

**MARKOVİYEN OPTİMAL DURAKLAMA PROBLEMİNİN
İYİLEŞTİRİLMESİ VE İMKB’DE BİR UYGULAMA**

Hatice ÖNCEL ÇEKİM

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Haziran 2011

ANKARA

Hatice ÖNCEL ÇEKİM tarafından hazırlanan “MARKOVİYEN OPTİMAL DURAKLAMA PROBLEMİNİN İYİLEŞTİRİLMESİ VE İMKB’DE BİR UYGULAMA” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

.....

Tez Danışmanı, İstatistik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İstatistik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Reşat KASAP

.....

İstatistik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK

.....

İstatistik Anabilim Dalı, A.Ü.

Tarih: 09/06/2011

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hatice ÖNCEL ÇEKİM

**MARKOVİYEN OPTİMAL DURAKLAMA PROBLEMİNİN
İYİLEŞTİRİLMESİ VE İMKB’DE BİR UYGULAMA
(Yüksek Lisans Tezi)**

Hatice ÖNCEL ÇEKİM

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Haziran 2011

ÖZET

Borsada yatırımcıların zorlandığı önemli konulardan biri de hisse senetlerini ne zaman satacağını bilememek, doğru zamanlamayı yapamamaktır. Zamanında yapılmayan satımlar sahip olunan hisse senedi miktarını dengesizleştirmekte ve böylelikle hisse senedi başına kâr miktarı düşmektedir.

Bu çalışmada, İstanbul Menkul Kıymetler Borsasının 2 Ocak 1997- 1 Nisan 2007 tarihlerini içeren 5110 seanslık borsa kapanış endeks değeri kullanılarak hisse senetleri için en doğru satış zamanı bulunmaya çalışılmıştır. Markoviyen Optimal Duraklama Yönteminin düşük enflasyonlu ortamda ortaya çıkan bir dezavantajı da, hisse senetlerinin satışlarında ağır davranması, yani işlem sayısını çok düşürmesidir. Bu yöntemle birlikte sıklıkla kullanılan ortalama ve medyan modellerinin yanında β -kısıtlı dediğimiz yeni bir model geliştirilmiştir ve bu modelle düşük enflasyonlu ortamda ortaya çıkan dezavantaj iyileştirilmeye çalışılmıştır. Ortalama ve medyan modellerinin 514 işleminin 511 tanesinde β -kısıtlı modelde de işlem yapılmış olup 58 işlem fazlasıyla yaklaşık olarak %11,28 oranında daha fazla işlem yapıldığı görülmüş ve yıllık kâr toplamında yaklaşık olarak %10,61 oranında artış gerçekleşmiştir. Bu bir anlamda β -kısıtlı modelin daha iyi olduğunu göstermektedir. Ayrıca β -kısıtlı modelde bütün enflasyon oranları için β 'nın değerinin sıfır olmasına rağmen

optimal satış zamanlarını iyileştirmesi dikkat çekicidir. Burada β -kısıtlı modelde enflasyon oranı arttıkça hisse senetleri için en iyi (optimal) kazancı elde ettikleri satış frekansları artmakla birlikte, bu modelde satış başına düşen ortalama kâr oranı düşmektedir.

Bilim kodu :205.1.110

Anahtar Kelimeler : Markoviyen Optimal Duraklama, Hisse Senedi, İMKB

Sayfa Adedi :72

Tez Danışmanı :Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

**AN IMPROVEMENT ON THE MARKOVIAN OPTIMAL STOPPING
PROBLEM AND AN APPLICATION IN ISE**

(M.Sc. Thesis)

Hatice ÖNCEL ÇEKİM

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

June 2011

ABSTRACT

One of the important issues in stock market that investors have difficulties is that they cannot know when to sell the share certificates, in other words cannot make the true timing. Sales that are not sold in time destabilize the amount of the owned share certificates, thus decrease the profit per sold certificate.

In this study, it is tried to find the most right sales time through using stock market close index values for 5110 sessions including ISE's January 1997- April 2007 dates. A disadvantage of Markovian Optimal Stopping method that emerges in the low inflation environment is acting slowly in sales of share certificates, in other words highly decreasing the transaction number. Beside the mean and median models which are used frequently with this technique, a new model called β - restricted developed and with this model the disadvantage that emerge in low inflation environment is tried to be improved. In the 511 of 514 selling operations of mean and median models are also made with β - restricted model in which it is seen that with 58 more process approximately in the rate of 11, 28% more process was made and approximately in proportion to 10, 61% increases in the yearly profit is realized. In one sense this shows that β - restricted model is better. And also, in β - restricted model although the value of β is zero for all inflation ratios, its amelioration of sales times is remarkable.

On the other hand, in β - restricted model together with increase of the sales frequencies that the share certificates obtain the optimal acquisition in relation to the increase of inflation ratios, average profit ratio per sale is low in this model.

Science Code	: 205.1.110
Keywords	: Markovian optimal stopping, share certificate, ISE
Page Number	: 72
Adviser	: Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

TEŞEKKÜR

Tez konusunda beni yönlendiren ve çalışmamın her aşamasında değerli bilgi ve deneyimleriyle bana destek olan danışmanım Sayın Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU'na ve yardımlarını esirgemeyen eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	xi
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xii
1. GİRİŞ	1
2. MARKOV ZİNCİRLERİ	3
2.1. Temel Kavramlar	3
3. OPTİMAL DURAKLAMA PROBLEMLERİ	12
3.1. Duraklama Kuralı Problemleri	12
3.2. Problemin Tanımı	12
3.3. Uyarılar	15
3.3.1. Ödüle karşı kayıp	15
3.3.2. Rastgele ödül dizileri	15
3.4. Örnekler	16
3.5. Sonlu Ufuklu Problemler	21
4. MARKOV ZİNCİRLERİNDE OPTİMAL DURAKLAMA	31
4.1. İndirimli ve Ücretli Oyunlar	38
5. MARKOVİYEN OPTİMAL DURAKLAMA PROBLEMİNİN İYİLEŞTİRİLMESİ VE UYGULAMASI	45

	Sayfa
5.1. İstanbul Menkul Kıymetler Borsası	46
5.2. Borsa Tanımı.....	47
5.3. Toptan Eşya Fiyat Endeksi (TEFE)	48
5.4. Literatür.....	49
5.5. Veriler ve Yöntemlerin Uygulanması	52
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	68
KAYNAKLAR	70
ÖZGEÇMİŞ	72

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 5.1. Kullanılan aylık TEFE değerleri.....	49
Çizelge 5.2. Yıllar ve aylara göre işlem yapılan seans sayıları.....	52
Çizelge 5.3. Aylık enflasyon oranlarına göre α değerleri	53
Çizelge 5.4. Yıllar ve durumlara göre işlem yapılan seans sayıları.....	54
Çizelge 5.5. Durumlarla ilgili betimleyici istatistikler.....	54
Çizelge 5.6. Ortalama modeli için %6 enflasyon oranında öğenti fonksiyonu ve oyun değerleri.....	59
Çizelge 5.7. Medyan modelleri için %6 enflasyon oranında öğenti fonksiyonu ve oyun değerleri.....	59
Çizelge 5.8. Ortalama modelinin farklı enflasyon oranları için oyun değerleri	60
Çizelge 5.9. Medyan modelinin farklı enflasyon oranları için oyun değerleri	61
Çizelge 5.10. β -kısıtlı model için % 6 enflasyon oranında öğenti fonksiyonu ve oyun değerleri	65
Çizelge 5.11. β -kısıtlı modelde bütün enflasyon oranları için oyun değerleri.....	65
Çizelge 5.12. Ortalama ve medyan modelleri için yıllara göre işlem sayısı, yıllık kâr ve satış başına kâr	66
Çizelge 5.13. β -kısıtlı model için yıllara göre işlem sayısı, yıllık kâr ve satış başına kâr	67

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Durumlar arası geçiş diyagramı	5
Şekil 4.1. Kumar makinesinde durumlar arası geçiş diyagramı	32
Şekil 4.2. $y + z$ toplamının en küçüklendiği nokta.....	38

1. GİRİŞ

Sermaye piyasasında işlem yapan bireysel yatırımcılar, alım-satım kararı verirken kendilerine özgü bireysel gözlem, bilgi ve deneyimlerinden yola çıkarak belli stratejiler geliştirir. Geliştirdikleri bu stratejilere göre seçtikleri ya da ilgilendikleri belli sayıdaki hisse senedinin alım-satımını yaparlar. Burada seçilen hisse senedinin ne zaman alınıp, ne zaman satılacağı önemlidir. Önceden zamanlamanın doğruluğunu veya yanlışlığını kestirmek olanaksızdır. Aynı durum kararın alınmasında kullanılan strateji için de geçerlidir.

Belirsizlik ve riskin yer aldığı finansal piyasalarda yatırımcıların satım kararlarını verirken uygun zamanlamayı belirleyecek olan strateji/stratejiler seçilmelidir. Bu strateji, güçlkle elde edilen yatırımları etkileyeceği için yatırımcıların karar vermelerine yardımcı olur. Bu aşamadaki karar verme süreci bir stokastik yapıya sahip olur. Stokastik süreçlerin bir sınıfı olan Markov süreçlerinde yer alan, amacı uygulanan stratejiye bağlı olarak tüm duraklama zamanları üzerinden beklenen ödentiği maksimum yapmak olan Markoviyen Optimal Duraklama Yöntemi borsadaki hisse senetlerini inceleme imkanı verir.

Yatırımcılar için, hisse senetlerinin değişen piyasa koşullarına göre oluşan fiyat hareketlerinden kazanç elde etme isteği, sermaye piyasasında her zaman geçerli, temel hedeflerdendir. Yatırımcılar bu hedeflerine ulaşabilmek için hisse senetlerinin gelecekteki fiyat değişimlerini önceden bilmek isterler. Ancak çoğu zaman bu piyasalardaki belirsizlik ve risk bunu olanaksızlaştırmaktadır. Dolayısıyla yatırımcıların izleyecekleri stratejilerde asıl önemli olan, seçilen hisse senedinin ne zaman alınıp, ne zaman satılacağının doğru bir şekilde belirlenmesidir. Bu çalışmada Markoviyen Optimal Duraklama Yöntemi kullanılarak İMKB'deki hisse senetlerinin en iyi satış zamanları belirlenmeye çalışılacaktır [13].

Bu konuda son zamanlarda yapılan çalışmalardan kısaca bahsedersek, Üçbaş[17] çalışmasında hisse senetlerinin en iyi satış zamanlarını belirlemede hareketli ortalamalar ve Markoviyen optimal duraklama tekniklerini karşılaştırmıştır, Gül[7]

ise çalışmasında hisse senetlerinin alış ve satışlarına karar vermeye ilişkin bir modelle seanslar, günler ve aylar arasında bir ilişki olup olmadığı araştırmıştır.

Tez çalışması kapsamında yer alan konuların, bölümlere göre dağılımı aşağıdaki gibidir.

Tezin ilk bölümünü oluşturan Girişte, çalışmanın kapsamını içeren genel bir tanıtım yapılmıştır. Tezin ikinci bölümünde Markov zincirinin tanımı, temel özellikleri ve bazı örnekleri verilmiştir. Üçüncü bölümde bazı optimal duraklama kuralı problemlerinin çeşitleri anlatılmıştır. Dördüncü bölümde Markov zincirlerinde optimal duraklama probleminin tanımı, temel özellikleri ve farklı koşullardaki örnekleri verilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde literatürde Markoviyen Optimal Duraklama Yöntemi kullanan çalışmalar anlatılarak, yeni önerilen iki modelle Markoviyen optimal duraklama problemi iyileştirilmeye çalışılmıştır. Altıncı bölümde İMKB hisse senedi verileri kullanılarak ulaşılan sonuçlar özetlenmiştir.

2. MARKOV ZİNCİRLERİ

2.1. Temel Kavramlar

Markov zincirlerinin konusu, tipik olarak olasılığın temellerinin mantıksal devamını temsil eder. Markov zincirlerinde, teorik ve uygulamayla ilgilenen sistemlerin geniş bir türünü tanımlayan stokastik süreçlerin bir sınıfı ele alınır. Konunun daha iyi anlaşılmasında karmaşık matematiksel araçların kullanılmasına gerek kalmaması gerçeği, ilk bakışta teorik matematikten uzak birçok farklı alanda Markov zincirinin popüler olmasının bir açıklaması olarak görülebilir.

Bu süreçlerde bazen temel model, durumların belirli bir rastgele mekanizmaya göre kesikli zamanlarda değiştiği bir sistem olur. Sistemde durumlar kümesi “ durum uzayı “ olarak adlandırılır ve genelde E ile gösterilen durum uzayı sonlu ya da sayılabilir. Durum uzayında her bir $i \in E$ durum adını alır ve sistem daima bu durumlardan birinde bulunur.

Rastgele mekanizma aracılığıyla durum değişikliğinin meydana gelmesi p_{ij} , $i, j \in E$ elemanlarıyla P geçiş matrisini tanımlar. p_{ij} , sistemin şu anda i durumunda olduğu verildiğinde sonraki adımda j durumunda olması koşullu olasılığıdır. Dolayısıyla, P ’nin her bir elemanı negatif ve 1’den de büyük olamaz. Ayrıca her bir satırdaki elemanların toplamı 1’e eşittir:

$$\text{her bir } i, j \in E \text{ için } 0 \leq p_{ij} \leq 1 \text{ ve her bir } i \in E \text{ için } \sum_{j \in E} p_{ij} = 1. \quad (2.1)$$

Bu özelliklere sahip bir P matrisine olasılık matrisi denir. Buna benzer şekilde E durum uzayı üzerinde bir $(\pi_i)(i \in E)$ olasılık dağılımı genellikle bir olasılık vektörü olarak adlandırılır. Dolayısıyla bir olasılık matrisi, her satırı bir olasılık dağılımı olan bir matristir [15].

2.1. Örnek

En basit hal, durum uzayının 2 durum içermesidir. Genelliği kaybetmeden durumların 0 ve 1 olduğunu varsayalım: O zaman matrisin elemanları p_{ij} , $i, j = 0, 1$ olur. Burada $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ olmak üzere stokastik matris aşağıdaki biçimde olabilir.

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

Özel olarak $\alpha = \beta = 0$ ise I birim matrisini verir ve $\alpha = \beta = 1$ de karşı köşegen matrisi verir: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

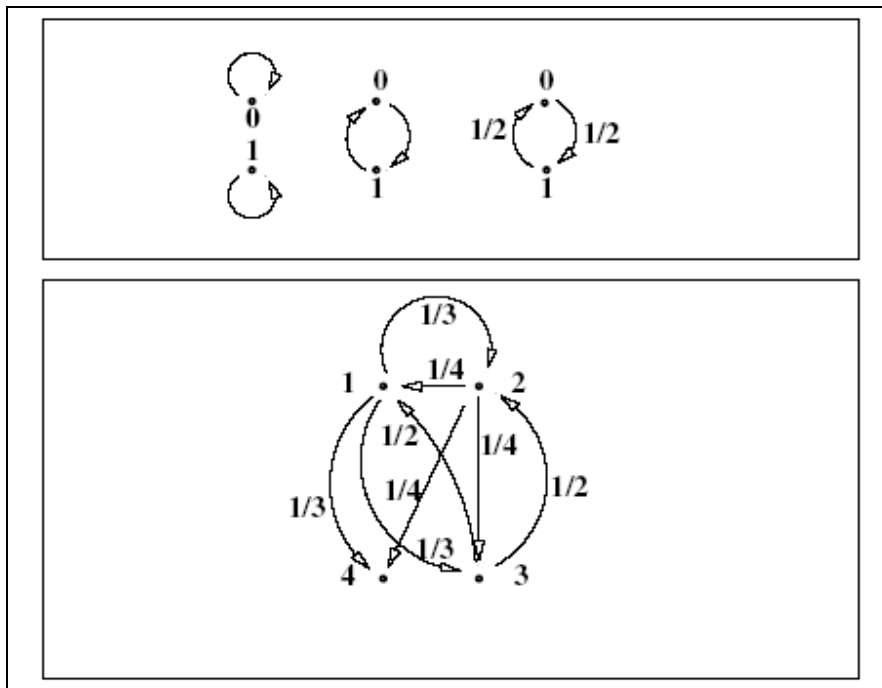
Birim geçiş matrisine sahip bir sistem başlangıç durumunda sonsuza kadar kalır, karşı köşegen matris durumunda ise sistem her zaman 0' dan 1' e veya tersine 1' den 0'a değişir. Öte yandan $\alpha = \beta = 1/2$ ise $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ matrisini verir. Bu durumda sistem eşit olasılıklarla kendi durumunda kalabilir veya değişebilir.

Geçiş matrisinin mümkün geçişlerini oklarla gösteren bir diyagramla temsil etmek ve karşı gelen geçiş olasılıklarını okların yanına yazmak geleneksel hale gelmiştir. Bkz. Şekil 1.1'in üst kısmı.

2.2. Örnek

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4x4'lük geçiş matrisinin geçiş diyagramı Şekil 1.1' in alt kısmında verilmiştir. Zaman $n = 0, 1, 2, \dots$ değerlerini alır. Sürecin belirlenmesini tamamlamak için burada $n = 0$ başlangıç zamanı sistemin hangi durumda olduğunu belirten başlangıç dağılımına ihtiyaç vardır. Tipik olarak, bu dağılımın verildiğini (belirli bir i durumunda π_i olasılıkla olmak üzere) varsayalım [15].



Şekil 1.1. Durumlar arası geçiş diyagramı

X_n ile n zamanındaki sistemin bulunduğu durumu gösterelim. Dolayısıyla π başlangıç dağılımlı ve P geçiş matrisli bir Markov zincirini belirleyen kurallar aşağıdaki gibi verilebilir:

- (i) X_0 , π dağılımına sahiptir. Yani her $i \in E$ için $P(X_0 = i) = \pi_i$ ' dir.
- (ii) Daha genel olarak, her n ve $i_0, i_1, \dots, i_n \in E$ durumları için

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n)$$

olasılığı $0, 1, \dots, n$ zamanlarında sistemin $i_0, \dots, i_n$ durumlarında bulunma olasılıklarını gösterir ve aşağıdaki gibi çarpım biçiminde yazılır.

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n} \quad (2.2)$$

Tabii ki burada (i), $n = 0$ 'da (ii)' nin özel bir halidir [15].

2.1. Tanım

Aşağıdaki eşitliği sağlayan bir $X = \{X_n : n \in N\}$ stokastik sürecine Markov zinciri denir.

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) &= \frac{P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n, X_{n+1} = j)}{P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n)} \\ &= \frac{\pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n} p_{i_n j}}{\pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}} = p_{ij} . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Eş.2.2'nin önemli bir sonucu, $0, \dots, n-1, n$ zamanlarında $i_0, \dots, i_{n-1}$ ve i_n durumlarında olduğu verildiğinde $n+1$ zamanında sistemin j . durumunda olması koşullu olasılığı olup Eş.2.3' te görüldüğü biçimdedir.

Yani $X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}$ ve $X_n = i$ koşulu altında X_{n+1} , $\{p_{ij}, j \in E\}$ koşullu dağılımına sahiptir. Özellikle X_{n+1} ' in koşullu dağılımı $i_0, \dots, i_{n-1}$ ' e bağlı değildir. Yani sadece n zamanındaki i durumuna bağlıdır.

Eş.2.3, bir Markov zincirinin “belleksizlik” özelliğini örnekler. Yani yalnızca şimdiki durum, gelecek durumları belirleyen olasılıkları belirlemede rol oynar [15].

2.1. Teorem

$\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, π_0 başlangıç dağılımlı ve P geçiş matrisine sahip bir Markov zinciri olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$(i) P(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j / X_n = i)$$

olup p_{ij} olasılığına eşittir. Özel olarak $X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i$ olduğu verildiğinde X_{n+1} 'in koşullu dağılımı $i_0, \dots, i_{n-1}$ 'e bağlı değildir ve $\{p_{ij}, j \in E\}$ dağılımıyla yani P matrisinin i . satırıyla aynıdır.

(ii) Sistemin n . zamanında $P(X_n = i)$ olasılığı $[\pi_0' P^n]$ vektörünün i . bileşeniyle bulunur.

(iii) P^n matrisinin p_{ij}^n elemanı $P(X_{k+n} = j / X_k = i)$ koşullu olasılığına karşı gelir; yani n adımda i ' den j ' ye geçiş olasılığını verir.

(iv) $P(X_{k_1} = i_1, X_{k_2} = i_2, \dots, X_{k_n} = i_n)$ genelleştirilmiş olasılığı

$$P(X_{k_1} = i_1, X_{k_2} = i_2, \dots, X_{k_n} = i_n) = (\pi_0' P^{k_1})_{i_1} (P^{k_2 - k_1})_{i_1 i_2} \dots (P^{k_n - k_{n-1}})_{i_{n-1} i_n}$$

ile verilir.

X_n ' nin dağılımını tanımlayan olasılık vektörü, π_0 başlangıç olasılık vektörüne P^n matrisi uygulanarak elde edilir. Benzer olarak

$$P(X_n = i, X_{n+1} = j) = \sum_{i_0, \dots, i_{n-1}} P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i, X_{n+1} = j)$$

$$= \sum_{i_0, \dots, i_{n-1}} \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i} p_{ij} = (\pi_0 P^n)_i p_{ij}$$

ve bu yüzden

$$P(X_{n+1} = j / X_n = i) = \frac{P(X_n = i, X_{n+1} = j)}{P(X_n = i)} = \frac{(\pi_0 P^n)_i p_{ij}}{(\pi_0 P^n)_i} = p_{ij}$$

dir. Başka bir deyişle p_{ij} elemanı kendinden önceki i . durumunu veren j . durumunun gelecek adımdaki durumunun koşullu olasılığıdır.

Burada $P = [p_{ij}]$ matrisine Markov zincirinin geçiş olasılıkları matrisi denir.

Eş.2.2'nin genelleştirilmesiyle ve $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$, $i_1, \dots, i_n \in E$

durumları için

$$P(X_{k_1} = i_1, X_{k_2} = i_2, \dots, X_{k_n} = i_n) = (\pi_0' P^{k_1})_{i_1} (P^{k_2 - k_1})_{i_1 i_2} \dots (P^{k_n - k_{n-1}})_{i_{n-1} i_n}$$

dir. $\pi_0 = (\pi_i)$ bir olasılık vektörü ve $P = (p_{ij})$ E üzerinde bir geçiş matrisidir. n zamanında X_n rastgele durumu, E 'deki değerlerle bir rastgele değişken olarak ele alınır [15].

2.3. Örnek

P 'nin bütün satırlarının aynı olduğunu varsayalım. Yani $p_{ij} = p_j$ 'nin i 'den bağımsız olduğunu varsayalım. Ayrıca $\pi_j = p_j$ olduğunu varsayalım. Yani π 'nin P 'nin satırlarıyla aynı olduğunu varsayalım. O halde Eş.2.2' den

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = p_{i_0} p_{i_1} \dots p_{i_n}$$

dir.

$$\sum_{l \in E} p_l = 1$$

olduğuna göre ve aynı zamanda $P^n = P$ ise

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} p_{i_1} \dots p_{i_{n-1}} p_j = \sum_{i_1} p_{i_1} \sum_{i_2} p_{i_2} \dots \sum_{i_{n-1}} p_{i_{n-1}} p_j = p_j$$

dir. Bu yüzden

$$P(X_n = j) = (\pi_0 P^n)_j = \sum_{i \in E} p_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in E} p_i p_j = p_j$$

dir. Yani her i için başlangıç dağılımı, n dönem sonraki dağılım ile aynıdır, yani değişmemiştir. Aynı zamanda

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1) \dots P(X_n = i_n)$$

olduğu görülür. Yani (X_n) 'ler bağımsız aynı dağılımlı rastgele değişkenlerdir [15].

2.2. Teorem

$\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, π_0 başlangıç dağılımlı ve P geçiş matrisine sahip bir Markov zinciri olsun. Her $m \geq 1$ ve $i \in E$ için $X_m = i$ olduğu verildiğinde $\{X_{m+n} | n \geq 0\}$

$$\delta_i = \pi_0'(i) = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$$

başlangıç dağılımlı ve P geçiş matrisli bir Markov zinciridir. Özel olarak, kesikli zamanlardaki Markov zincirinde $X_0, \dots, X_{m-1}$ geçmiş durumları ve

$(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots)$ gelecek durumları $X_m = i$ şimdiki zamanı verildiğinde koşullu olarak bağımsızdır [15].

2.4. Örnek

A, B ve C adlı üç kız masa tenisi oynuyorlar. Her bir oyunda kızların ikisi birbirlerine karşı oynuyor ve üçüncü kız oyun dışında kalıyor. Herhangi bir n . oyunda oyunu kazanan $n+1$. oyunda da tekrar oynayacaktır. Üç kızın oyun güçleri sırasıyla s_A, s_B, s_C olmak üzere $x, y \in \{A, B, C\}, x \neq y$ için birbirlerine karşı oynadıkları herhangi bir oyunda x kızının y kızını yenme olasılığı $s_x / (s_x + s_y)$ ' dir.

(a) Bu sürecin mümkün durumlarını tanımlayarak ve geçiş matrisini kurarak ifade edelim.

(b) İlk oyunda birbirleriyle oynayan iki kızın 4. oyunda da tekrar birbirleriyle oynama olasılığını belirleyelim. Aynı zamanda bu olasılığın ilk oyunda oynayan iki kızıdan bağımsız olduğunu varsayalım.

Çözüm

(a) Herhangi bir oyunda oynamayan oyuncular A, B ve C harfleriyle gösterelim. 3×3 lük geçiş matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix} 0 & s_C / (s_B + s_C) & s_B / (s_B + s_C) \\ s_C / (s_A + s_C) & 0 & s_A / (s_A + s_C) \\ s_B / (s_A + s_B) & s_A / (s_A + s_B) & 0 \end{pmatrix}$$

Süreç bir Markov zinciridir, çünkü sonraki oyunların sonuçları bağımsızdır.

(b) Burada 3 adım sonra zincirin başlangıçta verilen bir duruma dönmesi olasılığını araştıralım.

Simetriden dolayı bu olasılık başlangıç durumunun herhangi bir seçimi için aynıdır ve

$$p_{AB}p_{BC}p_{CA} + p_{AC}p_{CB}p_{BA} = \frac{2s_A s_B s_C}{(s_A + s_B)(s_B + s_C)(s_C + s_A)}$$

değerine eşittir [15].

3. OPTİMAL DURAKLAMA PROBLEMLERİ

3.1. Duraklama Kuralı Problemleri

Optimal duraklama teorisi, beklenen bir ödentiği en büyüklemek ya da beklenen bir maliyeti en aza indirmek için ardışık olarak gözlemlenen rastgele değişkenlere dayalı verilen bir aksiyonda durma zamanını seçme problemleriyle ilgilenir. Bu tür problemlere, bulunulan aksiyonun bir hipotezini test etmek veya bir parametreyi tahmin etmek biçiminde olan istatistik alanında ve bir makinenin bakımı, bir sekreterin tutulması veya bir malın yeniden sipariş edilmesi vb. yöneylem araştırması alanında rastlanır. Bu bölümde problemi matematiksel olarak takdim edeceğiz ve uygulama örnekleri vereceğiz.

Tarihsel olarak, bu problem Wald'ın ardışık olasılık oran testi kuramındaki istatistiksel gözlemlerin ardışık analizlerinde Wald'ın "Sequential Tests of Statistical Hypotheses"(1945) adlı kitabında ve izleyen kitapları "Sequential Analysis"(1947) ve "Statistical Decision Function"(1950)'da ortaya çıkmıştır[18]. Bu tür problemlere Bayesçi yaklaşımlar Arrow, Blackwell ve Girshick'in "Bayes and minimax solutions of sequential decision problems"(1948) adlı temel makalesinde ele alınmıştır[18]. İstatistiksel yapıyı göz önüne almayan teorik duraklama problemlerine ardışık analiz yoluyla yaklaşımın genellemesini Snell, "Applications of martingale system theorems"(1952) adlı makalesinde yapmıştır[18]. 1960'larda Chow ve Robbins'in "A martingale system theorem and applications" (1961) ve "On optimal stopping rules"(1963) makaleleri konunun yeniden ilgi çekmesine ve hızlı bir şekilde büyümesine neden olmuştur[18]. Chow, Robbins ve Siegmund'in "Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping"(1971) adlı kitabı bu konudaki gelişmeleri açıklamaktadır [18].

3.2. Problemin Tanımı

3.1. Tanım

Duraklama kuralı problemleri aşağıdaki iki araçla tanımlanır:

- (i) Ortak dağılımın bilindiği varsayılan bir $X_1, X_2, \dots$ bağımsız rastgele değişkenler dizisi, ve
- (ii) $y_0, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2), \dots, y_\infty(x_1, x_2, \dots)$ gerçek değerli ödül fonksiyonlarının bir dizisi.

Bu iki araç verildiğinde bunlarla ilişkilendirilen duraklama kuralı problemi şöyle tanımlanabilir. İstenilen uzunca bir süre $X_1, X_2, \dots$ dizisi gözlenebilir. Her bir $n = 1, 2, \dots$ için $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ gözlendikten sonra durulabilir ve $y_n(x_1, \dots, x_n)$ (muhtemelen negatif olabilen) bilinen ödülü alınır veya devam edilir ve X_{n+1} gözlenir. Başlangıçta herhangi bir gözlem yapılmaması seçilirse y_0 sabit ödülü alınır. Hiçbir zaman durulmazsa, $y_\infty(x_1, x_2, \dots)$ 'ı ödülü alınır (Böyle bir durumda ödülün $-\infty$ değerini almasına izin verilir, ancak ödüllerin sonlu beklenen değere sahip bir rastgele değişken ile üstten düzgün olarak sınırlandırıldığını varsayalım, öyle ki bu rastgele değişkenin beklenen değeri altında kalan bütün beklenen değerler anlamlıdır).

Problem, beklenen ödülü en büyükmek için durma zamanını seçmektir. Burada rastgele kararların kullanımına izin verilir. Yani $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ gözlemlenen n . zamana ulaştığı verildiğinde bu gözlemlere bağlı olabilen bir duraklama olasılığının seçilmesi gerekir. Bu olasılığı $\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile gösterebiliriz. Bir (rastgele) duraklama kuralı bu fonksiyonların dizisinden oluşur.

$$\phi = (\phi_0, \phi_1(x_1), \phi_2(x_1, x_2), \dots) \quad (3.1)$$

fonksiyonlar dizisinden oluşan burada her n ve $X_1, \dots, X_n$ için $0 \leq \phi_n(x_1, \dots, x_n) \leq 1$ dir. Her bir $\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 0 veya 1 olduğunda duraklama kuralına rastgele olmayan bir karar kuralı denir.

Buna göre, ϕ_0 hiç gözlem alınmaması olasılığını gösterir. İlk gözlem yapıldığı ve $X_1 = x_1$ olduğu gözlemlendiğinde, $\phi_1(x_1)$ ilk gözlemden sonra durma olasılığını gösterir ve benzerleri de böyle devam eder. ϕ duraklama kuralı ve $X = (X_1, X_2, \dots)$ gözlemler dizisi duraklamanın olduğu N rastgele zamanını belirler; burada $0 \leq N \leq \infty$ olup $N = \infty$ olması hiçbir zaman duraklamanın olmadığını gösterir. $X = x = (X_1, X_2, \dots)$ verildiğinde N 'nin olasılık fonksiyonu $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\infty)$ ile gösterilir. $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\psi_n(x_1, \dots, x_n) = P(N = n | X = x) \quad (3.2)$$

$$\psi_\infty(x_1, x_2, \dots) = P(N = \infty | X = x)$$

'dır. Bu aşağıdaki gibi ϕ duraklama kuralı ile ilişkilendirilebilir.

$$\psi_0 = \phi_0$$

$$\psi_1(x_1) = (1 - \phi_0)\phi_1(x_1)$$

$$\vdots$$

$$(3.3)$$

$$\psi_n(x_1, \dots, x_n) = \left[\prod_{j=0}^{n-1} (1 - \phi_j(x_1, \dots, x_j)) \right] \phi_n(x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\psi_\infty(x_1, x_2, \dots) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x_1, \dots, x_j);$$

burada $\psi_\infty(x_1, x_2, \dots)$ bütün gözlemler verildiğinde hiç durmama olasılığını gösterir.

Bundan sonra problem, beklenen getiriyi en büyükleyen ϕ duraklama kuralını seçmektir. $V(\phi)$ beklenen getirisi şöyle tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= Ey_N(X_1, \dots, X_N) \\ &= E \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(X_1, \dots, X_j) y_j(X_1, \dots, X_j). \end{aligned} \quad (3.4)$$

N rastgele duraklama zamanı açısından ϕ duraklama kuralı $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\phi_n(x_1, \dots, x_n) = P(N = n \mid N \geq n, X = x) \quad (3.5)$$

olarak ifade edilebilir [18].

3.3. Uyarılar

3.3.1. Ödüle karşı kayıp

Sıklıkla problemin yapısı, ödülün çok bir kayıp ya da bir maliyeti göz önüne almayı daha uygun hale getirir. y_n 'nin kaybın negatifini göstermeye izin veren yukarıdaki yapısını kullanmakla birlikte böyle durumlarda y_n 'nin n . dönemde durmakla uğranılan kaybı gösterdiğinde durum açıklığa kavuşur ve problemi $v(\phi)$ 'yi en aza indirmek için bir duraklama kuralı seçimi olarak düşünmek gerekir [18].

3.3.2. Rastgele ödül dizileri

Bazı uygulamalarda ödül dizisi, $X_1, X_2, \dots$ gözlemleriyle ortak dağılımı bilinen bir $Y_0, Y_1, \dots, Y_{\infty}$ rastgele değişkenler dizisi olarak daha gerçekçi şekilde tanımlanır. Y_n 'nin gerçek değeri, durma ya da devam etme kararının verilmesi gerektiği n zamanında tam olarak bilinmeyebilir. n . dönemde durma kararı $X_1, \dots, X_n$ 'ye bağlı olabildiğinden kârların rastgele oluşuna izin verilmesi genelde bir kazancı

göstermemekle birlikte, $n = 0, 1, \dots, \infty$ için Y_n rastgele ödüller dizisini $y_n(x_1, \dots, x_n)$ ödül fonksiyonları ile değiştirebiliriz. Burada

$$y_n(x_1, \dots, x_n) = E\{Y_n | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} \quad (3.6)$$

dır. $Y_0, \dots, Y_\infty$ ödenti dizisi için aynı beklenen kazancı netice verecektir [18].

3.4. Örnekler

Burada önemli uygulamalara sahip optimal duraklama kuralı problemlerinin birkaç türü verilmiştir. Duraklama kuralı problemleri Tanım 3.1'deki (i) ve (ii) dizileri tarafından tanımlandığından her durumda $X_1, X_2, \dots$ gözlemlerinin ortak dağılımları n .dönemde duraklama için ödül (ya da maliyet) fonksiyonu $y_n(x_1, \dots, x_n)$ 'yi belirlemelidir. Bu amaçla sıklıkla n .dönemde durmak için rastgele ödemeyi belirten Y_n kullanılır. Burada $Y_n = y_n(x_1, \dots, x_n)$ dir.

3.1. Örnek (Ev-Satış Problemi)

Teklifler bir mal için günlük olarak gelir. Örneğin bir evi satın almak isteyelim. X_n, n .günde alınan teklifin miktarını gösterebilir. Teklifler gelmeden önce tekliflerin değeri bilinmez, ancak bilinen kadarıyla tekliflerin bağımsız ve hepsinin aynı dağılıma sahip olduğunun varsayılacağı hissedilsin. Teklifin beklenmesi $c > 0$ olan bir değere mal olur; burada c hayat pahalılığı(geçim maliyeti) olarak düşünülebilir. Bir X_n teklifi alındığında, bu teklifin kabul edilmesi veya daha iyi bir teklifin beklenmesi konusunda karar verilmek zorundadır. Er ya da geç daha iyi bir teklifin yapılacağı biliniyor, ancak burada teklifteki artış miktarı gözlem maliyetini karşılayacak durumda mıdır, sorusu akla gelir.

(i)'de geçen $X_1, X_2, \dots$ gözlemlerinin bağımsız ve aynı bilinen dağılıma sahip olduğunu varsayalım. (ii) bir dizi teklif gözlemlendikten sonra geçmişteki bir teklifi

geri çağırılmama veya geri çağırma ve kabul etme durumlarına bağlı olarak farklı ödentilere sahip iki probleme ayrılabilir. Geçmiş teklifler geri çağırılamazsa, o zaman

$$y_0 = 0$$

$$y_n(x_1, \dots, x_n) = x_n - nc \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ve

$$y_\infty(x_1, \dots, x_n) = -\infty$$

olur. Buna göre X_n gözlem maliyetini ödedikten sonra teklif kabul edilerek X_n alınır, ya da teklif reddedilir ve bir sonraki X_{n+1} teklifini görmek için c maliyeti ödenir. Geçmiş tekliflerin geri çağırılmasına izin verilirse, o zaman

$$y_0 = 0$$

$$y_n(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1, \dots, x_n) - nc \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ve

$$y_\infty(x_1, \dots, x_n) = -\infty$$

olur. Bu durumda durmaya karar verilirse göze çarpan en büyük teklif alınır[18].

3.2. Örnek (Ortalamayı En Büyükleme)

Bir hilesiz parayı art arda atıp gözlemleyelim. Herhangi bir zamanda gözlemlemeyi durdurabiliriz ve o zaman gözlemlenen ortalama tura sayısını bir ödül olarak alabiliriz. Bu yüzden ilk atış tura ise, ödenti 1 ve bundan daha büyük bir ödenti asla olamayacağından kesinlikle durmalıyız. Diğer taraftan, güçlü büyük sayılar kanunu, ortalama tura sayısının hemen hemen kesinlikle $1/2$ 'ye yakınsamasını gerektirdiğinden ortalama tura sayısı $1/2$ 'den az veya $1/2$ 'ye eşit olduğu bir zamanda asla durulmamalıdır. Beklenen ödentiye en büyükleme için hangi duraklama kuralına başvurulmalıdır ve ne büyüklükte bir beklenen ödenti elde edilebilir?

Bu tür problemler ilk kez Y.S.Chow ve H.Robbins tarafından, “On optimal stopping rules for S_n / n ” (1965) adlı makalede çalışılmış ve söz konusu problemde 0,79 ’dan daha büyük bir beklenen ödentiye veren bir duraklama kuralı tanımlanmıştır. Bu problem, başarı olasılığının 1/2 olduğunu bilen bir deneycinin problemi olarak Ferguson’nun “Mathematical Statistics” (1967) adlı kitabının 314. sayfasında ele alınmıştır, ancak ortalama başarı sayısı ile başarı olasılığını tahmin etme ve yapılan tahminin olabildiğince değiştirilebilir oluşunu sağlama bu problemin başka bir boyutudur[18].

Ortalamayı en büyükleme problemini aşağıdaki gibi bir duraklama kuralı problemi formunda verebiliriz. $X_1, X_2, \dots$ ’ler sonlu bir μ ortalamalı bilinen bir dağılıma sahip bağımsız aynı dağılımlı rastgele değişkenler olsun ve

$$y_0 = \mu$$

$$y_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n) / n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ve

$$y_\infty(x_1, x_2, \dots) = \mu$$

olsun.

Bu varsayımlara göre herhangi bir gözlem yapılmazsa μ ödülü alınır. Hiç durulmazsa hemen hemen her yerde $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X_n} = \mu$ ödülü alınır[18].

3.3. Örnek (Bayes Ardışık İstatistiksel Karar Problemleri)

Duraklama kuralı problemleri, Wald tarafından Sequential Analysis (1947) adlı kitabında geliştirilmiş olan istatistiksel analiz teorisinde ortaya çıkmıştır. Bayes ardışık karar problemleri bağımlı $X_1, X_2, \dots$ değişkenlerine sahip duraklama kuralı problemlerine örnekler sağlar[18].

Bu problemde, bir Θ parametre uzayında bir θ parametresi belirli önsel τ dağılımına göre seçilir. Sonunda istatistikçi verilen bir A aksiyon uzayında $L(\theta, a)$ kaybına uğrayarak bir a aksiyonu seçmek zorundadır. Bununla birlikte istatistikçi gözlemlenen her bir X_i için c maliyetindeki aksiyonunu seçmeden önce istediği kadar $X_1, X_2, \dots$ rastgele değişkenlerini ardışık olarak gözlemleyebilir.

$X_1, X_2, \dots$ rastgele değişkenlerinin, θ verildiğinde, bilinen bir $F(x|\theta)$ formuna sahip bağımsız aynı dağılımlı olduğu varsayılır. $X_1, \dots, X_n$ 'yi gözledikten sonra istatistikçi alınan gözlemleri durdurmaya karar verirse, koşullu beklenen kaybı en küçüklemek için $a \in A$ aksiyonunu seçer ve böylece

$$n = 0, 1, \dots \text{ için } \rho_n(X_1, \dots, X_n) = \inf_{a \in A} E\{L(\theta, a) | X_1, \dots, X_n\}$$

miktarlık bir kayıp olması beklenir. $X_1, \dots, X_n$ 'yi gözledikten sonra $a \in A$ aksiyonunun seçilmesi kuralı en son karar kuralı olarak adlandırılır. En son karar kuralı duraklama kuralından bağımsız olarak seçilebilir. Bu problemde, kayıp+maliyet vardır, yukarıdaki Uyarılar 3.3.1 ve 3.3.2 doğrultusunda, y_n , n . dönemdeki koşullu en küçük Bayes ortalama kayıp+maliyeti göstermek üzere aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y_n(x_1, \dots, x_n) = \rho_n(x_1, \dots, x_n) + nc \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ve

$$y_\infty(x_1, x_2, \dots) = +\infty.$$

$X_1, X_2, \dots$ 'nin dağılımı, verilen önsel dağılımına göre θ değişkeni üzerinden integral alınarak $\theta, X_1, X_2, \dots$ 'lerin θ 'nın ortak dağılımından marjinal dağılımı türetilerek elde edilir. Buna göre θ verildiğinde X_i 'ler bağımsız olsa bile θ üzerinden integral alındığında X_i 'ler bağımlı olur[18].

3.4. Örnek (Tek Kollu Haydut Problemi)

Bir hastalığı iyileştirmek için iki uygun tedavi yöntemi vardır. T_1 tedavisi, önsel dağılımı bilinen, bir p bilinmeyen iyileştirme olasılığına sahip iken T_2 standart tedavisi bir p_0 bilinen iyileştirme olasılığına sahiptir. n hastadan oluşan bir grup ardışık olarak tedavi edilir ve her bir hastaya hangi tedavinin uygulanacağına karar verilmesi zorunludur. Burada p, p_0 'dan büyük ise her bir hastaya T_1 tedavisinin uygulanması tercih edilir. T_1 tedavisi uygulanan hastaların iyileşme oranını gözlemleyerek p 'nin değeri hakkında bilgi elde edilebilir. Burada hastaların bağımsız olarak ve tedaviye acilen cevap verdiği varsayılır. Bir hastaya uygulanacak tedavi belirlendiğinde önceki sonuçlara bağlı olmalıdır. p_0 'dan daha çok oranda hastayı iyileştirmesi yüzünden T_1 iyi görünürse, o zaman T_1 tedavisine devam etmek istenebilir. Amacımız olabildiğince çok hastayı iyileştirmektir. Bu problemde ödentimiz iyileştirilen hastaların sayısıdır.

Bu problemde, tek kollu haydut problemi denir. Bradt, Johnson ve Karlin (1956), bu problemde T_2 tedavisinin kullanılması bir hasta için her zaman en iyi (optimum) olduğunda, bundan sonra gelen bütün hastalarda T_2 'yi uygulamanın optimum olduğunu gösterdiler. Bu yolla, tek kollu haydut problemi, duraklamanın T_2 tedavisine geçişle tanımlandığı bir duraklama kuralı problemi ile ilişkilendirilir.

T_1 tedavisi j numaralı hastaya uygulandığında, X_j 'yi hasta iyileşirse 1, iyileşmezse 0 olarak alalım. Böylece p verildiğinde $X_1, \dots, X_n$ 'ler $P(X_j = 1) = p$ olan bağımsız aynı dağılmış rastgele değişkenler olduğu varsayılır ve buradaki p verilen bir $G(p)$ önsel dağılımına sahiptir. $G(p)$, gözlemlerin dağılımını belirler. $X_1, \dots, X_k$ 'yı gözledikten sonra değişen tedavilere karar verilirse hastaların iyileşme sayısı $Y_k = X_1 + \dots + X_k + Z_{k+1} + \dots + Z_n$ olup burada $Z_j, j.$ hastanın T_2 tedavisiyle iyileşmesine bağlı olarak 1 ya da iyileşmemesine bağlı olarak 0 değerini alır. Z_j

değerleri, durma kararı alınması gerektiğinde bilinmez, ancak Uyarı 3.3.2’de gösterildiği gibi genellemeyi kaybetmeden beklenen değeri aracılığıyla Z_j ’lerin beklenen değerleri yerine p_0 değerini alabilir. k ’da duraklama ödülü $k = 0, 1, \dots, n$ için $Y_k = X_1 + \dots + X_k + (n - k)p_0$ olur. Bu problem sonlu bir n ufkuna sahiptir. Burada problem, $E(Y_N)$ ’yi en büyükmek için $N \leq n$ şeklinde bir duraklama kuralı seçmektir. Genel haydut problemlerinde olduğu gibi bu problemde de bilinmeyen p_i ’yi tahmin etme probleminin kendisiyle ilgilenilmez. Gözlemlerin toplamını en büyüklemeyle ilgilenilir[18].

3.5. Sonlu Ufuklu Problemler

Durulabilir aşamaların sayısı için bilinen bir üst sınır varsa duraklama kuralı problemi sonlu bir ufka sahiptir. Duraklama için $X_1, \dots, X_T$ ‘nin gözlenmesi gerekiyorsa problemin T ufka sahip olduğu söylenir. Sonlu ufuklu bir problem 3.2’de verilen genel problemde $y_{T+1} = \dots = y_\infty = -\infty$ alınarak özel bir durum olarak elde edilebilir. Prensip olarak bu tür problemler geriye tümevarım (backward induction) yöntemiyle çözülebilir: T . durumda durmamız gerektiğinde ilk olarak $T - 1$. durumdaki optimal kural bulunur. Daha sonra $T - 1$. durumdaki optimal kural bilindiğinde $T - 2$. durumdaki optimal kural bulunur ve benzer işlemlerle başlangıç durumuna (0 durumuna) kadar gidilir. $V_T^{(T)}(x_1, \dots, x_T) = y_T(x_1, \dots, x_T)$ olarak tanımlanır ve daha sonra tümevarım yoluyla $j = T - 1$ ’den $j = 0$ ’a kadar geriye doğru gidilir:

$$V_j^{(T)}(x_1, \dots, x_j) = \max \{y_j(x_1, \dots, x_j), E(V_{j+1}^{(T)}(x_1, \dots, x_j) | X_1 = x_1, \dots, X_j = x_j)\}. \quad (3.7)$$

Tümevarımsal olarak, $V_j^{(T)}(x_1, \dots, x_j)$; $X_1 = x_1, \dots, X_j = x_j$ olduğu gözlemlenerek j . aşamadan başlayan elde edilebilecek maksimum kârı gösterir. j . aşamada durmak için kârı karşılaştırırız; yani $y_j(x_1, \dots, x_j)$ ‘yi, j . aşamada

$E(V_{j+1}^{(T)}(x_1, \dots, x_j, X_{j+1}) | X_1 = x_1, \dots, X_j = x_j)$ olan, T duraklama zamanı üzerinden devam ederek ve $(j+1)$. aşama için optimal duraklama kuralını kullanarak alabilmeyi ümit ettiğimiz kârla karşılaştırırız. Optimal kazanç bu yüzden bu iki niceliğin maksimum olanıdır ve buna göre j . aşamada $V_j^{(T)}(x_1, \dots, x_j) = y_j(x_1, \dots, x_j)$ ise durmak ve diğer durumlarda devam etmek optimaldir. Bu durumda duraklama kuralı probleminin değeri $V_0^{(T)}$ olur [18].

3.5. Örnek (Park etme problemi)

Varış yeri tiyatro olan (sonsuz) bir cadde boyunca gidiyoruz. Cadde boyunca park yerleri vardır, ancak bunların çoğu doludur. Mümkün olduğunca etrafta dönmeden tiyatroya yakın bir yere park etmek istiyoruz. Tiyatrodan önce bir d uzaklığındaki park yerini boş görürsek, oraya park etmeli miyiz?

Burada, bu problemi kesikli bir ortamda modelliyoruz. Başlangıç noktasından başladığımızı ve gerçek eksenin bütün tamsayı noktalarında park yerlerinin olduğunu varsayalım. $X_j = 1, j$. park yerinin dolu olması ve $X_j = 0, j$. park yerinin boş olması anlamına gelmek üzere $X_0, X_1, X_2, \dots$ 'ler ortak başarı olasılığı p olan bağımsız Bernoulli rastgele değişkenleri olsun. $T > 0$ hedeflenen park yerini gösterebilir. $X_j = 0$ ise j . park yerinde durulabilir ve park edilirse $|T - j|$ 'lik bir uzaklıkta durulmuş olur. j . park yerindeyken $j+1$. park yeri görülmezse ve bir kez bir park yeri geçilirse oraya geri dönülmez. Her zaman T 'ye ulaşabilirsek, sonraki boş olan park yeri seçilir. Ulaşıldığında T durağı doluyorsa beklenen kayıp

$$(1-p) + 2p(1-p) + 3p^2(1-p) + \dots = 1/(1-p)$$

dir. Dolayısıyla problemimiz sonlu T ufkuna sahip duraklama problemi olarak ele alınabilir ve kaybımız da

$$X_T = 0 \text{ ise } y_T = 0 \text{ ve } X_T = 1 \text{ ise } y_T = 1/(1-p)$$

ve

$j = 0, \dots, T-1$ için $X_j = 0$ ise $y_j = T-j$ ve $X_j = 1$ ise $y_j = \infty$ olur. j . park yerine ulaşılır ve park yerinin dolu olduğu görülürse $y_j = \infty$ değeri bizi devam etmeye zorlar. EY_N 'yi en küçükleme için bir $N \leq T$ olan bir duraklama kuralını araştırıyoruz.

Önce $X_j = 0$ olduğunda j . aşamada duraklama optimal ise o zaman $X_{j+1} = 0$ iken $j+1$. aşamada durmanın da optimal olduğunu gösterelim. Bu alanda bahsedilen Moser probleminde¹ olduğu gibi $V_j^{(T)}$, yalnızca X_j 'ye bağlıdır ve $A_{n-j} = E(V_{j+1}^{(T)} | F_j)$ yalnızca $n-j$ 'ye bağlı olan bir sabittir. A_{n-j} değeri, $y_{n-j} \leq A_j$ ise $(n-j)$. aşamada durmak optimaldir. $n-j \leq A_j$ ise daha sonra $n-j-1 \leq A_{j-1}$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bu $n-j-1 < n-j \leq A_j \leq A_{j-1}$ eşitliksizliklerinden çıkar.

Dolayısıyla bazı $r \geq 0$ için N_r sınır formunda bir optimal kural vardır: varış yerinden r yerine kadar devam et ve r 'den sonra ilk boş yere park et. P_r bu kuralı kullanarak elde edilen beklenen maliyeti gösterebilir. $P_0 = p/(1-p)$ olur ve $r \geq 1$ için $P_r = (1-p)r + pP_{r-1}$ 'dir. Tümevarımsal olarak

$$P_r = r + 1 + \frac{2p^{r+1} - 1}{1-p} \quad (3.7)$$

olduğunu ve böylece

¹ Moser problemi: Sonlu ufuklu optimal duraklama problemlerinden biri olup bir malı satmaya ilişkin bir problemdir. Bkz. Thomas Ferguson Ders Notları Kesim §2.4

$$P_0 = p / (1 - p) = 1 + (2p - 1) / (1 - p)$$

olmak üzere $r = 0$ içinde bu Eş.3.7'nin doğru olduğunu göstereceğiz. $r - 1$ için bu Eş. 3.7'nin doğru olduğunu varsayalım. O zaman belirtildiği gibi

$$P_r = (1 - p)r + pP_{r-1} = (1 - p)r + pr + p(2p^r - 1) / (1 - p) = (r + 1) + (2p^{r+1} - 1) / (1 - p)$$

olur.

Eş. 3.7'yi en küçükleyen r değerini bulmak için

$$P_{r+1} - P_r = 1 + (2p^{r+2} - 2p^{r+1}) / (1 - p) = 1 - 2p^{r+1}$$

farklarına bakalım. Bu r 'ye göre artan olduğundan optimal değeri bu farkın olmadığı, yani

$$\min \{r \geq 0 : p^{r+1} \leq 1/2\}$$

olduğu ilk r değeridir. Örneğin $p \leq 1/2$ ise bir park yerine bakmadan önce varış yerine ulaşılmalıdır. Ancak diyelim ki $p = 0.9$ ise varış yerinden ve $r = 6$ 'dan önceki bir park yerine bakmalıyız [18].

Örneklere geçmeden önce gerekli olan kavramları aşağıda verelim:

Optimal duraklama problemlerinde, sistem S' durum uzayına sahip muhtemelen durağan olmayan kontrolsüz bir Markov zinciri olarak değişir. Her bir karar döneminde karar verici her durumda iki aksiyona sahiptir: durmak ya da devam etmek. Karar verici t zamanında s durumunda durmaya karar verirse $g_t(s)$ ödülünü alır ve karar verici devam etmeye karar verirse $f_t(s)$ maliyetini öder ve sistem Markov zincirinin geçiş olasılık matrisine göre karar dönemine kadar değişir. Sistem

durmaksızın N karar dönemine varırsa, $h(s)$ fonksiyon ödülünü temsil etmek üzere problem sonlu ufuklu olabilir. Burada amaç beklenen toplam ödülü en büyükleyecek bir politika seçmektir. Durulmaya karar verildiğinde, sistem durulan durumda kalır ve bu aksiyon sıfır birimlik ödülle neticelenir.

Böyle modellerin uygulamaları bir malın satışını, bir iş için bir aday seçmeyi (sekreter problemi gibi), bir finansal opsiyonu uygulamayı ve değerlendirmeyi, ardışık hipotez testini ve şans oyununu oynamayı içerir. Optimal duraklama probleminin bir Markov karar süreci formülasyonu aşağıdaki gibidir:

Karar Dönemleri: $T = \{1, 2, \dots, N\}, N \leq \infty$

Durumlar: $S = S' \cup \{\Delta\}$

Burada S' kümesi, C (oyuna devam et) ve Q (oyundan çık) durumlarından oluşmaktadır.

Aksiyonlar: $A_s = \begin{cases} \{C, Q\} & s \in S' \\ \{C\} & s = \Delta \end{cases}$

Ödüller: $r_t(s, a) = \begin{cases} -f_t(s) & s \in S', a = C \\ g_t(s) & s \in S', a = Q \quad t < N \\ 0 & s = \Delta, r_N(s) = h(s) \end{cases}$

Geçiş Olasılıkları: $p_t(j/s, a) = \begin{cases} p_t(j/s) & s \in S', j \in S', a = C \\ 1 & s \in S', j = \Delta, a = Q \text{ ya da } s = j = \Delta, a = C \quad t < N \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

Durum uzayı S , $p_t(j/s)$ geçiş olasılıklarına sahip kontrolsüz bir Markov zinciri için durum uzayı S' ile ayırt edilen bir Δ yutan durumundan oluşur. S durum uzayının alt kümesi olan S' kümesinde C devam et veya Q çık (oyunu durdur) olmak üzere her

bir durumda iki aksiyon uygulanabilir. Devam etme, $p_t(j/s)$ olasılığı ile S' kümesindeki sürecin j durumuna geçmesini sağlar. Oyunu durdurma, sistemin sonsuza kadar kalacağı ve sıfır ödülünün alınacağı Δ durumuna geçilmesini sağlar. Çoğunlukla bazı durumlarda $g_t(s)$ 'nin maliyeti o kadar büyüktür ki karar vericinin amacı S' 'deki durumlarda süreci sonlandırmak olur [14].

3.7. Örnek (Bir Varlık Satışı)

Bir yatırımcı, zamanla değerinin artmasını beklediği pahalı bir mal ya da varlığa sahiptir. Her hafta sonunda, yatırımcı önceki hafta boyunca aldığı en iyi teklifi kabul edip malı satmaya karar verir ya da bu teklifi azaltıp ve sonraki hafta yeni teklifler beklemeye karar verir.

Bu problemi sonlu ufuklu optimal duraklama problemi olarak izleyen şekilde elde edebiliriz. Karar dönemleri kararların alındığı zamanlara karşı gelir. Yılın haftalarını 1'den 53'e kadar numaralayalım. Bu örnekte durum, bir hafta süresince elde edilebilen en iyi teklif olarak tanımlanır (Bu değer, malın pazar değeri olarak varsayılmaktadır). S' durum uzayı, karar verme ufkundaki bütün mümkün tekliflerin kümesini temsil eder. Durum uzayı ya kesikli ya da sürekli olabilir, ancak durum uzayı çoğunlukla sınırlıdır. $(t+1)$.karar döneminde elde edilebilir en iyi teklif, durağan olmayan geçiş olasılıkları matrisi ya da $p_t(j|s)$ fonksiyonu aracılığıyla t . karar döneminde elde edilebilen en iyi teklife bağlıdır. Durağan olmama, değişen piyasa koşullarını yansıtır. Yatırımcı bir teklifi kabul ederse, ödülü $s - K(s)$ olur; burada $K(s)$, s değerindeki malla ilişkilendirilen sabit ve değişken maliyetleri içerir. $f_t(s)$ devam maliyeti, (malı elde tutma maliyeti) reklam harcamaları, faiz giderleri ve malı 1 hafta stokta tutmakla ilgili vergileri içerir. Dolayısıyla yatırımcı mallarını satmaksızın bütün bir yıl boyunca elinde tutarsa, o yılın sonunda satmalıdır ve bu durumda $s - K(s)$ nihai ödülünü alır.

Bu probleme ilişkin iyi politikalar aşağıdaki biçimde bir karar kuralı kullanılır.

$$d_t(s) = \begin{cases} Q, & s \geq B_t \\ C, & s < B_t, s \in S' \end{cases}$$

Bu problem, kontrol sınırı politikası olarak adlandırılır. B_t sayısı, kontrol sınırıdır. Burada problemi çözme, devam(C) ve durma(Q) bölgeleri arasındaki sınırı belirlemeye indirgenir. Tabii ki, çözüm $t=1, \dots, 52$ için $p_t(j|s)$ 'in tahminine bağlıdır[14].

3.8. Örnek (Sekreter Problemi)

Bu klasik dinamik programlama problemi ilk kez 1875 yılında Cayley tarafından “Mathematical questions with their solutions” adlı makalesinde bir piyango oyunu için optimal politikayı bulma olarak verilmiştir. Bu problemin daha açıklayıcı bir tanımı şöyledir: Bir işveren, bir sekreterlik pozisyonunda açık bir kadroyu doldurmak için iş vereceği bir bireyi arar. Bu iş için N aday ya da başvuran vardır, işveren tarafından bilinen ya da sabit bulunan bir N aday vardır. Adaylarla sırasıyla mülakat (görüşme) yapılır. Her bir mülakat tamamlandığında, işveren son görüştüğü adaya işi teklif edip etmeyeceğine karar verir. İşveren bu adaya iş teklif etmezse, birey başka bir yerde iş arar ve yeni bir teklif almak için uygun (hazır) olur.

Bu problemin formülü, karar vericinin amacına bağlıdır. Burada işverenin en iyi adaya teklifi vermesi olasılığının maksimum olmasını istediğini varsayalım.

Problemin daha titiz bir ifadesi şöyledir: N nesneden oluşan bir topluluk 1 en istenen derece olmak üzere 1' den N 'ye kadar sıralanır. Doğru dereceleri karar verici de bilmez. Karar verici, rastgele sırada her biri bir zamanda (dönemde) olmak üzere adayları gözlemler. Karar verici ya son görüştüğü adayı seçer ve araştırmayı sonlandırabilir ya da son görüştüğü adayı eler ve gelecek adayı seçebilir. Karar vericinin amacı, 1. sırada numaralanan adayı seçme olasılığını maksimum yapmaktır. Karar vericinin görelî sıralamalarının mutlak sıralamalarla uyumlu olduğunu

varsayalım. Yani A adayı B adayından düşük sayısal sıralamaya sahipse, karar verici A adayını B adayına tercih edecektir.

Kararlar her bir adayı gözlemledikten sonra alınır, böylece N ufku adayların sayısına eşittir. Durum uzayı $S' = \{0,1\}$ 'dir, burada 1 son görüşülen adayın şimdiye kadar görüşülen derecesi 1'e en yakın olan aday olduğunu gösterir ve 0'da önceki bir adayın daha iyi olduğunu gösterir.

Herhangi bir durumda, Q aksiyonu son görüşülen adayı seç (şimdiki adaya teklif et) ve C aksiyonu da son görüşülen adayı seçme ve araştırmaya devam et(sonraki adayla görüş) demektir. Ödüller yalnızca durulduğunda yani Q aksiyonu seçildiğinde alınır. Ödüller en iyi adayı seçme olasılığına karşılık gelir. Yukarıdaki notasyonda devam maliyeti $f_t(s) = 0, s = 0,1$ 'dir; durmakla $g_t(0) = 0$ ve $g_t(1) = t / N$ ödülleri alınır ve $h(0) = 0$ ve $h(1) = 1$ son ödüllerdir. g_t ve h 'nin türetimi şöyledir:

t adayı gözledikten sonra, karar verici şimdiye kadarki adaylardan en iyisi olarak son görüştüğü adayı derecelendirdiğini varsayalım. $g_t(1)$, adayın bütün adaylar arasındaki en iyi aday olma olasılığıdır ve aşağıdaki gibi belirlenir.

$P(\text{En iyi adayın ilk } t \text{ arasında olması olasılığı})$

$$= \frac{\{1,2,\dots,N\}'nin\ büyüklüğü\ t\ olan\ 1'i\ içeren\ altkümelerinin\ sayısı}{\{1,2,\dots,N\}'nin\ t\ büyüklüklü\ altkümelerinin\ sayısı}$$

$$= \frac{\binom{1}{1} \binom{N-1}{t-1}}{\binom{N}{t}} = \frac{t}{N}$$

Eğer bütün adaylarla görüşülmüşse, son aday seçilmelidir. Eğer aday en iyisi ise, yani $s = 1$ ise, en iyi adayın seçilme olasılığı 1 'dir, dolayısıyla $h(1) = 1$ 'dir, aksi takdirde $h(0) = 0$ 'dır.

Kontrolsüz sistem için geçiş olasılıkları sistemin durumundan (yani son görüşülen adayın statüsünden) bağımsızdır. Bu yüzden $s = 0,1$ için $p_t(j|s) = p_t(j)$ 'dir. Sonraki adayın ilk $t+1$ kişi arasında en iyisi olma olasılığı $p_t(1/s) = \frac{1}{t+1}$ olup, sonraki adayın ilk $t+1$ kişi arasında en iyi olmama olasılığı $s = 0,1$ için $p_t(0/s) = \frac{t}{t+1}$ 'dir.

Bu modelin değişik türleri adayların rastgele sayıdasını içerir. k en iyi adaydan birini seçme olasılığını en büyükmeyi, teklif alan adayın beklenen sırasının en küçüklenmesini ya da son görüşülen adayla görüştüktan sonra adayın seçim kuralını içerir. Belirlenmiş bir olasılık dağılımına bağlı elde edilen önceki adayların tasarlanmış bir altkümesine de teklifte bulunabilir. İşveren son görüştüğü adaya teklif yapabilir ve bazı önceki adayların tasarlanmış altkümelerinin elde edilebilirliğini belirten bir olasılık dağılımına bağlıdır[14].

3.9. Örnek (Satın Alma Opsiyonu (Önceden belirlenmiş fiyattan satın alma hakkı))

Finansal piyasalarda, bir satın alma opsiyonu, alana belirlenen tarihten önce herhangi bir zamanda W (işlem fiyatlı) sabit fiyattan hisse senedi payı olarak bir malı satın alma hakkı verir. Örneğin, 30 Haziranda ya da daha önce, hisse başına 40\$ 'lık Sun Mikrosistem şirketinin 100 payını(hisse senedi) alarak bir satın alma opsiyonu satın alabiliriz. 30 Hazirandan önce belirli bir günde hisse senedinin hisse başına 45\$'a ulaştığını varsayalım. O zaman opsiyonu işleme koyar ve 4000\$ 'a Sun Mikrosistem şirketinin 100 hisse senedi payını satın alır ve 4500\$'a 500\$ işlem maliyeti (komisyon ücreti) kârına satarız. Eğer borsa fiyatı hisse başına 40 \$ altına düşerse opsiyonu uygulamaya koymayız.

Opsiyonlar finansal piyasalarda işlem görür ve işlem değerleri temel hisse senedi fiyatıyla ilgili olarak günlük bazda değişir. Yatırım teorisindeki temel problem bir opsiyon değerinin nasıl belirleneceğidir. Açıkça opsiyon değeri mümkün olduğunca etkin olarak kullanıma bağlı olmalıdır. Ardışık karar süreci formülasyonu bunun nasıl yapılacağının anlaşılmasını sağlar.

Opsiyon sahibi karar problemini gerçek hayattaki herhangi bir günde kâr paylarının etkisini ve opsiyonların satılması olasılıklarını göz ardı ederek bir optimal duraklama problemi olarak basit bir halde formüle edilebilir. Son ödeme tarihinden önce herhangi bir işlem gününün başlangıcında, opsiyon sahibi opsiyonunu uygulayıp uygulamayacağına karar verir. Karar dönemleri opsiyon sahibinin opsiyonu uygulayıp uygulamayacağına karar verme zamanlarına karşı gelir ve durum tercih edilen malın piyasa fiyatını temsil eder. Aksiyonların seçimi opsiyonu işleme koymak(dur) veya opsiyonu işleme koymamak(devam et) biçiminde olur. Son ödeme tarihinden sonra, opsiyon hiçbir değer almaz. Hisse senedi s değerine ulaştığında W işlem değerine sahip 100 pay için bir opsiyon uygulayarak, opsiyon sahibi $100(s - w) - k$ birimlik bir ücret alır; burada k işlem maliyetlerini gösterir. Yukarıdaki notasyonda, bütün t 'ler için $h(s) = g_t(s) = 100(s - w) - k$ 'dır. Opsiyonu işleme koymama hiçbir finansal etkiye sahip olmadığından $f_t(s) = 0$ alınır. $p_t(j/s)$ geçiş olasılık fonksiyonu, t gününde hisse senedinin fiyatı s 'ye eşit olduğu bilindiğinde sonraki günde hisse senedi fiyatının j 'ye eşit olması olasılığını verir. Açıkça bu fiyat opsiyon sahibinin aksiyonundan etkilenmez.

Alım satım opsiyonlarının ılımlıdan yüksek derecede spekülâte kadar değişen çok karışık kullanımları vardır [14].

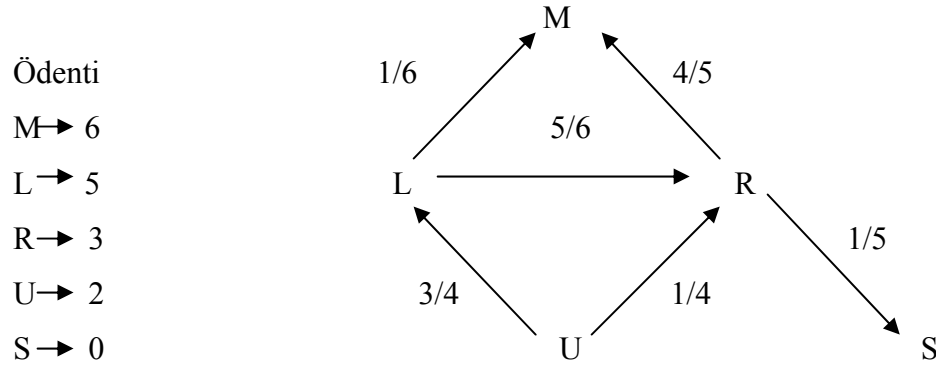
4. MARKOV ZİNCİRLERİNDE OPTİMAL DURAKLAMA

Optimal duraklama teorisi stokastik süreçlerde önemli bir yere ve uygulama alanına sahiptir. Örneğin, elimizdeki stoklanmış malı, hisse senedini ne zaman satmalıyız? En iyi şekilde trafiği nasıl kontrol ederiz? gibi sorulara cevap bulmak için uygulanabilir.

Genel olarak bu teori, beklenen ödentiye maksimum yapacak bir süreci sonlandıran uygun bir zamanı belirleme problemleri ile ilgilidir. Dolayısıyla amacımız uygulanan stratejiye bağlı olarak bütün duraklama zamanları üzerinden beklenen ödentiye maksimum yapmaktır. Mümkün olan bütün duraklama zamanları düşünüldüğünde, durulduğunda farklı ödentiler alındığını ve ödenen miktarın da o anda bulunulan duruma bağlı olduğu söylenebilir. Bu nedenle Markov zincirinin her durumuna atanmış bir ödentisi vardır. Burada bir boyutlu kesikli durum uzayına sahip Markov zincirlerinde optimal duraklama problemiyle ilgilenilecektir.

X , durum uzayı E ve geçiş matrisi P olan bir Markov Zinciri ve f , E üzerinde tanımlanmış negatif olmayan sınırlı bir fonksiyon olsun.

P matrisini ve f fonksiyonunu bildiğimizi ve istediğimiz kadar uzun bir sürede X sürecini gözlemlene imkanına sahip olduğumuzu varsayalım. Ne zaman istersek (süreci gözlemekten vazgeçip) durabilir pozisyonda olalım; eğer duraklama anında süreç j 'deyse $f(j)$ birimlik bir ödenti alalım ve o zaman oyun bitsin. Eğer hiçbir zaman durmazsak, o zaman ödenti sıfır olsun [5].



Başlamak için 5 madeni para atınız.



Şekil 4.1. Kumar makinesinde durumlar arası geçiş diyagramı

4.1. Örnek

Şekil 4.1’de geçiş diyagramı çizilen kumar makinesini ele alalım. Belirtilen sayıda jeton atıldığında, makine çalışmaya başlar ve beş karakterden biri yanar; varsayalım ki $X_0(w) = U$ olsun. Eğer isterse, oyuncu DUR düğmesine basarak $f(U) = 2$ jeton alabilir. Eğer oyuncu DEVAM düğmesine basarsa, o zaman şekilde gösterilen olasılıklarla R veya L düğmelerinden biri yanacaktır. Burada oyuncu daha zor bir kararla karşı karşıya gelir: oyuncu durarak $f(R) = 3$ jeton almaktan emin olabilir, oysaki oyuncu devam ederse hiç jeton almama riski ile birlikte 6 jeton kazanabilir. R ’den sonra M ve S sırasıyla $\frac{4}{5}$ ve $\frac{1}{5}$ olasılıklarıyla yandığından, eğer oyuncu R ’den sonra devam ederse beklenen ödenti $\frac{4}{5}f(M) + \frac{1}{5}f(S) = 4,8$ jetondur. Bu miktar (4,8 jeton) $f(R) = 3$ ’ten büyüktür. Bunun için oyuncu durmamayı ve devam düğmesine basmayı tercih ediyor. Bundan sonra $X_2(w) = M$ yanyor ve oyuncu 6 jeton alıyor ve makine kapanıyor.

Burada en iyi stratejiyi şöyle ifade edebiliriz kısaca, eğer ışıklı karakter U ve R ise devam et; ışıklı karakter L, M veya S ise dur. Buna göre, şansa bağlı olarak optimal stratejiyi kullanan (uygulayan) bir oyuncu 5, 6 veya 0 jetonla oyunu bitirir. Sözgelimi eğer gerçekleşiş $X_0(w) = L$ şeklinde olursa, o zaman optimal duraklama zamanı $T(w) = 0$ 'dır ve ödenti $f(L) = 5$ 'tir. Eğer $X_0(w) = R, X_1(w) = S$ ise, o zaman optimal duraklama zamanı $T(w) = 1$ 'dir ve ödenti $f(S) = 0$ 'dır. Eğer $X_0(w) = R, X_1(w) = M$ ise optimal duraklama zamanı yine $T(w) = 1$ ve ödenti $f(M) = 6$ 'dır [5].

Burada duraklama zamanının değeri X zincirinin $X_0, X_1, \dots$ yoluyla belirlenen bir T rastgele değişkeni olduğu açıktır. Her n anında durma veya devam etme kararı bu anda elde edilebilir yol bilgisi temelinde verilmelidir. Dolayısıyla, herhangi bir $w \in \Omega$ için $T(w) = n$ olup olmadığı bu n anına kadar gözlenmiş $X_0(w), X_1(w), \dots, X_n(w)$ yolunun tamamıyla belirlenmelidir. Bu her n için doğru olduğundan T bir duraklama zamanıdır.

T duraklama zamanında süreç X_T durumundadır ve bu yüzden ödenti $f(X_T)$ 'dir. Bir T duraklama zamanının seçimi bir stratejiyi seçmeye karşı gelir. Farklı T duraklama zamanları için $E_i[f(X_T)]$ beklenen ödentileri farklı olur. Burada beklenen ödentinin maksimum olduğu bir T duraklama zamanını seçme problemiyle ilgilenilecektir.

Markoviyen optimal duraklama problemi şöyle çözülür:

$$a) v(i) = eküs_T E_i[f(X_T)] \quad (4.1)$$

olacak şekilde bütün T duraklama zamanları üzerinden $v(i)$ değeri hesaplanır.

$$b) v(i) = E_i[f(X_{T_0})] \quad (4.2)$$

olacak şekilde bir T_0 duraklama zamanı bulunur.

Eş. 4.1'deki f fonksiyonuna ödenti fonksiyonu ve v fonksiyonuna oyunun değeri denir. Eş. 4.2'deki T_0 duraklama zamanına optimal duraklama zamanı denir.

Aşağıdaki teorem Markoviyen duraklama problemlerini nasıl çözeceğimiz konusunda yardımcı olur [5].

4.1. Teorem

v oyunun değeri fonksiyonu, f ödenti fonksiyonundan büyük eşit ($\geq$) olan en küçük aşırı fonksiyondur.

Teorem 4.1, durum uzayı E sonlu olduğunda, oyunun değerinin doğrusal programlama yöntemleri kullanılarak bulunabileceğini gösterir. v , aşırı bir fonksiyon olduğundan, tanımı gereği $v \geq 0$, $v \geq vP$ 'dir. Yine v, f 'ye baskın olduğundan, $v \geq f$ 'dir; ve $v, \sum_{i \in E} v(i)$ minimum olacak şekilde minimal bir fonksiyondur. O halde söz konusu doğrusal programlama problemi modeli, her $i \in E$ için

$$v(i) \geq \sum_j p_{ij} v(j)$$

$$v(i) \geq f(i)$$

$$v(i) \geq 0$$

kısıtları altında

$$\min \sum_{i \in E} v(i)$$

olur .

Teorem 4.1'i indirgenemez geri dönüşlü bir Markov Zinciri için tüm aşırı fonksiyonlar sabittir gerçeğiyle birleştirerek aşağıdaki basit sonucu elde ederiz [5].

4.1. Sonuç

Eğer X Markov zinciri indirgenemez geri dönüşlüyse $v, c = eküs_j f(j)$ sabitine eşittir.

Bu sonuç her bir indirgenmeyen kapalı durumlar kümesine ayrı ayrı uygulanırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir [5].

4.2. Sonuç

Eğer C bir indirgenemez geri dönüşlü durumların olduğu bir kümeysen, o zaman tüm $i \in C$ 'ler için $c = eküs_j f(j)$ sabitine eşittir.

Optimal duraklama zamanını ifade eden temel teorem ise aşağıdaki gibi ifade edilir [5].

4.2. Teorem

E durum uzayının sonlu olduğunu varsayalım. O zaman

$$A = \{j \in E \mid v(j) = f(j)\}$$

kümesine ilk giriş zamanı T_0 , bir optimal duraklama zamanıdır; yani, herhangi bir $w \in \Omega$ için

$$T_0(w) = \text{ebas}\{n \geq 0 \mid f(X_n(w)) = v(X_n(w))\}$$

olur.

Eğer f ve v fonksiyonları aynı eksen sisteminde çizilirse, f ve v 'nin grafikleri A 'ya ait noktalarda çakışır ve diğer noktalarda v 'nin grafiği f 'ninkinin üstünde kalır; bir başka deyişle, A 'ya ait noktalarda f fonksiyonu v 'nin grafiğini “destekler”. Bu görüntü $A = \{f = v\}$ kümesine destek kümesi dememizi sağlar [5].

4.2. Örnek

X , durum uzayı $E = \{a, b, c, d, e\}$ ve geçiş matrisi

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,3 & 0 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

olan bir Markov Zinciri olsun. Ayrıca ödenti fonksiyonu

$$f = (5, 12, 7, 6, 8)$$

olsun. Bu zincirde a ve b yutan durumlar; c, d ve e durumları da geçişli durumlardır. Yine Sonuç 4.2'ye göre $v(a) = 5, v(b) = 12$ 'dir. Artık, $v(c) = x, v(d) = y$ ve $v(e) = z$ değerlerinin sağlandığı denklemler ($v \geq Pv$ 'den)

$$(1) \ x \geq 0, 2x + 0,8z, \ x \geq 7$$

$$(2) \ y \geq 0, 3x + 0,2y + 0,2z + 1,5, \ y \geq 6$$

$$(3) \ z \geq 0,3y + 0,1z + 5,8, \ z \geq 8$$

olur. İlk denklemden $0,8x \geq 0,8z$, yani $x \geq z$ bulunur. $z \geq 8$ olduğundan $x \geq z$ ve $x \geq 7$ bağıntılarına göre $x = z$ alınırsa her ikisi de sağlanır. Bundan sonra geri kalan denklemler

$$0,8y - 0,5z \geq 1,5, \ x \geq z \quad (4.3)$$

$$-0,3y + 0,9z \geq 5,8, \ x \geq 7 \quad (4.4)$$

$$y \geq 6, \ z \geq 8$$

(4.5)

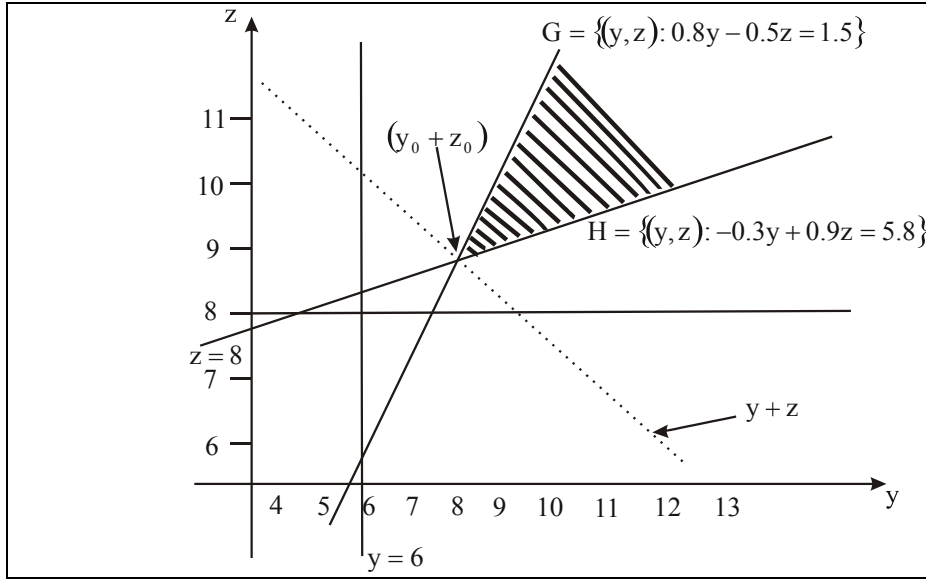
olur. Eş. 4.3'ü sağlayan (y, z) noktaları

$$G = \{(y, z) | 0,8y - 0,5z = 1,5\}$$

doğrusunun sağında, ve Eş. 4.4'ü sağlayan (y, z) noktaları

$$H = \{(y, z) | -0,3y + 0,9z = 5,8\}$$

doğrusunun üzerinde kalır. Bu bölgeler çizilirse Şekil 4.2'deki gibi elde edilir. Burada $y + z$ 'yi en küçükleyen nokta G ve H doğrularının $(y_0, z_0) = (\frac{850}{114}, \frac{1018}{114})$ noktasıdır. Buna göre oyunun değeri $v = (5, 12, 8\frac{53}{57}, 7\frac{26}{57}, 8\frac{53}{57})$ ' dir ve destek kümesi $A = \{a, b\}$ olup, optimal duraklama zamanı A kümesine yutulma zamanıdır. Yani, optimal strateji b 'de yutulmayı ummak ve sonuçlarına katlanmaktadır, diyebiliriz [5].



Şekil 4.2. $y + z$ toplamının en küçüklendiği nokta

4.1. İndirimli ve Ücretli Oyunlar

Optimal duraklama problemi uygulamalarında, sondaki ödenti fonksiyonundan başka (oyundaki) beklemeye bağlı olarak çeşitli maliyetler ve cezalandırmalar da vardır. İzleyen örnek böyle bir durumu yansıtıyor [5].

4.3. Örnek

Bir adam 74 000TL istediği evini satıyor, ancak evini daha düşük fiyata da satmayı düşünüyor. Alıcıların gelişleri ayda ortalaması $\lambda = 3$ kişi olan bir Poisson süreci oluşturuyor. n . müşteriye sorarsanız, evin değeri Y_n TL'dir, ev bu müşterinin varışına (gelişine) kadar satılmadığından 74 000 TL ve Y_n TL'den hangisi küçükse müşteri o fiyatı teklif ediyor. Eğer yapılan teklif mal sahibine uygun (kabul edilebilir) gelirse, satış tamamlanıyor. Teklif mal sahibine kabul edilebilir gelmezse, teklifi reddediyor ve müşteri bir daha gelmemek üzere gidiyor. Mal sahibi yıllık % 9 yatırım yapabiliyor ve yıllık enflasyon % 3 civarındadır.

$Y_0, Y_1, \dots$ 'leri $\{60000, \dots, 80000\}$ kümesinde değerler alan bağımsız ve aynı dağılımlı rastgele değişkenler olduğunu varsayarsak, yapılan ardışık teklifler $X = \min(Y_n, 74000)$ olmak üzere, $X = \{X_n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ bir Markov zinciri oluşturur.

Bu problem şu iki ek özelliği olan bir optimal duraklama problemidir:

(a) Enflasyon sebebiyle, gelecek sonraki müşterinin teklifi y 'nin gerçek değeri

$$\alpha y = y \int_0^{\infty} e^{-0,03/12} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{3}{3+0,0025} y$$

dir.

(b) Bugünün x 'lik bir teklifini reddederek, mal sahibinin şimdi ve sonraki müşterinin geliş zamanı arasında kaybettiği kazanma fırsatı (net kazanç oranının % 9 - % 3 = % 6 olduğuna dikkat ederek)

$$g(x) = x \int_0^{\infty} e^{-0,06t/12} \lambda e^{-\lambda t} d_t - x = \frac{3x}{3-0,005} - x = \frac{0,005x}{3-0,005}$$

Bu iki faktörü hesaba katarak, hali hazırda (şimdiki) x birimlik bir teklifin, “sonraki teklifin beklenen indirimli değeri eksi reddetmeyle kaybolan kazanç”la karşılaştırılması gerekir.

Önce indirimin etkisini ele alalım. Yine X , durum uzayı E , geniş matrisi P olan bir Markov zinciri ve f, E üzerinde tanımlanmış sınırlı bir fonksiyon olsun. İndirim faktörü $\alpha \in (0, 1]$ olsun. O zaman T duraklama zamanıysa, ödenti $f(X_T)$ ve bu ödentinin şimdiki değeri $\alpha^T f(X_T)$ olur. Burada bu ödentinin beklenen değerini T

duraklama zamanını özel olarak seçerek en büyüklemeyle ilgilenilir. eküs X Markov zincirinin tüm mümkün T duraklama zamanları üzerinden alınmak üzere,

$$v(i) = eküs E_i[\alpha^T f(X_T)], i \in E \quad (4.6)$$

diyelim. Önceden olduğu gibi v 'ye oyunun değeri denir. Aşağıdaki teorem oyunun değeri v 'nin f ödenti fonksiyonundan baskın kalan en küçük α -aşırı fonksiyon olduğunu ifade ediyor [5].

4.3. Teorem

Oyunun değeri $v, v \geq f$ olan en küçük α – aşırı fonksiyondur.

Yukarıdaki teoreme göre, bu, E durum uzayı sonlu olduğunda hesaplama yönüyle v 'nin

$$v(i) \geq \alpha \sum_j p_{ij} v(j), i \in E$$

$$v(i) \geq f(i), i \in E$$

$$v(i) \geq 0, i \in E$$

kısıtları altında $\min \sum_{i \in E} v(i)$ doğrusal programlama probleminin çözümü olması demektir.

Yani indirimsiz durumda olduğu gibi, optimal duraklama zamanı $A = \{f = v\}$ destek kümesine ilk giriş zamanıdır [5].

4.4. Teorem

Eğer E sonluysa, optimal duraklama zamanı $A = \{j \mid f(j) = v(j)\}$ kümesine ilk giriş zamanıdır. Bir başka deyişle, eğer $T = ebas\{n \geq 0 \mid X_n \in A\}$ ise o zaman

$$E_i[\alpha^T f(X_T)] = v(i), i \in E \quad (4.7)$$

olur. Yani Eş. 4.7 oyunun değerine eşittir.

Aşağıdaki teorem özellikle durum uzayı sonsuz olduğu durumlarda karşılaşılan oyunun değerini elde edememe durumunu ε kadar taviz vererek ortadan kaldırmada yararlı olmaktadır [5].

4.5. Teorem

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $A_\varepsilon = \{j \in E \mid f(j) \geq v(j) - \varepsilon\}$ olsun. O zaman A_ε kümesine ilk giriş zamanı ε -optimaldir. Bir başka deyişle $T = ebas\{n \mid X_n \in A_\varepsilon\}$ ise o zaman

$$E_i[\alpha^T f(X_T)] \geq v(i) - \varepsilon$$

olur [5].

4.4. Örnek

X , durum uzayı $E = \{a, b, c\}$ ve geçiş matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}$$

olan bir Markov Zinciri olsun. Ayrıca $f = (5, 4, 2)$ ve $\alpha = 0,80$ olduğunu varsayalım. Açık olarak $v = (x_1, x_2, x_3)$ ile $v \geq \alpha P v$ ve $v \geq f$ sistemini yazalım:

$$x_1 \geq 0,32x_1 + 0,48x_2, \quad x_1 \geq 5$$

$$x_2 \geq 0,08x_1 + 0,72x_2, \quad x_2 \geq 4 \quad (4.8)$$

$$x_3 \geq 0,4x_1 + 0,16x_2 + 0,24x_3, \quad x_3 \geq 2 \quad (4.9)$$

$x_1 = 5$ 'dır. Çünkü $(5, 5, 5)$ fonksiyonu α -aşırdır. Buna göre Eş. 4.8'den $x_2 = 4$ ve Eş. 4.9'den $x_3 \cong 3,47$ bulunur. Dolayısıyla oyunun değeri $v = (5, 4, 3.47)$ olur. Yani, optimal duraklama zamanı $f = (5, 4, 2)$ ve $v = (5, 4, 3.47)$ 'ten $A = \{a, b\}$ kümesine ilk giriş zamanı olur.

Bu problemde indirimin etkisine dikkat edilirse, eğer hiçbir indirim olmasaydı (yani $\alpha = 1$ olsaydı), destek kümesi basit olarak $\{a\}$ olacaktı. İndirim yüzünden, α, b 'de de durulmasını optimal yapacak kadar yeterince küçüktür.

Son olarak indirim ek olarak, sonraki durum ortaya çıkmadan önce ödenmesi gereken bir devam etme maliyetinin var olduğu hali ele alalım. Her bir n anında oyun n ' de veya daha önce durmamışsa, $g(X_n)$ 'lik bir ücret ödendiğini varsayalım. Burada g, E üzerinde sınırlı negatif olmayan bir fonksiyondur. O zaman indirimli ortamda oyun oynama maliyeti

$$\sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n) \quad (4.10)$$

ve en büyüklenecek nicelik, yani $\alpha \in [0, 1), f \geq 0$ ve $g \geq 0$ için oyunun değerini

$$v(i) = eküs_T E_i[\alpha^T f(X_T) - \sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n)] \quad (4.11)$$

şeklinde ifade edilir.

Önce bu problemi ücretsiz hale indirgeyelim. Sonra Teorem 4.3, Teorem 4.4 ve Teorem 4.5'i kullanarak v ve optimal duraklama zamanı için hesaplama formülleri elde edilir.

Herhangi bir T duraklama zamanı için

$$v(i) = E_i \left[\sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n) \right] = R^\alpha g(i) - E_i \left[\alpha^T R^\alpha g(X_T) \right] \quad (4.12)$$

yazılabilir; burada $R^\alpha g, g$ 'nin α -potansiyelidir. Buna göre eğer

$$\hat{f} = f + R^\alpha g, \quad \hat{v} = v + R^\alpha g \quad (4.13)$$

şeklinde yazılırsa Eş. 4.11

$$\hat{v}(i) = eküs E_i \left[\alpha^T \hat{f}(X_T) \right] \quad (4.14)$$

biçiminde yazılabilir.

Bu bağıntıdan $\hat{v}$ 'ın ücretsiz ve $\hat{f}$ ödenti fonksiyonlu oyunun değeri olduğu ve ayrıca söz konusu bu oyunun optimal duraklama zamanının f ödentili ve g ücret programlı oyunun optimal duraklama zamanına eşit olduğu görülür [5].

4.6. Teorem

Eş. 4.11 ile tanımlanan v fonksiyonu

$$v(i) \geq -g(i) + \alpha \sum_j p_{ij} v(j), i \in E$$

$$v(i) \geq f(i), i \in E$$

sisteminin minimal çözümüdür [5].

4.7. Teorem

Eğer durum uzayı, E sonluysa, o zaman optimal duraklama zamanı

$$A = \{j \in E \mid f(j) = v(j)\}$$

kümesine ilk giriş zamanıdır [5].

4.8. Teorem

Eğer T ,

$$A_\varepsilon = \{j \in E \mid f(j) \geq v(j) - \varepsilon\}$$

kümesine ilk giriş zamanıysa, o zaman

$$E_i \left[\alpha^T f(X_T) \right] - \sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n) \geq v(i) - \varepsilon, i \in E$$

olur [5].

5. MARKOVİYEN OPTİMAL DURAKLAMA PROBLEMİNİN İYİLEŞTİRİLMESİ VE UYGULAMASI

Ekonomideki binlerce mal ve hizmetin fiyatlarına ilişkin bilgilerden derlenen ve bütün fiyatları tek bir sayı ile ölçen bir göstergeye endeks denir. Her bir malın üretim ve tüketim miktarları ve ekonomideki önemi ayrıdır. Bu nedenle bir endeks oluşturulurken fiyatlar, endekse dâhil edilecek mallar ya da hizmetlerin önem derecelerini yansıtacak şekilde ağırlıklandırılır [11].

Hisse senetleri de son yıllarda ekonomik hayatta sözü sık geçen yatırım araçlarından biri haline gelmiştir. Hisse senedi sözlük anlamı ile “ortaklık sermayesinin birbirine eşit kısımlara ayrılmış parçalarından her birinin karşılığı olmak üzere kanunda gösterilen şekillere uygun kıymetli evrak”tır [6].

Hisse senedi piyasasının genel bir göstergesi olan hisse senedi endeksleri, endeks kapsamındaki hisse senetlerinin fiyatları temel alınarak piyasa performansı hakkında bilgi verirler. Dünyada 1884 yılından bu yana kullanılmakta olan hisse senedi endeksleri genellikle üç şekilde hesaplanmaktadır. Bunlar; aritmetik ortalama formülü ile hesaplanan endeksler (örneğin, Dow Jones, Nikkei), geometrik ortalama formülü ile hesaplanan endeksler (örneğin, Value Line Composite Index) ve şirketlerin toplam piyasa değerleri ile ağırlıklandırılması gibi karmaşık formüller ile hesaplanan endeksler (örneğin, Standart&Poor’s 500, Topix, Financial Times (FT-100) ve İMKB endeksleri)’dir.

Bugün İstanbul Menkul Kıymetler Borsası’nda hesaplanan endeksler şunlardır;

- İMKB Ulusal-Bütün endeksi
- İMKB Ulusal-30 Endeksi
- İMKB Ulusal-100 Endeksi
- Sektör Endeksleri ve Alt Sektör Endeksleri
- İMKB Bölgesel, Yeni Şirketler Pazarı (YŞP) Endeksi

- İMKB Yatırım Ortaklıkları Endeksi [9].

Bu çalışmada endeks değerleri olarak İMKB-100 seans kapanış değerleri dikkate alınmıştır.

5.1. İstanbul Menkul Kıymetler Borsası

Osmanlı devleti borsası, Cumhuriyetin ilanı ile kaldığı yerden devam etmiş ve 1981 yılında yayımlanan 2499 sayılı Sermaye Piyasası Kanunu ve 1983 yılında yayımlanan Menkul Kıymetler Borsaları Hakkındaki Kanun Hükmünde Kararname (KHK) ile borsada ciddi bir düzenleme yapılmıştır. İstanbul Menkul Kıymetler Borsası (İMKB) 6 Aralık 1985 tarihinde faaliyete geçmiştir [4].

İlk zamanlarda az sayıda şirket, düşük işlem hacmi ve Türk ekonomisine endeksli hareket eden İMKB, günümüzde Hisse Senetleri Piyasası'nda 330'dan fazla şirketin hisse senedi, Tahvil ve Bono Piyasası'nda ise devlet tahvili ve hazine bonolarının yoğun olarak işlem gördüğü bir borsa haline gelmiştir. Hisse Senetleri Piyasası'nda günlük ortalama 1 milyar dolar, Tahvil ve Bono Piyasası'nda ise günlük ortalama 8,5 milyar dolarlık işlem hacmiyle dünya ekonomileriyle bütünleşmiş bir şekilde faaliyetini sürdürmektedir [19].

Uluslararası öneme sahip borsa merkezleri:

- New York Menkul Kıymetler Borsası
- Londra Menkul Kıymetler Borsası
- Tokyo Menkul Kıymetler Borsası
- Frankfurt Kıymetli Kâğıt Borsası
- Hong Kong Menkul Kıymetler Borsası
- Toronto Menkul Kıymetler Borsası
- İsviçre Borsası
- Amsterdam / Paris / Lizbon / Brüksel Borsası (Euronext)'dır [19].

Çıkarılan 91 sayılı KHK ile İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nın özel bütçeli ve tüzel kişiliğe sahip kamu kurumu niteliği muhafaza edilmiştir. Buna karşılık borsa Sermaye Piyasası Kurulu'nun (SPK) gözetim ve denetimine verilmiştir.

SPK'nın görevi, yasada verilen görevleri ve gerekli düzenlemeleri piyasa koşullarına göre yapmaktır. Kurul'un kuruluş amacı, yatırımcıyı ve bunun doğal sonucu olarak bütün sermaye piyasasını korumak ve piyasanın ülke yararına çalışmasını sağlamaktır [4].

5.2. Borsa'nın Tanımı

Sermaye piyasası araçlarının işlem göreceği borsalar, menkul kıymetlerin ve diğer sermaye piyasası araçlarının güven ve istikrar içinde, serbest rekabet şartları altında kolayca alınıp satılabilmesini sağlamak ve oluşan fiyatları tespit ve ilân etmekle yetkili olarak kurulan, tüzel kişiliği taşıyan kuruluşlardır.

Borsada işlem yapabilecekler SPK'dan faaliyetleri için yetki belgesi almış, yatırım ve kalkınma bankaları, ticari bankalar ve aracı kurumlardır.

Borsa denildiğinde genellikle hisse senetlerinin işlem gördüğü Menkul kıymet borsaları akla gelmektedir. Ancak Menkul kıymet borsalarının yanı sıra Ticaret ve Hizmet borsaları da bulunmaktadır. Bu borsaları Menkul kıymet borsasından ayıran en temel fark, Ticaret borsalarında zirai ürünlerin de işlem görmesi, Hizmet borsalarında ise nakliye ve sigorta gibi hizmetlerin fiyatlarının saptanmasıdır.

Menkul kıymetler borsaları, kota ettirilmiş tahvil ve hisse senetlerinin alım-satım işlemlerinin yapıldığı kapalı piyasalardır. Tanımından da anlaşılacağı gibi, Menkul kıymet borsalarında, yalnızca, o borsaya kayıtlı finansal varlıklar alınıp satılabilir. Bununla birlikte bazı özel durumlarda, borsaya kota ettirilmemiş tahvil ve hisse senetlerinin de borsada işlem gördüğü gözlenmektedir.

Borsada arz ve talebe göre oluşan fiyatlar, çok kısa zamanda borsa dışına, bütün ülkeye, hatta ülke dışına yayılmaktadır. Borsada işlem gören finansal varlıklardan alınan ücret ve komisyonlar minimum tutulmaktadır. Bunun nedeni, tam rekabet şartlarına uygun bir piyasa oluşturabilmektir. Böylece, borsada işlem gören tahvil ve hisse senetleri için, doğru fiyat oluşturulması sağlanabilmektedir. Doğru fiyatın oluşması, hem halka açık şirketleri, hem de ülke ekonomisini olumlu yönde etkilemektedir [8].

5.3. TEFE (Toptan Eşya Fiyat Endeksi)

Üreticiden dağıtım kanallarına geçerken hammadde ve yarı mamullerin de dâhil olduğu sabit mal ve hizmetler sepetini satın alma maliyetindeki değişimleri ölçen toptan eşya fiyat endeksidir. TEFE'nin belirlenmesinde enflasyonun rolü çok önemlidir. Bu nedenle enflasyonun tanımı iyi bilinmelidir [11].

Enflasyon deyince akla ilk gelen günlük hayatta çokça kullandığımız mal ve hizmetlerin fiyatlarının artmasıdır. Ancak mal ve hizmetlerin fiyatları zaman içinde artabilir veya azalabilir. Enflasyon sadece belli bir malın veya hizmetin fiyatının tek başına artması değil, fiyatların genel düzeyinin sürekli bir artış göstermesidir. Diğer bir ifadeyle, sadece bazı malların fiyatlarının sürekli artması ya da bütün malların fiyatlarının bir sefer artması enflasyon değildir. Örneğin, aylık enflasyon oranının yüzde 1 olması, o ay içinde fiyatlar genel seviyesinin bir önceki aya göre yüzde 1 oranında arttığını gösterir. Düşük enflasyon; fiyatların düşmesi, insanların alım gücünün artması, gelirlerinin yükselmesi demek değildir. Düşük enflasyon, fiyatların daha az artması, insanların alım güçlerinin daha az azalması ve neticesinde istikrar ve refah demektir [16].

Çalışmamız aylık enflasyonun %14'ten -%2'a kadar değiştiği çok çeşitli bir ortamı kapsamaktadır. Enflasyonun negatif olduğu yerlerde sonuca ulaşamadığından buralarda enflasyon sıfır olarak alınmıştır.

Çizelge 5.1. Kullanılan aylık TEFE değerleri

Aylar	Yıllar										
	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Ocak	0,06	0,06	0,04	0,06	0,02	0,04	0,06	0,03	-0,01	0,02	0,00
Şubat	0,06	0,05	0,03	0,04	0,03	0,03	0,03	0,02	0,00	0,00	0,01
Mart	0,06	0,04	0,04	0,03	0,10	0,02	0,03	0,02	0,02	0,00	0,01
Nisan	0,05	0,04	0,05	0,02	0,14	0,02	0,02	0,03	0,02	0,02	0,01
Mayıs	0,05	0,03	0,03	0,02	0,06	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,03	
Haziran	0,03	0,02	0,02	0,00	0,03	0,01	-0,02	-0,01	0,00	0,04	
Temmuz	0,05	0,02	0,04	0,01	0,03	0,03	-0,01	-0,02	0,00	0,01	
Ağustos	0,05	0,02	0,03	0,01	0,03	0,02	0,00	0,01	0,02	-0,01	
Eylül	0,06	0,05	0,06	0,02	0,05	0,03	0,00	0,02	0,02	0,00	
Ekim	0,07	0,04	0,05	0,03	0,07	0,03	0,01	0,03	0,01	0,00	
Kasım	0,06	0,03	0,04	0,02	0,04	0,02	0,02	0,01	-0,02	0,00	
Aralık	0,05	0,02	0,07	0,02	0,04	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00	
Ortalama	0,055	0,038	0,042	0,023	0,054	0,023	0,007	0,012	0,005	0,009	0,008

5.4. Literatür

İMKB ve diğer borsalarda hisse senetleri üzerinden birçok çalışma yapılmıştır ve yapılmaya da devam edilmektedir. Aşağıda İMKB’de hisse senetlerinin satışlarını kapsayan birkaç çalışmaya değinilecektir.

Barak, 2006 yılındaki “Hisse Senedi Piyasalarında Anomaliler ve bunları açıklamak üzere geliştirilen davranışsal finans modelleri-İMKB’de bir uygulama” adlı çalışmasında, dünya piyasalarında gözlemlenmekte olan fiyat anomalilerinin (underreaction ve overreaction anomalisi) İMKB’de de var olup olmadığı araştırmıştır. Türkiye’de faaliyette bulunan ve İMKB’ye kota olmuş, 1992-2004 yılları arasında düzenli olarak faaliyet gösteren ve analiz için verilerinde sorun

olmayan 80 işletmenin ele alındığı çalışmada, frekans dağılımı, yüzde, ortalama, karşılaştırmalı tablolar, regresyon, korelasyon testlerini içeren sonuçları istatistiksel analizlerden çıkarmıştır. Uzun ve kısa dönem araştırma bulgularında, hisse senedi piyasasında (İMKB’de), aşırı reaksiyon anomalileri ve düşük reaksiyon anomalilerinden faydalanılarak, piyasada ortalamanın üzerinde getiri elde edilebileceği ve yatırımcılar hisse senedi pazarlarında, hiç ekstra risk almadan eksik yetersiz reaksiyon ve aşırı reaksiyonun avantajını kullanarak ortalamanın üzerinde çok ciddi kazançlar elde edebileceği sonucuna varılmıştır [2].

Alhan, 2008 yılındaki “Bağımsızlık kapulasını içeren kapula aileleri, kapula tahmin yöntemleri ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında sektörler arası bağımlılık yapısı” adlı çalışmasında, bağımsızlık kapulasını içeren iki değişkenli kapula ailelerini fonksiyonel yazılışları bakımından araştırmıştır. Kapula tahmin yöntemlerini örneklendirmek amacıyla, İstanbul Menkul Kıymet Borsası sektör endeks verileri kullanılarak sektörler arasındaki bağımlılık yapılarının beklentilere uygun olarak pozitif yönde olduğunu gözlemiştir [1].

İMKB’de hisse senetlerinin satışlarında özellikle Markoviyen Optimal Duraklama Yöntemi kullanılan çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Mutlu, 1997 yılındaki “Markoviyen Oyunlar ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsasına uygulaması” adlı çalışmasında, 1990-1996 yıllarını kapsayan 1269 İMKB kapanış endekslerindeki artış ve azalışlarda borsa için bir geçiş matrisi ve durumların ortalama değerlerini türeterek elde edilen Markoviyen oyun modeli borsa endeksinde en az %3’lük bir artış olması halinde hisse senetlerinin satılması gerektiği sonucuna ulaşmıştır [12].

Kayıran, 2000 yılındaki “Değişen indirimli ortamda Markoviyen Oyunlarda İMKB’de bir deneme” adlı çalışmasında, 1992-1999 yılları arasındaki İMKB kapanış endeksleri ve tüketici fiyat endekslerini kullanarak enflasyon oranı arttıkça hisse senetlerindeki daha az artış oranlarında yatırımcının kârının optimum olduğu ve 1999 yılının Nisan ile Aralık ayları arasındaki 137 günlük endeks değerleriyle deneme

amaçlı 10 000TL'ye alınmış hisse senedine farklı enflasyon tahminleriyle yapılan yaklaşımlarda kazanç grafiğinin İMKB endeks grafiği ile ilişkili olduğu görülmüştür. Ayrıca enflasyonu martingale olarak ele alan yaklaşımdaki grafiğin, gerçek enflasyon değerlerine göre hisse senedindeki artışları gösteren grafiğe göre daha yakın olduğunu, endeks değerleriyle tahmin edilen enflasyonun martingale yaklaşım kadar tutarlı olmadığı anlaşılmıştır[10].

Üçbaş, 2005 yılındaki “İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında hisse senedi satışlarında hareketli ortalamalar ve Markoviyen optimal duraklama tekniklerinin karşılaştırılması” adlı çalışmasında, İstanbul Menkul Kıymetler Borsasının Ocak 1997-Haziran 2004 tarihlerini içeren 3690 borsa seans kapanış endeks değerini kullanarak, Hareketli Ortalamalar Tekniği ve Markoviyen Optimal Duraklama Tekniğiyle bulunan sonuçlar karşılaştırdığında, gerek yıllık ortalama kâr, gerekse hisse senedi başına ortalama kâr bakımından Markoviyen Optimal Duraklama Tekniğinin, Hareketli Ortalamalar Tekniğinden daha iyi sonuçlar verdiğine ulaşmıştır [17].

Gül, 2006 yılındaki “İstanbul Menkul Kıymetler Borsası’nda değişen indirimli ortamda Markoviyen optimal duraklama ile hisse alım-satımı üzerine bir deneme” adlı çalışmasında, İstanbul Menkul Kıymetler Borsası’nda Ocak 1997-Haziran 2004 tarihleri arasında gerçekleşen 3690 İMKB-100 seans kapanış endeks değerine dayanarak, indirimli ortamda hisse senetlerinin alış ve satışlarına karar vermeye ilişkin bir modelle hisse senetlerini çoğunlukla Pazartesi ve Salı günleri almamız, Çarşamba ve Cuma günleri satmamızı öneriyor. Ayrıca hisse senedi alımı ve satımı bakımından aylarla günler ve aylarla seanslar arasında ilişki olmadığı, ancak hisse senedi satışı açısından günlerle seanslar arasında bir ilişki bulunmakla birlikte, hisse senedi alış bakımından günlerle seanslar arasında ilişki olduğu istatistiksel olarak kanıtlamıştır [7].

5.5. Veriler ve Yöntemlerin Uygulanması

Bu çalışmada, İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında işlem gören 02.01.1997-30.04.2007 tarihlerini içeren 5110 İMKB Ulusal-100 günlük seans kapanış endeksi kullanılmıştır. Bu veriler Markoviyen Optimal Duraklama Yöntemiyle ortalama, medyan ve β -kısıtlı olmak üzere üç farklı modelle incelenmiştir. Bu çalışmada, Gül [7] ve Üçbaş [17]'in çalışmalarından farklı olarak, özellikle Üçbaş [17]'in çalışmasında belirgin bir şekilde görülen Markoviyen Optimal Duraklama Yönteminin düşük enflasyonlu ortamda hisse senetlerinin satışlarında ağır davranması sorununu ortadan kaldırmak amacıyla geliştirilen medyan ve β -kısıtlı modeller kullanılmıştır.

Çizelge 5.2. Yıllar ve aylara göre işlem yapılan seans sayıları

Aylar	Yıllar											Aylık toplam seans sayısı
	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	
Ocak	44	35	30	36	44	42	44	40	37	34	40	426
Şubat	36	40	40	42	40	35	30	34	40	40	40	417
Mart	42	44	40	36	34	42	42	46	46	46	44	462
Nisan	35	32	38	42	40	42	42	42	42	40	41	436
Mayıs	42	40	40	40	46	46	42	40	42	44	-	422
Haziran	42	44	44	44	42	40	42	44	44	44	-	430
Temmuz	46	46	44	42	44	46	46	44	42	42	-	442
Ağustos	42	42	28	44	44	42	42	42	44	44	-	414
Eylül	44	44	44	42	38	42	44	44	44	42	-	428
Ekim	43	39	39	44	44	43	43	39	41	38	-	413
Kasım	40	42	44	44	44	42	27	40	39	44	-	406
Aralık	46	46	40	32	36	39	46	42	44	42	-	413
Yıllık toplam Seans sayısı	502	494	471	488	496	501	490	497	505	500	165	5109

Çizelge 5.2’de (Ocak 1997-Nisan 2004) tarihleri arasında İstanbul Menkul Kıymetler Borsası’nda aylara ve yıllara göre işlem yapılan seans sayıları yer almaktadır. Aylara göre işlem yapılan seans sayıları bakımından önemli bir farklılık yoktur. Şubat ayı diğer aylardan daha kısa olduğundan doğal olarak işlem yapılan ortalama seans sayısı $\frac{417}{11} = 37,9$ ile en düşük olanıdır.

İleride modelde kullanılacak olan indirim faktörü, enflasyon oranlarından faydalanarak aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$\alpha = \exp\left[-\frac{\ln(1+TEFE)}{30}\right]$$

Çizelge 5.3. Aylık enflasyon oranlarına göre α değerleri

Aylık Enflasyon Oranı	α
% 0	1
% 1	0,9997
% 2	0,9993
% 3	0,9990
% 4	0,9987
% 5	0,9984
% 6	0,9981
% 7	0,9977
% 10	0,9968
% 14	0,9956

Markov zincirinin durumları borsa seans kapanış endeks değerlerindeki artış ve azalışlara göre belirlenmiştir. Oranlar yüzde değerler olmak üzere

-6 ve daha fazla azalışları	1 durumu
-6 ile -5 (-5 dahil) azalışları	2 durumu
-5 ile -4 (-4 dahil) azalışları	3 durumu
-4 ile -3 (-3 dahil) azalışları	4 durumu
-3 ile -2 (-2 dahil) azalışları	5 durumu
⋮	
1 ile 2 (2 dahil) artışları	9 durumu
2 ile 3 (3 dahil) artışları	10 durumu
3 ile 4 (4 dahil) artışları	11 durumu
4 ile 5 (5 dahil) artışları	12 durumu
5 ve daha fazla artışları	13 durumu

şeklinde Markov zincirinin durumlarına dönüştürülmüştür.

Çizelge 5.4. Yıllar ve durumlara göre işlem yapılan seans sayıları

Yıllar	Durumlar													Toplam
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1997	7	1	5	13	14	56	119	128	83	42	15	11	8	502
1998	18	4	13	15	31	63	104	88	74	34	28	7	15	494
1999	4	5	4	13	27	52	102	99	63	49	29	10	14	471
2000	9	4	8	25	46	75	82	95	66	34	18	12	14	488
2001	10	3	8	24	39	66	86	89	73	46	27	10	15	496
2002	0	1	6	20	34	86	116	118	60	33	16	5	6	501
2003	4	1	0	7	13	69	129	148	77	25	12	2	3	490
2004	0	0	0	9	12	56	154	177	68	16	3	2	0	497
2005	0	0	0	5	13	39	177	181	80	7	2	0	1	505
2006	1	0	3	6	16	65	150	174	56	24	2	2	1	500
2007	1	0	1	2	2	16	52	59	26	6	0	0	0	165

Çizelge 5.4'te yıllar ve durumlara göre işlem yapılan seans sayıları verilmektedir. İşlem yapılan seans sayılarının ortadaki durumlarda, yani 7. ve 8. durumlarda yoğunlaştığı dikkat çekmektedir. Ayrıca en çok işlemin 2005 yılında ve en az işlemin 2007 yılında yapıldığı görülmektedir.

Çizelge 5.5. Durumlarla ilgili betimleyici istatistikler

Durumlar	Durum Ortalaması	Durum Standart Sapması	Durum Medyanı	Durum Frekansı
1	-0,0797	0,0160	-0,0756	54
2	-0,0536	0,0024	-0,0535	19
3	-0,0435	0,0024	-0,0430	48
4	-0,0343	0,0027	-0,0342	139
5	-0,0243	0,0029	-0,0240	247
6	-0,0141	0,0028	-0,0137	643
7	-0,0046	0,0029	-0,0040	1271
8	0,0048	0,0028	0,0042	1356
9	0,0145	0,0028	0,0141	426
10	0,0242	0,0028	0,0238	316
11	0,0346	0,0027	0,0345	152
12	0,0436	0,0437	0,0430	61
13	0,0690	0,0148	0,0659	77

Çizelge 5.5'te durumlara göre işlem yapılan seans sayılarıyla ilgili betimleyici istatistikler verilmektedir. Durumların standart sapmaları karşılaştırıldığında uçlardaki durumlarda yani 1., 12. ve 13. durumlarda daha büyük olduğu görülmektedir. Ayrıca diğer durumların standart sapmalarının birbirine çok yakın olduğu dikkat çekmektedir.

Geçiş matrisi en çok olabilirlik yöntemiyle aşağıdaki gibi tahmin edilmiştir. Bu geçiş matrisi dikkatle incelendiğinde, ikinci satırda 5, üçüncü satırda 2, beşinci, on ikinci ve on üçüncü satırda 1'er tane 0 değeri bulunduğu gözlenmektedir. Dolayısıyla bu gerçekte "sürekli" olan durum uzayının, bir anlamda başarılı bir şekilde "kesikli" durum uzayına dönüştürüldüğünü göstermektedir.

$$P = \begin{bmatrix} 0,03704 & 0,03704 & 0,03704 & 0,03704 & 0,05556 & 0,12963 & 0,07407 & 0,12963 & 0,11111 & 0,11111 & 0,03704 & 0,03704 & 0,16667 \\ 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,10526 & 0,00000 & 0,05263 & 0,21053 & 0,15790 & 0,00000 & 0,15790 & 0,10526 & 0,05263 & 0,15790 \\ 0,06250 & 0,02083 & 0,06250 & 0,02083 & 0,04167 & 0,12500 & 0,18750 & 0,02083 & 0,14583 & 0,06250 & 0,06250 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,01439 & 0,03597 & 0,01439 & 0,05755 & 0,07914 & 0,15827 & 0,16547 & 0,20144 & 0,14388 & 0,07914 & 0,00719 & 0,02158 & 0,02158 \\ 0,02429 & 0,00000 & 0,00810 & 0,05263 & 0,08502 & 0,14575 & 0,23482 & 0,18219 & 0,12955 & 0,07287 & 0,01215 & 0,01619 & 0,03644 \\ 0,01400 & 0,00467 & 0,01400 & 0,03266 & 0,03843 & 0,16019 & 0,25817 & 0,24883 & 0,11042 & 0,04666 & 0,01866 & 0,00778 & 0,01555 \\ 0,00708 & 0,00079 & 0,00472 & 0,02675 & 0,04327 & 0,13926 & 0,28718 & 0,28796 & 0,12431 & 0,05085 & 0,01731 & 0,00551 & 0,00551 \\ 0,00516 & 0,00074 & 0,00738 & 0,02212 & 0,03466 & 0,10398 & 0,27065 & 0,30605 & 0,15561 & 0,05457 & 0,02655 & 0,00738 & 0,00516 \\ 0,01102 & 0,00276 & 0,00413 & 0,01377 & 0,04270 & 0,11984 & 0,22452 & 0,27548 & 0,17355 & 0,07025 & 0,03857 & 0,01515 & 0,00827 \\ 0,00635 & 0,00635 & 0,01587 & 0,02857 & 0,04762 & 0,09206 & 0,21587 & 0,25397 & 0,16191 & 0,08250 & 0,06032 & 0,01270 & 0,01587 \\ 0,02632 & 0,01316 & 0,01974 & 0,03290 & 0,05921 & 0,12500 & 0,16447 & 0,17105 & 0,13816 & 0,09868 & 0,07237 & 0,03947 & 0,03947 \\ 0,01639 & 0,00000 & 0,03279 & 0,04918 & 0,03279 & 0,13115 & 0,01639 & 0,19672 & 0,01639 & 0,08197 & 0,04918 & 0,04918 & 0,03279 \\ 0,01299 & 0,00000 & 0,01299 & 0,01299 & 0,03091 & 0,03091 & 0,11688 & 0,03886 & 0,16883 & 0,12987 & 0,12987 & 0,06494 & 0,12987 \end{bmatrix}$$

Bundan sonraki aşamada elde ettiğimiz geçiş matrisini kullanarak hisse senetlerinin oyun değerlerini hesaplayacağız.

Dolayısıyla

$$\min \sum v_i$$

$$v \geq \alpha P v$$

$$v \geq f$$

$$v \geq 0$$

doğrusal programlama modelini kullanarak %6 enflasyon oranlı, ortalama modeli aşağıdaki gibidir:

$$\min v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 + v_{10} + v_{11} + v_{12} + v_{13}$$

Kısıtlar;

$$-0,96303v_1 + 0,03697v_2 + 0,03697v_3 + 0,03697v_4 + 0,05546v_5 + 0,12942v_6 + 0,07395v_7 + 0,12942v_8 + 0,11093v_9 + 0,11093v_{10} + 0,03697v_{11} + 0,03697v_{12} + 0,16639v_{13} < 0$$

$$-v_2 + 0,10509v_4 + 0,05255v_6 + 0,21018v_7 + 0,15765v_8 + 0,15765v_{10} + 0,10509v_{11} + 0,05255v_{12} + 0,15765v_{13} < 0$$

$$0,06240v_1 + 0,02080v_2 - 0,93760v_3 + 0,02080v_4 + 0,04160v_5 + 0,12480v_6 + 0,18720v_7 + 0,20800v_8 + 0,14561v_9 + 0,06240v_{10} + 0,06240v_{11} < 0$$

$$0,01437v_1 + 0,03591v_2 + 0,01437v_3 - 0,94254v_4 + 0,07901v_5 + 0,15802v_6 + 0,16521v_7 + 0,20112v_8 + 0,14366v_9 + 0,07901v_{10} + 0,00718v_{11} + 0,02155v_{12} + 0,02155v_{13} < 0$$

$$0,02425v_1 + 0,00809v_3 + 0,05255v_4 - 0,91512v_5 + 0,14552v_6 + 0,23444v_7 + 0,18190v_8 + 0,12934v_9 + 0,07275v_{10} + 0,01213v_{11} + 0,01616v_{12} + 0,03638v_{13} < 0$$

$$0,01398v_1 + 0,00465v_2 + 0,01398v_3 + 0,03261v_4 + 0,06832v_5 - 0,84007v_6 + 0,25775v_7 + 0,24843v_8 + 0,11024v_9 + 0,04659v_{10} + 0,01863v_{11} + 0,00777v_{12} + 0,01553v_{13} < 0$$

$$0,00707v_1+0,00079v_2+0,00471v_3+0,02671v_4+0,04320v_5+0,13904v_6-0,71328v_7+0,28750v_8+0,12411v_9+0,05027v_{10}+0,01728v_{11}+0,00550v_{12}+0,00550v_{13}<0$$

$$0,00515v_1+0,00074v_2+0,00737v_3+0,02208v_4+0,03460v_5+0,10381v_6+0,27022v_7-0,69444v_8+0,15535v_9+0,05448v_{10}+0,02651v_{11}+0,00737v_{12}+0,00515v_{13}<0$$

$$0,01100v_1+0,00276v_2+0,00412v_3+0,01375v_4+0,04263v_5+0,11965v_6+0,22416v_7+0,27504v_8-0,82673v_9+0,07014v_{10}+0,03851v_{11}+0,01513v_{12}+0,00825v_{13}<0$$

$$0,00634v_1+0,00634v_2+0,01584v_3+0,02852v_4+0,04754v_5+0,09191v_6+0,21552v_7+0,25356v_8+0,16165v_9-0,91759v_{10}+0,06022v_{11}+0,01268v_{12}+0,01584v_{13}<0$$

$$0,02628v_1+0,01314v_2+0,01971v_3+0,03285v_4+0,05912v_5+0,12480v_6+0,16421v_7+0,17078v_8+0,13794v_9+0,09852v_{10}-0,92775v_{11}+0,03941v_{12}+0,03941v_{13}<0$$

$$0,01636v_1+0,03274v_3+0,04910v_4+0,03274v_5+0,13094v_6+0,16367v_7+0,19641v_8+0,16367v_9+0,08184v_{10}+0,04910v_{11}-0,95090v_{12}+0,03274v_{13}<0$$

$$0,01297v_1+0,01297v_3+0,01297v_4+0,09076v_5+0,09076v_6+0,11669v_7+0,03890v_8+0,16856v_9+0,12966v_{10}+0,12966v_{11}+0,06483v_{12}-0,87034v_{13}<0$$

$$v_1>0,9203$$

$$v_2>0,946399$$

$$v_3>0,956518$$

$$v_4>0,965664$$

$$v_5>0,975726$$

$$v_6>0,985938$$

$$v_7>0,995382$$

$$v_8>1,004788$$

$$v_9>1,014539$$

$$v_{10}>1,02422$$

$$v_{11}>1,034603$$

$$v_{12} > 1,043573$$

$$v_{13} > 1,069047$$

Burada ödenti fonksiyonları $f_i : 1 + (i.\text{duruma karşı gelen artış(azalış)ların ortalaması})$ biçiminde oluşturulmuştur.

Medyan modelinin ortalama modelinden tek farkı, son on üç kısıtın alt sınırında yer alan ortalama ile oluşturulan değerler yerine medyan ile oluşturulan değerlerin kullanılmasıdır. Yani medyan model için son on üç kısıt

$$v_1 > 0,92445$$

$$v_2 > 0,946546$$

$$v_3 > 0,956998$$

$$v_4 > 0,965758$$

$$v_5 > 0,976051$$

$$v_6 > 0,986351$$

$$v_7 > 0,996023$$

$$v_8 > 1,00422$$

$$v_9 > 1,014114$$

$$v_{10} > 1,023787$$

$$v_{11} > 1,034536$$

$$v_{12} > 1,042975$$

$$v_{13} > 1,06590$$

biçiminde kurulmuştur. LİNDÖ Paket Programı aracılığıyla %6 enflasyon oranlı ortalama modeli için çözüm Çizelge 5.6'daki gibi ve medyan modeli için çözüm Çizelge 5.7'deki gibi elde edilmiştir. Ayrıca bütün enflasyon oranlarında ortalama ve medyan modellerinin sonuçları eşit bulunmuştur.

Çizelge 5.6. Ortalama modeli için %6 enflasyon oranında ödenti fonksiyonu ve oyun değerleri

f_j (Ödenti Fonksiyon Değerleri)	v_j (Oyun Değerleri)
0,920300	1,025540
0,946399	1,026361
0,956518	1,015477
0,965664	1,016115
0,975726	1,016412
0,985938	1,014770
0,995382	1,013953
1,004788	1,014194
1,014539	1,015098
1,024220	1,024220
1,034603	1,034603
1,043573	1,043573
1,069047	1,069047

Çizelge 5.7. Medyan modeli için %6 enflasyon oranında ödenti fonksiyonu ve oyun değerleri

f_j (Ödenti Fonksiyon Değerleri)	v_j (Oyun Değerleri)
0,924450	1,024491
0,946546	1,025412
0,956998	1,014844
0,965758	1,015408
0,976051	1,015676
0,986351	1,014090
0,996023	1,013305
1,002422	1,013557
1,014114	1,014460
1,023787	1,023787
1,034536	1,034536
1,042975	1,042975
1,06590	1,065900

Çizelge 5.6 ve 5.7’den görüldüğü gibi $A = \{j \in E : f(j) = v(j)\}$ kümesinin tanımından %6 enflasyon oranı için $A = \{10,11,12,13\}$ kümesine ilk giriş zamanı optimal duraklama zamanıdır. Başka bir şekilde ifade edecek olursak, %6 enflasyon

oranlı ortamda hisse senedi fiyatındaki artış %2'yi aştığı zaman hisse senedi satılmalıdır.

Çizelge 5.8. Ortalama modelinin farklı enflasyon oranları için oyun değerleri

%0	%1	%2	%3	%4	%5	%6	%7	%10	%14
$\alpha = 1$	$\alpha = ,9997$	$\alpha = ,9993$	$\alpha = ,999$	$\alpha = ,9987$	$\alpha = ,9984$	$\alpha = ,9981$	$\alpha = ,9977$	$\alpha = ,9968$	$\alpha = ,9956$
1,069047	1,049468	1,035397	1,031904	1,029763	1,027654	1,025540	1,023969	1,021064	1,017730
1,069047	1,049056	1,035166	1,031924	1,030033	1,028226	1,026361	1,024878	1,021858	1,018529
1,069047	1,045571	1,028132	1,023882	1,021055	1,018297	1,015477	1,013541	1,009857	1,005776
1,069047	1,045983	1,028834	1,024497	1,021652	1,018921	1,016115	1,014160	1,010443	1,006311
1,069047	1,046236	1,029182	1,024865	1,022008	1,019231	1,016412	1,014421	1,010687	1,006481
1,069047	1,045692	1,028121	1,023670	1,020666	1,017744	1,014770	1,012642	1,008633	1,004156
1,069047	1,045344	1,027540	1,022977	1,019937	1,016960	1,013953	1,011816	1,007764	1,003362
1,069047	1,045333	1,027574	1,023072	1,020067	1,017135	1,014194	1,012126	1,008289	1,004788
1,069047	1,045494	1,027994	1,023644	1,020745	1,017957	1,015098	1,014539	1,014539	1,014539
1,069047	1,045699	1,028438	1,024220	1,024220	1,024220	1,024220	1,024220	1,024220	1,024220
1,069047	1,046408	1,034603	1,034603	1,034603	1,034603	1,034603	1,034603	1,034603	1,034603
1,069047	1,046153	1,043573	1,043573	1,043573	1,043573	1,043573	1,043573	1,043573	1,043573
1,069047	1,069047	1,069047	1,069047	1,069047	1,069047	1,069047	1,069047	1,069047	1,069047

Çizelge 5.8 'den ve ilgili modelin son on üç kısıtından da görüldüğü gibi, %1 enflasyon oranında $A = \{13\}$ kümesine ilk giriş zamanı optimal duraklama zamanıdır, yani hisse senedi fiyatındaki artış %5'i aştığı zaman hisse senedi satılmalıdır. %14 enflasyon oranında ise $A = \{8,9,10,11,12,13\}$ kümesine ilk giriş zamanı optimal duraklama zamanıdır, yani hisse senedi fiyatındaki artış %0'ı aştığı, yani, hisse senedi fiyatında herhangi bir artış değeriyle karşılaşıldığı zaman hisse senedi satılmalıdır.

Çizelge 5.9. Medyan modelinin farklı enflasyon oranları için oyun değerleri

%0	%1	%2	%3	%4	%5	%6	%7	%10	%14
$\alpha = 1$	$\alpha = ,9997$	$\alpha = ,9993$	$\alpha = ,999$	$\alpha = ,9987$	$\alpha = ,9984$	$\alpha = ,9981$	$\alpha = ,9977$	$\alpha = ,9968$	$\alpha = ,9956$
1.065900	1.046379	1.034124	1.030850	1.028710	1.026603	1.024491	1.023005	1.020103	1.016751
1.065900	1.045968	1.034000	1.030971	1.029082	1.027276	1.025412	1.023994	1.020976	1.017628
1.065900	1.042493	1.027239	1.023244	1.020419	1.017662	1.014844	1.013026	1.009344	1.005237
1.065900	1.042904	1.027859	1.023785	1.020942	1.018213	1.015408	1.013571	1.009856	1.005698
1.065900	1.043156	1.028181	1.024124	1.021268	1.018493	1.015676	1.013802	1.010070	1.005838
1.065900	1.042614	1.027174	1.022984	1.019982	1.017062	1.014090	1.012084	1.008077	1.003570
1.065900	1.042267	1.026621	1.022324	1.019286	1.016310	1.013305	1.011293	1.007244	1.002810
1.065900	1.042256	1.026668	1.022429	1.019427	1.016496	1.013557	1.011615	1.007780	1.004220
1.065900	1.042416	1.027090	1.023001	1.020103	1.017317	1.014460	1.014114	1.014114	1.014114
1.065900	1.042621	1.027535	1.023787	1.023787	1.023787	1.023787	1.023787	1.023787	1.023787
1.065900	1.043327	1.034536	1.034536	1.034536	1.034536	1.034536	1.034536	1.034536	1.034536
1.065900	1.043074	1.042975	1.042975	1.042975	1.042975	1.042975	1.042975	1.042975	1.042975
1.065900	1.065900	1.065900	1.065900	1.065900	1.065900	1.065900	1.065900	1.065900	1.065900

Çizelge 5.9 'dan ve ilgili modelin son on üç kısıtından da görüldüğü gibi, %1 enflasyon oranında $A = \{13\}$ kümesine ilk giriş zamanı optimal duraklama zamanıdır, yani hisse senedi fiyatındaki artış %5'i aştığı zaman hisse senedi satılmalıdır. %14 enflasyon oranında ise $A = \{8,9,10,11,12,13\}$ kümesine ilk giriş zamanı optimal duraklama zamanıdır, yani hisse senedi fiyatındaki artış %0'ı aştığı, yani, hisse senedi fiyatında herhangi bir artış değeriyle karşılaşıldığı zaman hisse senedi satılmalıdır.

Dolayısıyla Markoviyen optimal duraklama zamanlarının enflasyon oranlarına bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Çözümlerden de ayrıntılı bir şekilde görüleceği gibi, enflasyon oranı arttıkça hisse senetlerinin en iyi (optimal) kazancı elde ettikleri endeks değerlerindeki artış oranları azalmaktadır. Yani enflasyon oranı yükseldikçe az kâr oranıyla yatırımcı en iyi (optimal) kazancı elde etmektedir.

Markov zincirinin durumlarını tanımladığımız artış ve azalışlara ilişkin sınır değerlerini bir β değişkeniyle ilişkilendirerek β -kısıtlı model aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

$$\min \sum v_i + \beta$$

$$v \geq \alpha P v$$

$$v(\beta) \geq 0$$

$$v \geq 0.$$

% 6 enflasyon oranlı β -kısıtlı modelinin açık yazılımı aşağıdaki gibidir:

$$\min v_1+v_2+v_3+v_4+v_5+v_6+v_7+v_8+v_9+v_{10}+v_{11}+v_{12}+v_{13}+b$$

Kısıtlar;

$$-0,96303v_1+0,03697v_2+0,03697v_3+0,03697v_4+0,05546v_5+0,12942v_6+0,07395v_7+0,12942v_8+0,11093v_9+0,11093v_{10}+0,03697v_{11}+0,03697v_{12}+0,16639v_{13}<0$$

$$-v_2+0,10509v_4+0,05255v_6+0,21018v_7+0,15765v_8+0,15765v_{10}+0,10509v_{11}+0,05255v_{12}+0,15765v_{13}<0$$

$$0,06240v_1+0,02080v_2-0,93760v_3+0,02080v_4+0,04160v_5+0,12480v_6+0,18720v_7+0,20800v_8+0,14561v_9+0,06240v_{10}+0,06240v_{11}<0$$

$$0,01437v_1+0,03591v_2+0,01437v_3-0,94254v_4+0,07901v_5+0,15802v_6+0,16521v_7+0,20112v_8+0,14366v_9+0,07901v_{10}+0,00718v_{11}+0,02155v_{12}+0,02155v_{13}<0$$

$$0,02425v_1+0,00809v_3+0,05255v_4-0,91512v_5+0,14552v_6+0,23444v_7+0,18190v_8+0,12934v_9+0,07275v_{10}+0,01213v_{11}+0,01616v_{12}+0,03638v_{13}<0$$

$$0,01398v_1+0,00465v_2+0,01398v_3+0,03261v_4+0,06832v_5-0,84007v_6+0,25775v_7+0,24843v_8+0,11024v_9+0,04659v_{10}+0,01863v_{11}+0,00777v_{12}+0,01553v_{13}<0$$

$$0,00707v_1+0,00079v_2+0,00471v_3+0,02671v_4+0,04320v_5+0,13904v_6-0,71328v_7+0,28750v_8+0,12411v_9+0,05027v_{10}+0,01728v_{11}+0,00550v_{12}+0,00550v_{13}<0$$

$$0,00515v_1+0,00074v_2+0,00737v_3+0,02208v_4+0,03460v_5+0,10381v_6+0,27022v_7-0,69444v_8+0,15535v_9+0,05448v_{10}+0,02651v_{11}+0,00737v_{12}+0,00515v_{13}<0$$

$$0,01100v_1+0,00276v_2+0,00412v_3+0,01375v_4+0,04263v_5+0,11965v_6+0,22416v_7+0,27504v_8-0,82673v_9+0,07014v_{10}+0,03851v_{11}+0,01513v_{12}+0,00825v_{13}<0$$

$$0,00634v_1+0,00634v_2+0,01584v_3+0,02852v_4+0,04754v_5+0,09191v_6+0,21552v_7+0,25356v_8+0,16165v_9-0,91759v_{10}+0,06022v_{11}+0,01268v_{12}+0,01584v_{13}<0$$

$$0,02628v_1+0,01314v_2+0,01971v_3+0,03285v_4+0,05912v_5+0,12480v_6+0,16421v_7+0,17078v_8+0,13794v_9+0,09852v_{10}-0,92775v_{11}+0,03941v_{12}+0,03941v_{13}<0$$

$$0,01636v_1+0,03274v_3+0,04910v_4+0,03274v_5+0,13094v_6+0,16367v_7+0,19641v_8+0,16367v_9+0,08184v_{10}+0,04910v_{11}-0,95090v_{12}+0,03274v_{13}<0$$

$$0,01297v_1+0,01297v_3+0,01297v_4+0,09076v_5+0,09076v_6+0,11669v_7+0,03890v_8+0,16856v_9+0,12966v_{10}+0,12966v_{11}+0,06483v_{12}-0,87034v_{13}<0$$

$$v_1-b>0$$

$$v_2-b>0,94$$

$$v_3-b>0,95$$

$$v_4-b>0,96$$

$$v_5-b>0,97$$

$$v_6-b>0,98$$

$$v_7-b>0,99$$

$$v_8-b>1$$

$$v_9 - b > 1,01$$

$$v_{10} - b > 1,02$$

$$v_{11} - b > 1,03$$

$$v_{12} - b > 1,04$$

$$v_{13} - b > 1,05$$

Burada ödenti fonksiyonları $f_i: 1 + (i.\text{duruma karşı gelen artış (azalış)ların ortalaması})$ biçiminde oluşturulur. Ayrıca $v(\beta)$ kısıtları, durumların sınır noktalarından gelen değerler kullanılarak aşağıda görüldüğü gibi hesaplanmıştır:

$$v_1 < 1 + (b - 0,06) = 0,94 + b$$

$$v_2 > 1 + (b - 0,06) = 0,94 + b$$

$$v_3 > 1 + (b - 0,05) = 0,95 + b$$

$$v_4 > 1 + (b - 0,04) = 0,96 + b$$

$$v_5 > 1 + (b - 0,03) = 0,97 + b$$

$$v_6 > 1 + (b - 0,02) = 0,98 + b$$

$$v_7 > 1 + (b - 0,01) = 0,99 + b$$

$$v_8 > 1 + (b - 0) = 1 + b$$

$$v_9 > 1 + (b + 0,01) = 1,01 + b$$

$$v_{10} > 1 + (b + 0,02) = 1,02 + b$$

$$v_{11} > 1 + (b + 0,03) = 1,03 + b$$

$$v_{12} > 1 + (b + 0,04) = 1,04 + b$$

$$v_{13} > 1 + (b + 0,05) = 1,05 + b$$

Burada ilk kısıt $v_1 > 1 + (b - 1) = b$ şeklinde alınmıştır.

LİNDÖ Paket Programı kullanılarak % 6 enflasyon oranlı β kısıtlı modeli için çözüm aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 5.11’de görüldüğü gibi, %1 enflasyon oranında $A = \{12,13\}$ kümesine ilk giriş zamanı optimal duraklama zamanıdır, yani hisse senedi fiyatındaki artış %4’ü aştığı zaman hisse senedi satılmalıdır. %14 enflasyon oranında ise $A = \{8,9,10,11,12,13\}$ kümesine ilk giriş zamanı optimal duraklama zamanıdır, yani hisse senedi fiyatındaki artış %0’ı aştığı, bir başka deyişle, hisse senedi fiyatında herhangi bir artış değeriyle karşılaşıldığı zaman hisse senedi satılmalıdır.

Ortalama modelindeki gibi β -kısıtlı modelde de Markoviyen optimal duraklama zamanlarının enflasyon oranına bağlı olarak değiştiği görülür. Ancak β -kısıtlı modelde ortalama modeline göre yüksek enflasyon oranlarında daha az kâr oranıyla en iyi kazanç elde edilmektedir.

β -kısıtlı modelde ilginç bir şekilde bütün enflasyon oranları için β ’nın değeri sıfır bulunmuştur. Çizelge 5.12 ve Çizelge 5.13 karşılaştırıldığında, β sıfır değerini almasına rağmen, β -kısıtlı modelin ortalama ve medyan modellerinden daha iyi bir kazanç verdiği sonucuna varılır.

Çizelge 5.12. Ortalama ve medyan modelleri için yıllara göre işlem sayısı, yıllık kâr ve satış başına ortalama kâr

Yıllar	İşlem Sayısı	Yıllık Kâr	Satış Başına Ortalama Kâr
1997	81	688,4875	8,4998
1998	78	459,5402	5,8915
1999	89	392,0199	4,4047
2000	65	218,1055	3,3555
2001	117	264,8144	2,2634
2002	41	67,0081	1,6343
2003	25	34,7384	1,3895
2004	7	8,6225	1,2318
2005	1	1,1598	1,1598
2006	10	8,5447	0,8545
2007	0	0	-
TOPLAM	514	2143,041	30,6848

Çizelge 5.12'ye bakıldığında hisse senetlerindeki en çok satış işleminin 2001 yılında gerçekleştiği, 1997 yılında ise yıllık kârın ve satış başına ortalama kârın en yüksek değerinde olduğu görülmektedir. 2007 yılının ilk dört aylık verileri kullanılmış ve hisse senedi satış işlemi yapılmamıştır. Satış olmadığından yıllık kâr ve satış başına ortalama kâr hesaplanamamıştır.

Çizelge 5.13. β -kısıtlı model için yıllara göre işlem sayısı, yıllık kâr ve satış başına ortalama kâr

Yıllar	İşlem Sayısı	Yıllık Kâr	Satış Başına Ortalama Kâr
1997	109	883,6196	8,1066
1998	83	486,2168	5,8580
1999	94	408,1261	4,3418
2000	69	227,4102	3,2958
2001	127	277,2960	2,1834
2002	40	61,6912	1,5423
2003	30	37,6828	1,2561
2004	7	7,9772	1,1396
2005	0	0	-
2006	10	7,3430	0,7343
2007	0	0	-
TOPLAM	569	2397,363	28,4579

Çizelge 5.13'e bakıldığında hisse senetlerindeki en çok satış işleminin 2001 yılında gerçekleştiği, 1997 yılında ise yıllık kârın ve satış başına ortalama kârın en yüksek değerinde olduğu görülmektedir. 2005 ve 2007 yıllarında hisse senedi satış işlemi yapılmadığından, yıllık kâr ve satış başına ortalama kâr hesaplanamamıştır.

Ortalama ve medyan modeli için yıllık hisse senedi başına ortalama kâr

$$\frac{2143,041}{514} = 4,169 \text{ iken, } \beta\text{-kısıtlı model için ise yıllık hisse senedi başına ortalama kâr}$$

$$\frac{2397,364}{569} = 4,213 \text{ 'tür. Burada } \beta\text{-kısıtlı modelin yıllık hisse senedi başına ortalama kâr}$$

değeri 1,01 kat fazla iken ayrı olarak her bir yıla bakıldığında satış başına ortalama kârlarının ortalama ve medyan modellerinde fazla olduğu görülür. β -kısıtlı modelde, ortalama ve medyan modellerine göre işlem sayısı 1,11 kat ve yıllık kârı 1,12 kat fazla olmasına rağmen yılların toplam satış başına ortalama kârı 1,08 kat daha azdır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Değişkenliğin, yani finansal anlamda riskin oldukça yüksek olduğu Menkul kıymetler borsasında yatırımcılar, riskin olumsuz etkilerinden kurtulmak için geçmiş dönemle ilgili kendi bireysel deneyim, gözlem, bilgi ve birikimlerinden yola çıkarak farklı stratejiler geliştirmekte ve bu stratejilere göre kendi belirledikleri doğrular ışığında alım satım kararlarını vermektedirler. Ancak gazetelerin borsa analizlerinin yer aldığı ekonomi sayfalarında da görüldüğü gibi, böyle riskli ortamlarda karar verirken bilimsel yöntemlerden yararlanılması gerektiği açıktır. Markoviyen Optimal Duraklama Yöntemi de bu yöntemlerden biridir.

Bu çalışmada bir anlamda yatırımcıların davranışları göz önüne alınarak, İstanbul Menkul Kıymetler Borsasının Ocak 1997-Nisan 2007 tarihlerini içeren 5110 borsa kapanış endeks değeri kullanılarak hisse senetleri için doğru satış zamanı bulunmaya çalışılmıştır. Markoviyen Optimal Duraklama Yöntemiyle birleştirilen ortalama, medyan ve β -kısıtlı üç modelle karşılaştırılarak hisse senetlerinin hangi satış zamanlarında en iyi kârı vereceği belirlenmiştir.

Yapılan çalışmalar sonunda ortalama ve medyan modellerinin hisse senetlerini satma zamanları ve hisse senetlerinden elde edilen kâr oranları bakımından hiçbir fark göstermediği gözlenmiştir. β -kısıtlı modelde amaç fonksiyona eklenen β değişkeninin bütün enflasyon oranları için değeri sıfır bulunmuştur. Buna rağmen enflasyonun düşük olduğu ortamlarda (%2,5 ve daha aşağı olan yıllarda) ortalama ve medyan modellerine göre işlem sayılarında nispeten bir iyileştirme sağladığı görülmüştür. Ancak artan işlem sayıları yanında ortalama kârlar düşmüştür.

Ortak seans sayısının, yani ortalama ve medyan modelleri ile β -kısıtlı modelin her ikisinde de satış yapılmasını emreden seans sayısının fazla olduğu görülmektedir. Ortalama ve medyan modellerindeki 514 işlemin 511 tanesinde β -kısıtlı modelde de işlem yapılmıştır. β -kısıtlı model 58 işlem fazlasıyla yaklaşık olarak %11,3 oranında daha fazla işlem yapmaktadır. Bu durumda ortalama ve medyan

modellerine göre β -kısıtlı model yıllık kârı yaklaşık olarak %10,6 oranında arttırmaktadır. Bu bir anlamda, çalışmadaki mevcut durumlarda β -kısıtlı modelin daha iyi olduğunu göstermektedir.

Dolayısıyla ortalama ve medyan modellerine göre, β -kısıtlı modelde enflasyon oranı arttıkça hisse senetlerinin en iyi kazancı elde ettikleri frekans sayısının artmakta, ancak satış başına düşen ortalama kâr oranı düşmektedir. Yıllık kâr artarken satış başına düşen ortalama kâr oranının düşmesi, β -kısıtlı modelin daha düşük kâr oranlarında satış yapılmasını emretmesinden kaynaklanmaktadır.

Ele alınan yıllarda ülkemizin karşılaştığı ekonomik krizlerin ve enflasyon yapısının borsa üzerine olan etkisiyle yıllık ortalama kârların ve hisse senedi başına düşen ortalama kârların 1997 yılından 2007 yılına doğru bütün modellerde düştüğü gözlenmiştir. 2005 yılında β -kısıtlı modelde hiç işlem yapılmadığı, ortalama ve medyan modellerinde ise sadece bir işlem yapıldığı dikkat çekmektedir.

Sonuçlarımız, Üçbaş[17]'in teziyle karşılaştırıldığında geçiş matrisinde zaman içerisinde değişiklik olduğu gözlemlenmiştir. Bu farklılaşmanın nedeni, borsa verilerinin farklı zaman dönemlerini kapsamaması ve Üçbaş'ın 3690 kapanış endeks verisine karşılık bu çalışmada 5110 kapanış endeks verisinin bulunması olabilir. Bu anlamda bizim geçiş matrisimiz daha uzun dönemli veri üzerinden tahmin edildiğinden daha güvenilirdir. Özetlenecek olursa, önerdiğimiz β -kısıtlı model ile enflasyonun düşük olduğu ortamda borsada işlem sayısını artırma ve toplam kâr bakımından kısmen bir iyileştirme sağladığını söyleyebiliriz.

KAYNAKLAR

1. Alhan, A., “Bağımsızlık Kapulasını İçeren Kapula Aileleri, Kapula Tahmin Yöntemleri ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında Sektörler Arası Bağımlılık Yapısı”, Doktora Tezi , **Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Ankara, 1-3, 138-140 (2008).
2. Barak, O., “Hisse Senedi Piyasalarında Anomaliler ve Bunları Açıklamak Üzere Geliştirilen Davranışsal Finans Modelleri-İMKB’de bir Uygulama”, Doktora Tezi , **Gazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü** , Ankara, 1-6, 271-280 (2006).
3. Bradt, R. N., Johnson, S. M., Karlin, S., “On sequential designs for maximizing the sum of n observations”, **Ann. Math. Statist.**, 27: 1060-1070 (1956).
4. Ceylan, A. ve Korkmaz, T., “Sermaye Piyasası ve Menkul Değer Analizi”, **Ekin Kitapevi**, İstanbul, 56-66 (2004).
5. Çinlar, E., “Introduction to Stochastic Processes”, **Englewood Cliffs**, New Jersey, 35-50 (1975).
6. Dinç, İ., “SPH’de Çağrı Yoluyla Hisse Senedi Toplanması”, Yüksek Lisans Tezi , **Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü** , İstanbul, 1-3 (2006).
7. Gül, M., “İstanbul Menkul Kıymetler Borsası’nda Değişen İndirimli Ortamda Markoviyen Optimal Duraklama ile Hisse Alım-Satımı Üzerine bir Deneme”, Yüksek Lisans Tezi , **Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü** , Ankara, 1-2, 90-93 (2006).
8. İMKB, “Sermaye Piyasası ve Borsa Temel Bilgiler Kılavuzu”, **İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Eğitim Yayınları**, İstanbul, 5-10, 147-158 (1995).
9. İMKB, “Sorularla Borsa ve Sermaye Piyasası”, **İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Yayınları**, İstanbul, 1-16 (1995).
10. Kayıran, Ü., “Değişen İndirimli Ortamda Markoviyen Oyunlarda İMKB’de Bir Deneme”, Yüksek Lisans Tezi , **Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü** , Ankara, 1-3 (2000).
11. Mortan, K., Berberoğlu, N., Parasız, İ., Oktay, N., Yıldırım, K. ve Şıklar, İ., “İktisat Teorisi”, **T.C. Anadolu Üniversitesi Yayınları**, Eskişehir, 292-298 (2000).

12. Mutlu, A. M., “Markoviyen Oyunlar ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsasına Uygulaması”, Yüksek Lisans Tezi , *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü* , Ankara, 1-3 (1997).
13. Özdil, T., Yılmaz, C., “İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında Sektör Bazında İşlem Gören Hisse Senetlerinin Alım-Satım Kararlarında En Yüksek Getirili Stratejinin Belirlenmesi”, *Yönetim ve Ekonomi Dergisi*, 13(2): 211-224 (2006).
14. Puterman, M.L., “Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming”, *Wiley-Interscience*, United States of America, 17-25 (1994).
15. Suhov, Y., Kelbert, M., “Markov Chains: A Primer in Random Processes and their Applications”, *Cambridge University Press*, New York, 1-17 (2008).
16. TCMB, “Enflasyon”, *Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası Yayınları*, Ankara, 3 (2004).
17. Üçbaş, Ö., “İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında Hisse Senedi Satışlarında Hareketli Ortalamalar ve Markoviyen Optimal Duraklama Tekniklerinin Karşılaştırılması” Yüksek Lisans Tezi , *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara , 63-64 (2005).
18. İnternet: UCLA University , Ferguson, T. S., Optimal Stopping and Applications, <http://www.math.ucla.edu/~tom/stopping/contents.html> (2011)
19. İnternet: Wikipedia, <http://tr.wikipedia.org/wiki/Borsa> (2009)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÖNCEL ÇEKİM, Hatice
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 16.02.1987, Keçiören
Medeni hali : Evli
Telefon : 0 312 202 10 84
e-mail : oncel.hatice@hotmail.com.

Eğitim Derece

Eğitim Birimi

Mezuniyet tarihi

Lisans	Gazi Üniversitesi / İstatistik Bölümü	2008
Lise	Aydınlıkevler Lisesi	2004

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Bulmaca çözmek, yürüyüş yapmak