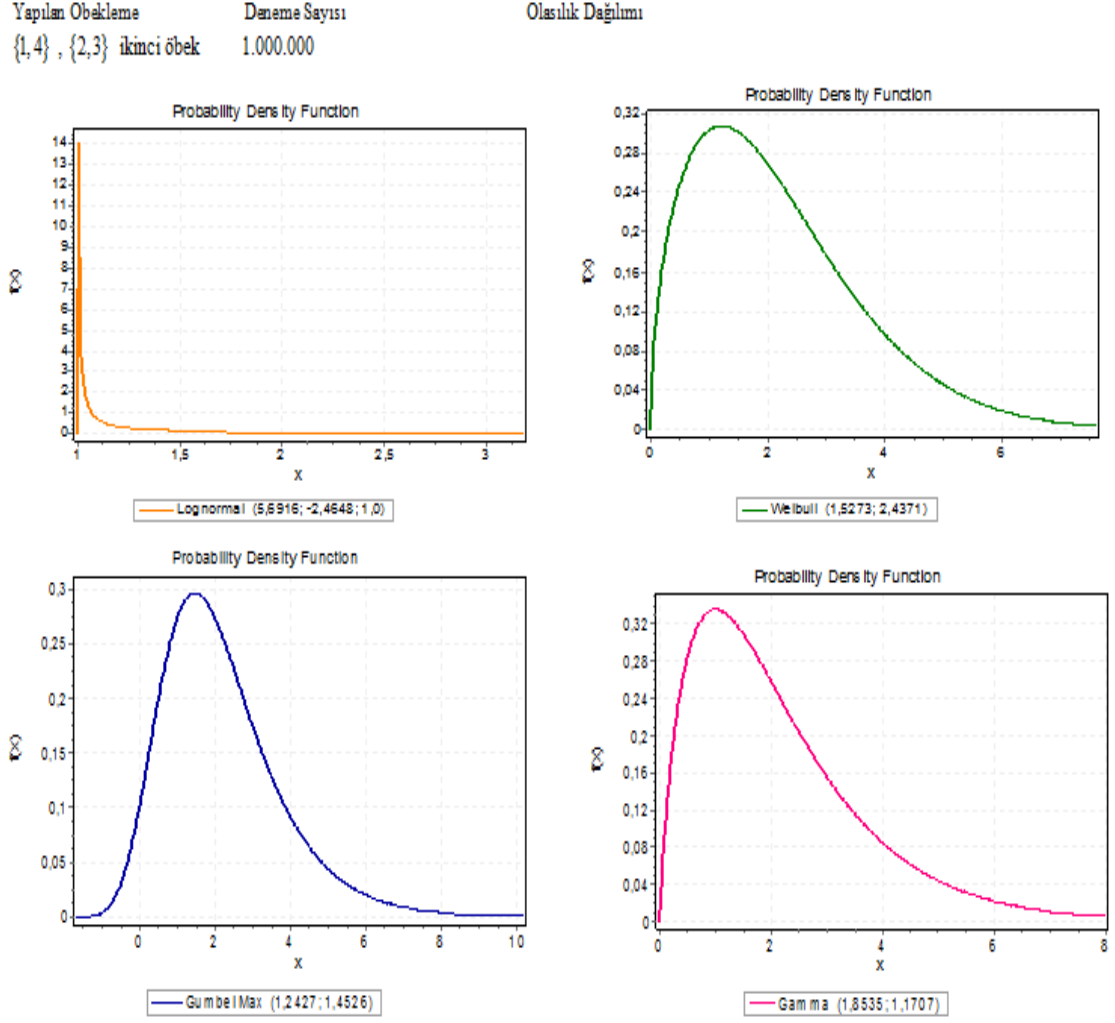
Şekil 2.26. $\{1,3\}, \{2,4\}$ ikinci öbelemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



Şekil 2.27. $\{1,4\}, \{2,3\}$ ilk öbelemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



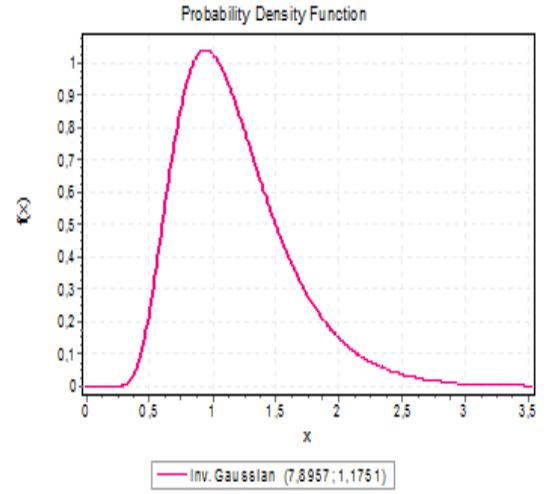
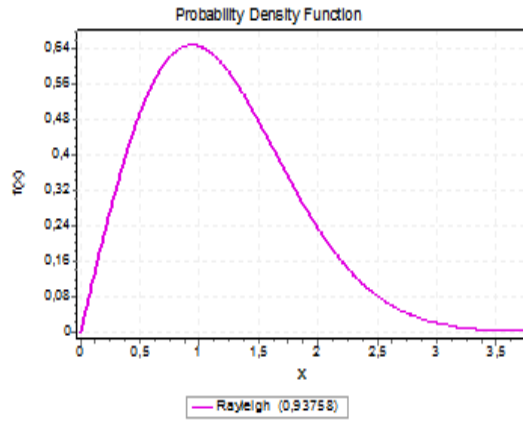
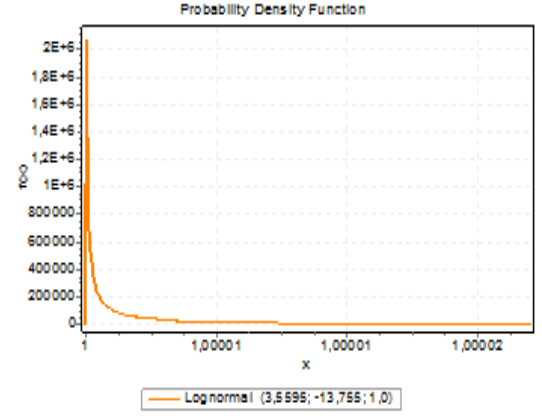
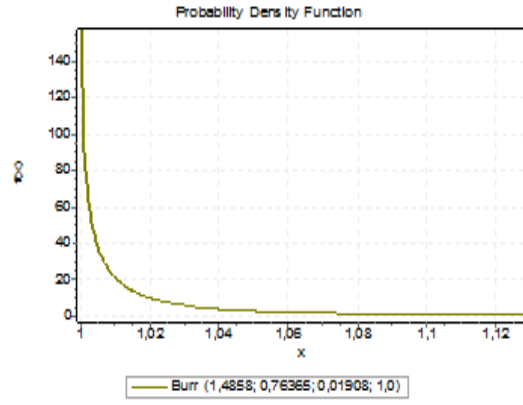
Şekil 2.28. $\{1, 4\}, \{2, 3\}$ ikinci öbelemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri

Yapılan Öbkeme
 $\{1, 2, 3\}, \{4\}$

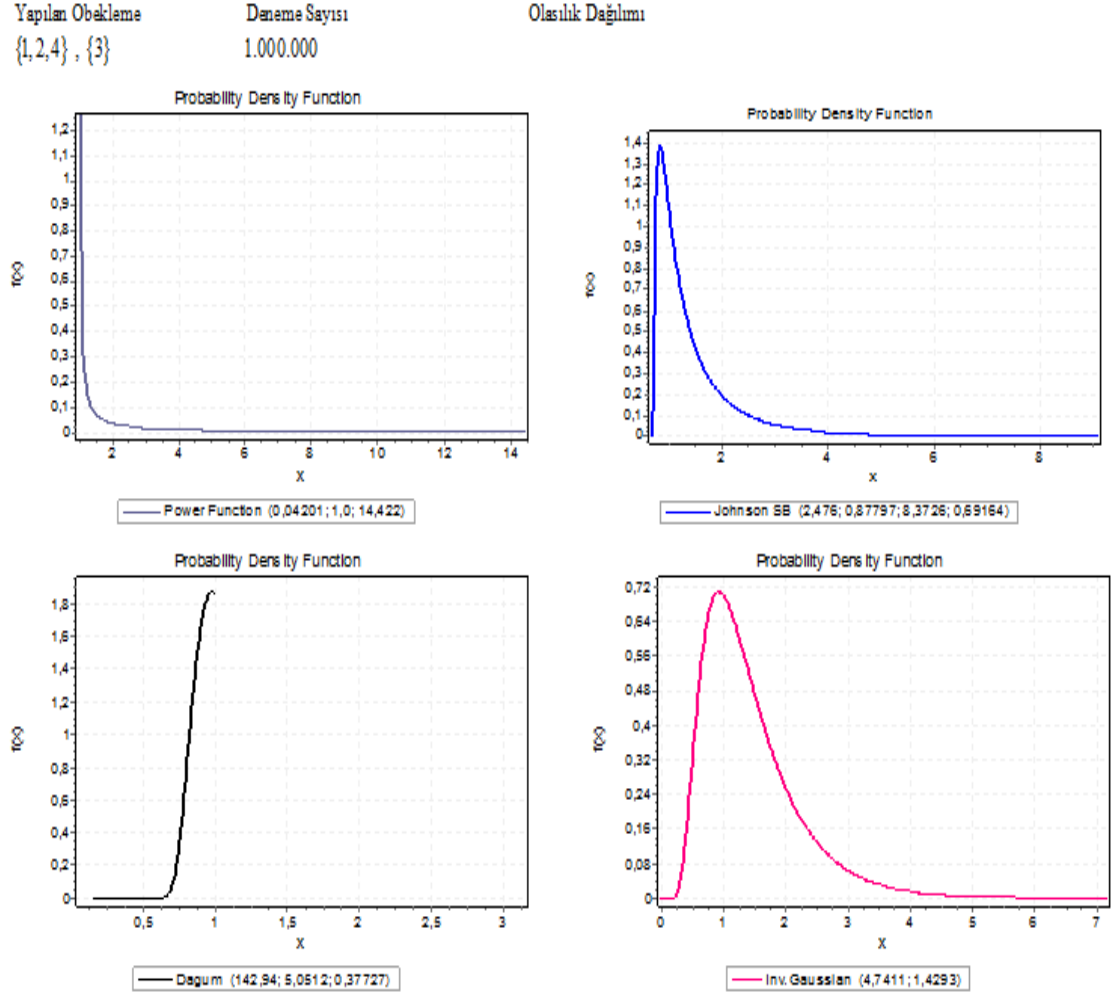
Deneme Sayısı
1.000.000

Olasılık Dağılımı



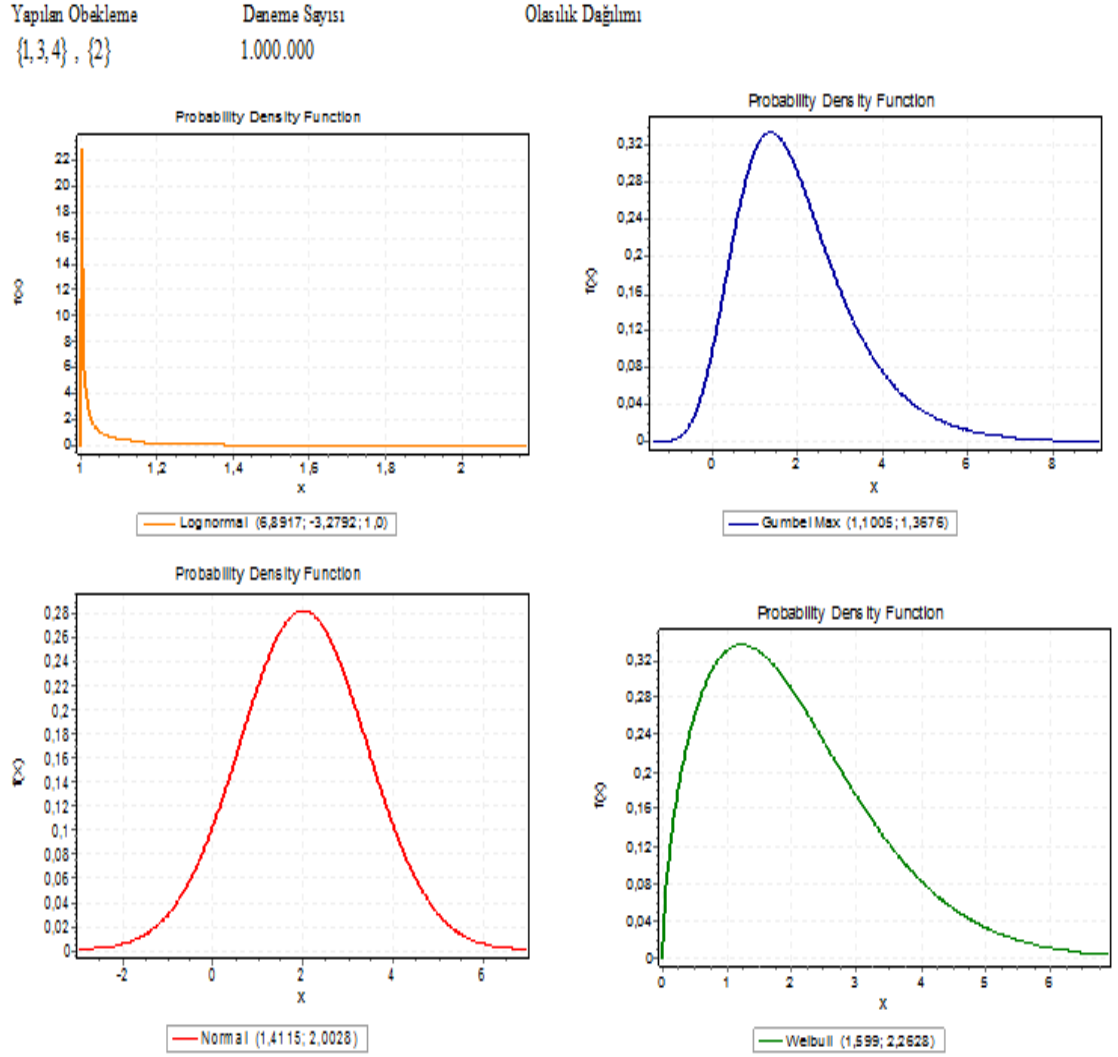
Şekil 2.29. $\{1, 2, 3\}, \{4\}$ öbkemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



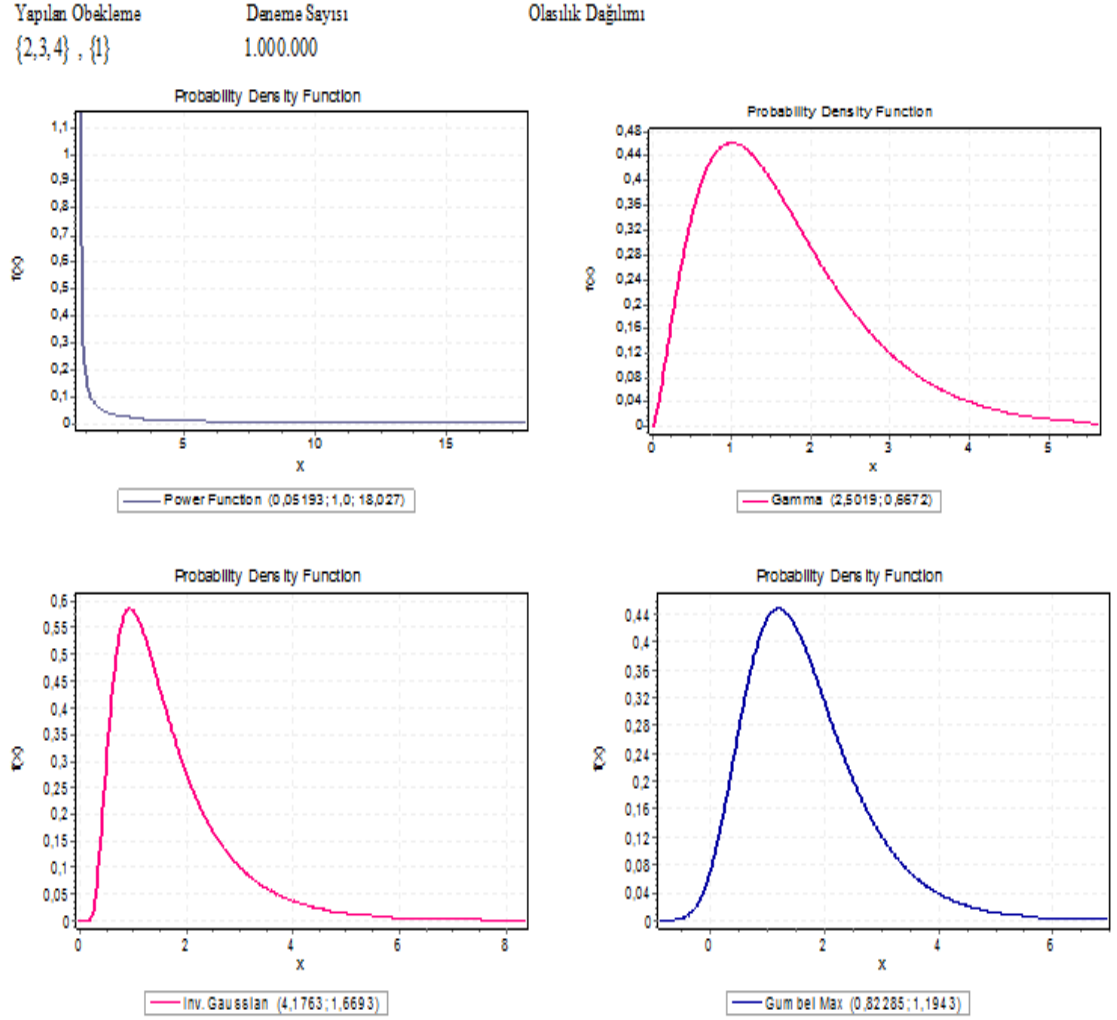
Şekil 2.30. $\{1, 2, 4\}, \{3\}$ öbelemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



Şekil 2.31. $\{1, 3, 4\}, \{2\}$ öbelemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-2. (Devam) İlk geçiş zamanı dağılımının olasılık dağılım grafikleri



Şekil 2.32. $\{2,3,4\}, \{1\}$ öbelemesine göre ilk geçiş zamanı dağılımlarının grafikleri

EK-3. Değişik geçiş matrisleri ve BIST-100 uygulaması

$$P = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.30 & 0.30 & 0.30 \\ 0.70 & 0.10 & 0.10 & 0.10 \\ 0.60 & 0.20 & 0.10 & 0.10 \\ 0.50 & 0.30 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix}$$

Çizelge 3.1. Geçiş olasılıkların toplamı köşegenin altında daha büyük olması halinde durumlara göre ilk geçiş zamanı dağılımları

Sıra	Başlanan Durum	Girilen Durum	İlk Geçiş Zamanı Dağılımı 1.000.000 deneme	Kolmogorov Smirnov uyum iyiliği p değeri
1	1	4	Johnson SB	0,16939
2	1	3	Johnson SB	0,10531
3	1	2	Gen.Pareto	0,50221
4	1	1	Gumbel Max	0,21642
5	2	4	Weibull	0,46227
6	2	3	Weibull	0,37109
7	2	2	Johnson SB	0,46403
8	2	1	Power Function	0,75831
9	3	4	Gen.Pareto	0,59340
10	3	3	Johnson SB	0,51128
11	3	2	Johnson SB	0,49253
12	3	1	Log Logistic(3P)	0,70011
13	4	4	Johnson SB	0,68278
14	4	3	Johnson SB	0,64466
15	4	2	Johnson SB	0,33246
16	4	1	Gamma	0,34194

EK-3. (Devam) Değişik geçiş matrisleri ve BIST-100 uygulaması

$$P = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.10 & 0.30 & 0.50 \\ 0.10 & 0.10 & 0.20 & 0.60 \\ 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.70 \\ 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.10 \end{bmatrix}$$

Çizelge 3.2. Geçiş olasılıkların toplamı köşegenin üstünde daha büyük olması halinde durumlara göre ilk geçiş zamanı dağılımları

Sıra	Başlanan Durum	Girilen Durum	İlk Geçiş Zamanı Dağılımı 1.000.000 deneme	Kolmogorov Smirnov uyum iyiliği p değeri
1	1	4	Gamma	0,29384
2	1	3	Johnson SB	0,36730
3	1	2	Johnson SB	0,72886
4	1	1	Johnson SB	0,67541
5	2	4	Power Function	0,24557
6	2	3	Johnson SB	0,59072
7	2	2	Gen.Pareto	0,54620
8	2	1	Gen.Pareto	0,59466
9	3	4	Power Function	0,60322
10	3	3	Johnson SB	0,47313
11	3	2	Weibull	0,44747
12	3	1	Weibull	0,43925
13	4	4	Gumbel Max	0,18423
14	4	3	Beta	0,61081
15	4	2	Johnson SB	0,16170
16	4	1	Johnson SB	0,14095

EK-3. (Devam) Değişik geçiş matrisleri ve BIST-100 uygulaması

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.24 & 0.26 & 0.25 \\ 0.21 & 0.27 & 0.28 & 0.24 \\ 0.24 & 0.27 & 0.25 & 0.24 \\ 0.26 & 0.24 & 0.21 & 0.29 \end{bmatrix}$$

Çizelge 3.3. BIST-100 uygulaması için durumlara göre ilk geçiş zamanı dağılımları

Sıra	Başlanan Durum	Girilen Durum	İlk Geçiş Zamanı Dağılımı	Kolmogorov Smirnov uyum iyiliği p değeri
1	1	4	Beta	0,68896
2	1	3	Johnson SB	0,57695
3	1	2	Johnson SB	0,75183
4	1	1	Johnson SB	0,75222
5	2	4	Beta	0,77236
6	2	3	Johnson SB	0,57197
7	2	2	Beta	0,65354
8	2	1	Johnson SB	0,84995
9	3	4	Beta	0,83849
10	3	3	Johnson SB	0,66633
11	3	2	Johnson SB	0,49353
12	3	1	Beta	0,88534
13	4	4	Beta	0,97635
14	4	3	Johnson SB	0,83905
15	4	2	Beta	0,71199
16	4	1	Johnson SB	0,59586

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : GÜL, Murat
 Uyuğu : T.C.
 Doğum yeri ve tarihi : 21.03.1980 K.Maraş
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0(542) 732 10 07
 Faks : -
 e-mail : murat.gul@giresun.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/İstatistik Bölümü	2006
Lisans	Gazi Üniversitesi/İstatistik Bölümü	2003
Lise	Tınaztepe Lisesi	1997

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2007-2010	Halk Bankası-Bakanlıklar Şb.	Servis Yetkilisi
2010- ...	Giresun Üniversitesi-İstatistik Bölümü	Öğretim Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Gül, M., Çelebioğlu S., “İstanbul Menkul Kıymetler Borsası’nda Hisse Senedi Alım Satımlarında Markoviyen Duraklama Üzerine Bir Deneme”, **15. İstatistik Araştırma Sempozyumu**, Ankara, 112-113 (2006).
2. Gül,M., Çelebioğlu S., “Evaluating First Passage Times in Markov Chains From The Perspective of Asymptotic and Empirical Information”, **Journal of Science and Technology**, 3(1), 28-46 (2013).