

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ PROGRAMI**



**MATEMATİK ÖĞRETMEN VE ÖĞRETMEN ADAYLARININ
DİNAMİK GEOMETRİ YAZILIMI DESTEKLİ ORTAMDA
GENELLEME SÜREÇLERİ**

Yüksek Lisans Tezi

Yeşim GÜR

Danışman

Doç. Dr. Rezan YILMAZ

SAMSUN
2023

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi ?

Evet ☒ (Gerekli ise ekler kısmına ekleyiniz)

Hayır ☐

30/08/2023
Yeşim GÜR

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı : MATEMATİK ÖĞRETMEN VE ÖĞRETMEN ADAYLARININ DİNAMİK GEOMETRİ YAZILIMI DESTEKLİ ORTAMDA GENELLEME SÜREÇLERİ

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 30/08/2023 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 16

Tek kaynak oranı : % 5 çıkmıştır.

30/08/2023
Doç. Dr. Rezan YILMAZ

ÖZET

MATEMATİK ÖĞRETMEN VE ÖĞRETMEN ADAYLARININ DİNAMİK GEOMETRİ YAZILIMI DESTEKLİ ORTAMDA GENELLEME SÜREÇLERİ

Yeşim GÜR

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Matematik Eğitimi Programı

Yüksek Lisans, Ağustos/2023

Danışman: Doç. Dr. Rezan YILMAZ

Bu araştırma matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının matematiksel genelleme süreçlerini incelemeyi amaçlamakta olup, dinamik geometri yazılımı (Geometer's Sketchpad) destekli ortamda gerçekleştirilmiştir. Amaçlı örnekleme yöntemi ile belirlenen dört matematik öğretmeni ve dört matematik öğretmen adayının katılımcı olarak yer aldığı bu araştırma nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması ile desenlenmiştir. Katılımcıların matematiksel genelleme süreçlerini ortaya çıkarabilmek için geometrik bir problem kullanılmıştır. İlk aşamada katılımcılara dik bir üçgen verilmiş, dik üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişki sorulmuştur. Devamında katılımcıların dik dörtgen, dik beşgen vb. oluşturarak Pisagor Teoremini genellemeleri beklenmiştir. Görüntü ve ses kaydına alınan bireysel görüşmelerden elde edilen veriler genelleme taksonomisi temelinde betimsel şekilde analiz edilmiştir.

Araştırmanın sonucunda; katılımcıların tamamı 'ilişkilendirme', 'araştırma' ve 'genişletme' yaparak 'genelleme eylemleri'ni gerçekleştirmiştir. Yedi katılımcı 'belirleme veya açıklama' ve 'tanımlama' ile 'yansıma genellemeleri'ne ulaşırken, bir öğretmen adayı katılımcının yansıma genellemesine ulaşamadığı görülmüştür. Katılımcılar ilişkilendirmede 'durumları veya nesneleri ilişkilendirmiş', araştırmada ise 'aynı ilişki veya çözümü araştırmış'lardır. Genişletmeye ise 'uygulanabilirlik alanını genişleterek, ayrıntıları uzaklaştırarak veya işlem yaparak' ulaşmışlar ve genelleme eylemlerini tamamlamışlardır. Yansıma genellemelerini 'genel prensip' ile belirleme veya açıklama yaparak ve 'objeler sınıfı' ile tanımlama yaparak gerçekleştirmişlerdir. Katılımcıların çoğunlukla genelleme süreçlerini tamamladıkları ve genelleme taksonomisinin üst basamaklarına ulaştıkları görülmüştür. Ayrıca bu süreçte dinamik geometri yazılımı kullanmanın geometrik problemleri genellemede oldukça olumlu etkisinin olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Matematiksel Düşünme, Matematiksel Genelleme, Dinamik Geometri Yazılımı, Geometer's Sketchpad, Matematik Öğretmeni, Matematik Öğretmen Adayı

ABSTRACT

GENERALIZATION PROCESSES OF MATHEMATICS TEACHERS AND PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS IN A DYNAMIC GEOMETRY SOFTWARE SUPPORTED ENVIRONMENT

Yeşim GÜR

Ondokuz Mayıs University

Institute of Graduate Studies

Department of Math and Science Education

Mathematics Education Programme

Master, August/2023

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Rezan YILMAZ

This research examines the mathematical generalization processes of mathematics teachers and pre-service mathematics teachers. It was carried out in an environment supported by dynamic geometry software (Geometer's Sketchpad). The research, in which four mathematics teachers and four pre-service mathematics teachers, determined by the purposive sampling method, took part as participants, was designed with a case study, one of the qualitative research methods. A geometric problem was used to reveal the mathematical generalization processes of the participants. In the first stage, the participants were given a right triangle, and the relationship between the edge lengths of this triangle was asked. In what follows, the participants were expected to generalize the Pythagorean Theorem by forming a right rectangle, right pentagon, and other right polygons. The data from individual interviews recorded with video and audio were analyzed descriptively based on the generalization taxonomy.

As the results of the research, all participants performed ‘generalizing actions’ by ‘relating’, ‘searching’, and ‘extending’. While seven participants were able to reach ‘reflection generalizations’ by ‘identification or statement’ and ‘definition’, it was observed that one pre-service teacher could not reach the reflection generalization. Participants ‘related situations or objects’ and ‘searched the same relationship or solution’ during generalizing actions. They also extended by ‘expanding the range of applicability’, ‘removing particulars’ or ‘operating’, and completed the generalization actions. They performed reflection generalizations by ‘identification or statement’ with the ‘general principle’ and ‘definition’ with the ‘class of objects’. It was observed that the participants generally completed the generalization processes and reached the upper levels of the generalization taxonomy. In addition, using dynamic geometry software in this process positively affected generalizing geometric problems.

Keywords: Mathematical Thinking, Mathematical Generalization, Dynamic Geometry Software, Geometer’s Sketchpad, Mathematics Teacher, Pre-service Mathematics Teacher

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans hayatım boyunca görüş ve önerileriyle bana destek olan, yol gösteren, sabır ve anlayışıyla her zaman yanımda olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Rezan YILMAZ'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Bugünlere gelmemde en büyük pay sahibi olan ve her zaman desteklerini hissettiğim canım aileme çok teşekkür ediyorum.

Yeşim GÜR



İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI	i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	ii
TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
TABLolar DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Araştırmanın Amacı	2
1.2. Araştırmanın Problemi	3
1.3. Araştırmanın Önemi.....	3
1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları.....	5
1.5. Araştırmanın Varsayımları.....	5
1.6. Araştırmadaki Tanımlar	5
2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE.....	7
2.1. Genelleme	7
2.1.1. Matematiksel Genelleme.....	7
2.1.2. Genelleme Seviyeleri	9
2.1.3. Genelleme Sınıflandırması.....	9
2.1.3.1. Genelleme Eylemleri	10
2.1.3.2. Yansıma Genellemeleri.....	12
2.2. Dinamik Geometri Yazılımı (DGY) ve Geometer's Sketchpad (GSP)	15
2.3. GSP ve Genelleme İle İlgili Yapılan Çalışmalar	17
3. YÖNTEM	19
3.1. Araştırmanın Türü ve Deseni	19
3.2. Araştırmanın Tasarımı ve Yürütülmesi.....	19
3.3. Pilot Çalışma	19
3.4. Katılımcılar	20
3.5. Veri Toplama Araçları	22
3.5.1. Görüşmeler.....	22
3.5.2. GSP Etkinlikleri	23
3.6. Verilerin Analizi	25
3.7. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliliği.....	25
3.7.1. İnanırcılık	26
3.7.1.1. Uzun Süreli Etkileşim.....	26
3.7.1.2. Derinlik Odaklı Veri Toplama	27
3.7.1.3. Çeşitleme	27
3.7.1.4. Uzman İncelemesi.....	27
3.7.2. Aktarılabirlik	28
3.7.2.1. Ayrıntılı Betimleme	28
3.7.2.2. Amaçlı Örnekleme	28
3.7.3. Tutarlık	28
3.7.3.1. Tutarlılık İncelemesi	28
3.7.4. Teyit Edilebilirlik.....	29
3.7.4.1. Teyit İncelemesi.....	29
4. BULGULAR VE YORUM.....	30
4.1. Öğretmen Adaylarıyla İlgili Bulgular	30
4.1.1. Genelleme Eylemleri Bulguları	32
4.1.1.1. İlişkilendirme	32
4.1.1.2. Araştırma	36

4.1.1.3. Genişletme	43
4.1.2. Yansıma Genellemeleri Bulguları.....	49
4.1.2.1. Belirleme veya Açıklama.....	50
4.1.2.2. Tanımlama	50
4.2. Öğretmenlerle İlgili Bulgular.....	51
4.2.1. Genelleme Eylemleri Bulguları	53
4.2.1.1. İlişkilendirme	53
4.2.1.2. Araştırma	54
4.2.1.3. Genişletme	62
4.2.2. Yansıma Genellemeleri Bulguları.....	65
4.2.2.1. Belirleme veya Açıklama.....	66
5. TARTIşMA, SONUÇ VE ÖNERİLER	68
5.1.Tartışma ve Sonuç.....	68
5.2. Öneriler	74
KAYNAKÇA.....	76
EKLER	
Ek 1: Görüşme Soruları	81
Ek 2: Genelleme Süreci İçin Oluşturulan şemanın Organizasyonu	83
Ek 3: Öğretmenlerin Araştırma İzni.....	84
Ek 4: Öğretmen Adaylarının Araştırma İzni.....	85
Ek 5: Etik Kurul Onayı	86
ÖZGEÇMİş.....	87

SİMGELER VE KISALTMALAR

DGY	: Dinamik Geometri Yazılımı
GSP	: Geometer's Sketchpad
NCTM	: National Council of Teachers of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Dik Üçgen Modeli	23
Şekil 3.2. Dik Dörtgen Modeli.....	24
Şekil 3.3. Dik Beşgen Modeli	24
Şekil 4.1. ÖA1'in Pisagor Bağıntısı Temsili	33
Şekil 4.2. ÖA4'ün Pisagor Bağıntısı Temsili	33
Şekil 4.3. Pisagor Bağıntısının İspatı İle İlgili ÖA2'nin Temsili	34
Şekil 4.4. Pisagor Bağıntısının İspatı İle İlgili ÖA4'ün 1.Temsili	35
Şekil 4.5. Pisagor Bağıntısının İspatı İle İlgili ÖA4'ün 2.Temsili	36
Şekil 4.6. Pisagor Bağıntısının İspatı İle İlgili ÖA4'ün 3.Temsili	36
Şekil 4.7. ÖA1'in Dik Dörtgen 1.Temsili.....	37
Şekil 4.8. ÖA1'in Dik Dörtgen 2.Temsili	38
Şekil 4.9. ÖA2'nin Dik Dörtgen Temsili.....	38
Şekil 4.10. ÖA3'ün Dik Dörtgen Temsili	39
Şekil 4.11. ÖA4'ün Dik Dörtgen 1.Temsili.....	39
Şekil 4.12. ÖA4'ün Dik Dörtgen 2.Temsili.....	40
Şekil 4.13. ÖA1'in Dik Beşgen Temsili.....	41
Şekil 4.14. ÖA2'nin Dik Beşgen Temsili.....	41
Şekil 4.15. ÖA3'ün Dik Beşgen Temsili	42
Şekil 4.16. ÖA4'ün Dik Beşgen ile İlgili Açıklamalarının Temsili.....	43
Şekil 4.17. ÖA1'in Dik Altıgen 1.Temsili.....	44
Şekil 4.18. ÖA1'in Dik Altıgen 2.Temsili.....	45
Şekil 4.19. ÖA2'nin Dik Altıgen Temsili.....	46
Şekil 4.20. ÖA3'ün Dik Altıgen 1.Temsili.....	47
Şekil 4.21. ÖA3'ün Dik Altıgen 2.Temsili.....	48
Şekil 4.22. ÖA4'ün Dik Altıgen Temsili	49
Şekil 4.23. ÖA1'in Dik Altıgen 1.Temsili.....	50
Şekil 4.24. ÖA2'nin Dik Altıgen Temsili.....	51
Şekil 4.25. Ö4'ün Pisagor Bağıntısının İspatı ile İlgili Temsili.....	53
Şekil 4.26. Ö1'in Pisagor Bağıntısı Temsili	54
Şekil 4.27. Ö1'in Dik Dörtgen Temsili	55
Şekil 4.28. Ö1'in Dik Dörtgen ile İlgili Ölçümleri	56
Şekil 4.29. Ö2'nin Dik Dörtgen Temsili.....	56
Şekil 4.30. Ö3'ün Dik Dörtgen Temsili.....	58
Şekil 4.31. Ö4'ün Dik Dörtgen 1.Temsili.....	58
Şekil 4.32. Ö4'ün Dik Dörtgen 2.Temsili.....	59
Şekil 4.33. Ö1'in Dik Beşgen Temsili	60

Şekil 4.34. $\ddot{O}2$ 'nin Dik Beşgen Temsili	60
Şekil 4.35. $\ddot{O}3$ 'ün Dik Beşgen Temsili.....	61
Şekil 4.36. $\ddot{O}4$ 'ün Dik Beşgen Temsili	61
Şekil 4.37. $\ddot{O}1$ 'in Dik Altıgen Temsili	62
Şekil 4.38. $\ddot{O}2$ 'nin Konveks Dik Altıgen Temsili.....	63
Şekil 4.39. $\ddot{O}2$ 'nin Konkav Dik Altıgen Temsili	64
Şekil 4.40. $\ddot{O}3$ 'ün Dik Altıgen Temsili	65
Şekil 4.41. $\ddot{O}1$ 'in Dik Altıgen Temsili	66
Şekil 4.42. $\ddot{O}2$ 'nin Konkav Dik Altıgen Temsili	67



TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 2.1. Genelleme Eylemleri (Ellis, 2007)	10
Tablo 2.2. Yansıma Genellemeleri (Ellis, 2007).....	12
Tablo 3.1. Araştırma Planı	19
Tablo 3.2. Katılımcı Bilgileri.....	21
Tablo 3.3. Öğretmen Adaylarının Lisans Öğrenimi Süresince Aldıkları Geometri Derslerindeki Akademik Başarıları ve Fakülte Not Ortalamaları	21
Tablo 3.4. Geçerlik ve Güvenirlik Konusunda Nicel ve Nitel Araştırmalarda Kabul Gören Kavramların Karşılaştırılması.....	26
Tablo 4.1. Öğretmen Adayları Kodlama Tablosu.....	30
Tablo 4.2. Öğretmenler Kodlama Tablosu.....	51

1. GİRİŞ

Matematik sembol ve formüller aracılığıyla soyut kavramların somutlaştırılmasına ve düşünme sisteminin gelişmesine katkı sağlayan bir bilimdir. Eğitim felsefeleri, düşünmeyi geliştirilmesi gereken en önemli beceri olarak tanımlamakta ve düşünmenin bireyin gelişimindeki en önemli araç olduğunu belirtmektedir. Matematik eğitimi, bireylere olaylar arasında ilişkilendirme, akıl yürütme, tahminlerde bulunma, problem çözme, genelleme yapabilme gibi üst düzey becerileri kazandırır (Umay, 2003). Dolayısıyla matematik öğrenme sadece işlemlerden ibaret olmayıp aynı zamanda bir düşünme şeklini de öğrenmektir. Bu düşünme şekli ise genel anlamda matematiksel düşünme olarak adlandırılmaktadır. Matematiksel düşünme karmaşık bir aktivite olup matematik öğrenmenin bir yolu olarak önemlidir (Stacey, 2006). Aynı zamanda eğitim için de önemli bir hedeftir.

Matematiksel düşünmenin ne olduğu, matematikçilerin zihinlerinde nasıl gerçekleştiği, öğrencilerin nasıl güdülenip bu çeşit düşüncenin zihinlerindeki gelişiminin ilerletilebileceği matematik eğitimi içinde bir çalışma konusudur (Tall, 1991). Matematiksel düşünme, üst düzey düşünme becerileri gerektirmektedir (Yeşildere ve Türnüklü, 2007). Matematiksel düşünme soyutlama, sentezleme, genelleme, modelleme, problem çözme ve kanıt gibi farklı bileşenleri içerir (Tall, 1991, Yeşildere İmre, Akkoç ve Baştürk Şahin, 2017).

Matematiksel düşünme, matematiksel kavramları tanımlayarak onlar arasında bir ilişki kurmayı içerir ve genellemeler bu ilişkileri kurmanın sonucunda meydana gelen bir süreçtir (Yılmaz ve Argün, 2013). Bu anlamda genelleme, matematiksel etkinliklerin merkezi ve matematiksel bilgi gelişiminin temeli olarak tanımlanmış, (Polya, 1957, akt. Amit ve Neria, 2008), matematiksel düşünmede kritik bir öneme sahip olduğu vurgulanmış ve matematik öğretiminin temel amaçlarından biri olarak belirtilmiştir (NCTM, 2000). Öğrencilerin matematiksel ilişkiler hakkında genellemeler yapması onlarca yıldır matematik eğitiminin önemli bir hedefi olmuştur (Yao, 2018). Genelleme kavramı, birçok araştırmacı tarafından farklı tanımlanmış ve farklı şekilde ifade edilmeye çalışılmıştır. Genelleme en basit anlamıyla örüntü ve ilişki aramadır. Matematiksel genellemelerde belli sayıdaki adımlardan yola çıkarak iddia hakkında karar verilmeye çalışılır (Yıldırım ve Yavuzsoy Köse, 2018). Genelleme önceki bilgi ve yeni kavramlar arasındaki mesafeyi kapamaya yardımcı olan bir yöntemdir. Çünkü, genelleme ile, ilgili yeni kavramlara ulaşmak için önceki

bilgilerle bağlantı kurulur (Stacey, 2006). Dolayısıyla, genelleme öğrencilerin zorlukların üstesinden gelmelerine yardımcı olabilecek önemli bir unsur olabilir.

Son yıllarda bilimin ve teknolojinin gelişmesi ile birlikte bilgisayar yardımıyla bilgiye ulaşmadaki önem de artmıştır. İçinde olduğumuz çağın eğitim sistemi bilgisayar teknolojisi ile birleşmiştir. Bilgisayar teknolojisi matematik alanında da önemli bir etki yaratmıştır. Matematik eğitiminde yeni teknolojilerin eğitim ve öğretimi nasıl ve neden etkilediği, gelecekte nasıl etkileyeceği önemlidir (Mariotti, 2002). Matematik eğitiminde artan bilgisayar kullanımı en çok dinamik geometri yazılımlarının kullanımına yansımıştır. Dinamik geometri yazılımları, matematik eğitiminde öğrencilere geometrik yapılar üzerinde varsayımlarda bulunma, varsayımlarını test etme ve genelleme yapma fırsatı vermiştir (Wertheimer, 1990). “Dinamik Geometri” kavramı Geometer’s Sketchpad (GSP) yazılımı ile matematiğe kazandırılmıştır (Jackiw, 1991).

GSP yazılımı kişilerin matematik öğrenmesini ve anlamasını kolaylaştıran ve matematiğe olan ilgiyi ve matematiksel başarıyı arttıran bir dinamik geometri yazılımıdır. Sketchpad “acaba ne olur?” sorusu ile deneme yapmak, oluşumların özelliklerini incelemeye yardımcı olmak, yeni sonuçlar keşfetmek için kullanılabilir. Tümevarım yöntemi ile deneme yanılma yapılarak kişilerin birçok geometrik ilişkinin de farkına varmasını sağlar. GSP programını kullanarak birçok şekil, teoremlerle ilgili modeller, perspektif çizimler ve grafikler yapılabilir (Vatansever, 2007). GSP’nin sürükleme özelliği bir çizimin belirli unsurlarını serbestçe hareket ettirmeyi ve diğer unsurların değiştirilmiş koşullara dinamik olarak yanıt vermesini sağlar. Aynı zamanda orijinal yapının tüm ilişkileri de korunur (Goldenberg ve Cuoco, 1998).

GSP sürükleme ve ölçüm yapma özelliği sayesinde geometrik şekiller arasındaki ilişkilerin keşfedilmesini sağlayıp genellemeye ulaşmayı sağlar. Yapılan araştırmalar genelleme çalışmalarında GSP yazılımının kullanımının yararlı olduğunu göstermektedir (örneğin; Vatansever, 2007; Yılmaz ve Argün, 2013; Yao, 2018).

1.1. Araştırmanın Amacı

Genelleme matematiksel etkinliklerin merkezi ve matematiksel bilgi gelişiminin temeli olarak tanımlanmış, (Polya, 1957, akt. Amit ve Neria, 2008),

matematiksel düşünmede kritik bir öneme sahip olduğu vurgulanmış ve matematik öğretiminin temel amaçlarından biri olarak belirtilmiştir (NCTM, 2000).

Bu araştırmada matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının GSP destekli ortamda genelleme sürecini nasıl geçirdiklerinin ve nasıl ilerlediklerinin ortaya konulması amaçlanmaktadır. Genelleme sürecinin incelenmesinde ise Ellis'in (2007) matematiksel genelleme için kapsamlı olarak temellendirilmiş bir kategorizasyon sistemi ile geliştirmiş olduğu taksonomi kullanılmıştır.

1.2. Araştırmanın Problemi

Araştırmanın problem cümlesi; “*Matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımı (GSP) destekli ortamda genelleme süreçleri nasıldır?*” şeklinde ele alınmıştır. Araştırmanın alt problemleri ise;

- Matematik öğretmenlerinin dinamik geometri yazılımı (GSP) destekli ortamda genelleme süreçleri nasıldır?
- Matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımı (GSP) destekli ortamda genelleme süreçleri nasıldır?

şeklindedir.

1.3. Araştırmanın Önemi

Genelleme matematik öğrenmenin önemli amaçlarından biridir. Genelleme bir süreçtir ve kişilerin zihinlerinde neler olup bittiğini anlamaya katkı sağlar. Polya (1957), genellemeyi “bir nesneyi göz önüne alıştan o nesneyi içeren bir kümeyi göz önüne alışa veya daha sınırlı bir kümeyi düşünmekten, o kümeyi de kapsayan daha geniş bir kümeyi düşünmeye geçiş” olarak tanımlamaktadır. Matematiksel düşünme sürecinde önemli bir yer tutan genelleme matematiksel etkinliğin merkezinde yer alır ve yeni bilgi oluşturma aracı olarak hizmet eder. Araştırmacılar genelleme olmadan matematiksel düşüncenin gerçekleşmeyeceğini tartışmışlardır (Sriraman, 2004; Vygotsky, 1978). Genelleme, bulunan bir çözüm yolunun benzer diğer durumlarda da geçerli olduğunun anlaşılmasıdır. Genelleme yapmanın güçlük düzeyi ele alınan problem durumuna göre farklılıklar gösterebilir. Matematik ve geometride sadece belirli kural veya işleme dayalı olarak çözülen problemler ile etkin bir düşünme gerçekleşmez. Kişiler genelleme yapabilme, tahmin edebilme vb. becerileri ortaya çıkaran rutin olmayan problemlerle karşılaştırılmalıdır (Dokur, 2013; Yıldırım ve Yavuzsoy Köse, 2018).

Bilgisayar ve ondan türetilen tüm yeni teknolojiler düşünce biçimimizi güçlendirerek zihnimize kolaylık sağlar (Mariotti, 2002). Bilgisayar tabanlı faaliyetlerin üst düzey düşünme becerilerini teşvik ettiği ve öğrencileri öğrenmeye motive etmede olumlu bir etkisinin olduğu söylenebilir (Hartono, 2020). Matematik öğrenme ve öğretmeyi geliştirmek için de dijital teknolojiler kullanılmalıdır. Bu araştırmada GSP kullanılmış olması katılımcıların matematiksel anlayışını olumlu yönde etkileyebilir. Katılımcılar GSP ile geometrik nesneleri sürükleyerek denemeler yapabilir ve genellemelere ulaşabilirler. Dinamik geometri yazılımları (DGY)'nın sürükleme özelliği kişilerin uygun şekilleri oluşturmalarını, oluşan şekilleri serbestçe hareket ettirmelerini (Laborde, 2000) ve varsayımlarını test etmelerini (Hanna, 2000) sağlar. Kişilerin varsayımlarını doğrulaması ulaştıkları sonucun neden doğru olduğunu açıklamaları için daha fazla merak uyandırır (Christou vd., 2004). Bu da daha emin adımlarla ilerlemelerini sağlayabilir. Dolayısıyla bu süreçte GSP yazılımının sürece etki edeceği düşünülmektedir. Yapılan araştırmalar geometrik problemlerin genelleme sürecini destekleyici olduğunu göstermektedir (örneğin; Demircioğlu ve Tuncay, 2020; Dokur, 2013; Tolga ve Cantürk Günhan, 2020).

Genelleme ile ilgili yapılmış mevcut birçok çalışma vardır. Genelleme sürecinde sergilenen davranışlar, izlenen adımlar ve kullanılan genelleme stratejileri birçok araştırmanın konusu olmuştur (örneğin; Yakut Çayır, 2013; Oflaz, 2017; Yılmaz, 2011). Genelleme üzerine yapılan araştırmalara bakıldığında örüntü genellemeleri birçok araştırmanın konusu olmuştur (Akkan, Öztürk ve Akkan, 2017; Chua ve Hoyles, 2010; Girit ve Akyüz, 2016; Karaz, 2021; Lee ve Lee, 2015; Özel, 2019; Rivera ve Becker, 2008; Sucuoğlu, 2015; Tanışlı ve Köse, 2013; Türkoğlu ve Yalın, 2020; Yakut Çayır ve Akyüz, 2015; Yeşildere ve Akkoç, 2011). Ayrıca yapılan çalışmaların çoğunluğu ortaokul/lise öğrencilerine ve sınıf öğretmeni adaylarına uygulanmıştır. Matematik öğretmen adayları ile yapılan çalışmalar da örüntü genelleme üzerine yoğunlaşmıştır (örneğin; Akkan, Öztürk ve Akkan, 2017; Özel, 2019; Sucuoğlu, 2015; Tanışlı, Yavuzsoy Köse ve Camci, 2017; Türkoğlu ve Yalın, 2020; Yakut Çayır ve Akyüz, 2015; Yeşildere ve Akkoç, 2011). Alan yazında genelleme ve dinamik yazılımlarla ilgili ilgili matematik öğretmen adayları ile yapılan çalışmalar (Örneğin; Yılmaz, 2011; Vanicek, 2011; Yao ve Elija, 2021) az sayıdayken matematik öğretilmelerinden oluşan bir çalışmaya ise ulaşamamıştır. Birçok araştırmacıya göre genelleme matematik öğreniminde daha çok

uygulanmalıdır. Okul ve üniversitedeki öğrencilerin ve öğretmenlerin çoğunun öğretim süreçlerinde genellemenin rolüne dikkat etmedikleri belirtilmektedir (Hashemia vd., 2013). Matematikte önemli bir yere sahip olan genellemenin öğretmenler tarafından sıklıkla kullanılması ve öğretilmesi gerektiği düşünülmektedir. Bireyler daha önceden görmedikleri bir problem ile karşılaştıkları zaman probleme çözüm yolu üretebilmek için genellemelerden yararlanırlar. Özellikle geometrik problemler bireylerin genelleme yapmalarına fırsat yaratır. Bu noktada, öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının genellemenin önemini farkında olmaları ve öğrencilerine genellemeler yaptırabilecekleri etkinlikler uygulamaları onların matematiksel düşüncelerinin gelişimine katkı sağlayacaktır (Mason ve Johnston-Wilder, 2004). Bu nedenle matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının genelleme süreçlerinin incelenmesinin alan yazında bu boşluğu doldurmada önemli bir rol oynayacağı düşünülmektedir.

1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları

Araştırma, genelleme sürecini ortaya koyacağı düşünülen etkinliklerle, dinamik matematik yazılımlarından GSP, verilerin analizi sürecinde kullanılan genelleme taksonomisi ve katılımcı öğretmen ve öğretmen adayları ile sınırlıdır.

1.5. Araştırmanın Varsayımları

Araştırmaya katılacak olan matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının düşüncelerini açıkça ifade edecekleri, görüşme soruları ve GSP etkinliklerinin genelleme sürecini ortaya koyacağı, GSP yazılımının etkili kullanıldığı ve çalışma grubundaki katılımcıların içinde bulundukları şartlardan eşit düzeyde etkilenecekleri varsayılmaktadır.

1.6. Araştırmadaki Tanımlar

Genelleme: Genelleme, verilen bir argümanı daha geniş durumlara uygulamaktır (Harel ve Tall, 1991, s. 38).

Matematiksel Genelleme: Makul örüntülerin tespit edildiği ve teoremlerin formüle edilmesine yol açan örneklerin oluşturulmasıyla başlayan, tümevarımsal bir zikzak deneme yanılma yolunun sonucudur (Sriraman, 2004).

Dinamik Geometri Yazılımı (DGY): Geometri yazılımlarının ortak adı olup kişilerin geometrik şekiller üzerinde ilişki kurmasını, çıkarım yapmasını ve

varsayımlarda bulunarak genellemelere ulaşılmasını sağlayan araçlardır (Vatansever, 2007).

Geometer's Sketchpad (GSP): Dünyada öncü kabul edilen geometri çizim programlarından biri olup geometrik ilişkilerin keşfedilip anlaşılır hale gelmesini sağlayan yazılımdır (Erkuş, 2014).

Pisagor Teoremi: Öklid geometrisinde bir dik üçgenin üç kenarı arasındaki temel bir ilişki olup, bir kenarı hipotenüs (dik açının karşısındaki kenar) olan karenin alanının, diğer iki kenardaki karelerin alanlarının toplamına eşit olduğunu belirtir. Matematiksel olarak dik üçgende dik kenar uzunlukları a ve b , hipotenüs uzunluğu c iken, $a^2 + b^2 = c^2$ şeklinde ifade edilir (Alsina ve Nelsen, 2011).

Dik Çokgen: Pisagor teoremi kullanılarak elde edilen çokgenlerdir. Örneğin bir dik üçgenin hipotenüsünü yine hipotenüs olarak kabul eden başka bir dik üçgen çizildiğinde oluşan yeni şekille dik dörtgen, benzer şekilde dik dörtgenin dik kenarlarından birini hipotenüs kabul eden başka bir dik üçgen eklendiğinde dik beşgen elde edilir (De Villiers, 2009).

Genelleştirilmiş Pisagor Teoremi: $a_1; a_2; \dots; a_n$ kenarlı bir dik çokgende $a_1^2 + a_2^2 = \sum_{i=3}^n a_i^2$ 'dir (De Villiers, 2009).

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde yapılan araştırmaya ait kavramsal çerçeveye yer verilecektir.

2.1. Genelleme

Genelleme, belirli örneklerin ortak özelliklerinin genel kavramlar veya iddialar olarak formüle edildiği bir düşünme biçimidir. Kişilerin bir durumda edinilen bilgilerdeki benzerlikleri fark etmelerini sağlayarak bilginin yeni durumlara aktarılmasına izin verir. Genelleme yeteneğinin gelişmesi bireyin zihinsel gelişimini destekler ve bireyin günlük yaşam içerisinde daha iyi karar vermesini sağlar (Vanicek, 2011). Bu nedenle genelleme, öğrenmenin ve günlük yaşamın değerli ve ayrılmaz bir parçasıdır.

Genelleme kavramı birçok disiplinde yer alır ve geniş bir uygulama alanına sahiptir (Yılmaz, 2011). Genellemeler bir alanın veya öğeler kümesinin yanı sıra, bu öğeler tarafından paylaşılan bir veya daha fazla ortak özelliğin varlığını varsayar. Bir genellenmenin herhangi bir durum için doğru olup olmadığını belirlemek için doğrulama süreci gerekir. Genelleme kelimesi hem matematik içerisinde hem matematik dışında daha kapsamlı bir bağlamda belli bir tartışma içinde uygulanan süreci kastetmek için kullanılır (Harel ve Tall, 1991). Mason'a (1996) göre genelleme matematiğin özüdür.

2.1.1. Matematiksel Genelleme

Matematikte genellemeler, içinde makul örüntülerin tespit edildiği ve teoremlerin formüle edilmesine yol açan örneklerin oluşturulmasıyla başlayan, tümevarımsal bir zikzak deneme yanılma yolunun sonucudur (Sriraman, 2004). Bir çokgen, üç kenarlı bir üçgenin, dört kenarlı bir dörtgenin vb. n kenara genelleştirilmesi olup matematiksel genellemeye bir örnektir.

Skemp (1986), matematiksel genelleme sürecini karmaşık ve güçlü bir etkinlik şeklinde belirtmiştir. Bazı araştırmacılar da genellemeyi dışsal bir yapı yani zihinsel süreç sonucundaki sözlü ya da yazılı ifadeler olarak ele almıştır (Ellis, 2007). Genelleme matematik eğitiminin genel amaçlarından biri olarak açıklanır (NCTM, 2000).

Literatürde genelleme teriminin birçok anlamı vardır.

Harel ve Tall (1991), genellenenin farklı niteliklerine ışık tutmak amacıyla bireylerin zihinsel yapılarına göre genellemeyi üç farklı türe ayırmışlardır:

1. *Geniş Kapsamlı Genelleme*: Kişi mevcut olan şemasını değiştirmeden son şemayı önceki şemalara dâhil eder. Yani, şemasının uygulama aralığını genişletmiş olur.
2. *Yeniden Yapılandırıcı Genelleme*: Kişi mevcut şemasını değiştirir ve zenginleştirerek yenisini oluşturur.
3. *Ayırıcı Genelleme*: Kişi ayrı bir şema oluşturduğunda ve bunu mevcut şemalar dizinine eklediğinde ortaya çıkar.

Ayırıcı genelleme, önceki örneklerin birey tarafından genel prosedürün özel durumları olarak görülmemesi bakımından bilişsel bir genelleme olmadığı düşünülmektedir. Genelleme için en çok istenen, yaklaşımın geniş kapsamlı genelleme yolu ile daha genel geçişe izin vermesidir ve kişi burada mevcut durumun anlamlı bir şekilde anlaşılmasına yol açan deneyimler yaşar. Ayrıca geniş kapsamlı genelleme bilişsel gelişim için çok daha uygundur ve yeniden yapılandırıcı genellemeden daha kolaydır (Harel ve Tall, 1991).

Mitchelmore (2002), genellemeyi üç kategoride gruplamıştır:

Soyutlama veya kavramla eş anlamlılık (G1): Birçok araştırmacı genellemeyi soyutlama ile eş anlamlı olarak kullanır. Davidov (1990), genellemeyi benzer nesnelerin bütün bir sınıftaki özelliklerini bulmak ve ayırmak olarak tanımlar. Dreyfus (1991) ise soyutlamanın ilk aşaması olarak kabul eder.

Mevcut bir kavramın uzantısı (G2): Genellenenin genişleme anlamına geldiği en az üç anlam vardır. Bunlardan *ampirik (deneysel) genişlemede*, kişi mevcut bir kavramın geçerli olduğu başka bağlamlar bulduğunda ortaya çıkar (Harel ve Tall, (1991) tarafından geniş kapsamlı genelleme olarak adlandırılır). Örnek olarak, bir çocuğun sadece ikizkenar ve eşkenar üçgeni bilmesine rağmen, bir çeşitkenar üçgeni de üçgen olarak kabul etmesi verilebilir. *Matematiksel genişlemede* matematiksel nesnelerin bir sınıfı farklı bir benzerliğe dayalı olarak daha büyük bir sınıfa gömülür (Harel ve Tall (1991) tarafından yeniden yapılandırılmalı genelleme olarak adlandırılır). Örnek olarak pozitif tam sayıların tam sayılara genişletilmesi verilebilir. *Matematiksel buluş* ise bir matematikçinin daha genel bir kavram oluşturmak için

bazı tanımlayıcı özellikleri değiştirdiğinde ortaya çıkar. En bilindik örnek olarak paralellik aksiyomunu değiştirerek Öklid dışı geometrinin keşfi verilebilir.

Mevcut kavramlar ile ilgili bir teorem (G3): Bu genelleme, okul matematiğinin merkezinde yer alır. Buna göre genelleme terimi genellikle bazı nesne kümelerinin tüm elemanları arasında geçerli olan bir ilişkiyi ifade eder. Cebirde yapılan sayısal genellemeler ve her yerde yapılan mantıksal genellemeler buna örnek olarak verilebilir.

2.1.2. Genelleme Seviyeleri

Garcia-Cruz ve Martinon (1998), doğrusal genelleme problemlerini çözme sürecinde genelleme düzeyleri ile ilgili bir öneri ortaya koymuştur:

Seviye 1 (Prosedürel Aktivite). Bu seviyede kişi doğrusal örüntünün ardışık ve yinelemeli karakterini tanır. Bunlar giriş niteliğinde olan soruları hesaplamak için kullanılır. Bu stratejiler geliştirilebilir değildir, ancak modelin değişmez farkını vurgular.

Seviye 2 (Lokal Genelleme). Bu düzeyde öğrenci lokal bir genelleme kurabilir. Verilen herhangi bir problem içinde bir resim üzerinden ya da sayısal bir diziden sabit bir genelleme kurabilir ve bu sabitlik probleminden probleme geçebilir.

Seviye 3 (Global Genelleme). Bu düzeyde öğrenci bir stratejiyi genelleştirmiştir. Bu, aynı eylemi gerçekleştirdiği ve aynı değişmezi yeni ama benzer bir problemde oluşturduğu anlamına gelir. Bu düzeyde genelleme, öğrencinin bu durumlarla başa çıkmadaki genel performansıdır ve buna strateji denir. Bu düzeyde öğrencilerin bilişsel davranışları artık kavramsal anlama olarak kabul edilebilir (Yılmaz, 2011).

2.1.3. Genelleme Sınıflandırması

Ellis (2007), yaptığı çalışmada tutarlı olarak temellendirilmiş bir taksonomi geliştirmiştir. Bu taksonomi, genelleştirme faaliyetinde gelişen karmaşıklık düzeylerini tanımlar. Genellemeyi *genelleme eylemleri* ve *yansıma genellemeleri* şeklinde iki kategoride ele almıştır. Ayrıca bunları alt kategorilere de ayırmıştır. Bu taksonomi, kişinin başarılı ya da başarısız olduğu bir etkinlik değil, bunun ötesine geçerek neyi gördüğü ve genelleme eylemlerine nasıl katıldığının belirlmesine olanak tanır.

2.1.3.1. Genelleme Eylemleri

Kişinin zihinsel eylemlerinin etkinlik ve konuşma yoluyla görünür hale gelmesidir. Örneğin, bir öğrencinin bir problemle uğraşırken kullandığı stratejiler ve işlemler, zihinsel eylemlerinin bir tezahürüdür. Tabii ki bir öğrencinin her zihinsel sürecini kesin olarak belirlemek mümkün değildir. Eylemi genelleştirmek sadece süreci anlamlandırmanın bir yoludur. Genelleme eylemleri kategorileri ve alt kategorileri Tablo 2.1’de verilmiştir.

Tablo 2.1. Genelleme Eylemleri (Ellis, 2007)

İLİŞKİLENDİRME	1. <i>Durumları İlişkilendirme:</i> İki veya daha fazla bir durum arasındaki çağrışımın oluşması.	<i>Geri Bağlantı:</i> Mevcut bir durum ve daha önce karşılaşılan bir durum arasındaki bağlantının oluşumu
		<i>Yeni Oluşturma:</i> Mevcut duruma benzer olan yeni bir durumun ortaya çıkarılması
	2. <i>Nesneleri İlişkilendirme:</i> İki veya daha fazla mevcut nesne arasındaki benzerliklerin bir çağrışımının oluşması	<i>Özellik:</i> Her ikisine benzer özellikler üzerine odaklanarak nesnelerin çağrışımı
		<i>Form:</i> Benzer formları üzerine odaklanarak nesnelerin çağrışımı
ARAŞTIRMA	1. <i>Aynı İlişkiyi Araştırma:</i> İki veya daha çok nesne arasındaki belirli ilişkiyi tespit etmek için tekrarlayan bir eylemin performansı	
	2. <i>Aynı Prosedürü Araştırma:</i> Tüm durumlar için geçerli olup olmadığını test etmek için bir prosedürün tekrarlanan performansı	
	3. <i>Aynı Örüntüyü Araştırma:</i> Belirlenmiş bir örüntünün karşılıklı tüm durumlar için geçerli olup olmadığını kontrol etmek için tekrarlanan performans	
	4. <i>Aynı Çözüm veya Sonucu Araştırma:</i> Eylemin sonucunun her zaman eşit olup olmadığını belirlemek için tekrarlanan bir eylemin performansı	
GENİŞLETME	1. <i>Uygulanabilirlik Alanını Genişletme:</i> Bir fenomenin, durumların orijinalinden daha geniş bir alanda uygulanması	
	2. <i>Ayrıntıları Uzaklaştırma:</i> Global bir durum elde etmek için aynı içeriksel detayların uzaklaştırılması.	
	3. <i>İşlem:</i> Yeni durumlar ortaya çıkarmak için bir nesne üzerinde işlem eylemi	
	4. <i>Devam Ettirme:</i> Yeni durumlar ortaya çıkarmak için ortadaki bir örüntüyü tekrarlama eylemi	

Eylemleri genelleme, üç ana alt kategoriye ayrılır:

İlişkilendirme. Kişi, iki veya daha fazla durum, problem, fikir veya nesne arasında bir bağlantı kurduğunda gerçekleşir. Bunlar arasında bir benzerlik ilişkisi

algılar. *Durumları ilişkilendirme*, iki durum arasında ilişki kurulmasıdır. Kişi gördüğü bir durum ile daha önce gördüğü bir durum arasında bağlantı kurabilir ki bu, *geri bağlantı*dır veya bir durumu görüp daha sonra buna benzer gördüğü başka bir durum olabilir. Bu ise *yeni oluşturmadır*. *Nesneleri ilişkilendirme* nesneler arasında bağlantı kurulmasıdır. Kişi denklem, grafik, tablo vb. matematiksel nesneler arasında ilişki oluşturur. Bir denklemin farklı bir denklemle aynı *forma* sahip olması veya iki grafiğin benzer bir *özelliği* paylaşması fark edilebilir.

Araştırma. Kişinin benzerlik unsurunun ortaya çıkıp çıkmayacağını belirlemek için aynı eylemi tekrarlamasıdır. Kişi bu arama eyleminde benzerlik ilişkisi bulmayı amaçlamaktan ziyade, aynılığı birden çok örnekte bulmayı amaçlar. İlişkilendirdiği durum diğerlerinde de var mı diye araştırıyorsa bu *aynı ilişkiyi araştırma* olarak adlandırılır. Kişiler ilişkilere odaklanmanın yanı sıra arama yaparken *aynı prosedürlere*, *aynı örüntülere* ve de *aynı çözümlere* de odaklanabilir. Aynı prosedür, ilişki veya desen yoluyla aynılığı aramaya giriştiklerinde, bu eylemlerin sonucundan çok kendi tekrarlanan eylemlere odaklanırlar. Aynı çözümü aradıklarında ise eylemin sonucuna odaklanırlar.

Genişletme. Eğer kişi yalnızca bir benzerlik ilişkisini veya desenini fark etmekle kalmaz ve bu ilişkiyi veya deseni daha genel bir yapıya genişletirse bu, *genişletme* kategorisine girer. Kişi burada muhakemesini genişletir ve durumun ötesine ulaşır. Kişi *ayrıntıları uzaklaştırarak* belirli bir çerçeve içinde belirginleştirdiklerini alıp daha sonra genel durumu ifade etmek için bir özellik, ilişki vb. tanımlarından bazı içeriksel detayları çıkarır. *İşlemle genişletme* bir olgunun yeni örneklerini geliştirmek için bir ilişki veya örüntü üzerinde işlem gerçekleştirmesidir. Örneğin, bir oran herhangi bir gerçek sayı ile çarpılarak buna eş değer birçok oran örneği oluşturulabilir. İşlem yaparak genişleten kişi yeni durumlar oluşturmak için bilinçli şekilde bir ifadeye matematiksel işlemler yapar. Eğer kişi bir örüntüyü değiştirmeden tekrarlarsa *devam ettirmiş* olur. Kişinin devam ettirerek genişleme sırasındaki odak noktası, işlemle genişletmedeki odak noktasından biraz farklıdır. İşlemle genişletmede, öğrencinin odağı oran veya başka bir ilişkiye dayanır; devam ettirmede ise kişinin odağı örüntüye neden olan ilişkiden ziyade örüntünün kendisine aittir. Bütün bunlarla birlikte kişinin yaşadığı her zihinsel süreci kesin olarak belirlemek mümkün değildir.

2.1.3.2. Yansıma Genellemeleri

Yansıma genellemeleri, kişinin genelleştirmedeki son durumlarını anlatır. Eğer kişi ortak bir özelliği, örüntüyü veya benzerlik ilişkisini açıkça belirtmişse, bu bir yansıma genellemesidir. Bununla birlikte kişi sözlü veya yazılı olarak bir durumu ortaya koymuyor, ancak yeni bir problem için genelleştirmenin sonucunu kullanıyorsa bu süreç de bir yansıma genellemesidir. Yansıma genellemeleri Tablo 2.2’de verilmiştir:

Tablo 2.2. Yansıma Genellemeleri (Ellis, 2007)

BELİRLEME veya AÇIKLAMA	1. Fenomeni Devam Ettirme: Spesifik bir durumun ötesinde dinamik bir özelliğin genişlemesinin saptanması	Ortak Özellik: Nesneler veya durumlar için ortak özellik saptanması
	2. Özdeşlik: Benzerlik veya ortaklık durumu	Nesneler veya Temsiller: Benzer veya özdeş olan nesnelerin saptanması
		Durumlar: Benzer veya özdeş olan durumların saptanması
	3. Genel Prensipten: Genel bir fenomen durumu	Kural: Genel bir formül veya olay tanımlaması Örüntü: Genel bir örüntü tanımlaması Strateji veya Prosedür: Spesifik bir durumun ötesinde bir metot genişlemesinin tanımlaması Global Kural: Bir nesne veya fikrin anlamının durumu
TANIMLAMA	1. Nesneler Sınıfı: Verilen bir ilişki, örüntü veya diğer fenomenlerin tümünü sağlayan bir nesneler sınıfının tanımlanması	
ETKİ	1. Önsel Fikir veya Strateji: Daha önce geliştirilen bir genellenmenin uygulaması	
	2. Modifiye Edilmiş Fikir veya Strateji: Ortadaki bir genellenmenin yeni bir problem veya duruma uyarlanması	

Yansıma genellemeleri üç ana alt kategoriye ayrılır:

Belirleme veya Açıklama. Kişi bir genelleme belirlediğinde bir örüntüye, özelliğe veya kurala göndermede bulunabilir veya farklı durumlar arasındaki ortak bir unsuru açıkça tanımlar. Kişi, genellemesini sözlü veya yazılı olarak ifade edip herkese açık hale getirir. Kişi *devam eden bir olgu* hakkında açıklama yaptığında ayırt edici özellikleri belirler. Örneğin ‘devam eder’, ‘ne olursa olsun her zaman olur’ veya ‘her a için b’yi görüyorsunuz’ gibi ifadeler üretir. *Özdeşlik*, açıklama

yapan kişinin iki veya daha fazla problem, durum veya nesne arasında ilgili olarak algıladığı bir özelliği açıkça tanımlamasıdır. Ortak özellik, aynı nesneler veya aynı durumlar olarak kategorize edilmiştir. Özdeşlik hakkında açıklama yapan kişi nesneler arasındaki *ortak özelliğin*, *aynı nesneler veya temsillerin* veya *aynı durumların* saptamasını yapar. *Genel prensip* ise kişinin genel *kurallar*, *örüntüler*, *stratejiler* veya *global kuralları* açıklamalarıdır. Bu ifadeler cebirsel olarak ortaya çıktığında birçok araştırmacının aradığı ve geçerli saydığı genelleme türünü temsil eder. Genel kuralların açıklamaları matematiksel ilişkileri tanımlayan kurallardır. Genel örüntüleri belirleyen kişi bunu sözlü veya yazılı olarak tanımlar. Genel strateji veya prosedür belirten kişi bunu artık belirli bir durumda gerçekleştirilen eylemler ile sınırlandırmadan tanımlar. Yani açıklama genel bir problem sınıfına ait olabilir. Global kural ifadeleri ise matematiksel nesnelerin veya fikirlerin anlamı hakkındaki genellemelerdir.

Tanımlama. Kişinin bir örüntü, ilişki, sınıf veya başka bir olgunun temel özelliklerini aktarırken yaptığı açıklamalardır. Bu özellikler *nesneler sınıfında* ele alınır.

Etki. Kişi daha önce geliştirdiği genellemeyi yeni problemlerde veya durumlarda uygularsa bu *önsel fikir veya strateji* alt kategorisine girer. Araştırmacı kişinin geçmiş öğrenimine aşina olmadığı sürece, önsel fikir veya stratejinin etkisini anlamak zor olabilir. Kişi ortadaki genellemeyi yeni bir problem veya duruma uyarlıyorsa bu *modifiye edilmiş fikir veya strateji* alt kategorisinde yer alır.

Genelleme ile ilgili yapılmış mevcut birçok çalışma vardır. Yapılan çalışmaların çoğunluğu örüntü genellemeleri üzerinedir (örneğin; Akkan, Öztürk ve Akkan, 2017; Chua ve Hoyles, 2010; Girit ve Akyüz, 2016; Karaz, 2021; Lee ve Lee, 2015; Özel, 2019; Rivera ve Becker, 2008; Sucuoğlu, 2015; Tanışlı ve Köse, 2013; Türkoğlu ve Yalın, 2020; Yakut Çayır ve Akyüz, 2015; Yeşildere ve Akkoç, 2011).

Genelleme alanında matematik öğretmen adayları ile yapılan çalışmalara bakıldığında;

Yılmaz (2011) çalışmasında genelleme sürecinde görselleştirme ve önemini incelemiş, sonucunda görselleştirmelerin kavramlar arasındaki ilişkileri tamamlamada önemli bir yeri olduğu ve genelleme sürecinin gelişimine etkisi olduğunu tespit etmiştir. Yeşildere ve Akkoç (2011), Radford (2008) tarafından

ortaya konulan kuramsal çerçeveyi kullanarak lineer olan ve lineer olmayan şekil örüntülerini genelleme süreçlerini incelemiştir. Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının çoğunluğunun şekil örüntülerini genelleme sürecinde zorluklar yaşadığı görülmüştür. Akkan, Öztürk ve Akkan (2017) çalışmasında katılımcıların farklı örüntü problemleri ile ilgili genelleme stratejilerini incelemiş, gerekçelendirmeleri keşfetmiş ve genellemeler ile gerekçelendirmeler arasındaki ilişkileri belirlemiştir. Sucuoğlu (2015) yüksek lisans tezinde öğretmen adaylarının değişen örüntülere ilişkin genelleme stratejilerini belirlemeyi amaçlamış, araştırma sonucunda adayların şekil örüntülerini genellerken sayısal ve görsel olmak üzere iki temel yaklaşım belirledikleri ortaya çıkmıştır. Özel (2019) katılımcıların cebirsel düşüncelerini fark etme düzeylerini örüntü genelleme bağlamında araştırmıştır. Tanışlı, Yavuzsoy Köse ve Camci (2017) çalışmasında şekiller ile verilen örüntülerin genelleme ve doğrulama süreçlerini desteklediği ve doğrulama yapmanın genelleme yapmaya katkı sağladığı sonucuna ulaşmıştır. Biber ve Argün (2012) araştırmasında öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonlarda limit kavram bilgilerini kullanarak yürüttükleri soyutlama ve genellemelerin nasıl geliştiğini tespit etmiştir.

Genelleme alanında ortaokul ve lise öğrencileri ile yapılan çalışmalara bakıldığında;

Oflaz (2017), Ellis (2004)'in genelleme taksonomisini kullanarak 8. sınıf öğrencilerinin genelleme süreçlerine ilişkin düşünme ve anlama yollarını belirlemeye çalışmıştır. Araştırmanın sonucunda taksonomiye *otorite ile ilişkilendirme* ve *aynı parça araştırma eylemleri* olacak şekilde iki kategori daha eklenmesi önerilmiştir. Tolga ve Cantürk Günhan (2020) çalışmasında ortaokul 6. sınıf öğrencilerinin ilişkilendirme ve genelleme süreçlerini üçgen ve paralelkenar alan geometrik problemlerinde nasıl kullandıklarını incelemiş olup çalışmanın sonucunda katılımcıların bir kısmının istenilen genellemeye ulaşamadıkları görülmüştür. Peker (2020), ortaöğretim öğrencilerinin genelleme becerilerini sınıf düzeylerine ve akademik başarıya göre incelemiş olup genelleme becerisinde farklı görsellerin etkisini araştırmıştır. Araştırmanın sonucunda 9. ve 11. sınıf öğrencilerinin 10. sınıflara oranla daha başarılı olduğu bulgusuna ulaşmıştır. Yakut Çayır (2013), 9. sınıf öğrencilerinin öğrencilerin cinsiyet ve okul türü değişkenleri bakımından cebirsel genelleme problemlerini çözme başarılarını ve kullandıklarını genelleme stratejilerini araştırmıştır. Gökçe ve Yeşildere İmre (2017) araştırmasında, sayı

örüntülerini genelleme etkinliklerinin 7. sınıf öğrencilerinin genelleme yapma becerilerine etkisini incelemiş olup sonucunda bu etkinliklerin cebirsel genelleme yapmayı olumlu yönde etkilediği bulgusunu elde etmiştir. Girit ve Akyüz (2016) çalışmasında, farklı sınıf seviyelerindeki ortaokul öğrencilerinin akıl yürütme ve çözüm stratejilerini araştırmış, bunu yaparken de örüntülerde genelleme soruları kullanmıştır. Velo (2001) DGY'nin düzenli kullanımının lise öğrencilerinin geometride genelleme yapma becerilerini geliştirip geliştirmediğini incelediği araştırmasında, DGY'nin genelleme yapmada olumlu etki gösterdiği sonucuna ulaşmıştır.

Demircioğlu ve Tuncay (2020) bir akademisyen, bir matematik öğretmeni ve iki matematik öğretmen adayı ile yaptığı çalışmasında; genelleme sürecindeki davranışları çember ve noktalar problemi bağlamında incelemiş, çalışma sonucunda katılımcıların dört veya beş durum sonrasında genelleme yaptıklarını görmüş ve genelleme becerilerini geliştirmede problemlerin önemli olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Bu çalışma gruplarından farklı olarak Hashemia vd. (2013) araştırmalarında genellemenin anlamlarını farklı perspektiflerden açıklamışlar ve öğrencilerin matematiksel kavramları öğrenmesinde genellemenin önemli olduğunu öne sürmüşlerdir.

2.2. Dinamik Geometri Yazılımı (DGY) ve Geometer's Sketchpad (GSP)

Çağımızda bilim ve teknolojinin hızla ilerlemesi bireylerin yaşantısını etkilerken, öte yandan eğitim ortamlarını da etkilemektedir. Var olan düzene ayak uydurabilmek için eğitim ve teknolojinin bütünleşmesi zorunlu hale gelmiştir. Eğitimin nitelikli ve kaliteli olması için teknoloji önemli bir yere sahiptir. Çağımızın getirdiği eleştirel düşünme, problem çözme, akıl yürütme, keşfetme gibi becerileri elde etmek için teknoloji kullanımı gereklidir. Gelişen teknoloji eğitim alanında da yeniliklere yola açmıştır. Eğitime bilgisayarın girmesi ile birlikte bilgisayar destekli öğretim ortaya çıkmıştır. Bilgisayar destekli öğretim bireysel öğrenme ilkelerinin bilgisayar teknolojisi ile birleşmesinden oluşmuş bir öğretim yöntemi olup, öğretim sürecinde bilgisayarın seçenek olarak değil, sistemi tamamlayıcı ve güçlendirici bir öğe olarak kullanılmasıdır (Vatansever, 2007). Bilgisayar destekli öğretim, kişilere araştırma ve yaratıcılık becerileri de kazandırabilir. Geleneksel ortamda kâğıt ve kalem ile gerçekleştirilen işlemler bilgisayar yardımı ile etkileşime dayalı olarak

gerçekleştirilir. Hesaplamalar, çözümler ve modellemeler bilgisayar ortamında gerçekleştirildiğinde kişi yeni sezgilere, tahminlere ve genellemelere ulaşabilir (Baki, 2001).

Teknolojik araçlar; karmaşık durumların analizinde farklı yorumlar yapılabilmesini ve ilişkilerin keşfedilmesini sağlayan deneysel araçlar olarak nitelendirilebilir (Duke ve Pollard, 2004; Hoyos ve Capponi, 2000). Hanson (2020)'na göre matematik olmadan teknoloji ve teknoloji olmadan matematik düşünülemez.

Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics-NCTM, 2000) matematik eğitiminde teknoloji kullanımının gerekliliğini, matematiği etkilediğini ve öğrencilerin öğrenmesini geliştirdiğini ifade etmiştir.

Bilgisayarın eğitim üzerindeki etkisi, matematik alanında diğer alanlara kıyasla daha fazladır (Aydın, 2005). Buna neden olarak, matematiğin soyut bir alan olması ve günlük hayatla ilişkilendirilmekte zorlanması gösterilebilir. Geleneksel ortamdan bilgisayar ortamına geçiş yapılırken çeşitli geometri yazılımları gelişmiştir. Dinamik yazılımlar görselleştirmeyi kolaylaştırır (Presmeg, 2006; Yılmaz, 2011). DGY, geometriyi durağan olan kâğıt ve kalem ortamından alıp etkin bilgisayar ortamına taşıyarak kişilerin verilen durumlarda ilişkileri keşfetmelerine ve denemelerine olanak tanır (Güven ve Karataş, 2003). Velo (2001), görselleştirmeyi sağladığından ve genelleme becerisini olumlu yönde etkilediği için geometri alanında DGY kullanımını önermiştir. Yerushalmy (1993) ise farklı yazılım araçlarını kullanmanın genelleme yapma fırsatı yarattığını belirtmiştir.

DGY sahip olduğu sürükleme özelliği sayesinde öğrencinin şekil üzerinde oynama yapabilmesini, şeklin özelliklerini daha iyi görebilmesini sağlar (Goldenberg ve Cuoco, 1998). DGY, geometrik şekillerin kolayca oluşturulabilmesini ve üzerinde ölçüm yapılabilmesini sağlar. Sahip olduğu sürükleme özelliği sayesinde şeklin özelliklerini değiştirebilirken, değişmeyen bazı özellikler de keşfedilebilir. Böylece birçok geometrik ilişkinin farkına varılması sağlanır. DGY'na Cabri, GeoGebra, GSP, Cindrella gibi örnekler verilebilir. GSP, Nicholas Jackiw'in ilk sürümünü ortaya koyduğu interaktif bir bilgisayar yazılımıdır (Goldenberg ve Cuoco, 1998).

GSP dünyada en yaygın kullanılan matematik yazılım programlarından biridir. Alan yazına bakıldığında GSP'nin sahip olduğu özellikler sayesinde sağladığı kolaylıkları görebiliriz. Kullanımın basit olması, dünyaca kabul görmesi ve sürüklenme özelliğinin olması olumlu özelliklerinden yalnızca bazılarıdır (Vatansever, 2007). GSP yazılımında her ne kadar belli bir ölçü ile şekiller çizilemese de çizilen şekillerin açı, uzunluk, çevre, alan, x ve y koordinatlarını dinamik olarak görselleştirmek ölçüm ve hesaplamalar yapmak mümkündür. GSP'i diğer yazılımlardan ayıran bazı özellikler vardır. Bunlardan biri şekli çizmek yerine inşa etmektir (Steketee, 2009). Katılımcılar süreci tamamen kendileri inşa ettiğinden geometrik şekillerin özellikleri hakkında daha detaylıca düşüneceklerdir. Bu anlamda katılımcıların genelleme yaparken düşünme süreçlerini anlamak açısından GSP önem kazanmaktadır. GSP'i diğer yazılımlardan ayıran bir başka özellik ise nesnelerin farklı kısımlarını sürüklenme imkanı vermesidir.

Çalışmalar, GSP kullanımının öğrencilerin derse olan ilgisini arttırdığını, öğrenmede kalıcılık sağladığını ve geometri öğreniminde başarıyı olumlu yönde etkilediğini (Erdener ve Gür, 2019), matematiksel konuların daha iyi anlaşılmasını ve problem çözme becerilerinin gelişmesini sağladığını (Öçal ve Şimşek, 2016), ayrıca geometri başarısını ve geometrik düşünme becerilerini olumlu olarak etkilediğini (Dokur, 2013) göstermektedir.

Özet olarak, GSP programı kişilerin matematiği ve geometriyi kavramasını kolaylaştıran ve matematiğe ve geometriye ilgisini arttıran bir yazılım olduğu söylenebilir. Ayrıca kullanımının basit ve ulaşılmasının kolay bir program olduğu düşünülmektedir. <http://www.keypress.com> web adreslerinden yazılım indirilebilir, incelenebilir ve gerekli bilgiler elde edilebilir.

2.3. GSP ve Genelleme ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Vatansever (2007), 7.sınıf öğrencilerinin geometri konularını GSP ile öğrenmesinin başarıya ve kalıcılığa etkisini araştırmıştır. Öğrencilere verilen GSP taslaklarında açık uçlu sorular sorulmuş, geometrik şekiller arasındaki ilişkileri keşfederek genellemelere ulaşmaları sağlanmaya çalışılmıştır. Araştırmanın sonucunda öğrenciler GSP'nin şekilleri sürüklenme ve hareket ettirme özelliği sayesinde şekiller arasındaki ilişkiyi keşfetmişlerdir.

Presmeg vd. (2007) geometri konusu üzerinde ilkokul öğretmen adaylarının genelleme yapma yollarını araştırırken GSP'yi ve geleneksel araçları kullanmıştır. Araştırmanın sonucunda GSP'nin akıl yürütme süreçlerini ve genelleme yapmayı desteklediği sonucuna ulaşmıştır.

Yılmaz (2011) matematik öğretmen adaylarının GSP destekli ortamda genelleme sürecinde görselleştirmenin önemini incelediği çalışmada, dinamik yazılımın görselleştirme imkanı sağladığını ve bunun genelleme sürecinin gelişimine olumlu etkisinin olduğunu belirtmiştir.

Vanicek (2011) matematik öğretmen adayları ile yaptığı araştırmasında analogi yöntemi kullanarak genellemeyi yapmayı geliştirmede dinamik yazılım destekli ortamın rolünü incelemiştir. Araştırmanın sonucunda dinamik yazılımın genelleme yapma yeteneğini olumlu yönde etkilediği bilgisine ulaşmıştır.

Dokur (2013) çalışmasının bir kısmında geometri problemi kullanmış olup genelleme yapmaya uygun ortamlar oluşturmuş ve öğrencilerin genellemeye ulaşmalarını beklemiştir. Çalışmasının sonucunda geometri problemlerinin öğrencilere akıl yürütme ve genelleme yapma fırsatı yarattığını belirtmiş, ayrıca GSP'nin açık uçlu geometri problemlerine verilen açıklamaları geliştirmede etkili olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Yao (2018) araştırmasında, öğrencilerin teknoloji açısından zengin bir öğretim ortamında nasıl genellemeler yaptıklarını ve öğretmenlerin öğrencilerin genelleme yapması üzerinde nasıl bir etkisinin olduğunu açıklamaya çalışmıştır. Çalışmadan elde edilen sonuçlar, kazanımların öğretmen ve teknoloji tarafından desteklendiğinde çok çeşitli genellemeler oluşturabileceğini göstermiştir.

Bu çalışmalardan yola çıkarak GSP'nin şekiller üzerinde sürükleme yapma özelliği sayesinde deneme yanılma ile kişilerin birçok geometrik ilişkinin farkına varmasını sağladığı ve genelleme yapmaya fırsat verdiği söylenebilir.

3. YÖNTEM

Bu bölümde yapılan araştırmanın türü ve deseni hakkında bilgi verilmiştir. Pilot çalışma, katılımcılar, veri toplama araçları, uygulama ve veri analiz süreci belirtilmiştir.

3.1. Araştırmanın Türü ve Deseni

Bu araştırma matematik öğretmenlerinin ve matematik öğretmen adaylarının genelleme süreçlerini DGY destekli ortamda incelemeyi amaçlamaktadır. Bu nedenle araştırmada olayların ve olguların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir şekilde incelenmesine yönelik süreci temsil eden nitel araştırma yöntemi (Yıldırım ve Şimşek, 2018) kullanılmıştır.

Araştırma durum çalışması olarak desenlenmiş ve matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının genelleme süreçleri şeklinde iki durum ele alınmıştır.

3.2 Araştırmanın Tasarımı ve Yürütülmesi

Araştırmada önce araştırmanın yapılacağı grup belirlenmiş, matematiksel genelleme sürecini ortaya çıkaracağı düşünülen GSP destekli ortam tasarlanmış ve görüşme soruları hazırlanmıştır. Daha sonra pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmanın sonuçlarına bağlı olarak gerekli bazı değişikliklere gidilerek asıl çalışma gerçekleştirilmiş ve veriler toplanmıştır. Çalışma planına Tablo 3.1’de yer verilmiştir.

Tablo 3.1. Araştırma Planı

Tarih	Yapılan Çalışmalar
2020-2021 Bahar Dönemi	• Genelleme ortamlarının planlanması • Uzman görüşleri eşliğinde veri toplama araçlarının belirlenmesi
2020-2021 Yaz Dönemi	• Pilot çalışma için katılımcıların seçilmesi • Pilot çalışmanın gerçekleştirilmesi
2021-2022 Bahar Dönemi	• Veri toplama araçlarında gerekli düzeltmelerin yapılması • Asıl katılımcıların belirlenmesi • Çalışmanın uygulanması

3.3. Pilot Çalışma

Veri toplama aşamasına geçmeden önce pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışma yapılmasının amacı; kullanılması planlanan GSP etkinliğinin ve görüşme sorularının

uygun olup olmadığını tespit etmek; veri toplanması ve analiz edilmesi sürecinde oluşabilecek hataların belirlenmesini ve düzeltilmesini sağlamak, dolayısıyla araştırmanın güvenilirliğinin arttırmaktır. Bu amaçla yapılan pilot çalışmanın; GSP'nin ve kullanılan etkinliğin genelleme sürecine uygun olup olmayacağını belirleyeceği, aynı şekilde verilerin analiz edilmesi sürecinin güçlü ve zayıf yönlerini gösterebileceği düşünülmüştür. Ayrıca, araştırmacıya deneyim kazandırması ve katılımcıların yöneltilen sorularda anlamakta güçlük çektiği yerlerin tespit edilip yeniden düzenlenmesinin sağlanması açısından da pilot çalışma önemli olmuştur.

Pilot katılımcı, asıl araştırmanın gerçekleştirileceği fakülte olan Karadeniz bölgesinin büyük bir ilinde bulunan bir devlet üniversitesinde öğrenim gören son sınıf bir matematik öğretmen adayıdır. Kendisinin seçilmesinde gönüllü olarak araştırmaya katılma isteği, GSP'yi kullanabilme becerisi ve akademik başarısının iyi olması etkili olmuştur.

Pilot çalışma, Zoom programı aracılığıyla gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın Zoom programı aracılığıyla gerçekleştirilmesinin nedeni GSP programının kullanılması, Zoom'un karşılıklı etkileşime olanak tanınması ve video kaydı alabilmesi olmuştur. Katılımcı ve araştırmacı arasında Zoom üzerinden gerçekleştirilen görüşme, araştırmacı ile katılımcı arasındaki etkileşimi geliştirmiş ve süreç içerisinde nasıl davranılması gerektiği konusunda fikir oluşturmıştır.

Pilot çalışmada araştırmacı tarafından GSP ortamında oluşturulmuş olan dik üçgen, dik dörtgen ve dik beşgen şekilleri katılımcıya hazır olarak ve sırasıyla verilmiştir. Bu şekillerin kenar uzunlukları arasındaki ilişki sorulmuştur. Pilot çalışma sonucunda görüşme sorularında bazı değişiklikler yapılmış ve tekrar uzman görüşünden yararlanılmıştır. Pilot çalışmada dik üçgen, dik dörtgen ve dik beşgen şekillerinin hazır olarak verilmesi katılımcının genelleme sürecinin hızlı ilerlemesine yol açmıştır. Katılımcı yansıma genellemelerini hızlıca gerçekleştirmiş, hazır olarak verilen şekiller katılımcının düşünme biçimlerini ve süreçlerini anlamayı engellemiş dolayısıyla genelleme sürecinin detaylandırılmasının önüne geçilmiştir. Bu nedenle etkinlikte tüm sürecin katılımcı tarafından inşa etmesi planlanmış ve görüşme soruları da buna paralel olarak revize edilmiştir.

3.4. Katılımcılar

Bu araştırma, Karadeniz bölgesinin büyük bir ilinde bulunan bir devlet üniversitesinde öğrenim gören dört matematik öğretmen adayı ve devlet okullarında

görev yapan dört matematik öğretmeni ile gerçekleştirilmiştir. Bu araştırmanın katılımcılarının belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Çalışmada katılımcıların GSP'yi kullanabilmeleri önemli bir ölçüt olmakla beraber, katılımcılar seçilirken gönüllülük esas alınmış ve düşüncelerini iyi ifade eden bireylerden oluşmasına dikkat edilmiştir. Dört matematik öğretmeni, dört matematik öğretmen adayı olan 8 katılımcı ile ilgili bilgiler Tablo 3.2’de verilmiştir.

Tablo 3.2. Katılımcı Bilgileri

Katılımcı	Katılımcı Kodu
Öğretmen Adayı	ÖA1
	ÖA2
	ÖA3
	ÖA4
Öğretmen	Ö1
	Ö2
	Ö3
	Ö4

Öğretmenlerin mesleki deneyimlerine bakıldığında Ö1 4 yıllık; Ö2, Ö3 ve Ö4 ise 6 yıllık deneyime sahiptir. Öğretmen adayları ise matematik öğretmenliği lisans eğitimi alan 4. sınıf öğrencileridir. Öğretmen adaylarının geometri derslerine ait ders başarıları Tablo 3.3’te verilmiştir.

Tablo 3.3. Öğretmen Adaylarının Lisans Öğrenimi Süresince Aldıkları Geometri Derslerindeki Akademik Başarıları ve Fakülte Not Ortalamaları

Katılımcılar	Aldıkları Dersler	Ders Başarısı	Not Ortalaması
ÖA1	Analitik Geometri 1	CC	3,08
	Analitik Geometri 2	BB	
	Diferansiyel Geometri 1	BA	
	Diferansiyel Geometri 2	CB	
ÖA2	Analitik Geometri 1	CC	3,08
	Analitik Geometri 2	AA	
	Diferansiyel Geometri 1	CC	
	Diferansiyel Geometri 2	BB	

ÖA3	Analitik Geometri 1	CC	2,75
	Analitik Geometri 2	BB	
	Diferansiyel Geometri 1	BB	
	Diferansiyel Geometri 2	CC	
ÖA4	Analitik Geometri 1	AA	2,85
	Analitik Geometri 2	AA	
	Diferansiyel Geometri 1	BA	
	Diferansiyel Geometri 2	BA	

Öğretmen adaylarının not ortalamaları ve geometri ders başarılarının farklı durumlarda olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarından ÖA1 ve ÖA2'nin not ortalamalarının yüksek, ÖA3 ve ÖA4'ün ise nispeten düşük not ortalamalarına sahip olduğu görülmektedir. Bununla birlikte geometri derslerine göre ise ÖA4'ün diğer katılımcılardan daha iyi durumda, ÖA1 ve ÖA2'nin benzer durumlarda, ÖA3'ün ise geometri ders başarısının diğerlerine göre düşük olduğu söylenebilir. Öğretmen adayları geometri ders başarılarına göre ÖA4 iyi, ÖA1 ve ÖA2 ortaüstü, ÖA3 orta olarak nitelendirilmiştir.

3.5. Veri Toplama Araçları

Araştırmanın veri toplama araçları matematiksel genelleme sürecinde kullanılan GSP etkinlikleri ve görüşmelerdir.

3.5.1. Görüşmeler

Araştırmada beş açık uçlu sorudan oluşan yarı yapılandırılmış görüşme formu hazırlanmıştır. Soruların araştırma problemine uygun, tüm detayları kapsayacak ve genelleme sürecini ortaya çıkaracak şekilde olması amaçlanmıştır. Ayrıca yönlendirmeden uzak duran ve sürece uygun şekilde ilerleyen görüşme soruları kullanılmaya çalışılmıştır. Görüşme sorularının hazırlanma sürecinde matematik eğitimi alan uzmanlarının görüşlerine başvurulmuş ve alınan dönütlere göre görüşme sorularına son hali verilmiştir (Ek 1).

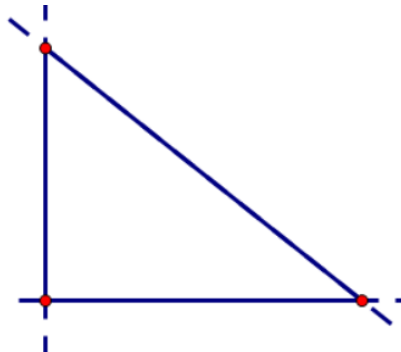
Görüşmelerin öncesinde katılımcıların kişisel bilgilerinin gizli kalacağı önemle vurgulanmış olup araştırmanın herhangi bir not ile değerlendirilmeyeceği, kayıtların araştırmacıda saklı kalacağı, her şeyi açıkça ve sesli bir şekilde düşünmeleri istenildiği belirtilerek kendilerini rahat hissetmeleri sağlanmıştır.

Görüşmeler Zoom programı aracılığı ile bilgisayar üzerinden yapılmış ve görüşme süresince ses ve görüntü kaydı alınmıştır. Araştırmacı görüşme öncesinde kendini tanıtmış, görüşmenin amacını anlatmış ve görüntü ve ses kaydı için izin istemiştir. Video kaydının sadece veri analizi yapılırken kullanılacağı, herhangi başka bir şekilde değerlendirmesinin yapılmayacağı anlatılmıştır. Ayrıca görüşmede katılımcılara herhangi bir süre kısıtlaması olmadığı, istedikleri kadar düşünebilecekleri belirtilmiş olup veriler eksiksiz olarak toplanmaya çalışılmıştır. Görüşmeler sonucunda video kayıtlarının transkripti çıkarılmıştır. Süreç içerisinde katılımcıların matematiksel genellemeleri detaylı olarak incelenmeye çalışılmıştır. Katılımcı öğretmen adayları ile yapılan görüşmeler yaklaşık olarak ÖA1 ile 75 dakika, ÖA2 ile 60 dakika, ÖA3 ile 70 dakika ve ÖA4 ile 120 dakika sürmüştür. Katılımcı öğretmenlerle yapılan görüşmeler ise Ö1 ile yaklaşık 73 dakika, Ö2 ile 50 dakika, Ö3 ile 47 dakika, Ö4 ile 52 dakika sürmüştür.

3.5.2. GSP Etkinlikleri

Araştırmada katılımcıların genellemelerini destekleyecek bir geometri problemi kullanılmış ve ortam GSP dinamik yazılımı ile tasarlanmıştır. Kullanılan geometri problemi ise çokgenlerle ilgilidir. Çokgenlerin kenar, açı gibi özellikleri kullanılarak birbirleri arasında ilişkiler kurulabileceği ve bunun da genellemeye ulaşmaya olanak sağlayacağı düşünülmüştür.

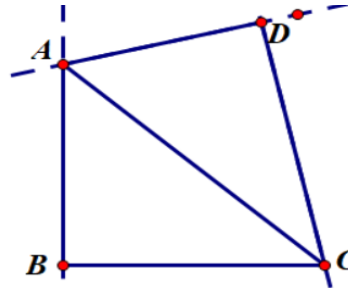
Görüşmelerde görüşme soruları GSP etkinlikleri beraberinde kullanılmıştır. Katılımcılar sorulara verdikleri cevapları şekil üzerinde bizzat denemişler, bu da onların düşündüklerini GSP yardımıyla oluşturmalarına ve kontrol etmelerine olanak tanımıştır. İlk durumda GSP kullanılarak dik üçgen modeli oluşturulmuştur. Buna ilişkin görsel Şekil 3.1’de verildiği gibidir.



Şekil 3.1. Dik Üçgen Modeli

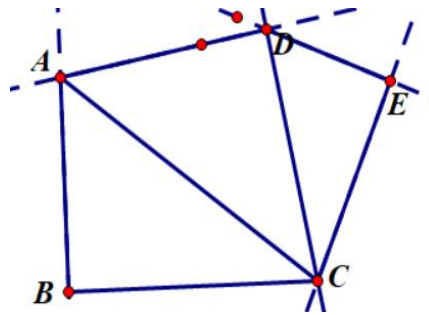
Burada dik üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişki sorulmuştur. Katılımcılardan beklenen dik kenar uzunlukları ile hipotenüs uzunluğunu ilişkilendirmeleri ve üçgenin kenarları üzerinde karesel bölgeler oluşturarak alanlarının ilişkilendirilmesidir.

Devamında dik üçgenin hipotenüsünü yine hipotenüs olarak kabul eden başka bir dik üçgen çizmeleri istenildiğinde katılımcılardan beklenen dik üçgende düşünce ile oluşan dik dörtgende aynı ilişkiyi ve aynı çözümü araştırmasıdır. Çizilmesi beklenen muhtemel dik dörtgen modeli Şekil 3.2.’deki gibidir.



Şekil 3.2. Dik Dörtgen Modeli

Sürecin devamında dik dörtgenin dik kenarlarından birini hipotenüs olarak kabul eden başka bir dik üçgen daha çizmeleri istenildiğinde katılımcılardan beklenen dik dörtgende oluşan düşünce ile dik beşgende aynı ilişkiyi ve çözümü araştırmaktır. Çizilmesi beklenen muhtemel dik beşgen modeli Şekil 3.3’teki gibidir.



Şekil 3.3. Dik Beşgen Modeli

Katılımcılara dik altıgen ve dik yedigen için ne düşündükleri sorulduğunda, dik dörtgen ve dik beşgen için elde edilen durumları dik altıgen ve dik yedigen için de uygulanabilir olduğunu düşünerek genişletme yapmaları beklenmektedir.

Son olarak katılımcılara çizdikleri dik çokgenlerin özellikleri sorulmuş ve katılımcılardan beklenen genelleme ise “*Dik çokgenlerde ilk iki dik kenarı kenar*

olarak kabul eden karelerin alanları toplamı diğer kenarları kenar kabul eden karelerin alanları toplamına eşittir.” olmasıdır.

Genelleme süreci için oluşturulan şemanın organizasyonu ise Ek 2’de verilmiştir.

3.6. Verilerin Analizi

Bu araştırmada betimsel analiz yöntemi kullanılmış olup elde edilen veriler derinlemesine incelenip düzenlenmiştir. Görüşmeler sırasında toplanan video görüntüleri yazılı metin haline getirilmiştir. Genelleme sürecini ayrıntılı bir şekilde incelemek ve görsel verileri analiz edebilmek için görüntü kayıtları tekrar tekrar belirli aralıklarla izlenmiştir. Böylece veri kaybı önlenmeye çalışılmıştır. Bunların yanı sıra araştırma sürecinde notlar tutularak bunlar da analize dahil edilmiştir. Elde edilen veriler daha önceden oluşturulmuş çerçeveye göre tekrarlı bir şekilde okunmuş ve yorumlanmıştır. Analizin ilk aşamasında veriler incelenmiş, sistematik bir biçimde düzenlenip yorumlanmaya çalışılmıştır. Bu süreçte elde edilen veriler incelenerek bölümlere ayrılmış, belirli temalar ve kategoriler etrafında bir araya gelerek düzenlenmiştir. Kendi içinde bir anlam bütünlüğü olan bu bölümlerin ne anlam ifade ettiği bulunmaya çalışılmış ve yorumlanmıştır. Başka bir deyişle kodlanmıştır. Tüm bu verilerin analizi sonrasında bir kod listesi elde edilmiştir. Bu liste verilerin analizi için kullanılmıştır. Bazı kavramlar elde edilmiş, bu kavramlar da yine belirlenen kategoriler veya temalar altında düzenlenmiş, açıklanmaya çalışılmıştır. Katılımcıların sonuçlara ilişkin kod-kategori tabloları bulgular ve yorum bölümünde verilmiştir.

3.7. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

“Geçerlik” ve “güvenirlik” araştırmanın iki önemli ölçütü olarak kabul edilir. Kirk ve Miller (1986) nitel araştırmada geçerliği araştırmacının araştırdığı olguyu, olduğu biçimiyle ve olabildiğince yansız gözlemesi şeklinde belirtir (akt., Yıldırım ve Şimşek, 2018). Güvenirlik ise benzer verilerden çıkarılan anlamların birbiri ile tutarlılık sağlamasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2018).

Nitel araştırmada geçerlik ve güvenilirlik konusunda alınması gereken önlemler vardır. Bu önlemler nicel araştırma geleneği ile aynı değildir. Lincoln ve Guba (1985) nicel araştırmada var olan güvenilirlik ve geçerlik kavramlarını nitel

araştırmanın doğasına uygun olacak şekilde alternatif kavramlarla yeniden oluşturmuşlardır. Bu kavramlar Tablo 3.4’de karşılaştırmalı olarak sunulmuştur:

Tablo 3.4. Geçerlik ve Güvenirlik Konusunda Nicel ve Nitel Araştırmada Kabul Gören Kavramların Karşılaştırılması [Erlandson, Harris, Skipper ve Allen (1993)’den uyarlayan Yıldırım ve Şimşek, 2018]]

Ölçüt	Nicel Araştırma	Nitel Araştırma	Yöntem	Gerçekleştirilme Durumu
Araştırma sonuçları yoluyla gerçeğin doğru temsili	İç geçerlik	İnandırıcılık	Uzun süreli etkileşim	✓
			Derinlik odaklı veri toplama	✓
			Çeşitleme	✓
			Uzman incelemesi	✓
			Katılımcı teyidi	×
			Negatif durum analizi	×
Sonuçların uygulanması	Dış geçerlik (Genelleme)	Aktarılabilirlik (Transfer edilebilirlik)	Ayrıntılı betimleme	✓
			Amaçlı örnekleme	✓
Tutarlılığı sağlama	İç güvenirlilik	Tutarlık	Tutarlılık incelemesi	✓
Nesnel olma	Dış güvenirlilik (tekrar edilebilirlik)	Teyit Edilebilirlik	Teyit incelemesi	✓

Nitel bir çalışmada yukarıda tabloda belirtilen yöntemlerden en az ikisinin sağlanması durumunda yapılan çalışmanın geçerli ve güvenilir olduğu belirtilmiştir (akt., Creswell, 2013). Bu çalışmada tablodan verilen yöntemlerden katılımcı teyidi ve negatif durum analizi hariç diğer yöntemler gerçekleştirilmiştir. Araştırma sürecinde inandırıcılık, aktarılabilirlik, tutarlık ve teyit edilebilirlik yöntemlerinin nasıl gerçekleştirildiği aşağıda sırası ile açıklanmıştır.

3.7.1. İnandırıcılık

Nitel araştırmada inandırıcılığın sağlanması için bazı stratejiler bulunmaktadır.

3.7.1.1. Uzun Süreli Etkileşim

Araştırmacı katılımcılarla, gözlenen ortamla, dokümanlarla vb. uzun süreli bir etkileşim içinde olmalıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bu sayede veri kaynakları üzerinde oluşabilecek öznel algılarını azaltabilir. Gözlem süresinin artması inandırıcılığı arttırmak için önemli bir etkidir. Bu sebeple süreç içerisinde yapılan görüşmenin süresi ve görüşme öncesi katılımcılar ile etkileşime geçilmesi verilerin inandırıcılığını arttırmaktadır. Asıl uygulamaya başlamadan önce katılımcılar ile iletişime geçilmiş haklarında bilgi alınmış, araştırmacı ile ilgili bilgiler de verilmiştir.

Ayrıca katılımcılara süreç hakkında bilgi verilmiştir. Bu ön görüşmeler neticesinde katılımcılara göre bir randevu listesi oluşturularak asıl görüşmeler planlanmıştır. Böylece araştırmacı ile katılımcıların tanışıp kaynaşması sağlanmıştır. Sonuç olarak güvene dayalı bir ortam oluşturulmaya çalışılmıştır.

3.7.1.2. Derinlik Odaklı Veri Toplama

Araştırmacılar verileri elde ederken olay ve olguların doğasına uygun hareket etmeli ve verileri mantıklı, birbiri ile bağlantılı bir yapı olarak sergileyebilmedir. Bu sırada da ayrıntılı bir şekilde edindiği bilgilerin doğru olup olmadığını ispatlayabilmelidir. (Yıldırım ve Şimşek, 2018).

Araştırmacı katılımcılardan elde ettiği verileri birbirleri ile sürekli olarak karşılaştırıp yorumlamış, katılımcıların farkında olmadıkları genellemeleri ortaya çıkarmıştır.

3.7.1.3. Çeşitleme

Çeşitleme veri kaynaklarına, yöntem çeşitlemesi ve araştırmacı çeşitlemesi olarak başlıklar altında bakılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Katılımcılarla gerçekleştirilen görüşme sürecinde ortaya çıkan bulgular GSP üzerinde yapılan çizimlerin kayıtları, ekran görüntüleri, transkriptler, video ve ses kayıtları ile desteklenmiştir. Bu çalışmada veri toplama araçları bakımından çeşitlilik sağlanmıştır.

3.7.1.4. Uzman İncelemesi

Uzman incelemesi; yapılan araştırmanın konusu hakkında genel bilgiye sahip olan ve nitel araştırma konusunda uzmanlaşmış kişilerden araştırmayı çeşitli boyutlarıyla incelemesinin istenmesidir. Bu incelemede uzman kişi araştırma sürecinin her bir aşamasına dahil olur ve süreçte aktif olarak eleştirel bir bakış açısıyla araştırmacıya geri bildirimlerde bulunur (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Araştırmacı süreç içerisinde alan eğitimcisi bir uzman ile haftalık değerlendirme görüşmeleri yapmıştır. Gerekli bulunan yerlerde yeniden düzenlemeler yapılmıştır. Ayrıca veri toplama araçları kullanılmadan önce farklı uzman görüşleri alınarak son hali verilmiştir.

3.7.2. Aktarılabilirlik

Nitel bir araştırmada “genelleme” yerine aktarılabilirlik kavramının kullanılması elde edilen her araştırma sonucunun benzer durumlara genellenemeyeceğini, bununla birlikte benzer durumlarla ilgili bazı yargılara ulaşılabileceğı anlamına gelmektedir (Yıldırım ve şimşek, 2018). Erlandson vd. (1993) araştırma sonucunda elde edilen bilgilerin “aktarılabilirliğini” arttırmak için ayrıntılı betimleme ve amaçlı örnekleme yöntemlerini önermiştir.

3.7.2.1. Ayrıntılı Betimleme

Ham verinin ortaya çıkan kavram ve temalara göre yeniden düzenlenip yorum katmadan okuyucuya aktarılmasıdır. Araştırma sonuçlarının değer kazanmasında ayrıntılı betimleme önemli ölçüde etkilidir. Bu amaçla araştırmada verilerin elde edildiğı ortam ve çalışma grubundan ayrıntılı bir şekilde bahsedilmiş, veriler yeterli düzeyde betimlenmeye çalışılmış olup bulgular kısmında doğrudan alıntılara yer verilerek aktarılabilirlik güçlendirmeye çalışılmıştır.

3.7.2.2. Amaçlı Örnekleme

Nitel araştırmada aktarılabilirliği arttırmak için hem tipik olarak karşımıza çıkan olay ve olguları hem de bunların değişkenlik gösteren özelliklerini ortaya koyma amacı taşıyan amaçlı örnekleme yöntemi kullanılır (Yıldırım ve şimşek, 2018). Bu çalışmada katılımcılar amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme ile belirlenmiştir

3.7.3. Tutarlık

Nitel araştırmalar nicel araştırmada kullanıldığı biçimi ile güvenilirlik peşinde değildir. Bunun nedeni insanların olayları ele alış biçiminin sürekli olarak değişmesinden mütevellit araştırmaların kendine özgü olmasıdır. Nitel araştırmalar bunun yerine olay ve olguların değişkenliğini kabul eden ve bu değişkenliği tutarlı biçimde yansıtabilen tutarlığa önem verir (Yıldırım ve şimşek, 2018).

3.7.3.1. Tutarlılık İncelemesi

Bu yöntem; alanında uzman diğer araştırmacıların araştırmaya dışarıdan bir gözle bakması ve araştırmacının süreç boyunca gerçekleşen etkinliklerde tutarlı davranıp davranmadığını incelemesidir. Matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının matematiksel genelleme süreçlerini inceleyen bu araştırmada veri

toplama araçlarının oluşturulması, verilerin toplanması ve analiz aşamalarında bir alan uzmanı araştırmaya yön vererek gerekli tutarlık incelemesini yapmıştır.

3.7.4. Teyit Edilebilirlik

Nitel araştırmacılar verilerin objektif olması ve varsayımlardan etkilenmemesi amacı ile ulaştığı sonuçları elde ettiği verilerle sürekli olarak teyit etmeli ve okuyucuya makul açıklamalar yapabilmelidir (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bu çalışmada teyit incelemesi yapılmıştır.

3.7.4.1. Teyit İncelemesi

Bu incelemenin amacı araştırmacının elde ettiği verileri ve ulaştığı sonuçları karşılaştırarak teyit etmesidir. Bunun için dışarıdan farklı uzmanlar ulaşılan yargıların verilere geri dönüldüğü zaman teyit edilip edilmediğini inceler (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bu çalışmada görüntü ve ses kayıtları, GSP ekran görüntüleri, transkriptler vb. elde edilen verilerin teyit edilerek kaydedilmiş ve daha sonra tekrar değerlendirilmek üzere korunmuştur.

4. BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde yapılan araştırmada elde edilen verilerin analizine ait bulgulara ve yorumlara yer verilecektir. Araştırma problemine dayalı olarak ilk alt probleme ait öğretmen adaylarının, ikinci alt probleme ait ise öğretmenlerin genelleme süreçlerine dair bulgular sırasıyla yer almaktadır. Genelleme süreci genelleme eylemleri ve yansıma genellemeleri olarak iki aşamada incelenmiş ve bulgular bu aşamalara göre ele alınmıştır.

4.1. Öğretmen Adaylarıyla İlgili Bulgular

Katılımcı öğretmen adayları ile GSP yazılımı ile oluşturulan etkinlikler bağlamında görüşmeler yapılmış ve bu katılımcılara ait bulgular aşağıda başlıklar halinde verilmiştir. Veri analizi aşamasında öğretmen adaylarına dair elde edilen kod kategori tablosuna aşağıda yer verilmiştir.

Tablo 4.1. Öğretmen Adayları Kodlama Tablosu

KOD	ALT KATEGORİ	KATEGORİ	TEMA
<i>AB'nin uzunluğunun karesi BC'nin uzunluğunun karesi AC'nin uzunluğuna eşit diyebilirim, Pisagor bağlantısından.(ÖA1)</i>			
<i>Üçgen eşitsizliğinden bahsedebiliriz. Herhangi bir kenar diğer iki kenar uzunluğunun farkından büyük toplamından küçük, her bir kenar için geçerli. (ÖA2)</i>	Durumları İlişkilendirme		
<i>Dik üçgensel eğer 90 derecenin karşısındaki AC uzunluğu en uzun kenardır diyebiliriz. (ÖA3)</i>		İLİŞKİLENDİRME	
<i>Buradaki karenin (AB kenarını göstererek) alanının toplamı artı buradaki karenin (BC kenarını göstererek) alanının toplamı buradaki çizdiğim karenin (AC kenarını göstererek) alanının toplamına eşit olur. (ÖA1)</i>			
<i>Bu karelerini aldığımızda o uzunluğa ulaşmamızın sebebi büyük ihtimalle açılardan geliyordu. Birim çember üzerindeki açılardan, sinüs kosinüsünden geliyordu. (ÖA3)</i>	Nesneleri İlişkilendirme		
<i>AB kenarına ait şurada da atıyorum bir D noktası olsa burada bir üçgen onun alanını ifade etmiş oluyordu. BC buradaki de alanını ifade etmiş oluyordu. İşte bu iki alanın toplamı hipotenüste oluşan üçgenin alanına eşit oluyordu.(ÖA4)</i>			

GENELLEME EYLEMLERİ

Ben şimdi o zaman aynı hipotenüs olacaksa bir benzer üçgen yani eş üçgen çizmem gerekiyor bence. Ya da eş de olmayabilir gerçi ama... O yüzden ben şimdi bunu genelde kare, dikdörtgen gibi şekillerin iki parçası birbirine eşit olduğu için ben bunu tamamlamak istedim dikdörtgene. (ÖA1)

Aynı İlişkiyi
Araştırma

Yani şey yapacağım bunu (AC kenarı) çap kabul eden bir çember oluşturacağım. (ÖA2)

ARAŞTIRMA

AB uzunluğunun ve BC uzunluğunun karesi toplamı yine AC uzunluğunun karesine eşitti. O zaman bu ikisinin yani AG'nin karesi artı GC'nin karesinin toplamı AB'nin karesinin toplamı artı BC'nin karesi toplamına eşittir. (ÖA1)

Aynı Çözüm
veya Sonucu
Araştırma

Yani bu sefer de AD'yi çap kabul eden bir çember oluşturacağım. (ÖA2)

Yani AG'nin karesi artı GC'nin karesi eşittir AB'nin karesi artı BH'nin karesi artı HC'nin karesi. (ÖA4)

Yani iki kenarın karesi diğer kenarların karelerinin toplamına eşit olmuş oluyor diye bir genellemeyapabiliriz bence artık. Yedigen de olsa sekizgen de olsa muhtemelen böyle olacak. (ÖA1)

AE, ED, DC üzerinden herhangi dik üçgenler oluşturabilirim. (ÖA2)

Uygulanabilirlik
Alanını
Genişletme

GENİŞLETME

Şimdi dörtgende yine dikmelerin kenarlarının kareleri birbirine eşit geldi. Beşgende bu sefer dikmelerin kareleri toplamı diğer üç kenara eşit geldi. Şimdi altıgeni çizseydim böyle. O zaman da ne olurdu? a kare artı b kare bu dört kenarın kareleri toplamına eşit olabilirdi. (ÖA3)

Üçgenler dik üçgen, dörtgen kirisler dörtgeniydi. (ÖA2)

Ayrıntıları
Uzaklaştırma

Yani şu iki kenarın karesi diğer kenarların kareleri toplamına eşit. (ÖA1)

AB kare artı BC kare eşittir yani o sabit kalacak. Şeklin her büyüdüğüçe gelen kenarın karesini ekleyeceğiz şeklinde olacak. (ÖA2)

Genel Prensi

Başta çizdiğimiz üçgenin iki kenarının kareleri ine ilk üçgenimizin hipotenüsü diğer bütün kenarların karelerinin toplamına eşit oluyormuş. (ÖA3)

YANSIMA GENELLEMELERİ

j1 j2 olsun şunlar diğerleri j3 j4 j5 j6 diye gitsin. Şunu söyleriz j1 kare artı j2 kare yani uzunluk olarak eşittir n kenarlı olduğunu söyledik o zaman j3'ten başlayacak jn'e kadar karelerini toplayarak gidecek. Yani bağıntı bu olurdu (ÖA2)

TANIMLAMA

Objeler Sınıfı

4.1.1. Genelleme Eylemleri Bulguları

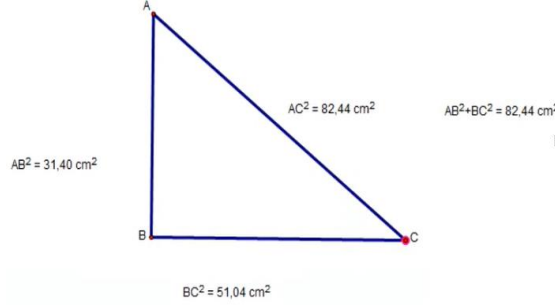
Katılımcılar kendilerine verilen geometri probleminde “Genelleme Eylemleri” olarak *İlişkilendirme*, *Araştırma* ve *Genişletme* eylemlerinde bulunmuşlardır. Aşağıda katılımcılara ait bulgular başlıklar altında belirtilmiştir.

4.1.1.1. İlişkilendirme

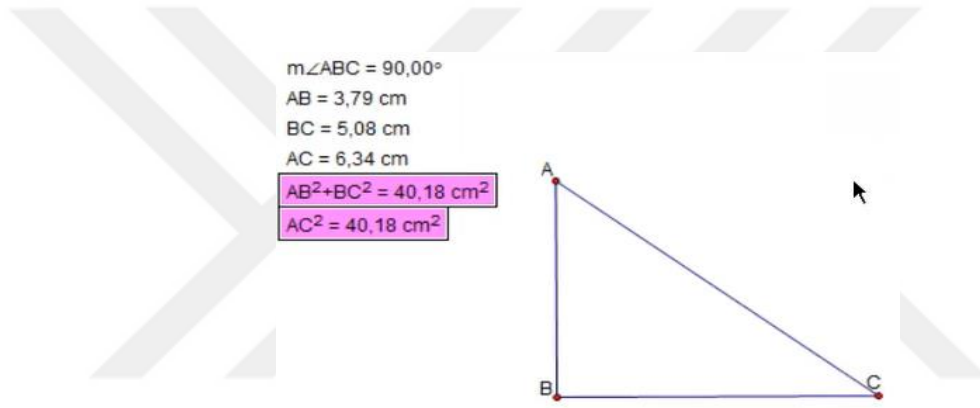
Katılımcılara öncelikle bir dik üçgen verilmiş ve bu dik üçgenin kenarları arasında nasıl bir ilişki olduğu sorusu yöneltilmiştir. Katılımcılar genel olarak dik üçgende Pisagor bağıntısından dolayı dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamının hipotenüs uzunluğunun karesine eşit olması gerektiğini belirtmişlerdir. Bu cebirsel ifadenin geometrik yorumu sorulduğunda ise ÖA1, ÖA2 ve ÖA3 katılımcıları üçgenin her bir kenarı üzerinde bu kenarlara sahip kareler oluşturmuştur. Sonra dik kenarlar üzerinde oluşturulan karelerin alanları toplamının hipotenüs üzerinde oluşan karenin alanına eşit olacağını belirtmişlerdir. ÖA3 katılımcısı bu yorumdan farklı olarak çember ile de bir ilişkilendirme yapmıştır. ÖA4 katılımcısının geometrik şekli yorumlarken zorluk yaşadığı görülmüştür. ÖA4 önce şeklin kenarları üzerinde üçgenler oluşturarak dik kenarlar üzerindeki üçgenlerin alanları toplamının hipotenüsteki üçgenin alanına eşit olacağını belirtmiştir. Geometer’s Sketcpad programı aracılığıyla düşündüğünü görselleştirip ölçüm yapınca bu düşüncesinin yanlış olduğunu farketmiştir. Sonra üçgenin kenarlarında dik üçgenler oluşturarak bu düşüncesini tekrar görselleştirmiş ve ölçümlerinin düşüncesini doğrulamadığını görünce en son üçgenin kenarları üzerinde kareler oluşturma karar almıştır. Daha sonra diğer katılımcılar gibi üçgenin kenarları üzerinde kareler oluşturmuş ve diğer katılımcılar gibi doğruluğunu fark etmiştir. Böylece genel olarak katılımcılar *durumları* ve *nesneleri ilişkilendirerek* genelleme eylemlerini gerçekleştirmişlerdir. Bununla birlikte katılımcılardan ÖA1 ve ÖA4 Pisagor teoremini GSP yardımıyla cebirsel olarak teyit etmiştir.

Katılımcıların ilişkilendirmeyi nasıl gerçekleştirdiklerini açıklamak istersek, katılımcılardan ÖA1 ve ÖA4 şeklin kenarları arasındaki ilişkiyi bulabilmek için kenar uzunluklarını ölçüp Pisagor teoremi bağıntısını ölçümlerle göstermişlerdir. (Şekil 4.1 ve Şekil 4.2) Bu bakımdan bu aşamada bu katılımcıların *durumları ilişkilendirerek* genelleme yaptığı söylenebilir. Ayrıca ÖA1, GSP aracılığı ile şeklin köşelerinden tutup sürükleyerek şekli büyültüp küçültmüş ve Pisagor bağlantısının

diğer tüm durumlarda da sağlandığını göstermiştir. Diğer katılımcılar ise dik üçgende ki açı doksan derece olduğu için ölçmeye gerek duymadıklarını belirtmişlerdir.



Şekil 4.1. ÖA1'in Pisagor Bağıntısı Temsili



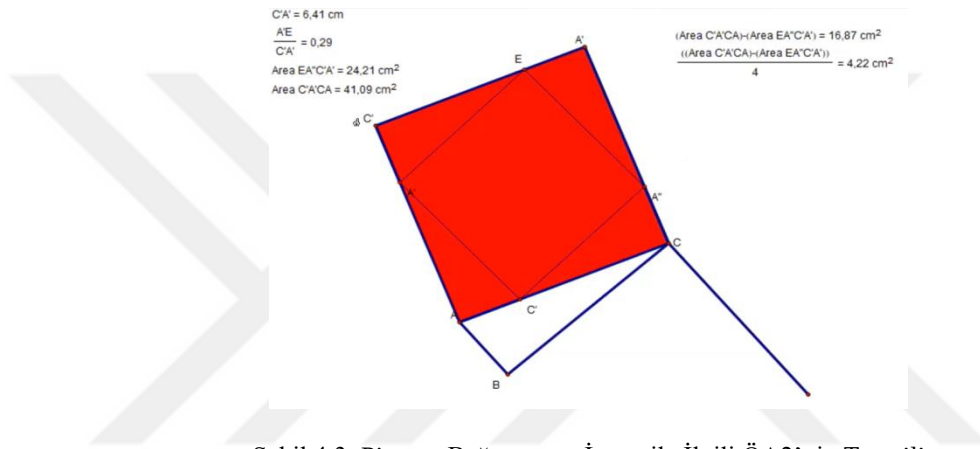
Şekil 4.2. ÖA4'ün Pisagor Bağıntısı Temsili

ÖA1 dik üçgen için “[AB]’nin uzunluğunun karesi [BC]’nin uzunluğunun karesi artı [AC]’nin uzunluğuna eşit diyebilirim, Pisagor bağıntısından.” şeklinde ifade de bulunmuştur. Üçgenin dik kenarları ile hipotenüsü arasındaki bağıntıyı kurabildiğinden durumları ilişkilendirmiştir. Ayrıca bu şeklin geometrik yorumuna dair “Buradaki karenin ([AB]’nı göstererek) alanının toplamı artı buradaki karenin ([BC]’nı göstererek) alanının toplamı buradaki çizdiğim karenin ([AC]’nı göstererek) alanının toplamına eşit olur.” diyerek obje olarak aldığı karesel bölgelerin alanlarını da ilişkilendirmiştir.

ÖA2’nin dik üçgen için “[AB]’nin karesi ile [BC]’nin karesinin toplamının [AC]’nin karesine eşit olduğunu söyleyebilirim Pisagor teoreminden.” şeklindeki ifadesinden durumları ilişkilendirdiği söylenebilir. ÖA2 ayrıca “Üçgen eşitsizliğinden bahsedebiliriz. Herhangi bir kenar diğer iki kenar uzunluğunun farkından büyük, toplamından küçük,... her bir kenar için geçerli.” diyerek üçgen

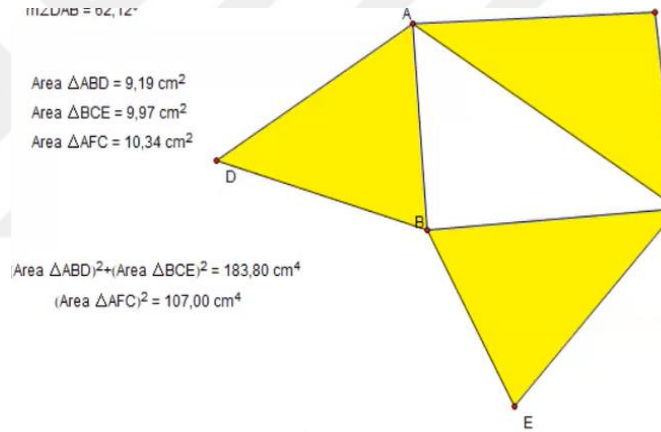
eşitsizliği ile verilen şekil arasında ilişki kurmuştur. Daha önceden öğrendiği bir bilgi ile bağlantı kurduğundan ÖA2'nin *geri bağlantı* kurarak ilişkilendirme yaptığı söylenebilir.

ÖA2 şeklin geometrik yorumu için “Her bir kenar üzerine bir kare çizsek bu karelerin uzunlukları toplamını alabilirdim” ifadesinden objeleri ilişkilendirdiği söylenebilir. ÖA2 düşüncesini “veya bir kare içersine farklı bir kare yerleştiririz oradan da ispatını yapabiliriz bu teoremin.” şeklinde devam ettirmiş ve Pisagor teoreminin farklı bir ispatını da yapmıştır. Buna ilişkin temsili aşağıda Şekil 4.3'te verilmiştir.



ÖA3 dik üçgen için “[AB]’nin uzunluğunun karesi artı [BC]’nin uzunluğunun karesi [AC]’nin uzunluğunun karesini verir.” ve “Dik üçgensene eğer 90 derecenin karşısındaki [AC] uzunluğu en uzun kenardır diyebiliriz.” ifadelerinde bulunarak durumları ilişkilendirmiştir. ÖA3 şeklin geometrik yorumu için “Eğer [AB] kenarını kenar kabul eden bir kare olsaydı [AB]’yi tekrar [AB] ile çarptığımda [AB] kenarına sahip bir karenin alanını bulmuş olacaktım. Yani o iki alanın toplamı aslında [AC]’nin oluşturduğu karenin alanını veriyordu.” ifadesinde bulunmuş obje olarak aldığı karesel bölgelerin alanlarını ilişkilendirmiştir. Ayrıca ÖA3 şeklin geometrik yorumuna dair “Bu kareleri aldığımızda o uzunluğa ulaşmamızın sebebi büyük ihtimalle açılardan geliyordu. Birim çember üzerindeki açılardan, sinüs kosinüsünden geliyordu.” şeklindeki ifadesi ile eski bilgileri ile *geri bağlantı* yapmıştır. ÖA3 bununla ilgili bir çizim yapmamıştır. Burada ÖA3’ün dik üçgenin hipotenüsü ile çember arasında bir ilişkilendirme yaptığı düşünülmüştür.

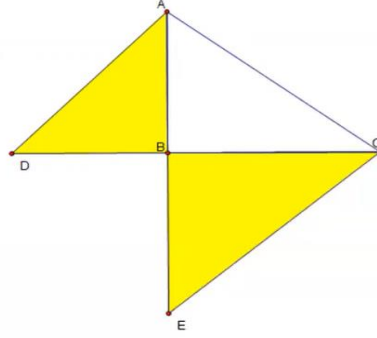
ÖA4'e şeklin geometrik yorumu sorulduğunda önce şeklin kenarlarında üçgenler oluşturmuştur. Bu durumu “*O zaman ispatlarda hatırladığım kadarıyla bunun çevrelerinde üçgenler oluşturuyorduk.*” şeklinde ifade edip daha önceden sahip olduğu bilgiye *geri bağlantı* yapmış; ancak tam olarak hatırlayamamıştır. Düşüncesini “[AB] kenarına ait şurada da atıyorum bir D noktası olsa burada bir üçgen onun alanını ifade etmiş oluyordu. [BC] buradaki de alanını ifade etmiş oluyordu. İşte bu iki alanın toplamı hipotenüste oluşan üçgenin alanına eşit oluyordu.” şeklinde devam ettirmiştir. Dik kenarlar üzerinde çizilen üçgenlerin alanlarının toplamının hipotenüs üzerindeki üçgenin alanına eşit olacağını söylemiştir. Buradaki durumu yanlış bir şekilde ifade etse de kenarlar üzerinde oluşan üçgenlerin alanlarını *ilişkilendirdiği* söylenebilir. GSP programında üçgenlerin alanlarını ölçüp bulmuş, düşündüğünün geçerli olmadığını görmüştür. Bu düşüncesine ait görsel Şekil 4.4’te verilmiştir.



Şekil.4.4. Pisagor Bağntısının İspatı ile İlgili ÖA4'ün 1. Temsili

Bunun üzerine ÖA4'e “*Nereden geliyor olabilir başka?*” sorusu sorulmuştur. ÖA4 ise “*Bunu alandan yapıyorduk diye hatırlıyorum ama...*” cevabını vermiştir. Biraz zaman geçtikten sonra “*Aaa... o zaman herhangi bir üçgen değil; çünkü bunlar dik üçgen olsaydı [AB]’nın karesini almış olacaktım.*” şeklinde ifadesini devam ettirmiştir. Buna ait temsil Şekil 4.5.’te verilmiştir. Araştırmacı bunun üzerine emin olup olmadığını sormuş, ÖA4 “*Hayır. Deneyeyim o zaman tekrar.*” şeklinde emin olmadığını söyleyip şekil üzerinde çizim ve ölçüm yapmaya devam etmiştir. Ölçüm sonucunda “[AB]’nın karesini buldum. Ne demiştim? Alana eşit değil... Başka ne yapabilirim?” demiştir.

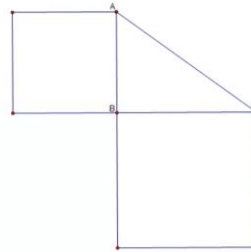
$m\angle ABC = 90,00^\circ$
 Area $\triangle ADB = 7,07 \text{ cm}^2$
 Area $\triangle BCE = 10,95 \text{ cm}^2$
 $AB = 3,79 \text{ cm}$
 $AB^2 = 14,37 \text{ cm}^2$



Şekil.4.5. Pisagor Bağıntısının İspatı ile İlgili ÖA4'ün 2. Temsili

ÖA4 daha sonra “Başından beri kare diyorum üçgen çizmişim hep.” yorumunu yapmıştır ve üçgenin kenarları üzerinde kareler çizerek doğru ilişkilendirmeyi yapmıştır. Emin olup olmadığı sorulduğunda ise “Bundan eminim bu sefer [AC]’nın karesi hipotenüs zaten. Kare çizdiğimde tekrar ona eşit olacak toplamları.” diyerek hipotenüs üzerinde kare çizme ihtiyacı hissetmemiştir (Şekil 4.6).

$m\angle ABC = 90,00^\circ$
 $AB = 3,79 \text{ cm}$
 $AB^2 = 14,37 \text{ cm}^2$
 $BC = 5,08 \text{ cm}$
 $BC^2 = 25,81 \text{ cm}^2$



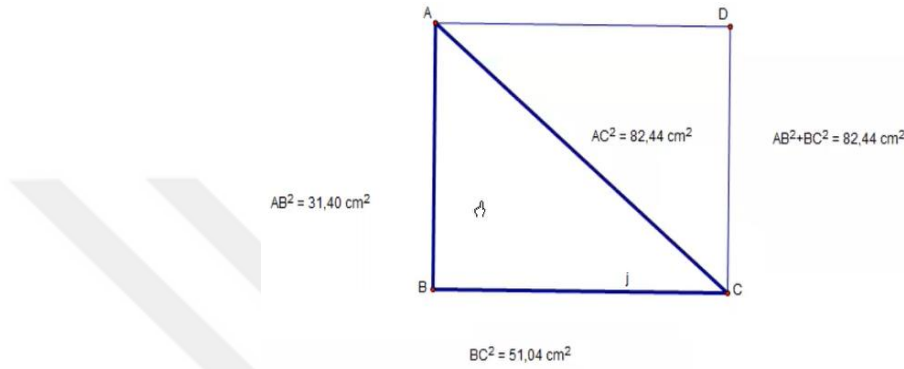
Şekil.4.6. Pisagor Bağıntısının İspatı ile İlgili ÖA4'ün 3. Temsili

4.1.1.2. Araştırma

Görüşmenin devamında, ikinci durum olarak katılımcılardan verilen dik üçgenin hipotenüsünü yine hipotenüs kabul eden başka bir dik üçgen daha çizmeleri istenmiş ve oluşan şeklin kenarları arasındaki ilişki sorulmuştur. Katılımcılar genel olarak bu çizimlerden elde edilecek şeklin tamamının dörtgen olacağı yorumunu yapmışlardır. ÖA1 ve ÖA4 verilen üçgene eş üçgen çizmeleri gerektiğini düşünürken ÖA2 ve ÖA3 çember aracılığıyla ikinci bir dik üçgen çizme yoluna gitmişlerdir. Katılımcıların genel olarak ilk durum ile *aynı ilişkiyi araştırma* ile *aynı çözüm veya*

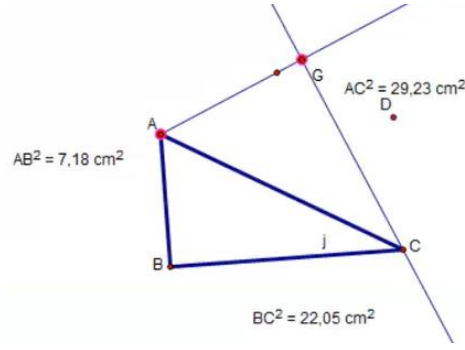
sonucu araştırma süreci yaşamışlardır. Bununla birlikte ÖA1 ve ÖA4 dörtgenin kenarları arasındaki buldukları ilişkiyi GSP programında ölçüm yaparak görmek istemişlerdir.

ÖA1 soruya karşılık “Ben şimdi o zaman aynı hipotenüs olacaksa bir benzer üçgen yani eş üçgen çizmem gerekiyor bence.” yorumunda bulunarak eş bir üçgen çizip, şekli dikdörtgene tamamlamıştır (Şekil 4.7). Bu ifadelerden ÖA1’in aynı ilişkiyi araştırma yaptığı düşünülmüştür.



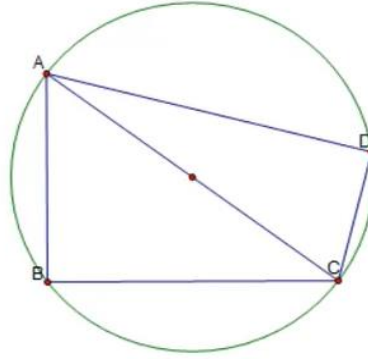
Şekil 4.7. ÖA1'in Dik Dörtgen 1. Temsili

Bu süreçte ise “O yüzden ben şimdi bunu genelde kare, dikdörtgen gibi şekillerin iki parçası birbirine eşit olduğu için ben bunu tamamlamak istedim dikdörtgene.” şeklinde düşüncesini sürdürmüştür. Bunun üzerine ÖA1’e “Peki aynı hipotenüse sahip olması için eş olması gerekli mi?” sorusu yöneltilmiş ve ÖA1 de “Hımm... Bence gerekli... Olmayabilir...” diyerek kararsız kalmıştır. “Birini daha kısa, birini daha uzun yapsam...” demiş ve düşünmeye başlamıştır. “Sayısal örneklerle düşüneyim. 9-12-15 üçgeni. 9’un karesi ve 12’nin karesi 15’in karesine eşit. Farklı bir sayı olmuyor...Hımm... Virgüllü de olabilir. O zaman şunu şuradan ayırsam...” diyerek şekil üzerinde denemeler yapmış ve yeni üçgenin eş olmak zorunda olmadığını fark etmiştir. Oluşan şekil sorulduğunda ise “Deltoit gibi.” demiştir (Şekil 4.8). Devamında “[AB] uzunluğunun ve [BC] uzunluğunun karesi toplamı yine [AC] uzunluğunun karesine eşitti. O zaman bu ikisinin yani [AG]’nin karesi artı [GC]’nin karesinin toplamı [AB]’nin karesinin toplamı artı [BC]’nin karesi toplamına eşittir.” diyerek dik üçgenle aynı çözümü araştırmıştır. ÖA1 bu düşüncelerini program üzerinde ölçüm yaparak teyit etmiştir.



Şekil 4.8. ÖA1'in Dik Dörtgen 2. Temsili

ÖA2 sorulan soruya “Yani şey yapacağım bunu ([AC]) çap kabul eden bir çember oluşturacağım.” diyerek cevap vermiş ve hipotenüsü aynı olan üçgen çizerken çember çizme yoluna gitmiştir. ÖA2 verilen ilk durumda çemberle ilgili herhangi bir şey söylememiş olsa da bu aşamada çember üzerinden hareket etmiştir. ÖA2’nin dik bir dörtgen temsili Şekil 4.9’da verilmiştir.

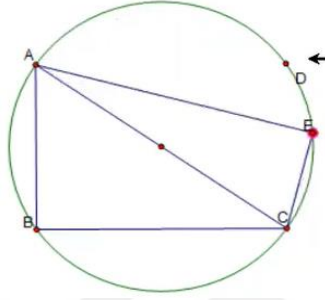


Şekil 4.9. ÖA2'nin Dik Dörtgen Temsili

Oluşan şeklin kenarları arasındaki ilişki için “Aynı bağıntı burada da geçerli. Her ikisinin de hipotenüse ulaşmak için dik kenarın kareleri toplamını eşitlesek birbirlerine [AB]’nın karesi ile [BC]’nin karesinin toplamının [DC]’nin karesi ile [AD]’nin karesinin toplamına eşit olduğunu söyleyebiliriz.” demiş ve ilk durumdaki üçgenle aynı çözüm veya sonucu araştırmaya çalışmıştır. ÖA2 tüm bu işlemlerinde ölçme ihtiyacı hissetmediğini söyleyip emin olduğunu belirtmiştir.

ÖA3 sorulan soruya karşılık çizim yapmaya başlamış ve verilen üçgene eş bir üçgen çizmiştir. Çizimi kendisine sorulduğunda “Evet. Eş oldu.” demiş ve ilk durumdaki üçgene eş bir üçgen çizdiğinden aynı ilişkiyi araştırma yaptığı düşünülmüştür. “Peki bunların eş olması mı gerekir?” sorusuna karşılık ise “Hayır eş olması gerekmez.” şeklinde yanıt vermiştir. “Peki gösterir misin?” denilmiş ve ÖA3

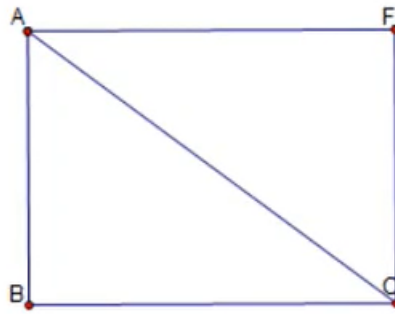
de “Onu çizebilir miyim bir bakalım. Nasıl çizebilirim?” şeklinde biraz duraksayarak düşünmüştür. “Yani A ve C ’yi çap kabul eden bir çember çizebilirim ama zor olur.” demiş ve ÖA2 gibi bir çember çizmiştir. Burada ÖA3’ün ilk durumdaki çemberle ilgili ifadesinden hareketle bunları söylediği düşünülmüştür. ÖA3’e ait dik dörtgen temsili Şekil 4.10’da verilmiştir. Yani çizdiği dörtgende ilk durumdaki üçgenle *aynı ilişkiyi araştırmıştır*. ÖA3 “*Karşılıklı karelerinin toplamaları eşit. $[AE]$ ile $[CE]$. $[AB]$ ile $[BC]$. Bunların karelerinin toplamaları eşit oluyor.*” diyerek üçgenle *aynı çözümü araştırmıştır*. A noktasından şekli sürükleyerek bu durumun çok sayıda dörtgen için sağlanacağını da belirtmiştir.



Şekil 4.10. ÖA3’ün Dik Dörtgen Temsili

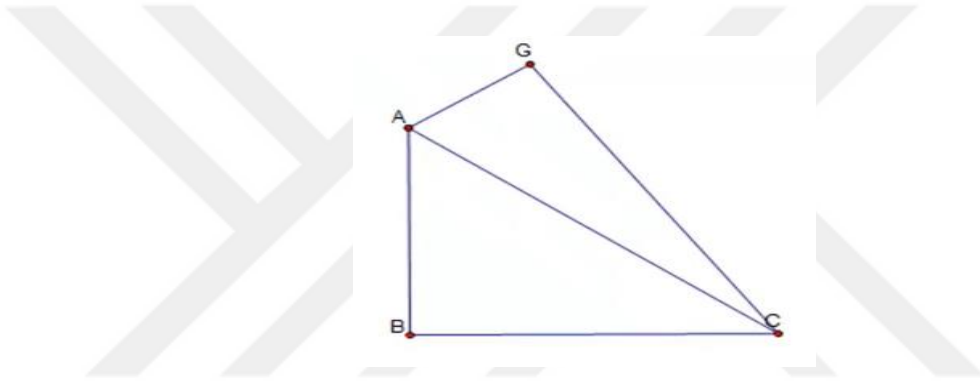
ÖA3 şeklin geometrik yorumu için “Üçgende ne demiştik... kısa kenarların... dikmeleri kenar kabul eden karelerin alanları hipotenüsün kenarını kenar kabul eden karenin alanıydı.” diyerek ilk durumdaki dik üçgende Pisagor bağıntısı ile *aynı çözümü araştırmaya çalışmıştır*. ÖA3 de ölçüm yapma gereği hissetmemiştir.

ÖA4 ise sorulan soruya “*O zaman şuradan bir doğru geçerse... Bir dakika şu doğruyu uzatacağım.*” diyerek cevap vermeye çalışmış ve verilen üçgene eş bir üçgen çizerek ilk durumla *aynı ilişkiyi araştırmıştır* (Şekil 4.11).



Şekil 4.11. ÖA4’ün Dik Dörtgen 1.Temsili

Bunun üzerine kendisine “Birbirine eş üçgenler çizdin. Peki hipotenüsü aynı olan bir dik üçgen çizdiğinde bunların eş olması mı gerekir?” şeklinde sorulmuş ve ÖA4 “Başka çizilebilir bence... [FC]’nı yukarı doğru uzatmış olsam sonuçta [AB] da onla yukarı çıkmış oluyor ve her zaman eş olmuş oluyorlar... Sanırım fazla özelledim.” demiş ve “A’dan çizdiğim [BC]’na paralel olmasın yani. Sadece oradan geçen bir doğru.” şeklinde ifadesini sürdürmüştür. Daha sonra “Çizdim... Şu an farklı uzunluklar olmuş oldu. Yani bu üçgenler eş olmak zorunda değiller.” diyerek ÖA4 bu süreçte şekil üzerinde denemeler yapmış ve en son üçgenlerin eş olmak zorunda olmadığına karar vermiştir. Elde edilen şeklin nasıl bir şekil olduğu sorulduğunda ise “Deltoite yakın bir şekil var ama deltoit değil.” demiştir (Şekil 4.12).

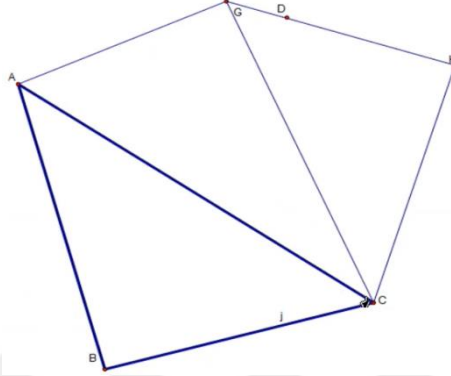


Şekil 4.12. ÖA4'ün Dik Dörtgen 2. Temsili

Şeklin kenarları arasındaki ilişki için “Kareler toplamı eşittir, çünkü dik üçgenler aynı hipotenüsü görüyorlar.” diye açıklayarak dik üçgen ile aynı ilişkiyi araştırdığı düşünülmüştür. Elde edilen dörtgenin geometrik yorumu sorulduğunda ise ilk durumdaki aynı çözümü araştırmaya çalışarak “Aynı şekilde o zaman yukarıda kare oluşturacağım. Burada yine [AG]’nın karesi dediğimde buradaki kare, [GC]’nin karesi dediğimde yukarıda bir kare olacak. O iki alanın toplamı [AC]’nin karesine eşit olmuş olacak.” demiştir. ÖA4 düşündüklerini ölçüm yaparak teyit etmiştir.

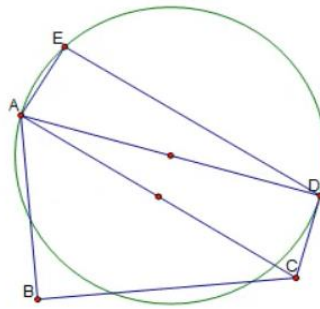
Daha sonra katılımcılardan elde edilen dörtgenin dik kenarlarından birini hipotenüs kabul eden başka bir dik üçgen daha çizmeleri istenmiş ve oluşan şeklin özellikleri ile kenarları arasındaki ilişki sorulmuştur. Katılımcılar dik üçgeni nereden çizmeleri gerektiğini sorgulamışlar ve GSP üzerinde denemeler yapmışlardır. Katılımcılar genel olarak bu çizimlerden elde edilecek şeklin beşgen olacağı yorumunu yapmışlar ve aynı ilişkiyi araştırma ile aynı çözüm veya sonucu araştırma süreci yaşamışlardır.

ÖA1 şekli çizmiş ve “İki kenarı dik bir beşgen oldu.” demiş ve bu beşgenin kenarları arasındaki ilişki için ise “Yani şu $[AB]$ artı $[BC]$ ’nin karesi $[AG]$ ’nin karesi artı $[GH]$ ’nin karesi artı $[HC]$ ’nin karesinin toplamına eşit. Yani şu üç kenarın karelerinin toplamı şu iki kenarın karelerinin toplamına eşit.” ifadesinde bulunarak dörtgenle aynı çözüm veya sonucu belirlemeye çalışmış ve araştırma yapmıştır. ÖA1’e ait dik beşgen temsili Şekil 4.13’te verilmiştir.



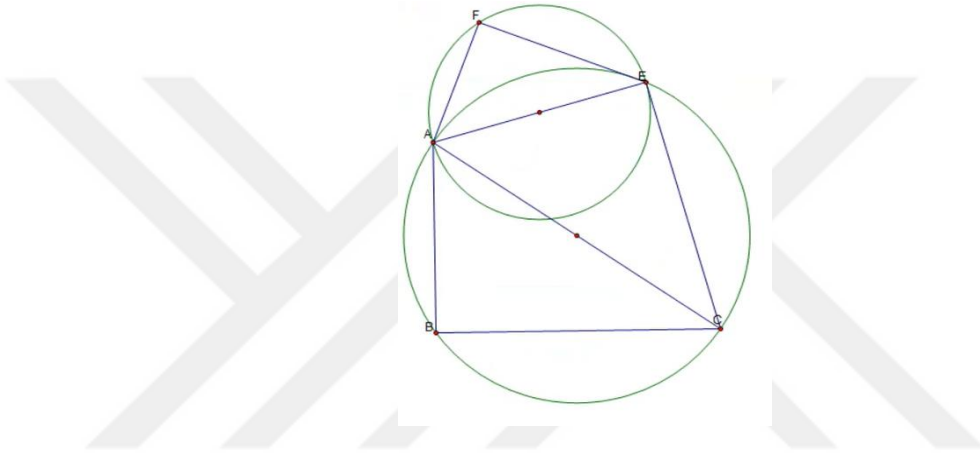
Şekil 4.13. ÖA1’in Dik Beşgen Temsili

ÖA2, “Yani bu sefer de $[AD]$ ’nı çap kabul eden bir çember oluşturacağım.” diyerek yeni dik üçgeni çizerken yine çember aracılığı ile çizim yapmış ve dörtgendeki düşüncesi ile aynı ilişkiyi araştırmıştır. Çizdiği şekil kenarları arasındaki ilişki ile ilgili “Yani bu beşgen ile ilgili ne söyleyebilirim?... Şunu söyleyebilirim: $[AE]$ ’nin karesi ile $[ED]$ ’nin karesinin toplamı burayı ($[AD]$ köşegeni) vereceği için şurayı yokmuş gibi düşünerek ($[AD]$ köşegeni) $[AE]$ kare artı $[ED]$ kare artı $[DC]$ kare eşittir $[AB]$ kare artı $[BC]$ kare diyebilirim.” demiş ve önceki durumla aynı çözüm veya sonucu belirlemeye çalışarak araştırma yapmıştır. ÖA2’ye ait dik beşgen temsili Şekil 4.14’te verilmiştir.



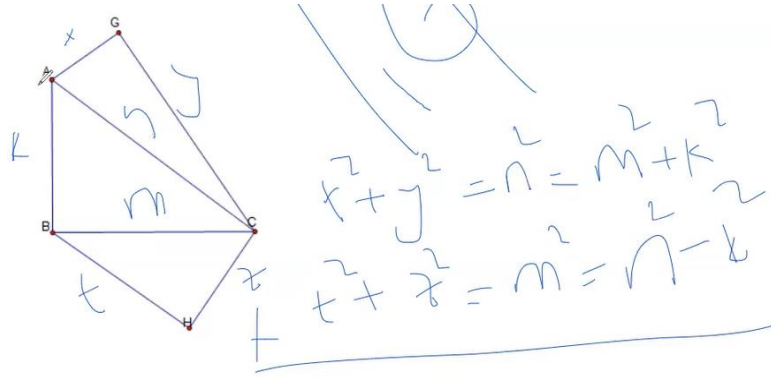
Şekil 4.14. ÖA2’nin Dik Beşgen Temsili

ÖA3 sorulan soruya karşılık “O zaman bu sefer $[AE]$ ’nı çap kabul eden bir çember çizerdim.” şeklinde cevap vermiş ve yeni dik üçgeni çizerken yine çember üzerinden ilerleyerek dörtgendeki düşüncesi ile aynı ilişkiyi araştırmıştır. Oluşan beşgenin kenarları arasındaki ilişki için ise “Şimdi biz $[AB]$ ile $[BC]$ arasında ve $[CE]$ ile $[AE]$ arasında bir bağlantı olduğunu biliyoruz zaten.” diyerek geri bağlantı yapmış ve devamında da “Ama biz yeniden $[FE]$ ile $[AF]$ ’nı yorumlayacağız. O yüzden $[AF]$ ’nın karesi artı $[FE]$ ’nin karesi bana $[AE]$ ’nı verecek.” demiş ve buradaki beşgen için de aynı çözümü araştırmıştır. ÖA3’e ait dik beşgen temsili Şekil 4.15’te verilmiştir.



Şekil 4.15. ÖA3’ün Dik Beşgen Temsili

ÖA4 soruya karşılık “Hımm... Dik kenarlarından birini hipotenüs kabul edecek. $[BC]$ hipotenüs olarsa o zaman C köşesi şuraya dik olacak... Şu an çizdim.” şeklinde cevap vermiştir. Oluşan beşgenin kenarları arasındaki ilişki sorulduğunda ise “Şu anda $[AG]$ ’nın karesi artı $[GC]$ ’nin karesi... Hımm. Farklı hipotenüsleri görmüş oluyor. Eşit diyecektim de eşit değiller. Yeni çizdiğim üçgenle bağlantı kuramadım, çünkü yani bu BHC üçgeninin gördüğü hipotenüs $[BC]$ kenarı.” demiş ve düşüncesini “Bu AGC üçgeni ile bir bağlantı kurmaya çalışsam ikisi farklı kenarları görüyorlar, hipotenüsleri farklı, uzunlukları farklı. O yüzden şu an bağlantı kuramadım ikisi arasında.” şeklinde devam ettirmiştir. Burada, ÖA4 iki üçgen arasında bağlantı kurmaya çalışarak kenarlar arasında bir ilişkiye varmaya çalışmıştır. Bu şekilde ilişkiyi görmekte zorlanan ÖA4, kenarları harflendirmeye karar vermiştir. Buna ilişkin görüntü Şekil 4.16’da verilmiştir.



Şekil 4.16. ÖA4'ün Dik Beşgen ile İlgili Açıklamalarının Temsili

Bunun üzerine ÖA4 düşüncelerini:

“Mesela şuraya da bir harf diyeyim... Bu da k olsun. Mesela şu an n kare yerine m kare artı k'nın karesini yazsam... Buradan t-z'ye nasıl geçebilirim? Himm. Bu m kare de n kare eksi k kare. Bunun hepsini şöyle alttan topladığımda m kare artı n kare bu iki köşegen olmuş oluyor, iki köşegenin kareleri toplamı şu dışındaki karelerin toplamına eşit oluyor.”

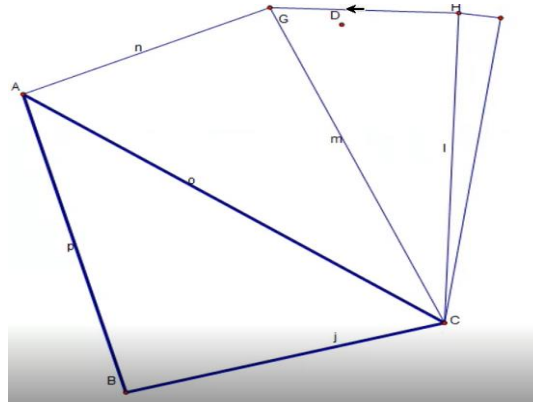
şeklinde ifade ederek beşgenin kenarları ve içteki köşegenleri arasında bağlantı kurmuştur. Bu beşgenin kenarlarından yola çıkarak ne söyleyebileceği sorulduğunda ise sürecin başına dönerek *“En başta kare çizerek yola çıktım. Şu an beşgen var elimde. Hepsi dik üçgenler. Bu hipotenüsleri farklı; ama beşgen arasında bir bağlantı kurmam lazım. t'nin karesi şöyle bir karenin alanına eşit. Burada da bir kare.”* ifadesinde bulunmuştur. ÖA4 daha sonra t'nin ve z'nin etrafında temsili taslak kareler çizerek düşünmüş ve *“Bu karelerin toplamı m'nin karesine eşit. Birisi n'nin karesine eşit olmuş oluyor. İkisi farklı şeylere eşit olmuş oluyor yani.”* diyerek kenarlar arasındaki bağıntıya henüz ulaşamamıştır. En son *“İkisi de farklı ama ortada onları bağlayan bir üçgen var.”* diyerek aralarında bir geçişme olduğunu belirtmiştir. Ekran üzerinde işlemler yaparak *“Yani [AG]'nin karesi artı [GC]'nin karesi eşittir [AB]'nin karesi artı [BH]'in karesi artı [HC]'nin karesi.”* demiş ve burada dörtgen ile aynı çözümü araştırdığı düşünülmüştür.

4.1.1.3. Genişletme

Katılımcılara üçüncü durum olarak düşündüklerinin altıgen veya yediggen için de geçerli olup olmadığı ve bu zamana kadar elde edilen şekillerin özellikleri sorulmuştur. Katılımcılar beşgenden altıgene nasıl geçeceklerini düşünmüşler ve beşgenin hangi kenarı üzerinden devam etmeleri gerektiğini sorgulamışlardır. Katılımcılar *genişletme* ile genelleme yapmışlar ve *uygulanabilirlik alanını*

genişleterek altıgen oluşturmuşlardır. Ayrıca katılımcılardan birisi *ayrıntıları uzaklaştırarak* üçgenleri ve dörtgenleri genellemiştir. ÖA2 haricindeki tüm katılımcılar beşgenden altıgene geçiş yaparken şeklin iç bükey yapma ihtimalinden dolayı hangi kenarları hipotenüs almaları gerektiği konusunda kararsızlık yaşamışlardır. Yine ÖA2 haricindeki tüm katılımcılar altıgen oluştururken şeklin iç bükey olup olamayacağı konusunda tereddüt yaşamışlardır. Bu noktada ÖA1 ve ÖA4 GSP programının özelliği sayesinde şekil üzerinde deneme yaparak tereddütlerini gidermişlerdir. ÖA3 ise kalem kullanarak şekli kendi tamamlamaya çalışmıştır. Tüm katılımcılar oluşan şeklin altıgen olduğu sonucuna varmıştır.

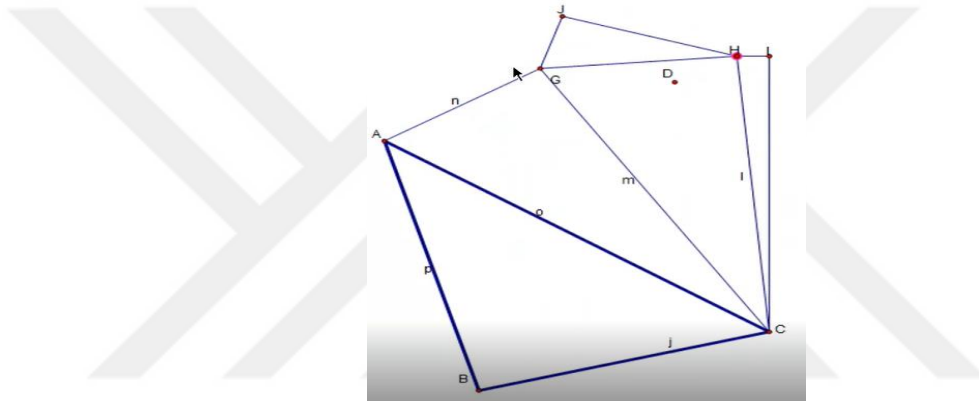
ÖA1 altıgeni çizmeden önce “*Dik üçgenlerden oluşturarak çizdim. O zaman yine bir dik üçgen kullanarak altıgene de tamamlayabiliriz bence.*” ifadesinde bulunmuştur. Bu ifadesinden ÖA1’in *uygulanabilirlik alanını genişletme* yaparak genelleme yaptığı düşünülmüştür. “[GH]’nı alsam bu sefer mesela.” dediğinde nedeni sorulmuş ve “*Bunu (ABC üçgeni) baz alarak bunu (AGC üçgeni) çizdim, şunu (AGC üçgeni) baz alarak bunu (HGC üçgeni) çizdim. Şimdi de bunu (HGC üçgeni) baz alarak bunu çizeyim yani buradan çizeyim dedim.*” şeklinde yanıtlarak bir altıgen çizmiştir (Şekil 4.17). ÖA1’in buradaki ifadesinden dik üçgenleri belirli bir düzene göre inşa etme düşüncesinde olduğu yani genelleme yaptığı anlaşılmaktadır.



Şekil 4.17. ÖA1'in Dik Altıgen 1.Temsili

ÖA1 düşüncesini “*Burayı da ([HG] kenarı) alabilirim aslında şurayı da. ([HC] kenarı)...* Ama üçgeni biraz böyle uzattığımda acaba dış bükey mi olur, iç bükey pardon.” şeklinde sürdürmüştür. ÖA1’in bu ifadesinden oluşacak şeklin iç bükey olma ihtimalinden dolayı hangi uzunluğu hipotenüs olarak seçeceği konusunda kararsız kaldığı görülmüştür. ÖA1’e “*Emin değilsen çiz sen karar ver.*” denilmiş

Bunun üzerine ÖA1’e “*n kaç?*” şeklinde sorulmuş ÖA1 de “*n-gen şu an altıgen oldu. Yukarıda yaptığımda da aynı şey olacak, iç bükey olmayacak dış bükey oluyor her zaman.*” demiş ve düşüncesini yanlış bir şekilde genellemiştir. ÖA1’e “*Her zaman dış bükey mi, [HG]’nı denesen ne olur?*” diye sorulmuş, ÖA1 de “*Bir deneyeyim. Şimdi [GH]’nı alan bir dik üçgen çizeceğim. Şurada bir nokta alayım. Evet oldu. Demek ki iç bükey de olabiliyormuş. O zaman dış bükey için de geçerli iç bükey için de geçerli diyebilirim.*” diyerek fikir değiştirmiştir. ÖA1’e ait ikinci altıgen çizimi Şekil 4.18’de verilmiştir.



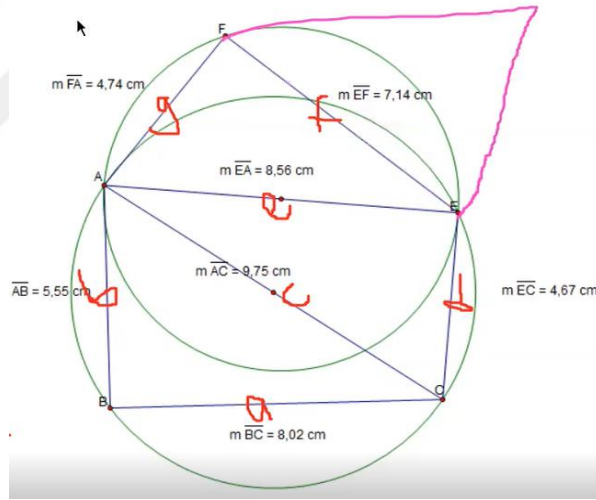
ÖA1'e "Bu şeklin kenarları arasında bir ilişki var mı?" diye sorulduğunda "İsim vereyim şuralara. q 'nın karesi artı r 'nin karesi artı l 'nin karesi artı n 'nin karesi eşittir p 'nin karesi artı j 'nin karesi. Yani şu iki kenarın karesi diğer kenarların kareleri toplamına eşit." demiştir. İfadesini "Yani iki kenarın karesi diğer kenarların karelerinin toplamına eşit olmuş oluyor diye bir genelleme yapabiliriz bence artık. Yedigen de olsa sekizgen de olsa muhtemelen böyle olacak." şeklinde sürdürerek aynı durumun yedigen ve sekizgen için de geçerli olacağı yorumuyla uygulama alanında genişletme yapmıştır. ÖA1 bu durumda herhangi bir çizim yapma gereği duymamıştır.

“Dik üçgende hipotenüsü gören başka bir üçgen çizdim. Daha sonra oluşan üçgenin dik kenarını kullanarak bir çap oluşturdum ve oradaki çember üzerinde bir nokta alarak dik üçgen oluşturdum. Şimdi muhtemelen yani buradan ([AB]

söylemiştir. Ayrıca cebirsel olarak da herhangi bir işlem yapmamıştır. Bu düşüncesinden dolayı ÖA2'nin burada *uygulanabilirlik alanını genişlettiği* düşünülmüştür.

ÖA2'ye bu zamana kadar çizdiği çokgenlerin özellikleri sorulmuş ÖA2 ise “Üçgenler dik üçgen, dörtgenler kirisler dörtgeniydi.” diyerek önceki durumlardaki düşüncelerinin *ayrıntılarını uzaklaştırmıştır*.

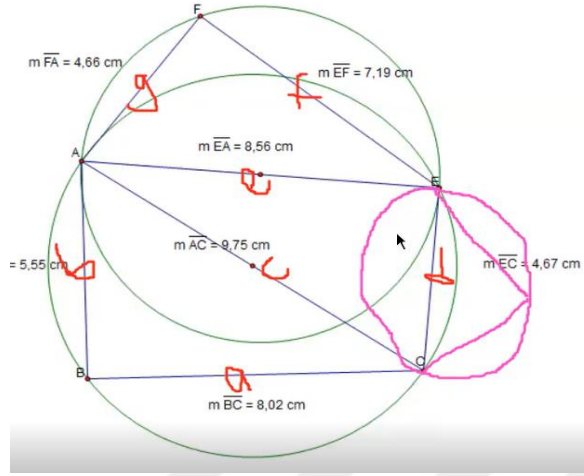
ÖA3 altıgen çizmesi istenildiğinde “Yine bu kenarı ([AF]), yani şu üçgen (AFE üçgeni) üzerindeki herhangi bir kenarı hipotenüs kabul eden bir üçgen çizseydim şuraya... O zaman olur muydu? Bir iki üç dört beş altı. Oluyordu evet. O zaman yine bir üçgeni kenar kabul eden bir şey çizseydim onu da şöyle çizerdim. O zaman altıgen olurdu.” demiştir. Çizim ve işlem yapma ihtiyacı duymadan [AF] ve [FE]'ni hipotenüs kabul ederse şeklin yine bir altıgen olacağını belirtmiştir. Sonra GSP'nin kalem aracı ile dörtgen ve beşgende yaptıklarını altıgende de yaparak *uygulanabilirlik alanını genişletmiştir* (Şekil 4.20).



Şekil 4.20. ÖA3'ün Dik Altıgen 1. Temsili

ÖA3'e “Peki başka bir kenar alabilir miydin?” diye sorulmuş ve ÖA3 “Evet başka bir kenarı da alabilirdim. Zaten az önce yaptığım gibi bir çember çizdikten sonra yani [FE] ya F'yi ben yine hareketli bir nokta olarak seçtiğim için [AF]'nu veya FE'yi seçmişim çok da önemli değil.” şeklinde yanıt vermiştir. Bunun üzerine ÖA3'e “Peki [EC]'ni alabilir misin?” sorusu sorulmuş ve ÖA3 de “Hımm... Olmayabilir, çünkü şey olabilir... o zaman konkav olabilir.” demiştir. “İç bükey çokgen olmuyor mu?” sorusu üzerine ise “İç bükey de altıgen olur düzgün altıgen demediniz sonuçta. Yani acaba şöyle çizseydim yine olur muydu? Evet. İstediğim her

kenardan yapabilirdim bunu şimdi gördüm.” şeklinde düşüncesini belirtmiştir. ÖA3’ün ikinci dik altıgen temsili Şekil 4.21’de verilmiştir.

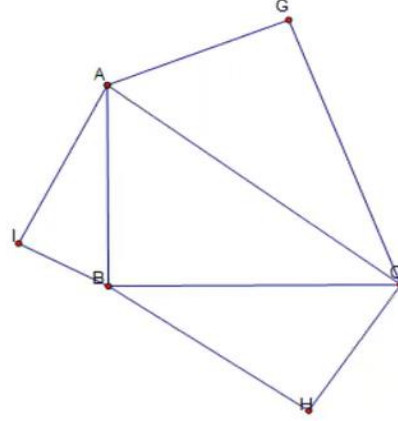


Şekil 4.21. ÖA3’ün Dik Altıgen 2.Temsili

ÖA3 kenarlar arasındaki ilişkiyi yorumlarken “Altıgen için... Şimdi dörtgende yine dikmelerin kenarlarının kareleri birbirine eşit geldi. Beşgende bu sefer dikmelerin kareleri toplamı diğer üç kenara eşit geldi. Şimdi altıgeni çizseydim böyle. O zaman da ne olurdu?... a kare artı b kare bu dört kenarın kareleri toplamına eşit olabilirdi.” şeklinde düşünmüştür. ÖA3 burada genişletme yaparken düşüncelerini önceki durumlarla ilişkilendirmiş ve bunları ifade ederken işlem yapma gereği duymamış ama şekil üzerinde kalemi kullanarak işaretlemeler yapmıştır.

ÖA4 altıgen çizilmesi istenildiğinde “[AB]’ndan çizsem...” şeklinde düşüncesini belirttiğinde [AB]’nı seçme sebebi sorulmuş ve “Çünkü hep ortadaki üçgenden ilerledik. Başta [AC] hipotenüstü oradan bir üçgen oluşturduk. Sonra [BC] hipotenüs olacak şekilde bir üçgen çizdik. Şu an geriye burası kaldı.” diyerek boşta kalan kenar üzerinden devam etmesi gerektiğini düşünmüştür. “[BH]’nı ya da [HC]’nı hipotenüs alsan olur mu mesela?” şeklinde sorulan soruya ÖA4, “Oluyor bence; ama [AB]’nı hipotenüs kabul edersem. O zaman olmuyor.” şeklinde yanıt vermiştir. Neden olmadığı sorulduğunda ise “B’den aşağıya doğru çizdiğimde iç bükey olur diye olmaz dedim... ama yukarı doğru alırsam şöyle tamamladığımda, doğrusal olmadığında altıgen olmuş oluyor.” cevabını vermiştir. ÖA4’e “İç bükey ya da dış bükey olması fark eder mi?” diye sorulduğunda ise “Nasıl bir altıgen aradığımıza bağlı.” demiştir. ÖA4 uygulanabilirlik alanını genişletme sürecinde düşüncelerinden emin olamamıştır. ÖA4, [AB] üzerinden devam ettiğinde ne

olacağını görmek istemiş ve şeklin iç bükey de olabileceğini fark etmiştir. ÖA4'ün dik altıgen temsili Şekil 4.22'de verilmiştir.



Şekil 4.22. ÖA4'ün Dik Altıgen Temsili

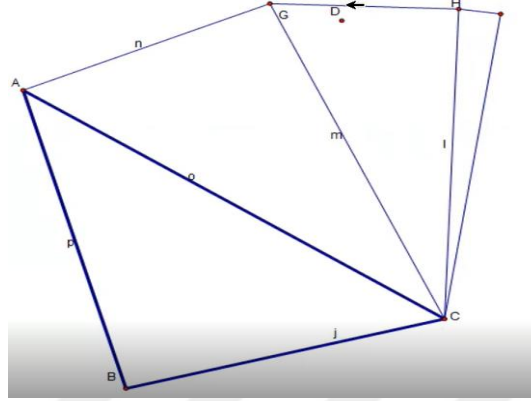
Katılımcılara bu zamana kadar oluşturduğu çokgenlerin açıları ile ilgili neler söyleyebileceği sorulmuş ve ÖA1 “İki tane açısı dik olan bir çokgen.” yanıtını vermiştir. Herhangi iki açısı mı diye sorulduğunda ise “En başta ve en sonda çizdiğim dik sadece. En uzak kenarı mı diyeyim?. En başta çizdiğimiz dikti. Sonra dörtgen çizdiğimde burası dik oldu. Beşgen çizdiğimde en son çizdiğim yine dik oldu.” şeklinde belirtmiştir. ÖA2 ise “Her zaman en az 2 tane 90 derecemiz vardır.” şeklinde yanıtlamış ve ÖA3 de “İki köşesi, üç...? Önce ikiydi sonra üçtü. Ne zaman ikiydi ne zaman üçtü? Üçgende bir tane 90'dı. Dörtgende iki 90, beşgende de iki 90 dı. Altıgende üç 90 oldu.” demiştir. ÖA4 ise “Üçgende bir tane 90 derece vardı. Dörtgende iki tane. Beşgende de 2 tane. Hem dörtgende hem beşgende iki tane 90 derece olması. Şu an orayı genelleyemedim. Altıgende üç tane olmuş oluyor. Yani düzenli bir artış yok 90 derecelerle ilgili.” ifadesinde bulunmuştur. Katılımcılar burada geriye dönüp önceki çizdiği çokgenleri düşünerek zihinsel bir süreç geçirip şekillerin açılarını irdelemişlerdir.

4.1.2. Yansıma Genellemeleri Bulguları

Katılımcılar kendilerine verilen geometri probleminde “Yansıma Genellemeleri” olarak *belirleme veya açıklama* ve *tanımlama* seviyelerinde genellemelere ulaşmışlardır. Aşağıda katılımcılara ait bulgular başlıklar altında belirtilmiştir. Katılımcılardan ÖA1 ve ÖA3 *belirleme veya açıklama* yaparken yalnızca ÖA2 *tanımlama* yapmıştır. ÖA4 ise yansıma genellemesine ulaşamamıştır. *Etki* kategorisine ait bulgu bulunmamaktadır.

4.1.2.1. Belirleme veya Açıklama

Son durumda katılımcılara bu zamana kadar çizdikleri çokgenlerin genel özellikleri sorulmuş ve ÖA1 çizdiği dik altıgen için “*Yani şu iki kenarın karesi ([AB]ve [BC])’nı göstererek) diğer kenarların kareleri toplamına eşit diye bir genelleme yapabiliriz.*” diyerek genel bir prensip elde etmiştir (Şekil 4.23).



Şekil 4.23. ÖA1'in Dik Altıgen 1.Temsili

ÖA2 “[AB] kare artı [BC] kare eşittir yani o sabit kalacak. Şeklin her büyüdüğü gelen kenarın karesini ekleyeceğiz şeklinde olacak.” şeklinde genel bir prensip elde etmiştir.

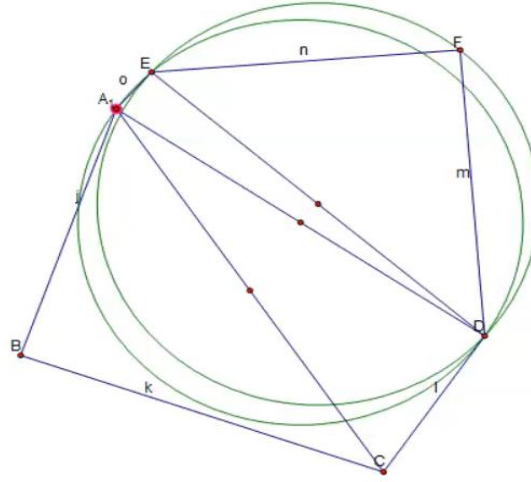
Katılımcılardan ÖA3 “Şimdi genel bir yargıya varmak zor olur ama başta çizdiğimiz üçgenin iki kenarının kareleri diğer bütün kenarların karelerinin toplamına eşit oluyormuş.” diyerek genel bir prensip elde etmiştir.

ÖA4 ise “Hep birbirine ekleyerek eşit olmuş oldular. Yok şu anda genellemedim yani.” şeklinde ifade etmiş ve oluşan çokgenlerin dik üçgenlerin üst üste inşa edilmesiyle oluştuğunu fark etmiş ancak genel bir yargıda bulunmamıştır.

4.1.2.2. Tanımlama

Son durumda katılımcılara çokgenlerin genel özellikleri sorulduktan sonra n kenarlı bir çokgen için nasıl bir bağıntı elde edilebileceği sorulmuş ve bunun üzerine ÖA2 çizmiş olduğu dik altıgen için “ n kenarlı... Kenarlara sanki j atadığımızı düşünelim. $j_1 j_2$ olsun şunlar ([AB]ve [BC])’nı göstererek), diğerleri $j_3 j_4 j_5 j_6...$ diye gitsin. Şunu söyleriz j_1 kare artı j_2 kare yani... uzunluk olarak eşittir n kenarlı olduğunu söyledik... o zaman j_3 ’ten başlayacak j_n ’e kadar karelerini toplayarak gidecek. Yani bağıntı bu olurdu.” ifadesinde bulunmuştur. ÖA2 n kenarlı şekil için

yazılacak bağıntıyı doğru bir şekilde ifade edebildiğinden *objeler sınıfını* oluşturarak *tanımlama* yaptığı düşünülmektedir (Şekil 4.24).



Şekil 4.24. ÖA2'nin Dik Altıgen Temsili

4.2. Öğretmenlerle İlgili Bulgular

Katılımcı öğretmen ile GSP yazılımı ile oluşturulan etkinlikler bağlamında görüşmeler yapılmış ve buna ait bulgular aşağıda başlıklar halinde verilmiştir. Veri analizi aşamasında katılımcı öğretmenlere dair elde edilen kod kategori tablosuna aşağıda yer verilmiştir.

Tablo 4.2. Öğretmenler Kod Kategori Tablosu

KOD	ALT KATEGORİ	KATEGORİ	TEMA
Yani dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesini veriyor. (Ö1)	Durumları	İLİŞKİLENDİRME	
O zaman AC kenarının diğerlerinden daha büyük olduğunu söylerim. (Ö4)	İlişkilendirme		
Üç tane kare çizeriz karenin alanları toplamı AC ile oluşan karenin alanına eşittir. (Ö2)	Nesneleri		
Burada kareler oluşturup orada karenin alanından aslında Pisagor teoremi geliyor da diyebiliriz. (Ö3)	İlişkilendirme		
AC bunların ortak kenarları, ortak hipotenüsü. Yani sonuçta oradaki dik kenarların kareleri toplamı onu verecek evet, onun da dik kenarların kareleri toplamı onu verecek ama eş olmasına da gerek yok yani mantiken. (Ö3)			
Şöyle yaparım B'A ya şöyle bir doğrusal oluştururum burada B'C noktasından geçen bir doğrusal doğru çizerim ikisinin kesiştiği noktayı birleştiririm şurada (AC kenarı üzerinde) bir dik üçgen daha oluşur hipotenüsü aynı. ABC üçgeni ile eş olur. (Ö4)	Aynı İlişkiyi Araştırma		

EC'yi $\varnothing$ ap kabul eden bir $\varnothing$ ember $\varnothing$ izerim.
(Ö4)

ARAşTIRMA

İki farklı üçgen, önceki üçgen ile şu an $\varnothing$ izdiğimiz üçgen için. Dik kenarların kareleri toplamı eşit diyebiliriz sadece.(Ö1)

Aynı Çözüm
veya Sonucu
Araştırma

Aynı şekilde AD ile oluşturulabilecek kare ile DC ile oluşturulabilecek karenin alanları toplamı AB ile BC den oluşturulabilecek karelerin alanları toplamına eşittir diyebiliriz.(Ö2)

GENELLEME EYLEMLERİ

EA'nın karesi artı EB'nin karesi artı BC'nin karesi eşittir CD'nin karesi artı AD'nin karesi.(Ö3)

şimdi bir düşünmem lazım. Ben olsam EC den $\varnothing$ izerdim. Hiç sırayı bozmazdım düz olarak devam ettirirdim, standart.(Ö2)

Uygulanabilirlik
Alanını
Genişletme

GENİşLETME

Biraz önceki ifadeler gibi yani buradaki AC bizim ortak hipotenüsümüz olduğu için EA'nın karesi artı EB'nin karesi artı BF'nin karesi artı FC'nin karesi buradaki bu dört tane kenarın kareleri toplamı

AD'nin karesi ile CD'nin karesine eşittir.(Ö3)

Dörtgenler kirişler dörtgeni olmak zorunda.(Ö4)

Ayrıntıları
Uzaklaştırma

Her dik üçgen bir çokgen... O zaman şey diyebiliriz. O zaman çokgenin kenar sayısının iki eksiğı kadar dik üçgen oluşturabiliyoruz bu olabilir. (Ö2)

İşlemlerle
Genişletme

Bizim oluşturduğlarımız değıl sabit olan 90 dereceye ait dik kenarların karesi. O ikisinin karesi diğerk kenarların kareleri toplamına eşit. (Ö1)

REFLEKSİYON GENELLEMELERİ

AB'nin karesi artı BC'nin karesi bundan sonra oluşturacağım bütün kenarların kareleri toplamına eşittir mantığıyla söyleyebilirim. Kaç tane oluşturursam oluşturayım.(Ö2)

Genel Prensipler

TANIMLAMA

Yani AC'nin iki tarafı olacağı için AC'nin bir tarafındaki kenarların kareleri toplamı öbür tarafındaki kenarların kareleri toplamına eşit olacak. (Ö4)

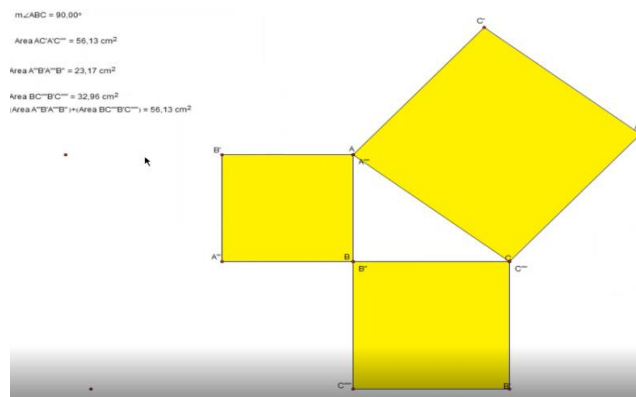
4.2.1. Genelleme Eylemleri Bulguları

Katılımcılar kendilerine verilen geometri probleminde “Genelleme Eylemleri” olarak *ilişkilendirme, araştırma ve genişletme* eylemlerinde bulunmuşlardır. Aşağıda katılımcılara ait bulgular başlıklar altında belirtilmiştir.

4.2.1.1. İlişkilendirme

İlk durumda katılımcılara dik üçgen verilmiş ve bu dik üçgenin kenarları arasında nasıl bir ilişki olduğu sorusu yöneltilmiştir. Katılımcı öğretmenler dik üçgende Pisagor bağıntısından dolayı dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamının hipotenüs uzunluğunun karesine eşit olması gerektiğini belirtmişlerdir. Şeklin geometrik yorumu sorulduğunda ise Ö1 ve Ö4 katılımcıları üçgenin her bir kenarı üzerinden kareler oluşturmuştur. Sonra dik kenarlar üzerinden oluşturdukları karelerin alanları toplamının hipotenüs üzerinden oluşan karenin alanına eşit olacağını belirtmişler ve Pisagor teoremini GSP programı aracılığı ile teyit etmişlerdir. Ö2 ve Ö3 katılımcıları ise çizim ve ölçüm yapma ihtiyacı hissetmemişlerdir. Tüm katılımcılar genelleme eylemlerinin *ilişkilendirme* kategorisinde bulunan *durumları ve nesneleri ilişkilendirmişlerdir*.

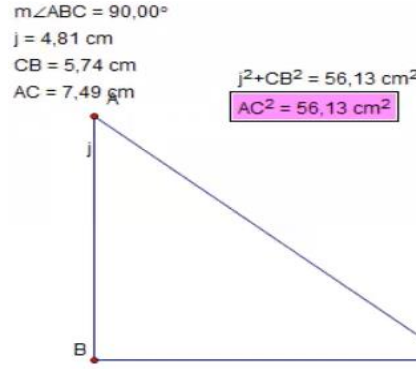
Katılımcılardan Ö1 ve Ö4 şeklin kenarları arasındaki ilişkiyi bulabilmek için kenar uzunluklarını ölçüp teoremi uygulamışlardır. Buna ilişkin Ö4’ün temsili Şekil 4.25’te verilmiştir. Bu aşamada katılımcıların *durumları ilişkilendirerek* genelleme yaptığı söylenebilir.



Şekil 4.25. Ö4’ün Pisagor Bağıntısının İspatı ile İlgili Temsili

Ö1, dik üçgen için “*Yani dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesini veriyor.*” şeklinde ifadede bulunmuştur. Üçgenin üç kenar uzunluğunu ölçmüş ve teoremin bağıntısını teyit etmiştir. Üçgenin dik kenarları ile hipotenüsü arasındaki bağıntıyı kurabildiğinden durumları ilişkilendirmiştir. Ayrıca bu şeklin geometrik

yorumuna dair “Yani dediğimiz gibi $[BC]$ kenarına sahip bir kare oluşturduk. Aynı şekilde $[AC]$ kenarına sahip de bir kare oluştururduk. Onların alanları toplamı hipotenüsün uzunluğundaki bir karenin alanını vermiş olacaktı toplamı.” diyerek obje olarak alınan karesel bölgelerin alanlarını ilişkilendirmiştir. Ö1’e ait temsil Şekil 4.26’da verilmiştir.



Şekil 4.26. Ö1'in Pisagor Bağlantısı Temsili

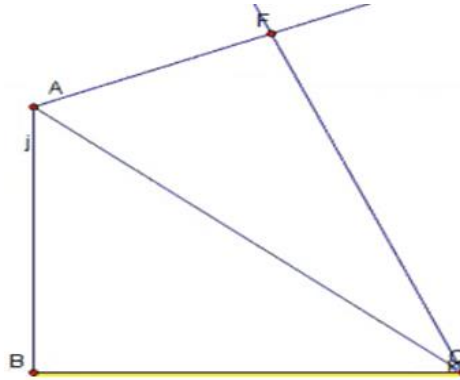
Ö4 dik üçgen için düşüncesini “O zaman $[AC]$ kenarının diğerlerinden daha büyük olduğunu söylerim. $[AB]$ ’nin karesi artı $[BC]$ ’nin karesinin $[AC]$ ’nin karesine eşit olduğunu söylerim.” şeklinde ifade etmiş ve bu ifadesinden durumları ilişkilendirdiği düşünülmektedir. Bununla birlikte Ö2 ve Ö3 de dik üçgene dair benzer ifadelerde bulunarak durumları ve objeleri ilişkilendirmişlerdir.

4.2.1.2. Araştırma

İkinci durumda katılımcılardan verilen dik üçgenin hipotenüsünü yine hipotenüs kabul eden başka bir dik üçgen daha çizmeleri istenmiş ve oluşan şeklin kenarları arasındaki ilişki sorulmuştur. Katılımcılar bu çizimlerden elde edilecek şeklin dörtgen olacağı yorumunu yapmışlardır. Ö3 ve Ö4 önce verilen üçgene eş üçgen çizmeleri gerektiğini düşünürken, Ö2 çember aracılığı ikinci bir dik üçgen çizebileceğini belirtmiştir. Bununla birlikte hem Ö1 hem Ö2, üçgenin köşelerinden doğrular çizip bu doğruların aralarındaki açığı 90° olacak şekilde ayarlayarak ikinci dik üçgeni çizmişlerdir. Katılımcılar burada ilk durum ile aynı ilişkiyi araştırma ile aynı çözüm veya sonucu araştırma süreci yaşamışlardır. Ö1, dörtgenin kenarları arasında olan ilişkiyi GSP programında ölçüm yaparak görmek istemiştir.

Ö1 “Şöyle yapabilirim... A ’dan bir doğru çizerim, C ’den bir doğru çizerim. O iki doğrunun aralarındaki açı dik olacak şekilde ayarlarım.” ifadesinde bulunarak A noktasından doğru çizmeye başlamıştır. Devamında “ C noktasından ışına doğru bir

dikme indireceğim. Şimdi C 'yi seçeyim o zaman. ACF dik üçgeni olmuş oldu.” diyerek şekli tamamlamıştır. Ö1’e ait dörtgen temsili Şekil 4.27’de verilmiştir.



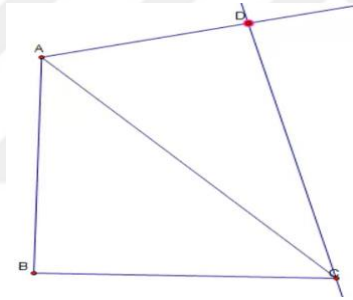
Şekil 4.27. Ö1’in dik dörtgen temsili

Ö1’e oluşan şekil sorulduğunda “Normal bir çokgen var... deltoit de olabilirdi ama eşit değil kenarları. Özel bir çokgen göremiyorum. Dik yamuk da değil. Şimdi duruma göre değişir. F ’nin nerede olduğuna göre değişir tabii ki ama şu anki duruma göre bir şey değil gibi duruyor şu an.” yorumunda bulunmuştur. Ö1, $ABCF$ dörtgeninin kenarları arasındaki ilişki ile ilgili “İki farklı üçgen, önceki üçgen ile şu an çizdiğimiz üçgen için... Dik kenarların kareleri toplamı eşit diyebiliriz sadece.” diyerek ilk durumda verilen üçgene geri bağlantı yapmış ve üçgenle aynı çözüm veya sonucu araştırmaya çalışmıştır. Ö1, bu düşüncelerini GSP ile ölçüm yaparak teyit etmiştir. Ö1 dörtgen ile ilgili “Şöyle diyebiliriz... karşılıklı iki köşesindeki açılar 90 dereceseyse eğer, birbirine karşılıklı bakan dik kenarlar diye tarif edeyim, kareleri toplamı yine eşittir. Bunun özel hali, hani dikdörtgen olur, kare olur ama burada mesela kenarları farklı farklı uzunluklarda...” ifadesinde bulunmuştur. Katılımcı burada çizdiği dörtgenin özel bir dörtgen olduğunu belirtmiştir. Çizdiği bu dörtgenin geometrik yorumu sorulduğunda ise “Aslında oluşturduğumuz karelerin alanları toplamı hipotenüsün alanını veriyor ama dörtgen olarak düşünürsek her bir kenar ile alakalı bir kare oluştursak...” demiş ve hipotenüsten yola çıktığında dik üçgen ile aynı ilişkiyi araştırdığı düşünülmüştür. Ö1 yorumunu “Şey diyebiliriz... dediğim gibi $[AF]$ ve $[FC]$ ile oluşturduğumuz karelerin alanları toplamı $[AB]$ ve $[BC]$ ile oluşturduğumuz karelerin alanları toplamına eşittir.” şeklinde devam ettirmiş ve dik üçgendeki Pisagor bağıntısı ile aynı çözümü araştırmıştır. Buna ilişkin ölçümleri Şekil 4.28’de verilmiştir.

$$\begin{aligned}
j^2 + CB^2 &= 56,13 \text{ cm}^2 \\
AC^2 &= 56,13 \text{ cm}^2 \\
\text{Area BCED} &= 32,96 \text{ cm}^2 \\
CB^2 &= 32,96 \text{ cm}^2 \\
AF &= 3,44 \text{ cm} \\
FC &= 6,65 \text{ cm} \\
AF^2 + FC^2 &= 56,13 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

Şekil 4.28. Ö1'in Dik Dörtgen ile İlgili Ölçümleri

Ö2 soruya karşılık “Sonsuz tane çizebilirim. Çünkü çapı gören açı 90 derecedir, yani çember üzerinde olduğundan dolayı sonsuz tane çizebilirim ve bunlar bir çember oluşturur, köşeler yani.” diyerek hipotenüsü aynı olan sonsuz sayıda üçgen çizebileceğini ifade etmiştir. Ö2, çemberle ilgili yorumda bulunmuş olsa da bu aşamada çember üzerinden hareket etmemiş ve üçgenin köşelerinden doğrular çizerek ikinci dik üçgeni elde etmiştir. Ö2'nin dik dörtgen temsili Şekil 4.29'da verilmiştir.



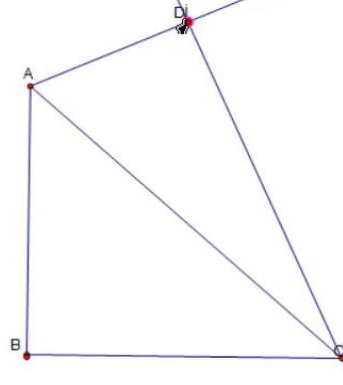
Şekil 4.29. Ö2'nin Dik Dörtgen Temsili

Ö2, dörtgenin kenarları arasındaki ilişki ile ilgili “Şimdi burada iki açının da 90 derece olduğunu düşünürsek ikisi de $[AC]$ 'nin karesini verecek. O yüzden $[AD]$ 'nin karesi artı $[DC]$ 'nin karesi eşittir $[AB]$ 'nin karesi artı $[BC]$ 'nin karesi diyebiliriz.” şeklinde yorum yaparak üçgenle aynı çözümü araştırmıştır. Şeklin geometrik yorumu için ise “Aynı şekilde $[AD]$ ile oluşturulabilecek kare ile $[DC]$ ile oluşturulabilecek karenin alanları toplamı $[AB]$ ile $[BC]$ 'nden oluşturulabilecek karelerin alanları toplamına eşittir diyebiliriz.” şeklindeki ifadesi ile köşegeni kullanarak dik üçgende Pisagor bağıntısı ile aynı çözümü araştırmaya çalışmıştır. Ö2 ölçüm yapma gereği duymamıştır.

Ö3 soru ile ilgili düşüncelerini “Buradan aslında bir kare oluşturabilirim. $[AC]$ 'ni köşegen gibi düşünebilirim.” şeklinde belirtmiş ve sonra bu ifadesini “ $[AC]$ uzunluğu bir karenin köşegeni olacak şekilde bu C'den yukarıya, yani aslında

bu B 'nin hipotenüse göre simetrisini alırım. Sonra A ile bunu birleştiririm. Burada bir dik üçgen daha oluşturup kareyi oluşturmuş olurum. Yani kare derken şöyle tabi ki, bunu ikizkenar üçgen olarak kabul edersek kare olur.” şeklinde açıklamıştır. Katılımcı burada durumu özelleştirmiştir. Daha sonra kendisi de bunu fark edip “Biraz özelleştirmiş oldum ben bunu. Bunu bir ikizkenar üçgen olarak düşündüm. Ona göre dedim $[AC]$ oradan bir kare oluşturayım dedim ama tabi ki bu kare olmak zorunda değil.” şeklinde belirtmiştir. Ö3, verilen üçgenin hipotenüsüne göre bir simetri oluşturursa da dikdörtgen oluşacağını söylemiştir. Ö3 yine burada da özelleştirme yapmıştır. Bunun üzerine kendisine “Peki hipotenüsü aynı olan bir dik üçgen çizdiğinde bunların eş olması mı gerekir?” sorusu sorulmuş ve Ö3 ise “Hımm... Yok eş olmasına gerek yok. Bir bakayım...” şeklinde belirtmiştir. Katılımcı bu aşamada biraz duraksayıp düşünmüş ve “Yani C 'den, nasıl desem... Buradaki bu A 'dan geçen ve C 'den geçen kısmı hani böyle 90 derece olacak şekilde de birleştirebilirim. Örnek veriyorum BCA açısı α ise hani burada bir açıortaylık olacak şekilde ben bunu uzatsam... çünkü açıortaylardan indirilen dikmelerde birbirine eşit ya hani bir dikme gelecek şekilde oluşturabilirim.” diyerek daha önceden öğrendiği bir kural ile geri bağlantı yapmaya çalışmıştır. Burada yine Ö3'ün verilen üçgene eş bir üçgen çizme eğiliminde olduğu görülmektedir. Ö3 şekil üzerinde denemeler yapmış ve biraz zaman geçtikten sonra “[AC] bunların ortak kenarları, ortak hipotenüsü. Yani sonuçta oradaki dik kenarların kareleri toplamı onu verecek evet, onun da dik kenarların kareleri toplamı onu verecek ama eş olmasına da gerek yok yani mantıken.” ifadesinde bulunmuştur. Bu ifadesinde Ö3 ortak hipotenüsten yola çıkarak ilk durumdaki üçgenle aynı ilişkiyi araştırmıştır.

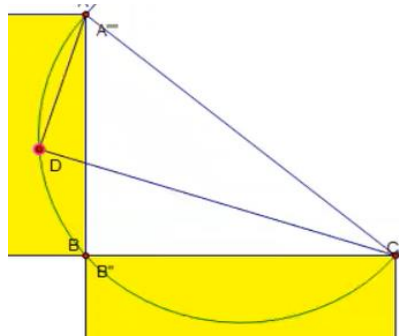
Katılımcı “Örnek veriyorum 6-8-10 üçgeni gibi düşünürsem hipotenüs 10, mesela birisi kök 90 birisi kök 10 olsa, sonuçta gene aynı hipotenüsü verecek. Bir tane olmasına gerek yok tabi ki. Sonsuz tane oluşturulur diye düşünüyorum.” şeklinde örnek üzerinden düşününce, çizilecek üçgenin eş olmak zorunda olmadığına ve sınırsız sayıda çizilebileceğine karar vermiş olup düşüncesini genellemiştir. Program üzerinde şekli sürüklerken, şeklin değişen durumlarını görmüş ve düşüncesinin doğruluğundan emin olmuştur. Ö3'e ait dik dörtgen temsili Şekil 4.30'da verilmiştir.



Şekil 4.30. Ö3'ün Dik Dörtgen Temsili

Ö3, çizdiği dörtgenin kenarları arasındaki ilişki için “*Diyecektim ki karşılıklı kenarların kareleri toplamı birbirine eşittir ama köşegenlerin dik kesişmesi lazım.*” yorumunda bulunmuştur. Bu düşüncesini açması istenildiğinde Ö3'ün eski bilgileri ile *geri bağlantı* yaptığı görülmüştür. GSP yardımıyla köşegenlerin dik kesişip kesişmediğine bakmış ve düşüncesinin yanlış olduğunu farketmiştir. Ö3 bunun devamında “*Yani kenarları ile ilgili dik kenarların kareleri toplamı ortadaki şeye eşit olduğu için, hani bunlar arasında bir benzerlik de var mıdır diye bakıyorum...*” şeklinde düşüncesini açıklamış ve dik üçgen ile *aynı ilişkiyi araştırdığı* düşünülmüştür. Ayrıca Ö3, “*Pisagor bağıntısından dolayı $[AB]$ 'nın karesi artı $[BC]$ 'nin karesi $[AC]$ 'nin karesine eşit. $[AD]$ 'nin karesi artı $[DC]$ 'nin karesi gene bunun karesi.*” diyerek üçgendeki durumla *aynı çözümü araştırmıştır*.

Ö4 ise “*Şöyle yaparım: B' 'den A' 'ya şöyle bir doğrusal oluştururum, burada C noktasından geçen bir doğrusal doğru çizerim ikisinin kesiştiği noktayı birleştiririm... şurada ($[AC]$ kenarı üzerinde) bir dik üçgen daha oluşur hipotenüsü aynı. ABC üçgeni ile eş olur.*” demiş ve bu ifadesinden ilk durumdaki üçgenle *aynı ilişkiyi araştırdığı* düşünülmüştür. Ö4 sonrasında çember kullanarak da şeklin çizilebileceğini belirtmiş ve üçgeni farklı bir biçimde çizmiştir (Şekil 4.31).



Şekil 4.31. Ö4'ün Dik Dörtgen 1. Temsili

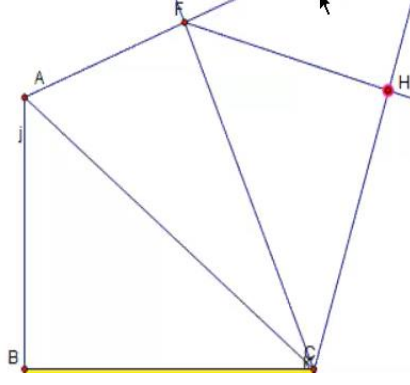
Şekil 4.32. Ö4'ün Dik Dörtgen 2.Temsili

Ö4, dörtgenin kenarları arasındaki ilişki için “[AE]’nin karesinin toplamı [AB]’nin karesi ile [BC]’nin karesinin Hipotenüsleri aynı olan dik üçgenler olur.” demiş ve dik üçgen araştırmıştır. Ö4 dörtgenin geometrik yorumu için “Burada da Burada da oluşturduğumuz karelerin alanları toplamı ([AE] ve



Daha sonra, katılımcılardan elde edilen dörtgenin dik kenarlarından birini hipotenüs kabul eden başka bir dik üçgen daha çizmeleri istenmiş ve oluşan şeklin özellikleri ile kenarları arasındaki ilişki sorulmuştur. Katılımcılar dik üçgeni nereden çizmeleri gerektiğini sorgulamışlar ve GSP üzerinde denemeler yapmışlardır. Katılımcılar bu çizimlerden elde edilecek şeklin beşgen olacağı yorumunu yapmışlardır. Katılımcılar *aynı ilişkiyi araştırma* ile *aynı çözüm veya sonucu araştırma* süreci yaşamışlardır.

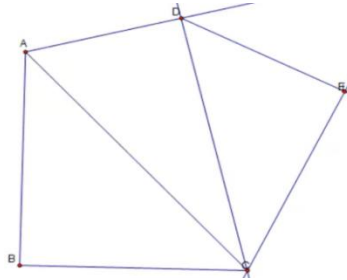
59



Şekil 4.33. Ö1'in Dik Beşgen Temsili

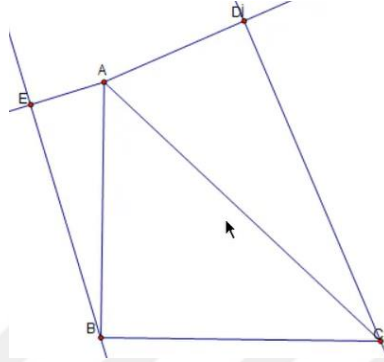
Ö1 çizdiği beşgenle ilgili düşünürken “Üçgenlerin dik kenarlarının kareleri toplamına eşit demiştim. Burada şu an $[FH]$ ile $[HC]$ ’nin karesi $[FC]$ ’nin karesine eşit. Yani aslında o ikisinin karesi $[FC]$ ’nin karesine eşit. Sonra $[FC]$ ’nin karesi ile $[AF]$ ’nin karesini toplayınca $[AC]$ ’nin karesine eşit oluyor. O şekilde gidiyor ama genel olarak beşgenle ilgili... Şu an bir şey fark edemedim.” ifadesinde bulunmuş ve önceki çizdiği üçgen ve dörtgene dönüş yaparak geri bağlantı yapmıştır. Ö1, en son beşgenle ilgili “Beşgene göre $[AB]$ ve $[BC]$ ’nin karesinin toplamı $[AF]$, $[FH]$ ve $[HC]$ ’nin ayrı ayrı karelerinin toplamına eşit olur diyebiliriz.” demiş ve önceki durumla aynı çözüm veya sonucu belirlemeye çalışarak araştırma yapmıştır.

Ö2 oluşan şeklin bir beşgen olduğunu söyleyip beşgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişki için “O zaman yine aynı mantıkla bakarsak, $[CE]$ ’nin karesi artı $[DE]$ ’nin karesi artı $[AD]$ ’nin karesi eşittir $[AB]$ ’nin karesi artı $[BC]$ ’nin karesine.” demiş ve buradaki beşgen için de dörtgendeki düşüncesi ile aynı çözümü araştırmıştır. Bu ifadesini ise “Aynen ya da oluşturulabilecek karelerin alanları toplamı yine $[AB]$ ile $[BC]$ ile oluşturulabilecek karelerin alanları toplamına eşittir.” şeklinde açıklamıştır. Ö2’ye ait beşgen temsili Şekil 4.34’de verilmiştir.



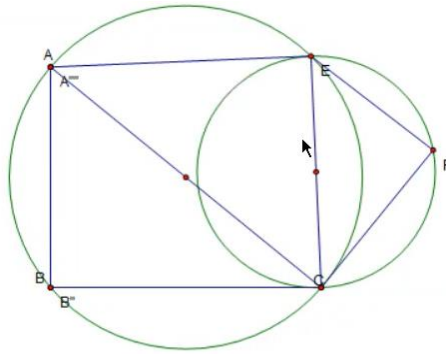
Şekil 4.34. Ö2'nin Dik Beşgen Temsili

Ö3, “Mesela $[AB]$ ’nı gene aynı şekilde bir ışın uzatsam... Tamam. $[AB]$ ’yi hipotenüs kabul eden bir tane dik üçgen oluşturdum. Buna isim vereyim.” şeklinde belirtmiş ve yeni bir dik üçgen çizmiştir. İşte gene “ $[EA]$ ’nın karesi artı $[EB]$ ’nin karesi artı $[BC]$ ’nin karesi eşittir $[CD]$ ’nin karesi artı $[AD]$ ’nin karesi.” ifadesinde bulunarak dörtgenle aynı çözüm veya sonucu belirlemeye çalışmış ve araştırma yapmıştır. Ö3’e ait beşgen görseli Şekil 4.35’te verilmiştir.



Şekil 4.35. Ö3’ün Dik Beşgen Temsili

Ö4, soru ile ilgili “ $[EC]$ ’nı çap kabul eden bir çember çizerim.” demiş ve oluşan şeklin bir beşgen olduğunu söylemiştir. Ö4 burada yeni dik üçgeni çizerken yine çemberi araç olarak kullanmış ve dörtgendeki düşüncesi ile aynı ilişkiyi araştırmıştır. Ayrıca beşgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişki ile ilgili “ $[CF]$ ’nin karesi $[EF]$ ’nin karesi $[AE]$ ’nin karesinin toplamı $[AB]$ ’nin karesi artı $[BC]$ ’nin karesine eşittir.” demiş ve dörtgenle aynı çözüm veya sonucu belirlemeye çalışarak araştırma yapmıştır. Ö4’e ait beşgen temsili Şekil 4.36’da verilmiştir.



Şekil 4.36. Ö4’ün Dik Beşgen Temsili

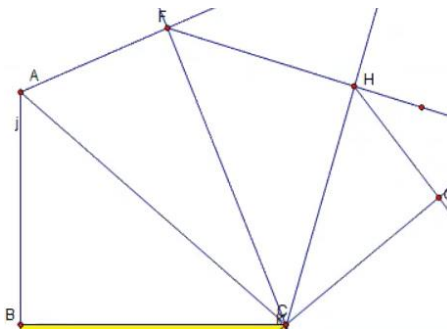
Ö4’e “Hipotenüs olarak başka bir kenarı da alabilir miydin peki?” şeklinde sorulmuş ve dört kenardan herhangi birini seçebileceğini, bunun fark etmeyeceğini belirtmiştir. “Çünkü burada alsam $[AE]$ üzerinde) yine ben $[AE]$ ’nı buluyorum

ikisinin karelerini toplayınca. Burada da $[EF]$ ile $[FC]$ 'nın karelerini topladığımda $[EC]$ 'nı buluyorum.” ifadesinde bulunmuştur. Bu durumu açıklarken “Yani biz aslında ilk başta yaptığımız işi yapıyoruz ama biraz daha parçalı yapmış oluyoruz ama bir şey değişmiyor bence.” şeklinde açıklamıştır. Ö4, burada oluşacak beşgenler arasında bir farklılık olmayacağını söylemiştir.

4.2.1.3. Genişletme

Üçüncü durumda katılımcılara düşündüklerinin altıgen veya yedigen için de geçerli olup olmadığı ve bu zamana kadar elde ettikleri şekillerin özelliklerinin neler olduğu sorulmuştur. Katılımcılar burada beşgenden altıgene nasıl geçeceklerini düşünmüşler ve beşgenin hangi kenarı üzerinden devam etmeleri gerektiğini sorgulamışlardır. Katılımcılar *genişletme* ile genelleme yapmışlar, *uygulanabilirlik alanını genişleterek* altıgen oluşturmuşlar. Ayrıca Ö2 katılımcısı *işlemle genişletme* yaparken Ö4 katılımcısı *ayrıntıları uzaklaştırarak* dörtgenleri genellemiştir. Katılımcılar beşgenden altıgene geçiş yaparken GSP programının özelliği sayesinde şeklin iç bükey de olabileceğini fark etmişlerdir. Tüm katılımcılar oluşan şeklin altıgen olduğu sonucuna varmıştır.

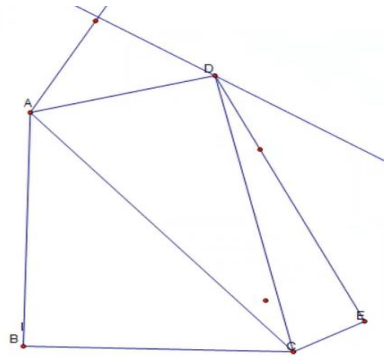
Ö1 altıgeni çizmeden önce, “Yine bir dik üçgen oluşturacak şekilde değil mi?” demiş ve “Yine aynı şekilde çizerdim. H noktasından bir doğru parçası çekip C ’den bir dikme indirirdik. Bu şekilde orada bir dik üçgen oluşturmuş olurduk kendi içinde.” şeklinde belirtmiştir. Bu ifadelerden Ö1’in burada bir ilişkiyi daha geniş bir duruma uyguladığından *uygulanabilirlik alanını genişletme* yaparak genelleme yaptığı düşünülmüştür. Ö1 dik üçgeni nereden çizmiş olduğunun fark etmediğini söylese de “Dik üçgeni yine H ’den çizerim, hani özelliği bozmamak adına. Sanki oradan çizsem daha iyi olur gibi.” demiştir. Ö1’e ait altıgen görseli Şekil 4.37’de verilmiştir.



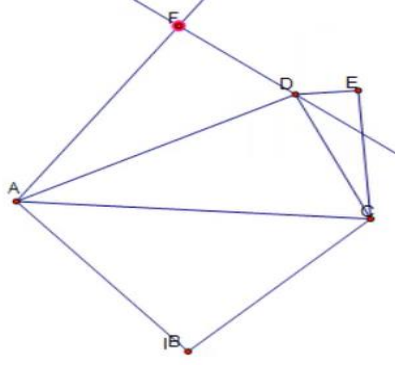
Şekil 4.37. Ö1'in Dik Altıgen Temsili

Ö1 oluşan şekil için “Küçülerek gidiyor yani. Üçgenlerimizin uzunlukları da küçülmüş oluyor tabi bu şekilde. Fraktala benzedi biraz.” yorumunda bulunmuştur. Ö1 şekli çizdikten sonra başka kenarlar üzerinden ilerleyemeyeceğini düşünmüştür. Daha sonra süreç içerisinde tekrar fikrini değiştirmiştir. Ö1 bu düşüncesini “Diyelim ki $[AF]$ ’ndan oluşturduk. O zaman da şöyle olmuş olacaktı. Diyelim orda ATF üçgeni var. $[AT]$ ve $[TF]$ ’nin kareleri toplamı artı $[FH]$ ile $[HC]$ ’nin kareleri toplamı yine $[AC]$ ’nı vermiş olacaktı. Yine orada da $[AC]$ ’na gelmiş oluyorduk aslında.” şeklinde ifade etmiştir.

Ö2 altıgen çizmesi istenildiğinde “Şimdi bir düşünmem lazım. Ben olsam $[EC]$ ’ndan çizerdim. Hiç sırayı bozmazdım düz olarak devam ettirirdim, standart.” ifadesinde bulunmuştur. Bu ifadesinden Ö2’nin uygulanabilirlik alanını genişletme yaparak genelleme yaptığı düşünülmüştür. Ö2 burada çizim yapmaya gerek duymamıştır. Düşüncesini “ $[EC]$ ’nı kullanarak bir 90 derece daha çizsem sanırım bir altıgen olur. Peki diğerlerini kullansam olur mu? $[AD]$ ’nı kullansam mesela? O da olur niye olmasın. Hepsinden oluyor gibi ya sadece biri değil de.” şeklinde sürdürmüştür. Bu ifadesinden Ö2’nin fikrini tüm durumlar için genellediği anlaşılmaktadır. $[AD]$ kenarını seçse de değişen bir şey olmayacağını belirmiş, aynı zamanda bunu çizerek göstermek istemiştir. Ö2 bunu denerken şekli sürüklediğinde altıgenin hem konveks hem de konkav olarak değişebileceğini fark etmiştir. Ö2’ye ait konveks altıgen temsili Şekil 4.38’de, konkav altıgen temsili ise Şekil 4.39’da verilmiştir.



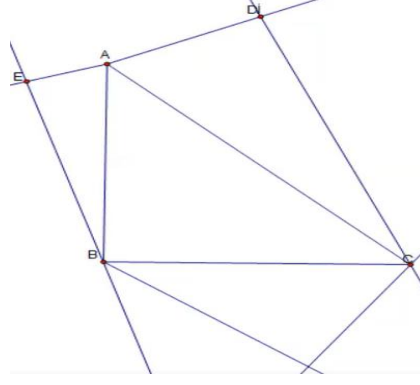
Şekil 4.38. Ö2’nin Konveks Dik Altıgen Temsili



Şekil 4.39. Ö2'nin Konkav Dik Altıgen Temsili

Ö2 çizdiği altıgenin konveks ya da konkav olmasının durumu değiştirmeyeceğini söylediği özelliğin her durumda sağlanacağını “*Yine aynı mantık geçerli mi bakalım. Tamam, aynı mantık geçerli. Değişen bir şey yok. $[AB]$ ’nin karesi artı $[BC]$ ’nin karesi diğer 4 kenarın kareleri toplamına eşittir.*” ifadesinde belirtmiştir. Ö2 ifadesinin devamında “*Her dik üçgen bir çokgen... O zaman şey diyebiliriz. O zaman çokgenin kenar sayısının iki eksiği kadar dik üçgen oluşturabiliyoruz, bu olabilir.*” demiştir. Bu ifadesinde bir ilişki üzerinde işlem yaparak yeni örnekler elde ettiğinden Ö2’nin işlem ile genişletme yaptığı düşünülmektedir. Ö2 bu duruma “*Mesela altıgen yaptık dört tane üçgen oldu. Nereden çizdiğim çok önemli değil sonuçta üçgen sayısı dört.*” şeklinde örnek vermiştir. Ayrıca Ö2, “*Üçgenin iç açıları toplamı da 180 olduğuna göre $n-2$ çarpı 180 formülünün buradan geldiğini ispatlayabiliriz.*” demiş ve eski bilgisi ile geri bağlantı yapmıştır.

Ö3 çizdiği altıgenle ilgili “*Biraz önceki ifadeler gibi yani buradaki AC bizim ortak hipotenüsümüz olduğu için $[EA]$ ’nin karesi artı $[EB]$ ’nin karesi artı $[BF]$ ’nin karesi artı $[FC]$ ’nin karesi, buradaki bu dört tane kenarın kareleri toplamı $[AD]$ ’nin karesi ile $[CD]$ ’nin karesine eşittir.*” ifadesinde bulunmuştur. Bu ifadesinden Ö3’ün uygulama alanını genişletme yaparak genelleme yaptığı düşünülmektedir. Ö3’ye ait altıgen temsili Şekil 4.40’da verilmiştir. Ö3, ifadesinin devamında şeklin diğer kenarının da hipotenüs olarak alınabileceğini ve iç bükey dış bükey olmasının altıgeni etkilemediğini söylemiştir.



Şekil 4.40. Ö3'ün Dik Altıgen Temsili

Ö4 altıgeni çizmeden önce “Yine aynı şekilde devam ediyor. Mesela $[EF]$ ’ni hipotenüs kabul edecek şekilde çizsem, burada oluşan dik kenarların kareleri toplamı artı buradaki dik kenarların kareleri toplamı yine öbür taraftaki dik kenarların kareleri toplamına eşit.” diyerek herhangi bir çizim yapmadan şeklin altıgen olacağını belirtmiştir. Ö4’ün bu ifadesinden uygulanabilirlik alanında genişletme yaptığı görülmektedir. Ö4 ifadesinin devamında hipotenüs olarak aldığı kenarın fark etmeyeceğini, konveks ve konkavlığın özelliği etkilemediğini söylemiştir. Ö4’e çizilen çokgenlerin özellikleri sorulduğunda ise “Dörtgenler kırışler dörtgeni olmak zorunda.” diyerek önceki durumlardaki düşüncelerinin ayrıntılarını uzaklaştırmıştır.

Katılımcılara bu zamana kadar oluşturduğu çokgenlerin açıları ile ilgili neler söyleyebileceği sorulmuş, Ö1, beşgen ve altıgen için “İki tane açısı 90 derece ama dediğimiz gibi ardışık olmayan 2 açısı 90 derece.” yanıtını vermiştir. Ö2 de “Çizilen kenara göre değişir sanırım ama en az iki tane olmalı.” şeklinde yanıtlamıştır. Ö3 ise “Üçgende bir açı dik. Dörtgende iki açı dik. Beşgende iki açı dik. Altıgende üç tane.” demiş ve açılarla ilgili genel bir yargıya varamamıştır. Ö4, “Dörtgende iki tane var. Beşgende yine iki tane olur. Yani dörtgen iki tane beşgende her türlü iki tane oluyor. Altıgende $[AE]$ ’ni kabul eden çizersem üç tane oluyor $[EF]$ ’ni kabul eden çizersem iki tane oluyor veya $[AB]$ ’ni kabul eden çizersem iki tane oluyor. En az iki açısı 90 derecedir.” şeklinde ifade etmiştir. Katılımcılar burada önceki durumlara dönüş yaparak geri bağlantıda bulunmuşlardır.

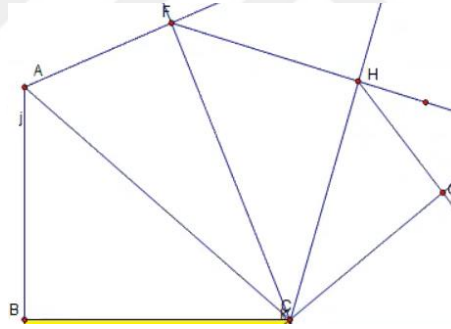
4.2.2. Yansıma Genellemeleri Bulguları

Katılımcılar kendilerine verilen geometri probleminde “Yansıma Genellemeleri” olarak belirleme veya açıklama seviyesinde genellemelere ulaşmışlardır. Aşağıda katılımcılara ait bulgular başlıklar altında belirtilmiştir.

Katılımcılardan tamamı *belirleme veya açıklama* seviyesine ulaşmıştır. Ayrıca Ö1 ve Ö2 bazı ifadelerinde belirleme veya açıklamadan daha fazlasını söylemiş olmakla birlikte tanımlama seviyesine doğru ilerledikleri düşünülmüştür. *Etki* kategorisine ait bulgu bulunmamaktadır.

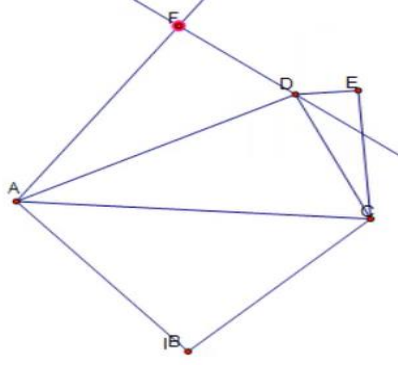
4.2.2.1. Belirleme veya Açıklama

Son durumda katılımcılara bu zamana kadar çizdikleri çokgenlerin genel özellikleri ne olduğu sorulmuş ve Ö1 çizdiği dik altıgen üzerinden yorum yaparak *“Hani biz hep dikler çizerek gittik ya, dik üçgenler çizerek... O değil diğeri... Yani ilk ve sabit olan diyebiliriz aslında. Bizim oluşturduğlarımız değil sabit olan 90 dereceye ait dik kenarların karesi. O ikisinin karesi ([AB] ve [BC]) diğer kenarların kareleri toplamına eşit.”* diyerek genel bir prensip elde etmeye çalışmıştır (Şekil 4.41). Ayrıca Ö1’in *“n tane kenarı olduğunu varsayarsak n-2 tane kenarların ayrı ayrı o kenarların kareleri toplamı kalan diğer iki tane kenarın kareleri toplamına eşit olmuş olur.”* şeklindeki ifadesinden *tanımlama* seviyesine doğru ilerlediği düşünülmektedir.



Şekil 4.41. Ö1'in Dik Altıgen Temsili

Ö2 oluşturmuş olduğu dik altıgen üzerinden yorum yaparak *“[AB]’nın karesi artı [BC]’nin karesi bundan sonra oluşturacağım bütün kenarların kareleri toplamına eşittir mantığıyla söyleyebilirim. Kaç tane oluşturursam oluşturayım.”* diyerek genel bir prensip elde etmiş, *belirleme veya açıklama* yapmıştır. Ayrıca Ö2’nin *“[AB]’nın karesi artı [BC]’nin karesi bundan sonra oluşturacağım n kenarlı ise n-2 tane kenarın kareleri toplamına eşit olacak.”* şeklindeki ifadesinden *tanımlama* seviyesine doğru ilerlediği düşünülmektedir (Şekil 4.42).



Şekil 4.42. Ö2'nin Konkav Dik Altıgen Temsili

Ö3'e bu zamana kadar çizdiği çokgenlerin özelliği sorulduğunda “Pisagor teoremini kullanarak aslında bir sürü çokgen oluşturabiliriz. Zaten üçgen kendi başına bir çokgendir onun dışında ondan yeniden yararlanarak dörtgeni, yeniden yararlanarak beşgeni hatta devam etsek gene bir dik üçgen oluştursak oradan altıgen olur gibi böyle arttırarak devam ettirebiliriz.” demiştir. Bu ifadesinden Ö3'ün farkında olmadan Pisagor teoreminin genellemesini yaptığı düşünülmüştür.

Ö4 ise “Yani $[AC]$ 'nin iki tarafı olacağı için $[AC]$ 'nin bir tarafındaki kenarların kareleri toplamı öbür tarafındaki kenarların kareleri toplamına eşit olacak.” diyerek genel bir prensip elde etmiştir.

5. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde bulgulara dayalı olarak ortaya çıkan sonuçlar araştırma problemi ve ilgili literatür ile karşılaştırılarak verilmiştir. Daha sonra ise çalışmanın sonuçları ve önerilere yer verilmiştir.

5.1. Tartışma ve Sonuç

Eğitimin amaçlarından biri de öğrencilere genelleme yapma becerisi kazandırmaktır. Öğrencilerin matematiksel ilişkiler hakkında genellemeler yapması onlarca yıldır matematik eğitiminin önemli bir hedefi olmuştur (Yao, 2018). Bu noktada, öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının genellemenin öneminin farkında olmaları ve öğrencilerine genellemeler yaptırabilecekleri etkinlikler uygulamaları onların matematiksel düşüncelerinin gelişimine katkı sağlayacaktır (Mason ve Johnston-Wilder, 2004).

Bilgisayar tabanlı etkinliklerin üst düzey düşünme becerilerini teşvik ettiği ve öğrencileri öğrenmeye motive etmede olumlu bir etkisinin olduğu söylenebilir (Hartono, 2020). Özellikle dinamik yazılımların genelleme yapma becerisini desteklediği yönünde çalışmalar mevcuttur.

Bu araştırma matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının genelleme süreçlerini GSP destekli ortamda incelemeyi amaçlamaktadır. Bu amaçla çalışmada katılımcıların genelleme sürecini ortaya çıkarabileceği düşünülen bir geometri problemi kullanılmıştır.

İlk aşamada dik üçgende kenarlar arasındaki ilişkinin geometrik yorumunu belirtmede ÖA4 zorluk yaşamıştır. Üçgenin kenarları üzerinde önce üçgenler sonra dik üçgenler oluşturmuştur. GSP programı üzerinde düşündüklerini deneyip ölçümler yapmıştır. Fikrinin yanlış olduğunu görünce en son üçgenin kenarları üzerinde kare oluşturma kararı almıştır. Bu durum Hanna (2000) ile Güven ve Karataş'ın (2003) da DGY'nin bireylerin varsayımlarda bulunmayı ve bu varsayımlarını test etmelerini sağladığı ve Christou vd.'nin (2004) DGY ile şeklin değişikçe ilişkilerin de değiştiği dolayısıyla bunun da keşfetmeyi sağladığı sonucunu desteklemektedir.

ÖA1 ve ÖA4 dik üçgenin kenarları arasındaki ilişkiyi bulmak için kenar uzunluklarını ölçüp düşündükleri bağıntıyı denemek istemişlerdir. Ayrıca ÖA1 şekli büyültüp küçülterek Pisagor bağıntısının diğer durumlarda da sağlandığını

göstermiştir. Öğretmen adayı diğer katılımcılar ise buna gerek duymamıştır. Öğretmen adayı katılımcılar GSP ile dik üçgenin boyutlarını değiştirirken Pisagor bağıntısının her zaman sağlandığını göstermişlerdir. Vatansever'in (2007) de belirttiği gibi geometrik yapılarıdaki değişmeyen özellikler ve ilişkiler DGY'lerin hareket ettirme, sürükle-bırak özelliği ile kolaylıkla ortaya çıkarılmıştır. Burada GSP'nin sürükleme özelliğinin ilişkileri fark etmeyi sağladığı düşünülmektedir.

ÖA1 ve ÖA4 araştırma aşamasında oluşan şeklin yalnızca dikkörtgen olabileceğini düşünmüş, durumu özellemişlerdir. ÖA1 ilerleyen süreçte sayısal örnekler üzerinden düşünüp Pisagor bağıntısının farklı değerlerle de sağlanacağını fark etmiş ve şekil üzerinde sürüklemeler yapınca oluşturduğu dörtgenin tek türlü olamayacağını keşfederek düşüncesini değiştirmiştir. Benzer şekilde Yılmaz'ın (2011) araştırmasında GSP aracılığı ile şeklin hareket ettirilmesi ile değişimini incelemek katılımcıların süreçteki düşüncelerinin desteklenmesini ve böylece sürece kendinden emin bir şekilde devam etmelerini sağlamıştır. ÖA3 de benzer şekilde oluşturduğu dörtgeni sürüklerken bu durumun çok sayıda başka dörtgenler için de sağlanacağını belirtmiştir.

Öğretmen adayı katılımcılar dik beşgeni çizmiş ve kenarları arasındaki bağıntıya ulaşmışlardır. ÖA4 çizdiği beşgende kenarlar arasındaki ilişkiyi görmekte zorlanınca harflendirme yaparak bağıntıyı söylemiştir. ÖA4 burada çizim yaptıktan sonra düşüncelerini cebirsel işlemlerle de desteklemiştir. Benzer durumda ÖA1, ÖA3 ve ÖA4 de beşgenden altıgene geçerken şekli iç bükey yapma ihtimalinden dolayı hangi kenarı hipotenüs almaları gerektiği konusunda kararsızlık yaşamışlardır. Şeklin iç bükey de olabileceğini düşünseler bile GSP ortamında dik beşgeni oluşturduktan sonra düşüncelerinin desteklendiğini görmüşlerdir. Benzer şekilde Yılmaz'ın (2011) matematik öğretmen adaylarının genelleme sürecinde görselleştirmenin önemini incelediği çalışmasında katılımcılar başta önceki aşamaya dayalı sezgisel olarak tahminlerde bulunsalar da GSP kullandıktan sonra düşüncelerinin doğruluğunu fark etmişlerdir. Katılımcılar burada şekli sürüklerken de iç bükey çokgenler için aynı açıklamayı yapabileceklerini fark etmişlerdir. Bu aşamada bu zamana kadar çizdikleri dik üçgen, dik dörtgen, dik beşgen ve dik altıgen şekilleri arasındaki benzerlik ilişkisinin farkına varmış ve bu ilişkiyi daha genel bir yapı olarak ifade etmişler, yani *genişletme* yapmışlardır. Bu sonuç Presmeg vd. (2007) ve Yao

(2018)'nın GSP'nin katılımcıların ilişkileri keşfetmelerini sağladığını bu sayede çok çeşitli genellemeler oluşturulabileceğini belirttikleri sonucunu desteklemektedir.

Süreç içerisinde özellikle şekiller karmaşılaşmaya başlayıp, zihinde tasavvur edilmesi zor hale geldiğinde ve benzer çözümlerin araştırılması sırasında GSP'nin sürece katkı sağladığı görülmüştür. ÖA2 ve ÖA3 genişletme aşamasında çizim ve işlem yapmadan şeklin altıgen olacağını belirtmişlerdir. ÖA1 de herhangi bir çizim yapmadan yine yedigen ve sekizgen için de aynı durumun geçerli olacağını söylemiştir. Bu durum Demircioğlu ve Tuncay'ın (2020) genelleme sürecini bir geometri problemi bağlamında incelediği araştırmasında katılımcıların dört veya beş durum sonrasında genelleme yapma eğiliminde oldukları ve bunu artık doğrulama ihtiyacı hissetmedikleri sonucuna benzer şekildedir. ÖA4 ise şeklin ne olacağını görmek istemiş ve iç bükey de olabileceğini fark etmiştir. ÖA1 ve ÖA4'ün süreçleri daha uzun sürerken ÖA2 ve ÖA3 daha kısa sürede yansıma genellemesine ulaşmışlardır. ÖA4 ise yansıma genellemesine ulaşamamıştır.

Öğretmen katılımcılardan Ö1 ve Ö4, dik üçgenin kenarları arasındaki ilişkiyi bulmak için kenar uzunluklarını ölçüp Pisagor bağıntısını uygulamış ve üçgenin her bir kenarında kareler oluşturmuşlardır. Şekli sürükleyerek dik kenarların üzerindeki karelerin alanları toplamının hipotenüs üzerinde oluşan karenin alanına farklı durumlarda da eşit olacağını göstermişlerdir. Burada Ö1 ve Ö4 obje olarak alınan karesel bölgelerin alanlarını ilişkilendirmişlerdir. Bu durum Christou vd.'nin (2004) üç ilkökul öğretmeni adayının geometri problemlerini keşfederken dinamik yazılımlardan GSP'nin işlevlerini belirlemeyi amaçlayan çalışmasında; GSP ile şeklin değiştikçe ilişkilerin de değiştiği dolayısıyla bunun da keşfetmeyi sağladığı sonucu ile benzerlik taşımaktadır.

Öğretmen katılımcılardan Ö3 ve Ö4, araştırma aşamasında verilen dik üçgene eş üçgen çizimleri gerektiğini düşünmüşlerdir. Ö3 sonra sayısal örnekler üzerinden düşünürken bunu sağlayan tek bir örnek olmadığını, şekli farklı biçimlerde de oluşturabileceğini görmüştür. GSP üzerinde çokgeni sürüklerken dik dörtgenin değişken şekillerde de olabildiğini görmüş, düşüncesinden emin olmuştur. Benzer şekilde Vanicek (2011) matematik öğretmen adayları ile yaptığı çalışmasında dinamik yazılımın nesnelerin şeklini ve konumunu değiştirirken, değişmeyen özellikler hakkında varsayımda bulunmayı ve bu sayede genelleme yapmayı sağladığını belirtmiştir. Velo (2011) de lise matematik öğretmen adayları ile yaptığı

çalışmada DGY'nin düzenli kullanımın öğrencilerin genelleme becerilerini geliştirdiği bilgisine ulaşmıştır. Ö2 çember aracılığı ile çizdiği dik dörtgen için çapı gören çevre açısı doksan derece olduğu için üçgende dikliğin her durumda sağlanacağını dolayısıyla sonsuz sayıda dörtgen oluşturabileceğini belirtmiştir. Burada Ö2 GSP aracılığıyla çeşitli şekillerde dörtgenler oluşturabileceğini keşfetmiştir.

Dik beşgenden dik altıgene geçerken öğretmen katılımcılar şekli çizerek görmek istemiş ve altıgen oluşturmuşlardır. Ö2 burada çizdiği altıgeni sürüklerken şeklin dış bükey ve iç bükey olabileceğini farketmiş ve genellemeyi ilgili her durumda yapabileceğini düşünmüştür. Bu sonucun GSP kullanımının etkisini gösterdiği söylenebilir ve Mariotti (2002)'nin araştırmasında DGY kullanımının öğrencilerin şekilleri yorumlamasını ve genelleme yapabilmesini sağladığı sonucunu desteklemektedir.

Öğretmen katılımcı Ö2 süreç içerisinde çizdiği çokgenlerin iç bölgesinde kenar sayısının iki eksiği kadar üçgen bulunduğunu fark etmiştir. Çokgenlerin genelleme yapmaya elverişli bir yapısı olduğu bilinmektedir. Bu sonuç Demircioğlu ve Tuncay'ın (2020) çalışmasında genelleme yapabilmek için seçilen problemin önemli olduğu bilgisini vurgulamaktadır.

Bu çalışmada açık uçlu bir geometri problemi kullanılması verilen durumu keşfetmeyi ve varsayımlarda bulunmayı sağlamış ve genellemeye fazlasıyla hizmet etmiştir. Ayrıca yapılan bu çalışmada kullanılan geometrik problemin kenar ve açı gibi özellikleri aracılığı ile katılımcılara genelleme yapma fırsatı sağladığı düşünülmektedir. Bu sonuçların Christou vd. (2004)'nin açık uçlu geometri problemlerini dinamik yazılım aracılığı ile keşfedilebileceği fikri ve Dokur'un (2013) açık uçlu geometri problemlerin geometrik düşünme, akıl yürütme ve genelleme yapma gibi becerileri geliştirme fırsatı yarattığı düşüncesini desteklemektedir.

Araştırmada GSP programının kullanılması; sürükleme özelliği sayesinde nesnenin konumunun ve şeklinin değiştirilmesini mümkün kılmış, böylece geometrik şeklin davranışını gözlemlemeyi sağlamıştır. Bu durumun kavramlar arasındaki ilişkinin daha rahat fark edilmesine ve genellemeye ulaşılmasına yardımcı olduğu düşünülmüştür. Nitekim Vanicek (2011) ve Dokur (2013) nesneleri sürükleyerek üzerinde yapılan denemeler aracılığıyla DGY'nin genellemeye ulaşmaya olumlu

etkisinin olacağından bahsetmiştir. Benzer şekilde Presmeg vd. (2007) ve Yao (2018) de GSP'nin katılımcıların ilişkileri keşfetmelerini sağladığını bu sayede çok çeşitli genellemeler oluşturulabileceğini belirtmiştir.

Araştırmada kullanılan geometri problemi üzerinde kağıt-kalem ile düşünmek ile DGY kullanarak düşünmek arasında fark vardır. Problemi dinamik ortamda çözmek uzun zaman alsa da geometrik şekillerde kenarlar arasındaki ilişkinin görülmesinde katılımcılara avantaj sağlamıştır. Katılımcıların dik üçgenden dik dörtgene, dik dörtgenden dik beşgene ve dik beşgenden dik altıgene geçtiği aşamalarda özellikle dik üçgeni geometrik şeklin hangi kenarı üzerinde inşa etmeleri gerektiği sorusu katılımcılar için uzun düşünme süreçleri gerektirmiştir. Bu durum araştırmacı açısından genelleme sürecinin gözlemlenmesine olanak tanımıştır. Geometrik şekli herhangi bir noktasından sürükleyerek farklı durumlar da oluşabileceğinin farkına varmanın problemin genellenmesine katkı sağladığı düşünülmektedir. Dinamik yazılım kullanmadan geometrik şekiller üzerinde genellemeler yaparken yetersiz genelleme ve aşırı genelleme gibi bazı istenmeyen hedeflere ulaşılabilir (Presmeg vd., 2007). Çünkü kişinin varsayımlarını görselleştirerek başka durumlarda gerçekleşme ihtimalini test etme imkanı olmaz ve bu durumda da kişi bir temele dayandırmadan fikirler oluşturabilir. Bu açıdan DGY kullanmanın esneklik sağlayarak genelleme yapmaya yardımcı olduğu yorumunda bulunulabilir. Bu durum dinamik yazılımın genelleme yapmaya olumlu yönde etkisinin olduğunu gösteren çalışmaları (Örneğin; Velo, 2001; Presmeg vd, 2007; Yılmaz, 2011; Vanicek, 2011; Yao, 2018) destekler niteliktedir.

Genelleme sürecinde GSP kullanımının genel olarak katılımcıların matematiksel düşünme becerilerine, akıl yürütmelerine ve dolayısıyla genelleme süreçlerine katkı sağladığı düşünülmektedir. Presmeg vd. (2007) de yapmış olduğu çalışmada GSP kullanımının akıl yürütme süreçlerini desteklediğini belirtmiştir. Bu durumun görülmesinde seçilen problemin de önemli olduğu düşünülebilir. Araştırmada kullanılan problemin geometri alanında seçilmesi genelleme yapma fırsatı yarattığından katılımcı öğretmen ve öğretmen adaylarının genelleme süreçlerinin daha rahat gözlemlenebileceği düşünülmektedir. Bu durum ise Dokur (2013), Tolga ve Cantürk Günhan (2020) ve Demircioğlu ve Tuncay (2020) tarafından yapılan çalışmalar ile benzerlik taşımaktadır.

Bu araştırmada Ellis'in (2007) taksonomisi kullanılarak katılımcıların genelleme sürecine odaklanılmıştır. Bu taksonomi katılımcıların zihinsel süreçlerini ve genelleme eylemine nasıl katıldıkları belirlenmeye olanak tanımıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre genel olarak GSP ortamı esnek bir düşünme ortamı sağlamış ve etkili bir araç olarak genelleme sürecine katkıda bulunmuştur. Özellikle katılımcılar süreç içerisinde düşüncelerinin doğru olup olmadığını kontrol ederken GSP'nin sürüklenme özelliğinden yararlanmışlardır. Sürüklenme özelliği katılımcılara varsayımlarını test etme ve elde ettikleri sonuçları genelleme imkanı vermiştir. Bu nedenle GSP ortamının genelleme sürecine etkin bir şekilde destek sağladığı söylenebilir.

Araştırmanın sonucunda öğretmen adayları *genelleme eylemlerine ilişkilendirme, araştırma ve genişletme* yaparak ulaşmışlardır. Devamında da bu katılımcılardan biri hariç tamamı *belirleme veya açıklama, tanımlama* ile yansıma *genellemelerine* ulaşmışlardır. Öğretmen adayı katılımcılardan ÖA1 ve ÖA3 *belirleme veya açıklama* yaparken ÖA2 *tanımlama* yapmıştır. ÖA4 ise *belirleme veya açıklama* seviyesine ulaşamamıştır.

Öğretmen katılımcılar *ilişkilendirme, araştırma ve genişletme* yaparak *genelleme eylemlerini* gerçekleştirmişlerdir. Devamında da bu katılımcıların tamamı *belirleme veya açıklama* ile yansıma *genellemelerine* ulaşmışlardır. Ellis'in (2007) taksonomisine göre kategoriler birbirinden net çizgilerle ayrılmazlar. Bu yüzden Ö1 ve Ö2'nin bazı ifadelerinde belirleme veya açıklamadan daha fazlasını söylemiş olmakla birlikte tanımlama seviyesine doğru ilerledikleri düşünülmüştür. Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının genelleme süreçleri incelendiğinde genelleme taksonomisine eklenecek farklı kategoriler bulunamamıştır.

Kullanılan geometri problemi süreç içerisinde adım adım sorularla birlikte katılımcıların geometrik şekilleri inşa etmesiyle uygulanmıştır. Bu noktada GSP destekli ortam problemi görselleştirerek geometrik yapının gözlemlenmesini sağlamıştır. Ayrıca geometrik problemin genellemeye elverişli yapısı katılımcıların geometrik şekiller arasındaki ilişkileri fark etmesini sağlamıştır.

GSP'nin sürüklenme özelliği nesneyi hareket ettirirken katılımcılara keşfetme imkanı vermiş ve süreç ilerledikçe yöneltilen sorularla katılımcıların düşünsel süreçleri daha detaylı bir şekilde gözlemlenmiştir. Bu bağlamda yine GSP ortamında kullanılan geometrik problem de katılımcıların farklı çözüm yolları düşünmelerini

sağlayıp keşfetmeye olanak tanıdığından genelleme sürecini ortaya koyduğu ve bu sürece olumlu etki ettiği düşünülmektedir.

Araştırmanın sonucunda katılımcıların genel olarak genelleme süreçlerinde üst basamakları gerçekleştirdikleri belirlenmiştir. Bu araştırma öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının genelleme süreçlerini karşılaştırma amacı taşımamakla birlikte öğretmenlerin genellemeye daha hızlı ulaştığı görülmüştür. Bu sonuçtan mesleki deneyimin genelleme yapma becerisi üzerinde olumlu etkisinin olduğu çıkarımında bulunulabilir.

Öğretmen adaylarının genelleme sürecine bakıldığında not ortalaması nispeten düşük, geometri ders başarısı olarak ortaüstü olduğu düşünülen öğretmen adayı ÖA2 genelleme eylemlerinin tümünü gerçekleştirirken, yansıma genellemelerinin belirleme veya açıklama ve tanımlama aşamalarını gerçekleştirmiştir. Not ortalaması yüksek, ders başarısı ortaüstü olan ÖA1; not ortalaması nispeten düşük, ders başarısı orta olan ÖA3 ile iyi olan ÖA4 katılımcıları ise yine genelleme eylemlerinin tümünü gerçekleştirirken, yansıma genellemelerinden belirleme veya açıklama aşamalarını gerçekleştirmişlerdir. Yine ÖA4 katılımcısı genelleme eylemlerinin tümünü gerçekleştirirken, yansıma genellemelerine ulaşamamıştır. Sonuçlardan elde edilen bilgiler ışığında katılımcı öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının geometrik probleme çözüm getirebildikleri, genelleme sürecinde aktif rol oynadıkları söylenebilir.

5.2. Öneriler

Matematik eğitiminin amaçlarından biri olan genelleme yapma becerisini öğrencilere kazandırabilmek için genelleme süreçlerinin düzgün yapılması gerekir. Bunun gerçekleşmesinde matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının etkisinin büyük olacağı düşünülmektedir. Matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının DGY destekli ortamlarda matematiksel düşünmelerini geliştirebilmeleri sağlanmalıdır. Böylece öğretmenler, öğrencilerin matematiksel düşünmelerini yapılandırmalarına imkan sağlayacak ortamlar hazırlayabilecek ve bu ortamlarda öğrenciler ilişkilendirmeler, genellemeler ve akıl yürütmelerle düşünmelerini geliştirebileceklerdir. Öğretmenler ve öğretmen adayları ile yapılan genelleme çalışmaları arttırılmalıdır. Bu araştırmanın sonuçlarına göre bundan sonra yapılabilecek çalışmalarda araştırmacılara şu öneriler yapılabilir:

1. Süreci daha derinlemesine incelemek açısından yapılacak olan diğer çalışmalarda farklı özellikte ve sayıda geometrik problemlere başvurulabilir.
2. Farklı dinamik yazılımlarla matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının genelleme süreçleri incelenebilir ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılabilir.
3. Ellis'in (2007) taksonomisi kullanılarak yapılan genelleme çalışmaları arttırılabilir ve sonuçlar karşılaştırılabilir.
4. Farklı deneyim süresine sahip matematik öğretmenleri ile benzer bir çalışma yapıp mesleki deneyimin genelleme sürecindeki etkisi incelenebilir.
5. Matematiksel düşünme sürecinde önem arz eden ve matematik yapmanın temel yöntemlerinden biri olan genelleme sürecine GSP'nin etkisi ortadadır. GSP aracılığıyla yapılacak olan genelleme çalışmaları arttırılabilir.

KAYNAKÇA

- Akkan, Y., Öztürk M., & Akkan P. (2017) İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Örüntüleri Genelleme Süreçleri: Stratejiler ve Gerekçelendirmeler. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 3, 513-550.
- Alsina, C. & Nelsen, R.B. (2011). *Icons of Mathematics: An Exploration of Twenty Key Images*, Mathematical Association of America.
- Amit, M. & Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education*, 40, 111-129.
- Aydın, E. (2005). The use of computers in mathematics education: A paradigm shift from “computer assisted instruction” towards “student programming”. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 4(2), 27-34.
- Baki, A. (2001). Bilişim Teknolojisi Işığı Altında Matematik Eğitiminin Değerlendirilmesi, *Milli Eğitim Dergisi*, 149(1), 26-31.
- Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders’ figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sa’iz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 95–101). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Biber, A., & Argün, Z. (2012). Matematik öğretmen adaylarında iki değişkenli fonksiyonların limiti kavramının yapılandırılmasının incelenmesi. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8(2), 56-66.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2(3), 339-352.
- Chua, B. L. & Hoyle, C. (2010). Teacher and student choices of generalising strategies: A tale of two views? *Proceedings of the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education*, 2, 24- 31. Tokyo, Japan: EARCOME.
- Creswell, J. W. (2013). *Nitel araştırma yöntemleri: Beş yaklaşıma göre nitel araştırma ve araştırma deseni* (M. Bütün ve S. B. Demir (çev.)), Ankara: Siyasal Yayın Dağıtım.
- Davidov, V. V. (1990). *Types of generalisation in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula* (Soviet studies in mathematics education, Vol. 2; J. Kilpatrick, Ed., J. Teller, Trans.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. (Original work published 1972)
- De Villiers, M. (2009). *Some adventures in Euclidean geometry*. Univ. of Durban Westville, Durban (Rep. of South Africa).
- Demircioğlu, H. & Tuncay, A. (2020). Genelleme Sürecinin Çember ve Noktalar Problemi Bağlamında İncelenmesi. *IBAD Sosyal Bilimler Dergisi*, 8, 244- 258.
- Dokur, N. (2013). *Somut materyal ve geometer’s sketchpad destekli eğitimlerin matematik öğretmenliği öğrencilerinin başarılarına ve çözümlerini açıklamalarına etkilerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Gaziantep Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Gaziantep.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Duke, R. & Pollard, J. (2004). Case studies in integrating the interactive whiteboard into secondary school mathematics classroom. In W.C. Yang, S.C. Chu, T. de Alwis, &

- K.C. Ang (Eds.), *Proceedings of the 9th Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 169–177). NIE, Singapore: ATCM Inc.
- Ellis, A. B. (2004). Relationships between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear functions. *Dissertation Abstracts International*, 65(6), 2127A. (UMI No: 3137248).
- Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of The Learning Sciences*, 16(2), 221-262.
- Erdener, K. & Gür, H. (2019). Ortaokul matematik derslerinde dinamik geometri yazılımı Geometer's Sketchpad kullanımı ile ilgili öğrenci görüşleri. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 21(1), 364-377.
- Erkuş, Y. (2014). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının bilgisayar destekli eğitim yapmaya yönelik görüşlerinin belirlenmesi ve Geometer's Sketchpad yazılımını öğrenme süreçlerinin değerlendirilmesi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Erzincan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzincan.
- Erlandson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L., & Allen, S. D. (1993). *Doing naturalistic inquiry: A guide to methods*. London: Sage.
- Garcia-Cruz, J. A., & Martinon, A. (1998). *Levels of generalizations in linear patterns*. Paper presented at the Proceeding of the 22 nd Sonference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (2), (pp. 329- 336). University of Stellenbosch, South Africa.
- Girit, D., & Akyüz, D. (2016). Farklı Sınıf Seviyelerindeki Ortaokul Öğrencilerinde Cebirsel Düşünme: Örüntülerde Genelleme Hakkındaki Algıları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10(2), 243-272.
- Goldenberg, E. P., & Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 351–368). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Gökçe, R. & Yeşildere-İmre, S. (2017). Cebirsel genelleme yapmayı destekleyen etkinliklerin 7. sınıf öğrencilerinin genelleme yapma becerilerini şekillendirmedeki rolü. *Gaziantep University Journal of Social Sciences*, 16(1), 194-215.
- Güven, B. & Karataş, S. (2003). Dinamik geometri yazılımı cabri ile geometri öğrenme: Öğrenci görüşleri. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 2(2), 67-78.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 5–23.
- Hanson, S. O. (2020). Technology and mathematics. *Philosophy & Technology*, 33, 117-139.
- Harel, G., & Tall, D. O. (1991). The general, the abstract and the generic in advanced mathematics. *For The Learning of Mathematics*, 11(1), 38-42.
- Hartono, S. (2020). Effectiveness of Geometer's Sketchpad Learning in Quadrilaterals. *Mathematics Teaching-Research Journal*, 12(3), 84-93.
- Hashemia, N., Abua, M. S., Kashefia, H., & Rahimib, K. (2013) Generalization in the Learning of Mathematics. En M. B. Ali (President). *Second International Seminar on Quality and Affordable Education (ISQAE)*. Universiti Teknologi Malaysia, Johor Bahru, Malaysia. Recuperado.
- Hoyos, V. & Capponi, B. (2000). Increasing the comprehension of function notion from variability and dependence experienced within Cabri-II. *Proceedings of Workshop 6: Learning Algebra with the Computer, a Transdisciplinary Workshop-ITS2000*. Montreal (Canada): UQAM.

- Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.
- Karaz, (2021). *Ortaokul Öğrencilerinin Bağımsız ve Yarı Bağımsız Genelleme Görevlerindeki Örüntü Oluşturma Süreçleri*, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Kirk, J. & Miller, M. L. (1986). *Reliability and validity in qualitative research*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 151-161.
- Lee, C. & Lee, S. Y. (2015). The process of pattern generalization and the pattern generalization strategies of the early 7th grade students in Korea. *Far East Journal of Mathematical Education*, 14(2), 137-159.
- Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Mariotti, M. A. (2002). Influences of technologies' advances on students' mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 695-723). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, and L. Lee, (Eds.). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. 65-86. Dordrecht/Boston/London: Kluwer.
- Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. London: Routledge Falmer.
- Mitchelmore, M. (2002). *The role of abstraction and generalisation in the development of mathematical knowledge*. Paper presented at the Proceeding of The East Asia Regional Conference on Mathematics Education (2 nd) and The Southeast Asian Conference on Mathematics Education (9 th, Singapore, May, pp.27-31).
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics: E-standards version 1.0*. Reston.
- Oflaz, G. (2017). *Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Genelleme Süreçlerine İlişkin Düşünme ve Anlama Yollarının Belirlenmesi: Dnr Tabanlı Bir Öğretim Deneyi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Öçal, M. F., & Şimşek, M. (2016). Matematik öğretmen adaylarının geometer's sketchpad ile problem çözme süreçleri: Ayna problemi. *Bartın Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 5(2), 577-597.
- Özel, Z. (2019) *Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının Öğrencilerin Cebirsel Düşüncelerini Fark Etme Becerilerinin Örüntü Genelleme Bağlamında İncelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Peker, S. (2020). *Ortaöğretim Öğrencilerinin Genelleme Becerilerinin İncelenmesi*, Yayınlanmamış Yüksek lisans Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sivas.
- Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Second Edition. Princeton: Princeton University Press.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present, and Future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.

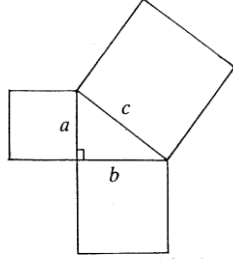
- Presmeg, N. C., Barrett, J. E., & McCrone, S. (2007). Fostering generalization in connecting registers of dynamic geometry and Euclidean constructions. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-89). Seoul, Korea: PME.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40(1), 83-96.
- Rivera, F. D. & Becker J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM: International Journal in Mathematics Education*, 40, 65-82.
- Skemp, R. (1986). The psychology of mathematics learning. *Suffolk: Penguin Books*.
- Sriraman, B. (2004). Reflective abstraction, unframes and the formulation of generalizations. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 205-222.
- Stacey, K. (2006). What Is Mathematical Thinking and Why Is It Important? Progress Report of the APEC Project: Collaborative Studies on Innovations for Teaching and Learning Mathematics in Different Cultures (II)-Lesson Study Focusing on Mathematical Thinking. Erişim <https://doi.org/10.3102/0034654312457429>.
- Stekettee, S. (2009). *Comparison of Sketchpad and Geogebra*. Key Curriculum Press.
- Sucuoğlu, D. (2015). *İlköğretim matematik öğretmenleri adaylarının değişen örüntülere ilişkin genelleme stratejileri*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Tall, D. (1991). (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Tanışlı, D. & Köse, N.Y. (2013). Sınıf Öğretmeni Adaylarının Genelleme Sürecindeki Bilişsel Yapıları: Bir Öğretim Deneyi. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, 44(44), 255-283.
- Tanışlı, D., Yavuzsoy, N., & Camci, F. (2017). Matematik öğretmen adaylarının örüntüler bağlamında genelleme ve doğrulama bilgileri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, 5(3), 195-222.
- Tolga, A. & Cantürk Günhan, B. (2020). 6. Sınıf Öğrencilerinin Alan Hesaplama İlişkilendirme ve Genelleme Süreçlerinin İncelenmesi. *YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi (YYU Journal of Education Faculty)*, 17(1), 1042-1066.
- Türkoğlu, H. & Yalın, H. İ. (2020). Sınıf Öğretmeni Adaylarının Lineer ve Lineer Olmayan Örüntüleri Genelleme Stratejileri. *Başkent University Journal of Education*, 7(1), 110-128.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234- 243.
- Vanicek, J. (2011) *Using analogy in generalization and conceptual learning in computer assisted learning in geometry*, The Electronic Journal of Mathematics and Technology, 5(2) 2011, 177-187.
- Vatansever, S. (2007). *İlköğretim 7. sınıf geometri konularını dinamik geometri yazılımı geometer's sketchpad ile öğrenmenin başarıya, kalıcılığa etkisi ve öğrenci görüşleri*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Velo, J. (2001). *The impact of dynamic geometry software on students' abilities to generalize in geometry*. Unpublished Doctoral Dissertation, The Ohio State University, Ohio, USA.

- Vygotsky, L.S. (1978) *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard University Press, MA.
- Wertheimer, R. (1990). The geometry proof tutor: An intelligent computer-based tutor in the classroom. *Mathematics Teacher*, 83(4), 308-317.
- Yakut Çayır, (2013). 9. Sınıf Öğrencilerinin Örüntü Genelleme Problemlerini Çözme Başarılarının ve Kullandıkları Genelleme Stratejilerinin Belirlenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.
- Yakut Çayır, M. & Akyüz, G. (2015). 9. Sınıf Öğrencilerinin Örüntü Genelleme Problemlerini Çözme Stratejilerinin Belirlenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 9(2), 205-229.
- Yao, X. (2018). *An Exploration of the Interplay among Teacher Intervention, Dynamic Geometry Software and Students' Mathematical Generalizing Practices about Properties of Geometric Transformations*. Doctoral dissertation, Ohio State University, USA.
- Yao, X., & Elia, J. (2021). Connections between empirical and structural reasoning in technology-aided generalization activities. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(2), em0628. <https://doi.org/10.29333/iejme/9770>
- Yerushalmy, M. (1993). Generalization in geometry. In Schwartz, J. L., Yerushalmy, M. & Wilson, B. (Eds.), *The Geometric Supposer: What is it a case of?* (pp. 57- 84). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.
- Yeşildere, S., & Akkoç, H. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30(2), 141-153.
- Yeşildere-İmre, S., Akkoç, H. & Baştürk-Şahin, B. N. (2017). Ortaokul öğrencilerinin farklı temsil biçimlerini kullanarak matematiksel genelleme yapma becerileri. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 8(1), 103-129.
- Yeşildere, S. & Türnüklü, E.B. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(1), 181-213.
- Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2018). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri (11. baskı)*. Ankara: Seçkin Yayınevi.
- Yıldırım, D. & Yavuzsoy Köse, N. (2018). Ortaokul öğrencilerinin çokgen problemlerindeki matematiksel düşünme süreçleri. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(1), 605-633.
- Yılmaz, R. & Argün, Z. (2013), Matematiksel Genelleme Sürecinde Görselleştirme ve Önemi, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H. U. Journal of Education)* 28(2), 564-576.
- Yılmaz, R. (2011). *Matematiksel Soyutlama ve Genelleme Süreçlerinde Görselleştirme ve Rolü*. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

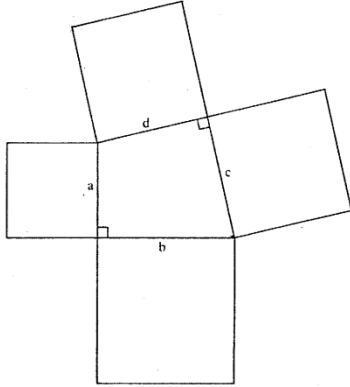
EKLER

Ek 1: Görüşme Soruları

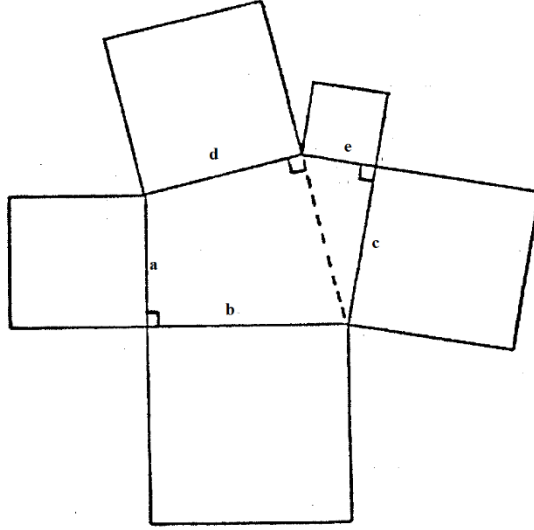
1. Şekildeki dik üçgeni inceleyiniz. Buna göre a , b ve c kenarlarının uzunlukları için ne söyleyebilirsiniz? Aralarındaki nasıl bir ilişki vardır? Neden? (Karesel bölgeler katılımcı ile oluşturulmuştur.)



2. Dik üçgenin hipotenüsünü yine hipotenüs olarak kabul eden başka bir dik üçgen daha çiziniz. Elde edilen şeklin özelliklerini söyleyiniz. a , b , c , d kenarlarının uzunlukları için ne söyleyebilirsiniz? Aralarında nasıl bir ilişki vardır? Neden? (Karesel bölgeler katılımcı ile oluşturulmuştur.)



3. Elde edilen dörtgenin dik kenarlarından birini hipotenüs olarak kabul eden bir dik üçgen daha çiziniz. Elde edilen şeklin özelliklerini söyleyiniz. a , b , c , d ve e kenarlarının uzunlukları için ne söyleyebilirsiniz? Aralarındaki nasıl bir ilişki vardır? Neden? (Karesel bölgeler katılımcı ile oluşturulmuştur.)



4. Düşündüklerinizi elde edilen beşgenin altıgen veya yedigen için de söyleyebilir misiniz? Bu çokgenlerin özellikleri nelerdir? Neden ?

5. Bu düşüncelerinizi diğer çokgenler için de söyleyebilir misiniz? Evet ise, ne tür çokgenler için söyleyebilirsiniz? Neden?

Not: Görüşme süreci GSP ortamında oluşturulacaktır.

Ek 2: Genelleme Süreci İçin Oluşturulan Şemanın Organizasyonu

GENELLEME HAREKETLERİ



İLİŞKİLENDİRME

Bir dik üçgende iki dik kenarı kenar olarak kabul eden karelerin alanları toplamı ile hipotenüsü kenar kabul eden karenin alanının ilişkilendirilmesi.



ARAŞTIRMA

a) Dik üçgenin hipotenüsünü yine hipotenüs olarak kabul eden ikinci bir dik üçgenin çizilmesi ile elde edilen dörtgenin ilk dik kenarlarını kenar olarak kabul eden karelerin alanları toplamı ile diğer iki kenarı kenar olarak kabul eden karelerin alanları toplamının eşit olduğunun araştırılması.

b) Elde edilen dörtgenin dik kenarlarından birini hipotenüs olarak kabul eden üçüncü bir dik üçgenin çizilmesi ile oluşan beşgende ilk iki dik kenarı kenar olarak kabul eden karelerin alanları toplamı ile diğer üç kenarı kenar olarak kabul eden karelerin alanları toplamının eşit olduğunun araştırılması.



GENİŞLETME

a) Elde edilen beşgenin dik kenarlarından birini hipotenüs olarak kabul eden dördüncü bir dik üçgenin çizilmesi ile oluşan altıgende ilk iki dik kenarı kenar olarak kabul eden karelerin alanları toplamı diğer dört kenarı kenar olarak kabul eden karelerin alanları toplamına eşittir genişletmesi.

b) Elde edilen altıgenin dik kenarlarından birini hipotenüs olarak kabul eden beşinci bir dik üçgenin çizilmesi ile oluşan yedide ilk iki dik kenarı kenar olarak kabul eden karelerin alanları toplamı diğer beş kenarı kenar olarak kabul eden karelerin alanları toplamına eşittir genişletmesi.



REFLEKSİYON GENELLEMELERİ



BELİRLEME VEYA AÇIKLAMA

Dik çokgenlerde ilk iki dik kenarı kenar olarak kabul eden karelerin alanları toplamı diğer kenarları kenar kabul eden karelerin alanları toplamına eşittir.



TANIMLAMA



ETKİ

1.Durumları İlişkilendirme

Dik üçgenin dik kenarlarının ve hipotenüsün uzunluklarını ilişkilendirme.

2.Objeleri İlişkilendirme

Obje olarak alınan kare bölge alanlarının ilişkilendirilmesi.

Dik üçgende hipotenüs ile bu hipotenüsü çap kabul eden çemberi ilişkilendirme.

1.Aynı İlişkiyi Araştırma

a) Dik üçgende düşünce ile dik üçgenin hipotenüsünü yine hipotenüs olarak kabul eden ikinci bir dik üçgenin çizilmesi ile elde edilen dörtgende oluşacak olan düşüncede aynı ilişkiyi araştırma. (Dörtgende ortadaki köşegeni çizme)

Dik üçgende düşünce ile onun hipotenüsünü çap kabul eden çember üzerinde ikinci bir dik üçgenin çizilmesi ile elde edilen dörtgende aynı ilişkiyi araştırma.

b) Dörtgende oluşan düşünce ile dörtgenin dik kenarlarından birini hipotenüs olarak kabul eden üçüncü bir dik üçgenin çizilmesi ile oluşan beşgende oluşacak düşüncede aynı ilişkiyi araştırma.

Dörtgende düşünceye benzer şekilde dörtgenin dik kenarlarından birini çap kabul eden çember üzerinde üçüncü bir dik üçgenin çizilmesi ile oluşan beşgende aynı ilişkiyi araştırma.

2.Aynı Prosedürü Araştırma

3.Aynı Örüntüyü Araştırma

4.Aynı Çözüm veya Sonucu Araştırma

a) Verilen dik üçgende kullanılan Pisagor bağıntısı ile benzer çözümü dik üçgenin hipotenüsünü yine hipotenüs olarak kabul eden ikinci bir dik üçgenin çizilmesi ile elde edilen dörtgen için de araştırma.

b) Elde edilen dörtgende kullanılan Pisagor bağıntısı ile benzer çözümü dörtgenin dik kenarlarından birini hipotenüs olarak kabul eden üçüncü bir dik üçgenin çizilmesi ile oluşan beşgen için de araştırma.

1.Uygulanabilirlik Alanını Genişletme

Dörtgen ve beşgen için elde edilen durumların altıgen ve yedigen için uygulanabilir olması.

2.Ayrıntıları Uzaklaştırma

3.İşlemle Genişletme

Dik üçgende 1, dik dörtgende 2 olan dik üçgen sayısını dik beşgen için 3 dik altıgen için 4 sayısına genişletme

4.Devam Ettirme

1.Fenomeni Devam Ettirme

2.Özdeşlik

3.Genel Prensi

Dik çokgenlerde komşu iki dik kenarı kenar olarak kabul eden karelerin alanları toplamı diğer kenarları kenar olarak kabul eden karelerin alanları toplamına eşit olduğu kuralını elde etme.

1.Objeler Sınıfı

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ kenarlı bir dik çokgen için $a_1^2 + a_2^2$ toplamı $a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + \dots + a_n^2$

1.Önsel Fikir veya Strateji

2.Modifiye Edilmiş Fikir veya Strateji

Ek 3: Öğretmenlerin Araştırma İzni



T.C.
SAMSUN VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E-27485554-605.01-40206803
Konu : Yeşim GÜR' ün
Araştırma Uygulama İzni

30.12.2021

DAĞITIM YERLERİNE

- İlgi : a) Millî Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün
21/01/2020 tarihli ve 81576613-10.06.01-E. 1563890- 2020/2 sayılı Genelgesi,
b) Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğünün bila tarihli ve 160299
sayılı yazısı.

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Öğrencisi Yeşim GÜR' ün ; İlimiz 17 ilçedeki özel/resmi her tür ve derecedeki ortaokul/lise ve dengi meslek liselerinde görev yapan Matematik öğretmenlerine yönelik "Matematik Öğretmen ve Adaylarının Bilgisayar Destekli Öğretim Ortamında Genelleme Süreçleri " başlıklı tez çalışması yapmak istediğine ilişkin ilgi (b) yazı ve ekleri, ilgi (a) genelgeye göre incelenmiş ve komisyon tarafından uygun görülmüştür.

Söz konusu çalışmanın komisyon kararı doğrultusunda, uygulama sorularını çalışmayı yapan kişi tarafından raporlanarak, Müdürlüğümüz Ar-Ge Birimine gönderilmesine dikkat edilerek, yüz yüze eğitim öğretime ara verilmesi gözönüne alınarak online, örgün eğitimin tam olarak başlamasıyla birlikte denetimi ilçe millî eğitim müdürlükleri/okul idaresinde olmak üzere, kurum faaliyetlerini aksatmadan, gönüllülük esasına göre yapılmasının sağlanması hususunda;

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Murat YİĞİT
Vali a.
İl Millî Eğitim Müdürü

Ekler :
1- İlgi (b) yazı ve ekleri
2-28 /12/2021 tarihli komisyon kararı

DAĞITIM:

Gereği:
17 İlçe Kaymakamlığına
(İlçe Millî Eğitim Müdürlüğü)

Bilgi:
Ondokuz Mayıs Üniversitesi Rektörlüğü
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğü

Adres : Atatürk Bulvarı Hükümet Konakı İl Millî Eğitim
Müdürlüğü/SAMSUN
Telefon No : 0 (362) 435 80 63
E-Posta: samsunmem@meb.gov.tr
Kep Adresi : meb@hs01.kep.tr

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Belge Doğrulama Adresi : <https://www.turkiye.gov.tr/meb-ebys>

Bilgi için: L. SOYLEYICI

Unvan : Şef

İnternet Adresi: <http://samsun.meb.gov.tr>

Faks: 3624324854

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evrakorgu.meb.gov.tr> adresinden: c91b-e27e-3036-81eb-4861 kodu ile teyit edilebilir.



Ek 4: Öğretmen Adaylarının Araştırma İzni



T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Fakültesi Dekanlığı

Sayı : E-98725097-100-121967
Konu : Ölçek Uygulama Talebi (Yeşim GÜR)

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ BÖLÜM BAŞKANLIĞINA

İlgi : 22.09.2021 tarihli ve E-51747921-100-120823 sayılı yazınız.

Bölümünüz Matematik Eğitimi Anabilim Dalı öğretim üyelerinden Doç.Dr. Rezan YILMAZ'ın danışmanlığını yürüttüğü Üniversitemiz Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Yeşim GÜR'ün, "Matematik Öğretmen ve Öğretmen Adaylarının Bilgisayar Destekli Öğretim Ortamında Genelleme Süreçleri" isimli yüksek lisans tezi kapsamında veri toplamak için Matematik Öğretmenliği ve İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programları öğrencilerine ölçek uygulaması talebi incelenmiş ve Dekanlığımızca uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Dr.Öğr. Üyesi Şener ŞENTÜRK
Dekan Yardımcısı

Bu belge, güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Belge Doğrulama Kodu : 8MSK-IIIV1-04E9

Belge Doğrulama Adresi : <https://ebysorgu.omu.edu.tr>

Adres: Eğitim Fakültesi Dekanlığı Kurupelit/Samsun

Telefon No : 0362 312 19 19

e-Posta : egitimfakultesi@omu.edu.tr

Fax No : 0362 457 60 78

İnternet Adresi : <http://www.omu.edu.tr/>

Bilgi İçin :Ayşe ÖZTÜRK

Memur

Telefon No:



Ek 5: Etik Kurul Onayı



ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER ETİK KURUL KARARLARI

KARAR TARİHİ	TOPLANTI SAYISI	KARAR SAYISI
26.08.2020	7	2020/529

KARAR NO:
2020/529

Üniversitemiz Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yüksek Lisans Öğrencisi Yeşim GÜR' ün Dr. Öğretim Üyesi Rezan YILMAZ danışmanlığında "Matematik Öğretmen ve Öğretmen Adaylarının Bilgisayar Destekli Öğretim Ortamında Genelleme Süreçleri" isimli Yüksek Lisans Tezine ilişkin Mülakat, Gözlem, Bilgisayar Ortamında Test Uygulama, Video/ Filim Kaydı ve Ses kaydı, çalışmalarını içeren 27054 sayılı dilekçesi okunarak görüşüldü.

Üniversitemiz Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yüksek Lisans Öğrencisi Yeşim GÜR' ün Dr. Öğretim Üyesi Rezan YILMAZ danışmanlığında "Matematik Öğretmen ve Öğretmen Adaylarının Bilgisayar Destekli Öğretim Ortamında Genelleme Süreçleri" isimli Yüksek Lisans Tezine ilişkin Mülakat, Gözlem, Bilgisayar Ortamında Test Uygulama, Video/ Filim Kaydı ve Ses kaydı, çalışmalarının kabulüne oy birliği ile karar verildi.

ÖZ GEÇMİŞ

Yeşim GÜR, Giresun Hamdi Bozbağ Anadolu Lisesi'ni bitirdikten sonra Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi Programı bölümünden 10.06.2019 tarihinde mezun oldu. 2019 yılında OMÜ Matematik ve Fen Eğitimi Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans programına girdi. Mezuniyetinden bu yana bir devlet okulunda öğretmen olarak görev yapmaktadır.

İletişim Bilgileri

ORCID ID : 0000-0002-8077-8829

Yayınlar:

1. Gür, Y. & Yılmaz, R. (2021). Generalization Processes of Prospective Mathematics Teachers in Dynamic Software Based Teaching Environment. *5th International Symposium on Turkish Computer and Mathematics Education (TURKBILMAT)*, October 28-30, Alanya/Antalya, Turkey.
2. Gür, Y. & Yılmaz, R. (2023). Generalization Processes of Mathematics Teachers with Dynamic Geometry Software. *4th International Acharaka Congress on Humanities and Social Sciences*, July 15-18, İzmir, Turkey