

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ GÖRSEL AKIL
YÜRÜTME DURUMLARININ İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan
İlknur GÜLŞEN

Ankara
Mayıs, 2012

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ GÖRSEL AKIL
YÜRÜTME DURUMLARININ İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İlknur GÜLŞEN

Danışman: Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

Ankara
Mayıs, 2012

İlknur GÜLŞEN'in "MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ GÖRSEL AKIL YÜRÜTME DURUMLARININ İNCELENMESİ" başlıklı tezi 30.05.2012 tarihinde, jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Öğretmenliği Bilim Dalında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Adı Soyadı

İmza

Üye (Tez Danışmanı): Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

.....

Üye: Prof. Dr. Ziya ARGÜN

.....

Üye: Doç. Dr. Musa SARI

.....

ÖN SÖZ

İhtiyacım olduğu her zaman bana kıymetli vaktini ayıran, gönderdiğim maillere hemen dönüt veren, çalışmalarımın her aşamasında benden yardım ve desteğini hiç esirgemeyen değerli danışmanım sayın Prof. Dr. Ahmet ARIKAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Eğitim hayatım boyunca beni her zaman destekleyen, bana güvenen babama ve anneme sonsuz teşekkür ediyorum. Her zaman desteğini hissettiğim, ayrıca araştırma çalışmamda kullanacağım sorularla ilgili ön çalışma yaptığım kız kardeşim Gamze GÜLŞEN'e sonsuz teşekkür ederim. Araştırma çalışmamda fikirleri ile bana yol gösteren değerli arkadaşım Arş. Gör. Fatma Çağlin AKILLIOĞLU'na sonsuz teşekkür ederim.

İlknur GÜLŞEN

ÖZET

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ GÖRSEL AKIL YÜRÜTME DURUMLARININ İNCELENMESİ

GÜLŞEN, İlknur

Yüksek Lisans, Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

Mayıs-2012, 176 sayfa

Görsel akıl yürütmenin matematik kavramlarını anlamada yardımcı olduğu pek çok araştırmacı tarafından vurgulanmıştır. Eğitimde bu özellikten yararlanabilmek için öğretmenlerin öğrencilerin görsel akıl yürütme ile ilgili becerilerini geliştirmeleri, öncesinde ise görsel akıl yürütmenin öneminin farkında olmaları gerektiği düşünülebilir. Sonuç olarak bu amaca katkıda bulunabilmek için, bu araştırma matematik öğretmen adaylarının görsel akıl yürütme durumlarını incelemektedir.

Araştırma üç gönüllü matematik öğretmen adayı ile yapılmıştır. Veriler, üçü görsel ispatı ispatlama ve biri görsel ispatı yorumlama olmak üzere öğretmen adaylarına dört görsel ispatın sorulduğu iki oturumdan elde edilmiştir. Öğretmen adaylarının görsel akıl yürütme durumlarının belirlenebilmesi amacıyla veri analizinde gömülü (grounded) teorisinin teknikleri kullanılmıştır.

Araştırmanın sonuçları öğretmen adaylarının görsel ispatları algılama, takip ettikleri süreç ve ulaştıkları sonuçların farkında olma ile ilgili birtakım zorluklarla karşılaştıklarını göstermiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının ispata görsel ispat üzerinden ulaşmak yerine cebire eğilim gösterdikleri, çözüm süreçlerinde ispata odaklandıkları veya ispattan uzaklaştıkları tespit edilmiştir. Bununla birlikte görsel ispat üzerindeki çözümlerinin rastgele olmadığı, görsel ispattaki şekil ve çözümleri üzerinden stratejiler uyguladıkları ortaya çıkmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gömülü teori, görsel akıl yürütme, görsel ispat.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE VISUAL REASONING PROCESS OF THE PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS

GÜLŞEN, İlknur

M. Sc. Thesis, The Department of Secondary Mathematics Teaching

Thesis Advisor: Prof. Dr. Ahmet ARIKAN

May-2012, 176 pages

In recent years, the idea that visual reasoning provides a nourishing environment for the learner to understand mathematical concepts has been emphasized by many researchers. To utilize this notion in the field of education, it is expected that teachers should be aware of the importance of visual reasoning as they help students to develop skills regarding it. Therefore, this presented research aims to explore the visual reasoning process of pre-service mathematics teachers to contribute this goal.

The research was carried out with three pre-service mathematics teachers. Data were collected in two sessions where teachers were asked to tackle four visual proofs three of which required operative mathematical explanations while the remaining one required pre-service teachers to explain their proofs verbally. To determine the visual reasoning process of these pre-service teachers, the data acquired in this research were analyzed by using grounded theory techniques.

The results of the research show that pre-service mathematics teachers encounter several challenges related to perceiving visual proofs and following procedures that they developed and gaining awareness regarding the reached conclusions. In addition, the results revealed that pre-service mathematics teachers have a tendency to prefer algebraic proofs over visual proofs and in some cases they switch between focusing the visual proofs and straying away from them during the solution processes. Nevertheless research results suggest that their solutions on visual proofs are not spontaneous and they create strategies on figures and their solutions.

Key Words: Grounded theory, visual reasoning, visual proof.

İÇİNDEKİLER

JÜRİ ÜYELERİNİN İMZA SAYFASI.....	ii
ÖN SÖZ.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
TABLolar VE ŞEKİLLER LİSTESİ.....	ix
KISALTMALAR LİSTESİ.....	xiv

I. BÖLÜM

GİRİŞ.....	1
1.1. Problem Durumu.....	1
1.2. Araştırmanın Amacı.....	8
1.3. Araştırmanın Önemi.....	8
1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları.....	12
1.5. Araştırmanın Varsayımları.....	12
1.6. Tanımlar.....	12

II. BÖLÜM

KAVRAMSAL ÇERÇEVE.....	14
2.1. Matematiksel Akıl Yürütme, Görsel Akıl Yürütme ve Görselleştirme.....	14
2.2. Görselleştirme.....	15
2.3. Matematik ve Görselleştirme.....	17

2.4. Matematik Tarihinde Görselleştirme.....	22
2.5. Matematik Eğitimi ve Görselleştirme.....	23
2.6. Matematik Eğitimi Tarihinde Görselleştirme.....	25
2.7. Matematik, İspat ve Görsel İspat.....	26

III. BÖLÜM

YÖNTEM.....	29
3.1. Araştırmanın Modeli.....	29
3.2. Araştırmanın Katılımcıları.....	32
3.3. Verileri Toplama Teknikleri.....	32
3.4. Verilerin Analizi.....	33

IV. BÖLÜM

BULGULAR VE YORUM.....	38
4.1. MÖA'larının Görsel İspatları İspatlama Süreci.....	38
4.1.1. MÖA'larının Görsel İspatları İspatlama Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri.....	40
4.1.2. MÖA'larının Pisagor Teoremi İle İlgili Görsel İspatı İspatlamaları.....	47
4.1.3. MÖA'larının Geometrik Seri İle İlgili Görsel İspatı İspatlamaları.....	62
4.1.4. MÖA'larının Trigonometrik Dönüşümler İle İlgili Görsel İspatı İspatlamaları.....	77
4.2. MÖA'larının Görsel İspatı Yorumlama Süreci.....	116

4.2.1. MÖA'larının Görsel İspatı Yorumlama Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri.....	116
4.2.2. MÖA'larının Özdeşlik İle İlgili Görsel İspatı Yorumlamaları.....	122
V. BÖLÜM	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	152
5.1. Sonuçlar.....	152
5.1.1. MÖA'larının Görsel İspatları İspatlama Sürecine Ait Bulguların Sonuçları.....	152
5.1.2. MÖA'larının Görsel İspatı Yorumlama Sürecine Ait Bulguların Sonuçları.....	159
5.1.3. MÖA'larının Görsel İspatı İspatlama ve Yorumlama Süreçlerine Ait Bulguların Ortak Sonuçları.....	164
5.2. Öneriler.....	165
KAYNAKÇA.....	167
EKLER.....	174

TABLO VE ŞEKİLLER LİSTESİ

Tablo 3.1. Görsel İspatı İspatlama Sürecinde Şekli Algılama.....	36
Şekil 3.1. Çalışma Süreci Adımları.....	30
Şekil 4.1.1. MÖA'larının Görsel İspatları İspatlama Süreci.....	39
Şekil 4.1.2. Görsel İspatı Algılama Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	41
Şekil 4.1.3. Şekli Keşfetme Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	42
Şekil 4.1.4. İspatı Temel Alarak Akıl Yürütme Kategorisine Ait Boyut ve Alt Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	43
Şekil 4.1.5. Cebire Eğilim Gösterme Kategorisine Ait Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	44
Şekil 4.1.6. İspatın Farkında Olma Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	44
Şekil 4.1.7. İpucuna İhtiyaç Duyma Kategorisine Ait Boyut ve Alt Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	45
Şekil 4.1.8. Sonuca Ulaşma Kategorisine Ait Boyut ve Alt Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	45
Şekil 4.1.9. Sonucu Değerlendirme Kategorisine Ait Boyut ve Alt Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	46
Şekil 4.1.10. Çalışma Kâğıdı 1.....	47
Şekil 4.1.11. Pisagor Teoreminin Görsel İspatının Algılanması	50
Şekil 4.1.12. Pisagor Teoreminin Görsel İspatında Şekli Keşfetme.....	52
Şekil 4.1.13. 1.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çözümü (1.Görüşme).....	53

Şekil 4.1.14. 2.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çözümü (1.Görüşme).....	53
Şekil 4.1.15. 2.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çözümü (2.Görüşme).....	54
Şekil 4.1.16. 3.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çözümü (1.Görüşme).....	54
Şekil 4.1.17. 1.MÖA'nın Parçaların Alanını Hesaplaması.....	55
Şekil 4.1.18. 2.MÖA'nın Parçaların Alanını Hesaplaması.....	55
Şekil 4.1.19. 3.MÖA'nın Parçaların Alanını Hesaplaması.....	55
Şekil 4.1.20. 1.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm.....	56
Şekil 4.1.21. 3.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm.....	56
Şekil 4.1.22. Pisagor Teoreminin Görsel İspatında İspatın Farkında Olma.....	57
Şekil 4.1.23. 1.MÖA'nın İspatından Bir Bölüm.....	57
Şekil 4.1.24. Pisagor Teoreminin Görsel İspatında Sonuca Ulaşma.....	60
Şekil 4.1.25. 2.MÖA'nın Sonuca Ulaşması.....	60
Şekil 4.1.26. Pisagor Teoreminin Görsel İspatında Sonucu Değerlendirme.....	61
Şekil 4.1.27. Çalışma Kâğıdı 2.....	62
Şekil 4.1.28. Geometrik Serinin Görsel İspatının Algılanması.....	64
Şekil 4.1.29. 1.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çözümü.....	65
4.1.30. Geometrik Serinin Görsel İspatında Şekli Keşfetme.....	67
Şekil 4.1.31. 2.MÖA'nın Ortak Açılarını Bulması.....	67
Şekil 4.1.32. 3.MÖA'nın Şekle Parçalar Ekleme.....	68
Şekil 4.1.33. 3.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm.....	69
Şekil 4.1.34. 2.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm.....	70
Şekil 4.1.35. 1.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm.....	71

Şekil 4.1.36. Geometrik Serinin Görsel İspatında İspatı Temel Alarak Akıl Yürütme.....	71
Şekil 4.1.37. Geometrik Serinin Görsel İspatında Cebire Eğilim Gösterme.....	72
Şekil 4.1.38. Geometrik Serinin Görsel İspatında İspatın Farkında Olma.....	73
Şekil 4.1.39. Geometrik Serinin Görsel İspatında Sonuca Ulaşma.....	74
Şekil 4.1.40. 1.MÖA'nın Sonuca Ulaşması.....	74
Şekil 4.1.41. 2.MÖA'nın Sonuca Ulaşması.....	75
Şekil 4.1.42. 3.MÖA'nın Sonuca Ulaşması.....	75
Şekil 4.1.43. Geometrik Serinin Görsel İspatında Sonucu Değerlendirme.....	75
Şekil 4.1.44. Çalışma Kâğıdı 3.....	77
Şekil 4.1.45. Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatının Algılanması.....	82
Şekil 4.1.46.Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatında Şekli Keşfetme.....	87
Şekil 4.1.47. 3.MÖA'nın Şekildeki Kenar Uzunluklarını Harflendirmesi.....	88
Şekil 4.1.48. 1.MÖA'nın Şekil Üzerindeki 1. Çözümü.....	88
Şekil 4.1.49. 1.MÖA'nın Bazı Açıları Bulması.....	89
Şekil 4.1.50. 1.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm.....	90
Şekil 4.1.51. 1.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm.....	90
Şekil 4.1.52. 2.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çözümü.....	91
Şekil 4.1.53. 3.MÖA'nın Şekil Üzerindeki 1. Çözümü.....	92
Şekil 4.1.54. 3.MÖA'nın Şekil Üzerindeki 2. Çözümü.....	94
Şekil 4.1.55. 1.MÖA'nın Şekil Üzerindeki 2. Çözümü.....	101
Şekil 4.1.56. 3.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm.....	102

Şekil 4.1.57. 1.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm.....	102
Şekil 4.1.58. Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatında İspatı Temel Alarak Akıl Yürütme.....	103
Şekil 4.1.59. Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatında Cebire Eğilim Gösterme.....	108
Şekil 4.1.60. 1.MÖA'nın Yarım Açılı Formülünü Kullanması.....	109
Şekil 4.1.61. Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatında İspatın Farkında Olma.....	109
Şekil 4.1.62. Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatında İpucuna İhtiyaç Duyma.....	111
Şekil 4.1.63. Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatında Sonuca Ulaşma.....	112
Şekil 4.1.64. 1.MÖA'nın Sonuca Ulaşması.....	112
Şekil 4.1.65. 1.MÖA'nın Sonuca Ulaşması.....	112
Şekil 4.1.66. 2.MÖA'nın Sonuca Ulaşması.....	113
Şekil 4.1.67. 3.MÖA'nın Sonuca Ulaşması.....	113
Şekil 4.1.68. Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatında Sonucu Değerlendirme.....	113
Şekil 4.2.1. MÖA'larının Görsel İspatı Yorumlama Süreci.....	116
Şekil 4.2.2. Görsel İspatı Algılama Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	118
Şekil 4.2.3. Görsel İspatı Yorumlama Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	120
Şekil 4.2.4. Cebire Eğilim Gösterme Kategorisine Ait Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi.....	121

Şekil 4.2.5. Çalışma Kâğıdı 4.....	122
Şekil 4.2.6. Özdeşliklerin İspatlanmış Görsel İspatının Algılanması.....	123
Şekil 4.2.7. Beşin Küpünün Şekilsel Temsili.....	125
Şekil 4.2.8. Birin ve Üçün Küpünün Şekilsel Temsili.....	126
Şekil 4.2.9 $1 + 2 + 3... + (2n^2 - 1)$ İfadesinin Şekilsel Temsili.....	127
Şekil 4.2.10. 3.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çizimi.....	128
Şekil 4.2.11. Üçün Küpünün Şekilsel Temsili.....	129
Şekil 4.2.12. Özdeşliklerin Şekilsel Temsili.....	129
Şekil 4.2.13. $2n-1$ 'in Küpünün Şekilsel Temsili.....	130
Şekil 4.2.14. Özdeşliklerin İspatlanmış Görsel İspatında Yorumlama.....	132
Şekil 4.2.15. Görsel İspatta Şekillerin Birleştirilmesi.....	134
Şekil 4.2.16. Özdeşliklerin Elde Edilmesi.....	139
Şekil 4.2.17. 1.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm.....	141
Şekil 4.2.18. 1.MÖA'nın Tek Sayıların Küp Gösterimini Formüle Etmesi (1.Görüşme).....	142
Şekil 4.2.19. 1.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çözümü.....	142
Şekil 4.2.20. 1.MÖA'nın Tek Sayıların Küp Gösterimini Formüle Etmesi (2.Görüşme).....	143
Şekil 4.2.21. Özdeşliklerin İspatlanmış Görsel İspatında Cebire Eğilim Gösterme.....	149
Şekil 4.2.22. 2.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm.....	151
Şekil 5.1. MÖA'larının Görsel İspatları İspatlama Süreci.....	154

Şekil 5.2. Görsel İspatları İspatlama Sürecine Ait Kategori ve	
Alt Kategoriler.....	155
Şekil 5.3. MÖA'larının Görsel İspatı Yorumlama Süreci.....	160
Şekil 5.4. Görsel İspatı Yorumlama Sürecine Ait Kategori ve	
Alt Kategoriler.....	161

KISALTMALAR LİSTESİ

A: Anlayamama
D: Doğru
DA: Doğru Anlama
EO: Emin Olamama
FY: Fikir Yok
GT: Genel Terim
MÖA: Matematik Öğretmen Adayı
ÖT: Özel Terim
SS: Sorunsuz Süreç
SY: Sonuç Yok
Y: Yanlış
YA: Yanlış Anlama

I. BÖLÜM

GİRİŞ

Bu bölümde; “Problem Durumu”, “Araştırmanın Amacı”, “Araştırmanın Önemi”, “Araştırmanın Sınırlılıkları”, “Varsayımlar” ve “Tanımlar” alt başlıklarına yer verilecektir.

1.1. Problem Durumu

Literatür taraması yapıldığında araştırma konusu ile ilgili yapılan çalışmaların daha çok görsel gösterim içermeyen problemlerde, problem çözme metodu olarak görsel akıl yürütme ve görsel gösterimlerin nasıl kullanıldığını belirleme amacını taşıdıkları görülmüştür. Bu ortak amacı taşıyan araştırmaların birbirlerinden ayrılan yönleri ise araştırmalara matematikçilerin ya da farklı öğrenim seviyelerinden öğrencilerin katılması ve farklı matematik konularının kullanılmasıdır.

Yukarıda bahsedilen araştırmalardan biri Lowrie ve Clements (2001) 6. sınıfa devam eden 3 öğrencinin 4 matematik problemi üzerinde bireysel olarak çalışmalarını inceledikleri ve problem çözme metotlarını araştırdıkları çalışmadır. Öğrencilerden birinin problemleri görsel yöntemle çözmeye eğilimli olduğu, ikincisinin daha sözel (görsel olmayan) yaklaşımı tercih ettiği ve üçüncüsünün de hem görsel hem de görsel olmayan stratejileri kullanmaya eğilimli olduğunu saptamışlardır. Çalışma süreci boyunca problemlerin yenilik faktörü azaldıkça, üç öğrenci de görsel olmayan sözel akıl yürütmeye doğru yönelmiştir. Öğrenciler önceki tecrübelerini veya anlamalarını problem çözme stratejileriyle birleştirmek için uygun kavramsal bilgiye sahip olduklarını hissettiklerinde, problemleri görsel olmayan yollarla çözmeyi istedikleri görülmüştür.

Stylianou (2002) matematik problemi çözmeye en sık önerilen stratejilerden biri olan diyagram çizmenin kullanımını deneysel olarak araştırmayı ve matematikçiler tarafından kullanımının doğasına ilişkin bazı iç görüşler elde etmeyi amaçlamıştır. Katılımcıların her biri aktif olarak araştırmayla uğraşan ve üniversite seviyesinde ileri matematik dersleri veren doktora derecesi almış matematikçilerdir. Her bir matematikçiden beş matematik problemini çözmesi, sesli olarak düşünürken problem çözmedeki süreç ve davranışlarını tanımlaması istenmiştir. Onlar bu problemleri çözmekle uğraşırken diyagram çizme stratejileri incelenmiştir. Tecrübeli problem çözücülerin ispatı geliştirmede özel alt görevleri yerine getirmek için kullandıkları yolları ve aktiviteleri tamamlamada şekillerin onlara nasıl yardım ettiğini belirlemiştir. Çalışma, gerçekte matematikçilerin kendilerine bilinmez görünen problemleri çözmeye çalıştıkları zaman diyagramları çizdiklerini göstermiştir. Matematikçilerin problem çözmede kullandıkları görsel temsilin çok yapılandırılmış olduğunu, görsel temsilleri keşfettikleri zaman onları yapılandırdıklarını ve bunu sistematik bir şekilde yaptıklarını saptamıştır.

Zahner ve Corter (2010) olasılık kelime problemlerinin çözümünde özellikle uzamsal veya görsel biçimde olan dış ibarelerin rolünü araştırmışlar, dış görsel gösterimlerin nasıl ve niçin kullanıldığını anlamaya çalışmışlardır. 34 acemi olasılık problemi çözücüsüne altı olasılık kelime problemi verilmiştir. Yazılı ve sözlü görüşmeler aracılığıyla dış görsel gösterimleri ne zaman ve nasıl kullandıklarını ortaya koymuşlardır. Dış görsel gösterimler uygun seçildiği takdirde olasılık probleminin çözümünü kolaylaştırdığını bulmuşlardır.

Alcock ve Simpson (2004) bir İngiliz Üniversitesinde analiz derslerine devam eden 18 gönüllü öğrenciyle çalışmışlardır. Analiz derslerinden biri standart ders, diğeri sınıfların yaklaşık 30 öğrenciden oluştuğu, işbirlikçi bir ortamda öğrencilerin dört kişilik gruplar halinde yapılandırılmış bir sırası olan sorular üzerinde çalıştığı ve sonuçların çoğunu kendi kendilerine ispatladıkları bir derstir. Öğrenci çiftleriyle görüşme yapmışlar ve her bir görüşme yaklaşık bir saat sürmüştür. Öğrencilere dizilerin ve serilerin yakınsaklığı ile ilgili sorular sormuşlardır. Öğrencilerin matematiksel yapıları nesneler olarak gördüğünü, nesnelerin tüm grupları hakkında hızlı bir şekilde sonuç elde edebildiklerini ve açık olduğunu düşündükleri noktada kendi değerlendirmelerinde emin olduklarını bulmuşlardır. Öğrencilerin imajları farklı boyutta kullanmalarına rağmen imajların çok benzer olduğunu görmüşlerdir. Bütün öğrencilerin

görsel imajları kullanmaya eğilimli olduğunu, görsel akıl yürütmeyi etkili bir şekilde kullananların analiz dersi kavramlarının görsel ve biçimsel gösterimleri arasında güçlü bağlantılar inşa ettikleri sonucuna varmışlardır.

Katılımcılara verilen bir problemi çözme metodu olarak kendi çizdikleri görsel gösterimleri ve görsel akıl yürütmeyi nasıl kullandıklarını araştıran çalışmaların yanında, problemin çözülmesinde görselleştirmeye yardımcı olan araçların kullanımının etkilerinin araştırıldığı çalışmalar da yapılmıştır.

Eisenberg ve Dreyfus (1994) öğrencilerin fonksiyonları görsel bir yoldan düşünmelerine yardımcı olmayı ve bunu yaparken üstesinden gelmeleri gereken engelleri anlamaya çalışmayı amaçlamışlardır. Öğrencilerin fonksiyon dönüşümlerini görsel yoldan düşünmelerini sağlamayı amaçlayan bir öğrenme ünitesinin etkilerini araştırmak için bir çalışma tasarlamışlardır. Öğretim deneyine 16 erkek lise öğrencisi katılmıştır. Çalışmada, lise cebirinde çalışılan grafiklerin ötesinde öğrencilerin ilginç grafikler inşa edebileceği, çeşitli stratejiler geliştirebileceği The Green Globes bilgisayar programı, standart cebir becerilerini ve fonksiyon dönüşümlerindeki performansı değerlendiren soru kâğıdı, fonksiyon ve dönüşüm bilgi sürecinde görsel olarak öğrencilere programın hangi kapsamda yardım ettiğini belirlemek için görüşme soruları kullanılmıştır. Öğrenciler öğretim deneyinde sınırlı bir ilerleme göstermişlerdir. Araştırmacılar bunun görünen iki sebebi olduğunu öne sürmüşlerdir. Biri fonksiyon dönüşümleri konusunun zorluğu, diğeri ise öğretim formatında karşılaşılan zorluklardır.

Elliott, Hudson ve O'Reilly (2000) grafik hesap makinesinin matematikte yetenekli 6 özel öğrencinin fonksiyonlarla olan çalışmasını nasıl etkilediğini araştırmışlardır. Öğrencilere sembolik yaklaşımın kullanımını zorunlu tutmayan fonksiyonlarla ilgili 6 soru sorulmuştur. Araştırmanın amacı, küçük bir gruptaki öğrencilerin problem çözmede görselleştirmeyi nasıl kullandığına, bunu grafik hesap makinesinin hangi yollarla kolaylaştırdığına ve teşvik ettiğine dair bilgi toplamaktır. Öğrencilerin grafiksel yaklaşımları seçmeleri onların problemi daha açık olarak görmelerine yardımcı ve sembolik yaklaşımların sonuçlarını doğrulamalarının aracı olmuştur. Grafik hesap makinesi öğrencilere gösterimin görsel ve sembolik biçimleri arasında bağlantılar yapma imkânı vermiştir. Öğrenciler gösterimin sadece bir biçimine odaklandıklarında ulaşamayacakları anlama seviyesine erişmişlerdir.

Yukarıda görsel gösterim içermeyen problemleri çözme metodu olarak gerek katılımcıların kendisi tarafından gerekse yardımcı araçlar kullanılarak üretilen görsel gösterimlerin ve görsel akıl yürütmenin nasıl kullanıldığını araştıran çalışmalardan bahsedilmişti. Bununla birlikte, görsel gösterim içermeyen problemler olduğu gibi yalnızca görsel gösterimlerden oluşan problemler de bulunmaktadır. Tekin ve Konyalıoğlu (2009) bu tür problemlere örnek veren bir çalışma yapmıştır. Çalışma trigonometride dönüşüm-ters dönüşüm formüllerinin ispatlarının ortaöğretimde görselleştirilmesine yöneliktir. Bu çalışma ile dönüşüm-ters dönüşüm formüllerinin görsel şekillerle ispat edilmesi ve bunların diğer araştırmacılara tanıtılması amaçlanmıştır. Araştırmada kullanılacak olan sorular da sadece görsel gösterimlerden oluşmaktadır. Bu nedenle araştırma sorularının alındığı Roger B. Nelsen tarafından yazılan *Proofs Without Words* (1993) ve *Proofs Without Words II* (2000) kitaplarından bahsetmek yerinde olacaktır. Bu kitapların içerisinde farklı kaynaklardan toplanan görsel ispatların geniş bir yelpazesi bulunmaktadır. Nelsen (1993) kitapta yer alan resimler veya diyagramların özel bir durumun niçin doğru olabileceğini görmeye yardımcı olduğundan ve görsel ipuçlarının kişiyi matematiksel düşünceye teşvik ettiğinden bahsetmektedir. Ayrıca okuyucuların belirli matematiksel düşüncelerin seçkin görsel gösterimlerini keşfederken eğlenebilecekleri, öğretmenlerin görsel ispatların çoğunu öğrencileriyle paylaşmayı isteyecekleri, kitabın yeni görsel ispatların oluşturulmasında yüreklendirme ve teşvik oluşturacağı beklentisi içerisinde olduğunu söylemektedir. Araştırmada katılımcılara verilen örnek görsel ispatlar ise Claudi Alsina ve Roger Nelsen tarafından yazılan *Math Made Visual* (2006) kitabından alınmıştır. Yazarlar matematiksel fikirleri ve ispatları öğrencilerin daha iyi anlamasına yardım edecek matematiksel çizimler oluşturmak mümkün müdür sorusunun cevabının evet olduğuna inandıklarını söylemektedirler. Kitaptaki amaçlarının ise matematiksel ve pedagojik öneme sahip resimler üretmede bazı görsel tekniklerin nasıl kullanılabileceğini göstermek olduğundan bahsetmektedirler.

Yapılan araştırmalar içerisinde katılımcılara görsel gösterim içeren ve içermeyen problemlerin yöneltildiği, katılımcıların bu problemleri çözme performanslarının karşılaştırıldığı çalışmalar da bulunmaktadır. Bu araştırmaların birbirinden ayrılan yönü ise diğer araştırmalarda da olduğu gibi araştırmalara matematikçilerin ya da farklı öğrenim seviyelerinden öğrencilerin katılması ve farklı matematik konularının kullanılmasıdır.

Bahsedilen araştırmalardan biri Stylianou ve Silver (2004) tarafından 10 matematik profesörü ve en az üç matematik dersi almış 10 lisans öğrencisinden oluşan 20 katılımcı ile yapılan çalışmadır. Çalışmanın ilk kısmında profesörlerin ve lisans öğrencilerinin problem çözme stratejisi olarak görsel gösterimi algılama rollerini incelemişlerdir. Her bir katılımcıdan problem çözme ve görselleştirme ile ilgili önceki başlıca çalışmalardan seçilmiş 24 problemi kategorize etmeleri istenmiştir. Katılımcılara problemi çözmeleri için izin verilmemiş, katılımcılardan sadece problemi çözmüş olsalardı, hangi stratejileri kullanmayı düşündüklerini ifade etmeleri istenmiştir. Çalışmanın ikinci kısmında, görsel gösterimlerin kullanımındaki sıklık ve görsel gösterimlerin doğası belirlenmiştir. Her bir katılımcıdan beş problemi çözmesi istenmiştir. Katılımcılardan çözümün tamamını sağlamaları ve problemi çözerken akıl yürütmelerini açıklamaları talep edilmiştir. Çalışma, hem profesörlerin hem de lisans öğrencilerinin görsel gösterim kullanımını, sıklıkla kullandıkları uygulanabilir bir problem çözme aracı olarak düşündüklerini göstermiştir. Profesörler ve lisans öğrencilerinin kullandıkları görsel gösterimler arasında göze çarpan bir farklılık bulunamışlardır, fakat profesörlerin kullandıkları görsel gösterimler daha zengindir.

Booth ve Thomas (2000) matematikte güçlük çeken, yaşları 11 ile 15 arasında değişen 32 öğrenciyi görsel-uzamsal yetenekleri temelinde ikiye bölmüşlerdir. Standart matematik testleri ile iki grup öğrenci değerlendirildiğinde matematik performansları arasında farklılık bulunmamakta, fakat bir grup diğerinden daha yüksek görsel-uzamsal yeteneğe sahiptir. Problem çözme görüşmeleri yaklaşık 30 dakika sürmüş ve her bir katılımcıya en fazla 18 soru (altı sorunun üç varyasyonu) sorulmuştur. Sözel, bir resimle ve bir diyagramla olmak üzere üç farklı gösterimde çözülen aritmetik kelime problemlerini öğrencilerin çözmeye çalışması süresince, her biriyle görüşme yapılmıştır. Sonuçlar daha yüksek görsel-uzamsal yeteneğe sahip grubun bu problemler üzerinde önemli derecede daha iyi performans gösterdiğine işaret etmiştir.

Pantziara, Gagatsis ve Elia (2009) öğrencilerin diyagramlı ve diyagramsız problem çözmedeki yeteneklerini karşılaştırarak rutin olmayan matematik problemi çözmede ađ, hiyerarşi ve matris tipindeki diyagramların etkilerini araştırmışlardır. Problem çözme sürecinde diyagramların etkisini incelemek için iki test oluşturmuşlardır. Test A, altı problemten oluşmaktadır ve öğrencilerin matematik kitaplarındaki problemlere benzer problemlerdir. Test B de Test A nın içerdiği problemlerle eş yapılı altı problemten oluşmaktadır. Test B deki her bir problemde

diyagram bulunmakta ve öğrenciler çözüm sürecinde bu diyagramları kullanmak zorundadır. Test A ve Test B 6. sınıftaki 194 Güney Kıbrıslı öğrenciye uygulanmıştır. Öğrencilerden Test A daki altı problemi istedikleri yoldan çözmeleri ve problem çözme süreçlerini açıklamaları istenmiştir. Test B, Test A'nın uygulanmasından bir hafta sonra uygulanmıştır. Test B de öğrencilerden problemleri çözmek için her bir problemdeki diyagramı kullanmaları istenmiştir. Çalışma, Test B de diyagramların varlığının öğrencilerin rutin olmayan problemleri çözmedeki performanslarını tam artırmadığını göstermiştir. Öğrenciler, Test A daki problemlerin çözümü için çeşitli stratejiler kullanmışlardır. Stratejiler problemin yapısına göre kullanılmıştır. Bununla birlikte Test B de diyagramların varlığı, problemlerin çözümü için öğrencilerin strateji çeşitliliğini sınırlamıştır. Rutin olmayan problemlerde diyagramların sunulması, diyagramsız problemleri çözmede zorluk yaşayan öğrencilere önemli derecede yardım etmiştir. Aksine diyagramlar olmadan problemleri çözen öğrencilerin önemli bir kısmı çözdükleri problemlerle eş yapılı olan ve buna ek olarak diyagram içeren problemlerde başarılı olamamıştır. Buna göre rutin olmayan problemlerin öncelikle diyagramlar olmadan verilmesi ve çözüm için kullanışlı problemlerin devamında sağlanması gerektiği sonucuna varmışlardır.

Görsel gösterim içermeyen problemler olduğu gibi yalnızca görsel gösterimlerden oluşan problemlerin de bulunduğu ifade edilmiştir. Katılımcılara yalnızca görsel gösterimlerden oluşan soruların sorulduğu, onların görsel soruları çözme becerilerinin araştırıldığı çalışmalar da yapılmıştır.

Hershkowitz, Arcavi, ve Bruckheimer (2001) görselleştirmenin yüksek düzey akıl yürütmenin sezgisel desteğinden daha fazlası olabileceği, matematiğin esasını oluşturabileceği, ayrıca onun sadece görsel imajlarla açıkça ilişkili alanların (geometri gibi) değil, biçimsel sembolik ispatların (lise cebiri gibi) da merkezi olabileceğini göstermeyi amaçlamışlardır. Çeşitli ülkelerdeki öğretmen kurslarında sorulan, hem öğrencilerin hem de matematiksel olarak bilgili yetişkinlerin uğraşabileceği çok karmaşık olmayan, ön bilgi gerektirmeyen, farklı yollardan çözülebilen görsel şekle dayalı bir soru sormuşlardır. Araştırmacılar soruyu çeşitli ülkelerdeki öğretmenlere (Brezilya, İspanya, Avustralya, Güney Afrika, İsrail, Şili) sormuşlar, buradan elde ettikleri bulguların teşvikiyle 13-14 yaşlarındaki ortaokul öğrencilerine de aynı soruyu uygulamışlardır. Başarılı çözüm stratejilerine, onların sınıflandırılmasına, bilişsel ve pedagojiksel içerime odaklanmışlardır. Öğretmenler bireysel ya da gruplar halinde

çalışırken öğrenciler 4-6 kişilik gruplarda çalışmışlardır. Görsel olarak sunulan bir problemde çözüm stratejilerinin bundan etkilenmesinin şaşırtıcı olmadığını fakat öğretmenlerin hepsinin görsel stratejileri kullanmadığı, problemi sadece sayısal sonuçlar yardımıyla değerlendirmeye çalıştıklarını dolayısıyla genel bir çözüme ulaşmada zorlandıklarını görmüşlerdir. Öğretmenlerin sayısal yaklaşımlardaki ısrarının nedeni olarak zihinlerinin görsel analizi kullanmadığı ve/veya görsel araçların kullanımını genel bir çözüm elde etmek için mantıksal matematiksel bir yol gibi düşünmedikleri yorumunda bulunmuşlardır. Öğrencilerden ise birden çok çözüm stratejisi bulmaları ve çözüm süreçlerine dair grup raporu yazmaları istenmiştir. Tüm sınıf görsel yaklaşımları kullanarak genellikle üç ya da dört farklı strateji üretmişlerdir. Bu problemin öğrenciler arasında görsel stratejileri teşvik etmede verimli olduğu sonucuna varmışlardır.

Fulmer ve McMillar (2009) Pisagor teoremi için “Proofs Without Words” kitabını kullanarak bir araştırma yapmışlardır. Öğrencilerin Pisagor teoremi hakkında düşünmesini ve bir ispatı öğrencilerin kendi kelimeleriyle ortaya koymalarını amaçlamışlardır. Öğrencilere içerisinde kelimelerin olmadığı çeşitli resimlerin olduğu ispatları dağıtmışlar ve öğrencilerden arkadaşlarıyla birlikte çalışarak bu resimlere yazılı bir ispat geliştirmelerini istemişlerdir. Pisagor teoreminin ispatının rehberliğinde öğrencilerin resimlerle uğraşırken içgörü ve yenilikler elde ettiklerini görmüşlerdir. Öğrencilerin kendi ispatlarını oluşturmak için kendilerine olan güvenlerinin geliştiği sonucuna varmışlardır.

Bardelle (2010) diyagramların kullanımındaki özellikle bilgi çıkarımındaki başlıca zorlukları tanımlamaya çalışmıştır. İtalya’daki del Piemonte Orientale Üniversitesinde matematiksel ispata tahsis edilen bir ders bağlamında 2. ve 3. sınıf matematik öğrencilerinden oluşan 13 kişilik bir gruba bazı ifadelerin şekilsel ispatına bakmayı ve böyle bir ispatı yeniden inşa etmeyi içeren birkaç görev vermiştir. Görevler yazılmış testler olarak yerine getirilmiş ve öğrenciler tarafından yazılan iddiaları daha iyi anlayabilmek için görüşmeler yapılmıştır. Araştırmanın sonunda elde edilen veriler ile bir grup İtalyan matematik öğrencisinin görsel akıl yürütmede beceri eksikliğinin olduğu sonucuna varmıştır. Ayrıca yöntemlerin analizi ile öğrencilerin şekillerle oynamadan kaynaklanan görsel iddiaları kullanma yerine cebirle uğraşmayı tercih ettiğini görmüştür.

Araştırmalardan elde edilen sonuçlara göre görsel gösterimlerin hangi konuda ve nasıl kullanılacağına iyi belirlenmesinin beklenen fayda açısından önemli olduğu gözükmemektedir. Bunun yanında yapılan araştırmalar görsel akıl yürütmenin matematiksel problemlerin çözümünde, matematiksel ifadelerin özelliklerini keşfetmede yardımcı olduğunu, öğrencilerin matematikte kendilerine olan güvenlerini geliştirdiğini ancak öğrencilerin ve hatta öğretmenlerin görsel akıl yürütmede beceri eksikliğinin olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla buradan görsel akıl yürütmenin matematik öğretiminde önemli bir faktör olduğu, matematik öğretmen adaylarının görsel akıl yürütme durumlarının incelenerek belirlenmesi gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Bu araştırma bu bağlamda önemlidir.

1.2. Araştırmanın Amacı

Araştırmanın amacı, “Seçilen görsel ispatlar kapsamında matematik öğretmen aday [MÖA]’larının görsel akıl yürütme durumlarının incelenmesidir.”

Bu genel amacı gerçekleştirmek için aşağıdaki sorulara cevap aranacaktır:

- 1) MÖA’larının görsel ispatları algılamaları nasıldır?
- 2) MÖA’larının görsel ispatı algılamaları ve çözümleri arasında nasıl bir ilişki vardır?
- 3) MÖA’ları görsel ispatları ispatlama ve yorumlama süreçlerinde hangi aşamalarda ne gibi zorluklarla karşılaşmışlardır?
- 4) MÖA’larının ispatlara dair önceki bilgileri görsel ispatları ispatlama ve yorumlama durumlarını nasıl etkilemiştir?

1.3. Araştırmanın Önemi

Araştırmanın konusu olan görselleştirme, hem matematik hem de matematik eğitiminde yer almakta, çoğu araştırmacı da matematikçilerin ve matematik eğitimcilerinin görselleştirmeye önem verdiğini vurgulayarak, görselleştirmenin giderek

daha da artan bir ilgi gördüğünden bahsetmektedirler (Arcavi, 2003; Bardelle, 2010; Borba ve Villarreal 2005; Gila ve Sidoli, 2007; Gutiérrez, 1996; Nemirovsky ve Noble, 1997). Bu kısımda matematik ve matematik eğitiminde görselleştirmeye nasıl bir rol biçildiğine, görselleştirmeden matematikçilerin nasıl faydalandıkları ve matematik eğitimcilerinin nasıl faydalanabileceklerine yer verilerek literatür çerçevesinde araştırmanın niçin gerekli olduğu ve araştırmanın değerinin gerekçelerinden bahsedilecektir.

Matematikçiler için görselleştirme yeni bir yöntem değildir. Matematikçiler uzun zamandan beri görselleştirmenin farkında olmuşlardır ve onu kullanmak için büyük çaba harcamışlardır (Borwein ve Jorgenson, 2001). Çünkü görselleştirme matematiksel nesnede yer alan ilişkilerin nasıl organize olduğunu anlamayı daha da çabuklaştırmaktadır (Farmaki ve Paschos, 2007) ve hatta matematiksel aktivitenin ana bileşenidir (Hershkowitz vd., 2001). Görselleştirmenin matematik açısından tüm bu kullanılabilirliğinin yanında onun matematikte nasıl kullanıldığına dair bilgi eksikliği bulunmaktadır. Bu durum matematikçilerin görsel gösterimleri çalışmalarının biçimsel olmayan bir kısmı olarak düşünme eğiliminde olmalarından ve çalışmalarında görsel gösterimlerin kullanımını rapor etmemelerinden kaynaklanmaktadır. Sonuç olarak, profesyonel matematikçilerin çalışmalarında görsel gösterimlerden nasıl faydalandıkları hakkında çok az şey bilinmektedir (Stylianou, 2002). Bunun yanında bilinen şudur ki, matematikçiler bir diyagramda neyi arayacaklarını, özel bir figürden neyi genelleştireceklerini bilmekte ve daha genel bir gözlemi göstermek için özel bir durumu veya geometrik bir imajı kullanabilmektedirler (Noss, Healy ve Hoyles, 1997). Diğer bir ifadeyle görsel gösterimler, matematiği geliştirmede matematikçilere yardımcı olmaktadır. Matematikçilerin görsel gösterimlerden faydalanarak matematiksel anlamayı gerçekleştirip genellemelere varmaları gibi, öğrencilerin de benzer yollardan matematiği keşfederek anlamaları sağlanabilir. Presmeg (1986) matematiği öğrenmede görsel akıl yürütmeye önem veren araştırmacıların matematiğin sözelin ötesinde düşünceyi gerektirdiği fikrini benimsediklerini ifade etmektedir. Bu noktada, matematikçilerin çalışmalarında görsel gösterimlerden faydalanmaları ve matematiğin sözelin ötesinde düşünceyi içerdiği fikri birbirini destekler görünmektedir.

Görselleştirmenin matematikte veya matematik eğitiminde nasıl kullanılacağı ya da görselleştirmenin kullanılması durumunda nasıl bir yararının olacağı konusunda çeşitli görüşler bulunmaktadır. Zahner ve Corter (2010), matematiğin bazı alanlarında,

geometri gibi, resimlerin ve diyagramların kullanımının ve anlaşılmasının alan bilgisinin bir parçası olarak düşünülebileceğini, fakat matematiğin diğer alanlarında, görselleştirmenin alan bilgisinin kalıcı bir parçası olmayabileceğini ama problem çözmenin bir vasıtası olarak veya matematiksel keşfi gerçekleştirmeye çalışmak için kullanılabileceğini iddia etmektedirler. Ayrıca, matematikte görselleştirmenin problem çözmede önemli rol oynadığını uzun zamandır düşünüldüğünü ifade etmişlerdir. Zahner ve Corter (2010) tarafından iddia edilen matematiğin belirli alanlarında görselleştirmeden yararlanılabileceği fikri, Kotsopoulos ve Cordy (2009) tarafından da matematik eğitimi açısından desteklenmektedir. Onlar da belirli matematiksel kavramları öğrenmek için öğretmenlerin ve öğrencilerin görseller üzerinde derinlemesine düşünmesi, görselleştirme ile meşgul olması gerektiğini iddia etmektedirler. Görselleştirmenin matematik veya matematik eğitiminde hangi alanlarda kullanılabileceği sorusunun yanında, hangi öğrenim seviyelerinde kullanılabileceği sorusu da önemlidir. Bu açıdan matematik eğitimcileri farklı eğitim seviyelerindeki özellikle ortaokul, lise ve üniversitelerdeki matematiğin öğretiminin olağan bir parçası olarak görsel unsurların kullanımının artırılması gerektiğinin altını çizmektedirler (Gutiérrez, 1996). Bazı araştırmacılar, matematikçilerin ne kadar karmaşık olursa olsun sembolik biçimleri anlayabilmesi nedeniyle görselleştirmenin matematikte ikinci planda kalabileceği ama matematik eğitiminde böyle düşünülmemesi gerektiğini ifade etmektedirler (Arcavi, 2003; Borba ve Villarreal, 2005). Arcavi (2003) matematik öğrencileri için görselleştirmenin üç açıdan güçlü bir tamamlayıcı role sahip olabileceğini iddia etmektedir. Bu roller; (a) özellikle sembolik sonuçların (ve olası bir ispat ve onun doğruluğunu sağlamanın) desteklenmesi ve örneklendirilmesi (b) (doğru) sembolik çözümler ve (doğru olmayan) sezgiler arasındaki çelişkiyi çözmenin olası bir yolu ve (c) biçimsel çözümler tarafından kolayca göz ardı edilebilen kavramsal desteklemeler ile yeniden yakın ilişki kurmamıza ve onları iyileştirmemize yardım etmek için bir yol olarak düşünülebilir. Borba ve Villarreal (2005) görselleştirmenin matematik eğitiminde ön planda olması gerektiği görüşünü şu ifadelerle desteklemektedir:

- Görselleştirme, matematiksel bilgiye ulaşmanın alternatif bir yolunu oluşturur.
- Matematiksel kavramları anlama, çoklu gösterimleri gerektirir ve görsel gösterim anlamanın kendisini değiştirebilir.

- Görselleştirme, matematiksel aktivitenin parçasıdır ve bir problem çözme yoludur.
- Teknoloji ve güçlü görsel ara yüzler okullarda mevcuttur, onun matematiği öğretmek ve öğrenmek için kullanımı ise görsel süreçleri anlamaktan geçmektedir.
- Bazı matematikçilerin iddia ettiği gibi bilgisayarlar sayesinde matematiğin içeriği değişebilirse, okullardaki matematiğin de bazı değişikliklere uğrayacağı açıktır.
- İspatın akademik matematikte gerçeğin resmi bir yolu olarak görülmesine rağmen bunun tüm seviyelerdeki okulların matematik derslerine aktarılması şart değildir.

Görselleştirmenin yukarıdaki paragraflarda bahsedilen gerek matematik gerekse matematik eğitimi üzerindeki önemi göz önünde bulundurulduğunda öğretmenlerin de görselleştirmenin önemini farkında olması ve bundan hareketle öğrencilerin görselleştirmeye yönelik yeteneklerini geliştirmeleri gerektiği düşünülebilir. Bunun gerçekleşebilmesi için öğretmenlerin kendi yeteneklerini geliştirmeleri onun öncesinde de kendi görsel akıl yürütme durumlarının farkında olmaları gerekebilir. Bu araştırmanın önemi de burada ortaya çıkmaktadır. Presmeg (1986) öğretmenlerin çoğunun matematikte görsel süreç ile ilgili güçlüklerin farkında olmadığı ve bu zorlukların üstesinden gelinebileceği gerçeğini göz önünde bulundurarak, bu konularda artan öğretmen farkındalığının buna yardım edebileceğinin mümkün olduğundan bahsetmektedir. Benzer şekilde Duval (2006) öğretmenler ve öğrenciler arasında temel ve bütünleyici düşünme süreçleri, akıl yürütme, görselleştirme hakkında büyük bir yanlış anlama kaynağı olduğunu ifade etmektedir. Dolayısıyla Presmeg ve Duval tarafından belirtilen düşünceler de araştırmanın gerekliliğini destekler gözükmektedir.

Literatür taraması yapıldığında görsel akıl yürütmeye gerek matematikçiler gerekse matematik eğitimcileri tarafından önem verildiği, görsel temsillerin matematikte anlamayı kolaylaştıran etmenler olduğu konusunda hem fikir oldukları görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının matematik eğitiminde önemli bir yeri olan görsel akıl yürütmeyi nasıl kullandıklarının incelenmesi ile onların görsel akıl yürütmede ne derecede yeterli olduklarının ortaya koyulmaya çalışıldığı bir çalışmaya

rastlanmamıştır. Bu açıdan bakıldığında araştırmanın bu alandaki eksikliğe biraz olsun katkıda bulunabileceği düşünülmektedir.

1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları

Araştırmaya katılmada gönüllü erkek MÖA adayı bulunamadığından, araştırma kız MÖA'ları ile sınırlıdır.

1.5. Araştırmanın Varsayımları

- 1) Araştırmanın uygulama sürecinde, MÖA'ları arasında olumlu ya da olumsuz etkileşim olmadığı,
- 2) Araştırmacının, MÖA'ları performans gösterirken cevaplarını etkilemekten kaçınmış olduğu varsayılmaktadır.

1.6. Tanımlar

Görselleştirme: Görselleştirme genellikle görsel bilgiyi gösterme, dönüştürme, üretme, kanıtlama, görsel bilgiyle iletişime geçme, görsel bilgi üzerinde derinlemesine düşünme olarak adlandırılmaktadır (akt. Hershkowitz vd., 2001). Görselleştirme, matematiksel problemler, prensipler veya kavramların elle çizilmiş veya bilgisayarla üretilmiş geometrik veya grafik gösterimini kullanma veya üretme sürecidir (Zimmerman ve Cunningham, 1991). Problemleri çözmek veya özellikleri ispatlamak için zihinsel veya fiziksel ya da görsel veya uzamsal unsurların temelinde akıl yürütme çeşididir (Gutiérrez, 1996).

Görsel Akıl Yürütme: Matematiksel ifadeler arasındaki ilişkileri temsil eden geometrik veya grafik gösterimlerde yer alan görsel bilgileri algılama, bu görsel bilgiler arasında bulunan ilişkileri kurma ve bu bilgileri biçimsel gösterim haline getirme, görsel ve biçimsel gösterimler arasında karşılıklı bağlantılar kurma, görsel bilgiyi matematiksel ilişkiler olarak ifade edebilme sürecidir.

Görsel İspat: Sözel dilde hiçbir yorum olmadan (yani kelimesiz) sunulan, bununla birlikte gerektiğinde sayılar, harfler, oklar noktalar veya bazen sembolik ifadelerle ilişkili diğer işaretlerle donatılan sadece diyagramlara dayanan ve ispatın yeniden oluşturulması okuyucuya bırakılan ispatlardır (Bardelle, 2010).

II. BÖLÜM

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Matematiksel Akıl Yürütme, Görsel Akıl Yürütme ve Görselleştirme

Akıl yürütme, bir işi çözerken iddialar üretme ve sonuçlara ulaşma amacıyla benimsenen düşünce sırasıdır (Bergqvist ve Lithner, 2012). Diğer bir deyişle akıl yürüttüğümüz zaman düşünce veya görüş sırası geliştiririz. Bu düşünce sırasını ise kendimizi veya diğerlerini ikna etmek, bir problemi çözmek veya birtakım düşünceleri daha tutarlı bir bütüne dönüştürmek gibi amaçlara hizmet etmek için yaparız (akt. Brodie, 2010). Akıl yürütmenin matematikle olan ilişkisine bakıldığında, epistemolojik olarak akıl yürütme matematiğin temelidir. Çünkü fen gözlem yoluyla doğrularken, matematiğin dayandığı nokta mantıktır (Steen, 1999).

Matematiksel akıl yürütme, matematiğin objeleri ile matematik hakkında akıl yürütmedir (Brodie, 2010). Bu tanım içerisine çok çeşitli akıl yürütme biçimlerini sığdırabilir. Nitekim literatür taraması yapıldığında matematik alanında pek çok akıl yürütme çeşidinden (sembolik akıl yürütme, tümdengelimli akıl yürütme, tümevarımlı akıl yürütme, nicel akıl yürütme, model tabanlı akıl yürütme, dinamik akıl yürütme, yaratıcı akıl yürütme v.b.) bahsedildiği ve matematik eğitiminde araştırma konusu olarak ele alındığı görülmüştür. Bu araştırmada ise akıl yürütme çeşitlerinden biri olan ve farklı araştırma alanlarında da kullanılan görsel akıl yürütme, matematik ile ilişkisi açısından ilgilenelecektir.

Literatüre bakıldığında pek çok araştırmada görsel akıl yürütme ile birlikte görselleştirmeden de bahsedildiği görülmüştür (Alcock ve Simpson, 2004; Hanna, 2000; Healy ve Hoyles, 1999; Nemirovsky ve Noble, 1997; Presmeg ve Balderas-Canas, 2001; Stylianou, 2002; Zahner ve Corter, 2010). Ayrıca görsel akıl yürütmenin başlığında yer aldığı (Healy ve Hoyles, 1999; Hershkowitz vd., 2001) veya içerisinde adının geçtiği araştırmaların çoğunda (Arcavi, 2003; Borba ve Villarreal, 2005; Pitta-

Pantazi ve Christou, 2009) tanımına rastlanılamamış, bunun yanında görselleştirmenin çeşitli tanımları ile karşılaşmıştır. Hatta karşılaşılan görselleştirme tanımları oldukça geniştir ve bu tanımlar ortak öğelere sahip olmaları ile birlikte tek bir teoriksel yapının parçaları olarak ifade edilmemişlerdir. Bu durumun görselleştirme ile ilgili teoriksel araştırmaların matematik eğitiminde geniş bir alana yayılmasından kaynaklandığı (Borba ve Villarreal, 2005; Gutiérrez, 1996; Nemirovsky ve Noble, 1997) ve matematikteki görselleştirmenin alması gereken daha çok yol olduğu söylenmektedir (Mancosu, 2005). Görselleştirmenin tanımları arasındaki farklılıklar ya da ayrılıklar araştırma konusunun dışındadır.

Matematik eğitiminde görselleştirme veya görsel akıl yürütmenin araştırmaya özgü olarak tanımlandığı çalışmalar yapılmıştır (Alcock ve Simpson, 2004; Mancosu, 2005; Presmeg ve Balderas-Canas, 2001). Örneğin, Alcock ve Simpson (2004) görsel akıl yürütmeyi reel analiz kavramlarının görsel ve biçimsel gösterimleri arasında güçlü bağlantılar yapma olarak tanımlamışlardır. Bu tanımın araştırmaya özgü olduğundan ve görselleştirmenin literatürdeki çeşitli tanımları ile dikkate değer ölçüde çakıştığından bahsetmişlerdir. Bu araştırmada da kullanılan görsel akıl yürütme tanımı araştırmaya özgüdür ve araştırmadaki süreçleri yansıtacak şekilde oluşturulmaya çalışılmıştır.

Hershkowitz, Ben-Chaim, Hoyles, Lappan, Micheltmore ve Vinner (1989) görsel akıl yürütme ve görselleştirmeyi eşanlamlı almış; görsel bilgi üzerinde derinlemesine düşünme, görsel bilgiyle iletişime geçme, görsel bilgiyi gösterme, belgeleme, dönüştürme, genelleme yeteneği olarak tanımlamışlardır (akt. Sinclair, Mamolo ve Whiteley, 2011). Bu tanım ile tanımlar bölümünde yer alan görselleştirme tanımları araştırmada kullanılan görsel akıl yürütme tanımından çok da uzak değildir. Bu nedenle bu iki terim arasında bir ayrım yapılmamış, sonraki bölümlerde görselleştirme ve görsel akıl yürütmenin matematik ve matematik eğitimindeki yerine değinilmiştir.

2.2. Görselleştirme

Bu araştırmada görselleştirmeye matematik eğitimi açısından yer verilmesiyle birlikte görselleştirme sadece matematik veya matematik eğitimi ile sınırlı değildir, pek çok araştırma alanında yer almakta ve araştırılmaktadır. Bu araştırma alanlarına psikoloji, mühendislik, sanat, tıp, ekonomi, kimya ve otomobil sürme örnek olarak

verilebilir. Başka bir deyişle görselleştirme pek çok şaşırtıcı uzmanlık alanlarında başlıkların bulunduğu, araştırmaların ve yayınların yapıldığı bir alandır (Gutiérrez, 1996).

Görselleştirmenin araştırıldığı alanlardan biri olan psikolojide, matematikte olduğu gibi, psikologlar uzun zamandan beri görselleştirmenin önemini farkında olmuşlardır. Bu doğrultuda da çalışmalarını çerçevelemek için detaylı teoriler ve bireyleri gözlemlemek, test etmek için araçlar geliştirmişlerdir (Gutiérrez, 1996). Psikolojide yapılan araştırmalar sonucunda düşünmenin farklı biçimlerinin olduğu kabul edilmiş, fakat psikolojik bir teoride analitik ve görsel düşüncüyü birleştiren yeterli bir girişim henüz bulunmamıştır (Booth ve Thomas, 2000).

Çoğu alanda yer edinen görselleştirme dilin ağırlıklı olduğu iletişimde de kendini göstermektedir. Hatta görsel gösterimler dilin gösterdiği işlev gibi iletişimde rol edinmişlerdir (Morgan, 2006). Fakat burada görselleştirmenin üstlendiği rol basit değildir. Birçok koşul altında insanların duyuşal bilginin diğer biçimlerinden ziyade görsel bilgiye güvenmekte güçlü bir eğilim gösterdikleri ortaya çıkmıştır (Sinnott, Spence ve Soto-Faraco, 2007). Görselleştirmenin bu kadar etkili olmasının diğer bir ifadeyle insanların görsel bilgiye daha fazla güvenmelerinin sebebi, görmenin biyolojik ve sosyo-kültürel insan varoluşunun temeli olması olabilir (Arcavi, 2003). İnsanların doğasından kaynaklanan görselleştirmeye dair olumlu eğilimleri matematik eğitimi açısından da değerlendirilerek avantaja dönüştürülebilir.

Görselleştirmenin farklı uzmanlık alanlarında araştırma konusu olduğundan bahsedilmişti. Bununla birlikte her bir uzmanlık alanı yalnızca belirli yetenekler ve çevrelerle ilgilenmektedir, bunlar da ancak kendi araştırma alanlarıyla ilgilidir. Sonuç olarak görselleştirme, bizim sezgisel olarak tahmin edebileceğimizden çok daha fazla aktivite için önemlidir. Diğer bir ifadeyle görselleştirme alanı çok geniş ve çeşitlidir ki onu bütünüyle sınırlamaya çalışmak makul değildir (Gutiérrez, 1996). Görselleştirmenin kendisini gösterdiği tüm uzmanlık alanları içerisinde, temelini dayandığı alana bakılacak olursa bu alan matematiktir (Zimmerman ve Cunningham, 1991). Çok çeşitli yerlerde kendini gösteren ve önem arz eden ayrıca temeli matematiğe dayanan, matematikten uzak olmayan görselleştirmeye matematik eğitiminde de yer verme ve ondan yararlanma düşüncesi makul görünmektedir.

2.3. Matematik ve Görselleştirme

Matematiksel bilgiyi elde etme süreci oldukça farklı yaklaşımları gerektirecek kadar karmaşıktır (Duval, 2006). Dolayısıyla matematiksel ilerleme de bilinen bir durumun daha ileri ve soyut bir durumla yer değiştirilmesinden ziyade, akıl yürütmenin farklı biçimlerinin birleştirilmesi ile gerçekleşir (Healy ve Hoyles, 1999). Bu araştırmada matematiksel bilginin elde edilmesinde akıl yürütme çeşitlerinden biri olan görsel akıl yürütmenin kullanılması ile ilgilenilecek ve bu başlık altında ise görselleştirmenin matematikteki yerine değinilecektir.

Araştırmada görselleştirme ve görsel akıl yürütme inceleneceğinden dolayı bu kavramlar ve bu kavramlarla ilişkili ifadelerin matematiği ilgilendiren kısmının neler olduğundan bahsetmek yerinde olacaktır.

- Görsel akıl yürütme, diyagramlar tarafından desteklenir. Dolayısıyla görsel akıl yürütme sözel akıl yürütmeden farklıdır. Bu ise onun sözel akıl yürütmeden ayrı olduğu anlamına gelmez, aksine görsel akıl yürütme sözel akıl yürütmeyi tamamlar (akt. Pantziara vd., 2009). Buradan sözel akıl yürütmenin görsel akıl yürütme ile anlamayı daha da güçlendirdiği sonucuna varılabilir.
- Geometrik kavramların elde edilmesi görsel ve niteleyici akıl yürütmeyi içeren karmaşık bir süreçtir (Tsamir, Tirosh ve Levenson, 2008). Bu açıdan bile bakıldığında görsel akıl yürütmenin en azından matematiğin içerisinde bulunan bir alan olan geometri için gerekli olduğu söylenebilir.
- Görsel akıl yürütme matematiksel anlama süreciyle ilişkilidir (Trigueros ve Martínez-Planell, 2010). Matematiksel anlama süreci ve görsel akıl yürütme birbirinden ayrı değildir. Dolayısıyla matematikte anlamayı sağlamada görsel akıl yürütmeden yararlanılabilir. Buna ek olarak görsel akıl yürütme keşifle de ilişkilidir (Zahner ve Corter, 2010). Keşfetmeye dayalı yapılan matematik etkinliklerinde görsel akıl yürütmenin bu özelliği kullanılabilir.
- Görsel akıl yürütme görsel olarak ilişkileri anlama, değiştirme, yeniden organize etme, yorumlama ile ilgili tüm bu zihinsel becerileri birleştirir

(akt. Pantziara vd., 2009). Görüldüğü gibi görsel akıl yürütme pek çok zihinsel becerinin kullanımına imkân sağlamaktadır. Bu zihinsel becerilerin kullanılabilmesi, diğer bir ifadeyle diyagramları kullanma yeteneği matematiksel düşünce ve problem çözmede güçlü bir araçtır (Pantziara vd., 2009).

- Görsel bir gösterim, başka bir gösterimle gösterilen bilginin aynısını temsil edebilir. Hatta resimsel gösterimlerin kullanımı daha basit kullanım ve daha direkt çıkarım süreci ile sonuçlanabilir (Larkin ve Simon, 1987). Buradan görsel gösterimlerin bu özelliğinin matematikte anlama sürecini kolaylaştırma açısından kullanışlı olduğu sonucuna varılabilir. Nitekim Farmaki ve Paschos (2007) tarafından görselleştirmenin, matematiksel bir nesnenin tüm yapısını anlamayı sağlayan ilişkilerin organizasyonuna ait bütün bir kavramayı kısa yoldan çabucak verebileceği iddiası varılan sonucu destekler görünmektedir.
- Matematiksel yapıların görselleştirilmesi insan zihnini daha önce bulunmadığı yerlere götürür ve daha önce görülmemiş bir gerçeğin imajını aklın gözüne gösterir (Borwein ve Jorgenson, 2001). Görselleştirmenin insan zihnine sağladığı bu fırsat onun matematikteki öneminin güçlü dayanaklarından biri olarak sayılabilir.

Pek çok bilimsel araştırma alanında kullanılan görselleştirmenin araştırma açısından matematiksel boyutu önemlidir. Bununla birlikte görselleştirme terimi matematik bağlamında biraz belirsizdir ve onun yan anlamları açık olmayabilmektedir. Ayrıca matematikte kullanılan görselleştirme ile psikolojide ve günlük konuşmada ortak kullanılan görselleştirme birbirinden farklıdır. Görselleştirmenin anlamı bu alanlarda, onun temel anlamı olan “zihinsel bir imaj oluşturma” ya daha yakındır. Örneğin, zihinsel imajları beceriyle kullanmak ve şekillendirmek için şahsın yeteneğine odaklanan psikolojik çalışmalar vardır. Bu çalışmalarda, sorulara cevap vermek için bilgisayar şöyle dursun kalem ve kâğıdın kullanılması bile söz konusu değildir. Matematiksel görselleştirme açısından, kalem ve kâğıt yardımı olmadan imajları zihinsel olarak beceriyle kullanmaya kısıtlamak yapay görünmektedir. Gerçekte matematiksel görselleştirmede ilgilenilen şey tam olarak öğrencinin uygun bir diyagram çizme (kalemle ve kâğıtla veya bazı durumlarda bilgisayarla), matematiksel bir kavramı

veya problemi gösterme, anlamayı gerçekleştirmek için ve problem çözmede bir yardımcı olarak diyagramı kullanma yeteneğidir. Matematikte, görselleştirme kendisinin bir sonu değildir, fakat anlamak olan sonun bir aracıdır. Bir diyagramı görselleştirmek sadece diyagramın zihinsel bir imajı oluşturma anlamına gelir, fakat bir problemi görselleştirme diyagram veya görsel imaj açısından problemi anlama anlamına gelir. Matematiksel görselleştirme imajlar oluşturma ve bu imajları matematiksel keşif ve anlama için etkili bir şekilde kullanma sürecidir (Zimmerman ve Cunningham, 1991). Benzer şekilde Gutiérrez (1996) matematikteki görselleştirmeyi problemleri çözmek veya özellikleri ispatlamak için, zihinsel veya fiziksel ya da görsel veya uzamsal unsurların temelinde akıl yürütme çeşidi olarak düşünmektedir.

Resimler düşünmeyi geliştirebilir, çünkü görüntü, gerçek diyagramlara yönlendirildiğinde, genellikle mantık kurallarının kullanımından çıkarımları çıkarmak için daha basit olarak kullanılabilen işlemler getirir (Pylyshyn, 2003). Bu olumlu sonuçlar ile birlikte matematik alanındaki görselleştirmeye dair yanlış anlaşılmalara da ortaya çıkabilmektedir. Nitekim Zimmerman ve Cunningham (1991) matematiksel görselleştirmedeki olası yanlış anlaşılmaya dikkat çekmekte, onun “resimler vasıtasıyla matematiği anlama” olmadığını belirtmektedirler. Onlara göre matematiksel görselleştirmenin aradığı sezi, sezinin belirsiz bir çeşidi, anlama için gelişigüzel bir temsilci değil, aksine düşüncenin kalbine işleyen sezi çeşididir. Bu anlamaya derinlik ve anlam verir, problem çözmek için güvenilir bir rehber olarak hizmet eder ve yaratıcı keşiflere ilham verir. Bu çeşit anlamayı gerçekleştirmek için görselleştirme, matematiğin kalan kısmından soyutlanmamalıdır. Görsel düşünme ve grafiksel gösterimler, matematiksel düşünmenin diğer yöntemleriyle ve gösterimin diğer biçimleriyle ilişkilendirilmelidir. Kişi fikirlerin sembolik, sayısal ve grafiksel olarak nasıl gösterilebileceğini öğrenmelidir ve bu yöntemler arasında ileri geri hareket edebilmelidir. Kişi belirli bir problem için en uygun yaklaşımı seçme yeteneğini geliştirmelidir ve matematik dilinin bu üç diyalektinin sınırlarını anlamalıdır.

Görselleştirmenin matematikçilerin çalışmalarında anahtar bir rol oynadığı uzun zamandır kabul edilmektedir (Noss vd., 1997). Bu anahtar rolün nasıl olduğuna dair farklı görüşler bulunmaktadır. Bu farklı görüşlerden birincisi matematikte görselleştirmenin yardımcı bir role sahip olabileceğini bundan daha fazlasının mümkün olamayacağını savunanlardır (Alshwaikh, 2007; Borba ve Villarreal, 2005; Gagatsis ve Elia, 2004; Morgan, 2001; Noss vd., 1997; Pantziara vd., 2009; Stylianou ve Silver,

2004). Araştırmacıların bu fikirde olmasının kendilerine göre belirli nedenleri bulunmaktadır. Öncelikle görselleştirme bir teorem veya onun ispatının esin kaynağı olarak kullanılmaktadır yani ispatın keşifsel bileşenidir (Borba ve Villarreal, 2005). Görselleştirme matematikçiye ilham verme noktasında yardımcı olabilmekte bu noktada görselleştirme biraz kişiye bağlı kalıyor gözükmektedir. Görsel gösterimler problem çözmeyi kolaylaştırmaktadır ama bu durum her zaman olmamaktadır (Stylianou ve Silver, 2004). Buradan görsel gösterimlerin bir yere kadar yardımcı olduğu söylenebilir. Bunların yanında görselleştirme ve matematiğin algılanma biçimi arasında önemli farklılıklar bulunmaktadır. Matematik soyut, biçimsel, kişisel olmayan ve sembolik olarak algılanmaktadır (Morgan, 2001). Oysa görselleştirme araştırmacının kendisi için önemli ve motive edici olsa bile bilgiyi göstermede sınırlı, matematiğin tersine, biçimsel olmayan ve kişisel bir yapıdadır (Alshwaikh, 2007). Matematik ve görselleştirme arasındaki rol ayrılığı onlara verilen değeri de etkileyebilmektedir. Matematiksel çalışma ürünlerine sonuçların nasıl elde edildiği sürecinden daha çok önem verilmektedir. Sonuç olarak sembolik gösterimler daha yüksek itibar görmektedir (Noss vd., 1997). İkincisi matematikte görselleştirmenin diğer yöntemlerden bir farkı olmadığı görüşüdür. Elliott ve diğerleri (2000), araştırmacıların matematikte görselleştirmenin kavramsal anlamayı teşvik etmesi ve güçlendirmesi ile birlikte gösterim yönteminin diğer yöntemlerden daha önemli olmadığını söylemektedirler. Üçüncüsü matematikte görselleştirmenin önemli olduğu, merkezde olması gerektiği görüşüdür (Alcock ve Simpson, 2004; Borba ve Villarreal, 2005; Pylyshyn, 2003). Matematikte görselleştirmenin yardımcı role sahip olması görüşünü savunanların gerekçeleri olduğu gibi, merkezde olması gerektiği görüşünü savunanların da gerekçeleri vardır. Bu gerekçelerden biri matematiğin her zaman görselleştirme olmadan yapılamayacağı görüşüdür. Pylyshyn (2003) matematikte bazı konularda (düzlem geometri) şekil çizmeden bir teoremi ispatlamayı hayal etmenin zor olmasından bahsetmektedir. Diğer bir gerekçe görselleştirmenin matematikte yapılabilecek yanlışlıkları da aza indirebilme durumudur. Önermeye dayalı akıl yürütmede yanlış ispatlar ve hatalı çıkarımlar oluşturulabilmektedir. Buna karşılık görsel gösterimlerin çeşitli biçimleri kullanılarak geçerli ispatları elde etmek mümkündür (Borba ve Villarreal, 2005). Son gerekçe ise Alcock ve Simpson (2004) tarafından görselleştirmenin Borba ve Villeral (2005) gibi matematiğin parçası olarak gördükleri görüşüdür. Onlara göre matematikte görselleştirmeden sadece açıklayıcı amaçlar için değil, matematik yapmada ve matematiği öğrenmede akıl yürütmenin anahtar bileşeni olarak kullanılabilir.

Matematikte görselleştirmeye biçilen farklı rollerin yanında matematikçilerin görselleştirmeyi nasıl kullandıkları ya da nasıl kullanmaları gerektiği konusunda da iddialar bulunmaktadır. Örneğin, George Pólya (1945) matematiksel düşünme ve problem çözmede görsel bakış açılarının öneminden bahsederken tecrübesine dayalı olarak, başarılı problem çözme için keşifsel öneriler listesi derlemiştir. Keşifsel öneriler listesinin öne çıkanı Polya tarafından güzel bir tavsiye olarak görülen şekil çizmektir. Bununla birlikte bazı matematikçiler bütün matematik görevlerinin görsel akıl yürütmeyi gerektirdiğini iddia etmişlerdir (Lean ve Clements, 1981). Halmos (1987) bu iddiayı daha da ileri götürmüş, matematikte bilge olmak için, görselleştirme yeteneği ile birlikte doğulması gerektiğini ifade etmiştir. Borwein ve Jorgenson (2001) ise matematik yapmada görselleştirmeyi yardımcı olarak görmüş, görselleştirmenin matematikçinin konusunu kafasında canlandırmasına, yazılım ve donanım yardımıyla çalışmasının parçası olan nesneleri ve özellikleri görmesine yönelik doğal kapasitesini artırdığına işaret etmiştir.

Matematikte profesyonel olmayan kişiler için, matematikçilerin düşüncelerini gördüğü fikri şaşırtıcı olabilir. Ama bu fikri savunan matematikçiler de vardır. Hadamard (1945) problem çözme sürecinde çoğu matematikçinin yalnızca kelimeleri kullanmaktan değil cebirsel veya diğer sembolleri kullanmaktan kaçındıklarını, bunun yerine geometriksel ve diğer imajları, görsel akıl yürütmeyi kullandıklarını ve ardından elde ettikleri çözümleri sembolik terim olarak kodladıklarını iddia etmektedir. Albert Einstein, Jacques Hadamard'a olan mektubunda herhangi bir şeyi genellikle zihinsel resimler açısından düşündüğünü, kelimeleri yalnızca ikinci bir yetenek olarak kullandığını ifade etmiştir (Lean ve Clements, 1981).

Önceden de bahsedildiği gibi, profesyonel matematikçilerin matematiksel aktivitesinde görselleştirmenin önemi ve rolüne dair pek çok kişisel anlatılara dayalı açıklamalar bulunmaktadır. Böylece, matematiksel başarı ve görselleştirme arasındaki ilişki açıkça görülmektedir. Bununla birlikte, araştırmalar ilişkinin gerçekte çok açık olmadığını veya en azından ilişkinin doğası hakkında daha fazla açıklığa ihtiyaç duyulabileceğini iddia etmektedirler (Stylianou ve Silver, 2004). Bu araştırmada da MÖA'larının görselleştirmeyi nasıl kullandıklarını incelenerek bu alandaki ihtiyaca biraz olsun katkıda bulunmaya çalışılacaktır.

2.4. Matematik Tarihinde Görselleştirme

Bu başlık altında görselleştirmenin geçmişten günümüze matematikte nasıl bir süreçten geçtiğinden bahsedilecektir. Bugün matematikte görselleştirmeye yüklenen bir rol olduğu gibi, geçmişte de görselleştirmenin matematikte üstlendiği rol vardır. Aslında görselleştirme yeni bir buluş değildir. Rival (1987), Stylianou ve Silver (2004) görsel gösterimlerin matematiğin kendisi kadar eski olduğunu ifade etmektedirler. Rival (1987) geçmişte geometri ve bir süre matematiğin diğer branşlarının da ağırlıklı olarak resimlere dayandığından bahsetmektedir. Hatta bununla ilgili çarpıcı bir örnek vermekte, Isaac Newton'un temel teoremleri gerçekte ispatlamadığını, Newton'dan temel teoremleri ispat etmesi istenirse sunacağı ispatın inandırıcı olmasıyla birlikte, hafif ve ağırlıklı olarak resimlere dayanacağını iddia etmektedir.

Borwein ve Jorgenson (2001) görsele dayalı pek çok kayda değer gelişmenin matematik tarihine damgasını vurduğunu ifade eder. Matematik tarihine bakıldığında görsel gösterimlerin kullanımı Mezopotamya ve klasik Yunanistan'da matematiğin ilk gelişiminin olduğu yüzyıllara dayanabilir. Örneğin, *Euclid's Elements* adlı kitapta gösterilen soyut ispatlar ağırlıklı olarak diyagramların kullanımına dayanır. Görsel gösterimlerin bu kullanımı matematikte kabul edilebilir bir uygulama olarak on sekizinci yüzyılda da sürmüştür. Görsel gösterimlerin kullanımı, on dokuzuncu yüzyılda birkaç durumda matematiksel kanıtlamada yanlış ispatların yapılması sonucu gözden düşmüştür. Geometride en çok bilinen örnekler, Öklidyen olmayan geometrinin keşfiyle birlikte, özellikle sezgisel olmayan hiperbolik geometri, Öklid'in kullandığı sezgisel ve görsel ispatın sorgulanmasına neden olmuştur. Sonuç olarak matematikçiler genellikle görsel ispatlardan uzaklaşmışlar ve biçimsel matematiksel akıl yürütmenin mantıksal temeli yirminci yüzyılda ciddi itirazlarla karşılaşması gerçeğine rağmen yerine şu an matematikte egemen olan akıl yürütmenin sembolik modeli için güçlü bir tercih oluşturmuşlardır. Yirminci yüzyılın sonuna doğru, matematiksel akıl yürütmenin aracı olarak görsel gösterimlere dair ilgi yeniden başlamıştır. Görsel gösterimlerin itibarının yenilenmesinin ve görsel gösterimlere olan yoğun ilginin görünen birkaç sebebi vardır. Sebeplerden biri kesinlikle bilişsel devrimdir. Bu bakış açısının problem çözme ve karmaşık performans üzerinde büyümesi görselleştirmeyi unutulmaktan kurtarmıştır. İkinci sebep hem matematik öğrencilerine hem de matematik ile uğraşan profesyonellere bilgisayarların kolayca üretilen görsel gösterimler sunarak bu görsel

gösterimlerden daha önce görülmemiş bir faydalanma imkânı vermesi ve aynı zamanda bilgisayarların hemen hemen her yerde bulunmasıdır. Bundan başka, teknolojinin pek çok durumda bir ölçüde hassasiyete izin verebilmesi ve matematiksel ispat ve problem çözme için araçlar olarak imajların kullanımını engelleyen sınırlılıkların çoğunun üstesinden gelen grafiklerin inşasını detaylandırabilmesidir. Üçüncü bir faktör görsel gösterimlerde yenilenen ilgi öğrenme ve öğretmede oynayabilecekleri rollerin itibarını artırmaktadır (Stylianou ve Silver, 2004).

İçinde bulunduğumuz yirmi birinci yüzyılın geçtiğimiz son on yılında görsel gösterimler geleneksel ispat için temsilciler olarak ciddi bir şekilde düşünölmeye başlamıştır. Bununla birlikte, bugün hala ispatta görsel gösterimlerin rolü hakkında pek çok tartışma bulunmakta ve araştırmacıların çoğu aktif olarak meseleyi takip etmektedirler. Araştırmacılar görsel gösterimlerin pozisyonu hakkında fikir açısından geniş bir alana yayılmışlardır. Bu konuda bir en uç nokta görsel gösterimlerin hiçbir zaman ispata yardımcı olmaktan daha kullanışlı olamayacağı genelde matematiksel anlamayı kolaylaştırdığından dolayı onların geleneksel rolünün bir parçası olduğunu söyleyenlerdir. Diğer uç nokta geleneksel ispatı faydasız olarak ifade ederek bazı görsel gösterimlerin ispatlar ve ispatların kendilerini oluşturabileceğı olduğunu iddia edenlerdir (Hanna ve Sidoli, 2007).

2.5. Matematik Eğitimi ve Görselleştirme

Anlama matematik eğitiminin her zaman esas konusu olmuştur (Fennema ve Romberg, 1999) ve anlamanın sağlanabilmesi için de matematiksel keşfin iyi yapılması gerekmektedir (Tappenden, 2005). Goethe öğrencilerin neyi anladığı ya da bildiğı konusunda “Gördüğümüzü bilmiyoruz, bildiğimizi görüyoruz” demiştir. Son kısmı “Bildiğimizi görüyoruz” öğretmenlerin ve araştırmacıların yaptıklarını öğrencilerin tam olarak göremediğı çoğu duruma uymaktadır (Arcavi, 2003). Matematik eğitiminde anlatılmak istenen ile anlaşılan arasındaki farkı azaltmak amacıyla yöntem çeşitliliğini artırmak bu kapsamda matematik eğitiminde görselleştirmeden faydalanmak yarar sağlayabilir.

İspat, öğrencilerin matematiğı öğrenmesinde, bilgilerini inşa etmelerinde gerekli bir bakış açısı ve matematiksel akıl yürütme için kapasitelerinin geliştirilmesinde

önemli bir süreçtir (Herbst, 2002). Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programında (2011) ispat yöntemlerini kullanarak ispat yapabilme yer alan kazanımlar içerisinde bulunmaktadır. Ayrıca matematiksel akıl yürütme öğrencilerde geliştirilmesi beklenen beceriler arasında yer almakta programda buna önem verilmektedir. Buna ek olarak, National Council of Teachers of Mathematics (2000) akıl yürütme, kanıtlama ve matematiksel ispatın tüm matematik sınıflarıyla bütünleştirilmesi gerektiğine Hanna ve Barbeau (2008) matematiksel elemanların stratejiler ve metotlar gibi önemli öğelerini öğrencilere aktarma olasılığından dolayı ispatlara orta ve lise seviyesindeki sınıflarda önemli bir rol verilebileceğine işaret etmektedir. İspatın matematik eğitimindeki rolü bu kadar önemli iken, öğrencilerin gözünde fazla bir değeri olmayabilmektedir. Beck ve Geoghegan (2010) bazen öğrencilerden matematiği sevdiklerini, fakat ispatları sevmediklerini duyduklarını, bunun sebebinin ise ispatın, bir ifadenin niçin doğru olduğunun açıklamasından daha fazla bir şey olmadığını farkına henüz varmadıklarından kaynaklandığını ifade etmektedirler.

Matematikte önemli bir yeri olan fakat öğrenciler tarafından fazla da sevilme-yebilen ispatın daha iyi öğretilmesi amacıyla çeşitli yollar denenmiştir. Yang ve Lin (2008) ortaöğretim matematik derslerinde ispatı öğrenmek ve ispatlamak amacıyla dinleme, konuşma, yazma ve yapmayı içeren çeşitli yaklaşımlar tasarlama-larına rağmen, bu aktiviteler öğrenciler ve öğretmenler tarafından uygulandığında sınırlılıklarının görüldüğünden bahsetmektedirler. Araştırmalar matematiksel olarak yaratıcı ve yetenekli öğrencilerin gelişmesinin yalnızca hesapsal ve mantıksal problem çözme yeteneklerine geleneksel odaklanmayı değil, gelişme sürecinin tüm aşamalarında sezgisel beceriler ve görsel imajla ilişkili gelişmeyi içerdiğini iddia etmektedirler (Campbell, Collis ve Watson, 1995). Sonuç olarak matematik ve matematik eğitiminde görselleştirmenin gerekli bir yol olarak karşımıza çıktığı gözük-mektedir. Burada matematik eğitiminde görselleştirmeden hangi açıdan yararlanılabileceği sorusu akla gelebilir. Görselleştirme bir amacı açıklayabilme, akıl yürütme, problem çözme hatta ispat için de kullanılabilir (Arcavi, 2003). Görselleştirmenin matematik eğitimi açısından önemi sadece bu söylenenlerle sınırlı değildir. Matematiksel ispatları inşa etme ve anlamının öğrencilerde düşük seviyede olması (Recio ve Godino, 2001) sorunu ve özellikle bilgisayar teknolojisinin ilerlemesinin görsel gösterimlerin geniş bir çeşitlilikte olmasına izin vermesi

(Nemirovsky ve Noble, 1997) gibi bir kolaylığın bulunması da görselleştirmeyi matematik eğitiminde gündeme getiriyor olabilir.

Literatür taraması yapıldığında araştırmacıların matematik eğitiminde görselleştirmenin sağladığı olanaklara değindikleri görülmüştür. Bunlardan biri Corter ve Zahner (2007) tarafından söylenen dış görsel gösterimlerin örneğin hafızaya yardımcı olmak gibi belirli şekillerde bilişsel kapasiteleri artırmaya yardımcı olduğu görüşüdür. Bu ifade Tversky (2001) tarafından da desteklenmektedir. Tversky (2001) dış diyagramların ve görsel araçların hafızayı desteklediğini söylemekte bunlara ek olarak dikkat çekmeyi, bilgiyi kaydetmeyi, iletişimi, model sağlamayı, çıkarımı ve keşfi kolaylaştırdığını iddia etmektedir. Bunların yanında görselleştirmenin problem çözmede yardımcı olduğu görüşünü savunanlar da vardır. Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programının temel öğeleri içerisindeki becerilerden biri problem çözmedir ve bu becerinin kazandırılmasına önem verilmektedir. Bu noktada görselleştirmenin öğrencilere problem çözme becerisinin kazandırılmasında fayda sağlayabileceği iddia edilebilir. Bu görüşlere göre bir diyagram bir problemin yapısını göstermek için hizmet edebilir (Booth ve Thomas, 2000). Problemin yapısını anlamının yanında dış görsel gösterimlerin kullanımı problem çözücülere verilen problem durumunun zihinsel bir modelini inşa etmelerinde yardım edebilir (Schwartz ve Black, 1996). Görselleştirmenin sağladığı iddia edilen tüm bu olanakların yanında Tappenden (2005) görselleştirmenin matematik öğrenimini ve öğretimini kolaylaştırmak gibi önemli bir amaca hizmet ettiğinden bahsetmektedir. Ayrıca Tappenden (2005) tarafından görsel gösterimlerin bilgiyi sistematik olarak özellikle çarpıcı ve etkili yollarla aktarıldığı, en önemlisi grafik yaklaşımının işleri kolaylaştırmak gibi gizemli fakat önemli teoriksel amaca sahip olduğu iddia edilmektedir.

Sonuç olarak matematik öğretimi ve öğreniminde bulunan sorunların üstesinde gelmede görselleştirmenin fayda sağlayacağı bu yüzden görselleştirmenin kullanılmasının gerektiği düşünülebilir.

2.6. Matematik Eğitimi Tarihinde Görselleştirme

Tarihsel bir bakış açısından, öğrenme ve öğretimde resimsel bilginin kullanımı uzun bir geleneğe sahiptir (Schnotz, 2002). Fakat matematik eğitiminde görselleştirme

ile ilgili kayda değer çalışmalar bu kadar eski değildir. Matematik eğitiminde, görselleştirme ve uzamsal yetenek ile ilgili ilk önemli çalışmaları Bishop (1973) yapmıştır (Presmeg, 2006).

1980'li yıllarda önemli bir dönüm noktası olmuş, yapılandırmacılık davranışçılığın etkisine karşı atak yaparak yükselmiş ve nitel araştırma yöntemleri matematik eğitimindeki karmaşık soruların üzerine gitmede geçerli olarak kabul edilmeye başlamıştır. Matematik eğitiminde görselleştirme araştırmaları yavaş başlamış, 1970'li yılların sonunda 1980'li yılların başında artmaya başlamıştır. İlk çalışmalarda hem nitel hem de nicel yöntemler kullanılmıştır. Süreç durumu ile ilgili güçlükler ve zorluklar ilaveten bilişsel ve duyuşsal durumlar araştırılmıştır. 1990'lı yıllarda görselleştirme araştırması matematik eğitimi için önemli bir alan olarak kabul edilmeye başladığında, müfredatı geliştirme bakış açısını içeren bazı çalışmalar yapılmış ve özel içerik alanları araştırılmıştır (Presmeg, 2006).

2000'li yıllar işaret bilimine ait bakış açıları ve teoriler içeren görselleştirme üzerinde giderek büyüyen bir ilgi görmüştür. Matematik öğrenmede anlamlı el kol hareketlerinin kullanımı üzerine araştırmalar, matematiğin doğasını şekillendiren bakış açılarıyla ilişkili önemli bir rol almaya başlamıştır. Farklı ibareler arasındaki ilişkiler veya matematiksel kayıtlar önemli olarak kabul edilmiş ve daha fazla araştırma ihtiyacı hissedilmeye başlamıştır. Sonuç olarak, matematik eğitimindeki görselleştirmenin tüm alanını birleştirebilecek kapsayıcı teoremlere olan ihtiyaç fark edilmiş ve artan bir ilgiye ulaşmıştır (Presmeg, 2006).

2.7. Matematik, İspat ve Görsel İspat

Matematik genellikle sayı ve uzayın bilimi, aritmetik ve geometriye dayanan disiplin olarak tanımlanmaktadır. Matematik modellerin bilimidir. Matematikçi modelleri sayılarda, uzayda, fende, bilgisayarlarda ve hayal gücünde arar. Matematiksel teoriler modeller arasındaki ilişkileri açıklar; fonksiyonlar ve haritalar, operatörler ve morfizmalar kalıcı matematiksel yapılar üretmek için bir örneği diğerine bağlar. Matematiğin uygulamaları, bu modelleri açıklamak ve modellere uyan doğal fenomenleri tahmin etmek için kullanır. Modeller diğer modelleri, sıklıkla modellerin verimli modellerini önerirler (Steen, 1988).

Modellerden yola çıkan matematikte ispatlar yapılmakta ve bu ispatların sonucunda teoremler edilmektedir. Böylece matematik bilimi ilerleme göstermektedir. Matematiğin oluşmasını ve gelişmesini sağlayan ispatlama, mantıksal, kavramsal, toplumsal ve problem çözme boyutlarıyla birlikte karmaşık bir matematiksel aktivitedir (Weber, 2005), ve matematiksel ispat, verilen savlardan uygun önerileri çıkarma yeteneği, kanıtlama ve mantıksal düşünme yeteneği olan akıl yürütmenin bileşimidir. (Reiss, Heinze, Renkl ve Groß, 2008).

Matematik yaparken kullanılan ispatların rolü ve önemi hakkında matematikçiler ve matematik eğitimcileri çeşitli görüşlerde bulunmuşlardır. Recio ve Godino (2001) ispatın matematik cemiyeti tarafından katı ve kesin bir yol olarak görüldüğünü ve ispatın tek geçerli kavram olduğunu ifade etmektedirler. Matematik eğitimcilerine göre ispat matematiksel fikirlerin inşasıyla derinlemesine ilişkilidir, sonuç olarak ispat yapma; tanımlama, modelleme, gösterim veya problem çözme gibi öğrenciler için doğal bir aktivite olmalıdır (Herbst, 2002). Ayrıca ispat öğrenilirken ve öğretilirken doğru sonucun bulunmasına kısıtlanmamalı, ispatı yaparken zincirleme özelliğin farkında olunmalı ve ispatın yöntemsel bakış açısı vurgulanmalıdır (Reiss vd., 2008). Bu bakış açıları ile birlikte matematikçiler, felsefeciler ve matematik eğitimcileri ispatın matematiksel bir iddianın doğruluğunu ortaya koyma yolu dolaylı, onun matematiğin merkezi olduğu konusunda fikir birliği içinde bulunmaktadır (Hanna ve Barbeau, 2008).

İspat matematikte önemli bir yer tutmaktadır. Bununla birlikte ispatın nasıl olması gerektiği konusunda, örneğin ispatların sadece görsel gösterimlerden oluşması ya da görsel gösterimlerin sadece ispata yardımcı olması gibi, matematik dünyasında tartışmalar bulunmaktadır (Hanna ve Sidoli, 2007). Bilinen şu ki matematik diyagramlar, tablolar, semboller gibi gösterimlerin uzamsal düzenlemelerine ve esas bileşenler olarak diğer ibarelere sahip olan bir derstir (Presmeg, 2006). Ayrıca matematikçiler ve matematik eğitimcileri de görselleştirmenin matematikteki önemini vurgulamaktadırlar. Matematik dünyasında yer alan tartışmalar araştırma konusunun dışındadır. Bilinen ispatlardan farklı olarak bu çalışmada görsel ispatlar kullanılacaktır. Dolayısıyla görsel ispat derken neyin ifade edilmek istendiğini açıklamak yerinde olacaktır. Araştırmada kullanılan görsel ispatlar, diyagramlar ve grafiklere dayanan içerisinde çıkarımsal adımları içeren ispatlardır. Burada çıkarımlar sadece şekillerin okunması vasıtasıyla elde edilebilmektedir. Aslında ispatlar geometrik şekillere

dayanmaktadır. Görsel ispatları anlama veya üretme de şekilleri yapılandırmayı, işlemeyi (ayırma, ters yüz etme, üstüne koyma, dönüştürme) ve onlardan bilgi çıkarmayı içermektedir. Görsel ispatlar teoremin geçerlilik alanının özel bir değeri için geliştirilmiş olabilmektedir bununla birlikte alanın bütün değerleri için olan ispatı temsil etmektedir (Bardelle, 2010).

III. BÖLÜM

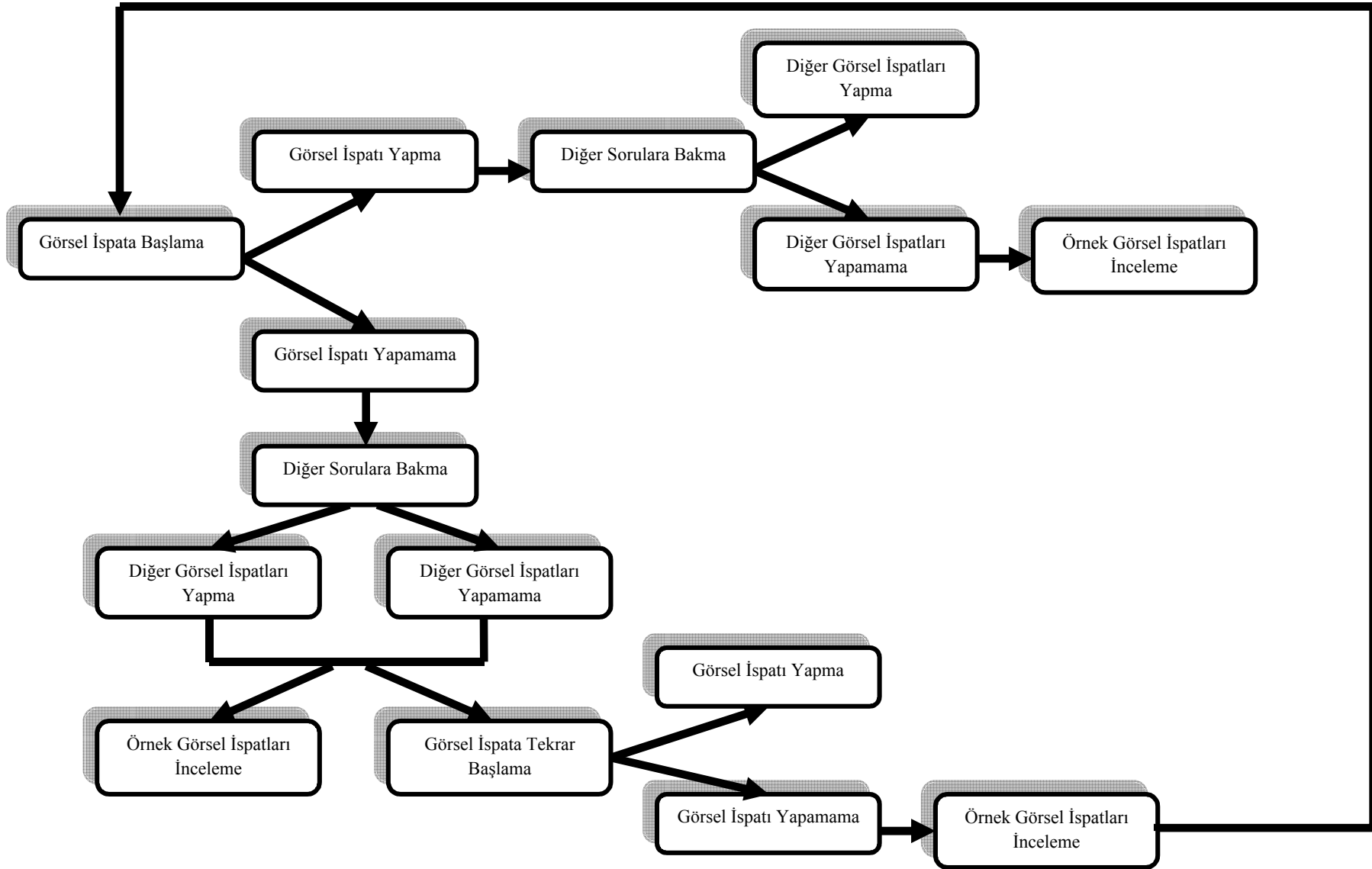
YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeli, araştırmanın katılımcıları, veri toplama teknikleri ve verilerin analizinden bahsedilecektir.

3.1. Araştırmanın Modeli

MÖA'larının görsel akıl yürütme durumlarının incelendiği bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden biri olan gömülü (grounded) teorisinin analiz teknikleri kullanılmıştır. Araştırmada veri toplama aracı olarak yazılı doküman incelenmesi yapılmıştır. Yazılı doküman olarak MÖA'larının çalışma kâğıtları üzerindeki çözümleri ve metin haline getirilen ses kayıtları incelenmiştir. Araştırma danışman öğretim üyesinin odasında iki oturumda gerçekleştirilmiştir. Çalışma sırasında MÖA'larından sesli olarak düşünceleri istenmiş ve MÖA'larından izin alınarak ses kayıt cihazı kullanılmıştır. MÖA'larının görsel akıl yürütme durumlarını daha iyi ortaya koyabilmek amacıyla bilgi kullandırılmamış, gerektiğinde tekrar yeni bir çalışma kâğıdı verilmiştir. Birinci oturumda katılımcılar görsel ispatları çözmeye çalışmış ve ispatlarla ilgili yapacak bir şeylerinin kalmadığını söylediklerinde birinci oturuma son verilmiş, incelemeleri için örnek görsel ispatlar verilmiştir. İkinci oturuma örnek görsel ispatları inceleyerek gelen MÖA'ları birinci oturumda yapamadıkları görsel ispatları tekrar çözmeye çalışmışlardır. Her iki oturumda da MÖA'larına istedikleri sorulara tekrar dönebilme imkânı verilmiş ve MÖA'larının soruları çözme sürecinde süre sınırlandırılması yapılmamıştır. Mümkün olduğunca MÖA'larının rahat edebilecekleri ve soruların çözümüne odaklanabilecekleri bir ortam oluşturulmaya çalışılmıştır. MÖA'ları ile yapılan çalışma süreci Şekil 3.1. deki gibidir.

Şekil 3.1. Çalışma Süreci Adımları



Gömülü Teori

Gömülü teori aslen iki sosyolog Barney Glaser ve Anselm Strauss tarafından geliştirilmiştir. Gömülü teori terimini kullanmalarındaki amaçları teorinin, araştırma sürecinde sistematik olarak verinin toplanması ve analiz edilmesi sonucu ortaya çıkmasıdır. (Strauss ve Corbin, 1998). Diğer bir ifadeyle gömülü teoride, araştırmacı veri toplarken veya yorumlarken verilerin içine gömülü olan teoriyi ortaya çıkarabilir ve araştırma boyunca yeni kavram ve teorilere ulaşabilir (Turgut, 2009).

Gömülü teori yaklaşımında veri toplama yöntemi olarak görüşmeler ve gözlemler en çok kullanılanlardır. Bunların yanında doküman analizi de gerekli görülebilir. Bu yaklaşımın en önemli özelliklerinden biri veri toplama ile analizin birlikte yürütülmesidir. Glaser ve Strauss bu sürece "sürekli karşılaştırmalı analiz" adını vermişlerdir. Bu süreçte, veriler toplandıktan hemen sonra analiz edilir ve ortaya çıkan kavramlar, olgular ve süreçler daha sonraki veri toplama aşamalarına dâhil edilir. Böyle bir süreçte veri toplama aracı olarak görüşme ya da gözlem formu veri toplamanın ilk aşamasında yarı yapılandırılmış bir durumdadır ve veri toplama sürecinin sonuna kadar da son halini almaz. Hatta bazı araştırmalarda başta öngörülen görüşme soruları ile veri toplamanın sonuna doğru oluşturulan sorular arasında önemli farklar olabilir (Hancock, 2004).

Araştırmacı mikro analiz veya benzer yöntemlerle elde ettiği verileri işleyerek kodlamalar yapar. (Strauss ve Corbin, 1998). Buna göre gömülü teoride notlar üç farklı türde kodlanır.

Açık Kodlama: Verideki kavramların tanımlandığı ve onların özellikleriyle boyutlarının keşfedildiği analitik yöntemdir. Açık kodlama boyunca veriler bağımsız kısımlara ayrılır, yakından incelenerek benzerlikler ve farklılıklar açısından değerlendirilir. Yapı içindeki benzer olaylar, nesneler “kategoriler” olarak adlandırılan daha soyut kavramlar altında gruplandırılır (Strauss ve Corbin, 1998).

Eksensel Kodlama: Eksensel kodlama, kategorileri, onların özellik ve boyutları doğrultusunda alt kategorileri ile ilişkilendirme hareketidir. Kategorilerin nasıl ilişkilendiği ve birbirini kestiği ile ilgilenir. Eksensel kodlama sırasında analist, veri yap-bozunun parçalarını bir araya getirmeye başlar. Her bir parçanın (örneğin, kategori, alt kategorinin) bütünü açıklayıcı bir planda yeri vardır. Bir yapbozu oluştururken

analist, bir parçayı alıp, “Oraya mı yerleşmeli, buraya mı?” diye sorabilir. Analistin ilk teşebbüsleri deneme yanılmadır. Daha sonra analist teorik olarak daha duyarlı hale geldikçe, kavramsal belirleyicileri ve kategoriyi birbirine uydurmak kolaylaşır. Eksensel kodlamanın amacı, kategoriler arasında bağlantı kurmak ve kategorileri özellikleri ve boyutları açısından geliştirmeye devam etmektir (Strauss ve Corbin,1998).

Seçici Kodlama: Seçici kodlama, analizdeki son aşamayı temsil eder, bu da kavramların temel-ana bir kategori çevresinde bütünleşmesi ve daha fazla gelişim ve düzeltme-arıtma inceltme ihtiyacı içinde olan kategorilerin doldurulmasıdır. Bu aşamada, kısa not ve şemalar, geliştirilen teori düşüncesinin derinliğini ve karmaşıklığını yansıtır (Strauss ve Corbin,1998).

3.2. Araştırmanın Katılımcıları

Araştırmanın pilot ve asıl uygulamasında farklı katılımcılar yer almıştır. Her iki uygulama 2010-2011 eğitim öğretim yılında Ankara’da bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalında öğrenim gören kız MÖA’ları ile yürütülmüştür. Pilot çalışma iki, asıl çalışma üç MÖA ile yapılmıştır.

Araştırmada katılımcılar matematik derslerinde aktif ve araştırmaya katılmada gönüllü olmaları sebebiyle danışman öğretim üyesi tarafından seçilmiştir. Bu iki durumun göz önünde bulundurulmasındaki amaç daha kaliteli veri elde edilmesini sağlayabilmektir. Araştırmaya katılanların tümünün kız MÖA olmasının sebebi, pilot ve asıl çalışmada gönüllü erkek MÖA bulunamamasıdır.

3.3. Verileri Toplama Teknikleri

Öncelikle *Proofs Without Words* kitabından pilot çalışma için danışman öğretim üyesi ile birlikte iki görsel ispatı ispatlama ve bir görsel ispatı yorumlama sorusu MÖA’larına sorulmak üzere belirlenmiştir. Pilot çalışmadan elde edilen deneyimler doğrultusunda danışman öğretim üyesi ile birlikte üç görsel ispatı ispatlama ve bir görsel ispatı yorumlama sorusu seçilmiştir. Görsel ispatı ispatlama soruları Pisagor

teoremi, geometrik seri ve trigonometrik dönüşümlerle ilgilidir. Görsel ispatı yorumlama sorusu ise özdeşliklerin eşitliği ile ilgilidir. Görsel ispat sorularından trigonometrik dönüşümlerle ilgili olanı kitapta olan hali gibi alınmamış bazı bilgiler çıkarılmıştır. Görsel ispatın kitapta olan hali ise MÖA'larının soruyu çözemedikleri durumlar için ipucu olarak kullanılmıştır. Görsel ispatlardan sadece geometrik serilerle ilgili olan ispat hem pilot hem de asıl uygulamada kullanılmıştır.

Çalışma boyunca MÖA'larından sesli düşünceleri istenmiş, uzun süre sessiz kaldıkları zamanlarda ne düşündükleri sorulmuştur. Araştırmada veri toplamak için yazılı doküman incelemesinden yararlanılmıştır. MÖA'larının çözüm sırasındaki metin haline getirilen ses kayıtları ve çalışma kâğıtları üzerindeki çözümleri incelenmiştir.

3.4. Verilerin Analizi

MÖA'larının çözüm sırasındaki ses kayıtlarının yazıya dökülmesi ve çalışma kâğıtları üzerindeki çözümleri ile elde edilen verilerin analizi için gömülü teorinin analiz teknikleri seçilmiştir. İlk olarak her bir MÖA'nın çözüm sırasındaki metin haline getirilen ses kayıtları çalışma kâğıtları üzerindeki çözümleri ile birlikte incelenmiştir. Bu sırada kavram etiketlemeleri yapılmış ve MÖA'larının çözümleri ile ilgili notlar düşülmüştür. Açık kodlama süreci takip edilmiştir. Bu süreç içerisinde kategoriler ve onların özellikleri oluşturulmaya ve boyutlara göre kategorilerin nasıl değiştiği ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Daha sonra her bir soru için MÖA'larının çözümleri farklı zamanlarda tekrar tekrar okunarak karşılaştırmalı olarak incelenerek eksensel kodlama ile kategori, alt kategori ve boyutlar sistematik olarak geliştirilmeye çalışılmıştır. Son olarak görsel ispatı ispatlama sorularının çözümleri kendi içinde, görsel ispatı yorumlama sorusu kendi içinde tekrar incelenmiş seçici kodlama süreci takip edilerek genel bir şema oluşturulmuştur. Gömülü teorinin içerisinde yer alan sürekli karşılaştırmalı analiz metodu ile farklı kişileri karşılaştırma, farklı zamanlarda aynı kişiden alınan verilerin karşılaştırılması, olayların karşılaştırılması, verinin kategorisiyle karşılaştırılması ve kategorilerin diğer kategorilerle karşılaştırılması yapılmaktadır (Turgut, 2009).

Araştırmanın geçerlik ve güvenilirliğini sağlamak için;

- Araştırmada veri kaynağı, katılımcıların çalıştığı ortam ve süreç, veri toplama ve analiz yöntemleri ayrıntılı biçimde açıklanmaya çalışılmıştır.
- Araştırmanın pilot ve asıl uygulamasında kullanılan sorular danışman öğretim üyesi ile birlikte seçilmiştir. Ayrıca pilot ve asıl uygulamada kullanılan soruların her biri bir matematikçiye sorulmuş ve onun soruları çözme süreci göz önüne alınarak soruların seçimi yeniden gözden geçirilmiştir.
- Araştırmacı gözlem, görüşme ve yazılı dokümanlar yoluyla elde ettiği verileri herhangi bir yorum katmadan okuyucuya sunmuş, doğrudan alıntılara yer verdikten sonra gömülü teorinin teknikleri kullanılarak kategoriler oluşturulmuş ve yorumlamıştır.

Aşağıda MÖA'larının çözümlerinin nasıl kodlandığını göstermek için seçilmiş bir örnek bulunmaktadır. Örnek; 47, 62 ve 77 sayfalarında yer alan görsel ispatların ispatlanma sürecinde şeklin algılanması ile ilgilidir.

2.MÖA: *Görev 1, yukarıdaki şekil Pisagor teoreminin görsel ispatını ifade etmektedir. Bu ispatı gösteriniz. Şimdi bunlara dair böyle bir özellik var mı? Mesela görsel olarak bir kare düşünebilirim (geometrik yapının temsili) ama sizin vereceğiniz bir şey var mı?*

Araştırmacı: *Yok, bu şekilde, kare zaten şekil... Yani şeklin özelliğiyle ilgili soruyorsan bu şekil kare...*

2.MÖA: *Tamam, demediğiniz için... Sonuçta "Nasıl garanti edebiliriz?" (geometrik yapının temsili) açısından düşündüm.*

2.MÖA: *Şu geometrik şekille şu şekiller aynı değil mi? (geometrik yapıların benzerliği)*

Araştırmacı: *Evet.*

1.MÖA: *Biz her üçgeni büyütüp, tek taraflı dik ayırıt seçip, orayı her seferinde topladığımızda $\frac{1}{1-r}$ ye ulaşabiliyormuşuz.(Şeklin taban uzunluğundan bahsediyor.)*

Kafama oturmayan yer r^i ile hareket ediyoruz ama paydada $1-r$ var. (geometrik

gösterimin matematiksel ifadesi) Ama sonuçta payda da $1-r$ olmazsa da bu gelen toplamla da $\frac{1}{1-r}$ ye ulaşamam.

1.MÖA: Burada r^3 e nasıl ulaşabilirim? $1-r$ yi bir şekilde yok edersem, nasıl gider?

Araştırmacı: Burada x_i mi bulmaya çalışmıştın?

1.MÖA: x_i bulduk. Ondan sonra şu toplamın $\frac{1}{1-r}$ ye ulaştığını da bulduk. Ama

kafama takılan şey şurada bulduğum x in r^i cinsinden değil, $\frac{r^i}{1-r}$ olmasıydı.

(geometrik gösterimin matematiksel ifadesi)

2.MÖA: Bu sorudan bu sonuç nasıl çıkar? Böyle tanjantlardan falan, toplam... Bölmeler var. Sonsuz tane bölme olacak. Tamam, güzel. $0 < r < 1$ olduğu için şu uzaklıkların böyle küçülmesi de mantıklı geliyor. ***(geometrik gösterimin temsili)*** İlk önce acaba dedim, şurayı görmemişim, fark etmemişim. Tamam, şu uzunluklar böyle toplamaları...

3.MÖA: İspatını göstereceğim. Hiçbir şey düşünemiyorum şu anda. Aslında böyle gidiyor değil mi? Sonsuza kadar? ***(geometrik gösterimin temsili)***

Araştırmacı: Evet.

3.MÖA: Şöyle gider mesela, sonsuza kadar gidiyor diye düşünürsek, ama her bir aralık r olacak nasıl böyle şunu sonsuza götürebiliyoruz hocam? ***(geometrik gösterimin temsili)***

2.MÖA: Şuradaki v şu uzunluk değil mi? u da şu dikdörtgenin mi uzunluğu? ***(geometrik gösterimin konumu)***

3.MÖA: u tamamı değil mi? ***(geometrik gösterimin konumu)***

Araştırmacı: Evet, tamamı, yani FC uzunluğu, v de FB uzunluğu.

3.MÖA: Şurası u mu diye düşünüyorum da şu anda.

Araştırmacı: FC nin tamamı u .

3.MÖA: *FC? öyle mi?*

Araştırmacı: *Evet, oranın tamamı u.*

3.MÖA: *Ben şurası u sanmıştım, onu buraya taşımayı düşünüyordum. (geometrik gösterimin konumu)*

Araştırmacı: *FC nin tamamı u, FB de v.*

1.MÖA: *Birim çemberin yarısı olduğu için buralar yarıçap. Buraya a dersem burası da a. θ buranın tamamı mı? (geometrik gösterimin konumu)*

Araştırmacı: *Evet.*

MÖA'larının çözümleri sırasındaki metin haline getirilen ses kayıtları kelime bazında analiz edilerek örnekte olduğu gibi kodlanmıştır. Oluşturulan bu kodlama listesindeki parçalar uygun kategoriye yerleştirilmiştir. Tablo 3.1. de kategori ve altındaki kodlar gösterilmiştir.

Tablo 3.1. Görsel İspatı İspatlama Sürecinde Şekli Algılama

Kategori	Şekli algılama	
	Geometrik yapı	Geometrik gösterim
Kodlar	• Temsil • Benzerlik	• Temsil • Matematiksel ifade • Konum

Görsel ispatın soru ve şekilden oluştuğu kabul edildiği ve yukarıdaki örneklerin MÖA'larının şekil ile ilgili algılama durumlarını yansıttığı göz önüne alınarak şekli algılama görsel ispatı algılama kategorisinin alt kategorisi olarak alınmıştır. MÖA'larının şekil ile ilgili algılama durumlarının geometrik şekiller (kare, üçgen v.b.) ve geometrik şekiller dışındaki gösterimler olarak iki biçimde ortaya çıktığı görülmüştür. Geometrik şekiller ile ilgili algılama durumları geometrik yapı, geometrik şekiller dışındaki gösterimler ile ilgili algılama durumları ise geometrik gösterim olarak

şekli algılama alt kategorisinin boyutlarını oluşturmuştur. MÖA'larının geometrik şeklin hangi şekil olduğuna karar verebilme ve geometrik şekiller arasında benzerlik ilişkisi kurma ile ilgili algılama durumlarının ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Bu durumda geometrik şeklin hangi şekil olduğuna karar verebilme temsil, geometrik şekiller arasında benzerlik ilişkisi kurma benzerlik olarak geometrik yapının alt boyutları biçiminde kodlanmıştır. Geometrik şekiller dışındaki gösterimler diğer bir ifadeyle geometrik gösterim boyutu ile ilgili olarak temsil, matematiksel ifade ve konum alt boyutları ortaya çıkmıştır. Temsil alt boyutu, geometrik yapı boyutundaki temsil alt boyutuna benzer olarak, şekilde geometrik olarak neyin ifade edildiğini algılamayı içerir. Matematiksel ifade alt boyutu geometrik gösterimin matematiksel ifadesini anlayabilmeyi ifade eder. Konum alt boyutu ise açı veya kenar uzunluklarına verilen adlandırmaları doğru olarak algılayabilmeyi, şekildeki adlandırmanın hangi açı veya kenar uzunluğuna ait olduğunu doğru olarak görebilmeyi temsil eder.

IV. BÖLÜM

BULGULAR VE YORUM

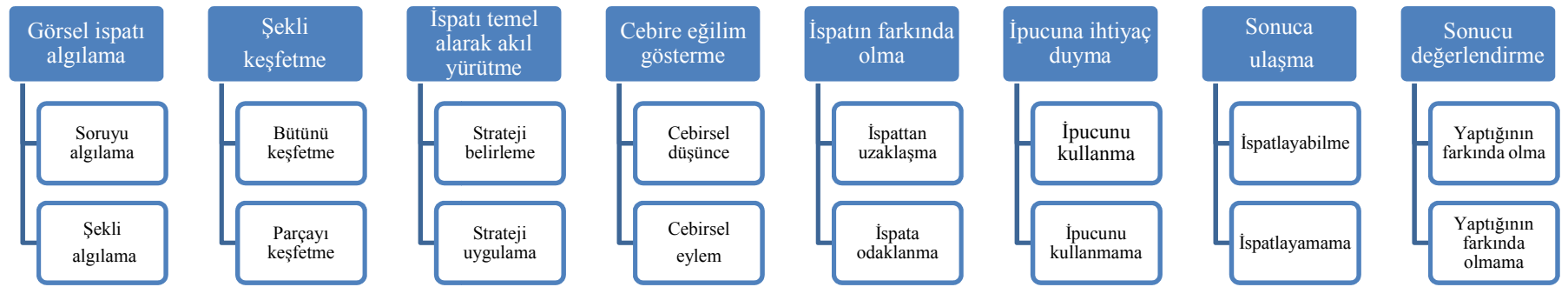
Bu bölümde MÖA'larının görsel akıl yürütmeyi nasıl kullandıklarını ortaya çıkarmayı amaçlayan çalışma kâğıtlarından elde edilen bulgular ve yorumlara yer verilecektir. İki bölümden oluşan bu bölümün birinci kısmında MÖA'larının görsel ispatları yapabilme, ikinci kısmında ise görsel ispatı yorumlama durumları incelenecektir. Her iki kısımda da MÖA'larının görsel ispatı ispatlama ve görsel ispatı yorumlama süreçleri ile ilgili ana ve alt kategoriler oluşturulacak, çalışma kâğıtları üzerindeki çözümleri ve çözme işlemi sırasındaki konuşmalarından alıntılarla deliller sağlanarak bulgular desteklenecektir.

4.1. MÖA'larının Görsel İspatları İspatlama Süreci

MÖA'larına Pisagor Teoremi, trigonometrik dönüşümler olarak adlandırılan

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

eşitlikleri ve geometrik seri denilen $0 < r < 1$ için $\sum_{i=0}^{+\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$ ifadesinin görsel ispatı sorulmuştur. Görsel ispatların nasıl çözüldüğü ve çözme işlemi sırasında görsel akıl yürütmenin nasıl kullanıldığına dair davranışlar gözlemlenmeye çalışılmıştır.



Şekil 4.1.1. MÖA'larının Görsel İspatları İspatlama Süreci

4.1.1. MÖA'larının Görsel İspatları İspatlama Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

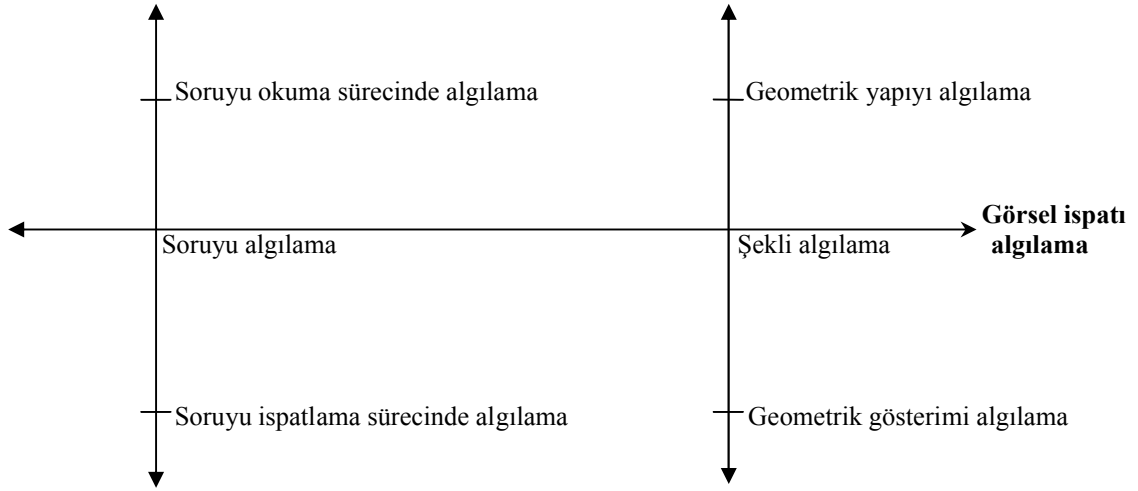
Görsel ispatı algılama: MÖA'larının ispatlama süreçlerinde hem soru hem de şekil ile ilgili algılama durumlarının ortaya çıktığı görülmüştür. Bu nedenle görsel ispat soru ve şekilden oluşan bir bütün olarak alınmış, görsel ispatı algılama kategorisi soruyu algılama ve şekli algılama olarak iki alt kategoride incelenmiştir.

Soruyu algılama, MÖA'larının soruda kendilerinden neyin istendiğini anlama durumlarını gösteren kategoridir. MÖA'larının soruyu algılama ile ilgili durumları soruyu okudukları sırada ya da görsel ispatı ispatlarken çıkabilmektedir. Bu nedenle soruyu algılama alt kategorisi soruyu okuma sürecinde algılama ve soruyu, ispatlama sürecinde algılama olmak üzere iki boyutta ele alınmıştır. Ayrıca görsel ispatta bulunan soru, açıklama cümlesi ve görev cümlesi olmak üzere ikiye ayrılmıştır. MÖA'larının soruyu algılama durumları incelenirken bu iki cümleye göre değerlendirilmiştir.

Şekli algılama, MÖA'larının görsel ispatta bulunan şekil ile ilgili algılama durumlarını ifade eder. Bu kategori geometrik yapıyı algılama ve geometrik gösterimi algılama olmak üzere iki boyutta ele alınmıştır. Geometrik yapıyı algılama görsel ispatta yer alan geometrik şekillerin (kare, üçgen v.b.) özelliklerini algılama ile ilgili durumları ifade eder. Temsil ve benzerlik olmak üzere iki alt boyutta ortaya çıkmıştır. Temsil, geometrik şeklin hangi şekil olduğuna karar verebilmeyi yansıtırken, benzerlik geometrik şekiller arasındaki benzerlik ilişkisini algılamayı yansıtır. Geometrik gösterimi algılama ise, geometrik şekiller dışındaki gösterimleri algılama durumlarını ifade eder. Temsil, matematiksel ifade ve konum olmak üzere üç alt boyutta ortaya çıkmıştır. Temsil, şekilde geometrik olarak neyin ifade edildiğini, matematiksel ifade geometrik gösterimin matematiksel ifadesini anlayabilmeyi, konum açı veya kenar uzunluklarına verilen adlandırmaları doğru olarak algılayabilmeyi, şekildeki adlandırmanın hangi açı veya kenar uzunluğuna ait olduğunu doğru olarak görebilmeyi temsil eder.

MÖA'larının algılamalarını daha iyi yansıtabilmek amacıyla görsel ispatı algılama kategorisinde ortaya çıkan boyutlarda sorunsuz süreç [SS], doğru anlama [DA], emin olamama [EO], anlayamama [A], yanlış anlama [YA] alt boyutları

alınmıştır. Sorunsuz süreç, bulunduğu boyuta dair herhangi bir belirtinin ortaya çıkmadığı durumlarda kullanılmıştır.



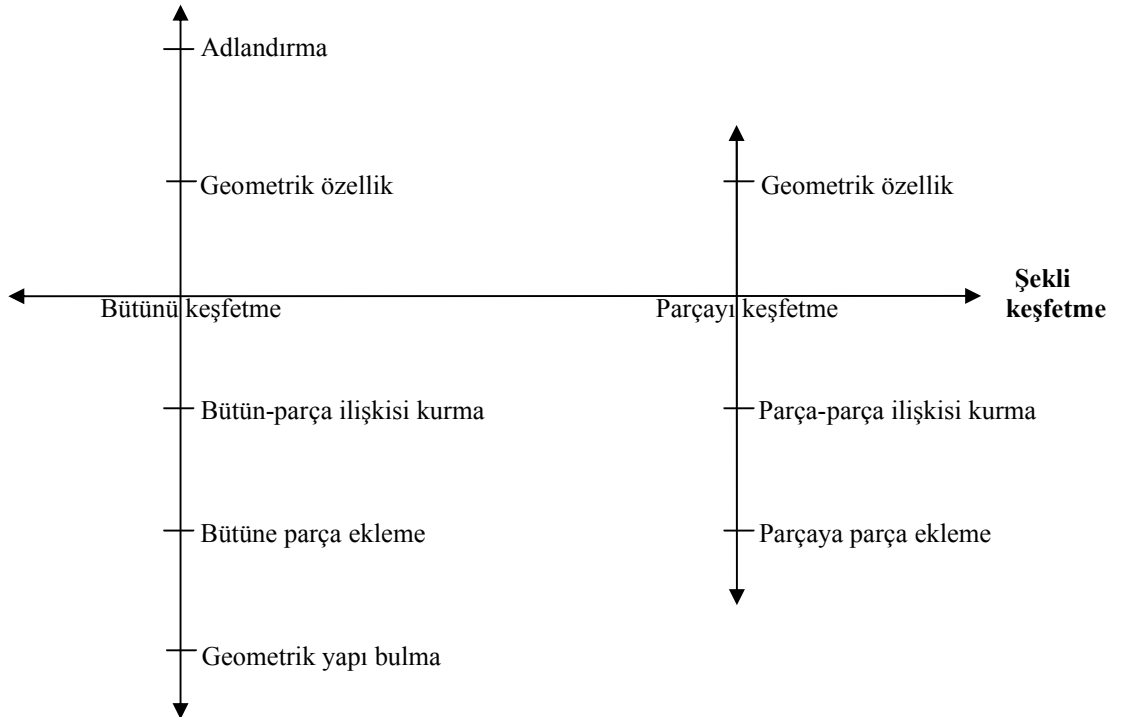
Şekil 4.1.2. Görsel İspatı Algılama Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

Şekli keşfetme: Görsel ispatta yer alan şeklin, şekillerin birleşmesiyle oluştuğu göz önüne alınarak şekli keşfetme kategorisi bütünü keşfetme ve parçayı keşfetme olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır.

Bütünü keşfetme, yapılan işlemlerin görsel ispattaki şeklin tamamına yönelik olduğu veya bilginin şekli oluşturan parçalar (şekiller) arasında bulunan ilişkiler ve parçaların özellikleri kullanılarak elde edildiği durumları temsil eder. Bütünü keşfetme; adlandırma, geometrik özellik, bütün-parça ilişkisi kurma, bütüne parça ekleme ve geometrik yapı bulma olmak üzere beş boyuta ayrılır. Adlandırma boyutu, kenar ve açı olmak üzere iki alt boyutta ortaya çıkmıştır; kenar ve açılar harflerle temsil edilmesidir. Geometrik özellik boyutu açı ve kenar uzunluğu olarak iki alt boyuttan oluşur. Bir şekle ait açı veya kenar uzunluğunun diğer şekillerdeki özellikler yardımıyla elde edilmesini ifade eder. Bütün-parça ilişkisi kurma, şeklin parçalarıyla şeklin tamamı arasında kurulan ilişkiyi temsil eder. Alan olmak üzere bir alt boyutu vardır. Bu alt boyut kurulan ilişkinin neye dayandırılarak kurulduğunu gösterir. Bütüne parça ekleme boyutu şekle birden fazla parça eklenmesi durumunu temsil eder. Geometrik yapı bulma boyutu ise şekildeki bir parçanın hangi geometrik yapı (ikizkenar üçgen, eşkenar üçgen, kare v.b.) olduğunun belirlenmesini ifade eder.

Parçayı keşfetme, verilerin sadece bir parçaya ait özelliklerden yararlanılarak elde edilmesidir. Parçayı keşfetme; geometrik özellik, parça-parça ilişkisi kurma ve parçaya parça ekleme olmak üzere üç boyuttan oluşmaktadır. Geometrik özellik boyutunun, bütünü keşfetme alt kategorisindeki geometrik özellikten farkı sadece şeklin kendisine ait bilgilerden yararlanılarak elde edilmesidir. Alan, açı, kenar uzunluğu ve trigonometri olmak üzere dört alt boyuta ayrılır. Trigonometri, açının trigonometrik değerinin hesaplanması anlamına gelir. Parça-parça ilişkisi kurma, iki parça arasındaki çeşitli bağlantılardan yararlanılarak diğer bir parçadaki bilinmeyen ortaya çıkarılmasıdır. Bu boyut da trigonometri ve benzerlik olmak üzere iki alt boyuttan oluşur. Bu alt boyutlar şekiller arasında kurulan ilişkinin neye dayandığını gösterir. Parçaya parça ekleme boyutu, şekle bir parça eklenerek yeni bir şekil elde edilmesi durumunu ifade eder.

MÖA'larının şekli keşfetmelerinde doğru veya yanlış yaptıklarını belirtmek amacıyla boyutlar için doğru [D] ve yanlış [Y] alt boyutları alınmıştır.

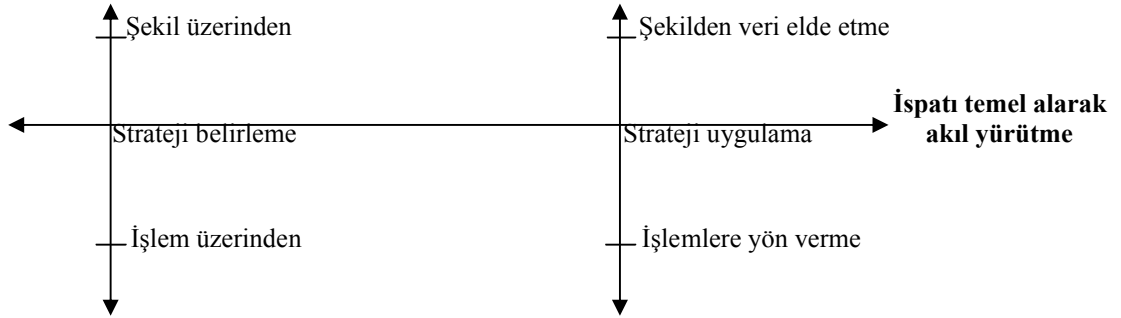


Şekil 4.1.3. Şekli Keşfetme Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

İspatı temel olarak akıl yürütme: MÖA'larının ispatı göz önüne alarak hareket ettikleri durumları içerir. Strateji belirleme ve strateji uygulama olmak üzere iki boyuta ayrılır.

Strateji belirme, MÖA'larının şekil veya işlem üzerinden ispata yönelik veri elde etmelerini sağlayacak düşüncelerini temsil eder. Şekil üzerinden ve işlem üzerinden olmak üzere alt boyuta ayrılır.

Strateji uygulama, MÖA'larının bilinçli olarak ya da planlayarak ispata yönelik şekilden veya işlemden sonuç elde etmelerini içerir. Şekilden veri elde etme ve işlemlere yön verme olarak iki alt boyuta ayrılır.

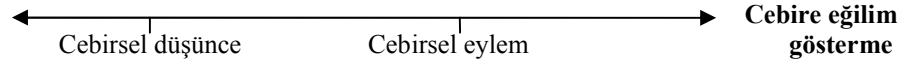


Şekil 4.1.4. İspatı Temel Alarak Akıl Yürütme Kategorisine Ait Boyut ve Alt Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

Cebire eğilim gösterme: MÖA'larının sonuçları şekilden elde yerine cebirsel işlemler yoluyla elde etmeye çalıştıkları durumları içerir. Cebire eğilim gösterme; cebirsel düşünce ve cebirsel eylem olmak üzere iki boyutta ele alınmıştır.

Cebirsel düşünce, MÖA'larının sonucun cebirsel yoldan çıkabileceğini düşündükleri boyuttur. Burada sadece düşünce söz konusudur.

Cebirsel eylem, MÖA'larının sonuca ulaşmak için cebirsel yolları kullandıkları durumları içerir. Burada yapılan bir işlem vardır.

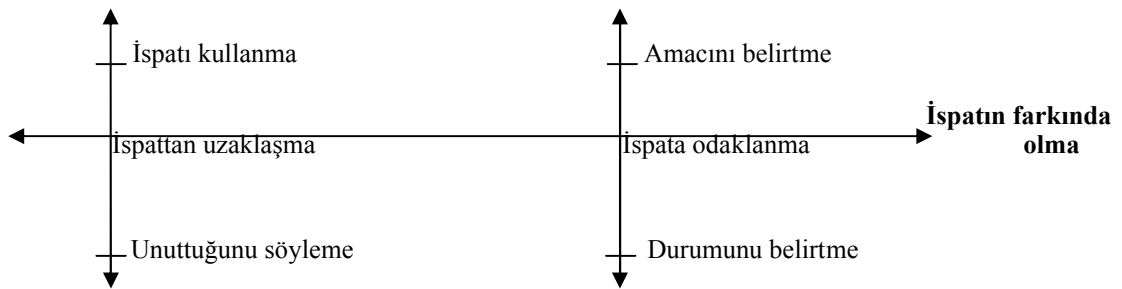


Şekil 4.1.5. Cebire Eğilim Gösterme Kategorisine Ait Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

İspatın farkında olma: MÖA'larının görsel ispatı ispatlama süreçlerinde yaptıkları ispatı göz ardı ettikleri veya göz önüne getirdikleri durumları temsil eder. İspattan uzaklaşma ve ispata odaklanma olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır.

İspattan uzaklaşma, MÖA'larının hangi ispatı yapacaklarını unuttukları durumları temsil eder. İspatı kullanma ve unuttuğunu söyleme olmak üzere iki boyuta ayrılır. İspatı kullanma, MÖA'larının ispatlaması gereken ispatı, ispat içerisinde kullanmasıdır. Unuttuğunu söyleme, MÖA'nın ispatla uğraşırken bizzat kendi ağzından hangi ispatı ispatlamaya çalıştığını unuttuğunu söylemesidir.

İspata odaklanma, MÖA'larının ispat üzerinde düşünmeye yöneldiği durumları içerir. Amacını belirtme ve durumunu belirtme olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Amacını belirtme, MÖA'nın ispatlaması gereken ispatın ne olduğunu çözüm sırasında ifade etmesidir. Durumunu belirtme ise ispatla ilgili neler yaptığını, hangi durumda olduğunu söylemesidir.

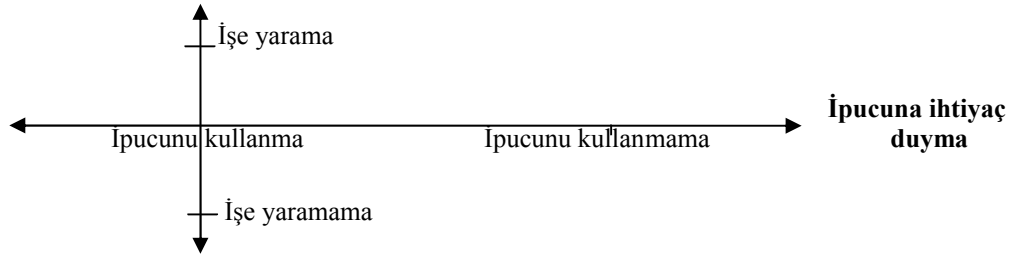


Şekil 4.1.6. İspatın Farkında Olma Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

İpucuna ihtiyaç duyma: Araştırmada kullanılan görsel ispatlar içerisinde sadece trigonometrik dönüşümler ile ilgili olan görsel ispat kitapta (Nelsen, 2001)

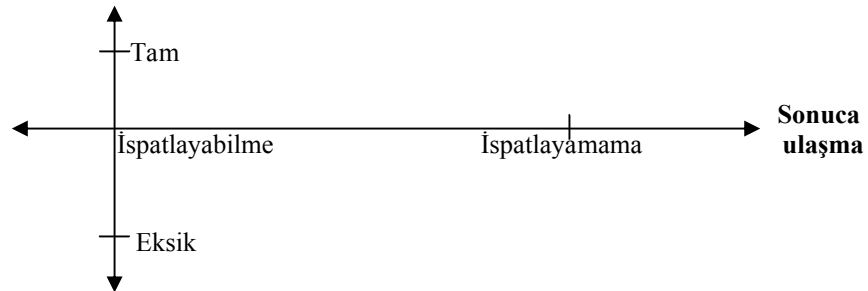
olduğu gibi alınmamış, görsel ispatta verilen bazı bilgiler kaldırılarak ispat biraz daha zorlaştırılmıştır. Görsel ispatın kitapta bulunan hali MÖA'larının görsel ispatı çözemedikleri durumda ipucu olarak verilmiştir. Bu kategori ipucunu kullanma ve ipucunu kullanmama olmak üzere iki boyuta ayrılmıştır.

İpucunu kullanma, ispatı çözemeyip ispatın kitapta bulunan hali üzerinden çözüme devam edilmesini temsil eder. İşe yarama ve işe yaramama olmak üzere iki alt boyuta ayrılır. İşe yarama, MÖA'nın sonuca ulaşmasında ipucunun yardımcı olması anlamına gelirken işe yaramama ipucunun da sonuca ulaşmada faydasının olmaması demektir. İpucunu kullanmama, sonuca ulaşmada ipucuna ihtiyaç kalmamasını temsil eder.



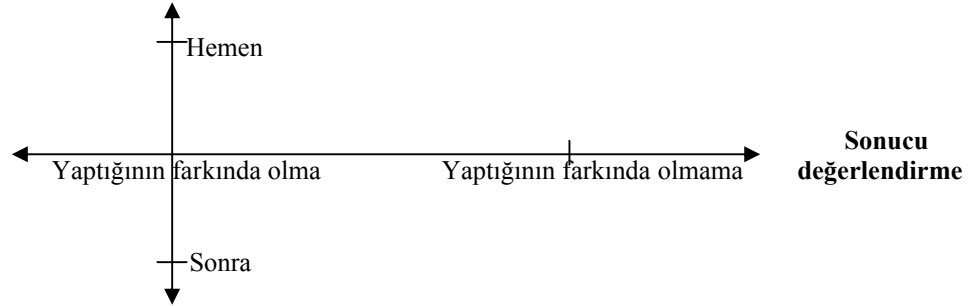
Şekil 4.1.7. İpucuna İhtiyaç Duyma Kategorisine Ait Boyut ve Alt Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

Sonuca ulaşma: MÖA'larının görsel ispatta sonucu elde edip edemediklerini gösterir. Sonuca ulaşma kategorisi ispatlayabilme ve ispatlayamama olmak üzere iki boyuta ayrılır. İspatlayabilme boyutu, MÖA'larının ispatın tamamını veya bir kısmını ispatlama durumlarını yansıtmaları açısından tam ve eksik olmak üzere iki alt boyuta ayrılır.



Şekil 4.1.8. Sonuca Ulaşma Kategorisine Ait Boyut ve Alt Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

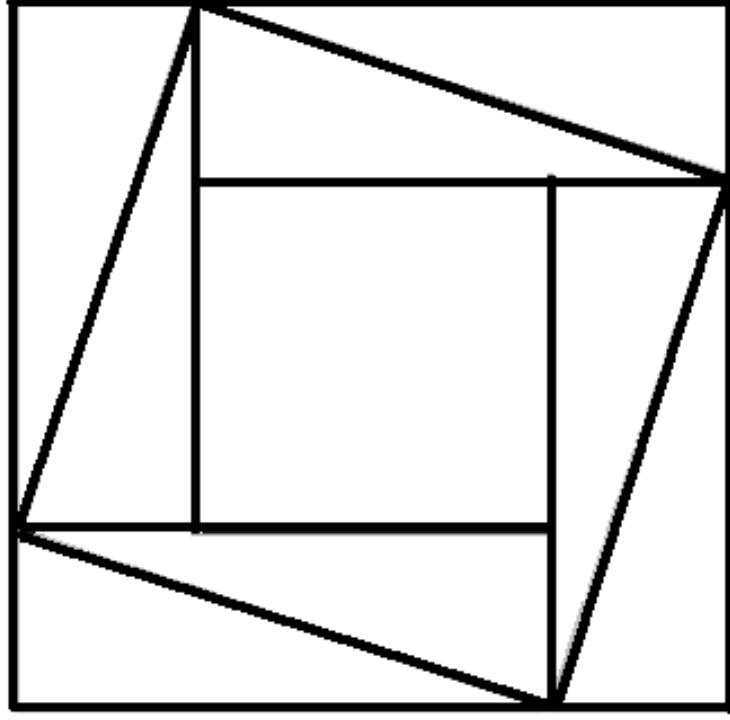
Sonucu değerlendirme: MÖA'larının elde ettikleri sonuçlara dair yorumlarını, sonuçları nasıl algıladıklarını gösterir. Yaptığının farkında olma ve yaptığının farkında olmama olmak üzere iki boyuta ayrılır. Yaptığının farkında olma boyutu, MÖA'larının elde ettikleri sonuçları doğru olarak değerlendirmelerini ifade eder. Bu boyut hemen ve sonra olmak üzere iki alt boyuta ayrılır. Yaptığının farkında olmama ise, MÖA'larının elde ettikleri sonuç ile algıladıkları sonucun farklı olduğu durumlara işaret eder.



Şekil 4.1.9. Sonucu Değerlendirme Kategorisine Ait Boyut ve Alt Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

4.1.2. MÖA'larının Pisagor Teoremi İle İlgili Görsel İspatı İspatlamaları

Görev 1.



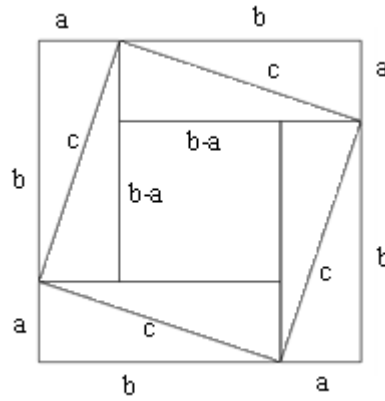
Yukarıdaki şekil Pisagor teoreminin görsel ispatını ifade etmektedir. Bu ispatı gösteriniz.

Şekil 4.1.10. Çalışma Kâğıdı 1

MÖA'larına Pisagor Teoremi ile ilgili Şekil 4.1.10. daki görsel ispat sorulmuştur.

Pisagor teoreminin görsel ispattan elde edilmesi:

1.Çözüm: Öncelikle kenar uzunluklarına aşağıdaki gibi harfler verilsin. Şekillerin benzerliği gözönüne alındığında aşağıdaki gibi bir harflendirme ortaya çıkacaktır.

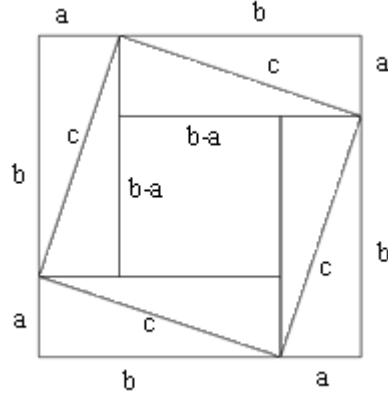


Burada amaç $a^2 + b^2 = c^2$ olduğunu göstermektir. En dıştaki karenin alanı $(a+b)^2$ ifadesine eşittir. Aynı zamanda bu karenin alanı kenar uzunluğu c olan içteki kare ile kenar uzunlukları a ve b olan dört dik üçgenin alanlarının toplamına eşittir. Bu durumda aşağıdaki ifade yazabilir.

$$(a+b)^2 = 4 \frac{ab}{2} + c^2$$

Yukarıdaki ifadede gerekli sadeleştirmeler yapıldığında, $a^2 + b^2 = c^2$ ifadesi elde edilir.

2.Çözüm:

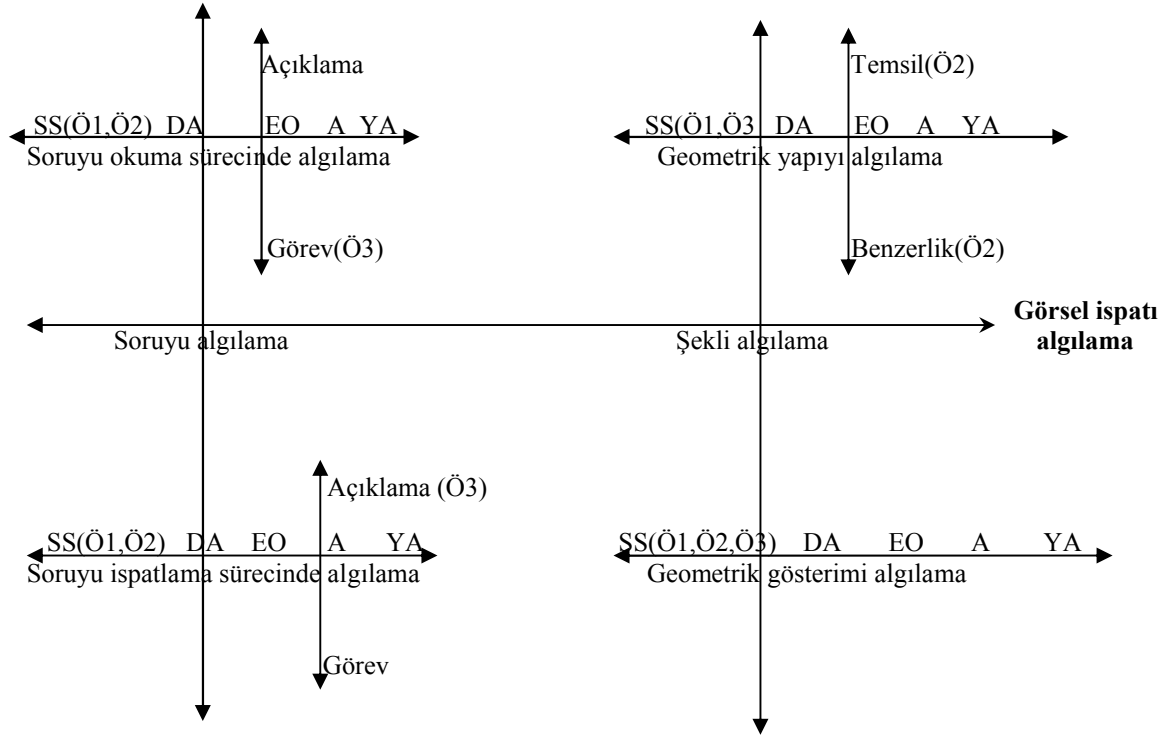


Yukarıdaki şekilde kenar uzunluğu c olan karenin alanının, kenar uzunlukları a ve b olan dört dik üçgenin alanı ile kenar uzunluğu $b-a$ olan karenin alanlarının toplamına eşit olduğu göz önüne alındığında,

$$c^2 = 4 \frac{ab}{2} + (b-a)^2$$

eşitliği elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında $a^2 + b^2 = c^2$ bulunur.

Görsel ispatı algılama: MÖA'ları görsel ispatı algılamada soru ve şekil bakımından bazı zorluklar yaşamışlardır. MÖA'larının şekli ve soruyu algılama durumları Şekil 4.1.11. de gösterilmiştir. Ayrıca görsel ispatta yer alan “Yukarıdaki şekil Pisagor teoreminin görsel ispatını ifade etmektedir. Bu ispatı gösteriniz.” ifadesinde “Yukarıdaki şekil Pisagor teoreminin görsel ispatını ifade etmektedir” cümlesi açıklama, “Bu ispatı gösteriniz” görev cümlesi alınarak MÖA'larının soruya olan tepkileri bu cümleler doğrultusunda değerlendirilmiştir.



Şekil 4.1.11. Pisagor Teoreminin Görsel İspatının Algılanması

1.MÖA görsel ispatta yer alan soru ve şekil ile ilgili herhangi bir soru sormamış, bu durum her iki alt kategori için de sorunsuz süreç olarak alınmıştır.

2.MÖA görsel ispattaki şekle dair sorular sormuştur. Soruyu okumuş, görsel ispattaki geometrik yapının neyi temsil ettiğinden emin olamamıştır. 2.MÖA ve araştırmacı arasında aşağıdaki konuşmalar geçmiştir (1.Görüşme).

2.MÖA: Görev 1, yukarıdaki şekil Pisagor teoreminin görsel ispatını ifade etmektedir. Bu ispatı gösteriniz. Şimdi bunlara dair böyle bir özellik var mı? Mesela görsel olarak bir kare düşünebilirim ama sizin vereceğiniz bir şey var mı?

Araştırmacı: Yok, bu şekilde, kare zaten şekil... Yani şeklin özelliğiyle ilgili soruyorsan bu şekil kare...

2.MÖA: Tamam, demediğiniz için... Sonuçta “Nasıl garanti edebiliriz?” açısından düşündüm.

2.MÖA soru üzerinde biraz düşündükten sonra şekildeki üçgenlerin aynı olup olmadığını sormuştur. Araştırmacı tarafından aynı olduğu cevabını almıştır. 2.MÖA geometrik yapılar arasındaki benzerlik ilişkisinden emin olamamıştır (1.Görüşme).

2.MÖA: *Şu geometrik şekille şu şekiller aynı değil mi?*

Araştırmacı: *Evet.*

3.MÖA görsel ispattaki soruyu okumuş, sorudaki görev cümlesinden emin olamamış, kendisinden Pisagor teoreminin ispatını bu şekilden çıkarmasını istendiğini araştırmacıdan teyit ettirmiştir (1.Görüşme).

3.MÖA: *Bu ispatı göstereceğim değil mi?*

Araştırmacı: *Evet, bu şekilden o ispatı çıkarmaya çalışacaksın.*

3.MÖA, açıklama cümlesinde geçen Pisagor teoreminin ispatı ifadesini anlayamamış, ispatlama sürecinde aralıklı olarak iki defa teoremin hangi anlama geldiğine yönelik sorular sormuştur (1.Görüşme).

3.MÖA: *Burada Pisagor teoreminin ispatı derken?*

Araştırmacı: *Dik üçgende dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir.*

3.MÖA: *Dik üçgendekini mi ispatlamaya çalışıyoruz burada?*

Araştırmacı: *Evet.*

3.MÖA: *Tamam.*

3.MÖA: *Burada bir kenarın uzunluğunun $\sqrt{a^2 + b^2}$ olduğunu mu bulacağım? Öyle mi? O mu isteniyor burada?*

Araştırmacı: *Evet, Pisagor teoremi ya da bunların kareleri toplamının bunun karesine eşit olduğunu...*

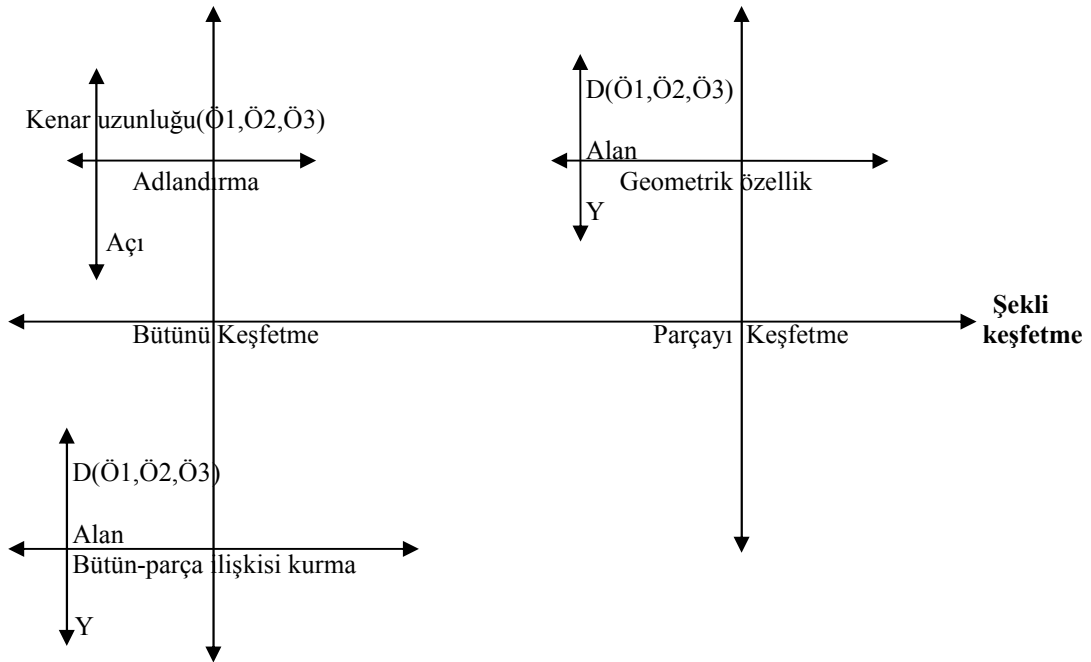
3.MÖA: *Hımmm.*

Araştırmacı: *Dik üçgenlerden birinde.*

3.MÖA: *Tamam o zaman.*

Konuşmalardan da görüldüğü gibi 3.MÖA soruda kendisinden istenileni anlayamamıştır. Araştırmacıya sorarak soruyu anlamaya çalışmıştır.

Şekli keşfetme: MÖA'ları görsel ispatı ispatlayabilmek için şekli keşfetmeye çalışmışlardır. MÖA'larının şekli keşfetme durumları Şekil 4.1.12 deki gibidir. Bu kategoriye ait alt kategori ve boyutlar başlıklar altında toplanarak verilecektir.

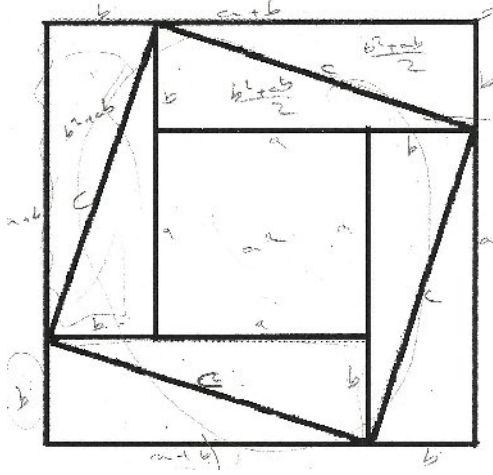


Şekil 4.1.12. Pisagor Teoreminin Görsel İspatında Şekli Keşfetme

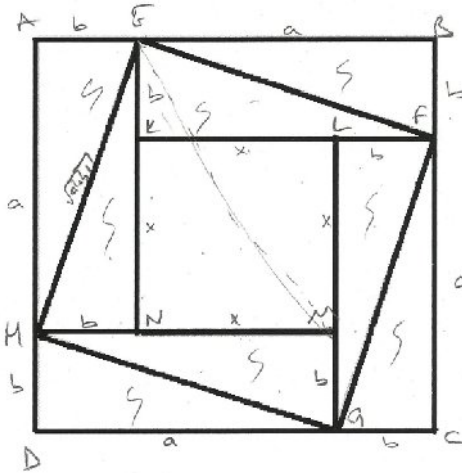
Bütünü keşfetme alt kategorisi adlandırma boyutu: 1.MÖA, 2.MÖA ve 3.MÖA görsel ispata şekillerin kenar uzunluklarını harflendirerek başlamışlardır. 2.MÖA, 2. görüşmede de görsel ispata şekli harflendirerek başlamıştır. 3.MÖA kenar uzunluklarını harflendirme konusunda tereddüt yaşamıştır. Araştırmacı, nasıl isterse o şekilde çözebileceğini söylemiştir (Şekil 4.1.13, 4.1.14, 4.1.15 ve 4.1.16.).

3.MÖA: *Ben direkt buradan harflendirmeye başladım ama...*

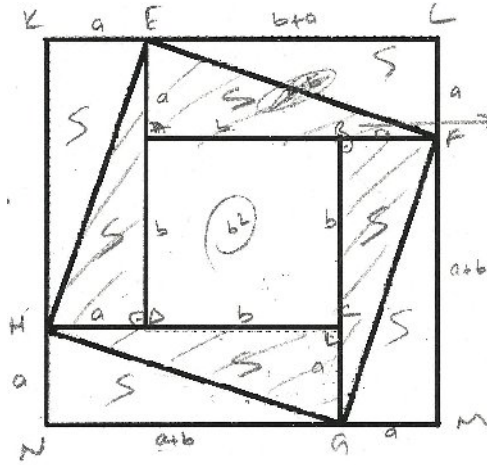
Araştırmacı: *İstediğin gibi yapabilirsin.*



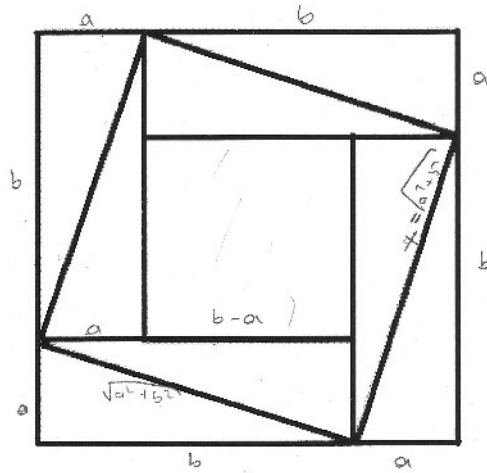
Şekil 4.1.13. 1.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çözümü (1.Görüşme)



Şekil 4.1.14. 2.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çözümü (1.Görüşme)



Şekil 4.1.15. 2.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çözümü (2.Görüşme)



Şekil 4.1.16. 3.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çözümü (1.Görüşme)

Parçayı keşfetme alt kategorisi geometrik özellik boyutu alan bulma alt boyutu: 1.MÖA, 2.MÖA ve 3.MÖA görsel ispatta şekli oluşturan parçaların (kare, üçgen) alanlarını hesaplamışlardır (Şekil 4.1.17, 4.1.18 ve 4.1.19).

$$\begin{aligned}
 \text{Büyük kare} &= (2b+a) \cdot (2b+a) \\
 &= 4b^2 + 4ab + a^2 \\
 \text{Küçük kare} &= c \cdot c = c^2 \\
 \text{Dik üçgen} &= \frac{(b+a) \cdot b}{2} = \frac{b^2 + ab}{2}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.1.17. 1.MÖA'nın Parçaların Alanını Hesaplaması

$$\begin{aligned}
 a &= x+b \quad \Rightarrow \quad x = a-b \\
 A(ABCD) &= (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\
 A(EFGH) &= (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2 \\
 A(KLMN) &= x^2 = (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab
 \end{aligned}$$

Şekil 4.1.18. 2.MÖA'nın Parçaların Alanını Hesaplaması

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= \frac{4 \cdot a \cdot b}{2} + x^2 \\
 a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + x^2 \\
 a^2 + b^2 &= x^2 \\
 x &= \sqrt{a^2 + b^2}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.1.19. 3.MÖA'nın Parçaların Alanını Hesaplaması

Bütünü keşfetme alt kategorisi bütün-parça ilişkisi kurma boyutu alan alt boyutu: MÖA'ları şekilde yer alan en büyük karenin alanının diğer parçaların alanları toplamına eşit olması durumunu hesaplamışlardır.

1.MÖA, Şekil 4.1.17 de büyük kare, küçük kare ve dik üçgen olarak alanlarını hesapladığı şekiller için kenar uzunluğu $2b+a$ olan karenin alanının kenar uzunluğu c olan karenin ve dört dik üçgenin alanları toplamına eşit olduğunu yazmıştır (Şekil 4.1.20).

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{b^2+ab}{2}\right) \cdot h + c^2 &= 4b^2 + 4ab + a^2 \\
 2b^2 + 2ab + c^2 &= 4b^2 + 4ab + a^2 \\
 c^2 &= 2b^2 + 2ab + a^2 \\
 &= b^2 + (b^2 + 2ab + a^2) \\
 c^2 &= b^2 + (a+b)^2
 \end{aligned}$$

Hipotenüs $= c^2 = (b+a)^2 + b^2 = 2b^2 + a^2 +$

Şekil 4.1.20. 1.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm

2.MÖA da bütün ve parça arasında bulunan alan ilişkisini bulmuştur (Ayrıca bakınız, Şekil 4.1.15).

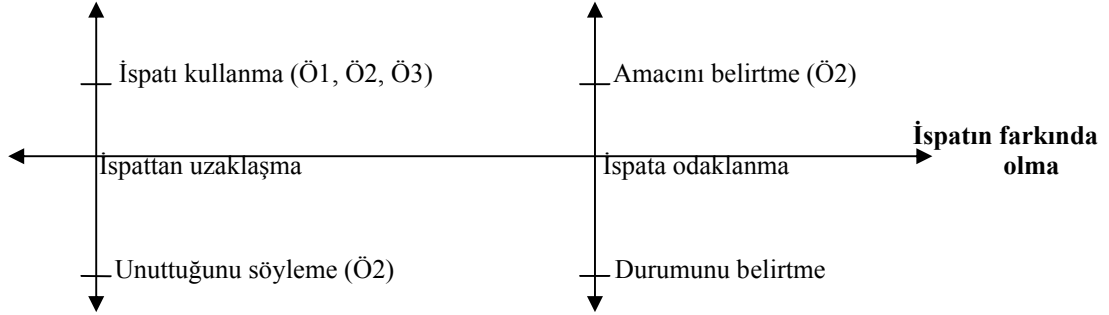
2.MÖA: Şurası da S, şurası da S, şurası da S, şurası da S. Bir de 4S daha var. O zaman şu en dıştaki de KLMN olsun. O zaman alan $KLMN = 4S + \text{Alan}(EFGH) = 4a^2 + 4ab + b^2$

3.MÖA kenar uzunluğu $a+b$ olan karenin alanının, kenar uzunluğu $b-a$ olan karenin alanıyla, kenar uzunlukları a ve b olan dikdörtgenlerin alanları toplamına eşit olduğunu yazmıştır (Şekil 4.1.16 ve Şekil 4.1.21).

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= 4a \cdot b + (b-a)^2 \\
 &= 4ab + b^2 - 2ab + a^2 \\
 &= b^2 + 2ab + a^2
 \end{aligned}$$

Şekil 4.1.21. 3.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm

İspatın farkında olma: MÖA'larının ispatın farkında olma durumları Şekil 4.1.22 dedir. Bu kategoriye ait alt kategori ve boyutlar başlıklar altında toplanarak verilecektir.



Şekil 4.1.22. Pisagor Teoreminin Görsel İspatında İspatın Farkında Olma

İspattan uzaklaşma alt kategorisi ispatı kullanma boyutu: MÖA'larından Pisagor teoreminin ispatını şekilden elde etmeleri istenmişti. MÖA'ları amaçlarının ne olduğunu unutmuş, yaptıkları işlemler içerisinde Pisagor teoremini kullanmışlardır.

1.MÖA bir an için Pisagor teoremini ispatlamaya çalıştığını unutarak, Pisagor teoremi yardımıyla dik üçgenin kenar uzunlukları arasındaki aşağıdaki eşitliği yazmıştır (1.Görüşme).

$$\text{Hipotenüs} = c^2 = (b+a)^2 + b^2$$

Şekil 4.1.23. 1.MÖA'nın İspatından Bir Bölüm

Bunun üzerine araştırmacı ve 1.MÖA arasında aşağıdaki konuşmalar geçmiştir.

Araştırmacı: *Şu hipotenüsü nereden yazdın?*

1.MÖA: *Bu her bir dik üçgenin $a^2 + b^2 = c^2$ olarak bildiğimiz iki dik kenarın karelerinin toplamı hipotenüsün karesine eşit.*

Araştırmacı: *Nasıl?*

1.MÖA: *Buranın karesi ile buranın karesinin toplamı c^2 ye eşittir.*

Araştırmacı: *Ama sen burada Pisagor teoremini ispatlıyorsun. Onu kullanabilir misin? Zaten onu çıkartmaya çalışıyorsun.*

1.MÖA: *Onu çıkartmaya çalışıyorum.*

Araştırmacı: *Evet, onu bilmiyorsun.*

2.MÖA, Pisagor teoremini ispatlamaya çalıştığını unutmuş, $|EH|$ yi Pisagor teoreminden bulmuş (Şekil 4.1.14), EFGH karesinin alanını da onun yardımıyla hesaplamıştır (Şekil 4.1.18, 1. Görüşme).

3.MÖA da Pisagor teoremini ispatlamaya çalıştığını unutmuş, Şekil 4.1.16 da görüldüğü gibi Pisagor teoremi yardımıyla dik üçgenin hipotenüsünü dik kenarların uzunlukları cinsinden ifade etmiştir. Araştırmacı Pisagor teoremini kullandığını, ama Pisagor teoremini bilmediğini, onu ispatlamaya çalıştığını hatırlatmıştır (1. Görüşme).

Araştırmacı: *O zaman sen burada Pisagor teoremini kullanmış oluyorsun. Ama biz Pisagor teoremini bilmiyoruz.*

3.MÖA: *Dediğim gibi alandan o zaman gideceğiz ama. Yine alandan gitmiş oldum ben burada.*

İspattan uzaklaşma alt kategorisi unuttuğunu söyleme boyutu: 2.MÖA, amacının hangi ispatı göstermek olduğunu unutmuş, araştırmacı ile aralarında aşağıdaki konuşmalar geçmiştir (2. Görüşme).

2.MÖA: *Bunun alanı neye eşitti? Şu kenarların kareleri, kare olduğu için. Ben Pisagor teoremini ispatlayacaktım değil mi burada?*

Araştırmacı: *Evet.*

2.MÖA: *Tamam.*

2.MÖA bir süre sessiz bir şekilde düşünmüştür. Bir süre sonra araştırmacı ne düşündüğünü sormuştur. 2.MÖA yapacağı ispatı unuttuğunu söylemiştir (2. Görüşme).

Araştırmacı: *Ne düşünüyorsun şimdi?*

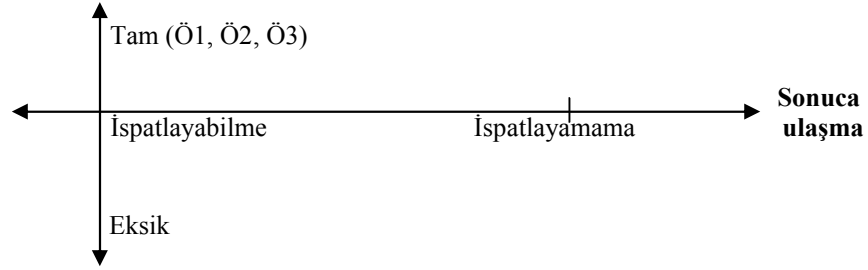
2.MÖA: *Şimdi şunu düşünüyorum. Ben yapacağım ispatı unutmuşum. Doğaçlama gidiyordum. Pisagor teoremini ispatlayacağıma göre şurada $a+b$ ve a var...*

İspata odaklanma alt kategorisi amacını belirtme boyutu: 2.MÖA sorunun ispatında Pisagor teoremini kullanamayacağını çünkü amacının onu ispatlamak olduğunu belirtmiştir (2. Görüşme).

Araştırmacı: *Orada ne yaptın?*

2.MÖA: *$|HG| = c$ dedim. Burada ben Pisagor teoremini uygulayamam, sonuçta onu ispatlamaya çalışıyorum, buradan Pisagor teoreminden uzunluğu şu diyemem herhalde...*

Sonuca ulaşma: 1.MÖA ve 3.MÖA, 1.görüşmede; 2.MÖA 2.görüşmede sonuca ulaşmıştır.



Şekil 4.1.24. Pisagor Teoreminin Görsel İspatında Sonuca Ulaşma

1.MÖA, Şekil 4.1.13. de yer alan dik kenar uzunluklarını $a+b$ ve b ; hipotenüsünü c olarak adlandırdığı dik üçgen üzerinden Pisagor teoremini bulmuştur (Şekil 4.1.20).

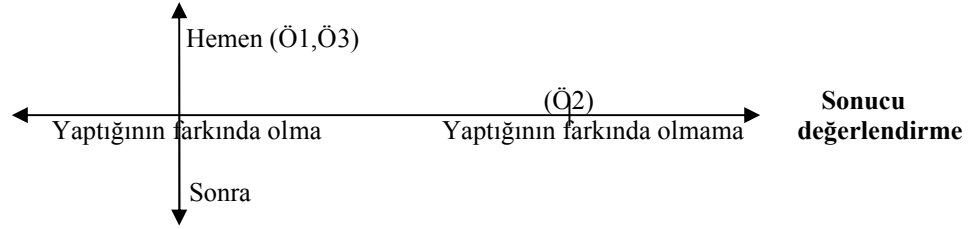
2.MÖA, HGFE karesinin alanı yardımıyla Şekil 4.1.15. deki dik üçgenlerin dik kenarlarının kareleri toplamının hipotenüse eşit olduğunu bulmuştur (Şekil 4.1.25).

$$\begin{aligned}
 4S &= 2(a \cdot (a+b)) = 2a^2 + 2ab \\
 A(ABCD) &= b^2 \\
 A(EFGH) &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 A(KLMN) &= 4S + A(EFGH) = 2a^2 + 2ab + b^2 \\
 A(HAFE) &= 2a^2 + 2ab + b^2 = c^2 \\
 (a+b)^2 + a^2 &= c^2
 \end{aligned}$$

Şekil 4.1.25. 2.MÖA'nın Sonuca Ulaşması

3.MÖA, Şekil 4.15. de yer alan dik kenar uzunluklarını a ve b ; hipotenüsünü x olarak adlandırdığı dik üçgene dair Pisagor teoremini bulmuştur (Şekil 4.1.19).

Sonucu değerlendirme: MÖA'larının hepsi sonuca ulaşmıştır. Bununla birlikte, 1.MÖA ve 3.MÖA sonucu elde ettiklerinin farkına varmalarına rağmen, 2.MÖA farkına varamamıştır.



Şekil 4.1.26. Pisagor Teoreminin Görsel İspatında Sonucu Değerlendirme

1.MÖA, sonucu elde etmiş ve daha önceden ispat içerisinde kullandığı Pisagor teoremi ile aynı sonucu elde ettiğini ok ile göstermiştir (Şekil 4.1.20).

2.MÖA, sonucu HGEF karesinin alanının dik üçgenin hipotenüsünün karesine eşit olduğunu yazmış fakat sonucun Pisagor teoremine eşit olduğunu görememiştir.

2.MÖA: *HGEF karesinin alanı= $2a^2 + 2ab + b^2$ idi. O da c^2 ye eşit. Buradan da... Ben bu soruyu, yani... Çok basit ama...*

2.MÖA, ne yaptığını gözden geçirmiş ve ispatla uğraşmayı bırakmıştır.

2.MÖA: *Buradan, bunu sadece düzenledim. $2a^2 + 2ab + b^2$ yi düzenledim. $(a+b)^2 + a^2$ diye yazdım. O da zaten şu kısım oluyor. Bu kalsın, yapmak istemiyorum artık.*

3.MÖA, sonuca ulaştığını üçgenlerin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi ifade ederek, Pisagor teoreminin ispatını elde ettiğini belirtmiştir.

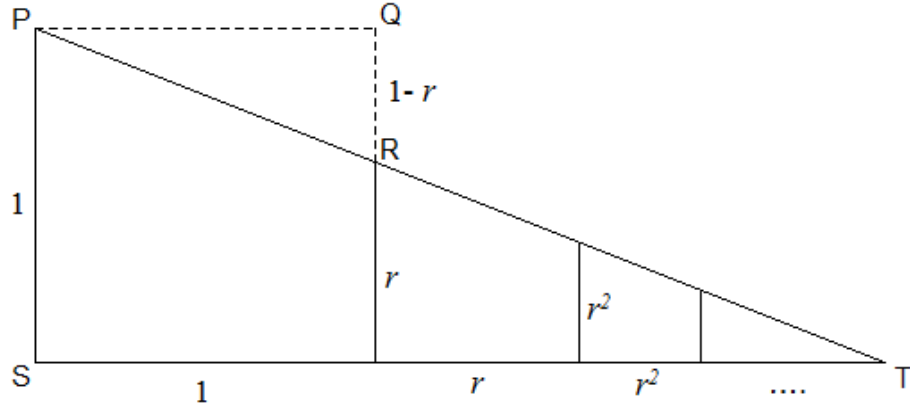
3.MÖA: *O zaman x 'in $\sqrt{a^2 + b^2}$ 'ne eşit olduğunu bulmuş oldum.*

4.1.3. MÖA'larının Geometrik Seri İle İlgili Görsel İspatı İspatlamaları

Görev 2.

Aşağıdaki şekil $0 < r < 1$ için $\sum_{i=0}^{+\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$ teoreminin görsel ispatını ifade etmektedir.

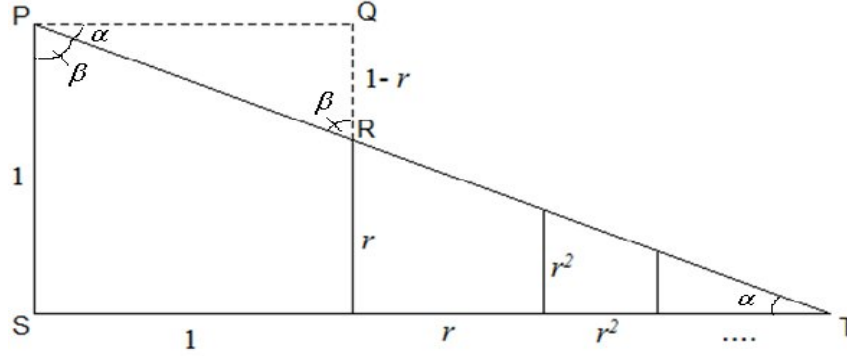
İspatı gösteriniz.



Şekil 4.1.27. Çalışma Kâğıdı 2

MÖA'larına geometrik seri ile ilgili Şekil 4.1.27. deki görsel ispat sorulmuştur.

Geometrik serinin görsel ispattan elde edilmesi: PST ve PQR üçgenleri benzerdir. Aşağıdaki şekilden bu benzerlik görülebilir.



Bu durumda üçgenlerin benzerliğinden

$$\frac{|PS|}{|QR|} = \frac{|ST|}{|PQ|}$$

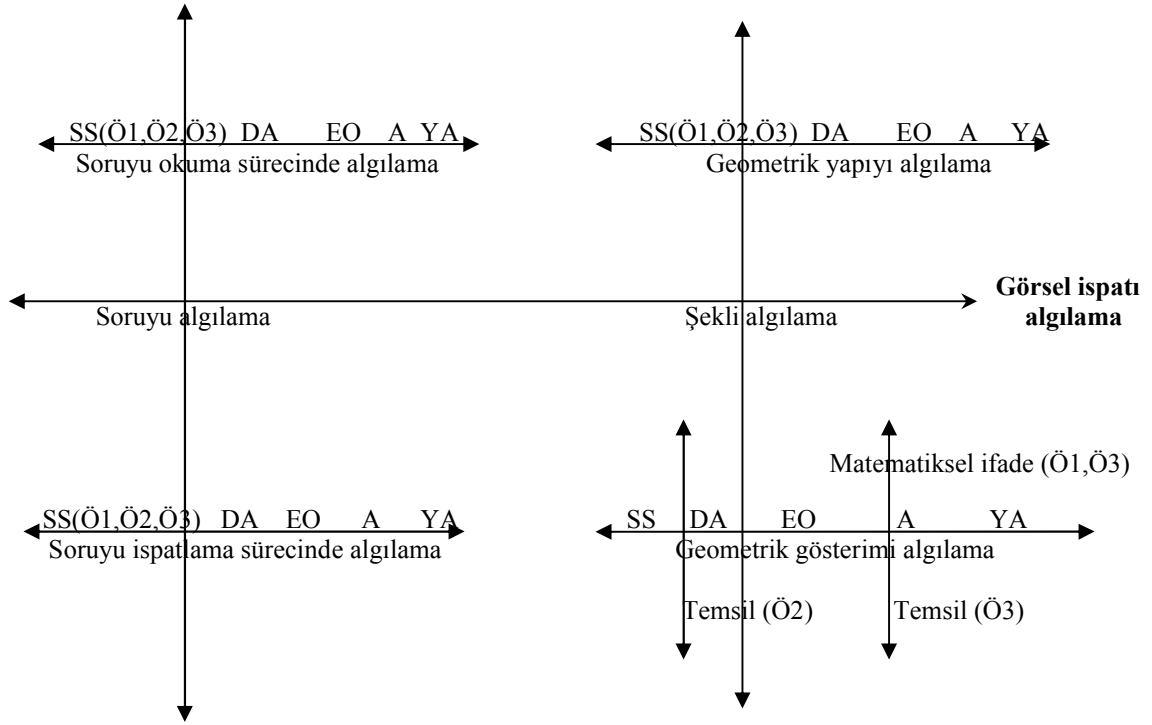
yazılabilir. Buradan da değerler yerine yazıldığında

$$\sum_{i=0}^{+\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$$

istenen eşitlik elde edilmiş olur.

Görsel ispatı algılama: MÖA'larının bu kategoriye ait durumları Şekil 4.1.28 de gösterilmiştir. Görsel ispatta yer alan “Aşağıdaki şekil $0 < r < 1$ için $\sum_{i=0}^{+\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$ teoreminin görsel ispatını ifade etmektedir. İspatı gösteriniz.” ifadesinde “Aşağıdaki şekil $0 < r < 1$ için $\sum_{i=0}^{+\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$ teoreminin görsel ispatını ifade etmektedir.” cümlesi

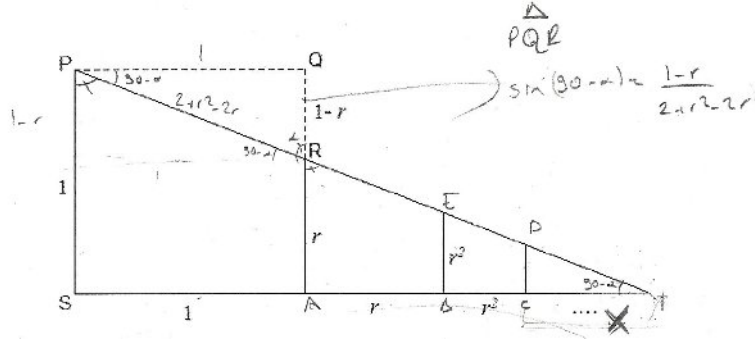
açıklama, “İspatı gösteriniz.” görev cümlesi alınarak MÖA’larının soruya olan tepkileri bu cümleler doğrultusunda değerlendirilmiştir.



Soruyu algılama alt kategorisi: MÖA’larının soruyu okuma ve ispatlama sürecinde soruyu algılamalarına dair herhangi bir durum ortaya çıkmamıştır. Bu nedenle soruyu okuma sürecinde algılama ve soruyu ispatlama sürecinde algılama boyutları sorunsuz süreç olarak alınmıştır.

Şekli algılama alt kategorisi geometrik yapıyı algılama boyutu: Bu kısım ile ilgili herhangi bir durum gözlenmediğinden sorunsuz süreç olarak alınmıştır.

Şekli algılama alt kategorisi geometrik gösterimi algılama boyutu: 1.MÖA, şekildeki $|ST|$ yi doğru bulmasına rağmen elde ettiği matematiksel ifadeyi şekil ile bağdaştıramamış, dolayısıyla anlayamamıştır. Aynı durumu şekilde x olarak harflendirdiği $|CT|$ için de yaşamıştır (Şekil 4.1.29, 1.Görüşme).



Şekil 4.1.29. 1.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çözümü

1.MÖA: Biz her üçgeni büyütüp, tek taraflı dik ayırıt seçip, orayı her seferinde topladığımızda $\frac{1}{1-r}$ ye ulaşabiliyormuşuz.(Şeklin taban uzunluğundan bahsediyor.)

Kafama oturmayan yer r^i ile hareket ediyoruz ama paydada $1-r$ var. Ama sonuçta payda da $1-r$ olmazsa da bu gelen toplamla da $\frac{1}{1-r}$ ye ulaşamam.

1.MÖA: Burada r^3 e nasıl ulaşabilirim? $1-r$ yi bir şekilde yok edersem, nasıl gider?

Araştırmacı: Burada x i mi bulmaya çalışmıştın?

1.MÖA: x i bulduk. Ondan sonra şu toplamın $\frac{1}{1-r}$ ye ulaştığını da bulduk. Ama

kafama takılan şey şurada bulduğum x in r^i cinsinden değil, $\frac{r^i}{1-r}$ olmasıydı.

2.MÖA, açıklama cümlesi ile şekilde verilenlerin uyumlu olup olmadığına bakmış, sonsuzluğun geometrik gösterim olarak nasıl temsil edildiğini anladığını belirtmiştir (1.Görüşme).

2.MÖA: *Bu sorudan bu sonuç nasıl çıkar? Böyle tanjantlardan falan, toplam... Bölmeler var. Sonsuz tane bölme olacak. Tamam, güzel. $0 < r < 1$ olduğu için şu uzaklıkların böyle küçülmesi de mantıklı geliyor. İlk önce acaba dedim, şurayı görmemişim, fark etmemişim. Tamam, şu uzunluklar böyle toplamaları...*

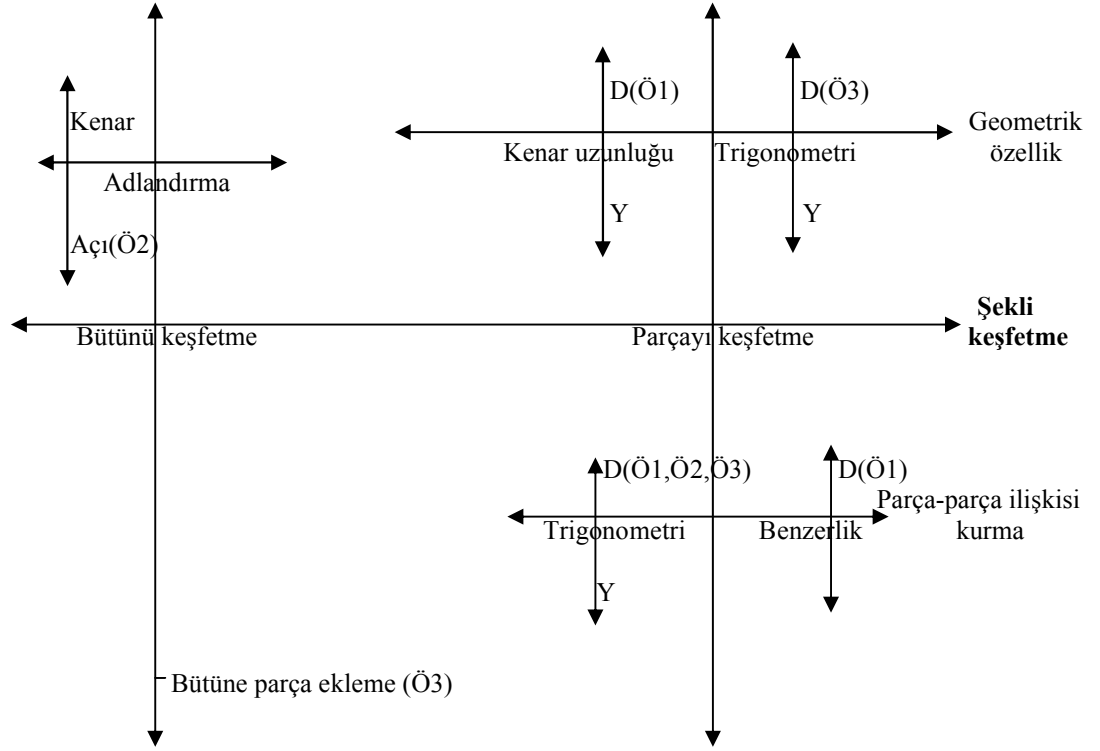
3.MÖA, şekildeki gösterimi anlayamamıştır (1.Görüşme).

3.MÖA: *İspatını göstereceğim. Hiçbir şey düşünemiyorum şu anda. Aslında böyle gidiyor değil mi? Sonsuza kadar?*

Araştırmacı: *Evet.*

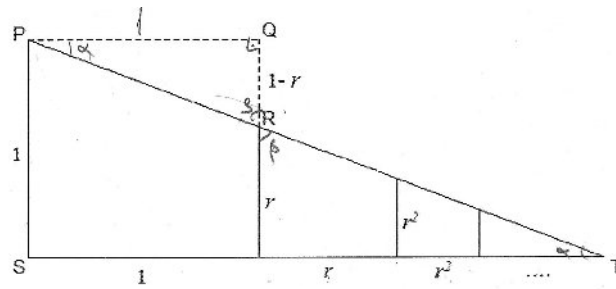
3.MÖA: *Şöyle gider mesela, sonsuza kadar gidiyor diye düşünürsek, ama her bir aralık r olacak nasıl böyle şunu sonsuza götürebiliyoruz hocam?*

Şekli keşfetme: MÖA'larının şekli keşfetme durumları Şekil 4.1.30. daki gibidir. Bu kategoriye ait alt kategori ve boyutlar başlıklar altında toplanarak verilecektir.



4.1.30. Geometrik Serinin Görsel İspatında Şekli Keşfetme

Bütünü keşfetme alt kategorisi adlandırma boyutu açı alt boyutu: 2.MÖA şekilde yer alan açılara harfler vermiştir (Şekil 4.1.31, 1.Görüşme).



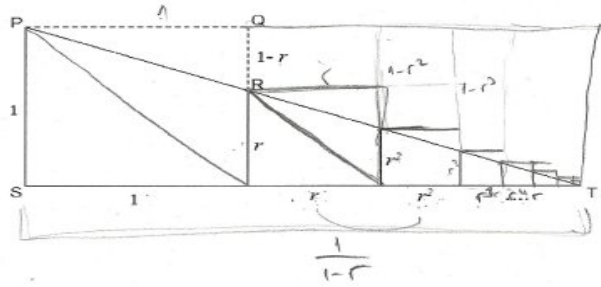
Şekil 4.1.31. 2.MÖA'nın Ortak Açıları Bulması

2.MÖA: *Şuradaki dik üçgene açısız değerler verdim, α , β diye. β , α oldu.*

Bütünü keşfetme alt kategorisi bütüne parça ekleme boyutu: 3.MÖA, şekilde bulunan üçgenleri dikdörtgen ve karelere tamamlayarak çözüm yolu araştırmıştır (Şekil 4.1.32, 1.Görüşme).

Araştırmacı: Şekli dikdörtgene tamamladın orada?

3.MÖA: Evet.



Şekil 4.1.32. 3.MÖA'nın Şekle Parçalar Ekleme

Parçayı keşfetme alt kategorisi geometrik özellik boyutu kenar uzunluğu alt boyutu: MÖA'ları verilenlerden yararlanarak şekli oluşturan diğer parçaların (kare, üçgen v.b.) kenar uzunluklarını bulmuşlardır.

1.MÖA, verilenlerden yararlanarak PQAS olarak adlandırdığı karenin kenar uzunluklarını ve PQR üçgeninin hipotenüsünü bulmuştur (Şekil 4.1.29, 1.Görüşme).

Parçayı keşfetme alt kategorisi geometrik özellik boyutu açı alt boyutu: 1.MÖA, PQR üçgeninin açılarını bulmuştur (Şekil 4.1.29, 1.Görüşme).

Parçayı keşfetme alt kategorisi geometrik özellik boyutu trigonometri alt boyutu: 1.MÖA, PQR üçgenindeki bir açının sinüs değerini bulmuştur (Şekil 4.1.29, 1.Görüşme).

3.MÖA, PST ve PQR üçgenlerine ait aynı açının tanjant değerlerini bulmuştur (Şekil 4.1.33, 2.Görüşme).

Araştırmacı: Onu nereden yazdın? Hangisinden?

3.MÖA: Şuradan, PST den.

Araştırmacı: PST üçgeninden $\tan \alpha$, karşı bölü komşudan...

3.MÖA: Bir de şu üçgende yazalım.

Araştırmacı: PQR' de.

$$\begin{aligned} \hat{PST} \quad \tan \alpha &= \frac{1}{|ST|} = \frac{1}{1+r+r^2+\dots+r^\infty} \\ \hat{PQR} \quad \tan \alpha &= \frac{1-r}{1} \end{aligned}$$

Şekil 4.1.33. 3.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm

Parçayı keşfetme alt kategorisi parça-parça ilişkisi kurma boyutu trigonometri alt boyutu: 1.MÖA, farklı üçgenlerde aynı açının sinüsleri eşit olduğundan PQR üçgenindeki $90-\alpha$ açısının sinüs değeri ile RAT üçgenindeki sinüs değerini eşitleyerek $|RT|$ yi bulmuştur (1.Görüşme).

1.MÖA: Burada her seferinde sinüs kullanarak buraları bulabilirim. RAT üçgeninde

deneyecek olsam $\frac{r}{|RT|} = \frac{1-r}{2+r^2-2r}$ olur.

Araştırmacı: Ne yaptın şimdi burada? RAT üçgeninde?

1.MÖA: RAT üçgeninde, burada bulduğum sinüs değerini biliyorum. Yine burada aynı açıyla sinüs yine burada aynı açıyla sinüsü bulmak istedim. Buradan $|RT|$ yi bulabilirim. $\frac{2r + r^3 - 2r^2}{1 - r}$.

2.MÖA, Şekil 4.30 da her iki üçgende de bulunan β açısının tanjant değerlerini eşitlemiştir (Şekil 4.1.34, 1.Görüşme).

$$\tan \beta = \frac{1}{1-r} = \frac{r + r^2 + r^3 + \dots}{r}$$

Şekil 4.1.34. 2.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm

3.MÖA da iki farklı üçgende de aynı açının tanjant değerlerinin birbirine eşit olmasından yararlanmıştır (2.Görüşme).

3.MÖA: *Hımm, şimdi $\tan \alpha$ lar birbirine eşittir. Öyleyse bu neydi, PST üçgenindeydi.*

Bu üçgende iki tanjantları birbirine eşitlesek $\frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} r^i} = \frac{1-r}{1}$ olur.

Parçayı keşfetme alt kategorisi parça-parça ilişkisi kurma boyutu benzerlik alt boyutu: 1.MÖA, RAT ve PST üçgenleri arasındaki benzerlik ilişkisini kullanarak x olarak adlandırdığı kenar uzunluğunu bulmuştur (Şekil 4.1.29 ve Şekil 4.1.35, 1.Görüşme).

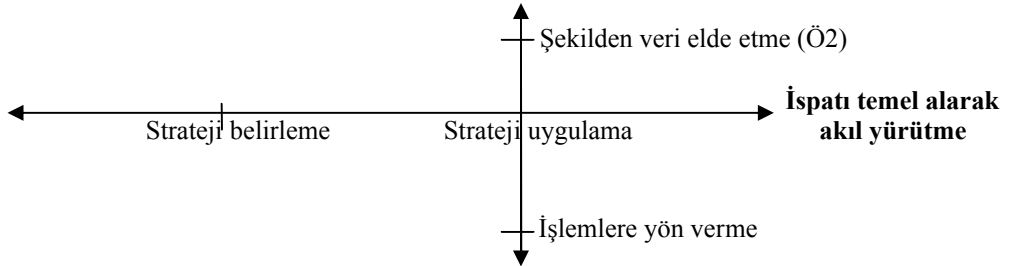
$$\frac{|RT|}{|PT|} = \frac{|AT|}{|ST|}$$

$$\frac{\frac{2r+r^3-2r^2}{1-r}}{\frac{2r+r^3-2r^2}{1-r} \rightarrow 2+r^2-2r} = \frac{x+r^2+r}{1+r+r^2+x}$$

$$x = \frac{r^3}{1-r}$$

Şekil 4.1.35. 1.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm

İspatı temel olarak akıl yürütme: Yalnızca, 2.MÖA ispatı göz önünde bulundurarak hareket ettiğinden bahsetmiştir.

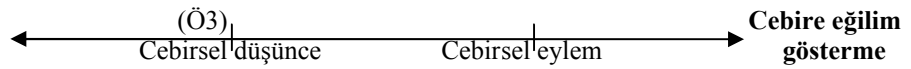


Şekil 4.1.36. Geometrik Serinin Görsel İspatında İspatı Temel Alarak Akıl Yürütme

Strateji uygulama boyutu şekilden veri elde etme alt boyutu: 2.MÖA, şekilden elde edeceği veriyi ispattaki ifadeye benzetebilmek amacıyla yaptığından bahsetmiştir (1.Görüşme).

2.MÖA: Şurada mesela $\tan \beta$ yı bulursam $\frac{1}{1-r}$, bunu biraz bilerek yaptım, şuradaki $\frac{1}{1-r}$ ye benzetmek için.

Cebire eğilim gösterme: 3.MÖA, formül kullanmayı düşünmüştür.



Şekil 4.1.37. Geometrik Serinin Görsel İspatında Cebire Eğilim Gösterme

Cebirsel düşünce boyutu: 3.MÖA, soruyu diziler yardımıyla çözmeyi düşünmüş, araştırmacı sonuca şekilden ulaşması gerektiğini belirtmiştir (1.Görüşme).

3.MÖA: Burada dizilerle ilgili kuralları kullanabilir miyiz?

Araştırmacı: Yok, şekilden çıkarman gerekiyor.

3.MÖA, kendisini cebirsel olarak düşünmemeye zorlamış, aklına bir şey gelmediğini söylemiştir (1.Görüşme).

Araştırmacı: Ne düşünüyorsun bu soruyla ilgili?

3.MÖA: Formül kullanmadan nasıl yapılır ki diyorum.

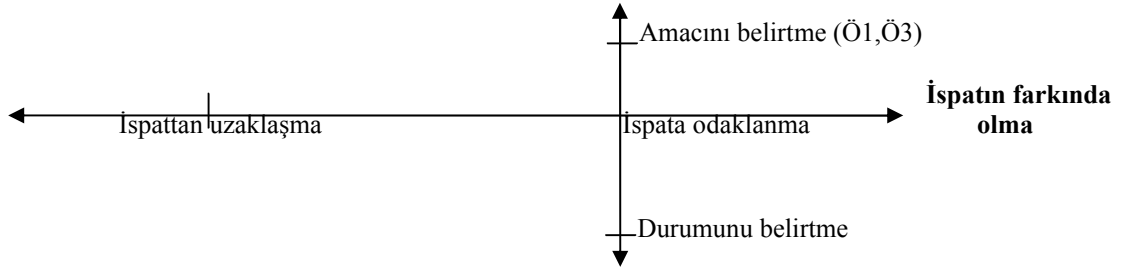
Araştırmacı: Kullanırsan eğer, nasıl bir formül kullanmayı düşündün?

3.MÖA: ...

Araştırmacı: Bu sonuca direkt formülle ulaşabileceğini mi düşündün?

3.MÖA: Yani, onun dışında aklıma bir şey gelmiyor.

İspatın farkında olma: MÖA'ları ispatla uğraşırken neyi bulmaları gerektiğinden bahsetmişlerdir.



Şekil 4.1.38. Geometrik Serinin Görsel İspatında İspatın Farkında Olma

İspata odaklanma alt kategorisi amacını belirtme boyutu: 1.MÖA, sonuca nasıl ulaşabileceğini düşünürken, ispatla ilgili amacından bahsetmiştir (1.Görüşme).

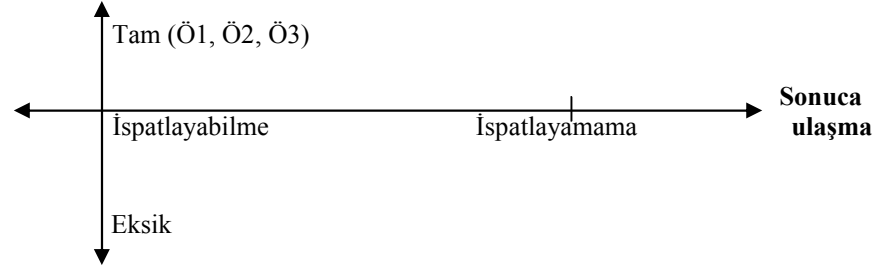
1.MÖA: Genel anlamda üçgende $\frac{r^3}{1-r}$, r^2 , r , 1 şeklinde devam ediyor. Bizim aradığımız $\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$ yi bulmak. Bu toplam olduğuna göre, $\frac{1}{1-r}$ yi elde etmemiz gerekiyor.

3.MÖA, ispatta kendisinden istenileni dile getirmiştir (1.Görüşme).

3.MÖA: Aslında ben şunun hepsinin toplamının $\frac{1}{1-r}$ olduğunu göstermek istiyorum.

Çok merak ettim ben bu soruları şimdi. Gerçekten güzelmiş.

Sonuca ulaşma: 1.MÖA ve 2.MÖA, 1.görüşmede; 3.MÖA 2.görüşmede sonuca ulaşmıştır.



Şekil 4.1.39. Geometrik Serinin Görsel İspatında Sonuca Ulaşma

1.MÖA, x uzunluğu (Şekil 4.1.35.) ve diğer uzunluklar yardımıyla $|ST|$ yi hesaplamış, buradan sonuca ulaşmıştır.

The image shows a handwritten mathematical derivation. It starts with the sum of a geometric series:
$$= \frac{1}{r=0} + \frac{r}{r=1} + \frac{r^2}{r=2} + \frac{r^3}{r=3} + \dots$$
 This is followed by a formula for the sum of an infinite geometric series:
$$= \frac{1 - r^{\infty}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}$$
 Finally, it concludes with:
$$1 = (1 - r)$$

Şekil 4.1.40. 1.MÖA'nın Sonuca Ulaşması

2.MÖA, Şekil 4.1.34. te elde ettiği eşitlikteki sadeleştirmeleri yaparak sonuca ulaşmıştır.

$$\tan \beta = \frac{1}{1-r} = \frac{r+r^2+r^3+\dots}{r} = \frac{r(1+r+r^2+\dots)}{r}$$

$$\tan \beta = \frac{1}{1-r} = 1+r+r^2+r^3+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

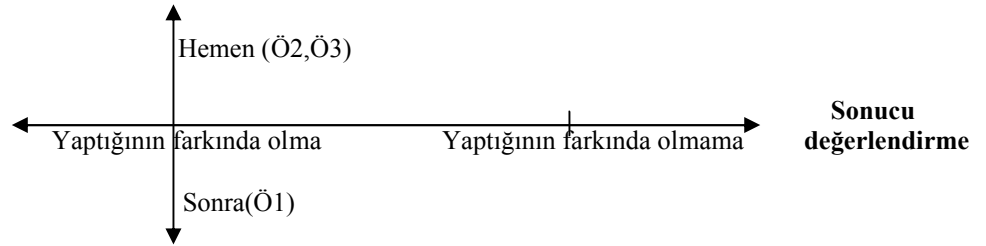
Şekil 4.1.41. 2.MÖA'nın Sonuca Ulaşması

3.MÖA, tanjant değerlerini birbirine eşitleyerek sonuca ulaşmıştır.

$$\frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} r^i} = \frac{1-r}{1} \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$$

Şekil 4.1.42. 3.MÖA'nın Sonuca Ulaşması

Sonucu değerlendirme: 2.MÖA ve 3.MÖA sonucu elde ettiklerinin farkına hemen varmalarına rağmen, 1.MÖA sonradan farkına varmıştır.



Şekil 4.1.43. Geometrik Serinin Görsel İspatında Sonucu Değerlendirme

1.MÖA, soruda çözümü bulduğunu sonradan fark etmiştir.

1.MÖA: Yok sorun yokmuş aslında. Soruyu çözdüm. Burada bulduğum x değeri $\frac{r^3}{1-r}$ idi. Ama benim düşünmediğim şey bunun da zaten bir toplam olduğuydu. Yani bu $r^3 \left(\frac{1}{1-r} \right)$ idi. Burada i değerler almaya devam ediyor. Yani i 3 için, 4 için, 5 için diye devam ediyor. O yüzden tamam sorun yok bu soruda.

2.MÖA, sonucu elde etmesiyle, sonucu elde ettiğini fark etmesi aynı anda olmuştur.

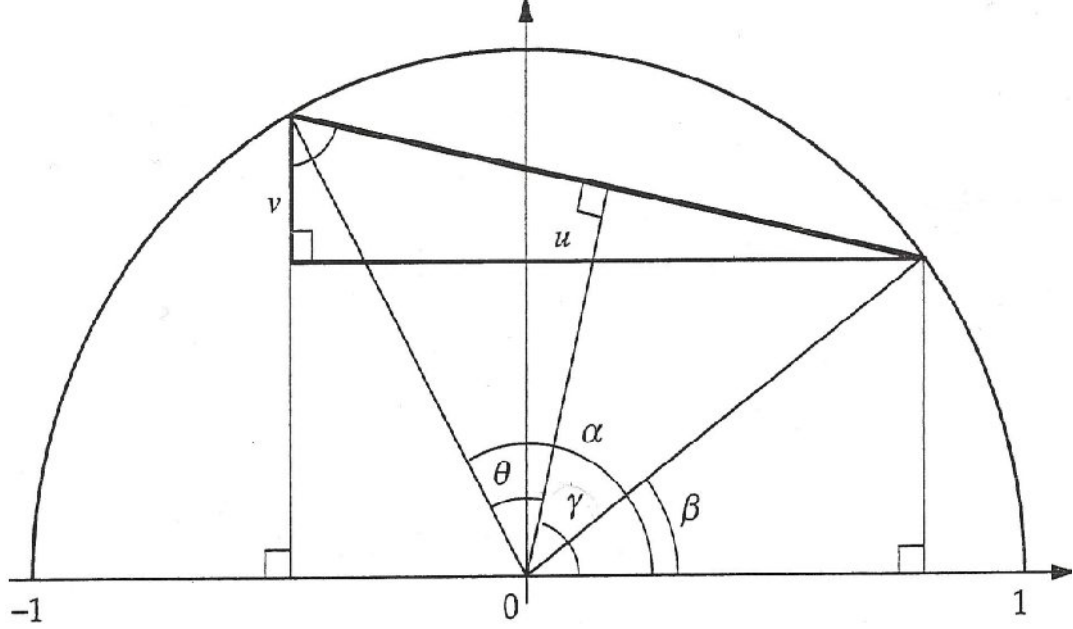
2MÖA: Tamam böyle bulduk. $\frac{1}{1-r} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} r^n}{1}$ yazabilirim.

3.MÖA da sonuca ulaştığını fark etmede sorun yaşamamıştır.

3.MÖA: Buradan da bunun $\frac{1}{1-r}$ olduğunu buluruz.

4.1.4. MÖA'larının Trigonometrik Dönüşümler İle İlgili Görsel İspatı İspatlamaları

Görev 3.



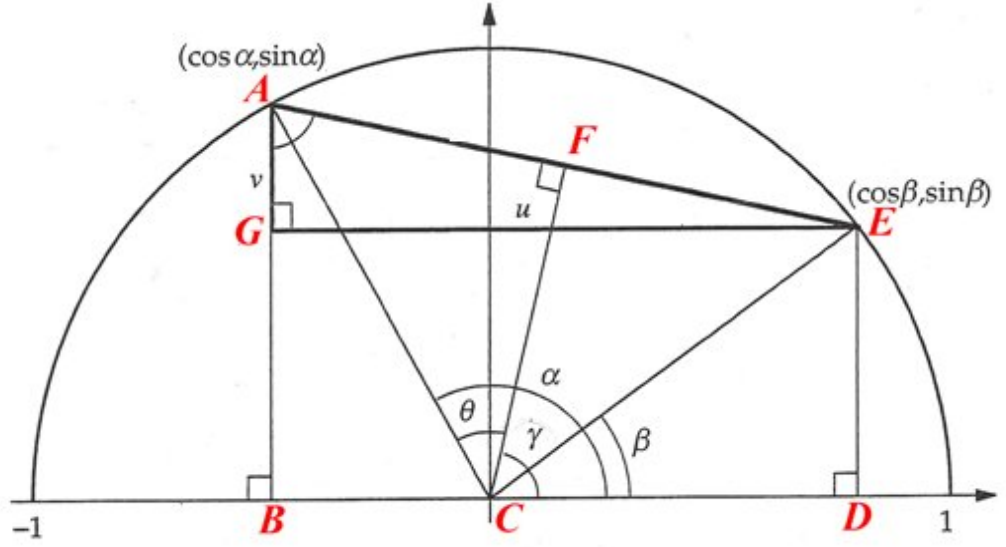
$\theta = \frac{\alpha - \beta}{2}$ ve $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ olmak üzere, yukarıdaki şekil aşağıdaki formüllerin görsel ispatını ifade etmektedir. Bu ispatları gösteriniz.

$$\sin \alpha - \sin \beta = v = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \beta - \cos \alpha = u = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

MÖA'larına trigonometrik dönüşümlerle ilgili Şekil 4.1.44 teki görsel ispat sorulmuştur.

Trigonometrik dönüşümlerin görsel ispattan elde edilmesi:



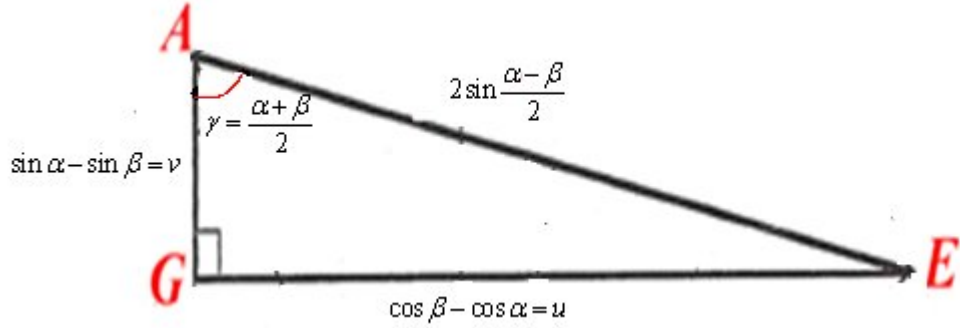
Şekil yukarıdaki gibi harfler verilsin ve A ve E noktalarının koordinatlarını yazılsın. FCE açısına x diyelim. Şekilden

$$\theta + x + \beta = \alpha$$

yazılabilir. Soruda verilen $\theta = \frac{\alpha - \beta}{2}$ değeri yukarıdaki eşitlikte yerine yazıldığında,

$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$ bulunur. Yani $m(\widehat{FEC}) = \theta$ olur. Bu ifade şekilde yerine yazıldığında ACE üçgeninin ikizkenar üçgen olduğu görülür.

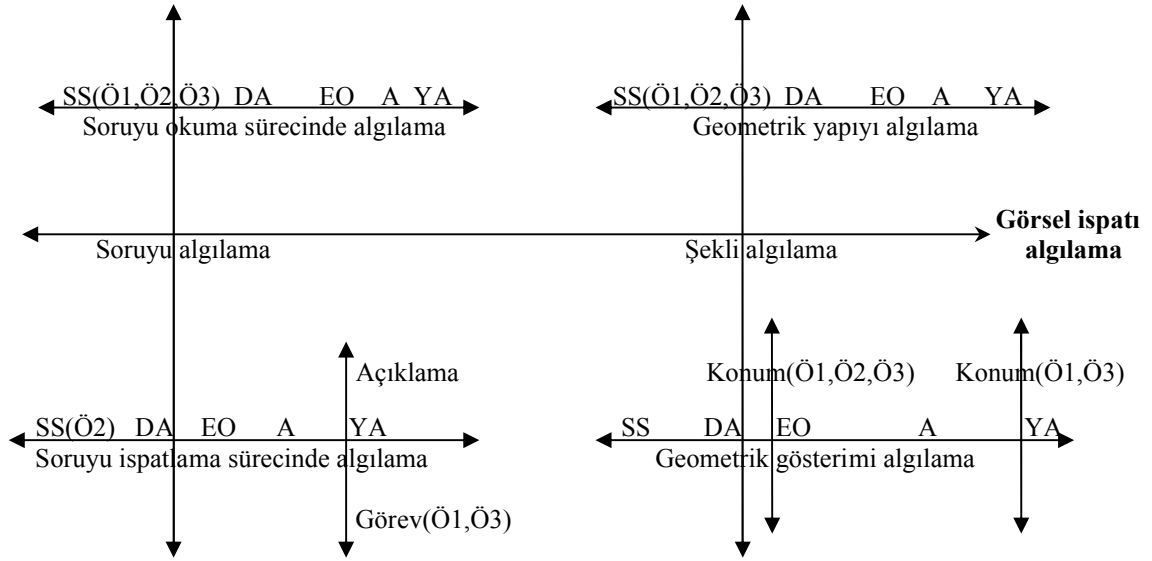
olduğu görülür. AGE üçgeni için elde edilenler aşağıdaki gibi yazılırsa,



Buradan $v = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ ve $u = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ olduğu görülür.

Görsel ispatı algılama: MÖA'larının bu kategoriye ait durumları Şekil 4.1.45.

te gösterilmiştir. Görsel ispatta yer alan " $\theta = \frac{\alpha - \beta}{2}$ ve $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ olmak üzere, yukarıdaki şekil aşağıdaki formüllerin görsel ispatını ifade etmektedir. Bu ispatları gösteriniz." ifadesinde " $\theta = \frac{\alpha - \beta}{2}$ ve $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ olmak üzere, yukarıdaki şekil aşağıdaki formüllerin görsel ispatını ifade etmektedir." cümlesi açıklama, "Bu ispatı gösteriniz" görev cümlesi alınarak MÖA'larının soruya olan tepkileri bu cümleler doğrultusunda değerlendirilmiştir.



Şekil 4.1.45. Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatının Algılanması

Soruyu algılama alt kategorisi soruyu okuma sürecinde algılama boyutu:

MÖA'larının soruyu okuma sürecinde soruyu algılamalarına dair herhangi bir durum ortaya çıkmamıştır. Bu nedenle soruyu okuma sürecinde algılama boyutu sorunsuz süreç olarak alınmıştır.

Soruyu algılama alt kategorisi soruyu ispatlama sürecinde algılama boyutu:

Bu alt boyuta dair 2.MÖA ile ilgili herhangi bir durum ortaya çıkmadığından sorunsuz süreç olarak alınmıştır. 1.MÖA ve 3.MÖA'nın soruyu yanlış anladıkları görülmüştür.

1.MÖA, soruda yer alan matematiksel ifadeyi yanlış anlamıştır. 1.MÖA, u ile ilgili soldaki eşitliğin u ya eşit olduğunu kullanmaya çalışmıştır ve uzunluğu negatif bulmuştur. Bunun üzerine araştırmacı, soruda verileni kullanamayacağını, kendisinden zaten onu bulması istendiğini söylemiştir (1.Görüşme).

Araştırmacı: Şunu nasıl yapmıştın?

1.MÖA: $\sin \alpha$ yı biliyorduk. Buradan $\cos \alpha$ ya geçtik. $\cos \beta$ yı biliyoruz. $\cos \beta - \cos \alpha$ dan bahsedilmiş ve u ya eşit olduğu verilmiş. $\cos \beta$ ile $\cos \alpha$ yı yerine yazıp u ya eşitlediğimde $b = -\sqrt{1-(a+v)^2}$ çıktı.

Araştırmacı: u ya eşitlediğinde? Ama u ya eşitlediğinde... Soruda onun öyle olduğunu gösterin demiş. Ama sen soruda vermiş, kabul edilmiş gibi uyguladın?

1.MÖA: Ki zaten burada uzunluk negatif çıktı. Burası $\sin \alpha$, burası $\cos \gamma$, aynı şekilde de burada da θ ve γ var.

3.MÖA'nın da soruda yer alan matematiksel ifadeyi yanlış anladığı soruyu ispatlama sürecinde ortaya çıkmıştır. Araştırmacı 3.MÖA'na u ve v nin eşit olduğu eşitliklerin nasıl bulunabileceği konusunda ne düşündüğünü sormuştur. 3.MÖA bu eşitliklerin ayrı ayrı şekilden çıkarılabileceğini söylemek yerine, birini şekilden bulup, diğerini onun yardımıyla elde edilebileceğini, yalnız sağ taraftakinden sol taraftakine geçmenin daha kolay, diğer ihtimalin daha zor olduğunu söylemiştir (2.Görüşme).

Araştırmacı: Sence nasıl bulmuş olabilir u ve v nin solundaki ve sağındaki eşitlikleri?

3.MÖA: Yani buradan şunların açılımını yazdığında her birinin şunu verir diye düşünüyorum.

Araştırmacı: $2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ nin açılımını yazarsan oradan da o bulunur diyorsun.

3.MÖA: Evet, ya da tam tersi... Buradan gitmek daha zor olabilir ama buradan gitmek daha...

Araştırmacı: $\sin \alpha - \sin \beta$ dan başlayıp diğer tarafa geçmek daha zor diyorsun.

Şekli algılama alt kategorisi geometrik yapıyı algılama boyutu: Bu kısım ile ilgili herhangi bir durum gözlenmediğinden sorunsuz süreç olarak alınmıştır.

Şekli algılama alt kategorisi geometrik gösterimi algılama boyutu konum alt boyutu: MÖA'ları şekildeki kenar uzunlukları ve açılarını algılamakta zorluk çekmişlerdir. Bu durum 1.görüşmelerde ortaya çıkmış, 2.görüşmelerde gözlenmemiştir. MÖA'larının üçü de şekle ait kenar uzunlukları ile ilgili sorular sormuşlardır.

1.MÖA, u nun ait olduğu kenar uzunluğunu yanlış anlamıştır (1.Görüşme).

1.MÖA: *Birim çemberde olduğumuz için O ve B noktalarının arasındaki uzaklıkta yarıçapa eşit olacak, burası da 1. Karşı bölü hipotenüsten a olacak. $\cos \beta = \frac{u}{1}$.*

Araştırmacı: *Ama şuranın hepsine $\cos \beta$ dedin. $|AE| = u$ değil mi?*

1.MÖA: $|AE| = u$ evet.

Araştırmacı: $|AO| \neq u$ değil mi? Bu durumda $|AO| = u$ olsaydı olurdu?

1.MÖA: *Evet. O zaman şuraya da b dersek, u-b kadar olur.*

2.MÖA, şekli incelerken emin olmak için sorudaki u ve v uzunluğunun tam olarak neresi olduğunu sormuştur (1.Görüşme).

2.MÖA: *Şuradaki v şu uzunluk değil mi? u da şu dikdörtgenin mi uzunluğu?*

3.MÖA da kenar uzunluğundan emin olamamış, araştırmacıya sormuştur. (1.Görüşme).

3.MÖA: *u tamamı değil mi?*

Araştırmacı: *Evet, tamamı, yani $|FC|$, v de $|FB|$.*

3.MÖA, şekildeki kenar uzunluğunu yanlış anlamış, araştırmacıya tekrar sormuştur (1.Görüşme).

3.MÖA: *Şurası u mu diye düşünüyorum da şu anda.*

Araştırmacı: *$|FC|$ nin tamamı u.*

3.MÖA: *$|FC|$? öyle mi?*

Araştırmacı: *Evet, oranın tamamı u.*

3.MÖA: *Ben şurası u sanmıştım, onu buraya taşımayı düşünüyordum.*

Araştırmacı: *$|FC|$ nin tamamı u, $|FB|$ de v .*

1.MÖA ve 3.MÖA şekildeki açılarla ilgili soru sormuşken, 2.MÖA açılara yönelik herhangi bir soru sormamıştır.

1.MÖA, soruyu çözerken θ açısının neresi olduğundan emin olamamış, araştırmacıya sormuştur (1.Görüşme).

1.MÖA: *Birim çemberin yarısı olduğu için buralar yarıçap. Buraya a dersem burası da a. θ buranın tamamı mı?*

Araştırmacı: *Evet.*

1.MÖA γ nın temsil ettiği açıyı yanlış anlamıştır (1.Görüşme).

1.MÖA: *Burası $\alpha - 90$, $90 - \beta$, şurası γ . Tamamı $90 - \gamma$. Burası xise, $90 - x$.*

Araştırmacı: *Neresi $90 - \gamma$?*

1.MÖA: *Şurası γ , buranın dik olduğu verilmiş. COB üçgeninde ...*

Araştırmacı: *Ama şuranın tamamı COA...*

1.MÖA: *Burası θ , γ olarak almayacağız.*

3.MÖA, soruyu okuduktan sonra şekli incelerken açıları sormuştur (1.Görüşme).

3.MÖA: *θ şurası?*

Araştırmacı: *O zaman θ , BOE açısı oluyor.*

3.MÖA: *BOE mi? Şuranın tamamımıymış? α da tamamı mı?*

Araştırmacı: *Evet, tamamı, yani BOD açısı oluyor. β da COD açısı oluyor.*

3.MÖA, şekildeki açıların neresi olduğundan emin olamamış, araştırmacıya tekrar sormuştur (1.Görüşme).

3.MÖA: *Şurası θ mıydı?*

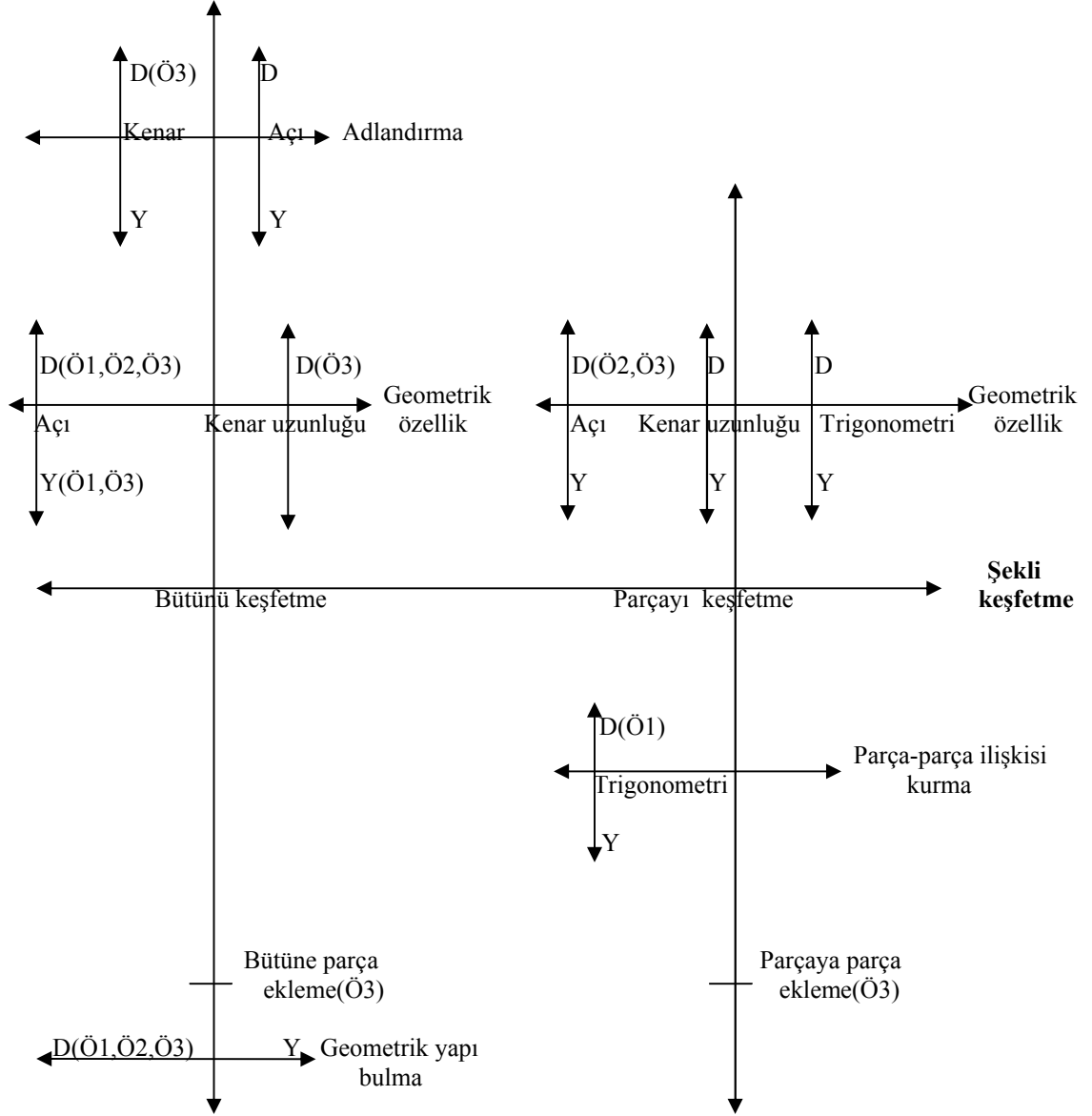
Araştırmacı: *Evet, BOE açısı θ ya eşit.*

3.MÖA: *O zaman burası da θ*

Araştırmacı: *EOC de θ .*

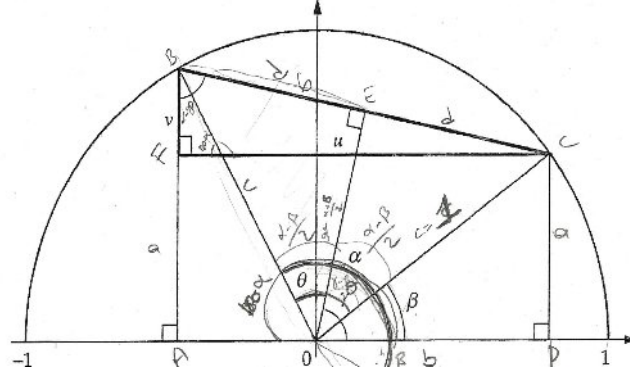
3.MÖA: *Evet.*

Şekli keşfetme: MÖA'larının bu kategoriye ait durumları Şekil 4.1.46. da gösterilmiştir.



Bütünü keşfetme alt kategorisi adlandırma boyutu kenar alt boyutu: 3.MÖA, şekilde bulunan kenar uzunluklarına harfler vermiştir (Şekil 4.1.47, 1.Görüşme).

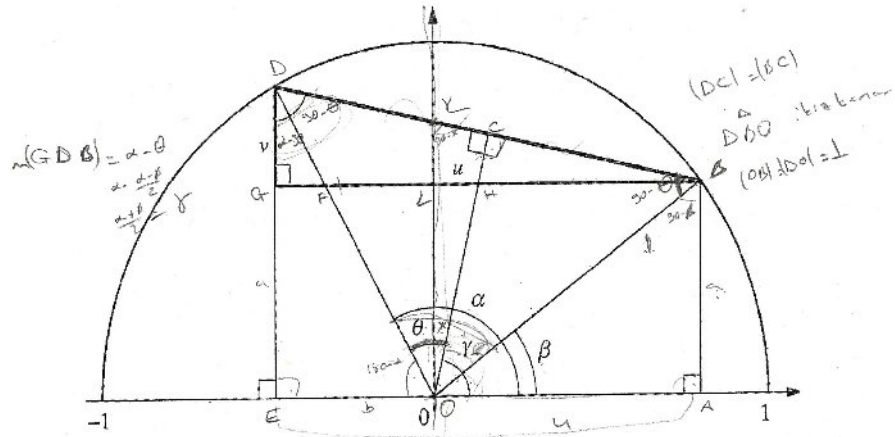
3.MÖA: Evet. Şuralara değerler versem; a, b, c olsun. $\sin \beta = \frac{a}{c}$, şurası da d olsun. c ise şurası da c dir.



Şekil 4.1.47. 3.MÖA'nın Şekildeki Kenar Uzunluklarını Harflendirmesi

Bütünü keşfetme alt kategorisi geometrik özellik boyutu açığı bulma alt

boyutu: 1.MÖA, $\frac{\alpha - \beta}{2} = \theta$ olmasından da yararlanarak şekildeki bazı açıları bulmuştur (Şekil 4.1.48 ve Şekil 4.1.49, 1.Görüşme).



Şekil 4.1.48. 1.MÖA'nın Şekil Üzerindeki 1. Çözümü

$$\begin{aligned}
\angle COB &= \gamma \\
\angle COA &= \gamma \\
\angle BOA &= \beta \\
\angle DOB &= \alpha - \beta = 2\theta \\
\angle OCB &= \theta \\
\angle OAB &= \theta
\end{aligned}$$

Şekil 4.1.49. 1.MÖA'nın Bazı Açıları Bulması

1.MÖA, farklı üçgenlerdeki açılar ve soruda verilenlerden yararlanarak GDB açısını bulmuştur (Şekil 4.1.48.).

1.MÖA: Şurası $\alpha - m(\widehat{GDB}) = \alpha - \theta$, burada θ nın yerine $\alpha - \frac{\alpha - \beta}{2}$ yazarsam, $\frac{\alpha + \beta}{2}$ yapar.

Araştırmacı: GDB nin $\frac{\alpha + \beta}{2}$ olduğunu buldun.

1.MÖA: GDB $\frac{\alpha + \beta}{2}$, bu da γ idi.

1.MÖA, x açısını diğer açılar türünden yazmaya çalışmıştır, fakat yanlış sonuç bulmuştur (Şekil 4.1.48, 1.Görüşme).

Araştırmacı: Sen ne yapmak istemiştin, amacın neydi buradaki işlemi yaparken?

1.MÖA: Pardon, şurası eksi olacak. Ben burada x i yok etmeye çalıştım. Şuraya yazdıklarımla $\alpha - 90$, x i yazmaya çalışıyorum. Burası eksi, burası artı, burası eksi... Sıfır eşittir sıfır çıktı. İşime yaramadı.

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \theta + \gamma \\
 \theta - x &= \alpha - 90 \\
 x &= \theta - \alpha + 90 \\
 x &= \theta + \gamma - \theta + 90 \\
 x &= \theta + 90 - \alpha \\
 2x &= 2(\theta + 90)
 \end{aligned}$$

Şekil 4.1.50. 1.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm

1.MÖA, önceden bulamadığı x açısının değerini, başka parçalardaki açılar yardımıyla, DOC açısından yararlanarak diğer açılara bağlı olarak bulmuştur (Şekil 4.1.51, 2.Görüşme).

$$\begin{aligned}
 \alpha - 90 &= \theta - x \\
 x &= \theta + 90 - \alpha
 \end{aligned}$$

Şekil 4.1.51. 1.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm

2.MÖA da şekilde bulunan açılar bulmaya çalışmıştır (Şekil 4.1.52, 1.Görüşme).

Araştırmacı: BOE yi $\frac{\alpha - \beta}{2}$ bulmuştun. O yüzden OBE ye de $90 - \frac{\alpha - \beta}{2}$ dedin.

3.MÖA: Evet, şurası da $\alpha - 90$ zaten, sonra şu açıları da toplarsam, ne çıktı?

Araştırmacı: ABO açısıyla OBE açısını topluyorsun değil mi?

3.MÖA: Evet. Orası da $\frac{\alpha - \beta}{2}$ çıkıyor. Demek ki orası da $\frac{\alpha - \beta}{2}$, çok ilginç. Şunun

tamamı $\frac{\alpha - \beta}{2}$ çıktı. Oranın tamamı ama ☹, ama olsun ☺, yanlış değilim doğrudum. O zaman...

Araştırmacı: ABC açısını $\frac{\alpha - \beta}{2}$ mi buldun?

3.MÖA: FBC açısı $\frac{\alpha - \beta}{2}$ çıkıyor.

Araştırmacı: Hangisi? FBC açısı?

3.MÖA: Yani θ , öyle çıktı. Şurası $\alpha - 90$, burası da o zaman $90 - \frac{\alpha - \beta}{2}$ dedik.

Topladığımızda $\frac{\alpha - \beta}{2}$ oluyor.

3.MÖA, görsel ispat üzerinde düşünmeye devam etmiştir. Çizdiği şekilden yararlanarak açılar arasında bir eşitlik bulmuş ve bunu nasıl kullanabileceğini sorgulamıştır (Şekil 4.1.53, 1.Görüşme).

Araştırmacı: Onu nereden yazdın?

3.MÖA: Şimdi şurası α ...

Araştırmacı: BOD açısını diyorsun.

3.MÖA: Şuradan bakalım $\alpha + \beta$, baktığımızda şurası θ , şurası da θ , doğrudum değil mi?

3.MÖA, EGO üçgenini oluşturduktan sonra bu oluşturduğu şekle bağlı olarak bazı şekillerin kenar uzunluklarını bulmuştur.

3.MÖA: *Şurası ne olur ki?*

Araştırmacı: *E noktasından OD ye bir dikme indirdin.*

3.MÖA: *Evet, şuralar $\frac{u}{2}$ şeklinde ayırıyor.*

Araştırmacı: *Neresi $\frac{u}{2}$ dedin?*

3.MÖA: *Şimdi şunlar eşit olduğundan dolayı, aaa bir dakika olmaz, olur mu, olur. Paralel indirdim, şuralar eşitse...*

Araştırmacı: *$|BE|$ ile $|EC|$ birbirine eşitse dedin?*

3.MÖA: *Şuralar birbirine eşit. Şuraya H diyeyim. $|FH|$ ile $|HC|$ birbirine eşit.*

Araştırmacı: *Öyle dedin, o zaman $|HC|$ ye $\frac{u}{2}$ dedin.*

3.MÖA: *Evet, şuraya ne kalmış oluyor?*

Araştırmacı: *İndirdiğin dikmenin ayağına da G de istersen.*

3.MÖA: *O zaman $|OG| \cdot \cos \beta - \frac{u}{2}$ oluyor.*

Bütünü keşfetme alt kategorisi bütüne parça ekleme boyutu: 3.MÖA, şekildeki doğru parçalarını uzatarak iki üçgen oluşturmuş, buradan $\frac{\alpha + \beta}{2}$ açısını bulmaya çalışmıştır. (Şekil 4.1.53, 1.Görüşme).

Araştırmacı: *Bu çizdiğini doğrusal mı çizdin? BO...*

3.MÖA: Evet, doğrusal çizdim, $\alpha + \beta$, şurası $180 - (\alpha + \beta)$ olacak, ne işime yarayacak? Şurası doğrusal da çizemedim, neyse. $\frac{\alpha + \beta}{2}$ nereye denk gelir? $\cos \beta$, $\cos \beta = b$ zaten.

Araştırmacı: Onu nereden yazdın? $\cos(180 - \alpha)$ dedin?

3.MÖA: $-\cos \alpha$ oldu. Şuradan yapmaya çalışıyorum da, hımm evet olmadı.

3.MÖA, 2.görüşmede de aynı şekli çizerek $\alpha + \beta$ açısını bulmaya çalışmıştır.

Araştırmacı: Onu nereden yazdın? $\alpha + \beta = 2\theta + 2\beta$ yı?

3.MÖA: α zaten şurası, bir tane daha β eklersek şu açı olacak, ben yine simetriğini alıyorum. $\alpha + \beta = 2\theta + 2\beta$ olmuş olacak. Şuradan çizdiğimde, değil mi?

Araştırmacı: Onu çiz istersen oraya.

3.MÖA: Tamam o zaman. Şu da β , o zaman $\alpha + \beta = 2\theta + 2\beta$ olur. Bu durumda $\frac{\alpha + \beta}{2} = \theta + \beta$ olacak. $\theta + \beta$, hımm yani işte şu açı, dün de buraya kalmıştım.

Bütünü keşfetme alt kategorisi geometrik yapı boyutu: MÖA'ları şekilde ikizkenar üçgen olduğunu bulmuşlardır.

1.MÖA, açıortayın aynı zamanda yükseklik olmasından yararlanarak DOB nin ikizkenar üçgen olduğunu bulmuştur. (Şekil 4.1.48, 1.Görüşme).

1.MÖA: Burası θ , burası da θ , burası da o zaman $90 - \theta$. Burası ikizkenar üçgendir. 1, 1, θ , θ .

2.MÖA, yarıçapların eşit olmasından yararlanarak, EGC üçgeninin ikizkenar üçgen olduğunu bulmuştur (Şekil 4.1.52, 1.Görüşme).

Araştırmacı: *Ya da istersen onları harflendir, öyle daha kolay olur.*

2.MÖA: *Tamam. Şimdi şurada şu bir yarım çember ise, şu bir yarıçap ise, şu da bir yarıçap olduğu için...*

Araştırmacı: *Yani GC yi ve EG yi söylüyorsun.*

2.MÖA: *Evet, GC yi ve EG yi söylüyorum. Onlar yarıçap olduğu için eğer şu G deki açı $\alpha - \beta$ ise, buradan tabana inen dikme varsa bunları iki eşit parçaya bölecektir. İkizkenar üçgen çünkü ikisi de yarıçap. Yani şu kısım, şunu nasıl gösteriyim, şöyle gösteriyim, şurası.*

3.MÖA, yarıçaplardan faydalananak şekilde ikizkenar üçgenin yer aldığını bulmuştur (Şekil 4.1.53, 1.Görüşme).

Araştırmacı: *Onu nereden yazdın? $|BO|$ ile $|OC|$ nun eşit olduğunu...*

3.MÖA: *Çünkü çemberin yarıçapları olmuş oluyor.*

Araştırmacı: *Evet, öyle düşündün. Çemberin yarıçapı olduğu için yazdın.*

3.MÖA: *Evet, o zaman şunlar d, şu da birbirine eşittir. Çünkü ikizkenar olmuş oldu.*

Parçayı keşfetme alt kategorisi geometrik özellik boyutu açılı boyutu:

2.MÖA, ikizkenar üçgeni bulduktan sonra bu üçgenin özelliklerini keşfetmeye başlamış, tepe noktasından çizilen yükseklik aynı zamanda açıortay olduğundan buradaki açıortaya ait açıları bulmuştur (Şekil 4.1.52, 1.Görüşme).

Araştırmacı: Ama bak şurası α . Şöyle α . Şuradan başlıyor α , şöyle devam ediyor.

2.MÖA: Tamam. β ydı burası. O zaman ben α dan çıkardım. Şurası sadece $\alpha - \beta$ oldu, sadece şu kısım. Şurası o zaman $\frac{\alpha - \beta}{2}$ diyorum. Şu kısımda diyorum ki $\frac{\alpha - \beta}{2}$.

Yani EGF üçgeninin açısı.

Araştırmacı: Ya da EGF açısı da diyebilirsin.

2.MÖA: Tamam, EGF açısı $\frac{\alpha - \beta}{2}$.

Araştırmacı: Diğerini de yaz, FGC açısı.

2.MÖA: O da $\frac{\alpha - \beta}{2}$, tamam.

3.MÖA da şekilde ikizkenar üçgenin olduğunu bulduktan sonra ikizkenar üçgenin tepe açısını bulmuştur (Şekil 4.1.53, 1.Görüşme).

3.MÖA: İkizkenar ise şurası $\frac{\alpha - \beta}{2}$, burası da $\frac{\alpha - \beta}{2}$ olur.

Araştırmacı: Onu nereden yazmıştın?

3.MÖA: İkizkenar üçgen olduğu için şuralar eşit olacak, eşit ayıracak yani.

Parçayı keşfetme alt kategorisi geometrik özellik boyutu kenar uzunluğu alt boyutu: 1.MÖA, DOB üçgeninin ikizkenar üçgen olduğunu bulmuş, sonra bu özelliğe dayanarak eşit kenar uzunluklarını belirtmiştir (Şekil 4.1.48, 1.Görüşme).

1.MÖA: Burası θ , burası da θ , burası da o zaman $90 - \theta$. Burası ikizkenar üçgendir. $1, 1, \theta, \theta$. Şuranın uzunluğu ile şuranın uzunluğu birbirine eşittir.

Araştırmacı: $|DC| = |CB|$?

1.MÖA: $|DC| = |CB|$ olur.

Araştırmacı: $|OD| = |OB|$ olduğunu da buldun?

1.MÖA: ΔDBO ikizkenar ise $|OD| = |OB| = 1$

2.MÖA ikizkenar üçgene geri dönmüş, ikizkenar üçgeni oluşturan üçgenlerden biri olan EGF üçgeni için EF ve FG kenar uzunluklarını bulmuştur (Şekil 4.1.52, 1.Görüşme).

2.MÖA: O zaman $\sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ yi, EGF üçgeni için yapıyorum. EGF için

$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{|EF|}{1}$. O da EF ye eşittir. EF uzunluğu $\sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ imiş. Burası da aynı

şeydir. Şu da $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, şurasıdır.

2.MÖA, ABCD dikdörtgeninin AD ve BC kenar uzunluklarını bulmuştur (Şekil 4.1.52, 1.Görüşme).

2.MÖA: Başka ne var?

Araştırmacı: Şimdi BC ve...

2.MÖA: BC ve AD yi yazdım, $\sin \beta$ onlar. Şurası da $\cos \beta$.

3.MÖA yamukta orta taban uzunluğunu hesaplama kuralından yararlanarak $|EG|$ yi bulmuştur (Şekil 4.1.54, 2.Görüşme).

3.MÖA: Ben hep buradan çıkmaya çalıştım şu ana kadar nedense. Burası $\sin \beta$, burası $\sin \alpha$ Yamukta bir kural vardı. Yanlış mı hatırlıyorum bilmiyorum ama geometrik kuralları. Şu orta taban dikmesi olmuş oluyor. Yani şu iki tane eşit parçalara ayırdığı için, şu parça bununla bunun toplamının yarısı mıydı? Öyle bir şey vardı. Şu uzunlukla şu uzunluğun toplamının yarısı diye hatırlıyorum.

Araştırmacı: Yani EG den indirilen dikme, AB ve CD nin toplamalarının yarısı...

3.MÖA: Diye hatırımda kalmış ama tam emin değilim.

Araştırmacı: O zaman EG yi $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2}$ diye düşündün.

3.MÖA, OCD üçgeninde $|CD|$ yi ve BFC üçgeninde $|EH|$ yi üçgenlerin kendi içindeki özelliklerden yararlanarak bulmuştur (Şekil 4.1.54, 2.Görüşme).

3.MÖA: Şurası aynı zamanda $\sin \beta$

Araştırmacı: Neresi $\sin \beta$?

3.MÖA: Şuradan dolayı.

Araştırmacı: CD .

3.MÖA: Şurası da $\frac{v}{2}$.

Araştırmacı: Şuradaki noktaya da bir harf ver.

3.MÖA: H diyelim.

Araştırmacı: Onu nereden yazdın? Tekrar ifade edelim.

3.MÖA: Burası yine orta taban $\frac{v}{2}$, çünkü eşit ayırmış bunları.

Araştırmacı: O yüzden EH, $\frac{v}{2}$ olur dedin.

3.MÖA, BOE üçgeninde BOE açısının ve COD üçgeninde COD açısının sinüslerini bulmuştur (Şekil 4.1.53. ve Şekil 4.1.56, 1.Görüşme).

$$\sin \beta = \frac{a}{c}$$

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{d}{c} = d$$

Şekil 4.1.56. 3.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm

Parçayı keşfetme alt kategorisi parça-parça ilişkisi boyutu trigonometri alt boyutu: 1.MÖA DGB ve CHB üçgenlerindeki γ dan yararlanarak $|HB|$ yi bulmuştur (2.Görüşme).

1.MÖA: $\sin \gamma = \frac{\sin \theta}{|HB|}$ aynı zamanda $\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$

Araştırmacı: $|HB|$ mi dedin?

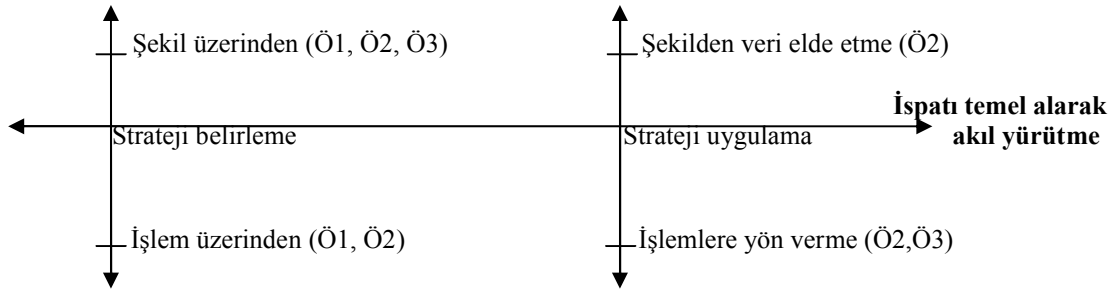
1.MÖA: $|HB|$ şurası. CHB üçgenini kullandım.

$$\sin \gamma = \frac{\sin \theta}{|HB|} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Şekil 4.1.57. 1.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm

Parçayı keşfetme alt kategorisi parçaya parça ekleme boyutu: 3.MÖA EG dikmesini indirerek EOG üçgenini oluşturmuştur (Şekil 4.1.54, 2.Görüşme).

İspatı temel alarak akıl yürütme: MÖA'ları görsel ispatla uğraşırken soruda kendilerinden istenilen bilgileri çıkarmaya yönelik akıl yürütmüşlerdir.



Şekil 4.1.58. Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatında İspatı Temel Alarak Akıl Yürütme

Strateji belirleme boyutu şekil üzerinden alt boyutu: 1.MÖA, şekil üzerinden hangi verileri elde edebileceğini, bunların ispata ulaşmada ne işe yaracağını düşünmüştür (1.Görüşme).

1.MÖA: *Burada her tarafın karelerini alsam işime yaramaz. Şu DB uzunluğunu biliyor olsaydım, $u^2 + v^2$ nin değerini biliyor olacaktım. Öyle bir durumda her tarafın karesini alabilirdim. Kareler toplamı benim için bir şeyler getirebilirdi. Çünkü aynı açılar var, karelerin toplamaları ve çarpımları işime yarardı. KOC için düşünsem burası da γ yapar.*

1.MÖA, şekil üzerinde neler elde ettiğini gözden geçirirken şekilden hangi veriyi elde etmesi gerektiğinden bahsetmiştir (2.Görüşme).

1.MÖA: Şuraya x demiştik. Şuraya kendim A demiştim, buraya B demiştim. Şuralar birbirine eşitti. Şu KO ile OA birbirine dikti, eksenlerdi bunlar. Burayı x bulmuştuk. Buranın tamamı γ idi. Burası dikti. Burası yarıçaptı, l 'di. $\cos \beta$ lazım.

2.MÖA, şekil üzerinde düşünerek şekilden sonuca yönelik neler elde edebileceğini ifade etmiştir (1.Görüşme).

2.MÖA: Diğer tarafı da şu üçgenden bulacağımı düşünüyorum, EDC üçgeninden. Ama açılar gözümde canlanmıyor. Mesela şu açı ne olabilir, DEC açısı? Bunu bulsam...

Araştırmacı: Sen şunu düşünmüşsün zaten, $\alpha - 90$ demişsin DEG açısına.

2.MÖA: O açıya ben x desem, şöyle gelecek, mesela $\cos x = \frac{v}{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}$

Araştırmacı: Sen $\alpha - 90$ na mı x dedin?

2.MÖA: Şuraya dedim. En son şunu düşündüm: şu üçgende u ve v ortak olduğu için u ve v 'nin son iki eşitliğinin buradan geleceğini düşündüm.

3.MÖA, BFC üçgeninde v uzunluğu belirtildiği için, bu üçgenin açılarını verilen diğer açılar cinsinden yazması gerektiğini düşündüğünü söylemiştir (1.Görüşme).

3.MÖA: Benim şu açıları taşımam lazım ama...

Araştırmacı: Hangi açıları?

3.MÖA: Yani v ye, şuradaki dik üçgende daha rahat hareket edebilmem için bence, şu açıları taşımam lazım ama...

Araştırmacı, 3.MÖA'na neyi bulmaya çalıştığını sormuş, 3.MÖA görsel ispatta verilen $\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = d$ yı bulduğunu şekilden $\frac{\alpha + \beta}{2}$ yı bulmaya çalıştığını söylemiştir. Buradan da bu açının kosinüsünü bulacağını söylemiştir (1.Görüşme).

3.MÖA: $\frac{\alpha + \beta}{2}$ nin nereye düştüğünü bir kestirebilsem oradan...

Araştırmacı: *Sen şimdi neyi bulmaya çalışıyorum demiştin?*

3.MÖA: *Ben şunları bulmaya çalışıyorum. $\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = d$ onu bulduk da, şu $\frac{\alpha + \beta}{2}$ nin nereye düşeceğini bulmaya çalışıyorum.*

Araştırmacı: *Hangi açı? $\frac{\alpha + \beta}{2}$ onu mu çalışıyorsun?*

3.MÖA: *Evet, oradan kosinüsünü alacağım çünkü. Böylelikle belki de ispatlamış olacağız.*

3.MÖA, şekilden veri elde ederken ayrı ayrı olarak iki kere θ açısını kullanmaması gerektiğinden bahsetmiştir (2.Görüşme).

Araştırmacı: *O zaman EG yi $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2}$ diye düşündün.*

3.MÖA: *Şuraya ben $\cos \theta$ demiştim zaten. θ lara girmemeliyim.*

3.MÖA: *Şurası da $\sin \beta$ dır, zaten.*

Araştırmacı: *HG de, CD ye paralel olduğundan $\sin \beta$ dedin.*

3.MÖA: *Şu θ ya girmemeliyim ama...*

Strateji belirleme boyutu işlem üzerinden alt boyutu: Soruda istenilen eşitliklerden biri de kosinüs ile ilgili olduğundan 1.MÖA, işlemler üzerinden sonuca nasıl ulaşabileceğini araştırmıştır (2.Görüşme).

1.MÖA: $\sin \alpha$ *yı bildiğimiz için kosinüsünü de bulabiliriz. Buradan a yı yok edebilir miyim? Ya da u cinsinden değerini bulabilir miyim? Benden kosinüsleri istiyor.*

1.MÖA, elde etmesi gereken sonuca hangi işlemler yoluyla ulaşabileceğine dair fikir yürütmüştür (2.Görüşme).

1.MÖA: v *nin $2 \sin \theta \cos \gamma$ olduğunu bulmamız gerekiyor. γ nin u ve v cinsinden değerlerini bildiğimiz için burada eşitleyip $\sin \theta$ yı u ve v cinsinden yazarsam belki bir şeyler gelir diye düşünüyorum.*

2.MÖA da elde ettiği sonuçları soruda istenilen biçimde nasıl yazabileceğini düşündüğünü dile getirmiştir (1.Görüşme).

Araştırmacı: *Şimdi ne düşünüyorsun?*

2.MÖA: *Şimdi şu v ve u yu $\cos \alpha$ ve $\sin \beta$ onlara bağlı yazabilir miyim diye düşünüyorum. Çünkü v ve u sabit değer olarak kaldı. $\cos \alpha$ ve $\sin \beta$ gibi bir şey olmalı. Onu nasıl yazarım diye düşünüyorum.*

Strateji uygulama boyutu şekilden veri elde etme alt boyutu: 2.MÖA, şekilden elde ettiği açıyı önceden planlayarak bulduğunu belirtmiştir (1.Görüşme).

Araştırmacı: *Hangi açı?*

2.MÖA: DEC açısını bilmiyordum. Buraya $\alpha - 90$ demiştim önceden. Sonra dedim ki şu küçük üçgen EGF üçgeninde şu EGF açısı $\frac{\alpha - \beta}{2}$ idi. Burası 90, o zaman burası $90 - \frac{\alpha - \beta}{2}$ oldu. Şu DEC açısını istiyordum. O zaman $\alpha - 90 + 90 - \frac{\alpha}{2}$, Topladım. Buradan ben bu açığı $\frac{\alpha + \beta}{2}$ buldum, DEC açısını. Sonra aslında şurada ben onu kurgulamıştım, yani ona ihtiyacım olduğunu hissetmiştim ona göre yazmıştım.

Strateji uygulama boyutu işlemlere yön verme alt boyutu: 2.MÖA, v nin sağındaki eşitliği bulduktan sonra u nun sağındaki eşitliği bulabileceğini de düşünerek yaptığı işleme yön vermiştir.

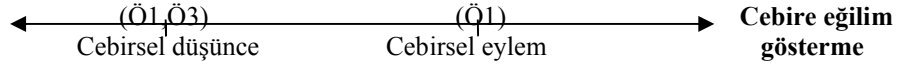
2.MÖA: Tamam bu varsa zaten artık bunun da çıkacağını düşünüyorum. Yine aynı şekilde buradan bu sefer neyi kullanırım? Sinüsünü kullanayım. $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} =$ diyorum.

3.MÖA, EG uzunluğunu nasıl bulabileceğini sorgulamış ve buna dair işlemler yapmıştır (2.Görüşme).

3.MÖA: Şimdi EG uzunluğunu nasıl bulacağız?

3.MÖA: Şöyle olsun ya da $\sin(\theta + \beta)$, $\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \sin(\theta + \beta) = \frac{EG}{\cos \theta}$ oldu. cos θ dan kurtulma yollarını ararsam... cos θ , başka bir yerden bulamam herhalde. EG veya kosinüs... OG yi ben nereye yazmıştım? Hımm...

Cebire eğilim gösterme: 1.MÖA ve 3.MÖA, sonuca ulaşmak için formül kullanmayı düşünmüşlerdir.



Şekil 4.1.59. Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatında Cebire Eğilim Gösterme

Cebirsel düşünce boyutu: 1.MÖA, istenilen eşitliğe toplam ve fark formüllerini kullanarak ulaşabileceğini düşünmüştür.

1.MÖA: *Evet. Burada $\sin \gamma$ yı yazarsak u ve v cinsinden $\sin \gamma$ yı yazdık orada var, gerek yok. Burada $\cos \gamma$ da $\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$. Buradan θ ya geçmemiz lazım. Ya toplam, fark formüllerini kullanacağız. $\sin \theta$ yı bulabilmek için. Çünkü hala CB ve CO uzunluklarını bilmiyoruz.*

3.MÖA da toplam ve fark formüllerini kullanmayı aklından geçirmiştir.

3.MÖA: *Şuradan yola çıkmaya çalışıyorum da. α buranın tamamı, β yine simetriğini aldım aynı şekilde, $\alpha + \beta$ nın yarısı acaba nereye denk geliyor? β , β , 2β . Burada toplam ve fark formüllerini kullanabiliyor muyuz?*

Araştırmacı: *Yok, geometrik kuralları kullanarak sadece şekilden çıkarmanı istiyoruz.*

Cebirsel eylem boyutu: 1.MÖA, çözümünde yarım açı formülünü kullanmış, araştırmacı sonuca şekilden ulaşması gerektiğini belirtmiştir.

1.MÖA: Burada yarım açı formülünü kullandım. Şurada bunun biliyorum. α yı ve β yı biliyorum. γ yı biliyorum. $\alpha + \beta$ lazım. 2 yi karşıya attım, 2γ . Ben $\sin \gamma$ yı biliyorum ama $\sin 2\gamma$ yı bilmiyorum. Yarım açı formülünden $\sin 2\gamma = 2 \sin \gamma \cos \gamma$.

Araştırmacı: Anladım, ama senin bu şekil üzerinden bulman gerekiyor. Sinüslü, kosinüslü formüller yerine şekil üzerinden direkt bulman gerekiyor. Yani geometrik kuralları kullanman gerekiyor.

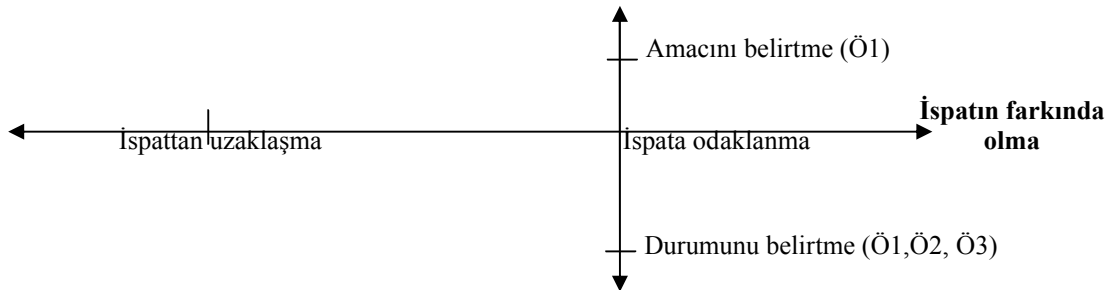
yarım açı

$$\sin(2\gamma) = \sin(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin \gamma \cos \gamma = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Şekil 4.1.60. 1.MÖA'nın Yarım Açı Formülünü Kullanması

İspatın farkında olma:



Şekil 4.1.61. Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatında İspatın Farkında Olma

İspata odaklanma alt kategorisi amacını belirtme boyutu: 1.MÖA, çözüm aşamasında ispatlaması gereken eşitliklerden birini ifade etmiştir (2.Görüşme).

1.MÖA: *v nin $2\sin\theta\cos\gamma$ olduğunu bulmamız gerekiyor. γ nın u ve v cinsinden değerlerini bildiğimiz için burada eşitleyip $\sin\theta$ yı u ve v cinsinden yazarsam belki bir şeyler gelir diye düşünüyorum.*

İspata odaklanma alt kategorisi durumunu belirtme boyutu: MÖA'ları ispatta neler yaptıklarını, hangi durumda olduklarını belirtmişlerdir.

1.MÖA: *Burada v ve u uzunluğunu kullanabilmem gerekiyor. u uzunluğunu bir şekilde sinüs işlemleri içine sokulabiliyorum ama v yi henüz sokamıyorum.*

2.MÖA: *Evet. Şunu fark ettim. Ben hep $\frac{\alpha - \beta}{2}$ bulmuşum. $\frac{\alpha + \beta}{2}$ yi hiç kullanmamışım.*

3.MÖA: *Bunun bir de $2\sin(\alpha -)$... işte ben burada zorlandım biraz. $\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$, c yi şurası demiştim, o zaman burası da d oldu, $\alpha + \beta$ da ben zorlandım işte biraz.*

Araştırmacı: *$\sin\alpha - \sin\beta$ nın sağ tarafındaki eşitliğin nasıl olacağını mı?*

3.MÖA: *Evet, şunun ispatını...*

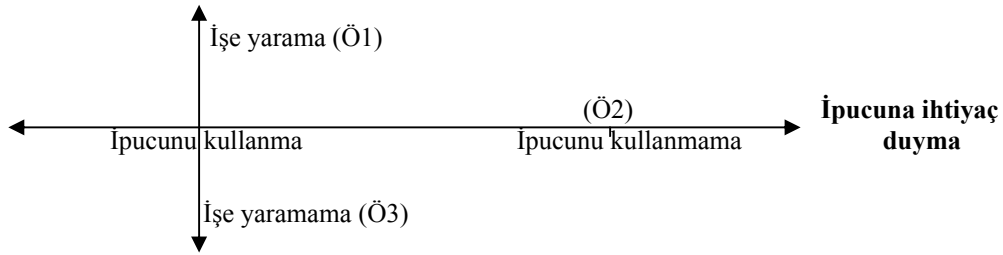
3.MÖA: *EOD açısı $\frac{\alpha + \beta}{2}$ ye eşit oldu. u ile ilgili hiçbir şey bulamıyorum.*

Araştırmacı: AOB ye $180 - \alpha$ yazdın.

3.MÖA: Şurasına o zaman α dedik. Şurası β dır. İşte $\alpha + \beta$ ile ilgili bir şey yapamıyorum. Şu tamam da. $\cos \alpha + \cos \beta$?

3.MÖA: Bir şeyler geliyor ama yani net değil. Şimdi bunu yerine koyacağım burada. Bu sefer ben şu γ yı hiç kullanmadım.

İpucuna ihtiyaç duyma: 2.MÖA, ipucunu kullanmamış; 1.MÖA ve 3.MÖA ipucunu kullanmışlardır.

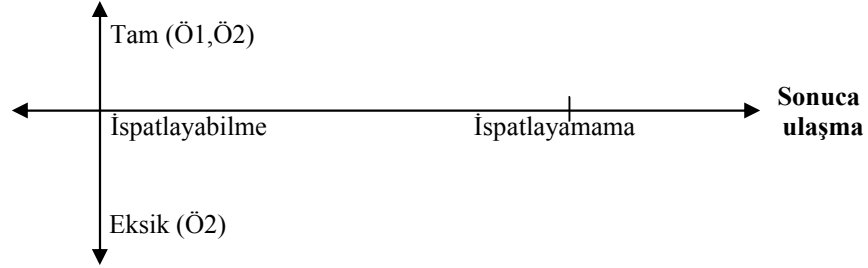


Şekil 4.1.62. Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatında İpucuna İhtiyaç Duyma

3.MÖA, ipucunun işe yaramadığını, ipucunda verilenlerin kendisinin önceden bulunduğunu belirtmiştir.

3.MÖA: Şunu yazmamıştım sadece. Şurası $\cos \alpha$, burası da, bunu da daha önceki kâğıtlarda bulmuştum ama... Şurası da $\sin \alpha$. Bunlar bana bir şey vermedi. Çünkü zaten şunu bulmuştum.

Sonuca ulaşma: 1.MÖA, 2.görüşmede; 2.MÖA 1.görüşmede tam olarak sonuca ulaşmışlardır. 3.MÖA, 1.görüşmede istenilen bir eşitliği bulabilmiştir.



Şekil 4.1.63. Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatında Sonuca Ulaşma

1.MÖA, $v = \sin \alpha - \sin \beta$ eşitliğini ipucuna geçmeden bulmuştur (Şekil 4.1.64, 2.Görüşme).

$$\sin \alpha - \sin \beta = a + v - a = v$$

Şekil 4.1.64.1.MÖA'nın Sonuca Ulaşması

1.MÖA, ipucunu kullanarak diğer sonuçlara ulaşmıştır (Şekil 4.1.65, 2.Görüşme).

$$\begin{aligned} u &= \cos \alpha - \cos \beta \\ u &= 2 \sin \theta \cdot \sin \gamma \\ v &= 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

Şekil 4.1.65. 1.MÖA'nın Sonuca Ulaşması

2.MÖA, ipucuna ihtiyaç duymadan tüm eşitlikleri elde etmiştir (Şekil 4.1.66, 1.Görüşme).

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \sin \beta &= u = 2 \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \\ \cos \beta - \cos \alpha &= v = 2 \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

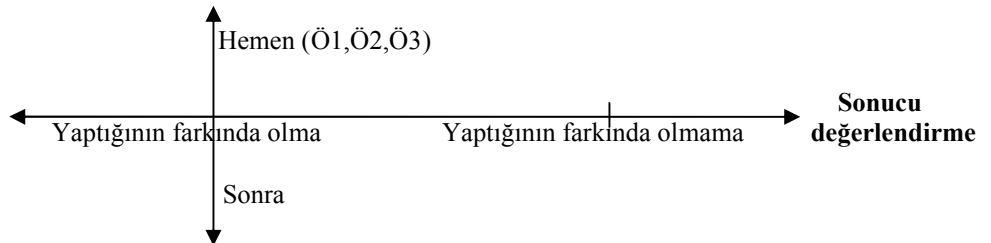
Şekil 4.1.66. 2.MÖA'nın Sonuca Ulaşması

3.MÖA, yalnızca bir eşitliği bulabilmiştir (Şekil 4.1.67, 1.Görüşme).

$$\sin \alpha - \sin \beta = \alpha + \beta - \alpha = \beta$$

Şekil 4.1.67. 3.MÖA'nın Sonuca Ulaşması

Sonucu değerlendirme: MÖA'ları ulaştıkları sonuçların farkına varmışlar, sonuçları doğru değerlendirmişlerdir.



Şekil 4.1.68. Trigonometrik Dönüşümlerin Görsel İspatında Sonucu Değerlendirme

1.MÖA, istenilen eşitlikleri elde edince sonucu elde ettiğinin de hemen farkına varmıştır.

1.MÖA: Şurası $180 - \alpha$, $\sin(180 - \alpha)$ yazarsak $\frac{a+v}{1} \cdot \sin(180 - \alpha)$ aynı zamanda kendisine eşit $\sin \alpha$. $\sin \alpha$ yı biliyoruz, $\sin \beta$ yı biliyoruz ve çıktı. $\sin \alpha - \sin \beta = a + v - a$ dan v çıktı. Burası tamam.

1.MÖA: x ekseninde DE uzunluğunu düşündüm. x eksenine dik olduğu için, x leri değişmeyecek $\cos \alpha$, burada da y değeri değişmeyecek yine diklik olduğu için $\sin \beta$, buradan a uzunluğu $\sin \beta - 0$ yani $\sin \beta$, v uzunluğu $\sin \alpha - \sin \beta$, o zaten elimde. u uzunluğu $\cos \alpha - \cos \beta$. Burada birinci kısmı bulmuş olduk yine. Bunu zaten bulmuştuk.

1.MÖA: DB uzunluğunu artık bana $\sin 2\theta$ olarak verdiği için yerine yazdım. Burada içler dışlar çarpımı yaparak tekrar u yu çektim. Aynı şekilde $\cos \gamma$ da yaptım Hipotenüs uzunluğunu $2\sin \theta$ olarak yazdım. Buradan da u yu ve v yi istenen eşitlik gibi bulduk. Birinci kısımları zaten bulmuştuk, ikinci kısımları da bulmuş olduk.

2.MÖA, v ye ait eşitliklerden birini bulunca doğru işlem yaptığını da onaylamıştır.

2.MÖA: Şurası mesela $\sin \alpha$ o zaman. Evet, sonuçta buranın sinüsüne $\sin(180 - \alpha)$ dediğimde şurası bölü şu r yarıçapı, yani 1 . O zaman $\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha = \frac{|AE|}{1}$ o zaman $|AE| = \sin \alpha$ olur. Burası da $\sin \beta$ tamamdır. $\sin \alpha$, $\sin \beta$ burası, o zaman $v = \sin \alpha - \sin \beta$ doğruymuş.

2.MÖA, diğer elde ettikleri eşitlerin de farkına hemen varmıştır.

2.MÖA: Şöyle, yani $\sin(180 - \alpha)$ dedim. $\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$ dır, ikinci bölgede kosinüs negatif olduğundan. Bu üçgende tanjant $\frac{|AG|}{1}$, o zaman $|AG| = -\cos \alpha$ dedim. O zaman $|AB| = \cos \beta - \cos \alpha$, onu yazdım. O da uidi zaten.

2.MÖA: Burada böyle bir kosinüs açısı, yani $\cos(DEC)$ yi öyle deyim x açısı demiştim onu bulamadığım için şimdi artık onu diyebilirim $\cos(DEC) = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{v}{|EC|}$, $|EC|$ de zaten $2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ bunu da yerine yazarsak, buradan $v = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ olur. Bu da ikinci eşitlik olmuş oldu.

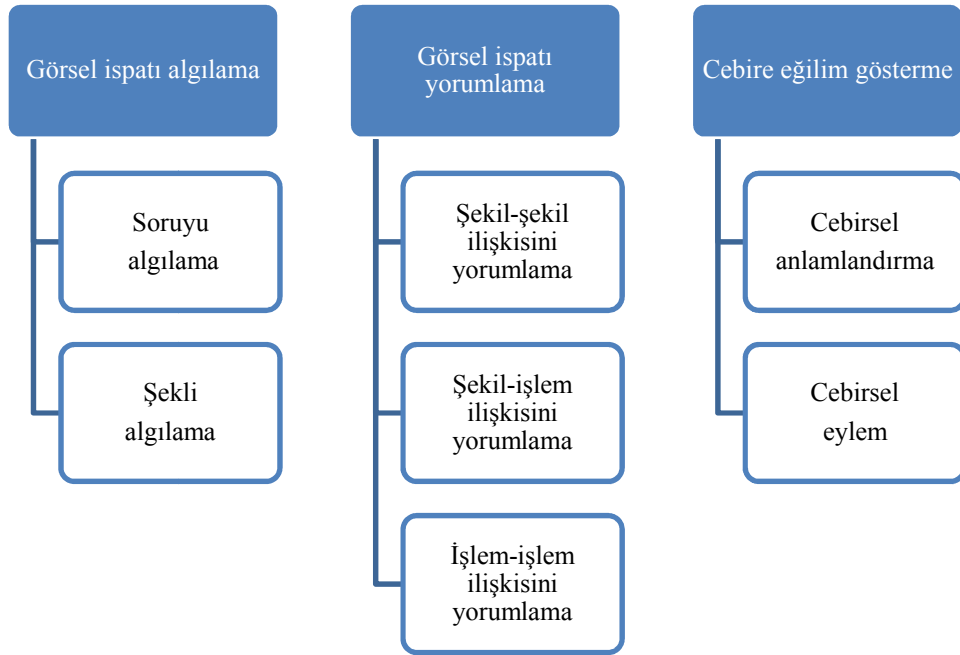
2.MÖA: Tamam bu varsa zaten artık bunun da çıkacağını düşünüyorum. Yine aynı şekilde buradan bu sefer neyi kullanırım? Sinüsünü kullanayım. $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} =$ diyorum. Şöyle deyim önce o zaman. $\sin(DEC) = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{u}{|EC|}$, $|EC|$ de zaten $2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ ise $u = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$. Böyle olmuş oldu.

3.MÖA, yalnızca bir eşitliğe ulaşabilmiş, onu da hemen fark etmiştir.

3.MÖA: Şuradan, $\sin \alpha - \sin \beta = a + v - a$, o zaman v oldu.

4.2. MÖA'larının Görsel İspatı Yorumlama Süreci

MÖA'larına özdeşliklerle ilgili bir görsel ispatı yorumlama sorusu sorulmuştur. MÖA'larının ispatın kendisinin de içerisinde olduğu bir görsel ispatı nasıl algıladıkları ve yorumladıkları incelenmeye çalışılmıştır. Katılımcıların görsel ispatı yorumlama süreçlerinin incelenmesi ile elde edilen ana kategoriler ve alt kategoriler sırasıyla verilecektir.



Şekil 4.2.1. MÖA'larının Görsel İspatı Yorumlama Süreci

4.2.1. MÖA'larının Görsel İspatı Yorumlama Sürecinde Kategoriler ve İçerikleri

MÖA'larının görsel ispatı yorumlama durumlarını ortaya koymadan önce bu sürece ait kategori, alt kategori, boyut ve alt boyutların içeriğinden bahsedilecektir. MÖA'larının görsel ispatı yorumlama sürecinde ortaya çıkan kategorilerden görsel ispatları ispatlama süreçlerindeki kategorilerle aynı isimde olanların içerikleri de aynıdır. Aynı olan bu kategorilerin içeriklerine burada tekrar değinilmeyecektir.

Görsel ispatı algılama: MÖA'larının görsel ispatı yorumlama süreçlerinde de görsel ispatı algılama durumları soruyu algılama ve şekli algılama olarak iki alt kategoride ele alınmıştır.

Soruyu algılama alt kategorisi, soruyu okuma sürecinde algılama ve soruyu yorumlama sürecinde algılama olarak iki boyuta ayrılır. İki boyuta ayrılmasının sebebi ise MÖA'larının soruyu algılama ile ilgili durumları soruyu okudukları sırada ya da görsel ispatı açıklamaya çalışırken çıkmasından kaynaklanmaktadır.

Görsel ispatta matematiksel ifadeler şekillerle gösterilmiş, bu şekiller arasında düzenlemeler yapılmış, yapılan düzenlemeler tekrar matematiksel olarak ifade edilmiştir. Başka bir deyişle matematiksel ifadeden şekle, şekilden başka bir şekle, şekilden matematiksel ifadeye bir dönüşüm söz konusudur. MÖA'larının da bu değişen koşullarla ilgili algılama durumları ortaya çıkmıştır. Bu durumları yansıtabilmek amacıyla şekli algılama kategorisi matematiksel ifadenin şekilsel temsilini algılama, şekilsel işlemi algılama, şeklin matematiksel temsilini algılama olmak üzere üç boyutta ele alınmıştır.

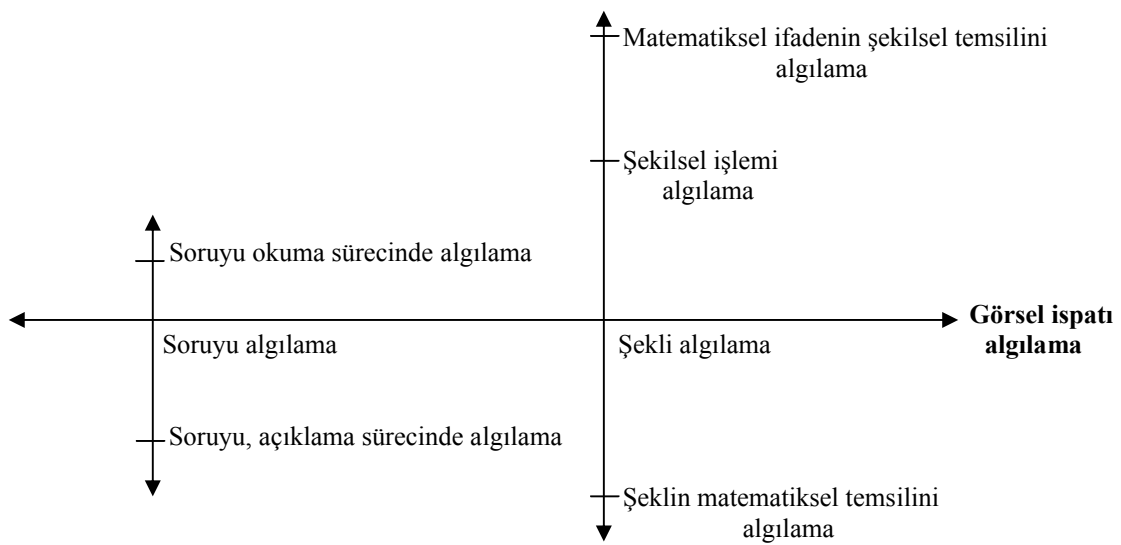
Matematiksel ifadenin şekilsel temsilini algılama; matematiksel ifadelerin şekle dönüştürülmesini, şekil olarak ifade edilmesini içerir. Bütünlük, simgeleme, biçim değişimi ve renk değişimi olmak üzere dört alt boyutta ele alınmıştır. Matematiksel ifadenin şekil olarak temsilinde birden fazla şekil matematiksel ifadeyi temsil edebilmektedir. MÖA'larının matematiksel ifadeyi temsil eden şekillerin tamamını algılama durumları bütünlük boyutu altında ele alınmıştır. Simgeleme boyutu şeklin matematiksel ifadeyi nasıl temsil ettiğini, şekil ve matematiksel ifade arasında kurulan mantık ilişkisini algılamayı ifade eder. Aynı matematiksel ifade şekillerin değişmesiyle farklı biçimlerde temsil edilebilmektedir. Biçim değişimi boyutu bu biçim değişikliklerini algılama durumlarını içerir. Benzer şekilde, aynı matematiksel ifade bir yerde beyaz renkle başka bir yerde siyahla temsil edilebilmektedir. Renk değişimi boyutu ise renk değişikliklerini algılama durumlarını yansıtır.

Şekilsel işlemi algılama, şekilden başka bir şekle olan değişimi içerir. Bu boyutta görsel ispatta bulunan şekil-şekil ilişkisini algılama ile ilgili MÖA'larının bir problemi olmamış, ispatta bulunan bir şekil ve kendilerinin düşündüğü başka bir şekil ile ilgili algılama durumları ortaya çıkmıştır. Bu nedenle şekilsel işlemi algılama görsel ispatta bulunan ve kendilerinin oluşturduğu olmak üzere iki boyuta ayrılmıştır. Görsel

ispatta yer alan şekiller arası değişimi içerir. Görsel ispatta bulunan boyutu, ispatta yer alan şekiller arası değişimi içerir. Kendilerinin oluşturduğu boyutu, MÖA'larının görsel ispatta yer alan şekil ve görsel ispatta bulunmayan kendilerinin oluşturduğu başka bir şekil arasında olduğunu düşündükleri şekiller arası ilişkileri içerir. Bütün-parça ilişkisi olmak üzere bir alt boyuttan oluşur. Bu boyut, şekiller arasında kurulan ilişkileri ifade eder.

Şeklin matematiksel temsilini algılama, şekillerin matematiksel ifadeye dönüştürülmesini, matematiksel olarak ifade edilmesini içerir. Dönüşüm, matematiksel ifade ve benzerlik olmak üzere üç alt boyutta ortaya çıkmıştır. Dönüşüm; MÖA'larının matematiksel ifadenin nereden elde edildiğini, şekilden matematiksel ifadeye olan dönüşümü algılama durumlarını yansıtır. Matematiksel ifade, matematiksel ifadenin şekil ile olan uyumunu algılama durumlarını ifade eder. Benzerlik, geometrik şekiller arasındaki benzerlik ilişkisini algılamayı yansıtır.

MÖA'larının algılamalarını daha iyi yansıtabilmek amacıyla görsel ispatı algılama kategorisinde ortaya çıkan boyutlarda sorunsuz süreç [SS], doğru anlama [DA], emin olamama [EO], anlayamama [A], yanlış anlama [YA] alt boyutları alınmıştır. Sorunsuz süreç, bulunduğu boyuta dair herhangi bir belirtinin ortaya çıkmadığı durumlarda kullanılmıştır.



Şekil 4.2.2. Görsel İspatı Algılama Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

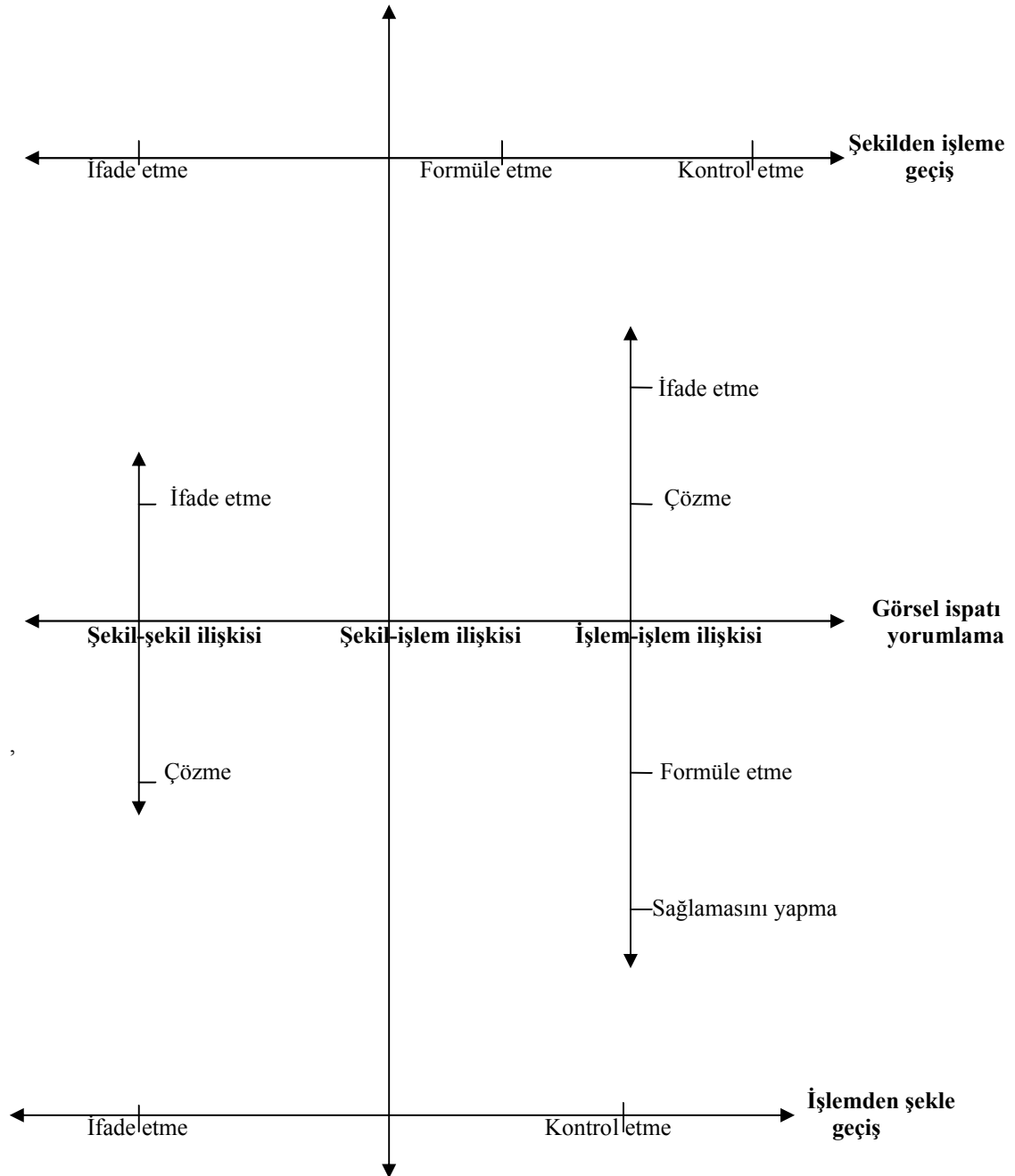
Görsel ispatı yorumlama: Daha önceden de belirtildiği gibi görsel ispatta matematiksel ifadeden şekle, şekilden şekle, şekilden matematiksel ifadeye dönüşüm bulunmaktadır. Bu dönüşümün şekil-şekil ilişkisi, şekil-işlem ilişkisi ve işlem-işlem ilişkisi olarak parçalar halinde olduğu görülmüştür. Buradan hareketle bu kategori şekil-şekil ilişkisini yorumlama, şekil-işlem ilişkisini yorumlama ve işlem-işlem ilişkisini yorumlama olmak üzere üç alt kategoride ele alınmıştır.

Şekil-şekil ilişkisini yorumlama alt kategorisi, ifade etme ve çözme olmak üzere iki boyuttan oluşmaktadır. İfade etme boyutu, görsel ispatta bulunan şekiller arasında bulunan ilişkinin ifade edildiği durumları temsil eder. Parçalara odaklanma ve parçaya odaklanma olmak üzere iki alt boyuta ayrılır. Parçalara odaklanma, şekiller arasında bulunan ilişkinin ortak noktalar belirlenerek ifade edilmesini, parçaya odaklanma ise şekiller arasında bulunan ilişkinin belirli bir nokta için ifade edilmesini içerir. Çözme boyutu, iki şekil arasında bulunan ilişkinin işlemler yoluyla belirlenmesini temsil eder.

Şekil-işlem ilişkisini yorumlama alt kategorisi, şekilden işleme geçiş ve işleminden şekle geçiş olarak iki boyuta ayrılır. Şekilden işleme geçiş boyutu; ifade etme, formüle etme ve kontrol etme alt boyutlarına ayrılır. İfade etme, şekilden ara işlemlere geçiş ve şekilden sonuca geçiş olmak üzere ikiye ayrılır. Şekilden ara işlemlere geçiş, özel ve genel terimler için ikiye ayrılır. Bu boyut MÖA'ları tarafından özel ve genel terimlerin şekilsel olarak gösterimlerinin nasıl anlaşıldığını, nasıl ifade edildiğini temsil eder. Şekilden sonuca geçiş ise, MÖA'ları tarafından şekilden elde edilen sonucun nasıl anlaşıldığını gösterir. Formüle etme boyutu, şekillerin formüllere dönüştürülmesini, matematiksel olarak ifade edilmesini içerir. Parça ve bütün olmak üzere ikiye ayrılır. Parça bir şeklin bir kısmının, bütün şeklin tamamının formüle edilmesini temsil eder. Kontrol etme boyutu, şekilden işleme geçişte şekil ve işlem arasındaki bulunan ilişkinin denetlenmesidir. İşleminden şekle geçiş boyutu; ifade etme ve kontrol etmeden oluşur. İfade etme işleminden şekle geçişte özel ve genel terimlerin ifade edilmesini, kontrol etme ise işleminden şekle geçişte işlem ve şekil arasında bulunan ilişkinin denetlenmesidir.

İşlem-işlem ilişkisini yorumlama alt kategorisi; ifade etme, çözme, formüle etme ve sağlamasını yapma boyutlarından oluşur. İfade etme, işlemler arasındaki ilişkinin belirtilmesi anlamına gelir, özel terim ve özdeşlik olmak üzere iki alt boyuta ayrılır. Çözme, işlemler arasında bulunan ilişkinin matematiksel işlemler yaparak veya formül kullanarak yapılması olmak üzere iki alt boyuta ayrılır. Formüle etme, iki işlem arasında

bulunan ilişkinin formüle edilmesini, sağlamasını yapma ise işlemler arasındaki ilişkinin kontrol edilmesini temsil eder.



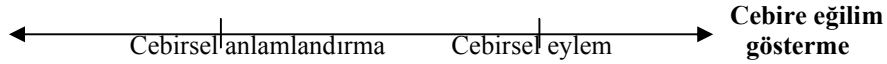
Şekil 4.2.3. Görsel İspatı Yorumlama Kategorisine Ait Alt Kategori ve Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

Şekli keşfetme kategorisinde yer alan boyutlarda MÖA'larının doğru veya yanlış yorumlarda bulundukları durumlar olduğu gibi fikir yürütemedikleri ve yaptıkları işlemlerde sonuca ulaşamadıkları durumlar da ortaya çıkmıştır. Bunları yansıtmak amacıyla doğru [D], yanlış [Y], fikir yok [FY], sonuç yok [SY] alt boyutları alınmıştır. Ayrıca yorumların özel ya da genel terime ait olduğunu göstermek amacıyla özel terim [ÖT] ve genel terim [GT] alt boyutlarına da yer verilmiştir.

Cebire eğilim gösterme: MÖA'larının görsel ispatı açıklamaya çalışırken cebire olan yönelimlerini içerir. Cebirsel anlamlandırma ve cebirsel eylem olmak üzere iki boyuta ayrılır.

Cebirsel anlamlandırma, işlemler arasındaki ilişkinin cebirsel olarak anlamlı gelip gelmediğini ifade etme durumunu içerir.

Cebirsel eylem, ispatı şekillerden anlamak yerine cebirsel yolları kullanarak sonuca ulaşmaya çalışma durumlarını temsil eder. Formüle etmeye çalışma olmak üzere bir alt boyuttan oluşur.



Şekil 4.2.4. Cebire Eğilim Gösterme Kategorisine Ait Boyutların Eksen Üzerinde Gösterimi

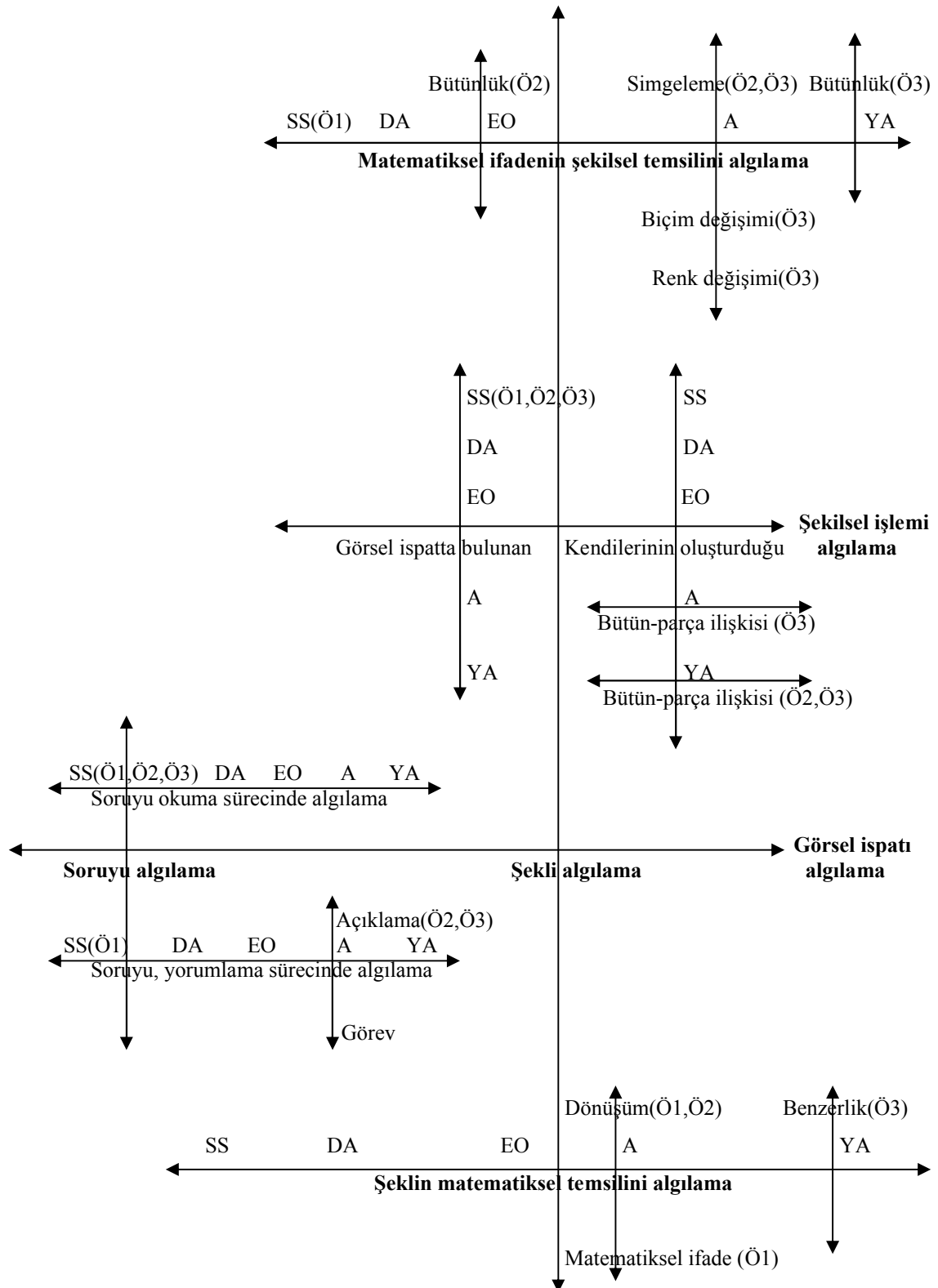
4.2.2. MÖA'larının Özdeşlik İle İlgili Görsel İspatı Yorumlamaları

Görev 4:

Aşağıda bir özdeşlik ve onun görsel ispatı bulunmaktadır. Bu görsel ispatı açıklayınız.

[illegible]

Görsel ispatı algılama: MÖA'larının bu kategoriye ait durumları Şekil 4.2.6. da gösterilmiştir.



Şekil 4.2.6. Özdeşliklerin İspatlanmış Görsel İspatının Algılanması

Soruyu algılama alt kategorisi soruyu okuma sürecinde algılama boyutu: MÖA'larının soruyu okuma sürecinde soruyu algılamalarına dair herhangi bir durum ortaya çıkmamıştır. Bu nedenle soruyu okuma sürecinde algılama boyutu sorunsuz süreç olarak alınmıştır.

Soruyu algılama alt kategorisi soruyu yorumlama sürecinde algılama boyutu: “Aşağıda bir özdeşlik ve onun görsel ispatı bulunmaktadır. Bu görsel ispatı açıklayınız.” ifadesinde “Aşağıda bir özdeşlik ve onun görsel ispatı bulunmaktadır.” açıklama cümlesi olarak, “Bu görsel ispatı açıklayınız.” görev cümlesi olarak değerlendirilmiştir.

Bu boyuta dair 1.MÖA ile ilgili herhangi bir durum ortaya çıkmadığından sorunsuz süreç olarak alınmıştır. 2.MÖA ve 3.MÖA'nın ise açıklama cümlesini anlayamadığı görülmüştür.

2.MÖA, görsel ispatın sonunda yer alan özdeşliği sonradan görmüş ispatın neyi ifade ettiğini sonradan fark etmiştir (1.Görüşme).

2.MÖA: *Şu eşitlik buna neden eşittir, değil mi bu ispata göre. Bu ispat aslında bunun ispatı mıymış?*

Araştırmacı: *Evet, aynen öyle... Bu şekilde aslında gözüküyor ve senin onu görüp söylemen...*

2.MÖA: *Bundan dolayı diye.*

3.MÖA, açıklama cümlesinde belirtilmesine rağmen ispatı açıklamaya çalışırken çalışma kâğıdında sorunun tamamının olup olmadığını sormuştur (1.Görüşme).

3.MÖA: *Burada ispatın tamamı var değil mi?*

Araştırmacı: *Evet.*

Şekli algılama alt kategorisi matematiksel ifadenin şekilsel temsilini algılama boyutu bütünlük alt boyutu:

$$5^3 = 5(5^2) = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \cdot \\ \cdot \\ + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Şekil 4.2.7. Beşin Küpünün Şekilsel Temsili

2.MÖA, Şekil 4.2.7. de görülen matematiksel ifadeyi temsil eden şekillerin bütünlüğünden emin olamamış, araştırmacıya sormuştur (1.Görüşme).

2.MÖA: *Bu devamı mı, 5^3 nün hepsi şu mu?*

Araştırmacı: *Evet.*

3.MÖA ise aynı matematiksel ifadenin şekilsel gösterimini yanlış algılamıştır (1.Görüşme).

3.MÖA: *Neyse sonra beşi, beş birim kareden almış üç tane, neden üç tane alıyor, onu hala çözemedim ama neyse. Üç tane, beş tane...*

Şekli algılama alt kategorisi matematiksel ifadenin şekilsel temsilini algılama boyutu simgeleme alt boyutu: 2.MÖA, beşin küpünün simgelenme biçimini anlayamamış, saçma olduğundan bahsetmiştir (Şekil 4.2.7, 2.Görüşme).

2.MÖA: O zaman şurası saçma geldi bana. Yani 5^3 eşittir şu şekil demişiz. 5^3 o zaman bizim bildiğimiz anlamda 125'i temsil etmiyor ya da bunun temsili farklı.

$$1^3 = \square$$

$$3^3 = 3(3^2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$\xleftrightarrow{1+2(3)}$

Şekil 4.2.8. Birin ve Üçün Küpünün Şekilsel Temsili

3.MÖA, birin küpünün simgelenme biçimini anlarken, üçün karesinin simgelenme biçimini anlayamadığından bahsetmiştir (Şekil 4.2.8, 1.Görüşme).

3.MÖA: Birde tamam, bir boyutlu yani bir birim kare, üçte üç birim kareden oluşmuş, üçün karesini neden bu şekilde yapmış?

3.MÖA, sonrasında beşin küpünün nasıl simgelendiğini anlayamadığından bahsetmiştir (Şekil 4.2.7, 1.Görüşme).

3.MÖA: Şunu anlamadım ama neyse. Şurada üçlük var, üçe üçlük zaten de. Bunlar neden böyle? Beş, beş, beş?

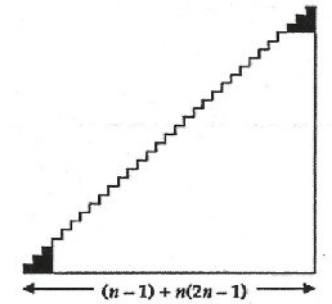
Şekli algılama alt kategorisi matematiksel ifadenin şekilsel temsilini algılama boyutu biçim ve renk değişimi alt boyutları: 3.MÖA, matematiksel ifadenin (üçün küpünün) şekilsel temsiliinde kullanılan biçim ve renk değişimlerini anlayamamıştır (1.Görüşme).

Araştırmacı: *Şu yanda üçün yanında tam kare iken şunlar neden parçalı? Onu mu anlamadın?*

3.MÖA: *Parçalı bir de, mesela bu koyu renk olmuş yanına gelen. Şuradakini buraya almış?*

Şekli algılama alt kategorisi şekilsel işlemi algılama boyutu görsel ispatta bulunan alt boyutu: MÖA'larının davranışlarında bu alt boyut ile ilgili herhangi bir belirti ortaya çıkmamıştır. Bu alt boyut sorunsuz süreç olarak alınmıştır.

Şekli algılama alt kategorisi şekilsel işlemi algılama boyutu kendilerinin oluşturduğu bütün-parça ilişkisi alt boyutu: 2.MÖA, aşağıdaki şeklin kenar uzunluğu $(n-1) + n(2n-1)$ olan karenin yarısı olduğunu düşündüğünü söylemiştir. 2.MÖA kendi düşündüğü bir şekil ile görsel ispattaki başka bir şekil arasında yanlış bütün-parça ilişkisi kurmuştur (1.Görüşme).

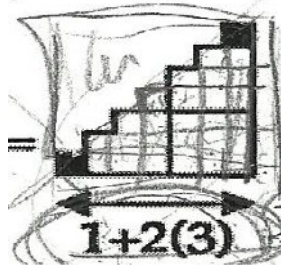


Şekil 4.2.9. $1 + 2 + 3 \dots + (2n^2 - 1)$ İfadesinin Şekilsel Temsili

2.MÖA: *Bunların hepsinin toplanmışı şu son şekildir. Şimdi bir kenarı şu olan karenin yarısı gibidir.*

3.MÖA, Şekil 4.2.9. da bulunan şeklin, kenar uzunluğu $(n-1) + n(2n-1)$ olan karenin yarısı olduğunu düşündüğünü söylemiştir ve aynı durumun Şekil 4.2.10. daki

şekil için de geçerli olduğunu söylemiştir. Bütün-parça ilişkisini yanlış algılama söz konusudur (1.Görüşme).



Şekil 4.2.10. 3.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çizimi

3.MÖA: *Bunu mesela tamamladığımızı düşünürsek... Bunun karesinin yarısı kadar.*

Araştırmacı: $1^3 + 3^3 + 5^3 = (n-1) + (2n-1)$ uzunluğunu...

3.MÖA: *Uzunluğunu kareye tamamlarsak yarısı kadar ediyormuş.*

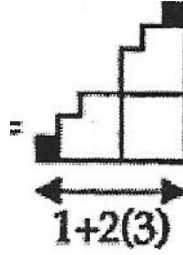
Araştırmacı: *Karenin alanının yarısı kadar mı?*

3.MÖA: *Evet, yarısına eşit olur o zaman, ben öyle düşünüyorum şu anda. Tıpkı şuradaki gibi...*

3.MÖA, sonrasında yaptığı işlemlerle sonucun düşündüğü gibi çıkmadığını görmüş ve bütün-parça arasındaki ilişkiyi anlayamamıştır (1.Görüşme).

3.MÖA: *Ama yarısı olmaz ki... Şimdi burası 7 birim ama tam yarısı olmuyor, oluyor mu tam yarısı? Şurada bir tane eksik...*

Şekli algılama alt kategorisi şeklin matematiksel temsilini algılama boyutu dönüşüm alt boyutu: 2.MÖA şekilden işleme olan dönüşümü anlayamamış, araştırmacıya sormuş, araştırmacı da onu kendisinin bulması gerektiğini söylemiştir (Şekil 4.2.11, 1.Görüşme).



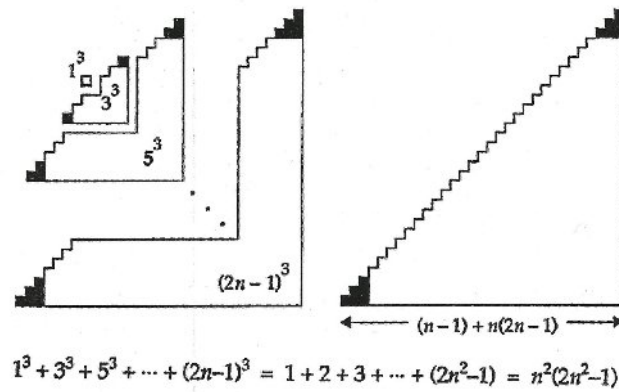
Şekil 4.2.11. Üçün Küpünün Şekilsel Temsili

2.MÖA: *Şurada 1+2.3 dedi?*

Araştırmacı: *Onu senin bulman...*

2.MÖA: *Neyi temsil ettiğini bulmam gerekiyor.*

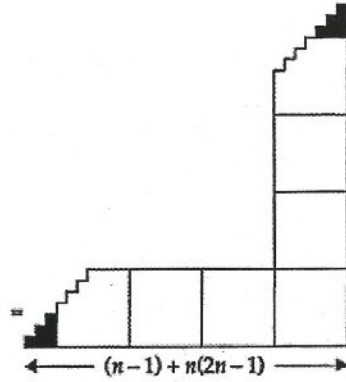
1.MÖA, Şekil 4.2.12. de bulunan birinci eşitlik için hangi sayısal değerlerin sağlandığına bakarken, ikinci şekilden elde edilen özdeşliğin neye göre yazıldığını, şekilden matematiksel ifadeye bir dönüşüm olduğunu anlayamamıştır (2.Görüşme).



Şekil 4.2.12. Özdeşliklerin Şekilsel Temsili

1.MÖA: Evet, $n=1$ için, $n=2$ için üçün küpü geliyor, $2n-1$ i kullanıyoruz. Burada da aynı şekilde $n=2$ için yazdığımızda 5 geliyor mu? Aradaki sayıları nasıl yazdı?

Şekli algılama alt kategorisi şeklin matematiksel temsilini algılama boyutu matematiksel ifade alt boyutu: 2.MÖA, aşağıdaki şeklin altındaki $(n-1)+n(2n-1)$ matematiksel ifadesini şekil ile bağdaştıramamış, aradaki ilişkiyi anlayamamıştır (Şekil 4.2.13, 1.Görüşme).



Şekil 4.2.13. $2n-1$ 'in Küpünün Şekilsel Temsili

2.MÖA: Burada o zaman öyle bir durum varsa, şunu görsel olarak çok fazla düşünemiyorum ama $n(2n-1)$ ise $2n-1$ uzunluktan, n tane oluyor şurada, artı şurada $n-1$ tane var, şu siyahlı kısım $n-1$. Gözüken şurada 3 tane gibi.

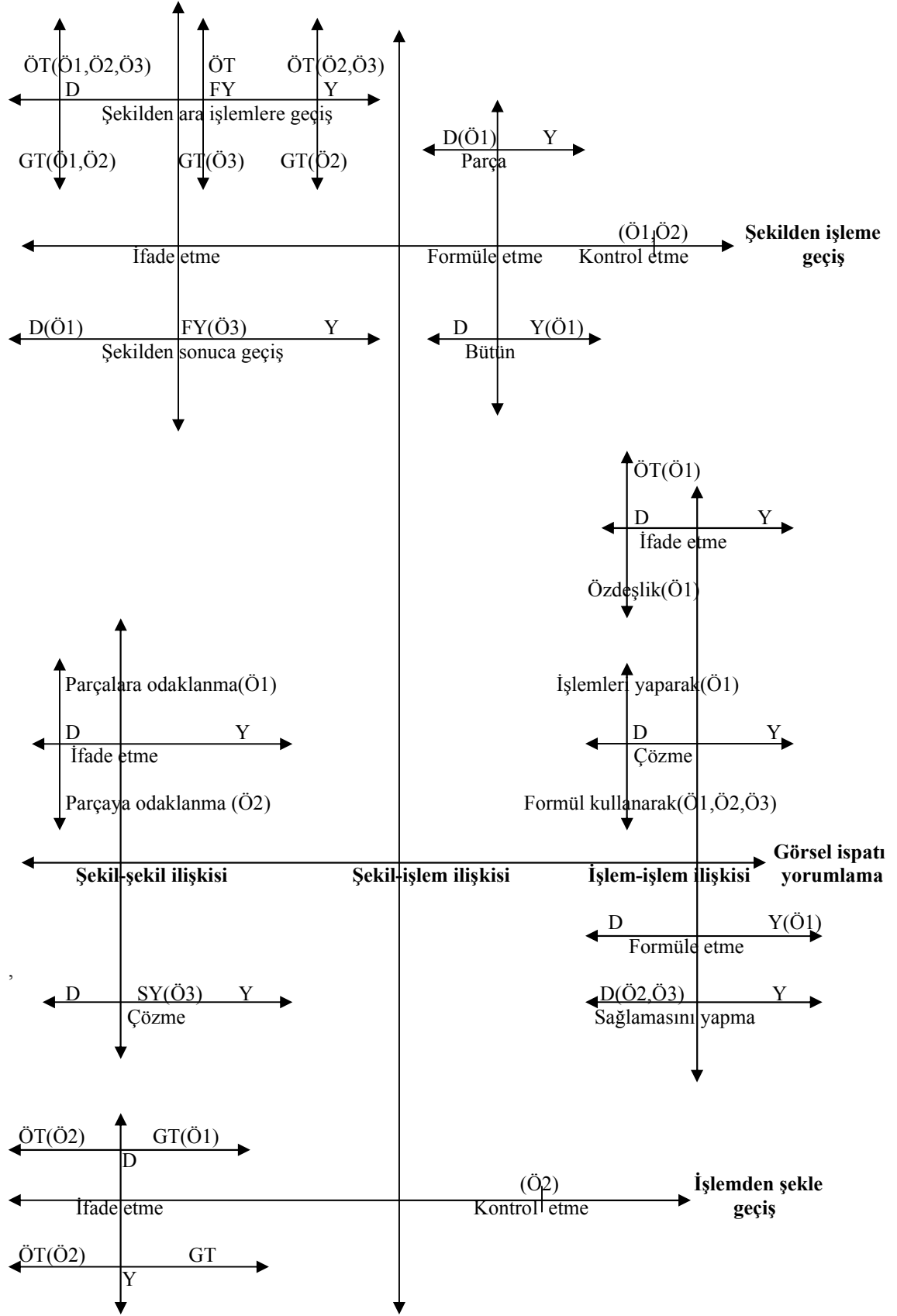
2.MÖA: Peki bir şey soracağım. $(n-1) + n(2n-1)$ diyor, bunu bu şekilde yazmış, görüntüde 1, 2, 3, 4 tane var.

Şekli algılama alt kategorisi şeklin matematiksel temsilini algılama boyutu benzerlik alt boyutu: 3.MÖA, birin küpünü temsil eden kareye bir denirken, aynı şeyin

üçün küpünü temsil eden kareler için söylenemeyeceğini düşünmüştür (Şekil 4.2.8, 1.Görüşme).

3.MÖA: *Yani ben buna bir birim dersem buna da bir birim diyemem bir kareye.*

Görsel ispatı yorumlama: MÖA'larının bu kategoriye ait durumları Şekil 4.2.14. te gösterilmiştir.



Şekil 4.2.14. Özdeşliklerin İspatlanmış Görsel İspatında Yorumlama

Şekil-şekil ilişkisi alt kategorisi ifade etme boyutu parçalara odaklanma alt boyutu: 1.MÖA, görsel ispatta bulunan ortak özellikleri de belirterek şekiller arasında bulunan ilişkiyi ifade etmiştir (1.Görüşme).

Araştırmacı: *Şimdi ne düşünüyorsun?*

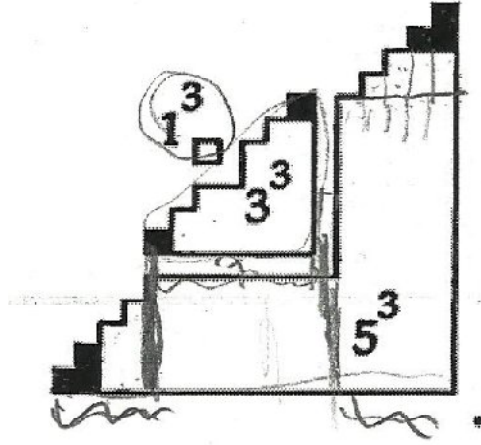
1.MÖA: *Şurayı oturtmaya çalışıyorum. Yani birleştirilmiş şekiller üzerinde düşünüyorum. Burada da biliyoruz ki her bir ikinci eşitlikteki parçalanmış şekiller üçüncü eşitliğe oturtulmuş.*

Şekil-şekil ilişkisi alt kategorisi ifade etme boyutu parçaya odaklanma alt boyutu: 2.MÖA, beşin küpünü temsil eden şekiller arasındaki ilişkiyi ifade etmiştir (1.Görüşme).

Araştırmacı: *Evet. Şimdi ne düşünüyorsun?*

2.MÖA: *5³ ü bu güzel, bunları topluyorum, birleştiriyorum, üst üste koymuş, tamam. Mantıklı geliyor.*

Şekil-şekil ilişkisi alt kategorisi çözme boyutu: 3.MÖA, şekil-şekil ilişkisini sayılarla çıkarmaya çalışmıştır. Şekil 4.2.15. te bulunan üçün küpünü temsil eden şeklin beşin küpünü temsil eden şeklin üzerine yerleştirildiğinde üstte ve altta kalan kare sayısını hesaplamaya çalışmış, fakat sonuç elde edememiştir (2.Görüşme).



Şekil 4.2.15. Görsel İspatta Şekillerin Birleştirilmesi

Araştırmacı: Evet, 3^3 nün olduğu şeklin tabanı 7 birim.

3.MÖA: Buna da 4, 4; 8 eklersem, 15 olur. (Burada MÖA yanlış toplama yapmıştır.) 15 birim fazla olmuş oluyor. Burası kaç ki? Burası da 17 neden böyle çıktı?

Araştırmacı: 17, o zaman 10 birim mi artmış oluyor?

3.MÖA: Hımm, ben eksik saydım. 5 birim var burada. Burada 4 birim, 9, 7, bu sefer de 16 oluyor. Neden böyle oldu? Yanlış mı sayıyorum?

Araştırmacı: Sen neyi sayıyorsun? 5^3 nün olduğu şekilde neyi sayıyorsun sen?

3.MÖA: Ben bundan ne kadar fazla şurada kare var? Şimdi burada 7 tane...

Araştırmacı: 5^3 nün olduğu şekilde şu parçalıları mı sayıyorsun?

3.MÖA: Evet, kalanları sayıyorum.

Araştırmacı: Kalanlar derken?

3.MÖA: Şu, şurası, şurası... Zaten şurası tam buraya oturacak, böyle.

Araştırmacı: 3^3 nün olduğu şekil, 5^3 nün olduğu yere oturuyor.

3.MÖA: Tam oturmuyor işte. Bir tane kalıyor, burası tam, buradan bir tane kalıyor. 16ydı zaten toplam 17 olmuş olacak. Neyse, orası. Ben bunu bilmiyorum yani.

Şekil-işlem ilişkisi alt kategorisi şekilden işleme geçiş boyutu şekilden ara işlemlere geçişte özel ve genel terimleri ifade etme alt boyutu: 1.MÖA, üçün ve beşin küpünü temsil eden şekillerin taban uzunlukları ile yüksekliklerinin aynı olduğunu söylemiştir (1.Görüşme).

1.MÖA: Burada verilen bu her bir tabanın uzunluğu, kaç birim kareye bölündüyse o kadar birim kare. Aynı şey bu taraf için de geçerli.

Araştırmacı: Yani tabanda kaç kare varsa, o kadar karenin sayısı olduğunu söylüyorsun. Aynı şekilde şu yan dik yüzey için de tabanla aynı uzunlukta?

1.MÖA: Evet. Şu kısmı ve kısmı aynı sayıda...

1.MÖA, $(2n-1)^3$ nü temsil eden şekli oluşturan küçük kareleri topladığında bunun $(2n-1)^3$ e eşit olacağından bahsetmiştir (1.Görüşme).

1.MÖA: Bu n ile genelleştirilmiş büyük şeklin her bir ayrıtı bir birim azalarak 1 e kadar geliyor. Bunların her birini topladığımda biliyorum ki $(2n-1)^3$ elde etmem gerekiyor.

2.MÖA, daha önceden nasıl elde edildiğini anlayamadığı $1+2.3$ ifadesinin neyi temsil ettiğini doğru olarak ifade etmiştir (Şekil 4.2.11, 1.Görüşme).

Araştırmacı: Ne düşünüyorsun? Sesli olarak söyle istersen ne düşündüğünü.

2.MÖA: En son şurada 2.3 demişiz. $1+2.3$. Şu alt tabanı uzunluk olarak düşündüm.

2.MÖA, $1+2.3$ ve $2+3.5$ ifadelerinin altında yazılı bulundukları şekillerin taban uzunluğunu ifade ettiğini söylemiştir (1.Görüşme).

2.MÖA: 5^3 1, 2, 3, 4, 5 parçadan oluşmuş. Burada $2n-1$ için ise, $2n-1$ parça olacağını düşünüyorum, şurada. Burada da o tutuyor. Şu alt kısım, şurayı 3 olarak düşünmüştüm, 3 birim. İki tane üç artı şu dolu kare bir, artı bir; burada 3.5, 5 tane 5 uzunlukta 3 tane var, artı 2, bir, bir. Yine sadece şunu uzunluk olarak düşündüm.

2.MÖA, özel terimleri (üçün ve beşin küpü) temsil eden şekiller için yaptığı yorumu, genel terimi temsil eden $(2n-1)$ şekil için de yapmıştır. $(n-1)+n(2n-1)$ ifadesinin altında yazılı bulunduğu şeklin taban uzunluğunu ifade ettiğini söylemiştir (1.Görüşme).

2.MÖA: Burada o zaman öyle bir durum varsa, şunu görsel olarak çok fazla düşünemiyorum ama $n(2n-1)$ ise $2n-1$ uzunluktan, n tane oluyor şurada, artı şurada $n-1$ tane var, şu siyahlı kısım $n-1$.

2.MÖA: İşte orada bence mesela şuradaki siyah dolgu şu alt kısım benim için mesela $n-1$ i ifade ediyor. $n-1$ tane şurada kutu olduğunu düşündüm. Şurada görsel olarak baktığımda üç tane oluyor. Hâlbuki mesela şöyle, şöyle, şöyle gelip bir şey olduğunda burada $n-1$ tane olduğunu düşünürdüm, şu dolulardan. Sonra $n(2n-1)$ dediği zaten hani $2n-1$ benim şuradaki şu uzunluğun, $2n-1$ tane küçük kare varmış o. Şunlar da n sayısı, n tane sayıda olacak o. Aynı buradaki gibi 5 tane, 5'e bölünmüş birimlik karelerden oluşuyordu, 3 tane vardı. Burada n tane olan $2n-1$ birimlik karelere bölünmüş kutular var.

2.MÖA, beşin küpünü temsil eden şeklin altındaki 3.5 ifadesinin şekildeki parçalanmamış karelerin sayısını temsil ettiğini düşünmüş, yanlış düşündüğünü fark edince önceden düşündüğü uzunluk fikrine geri dönmüştür (1.Görüşme).

2.MÖA: *Ya hem böyle... Bir de mesela şurada da 3 tane, 3.5 demiş, bu 3.5 hence şu 5 ten, 5 birimlik karelerden 3 tane beynimde öyle oluşuyor. Burada da şu $2+2$ de, $1+1+2$ diye de oluşmuştu. Hımm, evet. 3 için oluyor mu? Olmuyor. O zaman olmuyor. Bu ilk başta dediğim daha doğru, yani şu. Şu alt uzunluk olayı ile ilgili, 2.3 tane.*

2.MÖA, beşin küpünü temsil eden şeklin $1^3 + 3^3 + 5^3$ işlemini, $(2n-1)^3$ nü temsil eden şeklin ise $1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3$ işlemini temsil ettiğini söyleyerek, özel ve genel terimler için yanlış yorumda bulunmuştur (2.Görüşme).

Araştırmacı: $2+3.5$ şekli $1^3 + 3^3 + 5^3$ nün toplamı diyorsun?

2.MÖA: *Evet. Yani öyle çıkıyor. 15, 17, 18 evet öyle çıktı. 28, 153. Tamam. Bu $(2n-1)^3$ de mesela sadece şu $2n-1$ 'e kadar olan sayıların toplamı. Yani şu sayı o zaman, en son durumda ispatın şu kısmı 1 den $(2n-1)^3$ e kadar olan sayıların toplamı suymuş.*

2.MÖA: *Hımmm, tamam. O zaman 1^3 'ü, 3^3 'ü, 5^3 'ü de $2+3.5$ yani 1'den 17'ye kadar olan sayıların toplamı. Evet o da böyle çıktı. $\frac{17.18}{2} = 153$, 125, 27, 1 o da 153 aynı.*

Araştırmacı: 1^3 den $(2n-1)^3$ e kadar olan sayıların toplamı şu şekilde verilen $(n-1) + n.(2n-1)$?

2.MÖA: *Evet, öyle çıktı.*

2.MÖA: *Demek ki 1'den $2n-1$ 'e kadar olan sayıların toplamı da şurası olacak. Yani buna kadar olan sayıların toplamı. Sayıları oraya kadar toplayacağız, yani evet. Tamam bu $2n^2 - 1$. Tamam, mantıklı.*

3.MÖA, beşin küpünü temsil eden şeklin altındaki $2+3.5$ ifadesinde yer alan 3'ün şekildeki tam kare sayısını, 2'nin parçalı kare sayısını ifade ettiğini, üçün küpünü temsilden sayı için ise bunun tersi olduğunu söylemiştir. 3.MÖA, özel terimler için yanlış ifadede bulunmuş, genel terim $2n-1$ için fikir yürütememiştir (1.Görüşme).

Araştırmacı: Yani şurada, beşin küpünün olduğu yerde diyorsun ki iki tane parçalı şekil olduğu için iki dedi, üç tane tüm şekil olduğu için +3 dedi.

3.MÖA: Evet. Burada da bir tane tam, iki tane de parçalı var. (Üçün küpünü temsil eden şekil için söylüyor.)

Araştırmacı: O zaman tersi mi oluyor onun?

3.MÖA: Bu bunun tersi, evet sanki.

Araştırmacı: Üçün küpünün olduğu yerde bir tane tam kare aldı, iki tane parçalı aldığı için 2.3 oldu?

3.MÖA: Evet.

3.MÖA: Burada da ne kadar aldı? Himm, zaten gidiyor. 1, 2, 3 aradaki fark 2, 1 den $n-1$ 'e kadar gidiyor, 2, 3, n , sonra aradaki fark iki olacaktı zaten, $2n-1$ 'e kadar gitmiş ama burası, bilemiyorum yani. Neyse bunu geçsek olur mu?

3.MÖA, yanlış yorumda bulunduğunu anlamış, yukarıda bahsettiği matematiksel ifadelerin uzunluğu temsil ettiğini söylemiştir (1.Görüşme).

3.MÖA: Himm, uzunluğunu o şekilde yapmış.

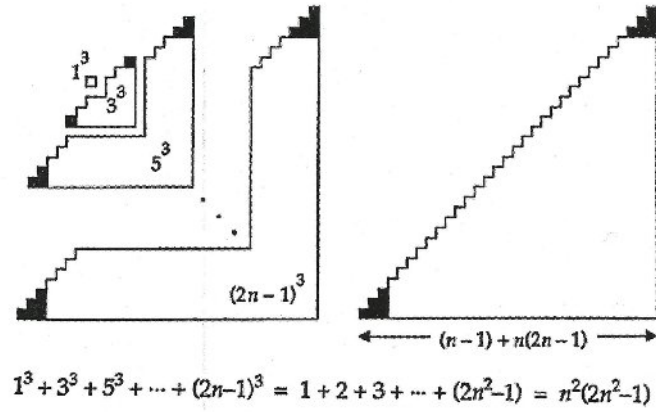
Araştırmacı: Nasıl?

3.MÖA: Ben yanlış anlamışım da bir şeyleri, neyse. Şurada üç birim ya her biri iki tane var, bir tane de şuna eklemiş, burada da aynı şekilde üç tane var beşlikten şöyle gidiyor, iki tane de şu iki birimlik.

Araştırmacı: *Yani şunu diyorsun; koyu olan yerlere bir demiş, şurada da koyu olan yere iki demiş öyle mi?*

3.MÖA: *Evet, yani her birinin uzunluğuna bir birim dersek bununki yedi birim oluyor. Bununki on yedi birim oluyor.*

Şekil-işlem ilişkisi alt kategorisi şekilden işleme geçiş boyutu şekilden sonuca geçişi ifade etme alt boyutu: $1 + 2 + 3 + \dots + (2n^2 - 1)$ ifadesi şekilden elde edilmiştir. Bu alt boyut, MÖA'larının bunu algılama durumlarını temsil etmektedir.



Şekil 4.2.16. Özdeşliklerin Elde Edilmesi

1.MÖA, $1 + 2 + 3 + \dots + (2n^2 - 1)$ ifadesinin şekilden elde edilmesini doğru olarak ifade etmiştir (2.Görüşme).

Araştırmacı: *Şunları nasıl yazdı? $1 + 2 + 3 + \dots$ olduğunu nasıl buldu?*

1.MÖA: *Burada bu şekli her bir parçaya ayırdığında, burada bir kare var, burada iki kare var, burada üç kare var, bu şekilde şu en uzun bir satırda bir kare var, ikinci satırda iki kare var, üçüncü satırda üç kare var. Aşağı kadar geldiğimde burada en son satırda da $2n^2 - 1$ tane satır var. Burada bunu topladığımız zaman aynı zamanda bu birinci kısmın hepsinin iç içe geçip birleştirilmiş hali gibi oluştuğunu burada*

parçaladığımızda görebiliriz. Elimizde tangram ya da yapboz gibi bir şey olsa parçaladığımızda bununla bunun birleştirilmiş ve ayrıştırılmış halleri olduğunu görebiliriz.

3.MÖA, şekilden işleme geçişin nasıl olduğu hakkında fikrinin olmadığını belirtmiştir (1.Görüşme).

3.MÖA: Şurasını şu geçişi bilmiyorum. Yani onu anlayamıyorum ama şu anda. 1, 2... Gerçekten bu sayılar buna nasıl eşit oluyor diye düşünüyorsun ama... Şimdi şurası zaten $2n^2 - 1$ yapıyor. Yani 1 den başlıyor burada. Burada 7 den başlamıştım ben onu. Şurada yedi, burası on yedi falan diye gidiyor. Şu geçişi düşünemedim.

Şekil-işlem ilişkisi alt kategorisi şekilden işleme geçiş boyutu parçayı formüle etme alt boyutu: Tek sayılar şekilsel olarak gösterilirken tek sayının kendisi kadar kare alınmıştır. Her seferinde iki karenin gösterimi değiştirilmiştir, diğerleri aynen alınmıştır. Genel olarak $2n-1$ tek sayısı için 2 karenin şekli değiştirilmiş (parçalanmış), kalan $(2n-3)$ karenin şekliyle oynanmamıştır. 1.MÖA, bu durumu formüle etmiştir (1.Görüşme).

Araştırmacı: Şurası $(2n-1)^2 (2n-3)$ derken neyi kast etmek istedin? Şu üç kareyle ilgili...

1.MÖA: Üç kareyi... Üç kareyi, şuradaki üç tane kareyi, her birinin alanı $(2n-1)^2$ in karesi kadar. $2n-3$ tanesi alınıyor. Burada da 2 tane $(2n-1)^2$ in karesi parçalanmış ama parçalanmalarını formüle etmeye çalışıyorum şu an. Burada, buradaki her bir şekil buraya oturtulmuş, şu şekilde.

1.MÖA, sonrasında yukarıdaki ifadesinin daha anlaşılır biçimini ifade etmiştir (1.Görüşme).

1.MÖA: Şuradaki her bir tam karenin sayısı $2n-3$.

Araştırmacı: Şekillerde tam kareler var, onları söylüyorsun?

1.MÖA: Evet, ikinci eşitlikte tam kareler oluşmuştu $2n-3$ tane. O $2n-3$ tanesi buraya oturtuldu, üçüncü eşitlikteki şekillere.

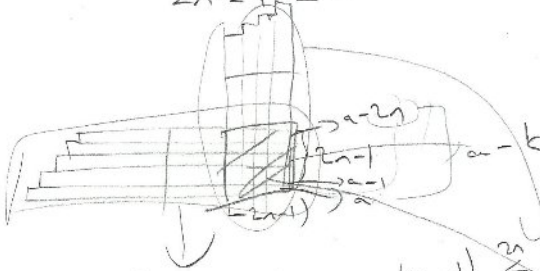
Şekil-işlem ilişkisi alt kategorisi şekilden işleme geçiş boyutu bütünü formüle etme alt boyutu: 1.MÖA, $(2n-1)^3$ nü şekillere bakarak formüle etmeye çalışmıştır. Fakat 1 den başka diğer tek sayılar için eşitlik sağlanmamaktadır (Şekil 4.2.17, 1.Görüşme).

1.MÖA: Şu ikisi tamam, şimdi bunun formülüne geldi sıra. $(n-1)+(2n-1).1+$ bundan bir çıkartıp tekrar 1 ile çarpıp toplayarak $\sum_{k=1}^n (k-1)+k(2k-1)$, $(2n-1)^3$ elde etmemi sağlar.

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (k-1) + k(2k-1) = (2n-1)^3$$

Şekil 4.2.17. 1.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm

1.MÖA, yukarıda yaptığı formülü bir kenara bırakmış, yeniden formüle etmeye başlamıştır. Fakat ikinci kez formüle etme girişiminde de başarısız olmuş, sonuca ulaşamamıştır (Şekil 4.2.18, 1.Görüşme).

$$\begin{aligned}
 (n-1) + n(2n-1) &= a \\
 2n^2 - 1 &= a
 \end{aligned}$$


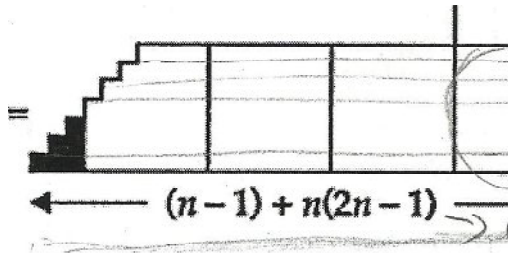
$$\sum_{k=0}^{2n} (a-k) = a(2n+1) - \sum_{k=0}^{2n} k$$

iki kez alındı

$$\begin{aligned}
 \text{Toplam alan} &= 2 \cdot \left(a(2n+1) - \frac{2n(2n+1)}{2} \right) - (2n-1)^2 \\
 (2n-1)^3 &= 2 \left((2n^2-1)(2n+1) - \frac{2n(2n+1)}{2} \right) - (2n-1)^2 \\
 &= 8n^3 - 4n - 4n^2 - 2n - 4n^2 + 4n - 1 - \\
 &= 8n^3 - 8n^2 - 2n - 1 \\
 &= 8n^2(n-1) - 2n-1 = (n-1)(8n^2-1) + n
 \end{aligned}$$

Şekil 4.2.18. 1.MÖA'nın Tek Sayıların Küp Gösterimini Formüle Etmesi (1.Görüşme)

1.MÖA, 2.görüşmede de yeniden formüle etmeye çalışmıştır ama $(2n-1)^3$ nü tekrar yanlış formüle etmiştir (Şekil 4.2.20.).



$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\leftarrow (n-1) + n(2n-1) \rightarrow a = 2n^2 - 1
 \end{aligned}$$

Şekil 4.2.19. 1.MÖA'nın Şekil Üzerindeki Çözümü

Toplam alan: $2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{2n} a-k \right) - (2n-1)^2$ → iki kez kullanıldı.

$$\Rightarrow 2 \cdot \left((2n+1) \cdot a - \sum_{k=0}^{2n} k \right) - (2n-1)^2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left((2n+1) \cdot (2n^2-1) - \left(\frac{(2n-0+1) \cdot (2n+0)}{2} \right) \right) - (2n-1)^2$$

$$\Rightarrow 2 \left((2n+1) (2n^2-1-n) \right) - (2n-1)^2$$

$$\Rightarrow 2 (4n^3 - 2n - 2n^2 + 2n^2 - 1 - n) - (4n^2 - 4n + 1)$$

$$\Rightarrow 8n^3 - 6n - 2 - 4n^2 + 4n + 1$$

$$\Rightarrow 8n^3 - 4n^2 - 2n - 1 \Rightarrow 4n(2n-1) - 2n-1$$

Şekil 4.2.20. 1.MÖA'nın Tek Sayıların Küp Gösterimini Formüle Etmesi (2.Görüşme)

Şekil-işlem ilişkisi alt kategorisi şekilden işleme geçiş boyutu kontrol etme alt boyutu: 1.MÖA, şekilden işleme geçişi formüle etmeye çalışmış, sonuca ulaşamamıştır. Yaptığı işlemi kontrol etmek için yeniden yapmıştır (1.Görüşme).

Araştırmacı: *O zaman sen şimdi formülü yazdın, neredeydi o? Şu muydu şu?*

1.MÖA: *Toplam olan şu. Şunun $(2n-1)^3$ e eşit olması gerekiyor. Şu an yaptığım hatayı arıyorum. Nerede hata yaptım?*

Araştırmacı: *Şuraya yeniden formülü yazıyorum diye not et.*

2.MÖA, üçün küpünü temsil eden şeklin üçün küpüne eşit olup olmadığını kontrol etmiştir.

Araştırmacı: *Ne düşünüyorsun?*

2.MÖA: *Tamam, şu kareler şu küçük karelerin toplamı yani 1^3 ü bunu temsil ediyorsa diye düşündüm. Şunların hepsini parçalasaydım, $1,1,1,\dots$ 27 tamam. Bunlar için hesaplamıştım. 27 birim küp var.*

Şekil-işlem ilişkisi alt kategorisi işlem den şekle geçiş boyutu özel ve genel terimleri ifade etme alt boyutu: 1.MÖA, $(2n-1)^3$ nün şekil olarak nasıl temsil edildiğini ifade etmiştir (1.Görüşme).

1.MÖA: *Burada her bir taralı parçalanmaya yararlı olan parça ters çevrilip buradaki eksik kısma oturtulduğunda kare şeklinde burayı tamamlıyor. O yüzden de $(2n-1)(2n-1)^2$ elde edilmiş oluyor.*

Araştırmacı: *Nereden oluyor dedin?*

1.MÖA: *Buradaki her bir taralı parça...*

Araştırmacı: *Onu tamamladı?*

1.MÖA: *Buradaki eksik kısmı, parçalanmışları çevirdiğimiz zaman bütüne tamamlamış oluyor. Toplamda $2n-1$ tane parçamız vardı. Tam bütün olan parçanın alanının $(2n-1)^2$ olduğunu biliyoruz. $(2n-1)(2n-1)^2$ elde edilmiş oluyor.*

Araştırmacı: *Tüm alanı olmuş oluyor?*

1.MÖA: *Evet tüm alanı olmuş oluyor. Tabanlar aynı ise üstler toplanırdan $(2n-1)(2n-1)^2 = (2n-1)^3$ elde edilmiş olur.*

2.MÖA, birin küpünün şekil olarak temsilini ifade etmiştir (1.Görüşme).

2.MÖA: *Yani şimdi tek bir karenin alanı mesela 1^3 ünü temsil ediyor.*

2.MÖA: Tamam, bir inceleyim. 1^3 için boş kare vermiş. 3^3 için 3.3^2 demiş. 3^3 şunu temsil etmiş.

2.MÖA, üçün küpünü temsil eden şekilde yer alan tüm karelerin sayısının şeklin tabanında yazan sayıya göre belirlendiğini söyleyerek, yanlış yorumda bulunmuştur.

2.MÖA: Şimdi şunu düşündüm. Burada en sondaki eşitlikten sonra, bir, iki, üç parça, 3^3 ise mesela, küpüne göre değil de, şu tabandaki sayıya göre üç parçadan oluşmuş.

Şekil-işlem ilişkisi alt kategorisi işlem den şekle geçiş boyutu kontrol etme alt boyutu: 2.MÖA, işlemler arasında bulunan ilişkinin işlemleri temsil eden şekiller arasında da olup olmadığını kontrol etmiştir (1.Görüşme).

3.MÖA: 1^3 ve 3^3 'nü topladım, şu küçüğü de şuraya koydum. Acaba bu şekilden bu sayıyı yakalayabiliyor muyum? Ona bakmaya çalışıyorum.

Araştırmacı: $1^3 + 3^3 = 28$ ise, şekilde 1^3 ve 3^3 'nün gösterildiği şekli birleştirdiğimde 28 oluyor mu? Ona bakmaya çalışıyorsun.

3.MÖA: Evet.

İşlem-işlem ilişkisi alt kategorisi özel terim ve özdeşliği ifade etme boyutu: 1.MÖA, yapılan işlemlerin tek sayılar üzerinde olduğunu söyleyerek, matematiksel ifadeler arasında bulunan ilişkiden bahsetmiştir (1.Görüşme).

1.MÖA: Genelde hep tek sayılar üzerinde yapılmış işlem. Genelde değil, daha doğrusu tamamında tek sayılar üzerinde yapılmış.

1.MÖA, görsel ispattaki birinci ve ikinci özdeşliği tarif etmiştir (2.Görüşme).

1.MÖA: *Bu ifade direkt küpler toplamı birinci ifade. İkinci ifadede ayrıştırılmış haldeki her terimi toplamış.*

İşlem-işlem ilişkisi alt kategorisi işlemleri yaparak çözme boyutu: 1.MÖA, ikinci özdeşlikte bulunan $2n^2 - 1$ ifadesinin ispatta nereden geldiğini söylemiştir (2.Görüşme).

1.MÖA: $2n^2 - 1$ *buradan geliyor, bu şekilde.*

Araştırmacı: *Yani $(n-1) + n(2n-1) = 2n^2 - 1$. Tamam, oradan geliyor.*

İşlem-işlem ilişkisi alt kategorisi formül kullanarak çözme boyutu: MÖA'ları $n^2(2n^2 - 1)$ eşitliğinin özdeşliklere eşit olmasını formül kullanarak göstermişlerdir.

Araştırmacı: $n^2(2n^2 - 1)$ *in ona (özdeşliğe) eşit olduğunu nasıl bulmuş?*

1.MÖA: *Terimler, toplam formüllerini düşünerekten, son terim artı ilk terim bölü artışı miktarı artı bir sağlar mı diye onu deniyorum şu an. Burada da bu gördüğümüz kısmı toplam formülünden elde etmiş olduk (2.Görüşme).*

Araştırmacı: *Peki şunu nasıl yazmış? $n^2 \cdot (2n^2 - 1)$ 'i?*

2.MÖA: $n^2 \cdot (2n^2 - 1)$ *. Son terim eksi ilk terim mi? Evet, oradan.*

Araştırmacı: *Nereden dedin?*

2.MÖA: *Şurada $\frac{n.(n+1)}{2}$, oradan yazmış (2.Görüşme).*

3.MÖA: *Uzunluğunun bir fazlasının yarısı kadardır. Yani şu uzunluğunun bir fazlasının çarpımının yarısı kadar ediyor toplamı. Bütün şeylerin toplamı, şunların hepsinin toplamı... (1.Görüşme)*

İşlem-işlem ilişkisi alt kategorisi formüle etme boyutu: 1.MÖA, 1+2(3), 2+3(5) biçiminde verilen ifadeleri formüle etmeye çalışmıştır. Fakat sonuca ulaşamamıştır.

Araştırmacı: *Şu 5-2? Nasıl buldun onu?*

1.MÖA: *5-2. Şurada oluşan eşitlikte, burada üçün küpü için düşünüldüğü zaman, üçün karesinden iki eksik, burada beşin karesini düşündüğümüzde beşin karesinden...*

Araştırmacı: *Beşin karesi derken hangisini beşin karesi düşünüyorsun?*

1.MÖA: *Burada üç üzerinden işlem yapmışız tabanımız üç, bu sayı burada oluşan karede üçün karesinden iki eksik.*

Araştırmacı: *Üçün karesinden iki eksik derken neresi iki eksik?*

1.MÖA: *“Yani üçün karesinden ne kadar az ya da ne kadar fazla?” onu düşünmeye çalışıyorum.*

Araştırmacı: *Üçün karesi ne oluyor? Mesela bunun tamamı mı oluyor? Ne oluyor üçün karesi? Kendin ne düşünüyorsun?*

1.MÖA: *Buna en yakın üçün kuvveti sayıyı düşündüm açıkçası. Onun için en yakın üçün karesi oluyor. Burasının toplamı yedi.*

Araştırmacı: *Yediye en yakın sayıyı...*

1.MÖA: *Yediye en yakın üçün kuvveti üçün karesi var dokuz.*

Araştırmacı: *Tabanı formüle etmeye çalışıyorsun?*

1.MÖA: *Formüle etmeye çalışıyorum.*

Araştırmacı: *Tabana yazmış olduğun sayı $3 \cdot 2 + 1 = 7$ ise bu dokuz, üçün karesi. Benzer şekilde burası nasıl olur?*

1.MÖA: *Burası 17 yapıyor. 5 üzerinde çalışıyoruz. 5 in karesi 25, 25 ten sekiz eksik, yani 2^3 kadar eksik buraya 2 yi oluşturabilmek için $3-2$ diye biliyorum. 2 nin birinci kuvveti yapıyor. Yani elde etmek istediğim sayı... Burada da fark 8. Yani ikini küpü. 2'nin küpünü de $5-2$ şeklinde yazabiliyorum. Aynı şeyi burada da deneceğim şimdi, sağlıyor mu?*

Araştırmacı: *Dene bakalım.*

1.MÖA: *$n-1+2n^2-n$, $2n^2-1$ yaptı. Demek ki 2 ile çıkmıyor. n^2 ye ulaşmam için o zaman düzenlemem gereken şey $1-n^2$, o da sağlamaz.*

İşlem-işlem ilişkisi alt kategorisi sağlamasını yapma boyutu: 2.MÖA ve 3.MÖA özel değerler vererek özdeşliklerin hangi n değerleri için sağlandıklarına bakmışlardır (2.Görüşme).

Araştırmacı: *1^3 'den 17^3 'ne kadar olan sayıların toplamını mı düşündün?*

2.MÖA: *Evet, $1^3 + 3^3 + \dots + 17^3$ diye düşündüm. Ne oluyor? 161'e kadar olan sayıların toplamıymış. O da mesela n yi ne buldum ben? 9 buldum.*

Araştırmacı: *Orada ne düşündün?*

3.MÖA: *Şu formülü sağlıyor mu diye baktım da. Sağlıyormuş.*

Araştırmacı: *Hangi formülü?*

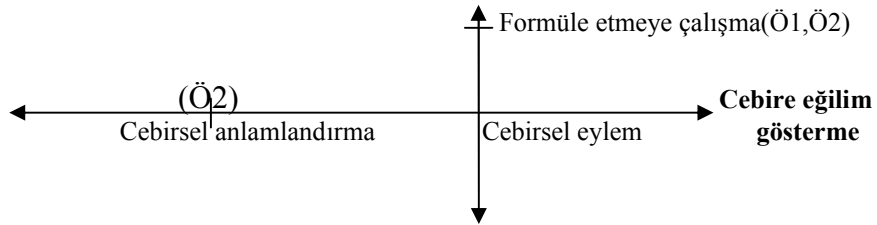
3.MÖA: *Üçünde toplam 153 tane kare olduğunu buldum.*

Araştırmacı: *Üçünün toplamı derken $1^3 + 3^3 + 5^3$ toplamı 153 tane kare oldu.*

3.MÖA: *Evet, burada $n=3$ olmuş oluyor. Buraya koydum 153'ü verdi, denemek istemiştim.*

Araştırmacı: *Verilen soruda $n^2(2n-1)$ de hangi n değeri için sağlıyor, onu buldun. 3 için sağlıyor dedin.*

Cebire eğilim gösterme: MÖA'larının bu kategoriye ait durumları Şekil 4.2.21. de gösterilmiştir.



Şekil 4.2.21. Özdeşliklerin İspatlanmış Görsel İspatında Cebire Eğilim Gösterme

Cebirsel anlamlandırma boyutu: 2.MÖA, özdeşliklerin birbirine eşit olduğunu formül olarak bildiğini söylemiştir (1.Görüşme).

2.MÖA: *Alan ile ilişkili olduğunu düşünüyorum, mesela. Bunların hepsinin toplanmış şu son şekildir. Şimdi bir kenarı şu olan karenin yarısı gibidir. İşte şurada bir dişli var, bunların iki tanesi bir kare, $2n^2 - 1$ in karesi yani. Şunun ile de şunun aynı olduğunu görebilirim, hani formülden eşit, onu anlıyorum.*

Cebirsel eylem boyutu formüle etmeye çalışma alt boyutu: 1.MÖA, $(2n-1)^3$ ifadesini temsil eden şekli matematiksel olarak göstermeye, formüle etmeye çalışmıştır.

Araştırmacı: *Şimdi sen ne yapmaya çalıştın?*

1.MÖA: *Şuranın toplam alanını bulduğumda bu toplam alanın sayının küpüne eşit olduğunu bulmaya çalışıyorum.*

2.MÖA, $(2n-1)^3$ ifadesini temsil eden şeklin matematiksel gösteriminden hareket ederek görsel ispatta belirtilen ikinci özdeşliğe ulaşmayı hedeflediğini söylemektedir.

Araştırmacı: *Senin burada amacın nedir?*

1.MÖA: *Bu genel ifadelerden birine ulaşmaya çalışmak. (Görsel ispattaki özdeşliklerden bahsetmektedir.)*

Araştırmacı: *Hangi...*

1.MÖA: *Buna zaten ulaşılabilir. (Birinci özdeşlikten bahsediyor.) Buna şu karelerle ulaşmaya çalışıyorum. (İkinci özdeşliği söylüyor.)*

1.MÖA, $(2n-1)^3$ ifadesini temsil eden şekli formüle edememiştir. Amacının tek sayıların küplerinin matematiksel olarak farklı biçimlerde yazıldığını göstermek olduğunu söylemiştir.

Araştırmacı: *Peki diyelim eşit çıktı, çıkmalı zaten. O zaman ne olacak?*

1.MÖA: *O zaman küpü birkaç farklı yöntemle yazmış olacağız. Tek sayıların küplerini birkaç farklı şekilde yazmayı görmüş olacağız.*

2.MÖA, görsel ispatta bulunan matematiksel ifadeleri bir araya getirmiş ama buradan anlamlı bir sonuç elde edememiştir.

2.MÖA: Şuradaki $1+2.3$ vardı. $2+3.5$, $3+4.7$. Burası sadece $n-1$ den gelenler. Yani $1, 2, 3, 4, 5$ onları ayrı bir yere yazdım, $n-1$ e kadar. Şurada çarpım durumunda olanları da şu şekilde yazdım. Buradan da çarpımdan gelecek olanlardı, öyle o şekilde.

$$\underbrace{1+2(3)}_{3^2} + \underbrace{2+3(5)}_{5^2} + \underbrace{3+4(7)}_{7^2} + \underbrace{4+5(9)}_{9^2} + \dots$$

$$= 1+2(3) + 2+3(5) + 3+4(7) + 4+5(9) + \dots + (n-1) + n(2n-1)$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n-1 + 2(3) + 3(5) + 4(7) + 5(9) + \dots + n(2n-1)$$

Şekil 4.2.22. 2.MÖA'nın Çözümünden Bir Bölüm

V. BÖLÜM

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmadan elde edilen bulgulara dayalı sonuçlara ve sonuçlar çerçevesinde çeşitli önerilere yer verilecektir.

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada MÖA'larının görsel akıl yürütme durumlarını incelemek amacıyla MÖA'larına görsel ispatların bulunduğu çalışma kâğıtları verilmiştir. MÖA'larından üç görsel ispatı kendilerinin ispatlamaları, bir görsel ispatı ise yorumlamaları istenmiştir. MÖA'larından ispatlamaları istenen görsel ispatlardan biri görsel ispatın alındığı kitaptaki (Nelsen, 2000) hali gibi verilmemiş, verilen bazı bilgiler çıkarılmıştır. MÖA'larının çözüm durumlarına göre, ispatın kitaptaki hali ipucu denilerek verilmiştir. Katılımcılardan çalışma sürecinde sesli olarak düşünceleri istenerek, konuşmaları kaydedilmiştir. MÖA'larının çalışma kâğıtları üzerindeki çözümleri ve çözüm sırasındaki konuşmaları incelenmiş, gömülü teoriye göre analiz edilerek bazı sonuçlara ulaşılmıştır. Bu sonuçlar, MÖA'larının görsel ispatları ispatlama ve görsel ispatı yorumlama süreçleri olmak üzere iki ayrı başlık halinde sunulacaktır.

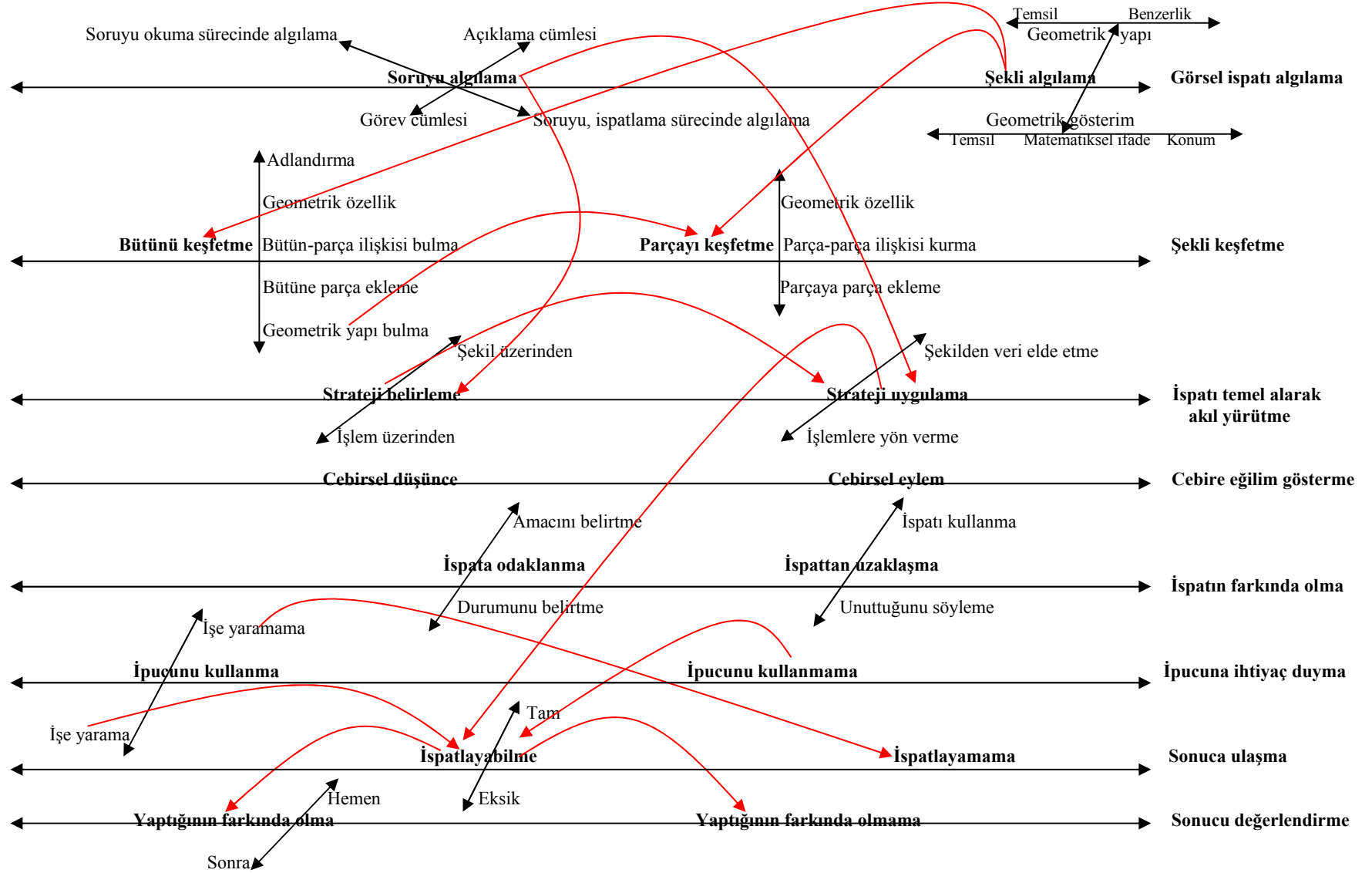
5.1.1. MÖA'larının Görsel İspatları İspatlama Sürecine Ait Bulguların Sonuçları

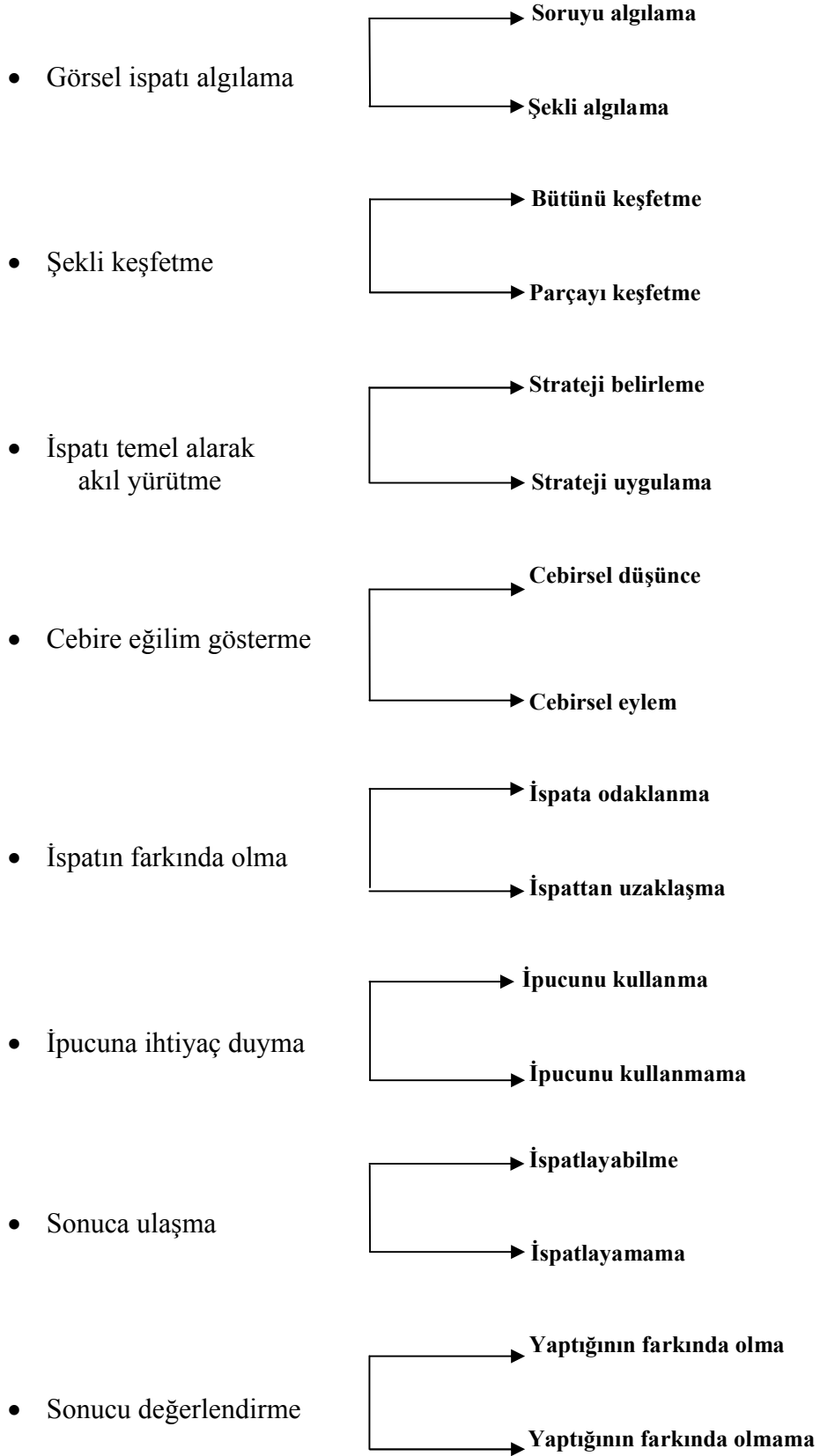
MÖA'larının görsel ispatları ispatlama süreçleri Şekil 5.1. de gösterilmiştir. Araştırmanın sonuçları bu şekil doğrultusunda açıklanmaya çalışılacaktır. Şekilde de görüldüğü gibi, MÖA'larının görsel ispatları ispatlama sürecine ait ana kategoriler “Görsel ispatı algılama, şekli keşfetme, ispatı temel alarak akıl yürütme, cebire eğilim gösterme, ispatın farkında olma, ipucuna ihtiyaç duyma, sonuca ulaşma, sonucu

değerlendirmedir.” Her bir ana kategoriye ait alt kategoriler o kategorinin hizasındaki eksen üzerinde gösterilmiştir. Araştırmanın sonucunda ortaya çıkan alt kategoriler “Soruyu algılama, şekli algılama, bütünü keşfetme, parçayı keşfetme, strateji belirleme, strateji uygulama, cebirsel düşünce, cebirsel eylem, ispata odaklanma, ispattan uzaklaşma, ipucunu kullanma, ipucunu kullanmama, ispatlayabilme, ispatlayamama, yaptığıının farkında olma, yaptığıının farkında olmamadır. ” Şekilde ilişkili olanlar birbiriyle kesişmiş ya da oklar yardımıyla birleştirilmiştir. İlişkiler tek yönlü ortaya çıktığından şekildeki oklar da tek yönlü olarak kullanılmıştır. Okun başlangıç noktası ilişkinin başlangıç noktasını, okun ucu ise bitiş noktasını göstermektedir. Örneğin, görsel ispatı ispatlayan MÖA ispatı ispatlayamadığını sanarak yaptığı sonucun farkında olmamaktadır. Burada tek yönlü bir ilişki söz konusudur.

Bu bölümde verilerin analiz edilmesi sonucunda ortaya çıkan ana kategorilerin sonuçları ele alınacaktır. Verilerin analiziyle MÖA’larının görsel ispatları ispatlama süreçlerine ilişkin sonuçlar Şekil 5.2. de gösterilmiştir.

Şekil 5.1. MÖA'larının Görsel İspatları İspatlama Süreci





Şekil 5.2. Görsel İspatları İspatlama Sürecine Ait Kategori ve Alt Kategoriler

Şekil 5.2. de görüldüğü gibi MÖA'larının görsel ispatları ispatlama süreci sekiz adımdan oluşmaktadır. Bu bölümde her bir ana kategori alt kategorileriyle birlikte paragraf başlıkları altında incelenecek ve kategorilerin birbirleriyle ilişkilerinden bahsedilecektir.

Görsel ispatı algılama: MÖA'larına çalışma kâğıtları verildiğinde, MÖA'ları öncelikli olarak görsel ispatı algılamaya çalışmışlardır. Bu doğrultuda MÖA'ları görsel ispatta yer alan soruları okumuş ve şekilleri incelemişlerdir. MÖA'ları soruyu okudukları sırada veya görsel ispatı ispatlamaya çalışırken soruya dair emin olamadıkları veya anlayamadıkları durumlar görülmüştür. Dolayısıyla soruyu algılama alt kategorisi sadece soruyu okuma süreçlerinde değil soruyu ispatlama süreçlerinde de ortaya çıkmıştır. Ayrıca MÖA'larının soruyla ilgili algılama durumlarının açıklama cümlesi veya görev cümlesine yönelik olduğu gözlemlenmiştir. MÖA'larının görsel ispatı algılama durumlarının bir diğeri ise şekli algılamadır. MÖA'ları şekildeki geometrik yapıyı ve geometrik gösterimi algılamada sorunlar yaşamışlardır.

Şekli keşfetme: MÖA'ları gerek şekil üzerinde gerekse şekil dışında çözümler yaparak şekli keşfetmeye çalışmışlardır. MÖA'larının şekli keşfetme durumları bütünü keşfetme ve parçayı keşfetme olmak üzere ikiye ayrılmıştır.

Bütünü keşfetme alt kategorisi aşağıdaki işlem türlerinden oluşmuştur:

- Adlandırma
- Geometrik özellik
- Bütün-parça ilişkisi bulma
- Bütüne parça ekleme
- Geometrik yapı bulma

Parçayı keşfetme alt kategorisi ise,

- Geometrik özellik
- Parça-parça ilişkisi kurma
- Parçaya parça ekleme

işlem türlerinden oluşmuştur. MÖA'ları hem şeklin bütününe yönelik hem de şekli oluşturan bir parçaya yönelik geometrik özellik bulmuşlardır. MÖA'ları geometrik kuralları kullanarak bütün-parça ve parça-parça ilişkilerini kurmuşlardır. Ayrıca MÖA'ları şekil üzerinde çizimler yapmışlar, bunun sonucunda ise bütüne parça ekleme ve parçaya parça ekleme durumları ortaya çıkmıştır. Bütünü keşfetme sürecinde geometrik yapılar bulmuşlar, sonrasında bu yapıların özelliklerini ortaya çıkararak o parçayı keşfetmişlerdir. MÖA'larının şekli algılama durumları ile bütünü ve parçayı keşfetme durumları ilişkilidir. Diğer bir ifadeyle, şekli keşfetmeye yönelik yapacakları işlemler şekli algılama durumlarından etkilenmiş, nasıl algılıyorlarsa öyle hareket etmişlerdir.

İspatı temel alarak akıl yürütme: Hershkowitz ve diğerleri (2001) bazı durumlarda görsel bir stratejinin sembolik bir sonuçtan ilham alabileceğini ifade etmektedirler. Benzer şekilde MÖA'larının da görsel ispatı ispatlamaya çalışırken, ispatta istenilene göre hareket etmeye çalıştıkları durumlar olmuştur. Bu da MÖA'larının rastgele çözüm yapmadıklarını göstermektedir. Bardelle (2010) tarafından yapılan çalışmada da öğrencilerin görsel göstergebilimsel sistemlerin kullanımının rastgele olmadığı fakat biraz daha konu üzerinde çalışmaya ihtiyaç duydukları ortaya çıkmıştır.

MÖA'ları, ispata göre ne yapmaları gerektiğini ifade etmişler yani strateji belirlemişlerdir. MÖA'ları stratejileri şekil üzerinden veya işlem üzerinden belirlemişlerdir. MÖA'ları belirledikleri stratejileri gerçekleştirebildikleri durumlar olduğu gibi gerçekleştiremedikleri durumlar da olmuştur. MÖA'larının strateji belirleyerek bunu gerçekleştirmeleri strateji uygulama olarak alınmıştır. MÖA'ları strateji uygulayarak, şekilden veri elde etmişler ya da yapacakları işlemlere yön vermişlerdir. MÖA'larının soruyu algılamaları ile strateji belirleme veya strateji uygulamalarının ilişkili olduğu görülmüştür. Nitekim soruyu yanlış algıladıklarında yanlış strateji belirlemiş veya uygulamışlardır.

Cebire eğilim gösterme: MÖA'larına görsel akıl yürütmeyi ve geometrik kuralları kullanarak ulaşabilecekleri görsel ispatlar verilmiştir. Fakat MÖA'ları tüm

sonuçları şekilden elde edebilme imkânına sahip olmalarına rağmen, cebire eğilim göstererek cebirsel çözüm yolları düşünmüşler ya da cebirsel çözüm uygulamaya çalışmışlardır. Araştırmacının ispata şekilden ulaşmaları gerektiğini söylemesi üzerine tekrar görsel ispat üzerinden düşünmeye başlamışlardır.

İspatın farkında olma: MÖA'ları görsel ispatı ispatlamaya çalışırken, ispat üzerinde düşündükleri durumlar olduğu gibi neyi ispatlamaları gerektiğini göz ardı ettikleri durumlar da gözlemlenmiştir. İspatın farkında olma kategorisi ortaya çıkan bu durumlara göre ispata odaklanma veya ispattan uzaklaşma olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. MÖA'ları çözüm sırasında hangi ispatı yapmaları gerektiğini ifade etmişler, amaçlarını belirtmişlerdir. Ya da çözüm sırasında ispatla ilgili olarak neler yaptıklarını söyleyerek durumlarını ifade etmişlerdir. Böylece ispata odaklanmışlardır. MÖA'ları görsel ispatı ispatlamaya çalışırken ispattan uzaklaşarak neyi ispatlamaları gerektiğini unutmuşlardır. MÖA'larının ispatı unutmaları kendi ağızlarından neyi ispatları gerektiğini unuttuklarını söylemeleri ya da ispatın kendisini ispat içerisinde kullanmaları biçiminde ortaya çıkmıştır.

İpucuna ihtiyaç duyma: Daha önceden de belirtildiği gibi görsel ispatlar içerisinde bir tanesi MÖA'larına kitapta (Nelsen, 2000) bulunan şekilden bazı bilgiler çıkarılarak verilmiştir. İspatın kitaptaki hali ise ipucu olarak alınmıştır. MÖA'ları ipucuna ihtiyaç duymadan sonuca ulaştıkları gibi, ipucunu kullanmışlar ve ipucu sonuca ulaşmalarında işe yaramıştır. Bununla birlikte ipucunu kullanmalarına rağmen sonuca ulaşamadıkları durumlar da olmuştur. Yani ipucu MÖA'larının sonuca ulaşmalarında fayda sağlayabildiği gibi etkisiz de kalmıştır. İpucu, MÖA'larının ispatta takıldıkları noktaya dair olduğunda yarar sağlamıştır.

Sonuca ulaşma: MÖA'ları bazı görsel ispatları ispatlayabilmiş, bazılarını ise ispatlayamamışlardır. MÖA'ları görsel ispatları her zaman tam olarak ispatlayamamış, eksik ispatladıkları da olmuştur. Ayrıca, MÖA'larının öncelikle soruyu doğru algılayarak, ispatı temel alarak akıl yürütme çerçevesinde doğru strateji belirleyip ve

devamında doğru strateji uyguladıklarında sonuca ulaşmalarının kolaylaştığı görülmüştür.

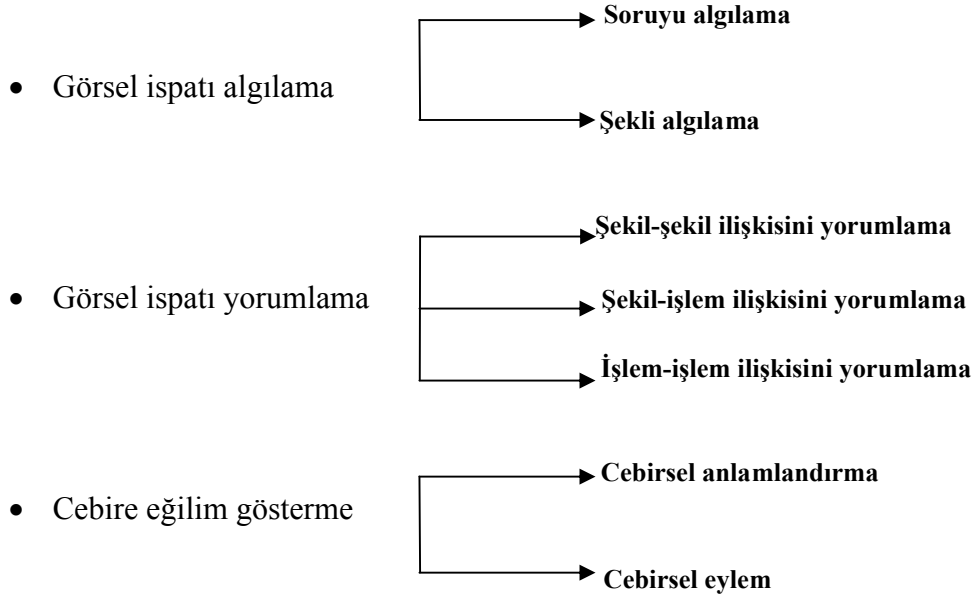
Sonucu değerlendirme: MÖA'ları görsel ispat üzerinde çözümlemeler yaparak sonuçlar elde etmişlerdir. Fakat MÖA'larının elde ettikleri sonuçlarla bu sonuçları değerlendirmeleri farklı olmuştur. MÖA'ları görsel ispatı ispatladıklarında, ispatı ispatlayabildiklerinin farkında olmuşlar ya da ispatı ispatladıklarının farkında olmayarak sonucu elde edemediklerini düşünmüşlerdir. MÖA'ları ispatı ispatladıklarının farkına, sonucu elde eder etmez vardıkları gibi ispatı ispatlayıp sonrasında neler yaptıklarını gözden geçirirken ispatı ispatlamış olduklarını fark ettikleri de olmuştur.

Bardelle (2010) grafiksel gösterimlerin kullanımının pek çok zorluklar getirdiğinden bahsetmiştir. Bu zorluklardan biri de MÖA'larının sonucu elde etmelerine rağmen bunun farkında olmamaları olabilir.

5.1.2. MÖA'larının Görsel İspatı Yorumlama Sürecine Ait Bulguların Sonuçları

Verilen görsel ispata dair MÖA'larının görsel ispatları yorumlama süreçleri Şekil 5.3. te gösterilmiştir. Araştırmanın sonuçları bu şekil doğrultusunda açıklanmaya çalışılacaktır. Şekilde de görüldüğü gibi, MÖA'larının görsel ispatı yorumlama sürecine ait ana kategoriler “Görsel ispatı algılama, görsel ispatı yorumlama, cebire eğilim göstermedir.” Her bir ana kategoriye ait alt kategoriler o kategorinin hizasındaki eksen üzerinde gösterilmiştir. Araştırmanın sonucunda ortaya çıkan alt kategoriler “Soruyu algılama, şekli algılama, şekil-şekil ilişkisini yorumlama, şekil-işlem ilişkisini yorumlama, işlem-işlem ilişkisini yorumlama, cebirsel anlamlandırma, cebirsel eylemdir.” Şekilde ilişkili olanlar birbiriyle kesişmiş ya da oklar yardımıyla birleştirilmiştir. İlişkilerin ortaya çıkma durumuna göre tek yönlü ve çift yönlü oklar kullanılmıştır.

Bu bölümde verilerin analiz edilmesi sonucunda ortaya çıkan ana kategorilerin sonuçları ele alınacaktır. Verilerin analiziyle MÖA'larının görsel ispatları ispatlama süreçlerine ilişkin sonuçlar Şekil 5.4. te gösterilmiştir.



Şekil 5.4. Görsel İspatı Yorumlama Sürecine Ait Kategori ve Alt Kategoriler

Şekil 5.4. te görüldüğü gibi MÖA’larının görsel ispatları yorumlama süreci üç kategoriden oluşmaktadır. Bu bölümde her bir ana kategori alt kategorileriyle birlikte paragraf başlıkları altında incelenecek ve kategorilerin birbirleriyle ilişkilerinden bahsedilecektir.

Görsel ispatı algılama: MÖA’larına çalışma kâğıdı verilip, çalışma kâğıdında bulunan görsel ispatı yorumlamaları istenmiştir. MÖA’ları soruyu okumuş ve görsel ispatı incelemeye başlamışlardır. MÖA’larının soruyu okuma süreçlerinde soruyu algılamalarıyla ilgili herhangi bir durum ortaya çıkmamıştır. Soruyu yorumlama süreçlerinde ise soruyu anlayamadıkları gözlemlenmiştir. MÖA’ları görsel ispatı incelerken ve görsel ispatı yorumlamaya çalışırken şekilde anlayamadıkları, emin olmadıkları ve yanlış anladıkları gösterimler olmuştur. MÖA’larının şekil ile ilgili algılama durumlarının matematiksel ifadenin şekilsel temsilini algılama, şekilsel işlemi algılama, şeklin matematiksel temsilini algılama biçiminde ortaya çıktığı görülmüştür. Diğer bir ifadeyle MÖA’ları matematiksel ifadenin şekil olarak temsil edilmesini, şekiller arasındaki değişim ilişkilerini ve şeklin matematiksel olarak temsil edilmesini algılamada problemler yaşamışlardır.

MÖA'larının matematiksel ifadenin şekilsel temsilini algılamaları aşağıdaki boyutlarda ortaya çıkmıştır:

- Simgeleme
- Biçim değişimi
- Renk değişimi
- Bütünlük

MÖA'larının görsel ispatta bulunan şekilsel işlem yani şekilden şekle olan değişim ile ilgili herhangi bir sorunları olmamıştır. Ancak kendilerinin oluşturduğu bir şekil ve görsel ispatta bulunan başka bir şekil arasında yanlış bütün-parça ilişkisi kurmuşlardır.

MÖA'larının şeklin matematiksel temsilini algılamaları ise aşağıdaki boyutlarda ortaya çıkmıştır:

- Dönüşüm
- Benzerlik
- Matematiksel ifade

Görsel ispatı yorumlama: MÖA'larının görsel ispatı yorumlamaları şekil-şekil ilişkisini yorumlama, şekil-işlem ilişkisini yorumlama, işlem-işlem ilişkisini yorumlama olmak üzere üç şekilde ortaya çıkmıştır.

MÖA'ları şekil-şekil ilişkisini ifade etme ve çözme yoluyla yorumlamaya çalışmışlardır. MÖA'ları şekiller arasındaki ilişkileri belirli bir yer için (parçaya odaklanma) veya ortak özellikleri gözeterek (parçalara odaklanma) ifade etmişlerdir. Ayrıca MÖA'ları görsel ispatta bulunan bir şekil ve kendilerinin oluşturduğu başka bir şekil arasında bütün-parça ilişkisi kurmuşlar, bu ilişkiyi de işlemlerle çözerek ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Fakat şekli algılamaları ile yaptıkları çözümün arasında tutarsızlık olduğunu görmelerine rağmen yanlış algılamaya devam etmişlerdir (Şekil 5.3. te aralarındaki etkileşim çift taraflı olduğundan çift okla gösterilmiştir). Bu durum Noss ve diğerleri (1997) tarafından öğrencilerin kendi görselleştirmeleri ve analitik

düşünceleri arasında bağlantı yapma eğiliminde olmadıkları iddialarıyla örtüşüyor görünmektedir.

MÖA'larının şekil-işlem ilişkisini yorumlama durumları şekilden işleme geçişi yorumlama ve işlemden şekle geçişi yorumlama olarak iki şekilde ortaya çıkmıştır. MÖA'ları şekilden işleme geçişi ifade etme, formüle etme, kontrol etme yoluyla yorumlamaya çalışmışlardır. MÖA'ları şekilden işleme geçiş ilişkisinde öncelikli olarak özel terim, sonrasında genel terim ve en son sonuca geçişi yorumlamışlardır. MÖA'larının yorumları incelendiğinde özel terim ve genel terimi doğru yorumlayanların özdeşliklerin elde edilmesini doğru olarak yorumladığı ya da fikir yürütemediği; özel terim ve genel terimi yanlış yorumlayanların özdeşliklerin elde edilmesini diğer bir ifadeyle sonuca geçişi yanlış yorumladıkları görülmüştür. MÖA'ları şekilden işleme geçişi formüle etmişler, bunun için önce şeklin bir parçasını sonrasında bütünü formüle etmişlerdir. MÖA'ları şeklin işlem olarak gösteriminin gerçekten öyle olup olmadığını kontrol etmişlerdir. MÖA'ları işlemden şekle geçişi ifade etme ve kontrol etme yoluyla yorumlamaya çalışmışlardır. İşlemden şekle geçişleri özel terim ve genel terim için belirtmişlerdir.

MÖA'ları işlem-işlem ilişkisini ifade etme, çözme, formüle etme, sağlamasını yapma yoluyla yorumlamaya çalışmışlardır. MÖA'ları özel terimler ve özdeşlikler arasındaki ilişkiyi ifade etmişlerdir. İşlemler arasında bulunan ilişkiyi görsel ispatta bulunan işlemleri yapma ve formül kullanma ortaya çıkarmışlardır. MÖA'ları ispatı yorumlamaları açısından formüle etme işlemine ihtiyaçları olmamasına rağmen işlemler arasında ilişki bulmaya, bu ilişki yoluyla formül elde etmeye çalışmışlardır. Bu durum MÖA'larının cebire eğilim göstermeleri olarak yorumlanabilir. Ayrıca MÖA'ları özdeşlikte bulunan genel terime değerler vererek iki özdeşliğin eşitliğinin sağlamasına bakmışlardır.

Bazı MÖA'larının görsel ispata dair yorum yapamamalarının ya da yanlış yorum yapmalarının görsel ispatı tam olarak incelememelerinden veya dikkatlerini tam olarak yoğunlaştıramamalarından kaynaklanmış olabilir. Bardelle (2010) tarafından yapılan çalışmada da İtalyan matematik öğrencilerinin görsel ispattaki şeklin tamamını değil belli bir kısmını kullandıklarını sonuç olarak görsel ispattaki bütün grafiksel işaretleri değerlendirmediklerinden bahsedilmektedir.

Cebire eğilim gösterme: Görsel ispatı ispatlama sorusunda olduğu gibi, görsel ispatı yorumlama sorusunda da MÖA'larının cebire eğilim gösterdiği, şekil yerine cebirsel işlemlerle sonuca ulaşmaya çalıştıkları durumlar olmuştur. Bununla birlikte MÖA'ları iki özdeşliğin birbirine eşitliğini cebirsel olarak anlayabildiklerini söylemişler fakat şekilden nasıl elde edildiği konusunda fikir yürütememişlerdir. 1.MÖA, görsel ispatta bulunan şekilde ispatın nasıl yapıldığını anlamak yerine sonuca formül yoluyla ulaşmaya çalışmıştır. Araştırmacının şekilleri sorması üzerine yorum yapmıştır. Buradan MÖA'larının görsel destek sistemlerini anlamada ya da kullanmada isteksizlik gösterdikleri sonucuna varılabilir. Noss ve diğerleri (1997) bu isteksizliğin üstesinden gelinebilirse, matematiksel aktive ile görselleştirmenin birleşiminin öğrencilerin kendi bilişsel gereksinimlerinin takımını ortaya çıkarabileceğinden bahsetmektedirler.

5.1.3. MÖA'larının Görsel İspatı İspatlama ve Yorumlama Süreçlerine Ait Bulguların Ortak Sonuçları

MÖA'larının görsel ispatı ispatlama ve yorumlama süreçlerine bakıldığında görsel ispatı algılamada bir takım zorluklarla karşılaştıkları bu zorlukların gerek şekli algılamalarında gerekse elde ettikleri sonuçları şekil ile bağdaştırmalarında ortaya çıkabildiği görülmüştür. Noss ve diğerleri (1997) yapılan çalışmalarda öğrencilerin çoğunun diyagramları okumada ve onların içinde vurgulanan dönüşümleri tanımada zorluk çektiği sonucuna varıldığından bahsetmektedirler. Yapılan araştırmada da MÖA'larının benzer zorlukları yaşadıkları görülmüştür.

MÖA'larının Pisagor teoreminin görsel ispatını ispatlamak için Pisagor teoremini kullanması, trigonometrik dönüşümlerin görsel ispatında veriyi şekilden elde etmek yerine trigonometrik dönüşümlerle ilgili formülleri kullanmak istemeleri ve iki özdeşliğin birbirine eşitliğini cebirsel olarak anlayabildiklerini söyleyip, sonucu görsel ispatta görememeleri durumlarının ortaya çıkması MÖA'larının bu konularla ilgili ön bilgilerinin varlığından kaynaklanmaktadır. Stylianou (2002) tarafından matematikçilerin, Lowrie ve Clements (2001) tarafından öğrencilerin problem çözme süreçlerinde görsel yöntemleri kullanmalarına dair yapılan çalışmalarda katılımcıların problemlere olan aşinalıkları arttıkça görsel yöntemi kullanmaktan uzaklaştıkları görülmüştür. Benzer şekilde MÖA'ları da önbilgileri ya da önceden olan aşinalıkları

nedeniyle görsel yöntemi kullanmada zorlanmış olabilirler. Bunun yanında MÖA'larının ön bilgilerinin ağırlıklı olarak cebirsel işlemlerle elde edilmiş olması dolayısıyla görsel yönteme aşinalıklarının olmaması görsel olarak algılamalarını etkilemiş olabilir. Matematiksel konu sembolik ifadelerle tanımlandığında, öğrenciler nadiren akıl yürütmenin görsel biçimiyle uğraşmaktadırlar (Healy ve Hoyles, 1999) ayrıca bir durumun bileşenlerini ve organizasyonunu göstermek için uzlaşmaya dayanan diyagramlardaki bu uzlaşmaların başarıyla kullanılabilmesi için önceden öğrenilmesi ve anlaşılması gerekmektedir (Diezmann ve English, 2001). MÖA'ları da bilgilerini daha çok sembolik ifadelerin ağırlıklı görsel yöntemin daha az olduğu bir süreçten geçerek elde etmiş olabilirler.

MÖA'larının gerek görsel ispatı ispatlama gerekse görsel ispatı yorumlama süreçlerinde cebire eğilim gösterdikleri bu sürecin cebirsel anlamlandırma, cebirsel düşünce ve cebirsel eylem olarak ortaya çıktığı görülmüştür. Benzer durum Bardelle'nin (2010) İtalyan matematik öğrencileri üzerine yaptığı çalışmada da görülmüştür. Bardelle (2010) İtalyan öğrencilerinin şekillerin değiştirilmesiyle elde edilen görsel ispatlar yerine cebirsel çalışmayı tercih ettiklerini gözlemlemiştir. Villarreal (2000) matematiksel sorularla ilgili iki farklı düşünme ve yaklaşım biçimi tanımlamıştır. Bunlar cebirsel yaklaşım ve görsel yaklaşımdır. Cebirsel yaklaşımın özelliklerinden bazıları cebirsel çözümlerin grafiksel yorumlarını kurmada zorluk ve grafiksel çözüm istendiğinde cebirsel yoldan gitme ihtiyacı duymadır. Araştırmanın sonuçları Villarreal tarafından yapılan cebirsel yaklaşım tanımıyla yakınlık göstermektedir (akt. Borba ve Villarreal, 2005). Bununla birlikte araştırmacılar matematiksel öğrenme sürecinde cebirsel ve görsel gösterimlerin birbiriyle gerekli bir bütün olduğu sonuca varmışlardır (Borba ve Villarreal, 2005).

5.2. Öneriler

Bu bölümde araştırmanın sonuçları doğrultusunda faydalı olacağı düşünülen önerilere yer verilecektir.

- 1) MÖA'larının görsel ispattaki soruyu ve şekli algılamalarına göre yaptıkları işlemlerin ve şekilden elde ettikleri verilerin değiştiği görülmüştür. Buradan soruyu ve şekli algılamamanın görsel ispatları ispatlayabilmeyi etkilediği ortaya çıkmıştır. Bu nedenle eğitim sürecinde MÖA'larının matematik sorularını, özellikle ispatlarda neyin istendiğini anlayabilme ve şekilleri doğru okuyabilme yönünde gelişmelerine daha fazla önem verilmesi önerilebilir.
- 2) Araştırmada MÖA'larının görsel ispatları ispatlamada ve yorumlamada zorlandıkları aynı zamanda çözümlerini rastgele yapmadıkları, gerek şekil gerekse işlem üzerinden strateji belirleyip uyguladıkları görülmüştür. MÖA'larının bu yönde becerilerinin olduğu fakat gelişmeye ihtiyaç duydukları söylenebilir. Matematik derslerinde MÖA'larının bu becerilerini daha da ileriye taşıyabilecekleri fırsatlar sunulması önerilebilir.
- 3) MÖA'larının ispatlara dair önceki bilgilerinin görsel ispatları ispatlama ve yorumlama süreçlerini olumsuz yönde etkilediği durumlar ortaya çıkmış, MÖA'ları cebire eğilim göstermişlerdir. Bu durum MÖA'larının sembolik ifadelerle ispat yapmaya daha çok alışık olmalarından kaynaklanıyor olabilir. Bunu ortadan kaldırmak için MÖA'larına matematik konularının öğretiminde sembolik ifadelerin yanında görsel gösterimlere de ağırlık verilmesi önerilebilir. Böylece MÖA'larının matematiğe ait bilgilerinin sembolik olarak yapılanmasının yanında görsel olarak yapılanması, görselleştirmeyi daha iyi anlamaları sağlanabilir. Sonuç olarak MÖA'larının matematiksel ispat yeteneklerinin sembolik olarak gelişmesinin yanında görsel olarak da gelişmesine katkıda bulunulabilir.
- 4) MÖA'larının kendi görselleştirmeleri ile çözümleri arasında doğru bağlantı yapamadığı görülmüştür. MÖA'larının matematik derslerinde kendi görselleştirmelerini oluşturacakları etkinlikler yaptırılması önerilebilir. Ayrıca MÖA'larına matematik müfredatına ilişkin öğrencilerin kendi görselleştirmelerini oluşturmalarını içeren etkinlikler hazırlamalarının sağlanması önerilebilir.

KAYNAKÇA

- Alcock, L., and Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 57, 1-32.
- Alshwaikh, J. (2007). Mathematical visual forms and learning geometry: towards a systemic functional analysis. *Proceedings of the Conference of the British Society of Research Into the Learning of Mathematics*, Sheffield Hallam University, 27(2), 1-6.
- Alsina, C., and Nelsen, R. (2006). *Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.
- Bardelle, C. (2010). *Visual proofs: an experiment*. Paper presented at the Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Lyon, France.
- Beck, M., and Geoghegan, R. (2010). *The Art of Proof*. New York: Springer.
- Bergqvist, T., and Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *Journal of Mathematical Behavior*, 31, 252-269.
- Booth, R., and Thomas, M. (2000). Visualization in mathematics learning: arithmetic problem-solving and student difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 169-190.
- Borba, M. C., and Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer.
- Borwein, P., and Jorgenson, L. (2001). Visible Structures in Number Theory. *The American Mathematical Monthly*, 108(10), 897-1006.
- Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary schools*. New York: Springer.
- Campbell, K. J., Collis, K. F., and Watson, J. M. (1995). Visual processing during mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 28(2), 177-194.

- Corter, J. E., and Zahner, D. (2007). Use of external visual representations in probability problem solving. *Statistics Education Research Journal*, 6(1), 22–50.
- Diezmann, C., and English, L. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. Cuoco, and F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics: 2001 YearBook* (pp. 1–23). Virginia: NCTM.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103–131.
- Elliott, S., Hudson, B., and O'Reilly, D. (2000). Visualisation and the influence of technology in 'A' level mathematics: A classroom investigation. *Research In Mathematics Education*, 2(1), 151-168.
- Eisenberg, T., and Dreyfus, T. (1994). On understanding how students learn to visualize function transformations. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 4, 45-68. Web: [http://www.google.com/books?hl=tr&lr=&id=BwuN76e_wTEC&oi=fnd&pg=PA45&dq=Eisenberg,+T.,+%26+Dreyfus,+T.+\(1994\).+On+understanding+how+students+learn+to+visualize+function+transformations.&ots=ZmR5aranx7&sig=HZel8w1C7uPveaV6YC0oEKG0BIY#v=onepage&q&f=false](http://www.google.com/books?hl=tr&lr=&id=BwuN76e_wTEC&oi=fnd&pg=PA45&dq=Eisenberg,+T.,+%26+Dreyfus,+T.+(1994).+On+understanding+how+students+learn+to+visualize+function+transformations.&ots=ZmR5aranx7&sig=HZel8w1C7uPveaV6YC0oEKG0BIY#v=onepage&q&f=false) adresinden 20.03.2011'de alınmıştır.
- Farmaki, V., and Paschos, T. (2007). The interaction between intuitive and formal mathematical thinking: a case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(3), 353-365.
- Fennema, E., and Romberg, T. A. (Eds.). (1999). *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Fulmer, J., and McMillan, T. (2009). *Using Proofs without Words to Explore the Pythagorean Theorem*. Paper presented at the annual meeting of the The Mathematical Association of America MathFest, Portland Marriott Downtown Waterfront, Portland. Web: http://www.allacademic.com/meta/p_mla_apa_research_citation/3/7/8/0/7/p378072_index.html adresinden 26.09.2010'da alınmıştır.
- Gagatsis, A., and Elia, E. (2004). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. In M. J. Haines, and A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2, (pp. 447–454). Bergen: PME.
- Gutiérrez, A. (1996). *Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework*. Paper presented at the 20th International Group for the Psychology of Mathematics Education, Valencia, Spain.

- Hadamard, J. (1945). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton University Press.
- Halmos, P. (1987). *I want to be a mathematician*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Hancock, B. (2004). An introduction to qualitative research. In C. Cassel, and G. Symon (Eds.), *Qualitative methods in organizational research: A practical guide*, London: Sage.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
- Hanna, G., and Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM*, 40, 345-353.
- Hanna, G., and Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM*, 39(1-2), 73-78.
- Healy, L., and Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: making connections with computers. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(1), 59-84.
- Herbst, P. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 283-312.
- Hershkowitz, R., Arcavi, A., and Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning-the case of the matches. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(2), 255-265.
- Kotsopoulos, D., and Cordy, M. (2009). Investigating imagination as a cognitive space for learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 259-274.
- Larkin, J., and Simon, H. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11, 65-100.
- Lean, G. A., and Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 267-299.
- Lowrie, T., and Clements, M. A. Ken. (2001). Visual and nonvisual processes in grade 6 students' mathematical problem solving. *Journal of Research in Childhood Education*, 16(1), 77- 93.

- Mancosu, P. (2005). Visualization in logic and mathematics. In P. Mancosu K. F. Jørgensen, and S. A. Pedersen (Eds.), *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*. Synthese Library, Vol. 327. Dordrecht: Springer.
- Milli Eğitim Bakanlığı. (2011). *Orta Öğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı*. Ankara: MEB Yayınevi.
- Morgan, C. (2001). Mathematics and human activity: Representation in mathematical writing. In C. Morgan, and K. Jones (Eds.), *Research in Mathematics Education Volume 3: Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics* (pp. 169-182). London: British Society for Research into Learning Mathematics.
- Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics*, 61, 219-245.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Nelsen, R. B. (2000). *Proofs Without Words II*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Nemirovsky, R., and Noble, T. (1997). Mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 99-131.
- Noss, R., Healy, L., and Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 203–233.
- Pantziara, M., Gagatsis A., and Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 39-60.
- Pitta-Pantazi, D., and Christou, C. (2009). Cognitive styles, dynamic geometry and measurement performance, *Educational Studies in Mathematics*, 70, 5-26.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297-311.

- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In A. Gutiérrez, and P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 205–235). Rotterdam: Sense.
- Presmeg, N. C., and Balderas-Canas, P. (2001). Visualization and affect in non-routine problem solving. *Mathematical Thinking and Learning*, 3(4), 289-313.
- Pylyshyn, Z. W. (2003). *Seeing and visualizing: It's not what you think*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Recio, A. M., and Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83–99.
- Reiss, K., Heinze, A., Renkl, A., and Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM*, 40, 455-467.
- Rival, I. (1987). Picture Puzzling: Mathematicians are Rediscovering the Power of Pictorial Reasoning. *The Sciences*, 27, 41-46.
- Schwartz, D. L., and Black, J. B. (1996). Shuttling between depictive models and abstract rules: Induction and fallback. *Cognitive Science*, 20(4), 457-497.
- Sinclair, M., Mamolo, A., and Whiteley, W. J. (2011). Designing spatial visual tasks for research: the case of the filling task. *Educational Studies in Mathematics*, 78, 135-163.
- Sinnett, S., Spence, C., and Soto-Faraco, S. (2007). Visual dominance and attention: The Colavita effect revisited. *Perception & Psychophysics*, 69(5), 673–686.
- Steen, L. A. (1988). The Science of Patterns. *Science*, 240, 611-616.
- Steen, L. A. (1999). Twenty questions about mathematical reasoning. In L. V. Stiff, and F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K–12* (pp. 270-285). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Web: <http://www.stolaf.edu/people/steen/Papers/reason.html> adresinden 22.06.2012 tarihinde alınmıştır.
- Strauss, A., and Corbin, J. (1998). *Basics of Qualitative Research, Techniques and Procedures'of Developing Grounded Theory* (Second Edition). London: Sagepublications.

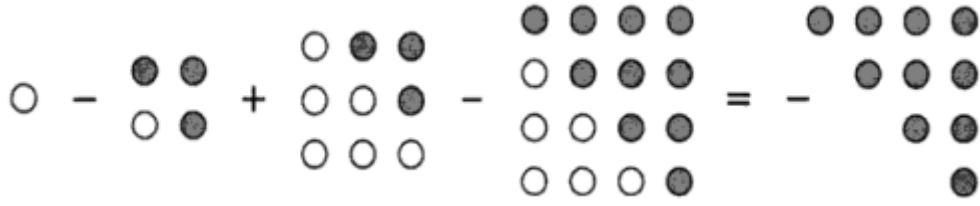
- Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 303-317.
- Stylianou, D. A., and Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(4), 353-387.
- Tappenden, J. (2005). Proof style and understanding in mathematics I: Visualization, unification and axiom choice. In P. Mancosu, K. F. Jørgensen, and S. A. Pedersen (Eds.), *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics* (Synthese library) (Vol. 327, pp. 147–214). Dordrecht: Springer.
- Tekin, B., ve Konyalıoğlu, A. C. (2009). *Dönüşüm ve ters dönüşüm formüllerinin ispatlarının ortaöğretim düzeyinde görselleştirilmesi*. Matematikçiler Derneği 8. Matematik Sempozyumunda sunuldu, Ankara.
- Trigueros, M., and Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 3-19.
- Tsamir, P., Tirosh, D., and Levenson, E. (2008). Intuitive Nonexamples: The Case of Triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 81-95.
- Turgut, Y. (2009). Verilerin kaydedilmesi, analizi, yorumlanması: Nicel ve nitel., A. Tanrıoğlu. (Editör). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Birinci Baskı. Ankara. Anı Yayıncılık, s. 232.
- Tversky, B. (2001). Spatial schemas in depictions. In M. Gattis (Ed.). *Spatial schemas and abstract thought* (pp. 79-112). Cambridge, MA: MIT Press.
- Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 351-360.
- Yang, K. L., and Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 59-76.
- Zahner, D., and Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: Use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 12, 177-204.
- Zazkis, R., Dubinsky, E., and Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding. *Journal for Research in*

Mathematics Education, 27(4), 435-437. Web: <http://www.jstor.org/stable/749876?seq=7> adresinden 21.07.2011 tarihinde alınmıştır.

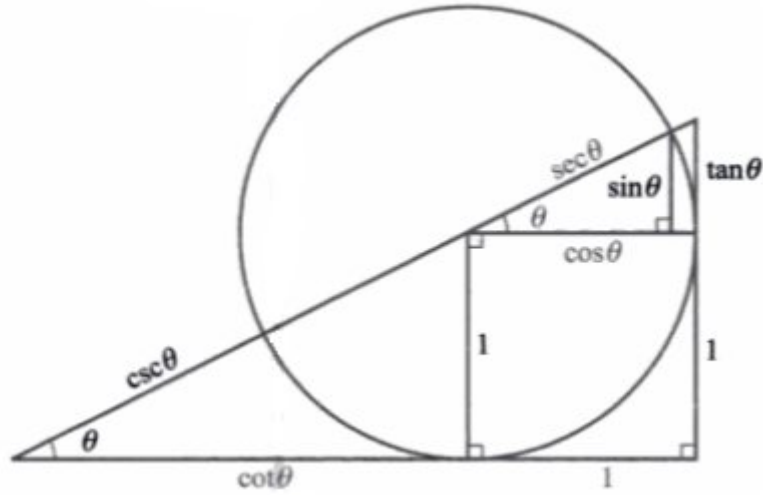
Zimmerman, W., and Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization?. W. Zimmerman, and S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Mathematical Association of America, MAA Notes Series, 1-8.

EK 1. GÖRSEL İSPAT ÖRNEKLERİ

$$\begin{aligned}
 1^2 - 2^2 &= -3 = -(1 + 2); \\
 1^2 - 2^2 + 3^2 &= +6 = +(1 + 2 + 3); \\
 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 &= -10 = -(1 + 2 + 3 + 4); \\
 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n+1} n^2 &= (-1)^{n+1} T_n.
 \end{aligned}$$

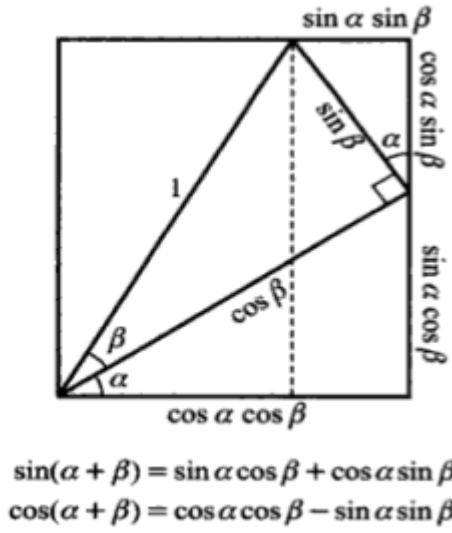


Şekil 1

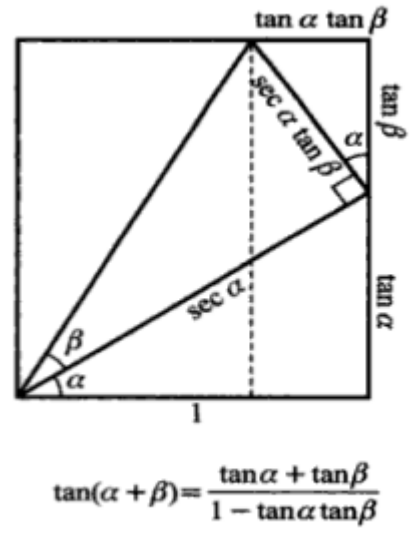


$$\begin{aligned}
 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1, & (\tan \theta + 1)^2 + (\cot \theta + 1)^2 &= (\sec \theta + \csc \theta)^2, \\
 \tan^2 \theta + 1 &= \sec^2 \theta, & \cot^2 \theta + 1 &= \csc^2 \theta, & \tan \theta &= \frac{\tan \theta + 1}{\cot \theta + 1}
 \end{aligned}$$

Şekil 2

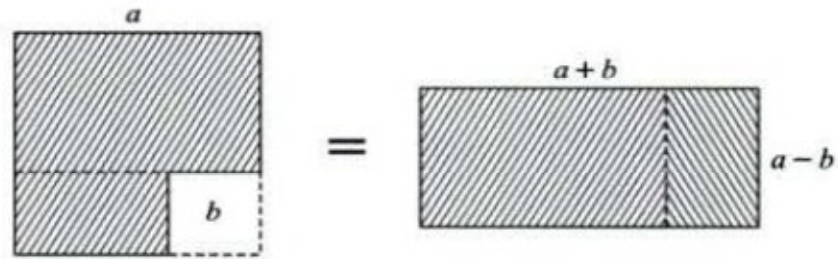


Şekil 3



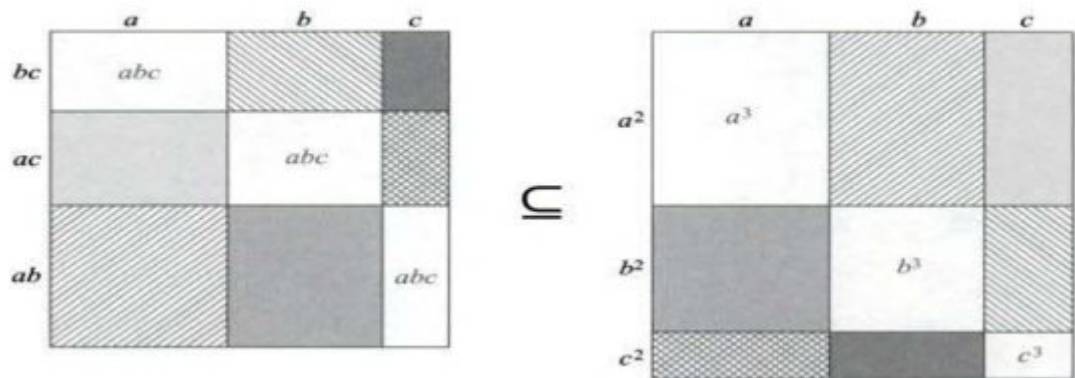
Şekil 4

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

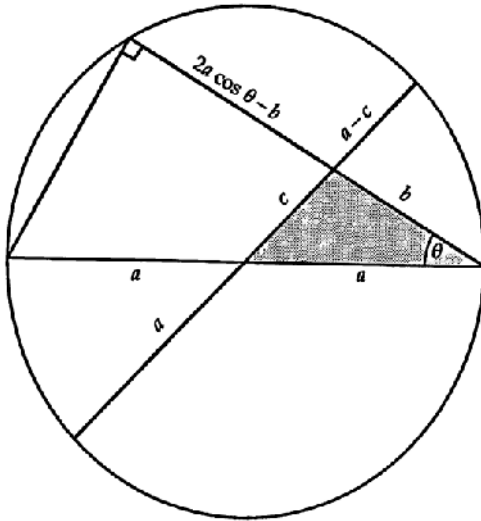


Şekil 5

$$3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$$



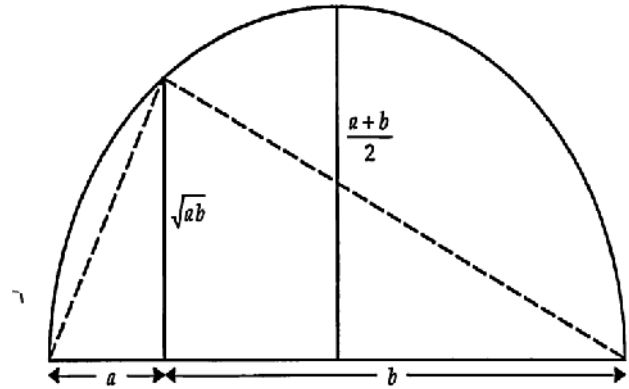
Şekil 6



$$(2a \cos \theta - b)b = (a - c)(a + c)$$

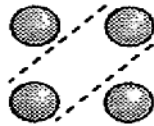
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Şekil 7

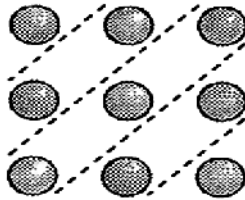


$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$$

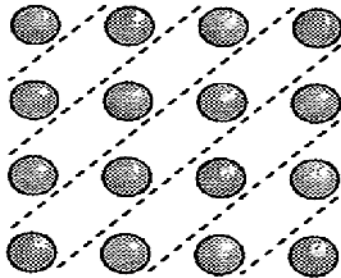
Şekil 8



$$1 + 2 + 1 = 2^2$$



$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$$



$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$$

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) + n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = n^2$$

Şekil 9