



**T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ
EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK EĞİTİMİ**

**MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ CEBİRSEL
DÜŞÜNME İLE İLGİLİ FARK ETME BECERİLERİNİN
İNCELENMESİ**

Yüksek Lisans Tezi

Leyla DEDE

**Danışman
Doç. Dr. Ercan ÖZDEMİR**

**RİZE
2024**

KABUL VE ONAY

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalında, Doç. Dr. Ercan ÖZDEMİR danışmanlığında, Leyla DEDE tarafından hazırlanan *Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebirsel Düşünme İle İlgili Fark Etme Becerilerinin İncelenmesi* adlı bu tez çalışması, 21/08/2024 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği/oy çokluğuyla başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Unvanı, Adı SOYADI

İmza

Başkan

:

Doç. Dr. Mesut ÖZTÜRK

Üye

:

Dr. Öğr. Üyesi Nimet PIRASA

Üye

:

Doç. Dr. Ercan ÖZDEMİR

ETİK BEYAN

İlköğretim Matematik Eğitimi Tezli Yüksek Lisans Programından mezun olmak üzere teslim ettiğim “Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebirsel Düşünme İle İlgili Fark Etme Becerilerinin İncelenmesi” başlıklı tezim, bilim ve araştırma etiği prensiplerine riayet edilerek tarafımdan yazılmıştır.

Tez çalışmamda, başka kaynaklardan aktarılan bütün bilgi ve alıntılar, Enstitünüz Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak açıkça gösterilmiştir. Kaynağı gösterilenler dışında kalan bütün bilgiler uygun araştırma yöntemi kullanılarak tarafımdan edinilmiş ve esere bu şekilde yansıtılmıştır. Şahsıma ait olmayan hiçbir bilgi, kasıt veya kusurlar, şahsıma aitmiş gibi gösterilmemiştir. İnternet kaynakları dâhil, sahibine/kaynağına atıf yapılmaksızın hiçbir bilgi kullanılmamıştır. Aksinin ortaya çıkması halinde doğacak bütün hukuki, idari, akademik ve etik sorumluluk tarafıma ait olacaktır. Eserin tesliminden sonra herhangi bir zamanda, bilim etiğine aykırılık tespit edilmesi ve/veya eserimle ilgili intihal veya intihal şeklinde anlaşılabilecek bir durumun ortaya çıkması halinde; üniversiteniz ve eğitim kadronuzun hiçbir şekilde sorumlu tutulmayacağını hür irademle kabul, beyan ve taahhüt ederim. 21/08/2024

Leyla DEDE

ÖN SÖZ

Lisansüstü eğitimim süresince rehberliğini hiçbir zaman eksik etmeyen, zorlandığım zamanlarda moral ve motivasyonlarıyla desteğini esirgemeyen, tezimi başarılı bir şekilde tamamlamamı sağlayan kıymetli danışmanım Doç. Dr. Ercan ÖZDEMİR'e,

Araştırma sürecim içerisinde bana ve tezime katkılarını esirgemeyen kıymetli hocam Doç. Dr. Vecihi Serbay ZAMBAK'a, tez jürisi olarak geri bildirimleri ile çalışmama katkı sağlayan kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Nimet PIRASA'ya ve sayın Doç. Dr. Mesut ÖZTÜRK'e,

Lisans ve lisansüstü eğitimim sürecince verdikleri değerli bilgiler ışığında eğitim hayatıma katkı sağlayan İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalındaki tüm kıymetli hocalarıma,

Bu yoğun süreçte fiziken olmasa bile ruhen hep yanımda olup, bana her zaman desteklerini sunan canım arkadaşlarıma,

Hayatımın her anında yanımda olup bu günlere gelmemi sağlayan, beni her daim koşulsuz destekleyen sevgili aileme ve eşimin sevgili ailesine,

Bu zorlu süreçte beni her koşulda destekleyen, yanımda olan, tezimi bitirebilmem için beni her zaman çalışmaya teşvik eden, moral ve motivasyonum düştüğünde yükseltmek için elinden geleni yapan, bana karşı sabrını ve sevgisini her daim gösteren canım eşim Ercan DEDE'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Leyla DEDE
RİZE/ 2024

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	I
ETİK BEYAN.....	II
ÖN SÖZ	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÖZET	VII
ABSTRACT.....	VIII
KISALTMALAR.....	IX
TABLolar LİSTESİ.....	X
ŞEKİLLER LİSTESİ	XII
GİRİŞ	1
1. GENEL BİLGİLER	4
1.1. Araştırmanın Önemi	4
1.2. Araştırmanın Amacı	7
1.3. Sınırlılıklar.....	7
1.4. Varsayımlar	8
1.5. Tanımlar.....	8
2. KURAMSAL ÇERÇEVE	9
2.1.Fark Etme Becerisi	9
2.1.1. Fark Etme Becerisi ile İlgili Kullanılan Teorik Çerçevesler	13
2.2. Cebirsel Düşünme.....	19
2.2.1. Cebirsel Düşünme ile İlgili Yapılan Sınıflandırmalar.....	21
2.2.1.1. Genelleştirilmiş Aritmetik	24
2.2.1.1.1. İlişkileri ve Özellikleri Keşfetme.....	25
2.2.1.1.2. Nicelikler Arasındaki İlişki Olarak Eşitliği Keşfetme.....	28
2.2.1.1.3. Değişken Olarak Sembolleri Kullanma	32

2.2.1.2. Fonksiyonel Düşünme	37
2.2.1.2.1. Örüntüleri Genelleme	38
2.2.1.2.2. Ters İşlemleri Kullanma	43
3. LİTERATÜR TARAMASI.....	46
4. YÖNTEM.....	54
4.1. Araştırma Deseni	54
4.2. Çalışma Grubu	55
4.3. Verilerin Toplanması	56
4.3.1. Veri Toplama Aracının Geliştirilmesi.....	57
4.3.2. Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formunun Geliştirilmesi.....	72
4.3.3. Veri Toplama Süreci	73
4.4. Pilot Çalışma.....	76
4.5. Veri Analizi	77
4.6. Geçerlik ve Güvenirlik	83
5. BULGULAR	87
5.1. Öğretmen Adaylarının, Öğrencilerin Cebirsel Düşünceleri ile İlgili Problem Çözümlerine Dikkat Etmelerine Yönelik Bulgular.....	87
5.1.1. Öğretmen Adaylarının Genelleştirilmiş Aritmetik Bileşeni ile İlgili Problem Çözümlerine Dikkat Etmelerine Yönelik Bulgular	89
5.1.2. Öğretmen Adaylarının Fonksiyonel Düşünme Bileşeni ile İlgili Problem Çözümlerine Dikkat Etmelerine Yönelik Bulgular	92
5.2. Öğretmen Adaylarının, Öğrencilerin Cebirsel Düşünceleri ile İlgili Problem Çözümlerini Yorumlamalarına Yönelik Bulgular.....	95
5.2.1. Öğretmen Adaylarının Genelleştirilmiş Aritmetik Bileşeni ile İlgili Problem Çözümlerini Yorumlamalarına Yönelik Bulgular	97
5.2.2. Öğretmen Adaylarının Fonksiyonel Düşünme Bileşeni ile İlgili Problem Çözümlerini Yorumlamalarına Yönelik Bulgular	100

5.3. Öğretmen Adaylarının, Öğrencilerin Cebirsel Düşünmeleri ile İlgili Problem Çözümlerine Dönüt Vermelerine Yönelik Bulgular	102
5.3.1. Öğreten Adaylarının Genelleştirilmiş Aritmetik Bileşeni ile İlgili Problem Çözümlerine Dönüt Vermelerine Yönelik Bulgular.....	105
5.3.2. Öğretmen Adaylarının Fonksiyonel Düşünme Bileşeni ile İlgili Problem Çözümlerine Dönüt Vermelerine Yönelik Bulgular.....	107
6. TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER	111
6.1. Tartışma	111
6.1.1. Öğretmen Adaylarının Öğrencilerin Cebirsel Düşünmeleri ile İlgili Problem Çözümlerine Dikkat Etmeleri	111
6.1.2. Öğretmen Adaylarının Öğrencilerin Cebirsel Düşünmeleri ile İlgili Problem Çözümlerini Yorumlamaları	114
6.1.3. Öğretmen Adaylarının Öğrencilerin Cebirsel Düşünmeleri ile İlgili Problem Çözümlerine Dönüt Vermeleri	117
6.2. Sonuç	120
6.3. Öneriler	121
KAYNAKÇA.....	123
EKLER.....	142
ETİK KURUL KARARI	150

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ana Bilim Dalı : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi

Tez Türü : Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Doç. Dr. Ercan ÖZDEMİR

Hazırlayan : Leyla DEDE

Yıl : 2024

Sayfa Sayısı : 150

ÖZET

MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ CEBİRSEL DÜŞÜNME İLE İLGİLİ FARK ETME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Bu çalışma, ortaokul matematik öğretmen adaylarının cebirsel düşünme ile ilgili fark etme becerilerinin incelenmesini amaçlamaktadır. Çalışma nitel bir durum çalışmasıdır. Araştırmanın katılımcılarını Türkiye'nin kuzeydoğusunda yer alan bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün dördüncü sınıfında eğitim gören 5 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Veri toplama aracı cebirsel düşünme bileşenleri temel alınarak 24 problem çözümünü içeren 10 senaryodan oluşmaktadır. Veriler 2022-2023 akademik yılının güz döneminde yarı yapılandırılmış mülakatlar aracılığıyla toplanmıştır. Çalışmanın verileri fark etme becerisinin dikkat etme, yorumlama ve dönüt verme basamaklarına göre analiz edilmiştir.

Çalışmanın bulgularında öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili fark etme becerisinin her bir basamağında en fazla oranda sağlam kanıt sundukları tespit edilmiştir. Sağlam kanıtların en fazla oranda dikkat etme basamağında, sınırlı kanıtların en fazla oranda yorumlama basamağında ve yetersiz kanıtların en fazla oranda dönüt verme basamağında sunulduğu görülmüştür. Senaryolarda sunulan doğru ve yanlış çözümlerin, öğretmen adaylarının fark etme becerisinin dikkat etme ve yorumlama basamaklarında önemli bir farklılığa sebebiyet vermediği; dönüt verme basamağında ise önemli bir farklılığa sebebiyet verdiği görülmüştür. Dönüt verme basamağında öğretmen adaylarının yanlış çözümlere yönelik daha fazla sayıda sağlam kanıt sundukları; doğru çözümlere yönelik daha fazla sayıda yetersiz kanıt sundukları tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark etme becerisi, cebirsel düşünme, genelleştirilmiş aritmetik, fonksiyonel düşünme, matematik öğretmen adayları

Recep Tayyip Erdogan University Institute of Graduate Studies
Department : Mathematics and Science Education
Thesis Type : Master Thesis
Supervisor : Assos. Prof. Dr. Ercan ÖZDEMİR
Author : Leyla DEDE
Year : 2024
Pages : 150

ABSTRACT

INVESTIGATING THE NOTICING SKILLS ABOUT ALGEBRAIC THINKING OF PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS

This study aims to examine prospective middle school mathematics teachers' noticing skills related to algebraic thinking. The study is a qualitative case study. The participants of the study consisted of 5 prospective teachers studying in the fourth grade of elementary mathematics teaching department of a state university located in the northeast of Turkey. The data collection tool consists of 10 scenarios including 24 problem solutions based on the components of algebraic thinking. Data were collected through semi-structured interviews in the fall semester of the 2022-2023 academic year. The data of the study were analyzed according to the attending, interpretation and responding phases of the noticing skill.

In the findings of the study, it was determined that the prospective teachers showed robust evidence at the highest rate in each phase of the noticing skill related to students' algebraic thinking. It was observed that robust evidence was mostly presented in the attending phase, limited evidence was mostly presented in the interpretation phase, and lack of evidence was mostly presented in the responding phase. It was found that the correct and incorrect solutions presented in the scenarios did not cause a significant difference in the attending and interpretation of the prospective teachers' noticing skill; however, they caused a significant difference in responding phase. In the responding phase, it was found that the prospective teachers provided more robust evidence for incorrect solutions and more lack of evidence for correct solutions.

Keywords: Noticing skill, algebraic thinking, generalizing arithmetic, functional thinking, prospective mathematics teachers

KISALTMALAR

ark.	:	Arkadaşları
bkz.	:	Bakınız
Ç	:	Çözüm
MEB	:	Millî Eğitim Bakanlığı
NCTM	:	National Council of Teachers of Mathematics
OME	:	Ontario Ministry of Education
s.	:	Sayfa
TDK	:	Türk Dil Kurumu
VAST	:	Video Analysis Support Tool
vb.	:	Ve benzeri
YÖK	:	Yükseköğretim Kurulu

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1. van Es ve Sherin'in (2002) fark etme becerisine yönelik gelişim düzeyleri.....	14
Tablo 2. van Es ve Sherin'in (2008) fark etme becerisine yönelik analiz çerçevesi.....	14
Tablo 3. van Es'in (2011) fark etme becerisine yönelik analiz çerçevesi.....	15
Tablo 4. Jacobs ve arkadaşlarının (2010) fark etme beceri düzeyleri için analiz çerçevesi.....	17
Tablo 5. Barnhart ve van Es'in (2015) fark etme becerileri için sundukları çerçeve	18
Tablo 6. Mathews ve arkadaşlarının (2012) eşitlik işareti ile ilgili anlayış düzeyleri, düzeylerin açıklamaları ve örnekleri.....	29
Tablo 7. Küchemann'ın (1978) harflerin kullanımına yönelik sınıflandırması	34
Tablo 8. Philipp'in (1992) harfli sembollerin kullanımına yönelik sınıflandırması.....	35
Tablo 9. Baykul'un (2014) değişkenlerin kullanımına yönelik sınıflandırması	35
Tablo 10. Örüntü sunum biçimleri	41
Tablo 11. Örüntü genelleme stratejileri.....	42
Tablo 12. Uzman görüşü sonrası yapılan değişiklik örneği	58
Tablo 13. Senaryo 1 için çözüm 1 ve çözüm 2	59
Tablo 14. Senaryo 2 için çözüm 3 ve çözüm 4	60
Tablo 15. Senaryo 3 için çözüm 5 ve çözüm 6	61
Tablo 16. Senaryo 4 için çözüm 7 ve çözüm 8	62
Tablo 17. Senaryo 5 için çözüm 9 ve çözüm 10	63
Tablo 18. Senaryo 6 için çözüm 11 ve çözüm 12	64
Tablo 19. Senaryo 7 için çözüm 13, çözüm 14, çözüm 15 ve çözüm 16	65
Tablo 20. Senaryo 8 için çözüm 17, çözüm 18, çözüm 19 ve çözüm 20	67
Tablo 21. Senaryo 9 için çözüm 21 ve çözüm 22	69
Tablo 22. Senaryo 10 için çözüm 23 ve çözüm 24	69

Tablo 23. Veri toplama aracındaki cebirsel düşünme bileşenlerine ait senaryo ve çözüm numaraları	71
Tablo 24. Çalışmanın analiz çerçevesi	80
Tablo 25. Fark etme becerisinin dikkat etme basamağına yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı	88
Tablo 26. Öğretmen adaylarının genelleştirilmiş aritmetik ile ilgili problem çözümlerine dikkat etmelerine yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı	89
Tablo 27. Öğretmen adaylarının fonksiyonel düşünme ile ilgili problem çözümlerine dikkat etmelerine yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı	92
Tablo 28. Fark etme becerisinin yorumlama basamağına yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı	96
Tablo 29. Öğretmen adaylarının genelleştirilmiş aritmetik ile ilgili problem çözümlerini yorumlamalarına yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı	97
Tablo 30. Öğretmen adaylarının fonksiyonel düşünme ile ilgili problem çözümlerini yorumlamalarına yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı	100
Tablo 31. Fark etme becerisinin dönüt verme basamağına yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı	104
Tablo 32. Öğretmen adaylarının genelleştirilmiş aritmetik ile ilgili problem çözümlerine dönüt vermelerine yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı	105
Tablo 33. Öğretmen adaylarının fonksiyonel düşünme ile ilgili problem çözümlerine dönüt vermelerine yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı	108

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Girdi-çıktı arasındaki ilişkiyi gösteren tablo (OME, 2013).....	44
Şekil 2. Fact Families etkinlik örneği	45
Şekil 3. Veri toplama sürecinin aşamalı gösterimi	76
Şekil 4. Cemre'nin Ç19'a yönelik belirttiği durum	95
Şekil 5. Eylem'in Ç10'a verdiği dönütte kullandığı soru	106



GİRİŞ

İçinde bulunduğumuz yüzyılda ortaya çıkan teknolojik gelişim ve beraberinde yaşanan değişim, bütün toplumların bilgi çağıının sürekli değişen ve gelişen şartlarına uyum sağlamasını gerekli kılmaktadır. Bu dönemde bireylerin sahip olması gereken nitelikler giderek farklılaşmaktadır. Bu niteliklerin kazandırılmasında en önemli rol eğitime atfedilmektedir. Öğretmenler, öğrencilere ve uzun vadede toplumlara yeni becerilerin ve değerlerin kazandırılmasında önemli bir rol oynamaktadır (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2017). Öğretmenlerin önemli görevlerinden biri de eğitim-öğretim faaliyetlerini gerçekleştirmektir. Bu durum branş fark etmeksizin tüm öğretmenler için geçerlidir. Matematik öğretmenlerinin yönlendirmeleri de matematiksel kavramların öğrenimi sürecinde öğrencilerin matematiksel düşüncelerini ifade edebilmeleri açısından gerekli ve önemlidir (MEB, 2018a). Çünkü öğretmenler matematiksel hedeflere ulaşmayı sağlayan kişilerdir (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]), 2000). Matematiksel hedeflere ulaşmanın amaç edinildiği matematik dersi öğretim programı (MEB, 2018a) doğrultusunda etkili bir öğretimin sağlanması için öğretmenlerde bazı mesleki becerilerin bulunması beklenmektedir. Bir konunun öğretimi sırasında öğretmenin alan ve öğretim bilgisine sahip olması (Ball ve ark., 2008; MEB, 2017) ve öğrenciyi tanınması (Shulman, 1987) başlıca beceriler arasında yer almaktadır. Bunların yanı sıra öğretmenlerde bulunması gereken becerilere yönelik literatür incelendiğinde son zamanlarda öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının fark etme becerileri ön plana çıkmaktadır.

van Es ve Sherin (2002) fark etmeyi, öğretmenin sınıf içi etkileşimleri gözlemleyerek, gözlemleri yorumlama ve bağlamlar arasında akıl yürütme şeklinde ele almışlardır. van Es (2011), öğretmenlerin sınıf içi etkileşimlerde neyi fark ettiğine ve nasıl fark ettiğine odaklanmaktadır. Jacobs ve arkadaşları (2010) ise sınıf içi etkileşimlerde öğretmenlerin neyi ve nasıl fark ettiklerinden ziyade öğrencilerin matematiksel düşüncelerinde nelere dikkat edeceğine, nasıl yorumlamalar yapacağına ve öğrencinin matematiksel düşünmesine yönelik nasıl bir dönüt vereceğine odaklanmıştır. Jacobs ve arkadaşları (2010) tarafından bu durum öğretmenlerin profesyonel fark etmesi olarak ele alınmıştır.

Öğrencilerin matematiksel düşünmelerindeki stratejilerin belirlenmesi, yanıtlarının daha derinlemesine incelenmesi, matematiksel düşünmelerinin altında yatan sebeplerin keşfedilmesi gerekmektedir (Kılıç, 2019a). Ayrıca öğrencilerin matematiksel düşünmelerini geliştirici dönütler verebilmek ve gerekli durumlarda oluşabilecek yanılğı ve güçlüklerle karşı önlem alabilmek fark etme becerisinin önemli bir adımıdır. Bu bağlamda fark etme becerisi öğretmenlerin, öğrencilerini daha iyi tanımalarına ve kendi matematiksel bilgilerinin gelişmesine olanak tanımaktadır (Wilson ve ark., 2013). Gelişimsel bir süreci içeren fark etme becerisi uzun ve aktif bir süreçten oluşmaktadır (Mason, 2011). Uzun bir süreci içermesi bakımından geleceğın öğretmeni olan öğretmen adaylarının mesleğeye daha erken hazır olabilmelerine katkı sağlaması için lisans eğitimi dönemlerinde fark etme becerilerini edinmeleri büyük önem arz etmektedir.

Matematik öğretmenlerinin fark etme becerilerini edinmeleri matematik eğitiminde önemli bir yere sahip olan cebir öğrenme alanı için de oldukça önemlidir. Matematik dersi öğretim programına göre cebir öğrenme alanına ait konular ortaokulda anlatılmaktadır (MEB, 2018a). Aritmetiğeye kıyasla daha soyut kavramları içeren cebir, öğrencilerin çeşitli zorluklarla karşılaştığı konuları ve kavramları içermektedir. Cebir konularına geçişle birlikte öğrencilerin matematik dersinde karşılaştıkları zorlukların da arttığı görülmektedir (Erbaş ve Ersoy, 2003). Bu yüzden öğrenci düşünmelerinin anlamlandırılması ve olası öğrenme güçlüklerinin önüne geçilmesi bakımından öğretmenlerin fark etme becerilerinin gelişmiş olması önem arz etmektedir.

Matematiğın temellerini oluşturan aritmetik, dört işlemi (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) kullanarak bilinenden hareketle bilinmeyenin hesaplanmasıdır (Mason, 1996). Sayılarla işlem yapmayı ve sayılar arası ilişkileri içeren aritmetiğın genellenmesiyle ise cebir ortaya çıkmıştır (Akgün, 2006). Bir anlamda cebir, aritmetiğın genellenmesi için gerekli olan sembolik bir dildir (Vance, 1998). Kieran (1992) cebiri, sayısal ilişkilerin harflerle gösterilmesi ve harflerle işlemlerin yapılması olarak tanımlamaktadır. Cebir, daha soyut kavramları bünyesinde bulundurması bakımından soyut düşünmenin de temelini oluşturmaktadır (Ontario Eğitim Bakanlığı [Ontario Ministry of Education [OME], 2013).

Cebire geçişle birlikte öğrenciler, değişken, bilinmeyen gibi pek çok yeni soyut kavramla tanışmaktadır. Bu kavramlar ilkokul seviyesinde temelleri atılmaya başlanan cebirsel düşünmenin birer parçalarıdır. Cebirsel düşünme, cebir ile ilgili olmakla birlikte daha geniş bir anlama sahiptir. MEB'in (2018a) matematik dersi ğretim programında belirttiği gibi cebirsel düşünme matematiksel düşünmenin önemli bir alt boyutudur. Vance'e (1998) göre cebirsel düşünme, genellemeleri, değişkenleri, çeşitli gösterimleri ve hesaplamalardan elde edilmiş soyutlamaları içermektedir. Driscoll'e (1999) göre ise cebirsel düşünme, nicel durumların betimlenerek değişkenler arası ilişkilerin açıkça gösterilme kapasitesidir.

Öğretmenlerin, ğrencilerin cebirsel düşünmelerine yönelik farkındalıklarının güçlü olması etkin öğrenmenin sağlanması bakımından önemlidir. Yükseköğretim Kurulu'nun ([YÖK], 2018) güncellenmiş olduğu ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programına göre ğretim dersleri ayrıştırılmış ve cebir ğretimi dersi ayrı bir ders olarak verilmeye başlamıştır. Bu sayede öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşünmelerini anlama, yorumlama, hata ve kavram yanılgılarını tespit etme gibi durumlara derinlemesine odaklanmaları amaçlanmıştır (YÖK, 2018). Bu değişim doğrultusunda geleceğin öğretmeni olan öğretmen adaylarının fark etme becerilerinin gelişimlerinin olumlu yönde etkilenmesi beklenmektedir.

1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde araştırmanın önemine, araştırmanın amacına, sınırlılıklara, varsayımlara ve tanımlara yer verilmiştir.

1.1. Araştırmanın Önemi

Eğitimin başlamasını sağlayan, geliştiren ve uygulayan öğretmenlerdir (MEB, 2017). Aynı zamanda matematiksel hedeflere ulaşmayı da sağlamaktadırlar (NCTM, 2000). Matematiksel düşünmenin öğretimi için ise öncelikle öğretmenlerde öğretilecek bilginin var olması beklenmektedir (Uygur-Kabael ve Barak, 2017). Buna rağmen öğretmenlerin bir şeyi biliyor veya yapabiliyor olmaları, ilgili durumun öğrencilere öğretimi sürecinde her zaman yeterli olabildikleri anlamına gelmemektedir (Ball, 1990, NCTM, 2000). Bu yüzden gerek öğretmenlere gerekse de öğretmen adaylarına yönelik eğitim-öğretim yapılan birimlerde nitelikli hizmet sunulması gerekmekte, öğretmen ve öğretmen adaylarının mesleki yönden sahip olması gereken yeterliliklerin kazandırılmasına yönelik faaliyetlerin yürütülmesi beklenmektedir (Zenor, 1989). Mesleki bilgi ve beceriler, konu ve öğretim bilgisi gibi yeterlilikler kazandırılması gereken yeterliliklere örnek oluşturur (Ball ve ark., 2008; MEB, 2017). Bu yeterliliklerin yanı sıra son zamanlarda literatürde öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının fark etme becerilerinin incelenmesine yönelik çalışmaların arttığı görülmektedir. Fark etme becerisi öğretmenlerin öğrencilere, öğrenci çalışmalarına ve kendilerine yönelik farkındalıklarının gelişmesine katkı sağlamaktadır (Wilson ve ark., 2013). Öğretmenlerin fark etme becerileri geliştikçe kendilerine olan güvenleri de artmaktadır (Simpson ve Haltiwanger, 2017). Bu yüzden geleceğin öğretmeni olan öğretmen adaylarının mesleğe başlamadan önce fark etme becerilerini edinmeleri ve geliştirmeleri büyük önem arz etmektedir. Fark etme becerisi gelişmiş öğretmen adaylarının kendilerine olan güvenleri ve mesleğe dair hazırbulunuşlukları artmış olacaktır. Bu sebeple çalışmada öğretmen adayları ile çalışılmasına karar verilmiştir.

Literatürde fark etme becerisine yönelik öğretmenin içinde bulunduğu karmaşık sınıf ortamlarında gerçekleşen olayları gözlemleyebilmesi, anlamlandırabilmesi (van Es ve Sherin, 2002), öğrencilerin matematiksel düşünmelerine dikkat etmesi, yorum yapabilmesi ve yeri geldiğinde uygun dönütler

vermesi (Jacobs ve ark., 2010) şeklinde tanımlar yapılmıştır. Araştırmalarda fark etme becerisinin geliştirilmesi veya incelenmesi için video kaset uygulamaları, ders imecesi, yazılı çalışmalar gibi farklı teknikler kullanılmaktadır. Literatür incelendiğinde öğretmen adaylarının video kasetlere kıyasla öğrencilerin yazılı çalışmalarında kullanılan çözümleri daha iyi inceleyebildiği ve öğrenci düşüncelerine daha fazla odaklandıkları görülmüştür (Magiera ve Zambak, 2011). İlgili literatürde öğrencilerin yazılı çalışmalarının kullanıldığı araştırmaların analizinde ise çoğunlukla Jacobs ve arkadaşlarının (2010) çerçevesinin kullanıldığı görülmektedir (Doğan-Coşkun, 2021; Özel, 2019; Simpson ve Haltiwanger, 2017; Yıldız, 2022). Mevcut çalışmanın veri toplama aracıyla öğrencilerin yazılı çalışmaları kullanılmış ve çalışmanın verileri Jacobs ve arkadaşlarının (2010) çerçevesine göre analiz edilmiştir. Çalışmanın veri toplama aracıyla kullanılan yazılı çalışmalar, öğretmen adaylarının dikkat etme, yorumlama ve dönüt verme becerilerinin daha kapsamlı bir şekilde incelenmesi açısından önemli görülmektedir.

Literatür incelendiğinde cebirsel düşünmenin bileşenlerine yönelik farklı sınıflandırmalar yer almaktadır (Blanton ve ark., 2011; Chimoni ve ark., 2018; Kaput, 1999; Kaput, 2008; OME, 2013). Bunlardan biri de OME'nin (2013) yapmış olduğu sınıflandırmadır. OME (2013) cebirsel düşünmeyi genelleştirilmiş aritmetik ve fonksiyonel düşünme şeklinde iki bileşende ele almaktadır. Genelleştirilmiş aritmetik kendi içinde üçe, fonksiyonel düşünme ise kendi içinde iki bileşene ayrılmaktadır. Öğretmen veya öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerine yönelik fark etme becerilerinin incelendiği çalışmalar örüntüleri genellemeye (Callejo ve Zapatera, 2017; Çetin, 2023; Doğan-Coşkun, 2021; Gürsoy, 2019; Hawthorne, 2016; Kılıç, 2019a; LaRochelle ve ark., 2019; Lee ve Lee, 2023; Magiera ve Zambak, 2021; Özel, 2019; Simpson ve Haltiwanger, 2017; Tün, 2018; Yıldız, 2022), değişken kavramına (Kılıç, 2019b; Tün, 2018) ve eşitlik kavramına (Çopur ve Tekin-Sitrava, 2024) yöneliktir. Cebirsel düşünmenin tüm bileşenlerine yönelik herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Mevcut çalışmada öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerine yönelik fark etme becerileri, OME'nin (2013) yapmış olduğu sınıflamadaki cebirsel düşünmenin tüm bileşenleri ele alınarak incelenmiştir. Bu yüzden mevcut çalışmanın, öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerini

fark etmelerini daha geniş bir boyutta ve detaylı bir şekilde ele alması yönüyle literatürdeki bu boşluğu doldurması beklenmektedir.

Welder'a (2012) göre öğretilecek konu içerikleri, öğrencilerin cebire geçiş becerilerini olumsuz yönde etkileyebilmektedir. Cebire verilen önemin artmasıyla birlikte öğrencilerin karşılaştığı zorlukların ve olumsuz etkilerin öğretmenler tarafından fark edilebilmesi giderek daha da önemli hale gelmektedir. Fakat öğretmen adayları cebirle ilgili konularda (bilinmeyen, değişken, eşitlik, denklem gibi cebirin temel kavramları) öğrencilerin sıklıkla sahip olduğu kavram yanlışları ve hatalara dair yeterli bilgiye sahip değildir (İdil ve Narlı, 2021). Ayrıca öğretmen adayları kavramlar arası ilişkilendirme yaparken ve konuları öğretirken zorluk çekmektedirler (İdil ve Narlı, 2021). Bundan dolayı öğretmen adaylarına cebirsel kavramların sorgulatılmasını sağlayıcı fırsatların verilmesi ve cebirde karşılaşılan yaygın yanlış ve hataların senaryolaştırarak sunulması önerilmektedir (İdil ve Narlı, 2021). Kılıç (2019a), öğretmen adaylarının gelecekteki mesleki yaşamlarında öğrencilerin matematiksel düşüncelerinin altında yatan sebepleri gözlemleyebilmesi adına fark etme becerilerinin gelişmesi için çeşitli öğrenci yanıtlarının ele alındığı çalışmalara katılmalarının faydalı olacağına değinmektedir. Bununla birlikte ele alınan öğrenci yanıtlarının doğru veya yanlış çözümlerden oluşmuş olması öğretmen adaylarının öğrencilere vereceği dönütlerde farklılığa sebep olmaktadır (Jacobs ve ark., 2010). Örneğin doğru çözüm sunan öğrencilere verilen dönütler ile öğrencilere farklı stratejiler keşfettirilebilirken, yanlış çözüm sunan öğrencilere verilen dönütler ile öğrencilerin hatalarını fark etmeleri sağlanabilir. Bu doğrultuda mevcut çalışmanın veri toplama aracında cebirsel düşünmeyle ilgili, literatürden yararlanılarak oluşturulmuş farklı senaryo örnekleri ve senaryolar için oluşturulmuş doğru ve yanlış problem çözümleri yer almaktadır. Mesleki deneyime sahip olmayan öğretmen adaylarının senaryolar aracılığıyla oluşturulmuş problem çözümleri ile karşı karşıya gelmeleri, gelecekte karşılaşılabilecekleri gerçek öğrenci çözümlerine yönelik erken bir deneyim edinmeleri açısından önemlidir.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmada, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının fark etme becerilerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda araştırmanın problemi “Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının cebirsel düşünmeye yönelik fark etme becerileri ne düzeydedir?” şeklinde oluşturulmuştur.

Bu problem doğrultusunda araştırmanın alt problemleri ise şu şekildedir:

- 1) Ortaokul matematik öğretmeni adayları, öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerine ne düzeyde dikkat etmektedirler?
- 2) Ortaokul matematik öğretmeni adayları, öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerini ne düzeyde yorumlamaktadırlar?
- 3) Ortaokul matematik öğretmeni adayları, öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerine ne düzeyde dönüt vermektedirler?

1.3. Sınırlılıklar

Bu çalışma;

- 2022-2023 eğitim öğretim yılı güz dönemi ile,
- Türkiye’nin kuzey doğusundaki bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği ana bilim dalının son sınıfında eğitim gören 5 öğretmen adayı ile,
- Jacobs, Lamb ve Philipp’in (2010) fark etme becerisi ile ilgili yapmış olduğu sınıflandırma ile,
- Ontario Eğitim Bakanlığı’nın (2013) cebirsel düşünme ile ilgili yapmış olduğu sınıflandırma ile,
- Cebirsel düşünme ile ilgili hazırlanmış 10 senaryo örneği ve 24 problem çözümünü içeren veri toplama aracıyla ve öğretmen adaylarının fark etme becerilerinin incelenebilmesine yönelik hazırlanmış yarı yapılandırılmış mülakat soruları ile sınırlıdır.

1.4. Varsayımlar

- Araştırmacı çalışmada araştırmacı ve gözlemci rolünde olduğu için araştırmacının kişisel duygu ve düşüncelerinin çalışmaya karışmadığı,
- Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının mülakatta içtenlikle cevap verdiği varsayılmıştır.

1.5. Tanımlar

Fark etme becerisi: Bu çalışmada fark etme becerisi Jacobs, Lamb ve Philipp (2010) tarafından “Dikkat Etme”, “Yorumlama” ve “Dönüt Verme” basamakları altında sınırlandırılmış bir beceri türü olarak ele alınmıştır.

Cebirsel düşünme: Bu çalışmada cebirsel düşünme Ontairo Eğitim Bakanlığı (2013) tarafından “Genelleştirilmiş Aritmetik” ve “Fonksiyonel Düşünme” bileşenleri altında sınırlandırılmış bir matematiksel düşünme olarak ele alınmıştır.

2. KURAMSAL ÇERÇEVE

Çalışmanın kuramsal çerçevesini “Fark Etme Becerisi” ve “Cebirsel Düşünme” oluşturmaktadır. Kuramsal çerçeveler kapsamında bu bölümde fark etme becerisinin tanımına, önemine ve fark etme becerisi ile ilgili kullanılan teorik çerçevelere yer verilmiş; cebirsel düşünmenin tanımına, önemine, cebirsel düşünme ile ilgili yapılan sınıflandırmalara ve cebirsel düşünme bileşenlerinin açıklamalarına yer verilmiştir.

2.1. Fark Etme Becerisi

Eğitimin niteliğine doğrudan ve en önemli etkiyi öğretmenler yapmaktadır. Öğretmenler, eğitimin başlatıcısı, geliştiricisi ve uygulayıcısıdır (MEB, 2017). Matematiksel hedeflere ulaşmayı sağlayan da öğretmenlerdir (NCTM, 2000). Öğretmenler bir konunun öğretimi esnasında konuyu daha kolay nasıl öğretebileceklerini, öğretimde nelerin kullanılması gerektiğini ve uygun öğretim için hangi stratejileri seçmeleri gerektiğini, bir öğrencinin hangi durumlarda kavram yanılığı yaşayabileceğini ya da hangi durumlarda zorlanabileceğini, öğrencide oluşan kavram yanılıklarını nasıl ortadan kaldıracabileceklerini bilmelidirler (An ve Wu, 2012; NCTM, 2000; Özaltun, 2014). Eğitim-öğretim ortamında bu kadar önemli bir yer teşkil eden öğretmenlerin, mesleki yönden donanımlı ve yetkin olabilmesi için çeşitli bilgi, beceri ve yeterliliklere sahip olması beklenmektedir (Ball ve ark., 2008; Demirel, 1999; Jacobs ve ark., 2010; MEB, 2017; Shulman, 1986 ve 1987). Örneğin öğretmenlerden açık görüşlü olması, subjektif davranabilmesi, öğrenciyi tanıması ve öğrencilerin beklentilerini karşılayabilmesi, karşılaştığı zorluklarda gerekli araştırmaları yapabilmesi, yeniliklere açık, kendini geliştiren bir birey olması, özgün ve yaratıcı olması gibi birçok konuda yeterliliğe sahip olması beklenmektedir (Çelikten ve ark., 2005; MEB, 2017, 2018a). Bunların yanı sıra Demirel (1999) öğretmenlerin genel kültür ve genel yetenek bilgisine, mesleki bilgiye ve alan bilgisine sahip olması gerektiğini belirtirken; öğretmenlerin sahip olması gereken genel yeterlilikleri MEB (2017) mesleki bilgi, mesleki beceri, tutum ve değerler olmak üzere üçe ayırmıştır.

- Mesleki bilgi: Alan bilgisi, alan eğitimi bilgisi ve mevzuat bilgisi olmak üzere üç bileşene,
- Mesleki beceri: Eğitim-öğretimi planlama, öğretim ortamlarını oluşturma, öğretme ve öğrenme sürecini yönetme, ölçme ve değerlendirme olmak üzere dört bileşene,
- Tutum ve değerler: Milli, manevi ve evrensel değerler, öğrenciye yaklaşım, iletişim ve iş birliği, kişisel ve mesleki gelişim olmak üzere dört bileşene ayrılmaktadır (MEB, 2017).

Shulman (1986) öğretmenlerin sahip olması gereken bilgiyi alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi ve müfredat bilgisi şeklinde ele almıştır. Daha sonra bu bileşenleri genişleterek öğretmenlerin sahip olması gereken bilgiyi genel pedagoji bilgisi, öğrenciyi tanıma bilgisi, eğitimsel içerik bilgisi, eğitimsel amaç ve değerler bilgisi, içerik bilgisi, müfredat bilgisi ve pedagojik alan bilgisi şeklinde yedi bileşende ele almıştır (Shulman, 1987). Öğretmen bilgisinin temellerinin atıldığı bu çalışmaların üzerine Ball ve arkadaşları (2008) matematik öğretmenlerinin sahip olması gereken bilgi ve becerileri içeren matematiği öğretme bilgisi (mathematical knowledge for teaching) teorik çerçevesini öne sürmüşlerdir. Matematiği öğretme bilgisi, konu alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi olmak üzere ikiye ayrılmaktadır.

- Konu alan bilgisi: Ortak alan bilgisi, yatay alan bilgisi ve özel alan bilgisi olmak üzere üç bileşene,
- Pedagojik alan bilgisi: Alan ve öğrenci bilgisi, alan ve öğretme bilgisi, alan ve müfredat bilgisi olmak üzere üç bileşene ayrılmaktadır (Ball ve ark., 2008).

Yukarıda belirtilen bilgi, beceri ve yetkinliklere ilaveten son dönemlerde sıklıkla çalışmalara konu olan “fark etme becerisi” de öğretmenlerde bulunması gereken yetkinlikler arasında gösterilmektedir (Jacobs ve ark., 2010; van Es, 2011; van Es ve Sherin, 2002 ve 2008). Öğretmende bulunması gereken yeterlilikler bir bütün olarak ele alındığında mesleki becerilerin gelişimi için gerekli olan alan ve öğretme bilgisi ile fark etme becerisi birbirinden kesin sınırlarla ayrılmamaktadır. Literatürde bunlar arasında anlamlı ilişkilerin olduğunu gösteren çalışmalar bulunmaktadır (Sánchez-Matamoros ve ark., 2019; Yang ve ark., 2021). Alan ve öğretim bilgisi ile fark etme becerisi öğretmenlerin mesleki becerilerini geliştirmede ve öğretimin niteliğini

arttırma konusunda birbirlerini destekleyici ve tamamlayıcı unsurlar olarak görülebilmektedir.

Türk Dil Kurumu'na ([TDK], 2023) göre fark etme, görmek, anlamak, ayırt etmek anlamlarını içermektedir. Mason'a (2011) göre fark etme, içinde bulunan ortamı gözlemleyerek bir şeylere dikkat etmektir. Gün içerisinde çevremizde gelişen pek çok olay yaşanmaktadır. Fakat zihnimiz başka bir işle meşgul olduğu zaman bu olayların çok azına odaklanılmakta, olayların birçoğu ise ya fark edilmemekte ya da gözümüzden kaçabilmektedir (Simons, 2000). Öğretmenler için de bu farkında olma durumu sınıf ortamında gerçekleşmekte ve değişkenlik göstermektedir. Mason (2002) alanında uzman kişilerin uzmanlık gerektiren durumlarda farkındalık seviyelerinin daha yüksek olduğuna vurgu yapmıştır. Öğretmenler için uzmanlık gerektiren durumlarda sınıf ortamında ortaya çıkmaktadır (van Es ve Sherin, 2002). Gün içerisinde karşılaştığımız olayların tümüne karşı olan farkındalığımız gibi kalabalık bir sınıf ortamında da öğretmenin dikkat etmediği ya da gözünden kaçtığı pek çok olay ve durum gerçekleşebilir. Öğretmenin bu süreç içerisinde gerçekleşen olay ve durumları fark etmesi için daha dikkatli olması gerekmektedir (Sherin ve Star, 2011). Bu yüzden öğretmenin fark etmesi aktif bir süreci içermektedir (Mason, 2011).

Literatürde fark etme becerisi ile ilgili farklı tanımların yapıldığı görülmektedir (Jacobs ve ark., 2010; Mason, 2002; Sánchez-Matamoros ve ark., 2019; van Es ve Sherin, 2002). van Es ve Sherin (2002) fark etme becerisini öğretmenin karmaşık sınıf ortamlarında gerçekleşen olayları görmesi, anlamlandırması ve karşılaşılan durumlara yönelik akıl yürütmesi olarak tanımlamaktadırlar. Jacobs ve arkadaşları (2010) ise fark etme becerisini, öğretmenin karmaşık sınıf ortamlarında öğrencilerin matematiksel düşüncelerine dikkat etmesi, matematiksel düşüncelerini yorumlaması ve öğrenciye vereceği yanıtı karar vermesi olarak ele almışlardır. Mason (2002, s. 7) fark etmeyi "Her öğretme eylemi fark etmeye bağlıdır: Çocukların ne yaptığını ve nasıl tepki verdiklerini fark etme, söyleneni veya yapıları beklentiler ve kriterler doğrultusunda değerlendirme ve daha sonra ne söylenebileceğini veya yapılabileceğini düşünme" şeklinde yorumlamaktadır. Sánchez-Matamoros ve arkadaşları (2019), matematiksel fark etmeyi, öğretmenlerin öğrencilerin problem çözme süreçlerindeki matematiksel ayrıntılara dikkat etme becerisi olarak tanımlamaktadırlar. Bu tanımlar doğrultusunda fark etme becerisi, öğretmenin sınıf ortamını ve öğrencilerini gözlemlemesi,

öğrencilerin stratejilerine dikkat etmesi ve matematiksel düşünmelerini anlamlandırması, öğrencinin kavram yanılgılarını ve olası hatalarını öngörmesi, öğrenci çözümlerinin doğruluğunu ve yanlışlığını belirleyerek çözüme yönelik dönütler vermesi şeklinde yorumlanabilmektedir (Jacobs ve ark., 2010; van Es, 2011; van Es ve Sherin, 2002; 2008).

Öğretmenin fark etme becerisi öğrenci çözümlerinin doğru veya yanlış olduğunu belirlemekten daha fazlasını içermekle (Wilson ve ark., 2013) birlikte daha kapsamlı bir süreçten oluşmaktadır. Öğretmenlerin, öğrenci yanıtlarını daha derinlemesine incelemesi, öğrencilerin verdikleri yanıtlardaki stratejileri ve altında yatan sebepleri keşfetmeleri gerekmektedir (Kılıç, 2019a). Bu durum öğretmenlerin, öğrencilerini daha iyi tanımalarına ve öğretmenin kendi matematiksel bilgisini geliştirmesine olanak tanımaktadır (Wilson ve ark., 2013). Bir öğretmenin öğrencilerin matematiksel anlayışını fark etmesi, öğretmenin dersi nasıl planlayacağını, dersi işleyiş sürecini, öğrencilere vereceği dönütleri ve soracağı soruların niteliklerini (türlerini, zorluk seviyelerini...) dahi etkilemektedir. Ayrıca öğrenci çözümlerinin doğru veya yanlış olması verilecek dönütün şekillenmesinde önemli bir role sahiptir (Jacobs ve ark., 2010). Öğretmenlerin verecekleri dönütler, öğrencilerin matematiksel anlayışını geliştirici, kendi yöntemlerini ve çözümlerini oluşturabilmelerine ve konuyu anlamlandırabilmelerine fırsat sağlayıcı şekilde olmalıdır. Bu yüzden öğretmenlerden, öğrencilerin kullandığı yöntemlere ve yaptıkları doğru veya yanlış çözümlere, öğrencilerin kavramsal ve işlemsel anlayışını geliştirecek nitelikli dönütler vermeleri beklenmektedir. (Özkan, 2011; Russell, 1999; Van de Walle ve ark., 2016).

OME (2013), matematiksel anlayışın gelişimi için matematiğe odaklanmayı, ölçme ve değerlendirme yapmayı, etkili bir öğretim anlayışı geliştirmeyi önermektedir. Öğrencilerin matematiksel anlayışlarına katkı sunma ve etkili bir öğretim ortamının sağlanması için öğretmenlerin fark etme becerilerinin gelişimi önem arz etmektedir. Literatür incelendiğinde öğretmenlerin fark etme becerilerinin belirlenmesine ve gelişimine yönelik farklı çalışmaların olduğu görülmektedir. Bu çalışmalarda öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının öğretim sürecinde sınıf ortamının ve öğrencilerin yazılı çalışmalarının (Jacobs ve ark., 2010; van Es, 2011; van Es ve Sherin, 2002; van Es ve Sherin, 2008) incelenmesine yönelik fark etme becerisi ile

ilgili çeşitli teorik çerçeveler yer almaktadır. Bu çerçeveler bir sonraki bölümde detaylı olarak açıklanmıştır.

2.1.1. Fark Etme Becerisi ile İlgili Kullanılan Teorik Çerçeveler

Literatür incelendiğinde fark etme becerisi üzerinde farklı teorik çerçeveler (Barnhart ve van Es, 2015; Estapa ve ark., 2018; Jacobs ve ark., 2010; Sun ve van Es, 2015; van Es, 2011; van Es ve Sherin, 2002; van Es ve Sherin, 2008) bulunmaktadır. Fark etme becerisi ile ilgili yapılan çalışmalarda en çok kullanılan teorik çerçevelerin van Es (2011), van Es ve Sherin (2008) ve Jacobs ve arkadaşlarına (2010) ait olduğu görülmektedir (Birgin ve Eryılmaz, 2021). Aşağıda fark etme becerisine yönelik kullanılan teorik çerçevelerden bazılarına detaylı bir şekilde yer verilmiştir.

Fark etme becerisi ile ilgili yapılan çalışmalarda van Es ve Sherin'in (2002) çalışması önemli bir yere sahiptir. van Es ve Sherin (2002) oluşturdukları çerçevede, fark etmeyi sadece öğretmenlerin sınıfı gözlemlemesi olarak düşünmeyip, sınıf içi gözlemlerini yorumlama ve akıl yürütme şeklinde ele almışlardır.

- a. *Sınıf içi etkileşimlerde önemli ve dikkate değer durumları belirlemek:* Öğretmenler öğretim sürecinde her şeyin farkında olamayabilirler. Sınıf içinde öğrenci-öğrenci ve öğrenci-öğretmen etkileşimleri bulunur. Öğretmenler bu süreçte hangi etkileşimin daha önemli olduğunu fark etmelidir ve öğretim sürecine bu durumu yansıtmalıdır.
- b. *Sınıf içi etkileşimlerde önemli olaylar ile öğrenme ve öğretme ilkeleri arasında bağlantı kurma:* Öğretmen sınıf içindeki önemli olayları öğrenme ve öğretme ilkelerine göre anlamlandırmalı ve yorumlamalıdır.
- c. *Sınıf içi etkileşimlerde bir durumla ilgili akıl yürütmek için bağlam hakkında bildiklerini kullanma:* Öğretmenler, öğrencilerinin konuya hakimiyetini, neleri bilip bilmediğini ve olası yanılgılarını bilmeliler ve bunları anlamlandırabilmek için alan bilgilerini kullanmalıdır.

Yapılan çalışmanın analizinde fark etme becerisi dört gelişim düzeyinde ele alınmıştır. Bu gelişim düzeylerine Tablo 1'de yer verilmiştir.

Tablo 1. van Es ve Sherin’in (2002) fark etme becerisine yönelik gelişim düzeyleri

Düzeyler	Açıklamalar
Düzey 1	-Tanımlama ve değerlendirmeyi içerir. Öğretmenlerde henüz analitik bir yaklaşım gelişmemiştir.
Düzey 2	-Tanımlama, değerlendirme ve analitik parçaları içerir. Ancak analitik parçalar tamamlanmamış veya eksik olabilir.
Düzey 3	-Tanımlamalar yaparak olayları öğretim ilkeleriyle ilişkilendirir. Öğretmenlerin yaklaşımları artık tamamen analitik unsurlardan oluşmaktadır.
Düzey 4	-Tamamlanmış analitik parçaları içerir. Parçalar ve kanıtlar arasında kavramsal bağlantılar kurar. Pedagojik çözümlerin tanımlanmasını içerir.

van Es ve Sherin, 2002 yılında yaptıkları çalışmadaki teorik çerçeveden farklı olarak 2008 yılında daha farklı bir teorik çerçeve ortaya koymuşlardır (van Es ve Sherin, 2008). Bu çerçeveye göre fark etme becerisi “aktör (actor)”, “konu (topic)”, “tutum (stance)”, “spesifik (specificity)” ve “video odağı (video-focus)” şeklinde beş farklı bileşende ele alınmış ve bileşenlere Tablo 2’de yer verilmiştir.

Tablo 2. van Es ve Sherin’in (2008) fark etme becerisine yönelik analiz çerçevesi

Aktör	Konu	Tutum	Spesifik	Video Odağı
Öğrenci	Matematiksel	Tanımlama	Genel	Video Tabanlı
Öğretmen	Düşünme	Değerlendirme	Özel	Video Tabanlı
Kendisi	Pedagoji	Yorumlama		Değil
Program	İklim			
Geliştiriciler	Sınıf Yönetimi			
Diğer				

Üçüncü bir çerçeve de van Es (2011) tarafından oluşturulmuştur. van Es (2011) öğretmenlerin sınıf ortamında neyi fark ettikleri ve nasıl fark ettikleri üzerine bir çerçeve oluşturmuştur. Bu çerçevede fark etme becerileri dört gelişimsel düzeyde ele alınmıştır. Bu düzeyler “Düzey 1: Temel, Düzey 2: Karma, Düzey 3: Odaklanmış, Düzey 4: Genişletilmiş” olarak adlandırılmış ve yeni bir teorik çerçeve paylaşılmıştır. van Es (2011)’in çerçevesine Tablo 3’te yer verilmiştir.

Tablo 3. van Es'in (2011) fark etme becerisine yönelik analiz çerçevesi

Düzeyler	Öğretmenin Ne Fark Ettiği	Öğretmenin Nasıl Fark Ettiği
Düzey 1: Temel	-Sınıf ortamına, öğrenci öğrenmesine ve davranışa, öğretmenin pedagojisine odaklanır.	Neyi gözlemlediğine dair genel izlenimlerden bahseder. -Tanımlayıcı ve değerlendirici yorumlarda bulunur. -Analizi desteklemek için çok az kanıt sağlar ya da hiç kanıt sağlamaz. -Konuyu basitleştirir.
Düzey 2: Karma	-Öğretmenin pedagojisine odaklanır. -Belirli öğrencilerin matematiksel düşüncelerine ve davranışlarına odaklanmaya başlar.	-Genel izlenimlerini belirtir ve dikkate değer gördüğü olaylara da vurgu yapar. -Yorumlayıcı ve yargılayıcı bir tutumla değerlendirmeler yapar. -Desteklemek için bazı olaylar ve etkileşimlerden detaylar sunmaya başlar.
Düzey 3: Odaklanmış	-Matematiksel düşüncelere ve belirli öğrencilerin matematiksel düşüncelerine odaklanmaya başlar.	-Önemli olaylara vurgu yapar. -Yargılamadan yorumlayıcı tutum sergiler. -Desteklemek için bazı olaylardan ve etkileşimlerden bahseder. -Olaylar ve etkileşimler hakkında detaylı bilgi verir.
Düzey 4: Genişletilmiş	-Belirli öğrencilerin matematiksel düşüncelerine, öğretim stratejileri ile matematiksel düşünceleri arasındaki ilişkiye odaklanır.	-Önemli olaylara vurgu yapar. -Yorumlayıcı tutum sergiler. -Desteklemek için bazı olaylardan ve etkileşimlerden bahseder. -Olaylar ve etkileşimler hakkında detaylı bilgi verir. -Olaylarla öğrenme ve öğretme ilkeleri arasında ilişki kurar. -Yorumlara dayanarak alternatif pedagojik çözümlerde bulunur.

Literatürdeki önemli çerçevelerden biri de Jacobs ve arkadaşları (2010) tarafından oluşturulmuştur. Bu çerçeveye göre öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşüncelerini profesyonel olarak fark etmeleri üç basamakta incelenmektedir. Bu basamaklar öğrenci çözümlerine katılma, öğrenci çözümlerini yorumlama ve öğrenci çözümlerine nasıl yanıt vereceğine karar verme şeklindedir.

Öğrenci çözümlerine katılma: Öğretmenlerin, öğrencilerin matematiksel stratejilerindeki durumlara ve öğretim durumlarına ne ölçüde katıldığıdır. Bu basamak altında katılımcılara "Lütfen, bu problem için her bir çocuğun verdiği yanıt hakkında ne düşündüğünüzü detaylı bir şekilde açıklayınız." sorusu yöneltilmiştir. Basamağın analizini yapmak için yöneltilen sorudan elde edilen veriler üç stratejide değerlendirilmiştir. Katılımcıların verdiği cevaplarda matematiksel olarak önemli görülen detaylar belirlenmiş, öğrencilerin stratejilerine dikkat edip etmedikleri ve dikkat edenlerin ise matematiksel ayrıntıların çoğuna mı yoksa birkaçına mı dikkat ettikleri tespit edilmiştir. Bu üç stratejinin en az ikisi için en fazla detaya yer verdiği düşünülen katılımcılara dair kanıtların toplandığı görüşüne varılmıştır. Katılımcıların öğrenci çözümlerine katılmalarına yönelik değerlendirmeler kanıt (1) ve kanıt eksikliği (0) şeklinde ikili kodlamayla yapılmıştır.

Öğrenci çözümlerini yorumlama: Öğretmenin, öğrencilerin akıl yürütmesini, matematiksel düşünmesini ve çözme stratejilerini anlamlandırmasıdır. Bu basamak altında katılımcılara "Lütfen öğrencilerin matematiksel anlayışları hakkında ne öğrendiğinizi açıklayınız." sorusu yöneltilmiştir. Katılımcıların öğrenci çözümlerini yorumlamalarına yönelik kanıtları sağlam kanıt (2), sınırlı kanıt (1) ve kanıt eksikliği (0) şeklinde üçlü kodlamayla yapılmıştır.

Öğrenci çözümlerine nasıl yanıt vereceğine karar verme: Öğretmenlerin, öğrencilerin matematiksel düşünmelerine nasıl yanıt vereceklerine karar verirken kullandıkları akıl yürütmedir. Bir başka deyişle burada öğretmenlerin, öğrencinin matematiksel düşünmesinden öğrendiklerini ne ölçüde kullanabildiği ve bunu yaparken kullandıkları akıl yürütmenin, öğrencilerin matematiksel gelişimleri üzerine yapılan araştırmalardan elde edilen sonuçlarla tutarlı olup olmamasıdır. Bu basamak altında katılımcılara "Bu öğrencilerin öğretmenleri olduğunuzu varsayın. Bundan sonra öğrencilere hangi soruyu veya soruları sorardınız?" sorusu yöneltilmiş ve katılımcılardan bu soruları sormalarındaki gerekçelerini açıklamaları istenmiştir. Katılımcıların öğrenci çözümlerine nasıl yanıt vereceğine karar vermelerine yönelik değerlendirmeler sağlam kanıt (2), sınırlı kanıt (1) ve kanıt eksikliği (0) şeklinde üçlü kodlamayla yapılmıştır.

Yapılan çalışmada fark etme becerisine yönelik kullanılan analiz çerçevesine Tablo 4'te yer verilmiştir.

Tablo 4. Jacobs ve arkadaşlarının (2010) fark etme beceri düzeyleri için analiz çerçevesi

Fark Etme Becerileri	Fark Etme Düzeyleri	Açıklamalar
Öğrenci Çözümlerine Katılma	Kanıt (1)	·Öğrenci çözümlerine yönelik matematiksel ayrıntılara yer verir. ·Öğrenci stratejilerini destekleyici kanıtlar sunar, açıklamalar yapar.
	Kanıt Eksikliği (0)	·Öğrenci stratejilerine dair destekleyici kanıt gösteremez. ·Kişisel yorumlarda bulunur. ·Sözel pekiştireçlerde bulunur. ·Öğrenci çözümüne yönelik ayrıntılara yer vermez.
Öğrenci Çözümlerini Yorumlama	Sağlam Kanıt (2)	·Öğrenci çözümünde yer alan stratejileri birden fazla matematiksel anlayışa göre yorumlar. ·Öğrencilerin akıl yürütmelerine ayrıntılı yer verir. ·Öğrencilerin sahip olduğu ve sahip olmadığı matematiksel anlayışları detaylandırır.
	Sınırlı Kanıt (1)	·Çocukların anlayışlarını yorumlar fakat detaylı ayrıntılara yer vermez. ·Cevaplarda aşırı genellemelere yer verir.
	Kanıt Eksikliği (0)	·Öğrencilerin matematiksel düşünmelerine ilişkin yorumlarda bulunmaz. ·Kişisel yorumlarda bulunur. ·Çözümleri açıklamaz veya yanlış açıklama yapar.
Öğrenci Çözümlerine Nasıl Yanıt Vereceğine Karar Verme	Sağlam Kanıt (2)	·Öğrencinin mevcut stratejisine göre bir sonraki stratejisini öngörür. ·Farklı stratejilerin kullanımı için uygun soruları belirler. ·Öğrencinin matematiksel anlayışına yönelik geliştirici sorular sorar.
	Sınırlı Kanıt (1)	·Öğrenci stratejilerini dikkate alır. ·Daha genel cevaplar verir. ·Öğrenci anlayışlarını geneller. ·Kullandığı stratejilerde belirsizlikler vardır.
	Kanıt Eksikliği (0)	·Nasıl yanıt vereceğini bilemez. ·Hatalı yanıtlar verir. ·Öğrenci anlayışlarını dikkate almaz. ·Benzer soruları değiştirerek sorar. ·Problemi zorlaştırarak sorar.

Literatürde yer alan bir diğer çerçeve de Barnhart ve van Es (2015) tarafından oluşturulmuştur. Bu çerçeveye göre fark etme becerisi teşhis, analiz ve dönüt verme basamaklarından oluşmaktadır. Barnhart ve van Es'in (2015) fark etme becerileri için sundukları çerçeveye Tablo 5'te yer verilmiştir.

Tablo 5. Barnhart ve van Es'in (2015) fark etme becerileri için sundukları çerçeve

	Düşük Gelişmişlik	Orta Gelişmişlik	Yüksek Gelişmişlik
Teşhis	-Sınıf etkinliklerine, öğretmenin pedagojisine, öğrenci davranışına, sınıf iklimine vurgu yapar. -Öğrenci düşüncesine dikkat etmez.	-Bilimsel süreçte uygun şekilde veri toplar, öğrenci düşüncesini ortaya koyar.	-Bilimsel süreçte uygun şekilde veri toplar, yorumlar ve analizini yapar, öğrenci düşüncesini ortaya koyar.
Analiz	-Önemli olayları çok az ifade eder ya da hiç ifade etmez. -Çoğunlukla açıklamalarda bulunur. -Etkileşimleri ve sınıf etkinliklerini detaylandırılmaz, analiz yapmaz. -İddiaları desteklemek için çok az kanıt kullanır veya hiç kullanmaz.	-Önemli olaylara odaklanmaya başlar. -İddialarını destekleyici kanıtlar sunar.	-Önemli olayları tutarlı bir şekilde anlamlandırır. -İddialarını desteklemek için tutarlı kanıtlar kullanır.
Yanıt Verme	-Belirli öğrencilerin fikirlerini tanımlayamaz. -Bir daha ki sefer neyi farklı yapacağını belirleyemez.	-Ders sırasında belirli bir öğrencilerin fikrini tanımlar ve açıklar. -Bir dahaki sefere nelerin farklı yapılacağına dair önerilerde bulunur.	-Ders sırasında belirli bir öğrencilerin fikrini tanımlar ve açıklar. -Bir dahaki sefere nelerin farklı yapılacağına dair önerilerde bulunur. -Öğrenme ve öğretme arasında mantıklı ilişkiler kurar.

Literatür incelendiğinde öğrencilerin yazılı çalışmalarının kullanıldığı araştırmaların analizinde çoğunlukla Jacobs ve arkadaşlarının (2010) çerçevesinin kullanıldığı görülmektedir (Çopur ve Tekin-Sitrava, 2024; Doğan-Coşkun, 2021; Özel, 2019; Simpson ve Haltiwanger, 2017; Yıldız, 2022). Mevcut çalışmanın veri

toplama aracında öğrencilerin yazılı çalışmalarını içeren senaryolar kullanılmıştır. Bu yüzden çalışmanın fark etme becerisine yönelik yapılan analizler, Jacobs ve arkadaşlarının (2010) çerçevesi ele alınarak yapılmıştır.

2.2. Cebirsel Düşünme

Matematik tarihinde cebir önemli bir yere sahip olmuştur. “Cebir” ismine ilk olarak cebirin kurucusu olarak kabul edilen Harezmi’nin “El Kitab’ül-Muhtasar fi Hıسابı’l Cebr ve’l Mukabele” eserinde yer verilmiştir. Bu eserin adı dilimize “Tamamlama ve Dengeleme ile Hesaplama Üzerine Özet Kitap”, “Cebir ve Eşitlik Üzerine Özet Kitap”, “Cebir ve Denklem Hesabı Üzerine Özet Kitap” ve “Cebir ve Mukabele Hesabı Üzerine Özet Kitap” şeklinde çevrilmiştir (Baki ve Bütüner, 2011; Ekinci, 2021; Sarpkaya-Aktaş, 2021). Cebir, artı ve eksi gerçak sayılarla ve bu sayıların yerini tutan harfler yardımıyla nicelikler arasında bağlantı kurmayı sağlayan bir matematik dalıdır (TDK, 2023). Kieran (1992) cebiri, nicelikleri temsilen harflerin kullanılması ve sembollerle hesaplama yapma olarak tanımlamaktadır. Başka bir ifadeyle cebir, sayılar ve harfler arasındaki ilişkiyi açıklayan matematiğin sembolik bir dilidir (Baki, 2018; MacGregor ve Stacey, 1999; Usiskin, 1997, Vance, 1998).

MEB (2018a) öğretim programına göre cebir öğrenme alanı ile ilgili ilk kazanımlara 6. sınıfta yer verilmekte, önceki sınıf seviyelerinde ise aritmetik konularına yer verilmektedir. Henüz cebir derslerinin verilmediği döneme *cebiri öncesi* dönem denilmektedir. Bu dönemde matematiksel durumlar aritmetik işlemlerle çözülmektedir. Aritmetik, sayılar arası ilişkiyi ve sayılarla işlem yapmayı (NCTM, 1991), dört işlem kullanarak bilinenden bilinmeyeni bulmayı içerirken (Mason, 1996) cebir ise aritmetiğin soyutlanmış halidir (Akgün, 2006) ve harflerle işlem yapmayı içerir (Kieran, 1992). Cebir öncesi dönem, aritmetik ve cebir arasındaki ilişkilendirmede bir köprü görevi görmekte (Linchevski, 1995; NCTM, 1989) ve matematikteki soyut anlayışın gelişimi için bir nevi temel oluşturmaktadır (OME, 2013).

Aritmetikten cebire geçişle birlikte öğrenciler cebirle ilgili yeni kavramlarla tanışır. Literatür incelendiğinde öğrencilerin değişken, bilinmeyen, denklem kurma, cebirsel ifadeler gibi birçok cebirsel kavramı anlamada güçlük çektikleri ve çeşitli kavram yanılgılarına sahip oldukları görülmektedir (Carpenter ve ark., 2003; Kieran,

1990; MacGregor ve Stacey, 1993; Perso, 1992; Stephens ve ark, 2013). Welder'a (2012) göre öğretilecek konu içerikleri, öğrencilerin cebire geçiş becerilerini olumsuz yönde etkileyebilmektedir. Yapılan birçok çalışmada öğrencilerin cebir alanında zorlanma sebepleri arasında matematiğe karşı olumsuz tutumun olması, cebirin yapısı gereği soyut kavramların fazla olması, konuların ilk kez görülüyor olması, soyut düşünmenin yeterince gelişmemiş olması, cebirin doğasının tam olarak anlaşılamaması gösterilmektedir. Bu sebeplerin başında ise ilkökul düzeyinde öğrencilere cebirsel düşünme becerilerinin yeterince kazandırılmamış olması gösterilmektedir (Akkaya ve Durmuş, 2006; Durmuş, 2004; Evirgen, 2014; Kieran, 1992; Sfard ve Linchevski, 1994). Cebirsel düşünme, ilkökulda görülen aritmetik ile ortaokul ve lisede görülen cebirsel kavramların, soyut düşünmenin ve fonksiyonların öğrenimi arasında ilişkilendirme kurmayı içerir (Lawrence ve Hennessy, 2002; OME, 2013). Bu yüzden cebirsel düşünme, matematiksel düşünmenin önemli bir alt boyutu olarak görülmektedir (MEB, 2018a). Her ne kadar ülkemizde cebir öğrenme alanına ilk defa ortaokul programında (MEB, 2018a) yer verilse de bu alanda yapılan çalışmalar ve öneriler cebirsel düşünmenin okul öncesi dönemden itibaren geliştirilmesi gerektiğine vurgu yapmaktadır (Kieran, 1992; NCTM, 2000).

Cebirsel düşünme, cebir ile ilgili olmakla birlikte çok daha geniş bir anlama sahiptir. Herbert ve Brown (1997) cebirsel düşünmeyi, sözel olarak verilen matematiksel bilginin tablo, şekil, grafik ve denklem gibi farklı matematiksel temsillere dönüştürülmesi için matematiksel sembollerin ve araçların kullanılması olarak tanımlamaktadır. Driscoll (1999) cebirsel düşünmeyi, nicel durumların betimlenerek değişkenler arası ilişkilerin açıkça gösterilme kapasitesi olarak tanımlamaktadır. Kieran (2004) cebirsel düşünmeyi, niceliksel durumların ilişkisel analizlerinin yapılabilmesi için farklı sembollerin kullanılma becerisi olarak tanımlamaktadır. NCTM (2000) cebirsel düşünmenin, cebirsel semboller kullanılarak matematiksel durumları çeşitli şekillerde temsil ve analiz etmeyi, fonksiyonları anlamayı, nicel durumların ve ilişkilerin temsili için matematiksel modelleri kullanmayı, günlük hayatta karşılaşılan durumların değişimini analiz etmeyi içerdiğini belirtmektedir. Vance (1998) cebirsel düşünmenin, genellemeleri, değişkenleri, çeşitli gösterimleri ve hesaplamalardan elde edilmiş soyutlamaları içerdiğine vurgu yapmaktadır. Van de Walle ve arkadaşları (2016) cebirsel düşünmenin, sayı ve

hesaplamalarla (yani aritmetikle) genelleme yapmayı, bunları anlamlı bir sembol sistemi kullanarak göstermeyi, örüntü ve fonksiyon kavramlarını incelemeyi içerdiğine vurgu yapar. Bütün bu görüşlerden yola çıkarak cebirsel düşünme, fonksiyonların anlaşılması, örüntülerin ve ilişkilerin genellenmesi, matematiksel yapıların ve durumların farklı temsil biçimleriyle gösterilmesi, günlük hayat durumlarının analizinin yapılması, değişkenler arası ilişkilerin gösterilmesi şeklinde yorumlanabilir.

Cebirsel düşünmenin gelişimi ve bileşenlerine yönelik alan yazında farklı sınıflandırmalar mevcuttur. OME (2013) cebirsel düşünmenin bileşenlerini “genelleştirilmiş aritmetik” ve “fonksiyonel düşünme” şeklinde ikiye ayırmaktadır. Genelleştirilmiş aritmetik “ilişkileri ve özellikleri keşfetme”, “nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme” ve “değişken olarak sembolleri kullanma” şeklinde üçe ayrılmıştır. Fonksiyonel düşünme ise “örüntüleri genelleme” ve “ters işlemleri kullanma” şeklinde ikiye ayrılmıştır (OME, 2013). Driscoll (1999), yapma-tersini yapma, fonksiyonları temsil edebilmek için kurallar oluşturma ve hesaplamalardan soyutlama yapma şeklinde üçe ayırdığı zihin alışkanlıklarının cebirsel düşünmeyi geliştirebileceğini belirtmiştir. Ayrıca Driscoll (1999) genelleme yapmanın cebirsel düşünmeyi oluşturmada önemli bir yere sahip olduğunu da vurgulamaktadır. Ünlü (2021) ise cebirsel düşünmenin gelişimi için, somut modeller (örüntü blokları, cebir karoları, birim küpler...), grafik hesap makineleri, sanal manipülatifler ve dinamik yazılım uygulamaları gibi çeşitli araç ve gereçlerden de faydalanılabileceğini belirtmiştir.

2.2.1. Cebirsel Düşünme ile İlgili Yapılan Sınıflandırmalar

İlgili literatür incelendiğinde cebirsel düşünme ile ilgili farklı sınıflandırmalar mevcuttur (Blanton ve ark., 2011; Chimoni ve ark., 2018; Kaput, 1999; Kaput, 2008; OME, 2013). Aşağıda yapılan bazı sınıflandırmalar detaylı olarak açıklanmıştır.

Kaput (1999) cebirsel düşünmeyi 5 bileşene ayırmıştır. Cebirsel düşünmeyi, matematikteki aritmetik ve örüntülerden genellemeler yapma, sembollerin anlamlı kullanımı, sayı sistemindeki yapıların çalışılması, fonksiyon ve örüntülerin çalışılması ve bu dört maddeyi kapsayan matematiksel modelleme süreci olarak tanımlamaktadır.

Kaput'un (2008) yapmış olduğu sınıflandırmaya göre cebirsel düşünme “genelleştirilmiş aritmetik”, “fonksiyonel düşünme” ve “modelleme” olmak üzere üçe ayrılmaktadır.

Genelleştirilmiş aritmetik: Birçok eğitimci ve araştırmacı tarafından aritmetik ve nicel akıl yürütmeden genellemeler oluşturmak, cebirin ilk yolu olarak görülür. Aritmetik, işlemlerin ve özelliklerinin genelleştirilmesi, daha genel ilişkiler ve şekiller (sıfırın özellikleri, değişme özelliği vb.) açısından akıl yürütmeyi içerir. Bu da genelleştirilmiş aritmetik olarak cebirin kalbidir. Cebirin sözel ifadesi aritmetiğin yapısından oluşur. Aritmetik ifadelerle yapılan hesaplamalarda farklı bir bakış açısı kazandırılır. Aynı zamanda genelleştirilmiş aritmetik, sayıların özelliklerini ve genellemelerin oluşmasını da içerir. Örneğin, iki tek sayının toplamının çift olması, bir sayıyı 10 ve 100’le çarparken sayının sağına 0’ın eklenmesi, toplama ve çarpmada değişme özelliğinin kullanılması gibi özellikler örtülü olarak verildiğinde değil açıkça bir genellemeden bahsedildiğinde cebirsel olarak adlandırılmış olacaktır.

Fonksiyonel düşünme: Temelde işleve yönelik olan bu bileşen oldukça özel türden bir genellemeyi içerir. Bu genelleme, bazı alanlardaki sistematik çeşitlilikleri tanımlamak olarak düşünülebilir. Cebirin sembolik yönü genellikle, belli bir düzen içerisinde olan ifadelerde değişiklik yapmak, denklem oluşturmak ve denklemi çözmek, bir desenin farklı durumlarındaki eşdeğerlilik durumlarını belirlemek ya da fonksiyonların belirli değerleri alıp alamayacağını belirlemek için uygulanır. Bu bileşen kısmen de olsa temel modelleme etkinlikleriyle başlar. Desenler ve şekiller geometrik olarak oluşturulur. Fakat işleve yönelik fikirlerin hem çok zengin hem de çok geniş olmasından dolayı buranın sınırları net değildir.

Modelleme: Cebirsel bir aktivite olarak modelleme, üç temel tipte görülmektedir. Birinci tip modelleme daha çok, sayısal ve niceliksel değerlerden oluşur. Genellikle denklem şeklinde ifade edilir ve burada kullanılan değişken bir grubu temsil eden değişken olarak değil de bilinmeyen olarak ele alınır. İkinci tip modelleme, genellenen, modellenen durumdur. Genellenen bu ifade daha sonra bir fonksiyon şeklinde ifade edilir ve bir veya birden fazla değişken kullanımını gerektirecek şekli alır. Üçüncü tip modelleme, aritmetik bir problemin cebirsel ifade ile gösterilmesidir. Burada cebir, verilen problemin genel bir durum olarak görülmesi,

diğer temsillerle ve durumlarla karşılaştırılması gibi daha detaylı bir şekilde ilişkilendirilmesidir.

Blanton ve arkadaşlarının (2011) yapmış olduğu sınıflandırmaya göre cebirsel düşünme 5 büyük fikir etrafında ele alınmıştır. Bu 5 büyük fikri “cebirsel düşünme için bir bağlam olarak aritmetik”, “iki niceliğin denkliğinin ifadesi olarak denklemler”, “çok yönlü araçlar olarak değişkenler”, “ilişkileri genellemek için niceliksel akıl yürütmeyi kullanma” ve “cebire giden bir yol olarak fonksiyonel düşünme” bileşenleri oluşturmaktadır ve her bir fikir kendi içerisinde farklı temel anlayışları içermektedir.

- i) *Cebirsel düşünme için bir bağlam olarak aritmetik:* Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin özellikleri aritmetikte nasıl kullanılıyorsa cebirde de aynı şekilde kullanılmaktadır.
- ii) *İki niceliğin denkliğinin ifadesi olarak denklemler:* Denklemler, iki büyüklüğün denk olduğunu göstermek için aralarında eşittir işareti kullanılan matematiksel ifadelerdir.
- iii) *Çok yönlü araçlar olarak değişkenler:* Değişkenler, matematiksel düşünceleri kısa ve net yollarla tanımlamak için kullanılan çok yönlü araçlardır.
- iv) *İlişkileri genellemek için niceliksel akıl yürütmeyi kullanma:* Niceliksel akıl yürütme, nicelikler arasındaki ilişkileri tanımlamayı ve genelleştirmeyi içerir.
- v) *Cebire giden bir yol olarak fonksiyonel düşünme:* Fonksiyonel düşünme, birlikte değişen nicelikler arasındaki ilişkileri genelleştirmeyi, fonksiyonun davranışını analizi etmek için farklı temsiller kullanarak akıl yürütmeyi içerir.

OME’nin (2013) yapmış olduğu sınıflamaya göre cebirsel düşünme “genelleştirilmiş aritmetik” ve “fonksiyonel düşünme” olmak üzere iki bileşene ayrılmaktadır. Bunlardan genelleştirilmiş aritmetik kendi içerisinde üçe, fonksiyonel düşünme ise kendi içerisinde ikiye ayrılmaktadır:

- i) Genelleştirilmiş aritmetik
 - (1) İlişkileri ve özellikleri keşfetme
 - (2) Nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme
 - (3) Değişken olarak sembolleri kullanma

ii) Fonksiyonel düşünme

(1) Örüntüleri genelleme

(2) Ters işlemleri kullanma

Yapılan sınıflandırmalar arasında en kapsamlı olduğu ve diğer sınıflandırmalara kıyasla cebirsel düşünmeyi daha ayırt edici bileşenlerle ele aldığı düşünüldüğü için, bu çalışmada cebirsel düşünme ile ilgili OME'nin (2013) yapmış olduğu sınıflandırma kullanılmıştır. Cebirsel düşünmenin bileşenleri olan genelleştirilmiş aritmetiğe ve fonksiyonel düşünmeye aşağıdaki bölümlerde detaylı olarak yer verilmiştir.

2.2.1.1. Genelleştirilmiş Aritmetik

Aritmetik, sayıları, sayılar arasındaki ilişkiyi ve sayılarla dört işlem yapmayı içeren hesaplamaları ele alır (NCTM, 1991). Aritmetiğin soyutlanması ile ise cebir ortaya çıkmıştır (Akgün, 2006). Aritmetiğin temelinde sayılar, cebirin temelinde ise güçlü bir aritmetik bilgisi yer alır (Van Amerom, 2002). Cebir, aritmetiğe kıyasla diğer sayı sistemlerini de bünyesinde barındırır (Palabıyık ve İspir, 2011). Bu yüzden cebir, aritmetiğin genelleştirilmesi için gerekli olan bir dildir (Vance, 1998) ve soyut düşünmenin giriş kapısı olarak görülür (Witzel ve ark., 2003).

Literatür incelendiğinde cebirsel düşünmenin boyutlarından biri olarak kabul edilen genelleştirilmiş aritmetik ile ilgili farklı görüşler bulunmaktadır. Kaput (2008) genelleştirilmiş aritmetiğin, sayılar arası ilişkilerin ve özelliklerin tanımlanarak, cebirsel işlemler ve işlemlerin özellikleriyle denklemleri dönüştürme ve çözmeyle ilgili olduğunu belirtmiştir. Carpenter ve arkadaşları (2003) genelleştirilmiş aritmetiğin, sayılarla işlem yapabilme, sayılar arası ilişkiler ve özellikleri hakkında muhakeme yapabilme ile ilgili olduğuna vurgu yapmaktadır. OME (2013) ise genelleştirilmiş aritmetiğin, aritmetik kalıpların tanımlanarak, belirli sayılara ilişkin hesaplamaların ötesinde, aritmetiğin temel yapısı hakkında akıl yürütmeyi içerdiğine vurgu yapar.

Genelleştirilmiş aritmetik, öğrencilerin matematiksel anlayışlarının, eleştirel düşüncelerinin ve problem çözme becerilerinin gelişimine katkı sağlamaktadır. Genelleştirilmiş aritmetiğin anlaşılmasına katkı sağlayan yollar arasında matematiksel problemlerin gerçek yaşam durumlarıyla ilişkilendirilmesi (Verschaffel ve De Corte,

1997), problemlerin model ve materyallerle desteklenmesi (Van de Walle ve ark., 2016), matematiksel kavramlar arasındaki ilişkilere vurgu yapılarak öğrencilere bu ilişkilerin keşfettirilmesi (Carpenter ve Levi, 2000) ve matematiksel problemlerin çözümünde ve matematiksel ifadelerin gösteriminde değişkenlere yer verilerek öğrencilere değişkenler arası ilişkilerin keşfettirilmesi (Kieran, 2007) yer almaktadır. OME (2013) genelleştirilmiş aritmetiği, ilişkileri ve özellikleri keşfetme, nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme ve değişken olarak sembolleri kullanma şeklinde üç bileşende ele almıştır.

2.2.1.1.1. İlişkileri ve Özellikleri Keşfetme

Cebirin kalbinde matematiksel ilişkilerle ve genellemelerle ilgili matematiksel akıl yürütme yer alır (Kaput, 2008). MEB (2018a) matematik dersi öğretim programında sayılar ve işlemler öğrenme alanı içerisinde 1. sınıftan itibaren öğrencilere kazandırılması gereken temel matematiksel özelliklere yer verilmektedir. İlk sınıf kademelerinde matematiksel kavramların tanıtılması, kavramlar arası ilişkilerin incelenmesi, doğal sayılarda dört işlemin özellikleri, işlemler arasındaki ilişkilerin ve işlemsel becerilerinin kazandırılması ile ilgili kazanımlar öne çıkmaktadır. Program, kademeli ilerleyen bir yapıya sahiptir. Yeni öğrenmeler önceki öğrenmelerin üstüne eklenerek ilerler. Bu yüzden ilerleyen sınıf kademelerinde ise farklı sayı sistemleri (doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar...) üzerinde çalışılmaya başlanır. Bu sayı sistemleri arasında dört işlem becerileri geliştirilir, aralarındaki ilişkiler incelenir ve işlem becerileri kazandırılır (MEB, 2018a). Altun (2010) işlem ve işlemler arası özelliklerin öğreniminin matematikte önem arz ettiğine vurgu yapmaktadır.

İlişkileri ve özellikleri keşfetme sürecinde öğrencilerin zamanla sayı sistemine yönelik anlayışları genişlemekte ve soyut düşünmelerinin temeli atılmaktadır (Carpenter ve ark., 2003). Bu da öğrencinin somuttan soyuta geçişte önceki öğrenmeleri ile bağlantı kurmasına olanak sağlar. Öğrenci cebirsel ilişkileri açıklamak ve yorumlamak için cebirsel muhakemeler yapar. Yapılan muhakemeler sırasında öğrenci sayılar üzerindeki işlemleri keşfederken aynı zamanda sayıların özelliklerini ve birbirleri arasındaki ilişkileri de keşfeder. Öğrenmenin odağı zamanla soyut düşünmeye kaydıkça öğrencinin cebirsel genellemelere ulaşması da kolaylaşır (OME,

2013). Örneğin ilk başta öğrenciler verilen $2 + 1 = 3$ işleminde sonuca odaklanılır. Benzer örnekler ($12 + 3 = 15$, $17 + 16 = 33$ gibi) çözüldükçe, öğrenciler sayıların özelliklerine odaklanarak bir çift ve bir tek sayının toplamı tektir genellemesine ulaşır. Bu durumun genellenmesi diğer sayı çiftleriyle ($\text{çift} + \text{çift} = \text{çift}$, $\text{tek} + \text{tek} = \text{çift}$) de gerçekleştirilebilir. Benzer durumlar çarpma işlemi ($\text{çift} \cdot \text{tek} = \text{çift}$, $\text{tek} \cdot \text{tek} = \text{tek}$, $\text{çift} \cdot \text{çift} = \text{çift}$) için de genellenebilir (Van de Walle ve ark., 2016). Bir başka örnek olarak değişme özelliği verilebilir. Öğrenci verilen $3 + 7 = 7 + 3$ gibi bir eşitlikte ilk başta değişme özelliğini tam anlamlandıramayabilir. Fakat benzer örnekler çözüldükçe öğrenci değişme özelliğini anlamlandırmaya başlayacak ve özelliğin $a + b = b + a$ şeklinde cebirsel olarak genellemesini yapabilecektir. Cebirsel genelleme yapabilmeyi sağlayan tek-çift ilişkisi, değişme özelliği, dağılma özelliği, birleşme özelliği, yutan eleman ve etkisiz eleman özelliği gibi ilişkiler bu durumlara ekstra örnek olarak gösterilebilir (Carpenter ve ark., 2003; Van de Walle ve ark., 2016). İşlemlerin anlamlarındaki matematiksel düşünmeyi kavramak, dört işlem arasında bulunan ilişkiyi kavramak, parantez kullanımını ve işlem önceliğini anlamak verilen hesaplamalarda daha kolay işlem yapmaya olanak sağlamaktadır (OME, 2013).

Birçok öğrencinin işlemler arası ilişkileri sezgisel olarak anladığı görüldü de bazı öğrenciler bu ilişkileri kurabilme konusunda zorlanmaktadır (Altun, 2010). Literatür incelendiğinde öğrencilerin sayılar ve işlemlerle ilgili karşılaştıkları çeşitli zorluklar ve kavram yanlışları olduğu görülmektedir (Erbaş ve ark., 2009; Erdoğan ve Özdemir-Erdoğan, 2009; Schifter, 2001; Van de Walle ve ark., 2016; Varol ve Kubanç, 2012). Cebirsel genellemelere ulaşmak öğrenciler için her zaman bu kadar kolay olmamıştır. Matematiksel kavramların öğreniminde yaşanan zorluklar veya yanlış öğrenmeler, ileriki öğrenmeleri de etkileyebilmektedir (Zembat, 2010). Karşılaşılan zorluklar arasında öğrencilerin sayı sistemleri arasında yapılan dört işlemde ve dört işlemin özelliklerinde sıkıntı yaşamaları gösterilebilir. Öğrencilerin dört işlemde zorluk yaşamalarının sebeplerinden biri olarak bu işlemlere ait kuralları ve özellikleri birbirine karıştırmaları veya kuralları yanlış ezberlemeleri gösterilebilir (Varol ve Kubanç, 2012). Karşılaşılan zorluklara örnekler maddeler halinde aşağıda verilmiştir.

- Toplamada ve çarpmada rahatlıkla kullanılabilen değişme özelliğinin kullanımı öğrenciler için her zaman bu kadar anlamlı değildir (Van de Walle ve ark., 2016). Bir sınıf öğretmeni öğrencileriyle 1'den 10'a kadar olan sayıların toplamaları üzerinde çalışırken bazı öğrencilerin iki sayı arasındaki değişme özelliğini fark ettiklerini gözlemlemiştir. Daha sonra öğrencilerine bu durumun her zaman işe yarayıp yaramadığını dair soru yönelttiğinde öğrenciler bu durumun küçük sayılar için sağlandığını ama büyük sayılar için geçerli olup olamayacağı konusunda kararsızlık yaşadıklarını belirtmiştir (Schifter, 2001). Ayrıca öğrenciler değişme özelliğinin toplama işleminde olduğu gibi çıkarma işleminde de her zaman sağlanabileceğini düşünmektedir (Davis, 1984; Erbaş ve ark., 2009; Perso, 1992). Oysaki bu durum çıkarma işlemi için her zaman genellenebilecek bir durum değildir.
- Öğrencilerde, toplama ve çarpma işlemlerinin sonucu her zaman işleme girenlerden daha büyük olmalıdır, çıkarma ve bölme işlemlerinin sonucu ise her zaman işleme girenlerden daha küçük olmalıdır düşüncesi hâkimdir (Van de Walle ve ark., 2016).
- Öğrenciler, 0 ve 1 sayılarına özgü olan ilişkileri yanlış kavranmaktadır (Engelhardt, 1977). 1'in çarpmaya göre etkisiz eleman olması, 0'ın toplamaya göre etkisiz eleman ve çarpmaya göre yutan eleman olması gibi durumlar karıştırılabilmektedir. Ayrıca 0 ile ilgili bir başka zorluk durumu da bir sayının 0'a bölünmesi ile ilgilidir. Bu durumunun tanımsızlığını öğrencilerin bilmesi veya anlaması neredeyse imkansızdır. Bu özelliğin öğrenciler için anlamlı olması bakımından özelliğe yönelik bağlamların öğretmenler tarafından sunulması gerekmektedir (Van de Walle ve ark., 2016).

Sonuç olarak sayı sistemindeki ilişkilerin ve özelliklerin görünür kılınması için öğretmenler tarafından, öğrencilerin sayılar arası ilişkileri anlamlandırması ve genelleme yapmaya uygun özelliklerin keşfettirilmesi sağlanmalıdır. Öğrencilerin sahip olduğu yanlış ve hataların kaynağının fark edilmesi sanıldığı kadar kolay değildir. Bu yüzden öğretmenlerin bu konularda alanında uzman olmaları (Bingölbalı ve Özmantar, 2009), istenmeyen durumların önüne geçebilmek için öğrencilere mantıklı açıklamalar yapmaları ve öğrencilere uzman bir bakış açısıyla yaklaşmaları beklenmektedir (Rowell ve ark., 1990).

2.2.1.1.2. Nicelikler Arasındaki İlişki Olarak Eşitliği Keşfetme

Cebir, nicelikler ve işlemler arasındaki ilişkileri tanımakla ilgilidir (OME, 2013). Bu ilişkilerin gösterimi için çeşitli matematiksel semboller kullanılmaktadır (Carpenter ve Levi, 2000). Cebirsel ifadelerde, belirtilecek ifadenin ilişki durumuna göre $+$, $-$, $\times$, $\div$, $<$, $>$ gibi sembollerin kullanımı mevcuttur. Bu sembollerin yanı sıra eşitlik işareti matematikte en sık kullanılan sembollerden biridir (Knuth ve ark., 2006, Van de Walle ve ark, 2016). Eşitlik ilişkisini gösteren bu işaret “=” sembolü ile gösterilir. Eşitlik işareti, sembolün her iki tarafında da bulunan niceliklerin veya ifadelerin eşitliğini göstermek için kullanılır (Rittle-Johnson ve Alibali, 1999).

Öğrencilerin eşitlik işareti ile ilgili işlemsel ve ilişkişel olmak üzere iki temel anlayışa sahip oldukları görülmüştür (Alibali ve ark., 2007; Mathews ve ark., 2012; Stephens ve ark., 2013). Bu anlayışlar Mathews ve arkadaşları (2012) tarafından sabit işlemsel, esnek işlemsel, temel ilişkişel ve karşılaştırmalı ilişkişel şeklinde dört düzeye ve Stephens ve arkadaşları (2013) tarafından işlemsel, hesaplamalı ilişkişel ve yapısal ilişkişel şeklinde üç düzeye ayrılmıştır. Bu iki sınıflandırmadaki en belirgin fark Mathews ve arkadaşlarının (2012) sabit işlemsel ve esnek işlemsel olarak ayırdığı iki düzeyi Stephens ve arkadaşları (2013) tek düzeyde ele almış ve işlemsel düzey olarak isimlendirmiştir. Diğer düzeylerin içerikleri birbiriyle paralel olmakla birlikte yalnızca isimleri farklılık göstermektedir. Mathews ve arkadaşlarının (2012) temel ilişkişel düzeyi ve karşılaştırmalı ilişkişel düzeyi aynı sırayla Stephens ve arkadaşlarının (2013) hesaplamalı ilişkişel düzeyine ve yapısal ilişkişel düzeyine karşılık gelmektedir. Tablo 6’da eşitlik işareti ile ilgili anlayış düzeylerine, anlayış düzeylerinin açıklamalarına ve örneklerine yer verilmiştir.

Tablo 6. Mathews ve arkadaşlarının (2012) eşitlik işareti ile ilgili anlayış düzeyleri, düzeylerin açıklamaları ve örnekleri

Eşitlik İşaretine Yönelik Anlayış Düzeyleri	Düzyey Açıklamaları	Örnek
Sabit İşlemsel	Öğrenciler yalnızca, eşittir işaretinin solunda işlemlerin, sağında cevabın olduğu soruları çözer. Diğerlerinde başarısız olurlar.	Öğrenciler “ $7+3=?$, $8+?=13$ ” gibi soruları çözebilirken “ $?=5+2$, $6=6$, $2+3=?+4$ ” gibi soruları çözmede başarısız olurlar.
Esnek İşlemsel	Öğrenciler eşittir işaretinin sağ tarafında işlemlerin, sol tarafında sonucun bulunduğu ve eşitliğin her iki tarafında da işlem bulunmayan soruları doğru çözerken, diğer soru türlerinde başarısız olurlar.	Öğrenciler “ $7+3=?$, $?=5+2$, $6=6$ ” gibi soruları çözebilirken “ $2+3=?+4$ ” gibi sorularda başarısız olurlar.
Temel İlişkisel	Öğrenciler eşittir işaretinin her iki tarafında da bulunan işlemleri ayrı ayrı yapar ve buldukları sonuçları karşılaştırarak soruları çözer.	“ $7+10=?+11$ ” gibi bir soru verildiğinde öğrenciler soruyu, “ $7+10=17$ ” ise “ $?+11=17$ ” olmalıdır, bu yüzden $?=6$ olmalıdır, düşüncesiyle soruyu çözer.
Karşılaştırmalı İlişkisel	Öğrenciler eşittir işaretinin her iki tarafında bulunan terimleri birbiriyle karşılaştırarak soruları çözer. Bu karşılaştırma sorunun içerdiği işleme göre toplamsal olabileceği gibi çarpımsal da olabilir.	“ $7+10=?+11$ ” gibi bir soru verildiğinde öğrenciler soruyu, 10 sayısını 1 artmış ve 11 olmuş, o zaman eşitliğin sağlanması için 7 sayısını 1 azalmalı ve $?=6$ olmalıdır, düşüncesiyle soruyu çözer.

NCTM (2000) özellikle eşitlik işaretinin ilişkisel anlamının geliştirilmesi gerektiğini vurgular. MEB (2018a) matematik öğretim programına göre eşitlik işareti ile ilgili kazanımlara 2, 4 ve 7. sınıf düzeylerinde yer verildiği görülmektedir. 2. sınıf düzeyindeki kazanım “M.2.1.3.5. Eşit işaretinin matematiksel ifadeler arasındaki "eşitlik" anlamını fark eder” şeklindedir. 4. sınıf düzeyinde iki kazanıma yer verilmektedir. Bunlar “M.4.1.5.7. Aralarında eşitlik durumu olan iki matematiksel ifadeden birinde verilmeyen değeri belirler ve eşitliğin sağlandığını açıklar” ve

“M.4.1.5.8. Aralarında eşitlik durumu olmayan iki matematiksel ifadenin eşit olması için yapılması gereken işlemleri açıklar” şeklindedir. 7. sınıf düzeyinde ise eşitlik işareti ile ilgili “M.7.2.2.1. Eşitliğin korunumu ilkesini anlar” kazanımına yer verildiği görülmektedir (MEB, 2018a). Kazanımlar göz önüne alındığında eşitlik işaretinin ilişkisel anlamının ikinci sınıftan itibaren ön planda tutulduğu görülmektedir.

Eşitlik işaretinin ilişkisel anlamını kavrayan öğrencilerin verilen bir denklemi çözmede ve yorumlamada daha başarılı oldukları görülmüştür (Alibali ve ark., 2007). Öğrencilere “ $2 \blacktriangle + 15 = 31$ ” ve “ $2 \blacktriangle + 15 - 9 = 31 - 9$ ” şeklinde iki eşdeğer soru cümlesi verilir, öğrencilerden bilinmeyenlerin yerine gelebilecek değerlerin aynı olup olmadığı hakkında yorum yapmaları istendiğinde öğrenciler farklı çözüm yolları deneyeceklerdir. Bu soru aslında herhangi bir işlem yapmayı gerektirmeyen bir sorudur. Burada öğrencilerin eşitliğin korunup korunmadığını fark etmeleri beklenmektedir. Ancak bazı öğrenciler gerekli işlemleri yaparak bilinmeyenlerin aynı değere sahip olduğunu bulurken ilişkisel anlayışa sahip olan öğrenciler bu iki soru cümlesinin aslında aynı durumu belirttiğini yorumlayabileceklerdir. Herhangi bir işlem yapmadan iki soru cümlesinde de “ $\blacktriangle$ ” yerine gelecek değer aynı olduğunu fark edeceklerdir (Alibali ve ark., 2007; OME, 2013).

Herscovics ve Kieran (1980) eşitlik kavramının tam olarak anlaşılmasının cebirsel anlayışın gelişiminde önemli bir role sahip olduğuna vurgu yapar. Bu yüzden eşitliğin kavranması yalnızca aritmetik işlemlerde değil aynı zamanda cebirsel ifadeler içeren denklemleri çözme süreçlerinde de kolaylık sağlamaktadır (Knuth ve ark., 2006). Eşitlik işaretinin ilişkisel anlamını kavramış öğrenciler cebirsel denklemlerin çözümünde daha başarılı olurken, eşitlik işaretinin ilişkisel anlamına dair sınırlı anlayışın ve öğrenme güçlüklerinin olması cebir öğreniminde büyük bir engel oluşturabilmektedir (Carpenter, 2003).

Literatür incelendiğinde eşitlik işareti ile ilgili çeşitli zorluk ve yanlışlığı olduğu görülmektedir (Carpenter ve ark., 2003; Falkner ve ark., 1999; Kieran, 1981; Knuth ve ark., 2008; OME, 2013). Bu zorluklardan birisi eşitlik işaretinin tanımı ile ilgilidir. Literatürdeki bazı çalışmalarda öğrencilerin eşitlik işaretinin işlemsel anlamına yönelik tanımlar yaptığı görülmektedir. Örneğin “işlemin sonucundan önce yazılan sembol”, “toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin sonucunu veren sembol”, “bir şeyler yapılmasını gerektiren sembol” şeklinde tanımlarının yapıldığı

görülmektedir (Carpenter ve ark., 2003; Knuth ve ark., 2006; Mathews ve ark., 2012; Stephens ve ark., 2013). Öğrencilerin çoğu eşittir işaretinin solunda işlemlerin olacağını sağında ise işlemin sonucunun yer alacağını düşünmektedir (Kieran, 1981, Knuth ve ark., 2008). Yapılan bir çalışmada “ $? = 5 + 3$ ” soru cümlesi verilmiş ve öğrencilerin çözümü yapmak için önce eşittir işaretinin solunda işlem olacak, sağında ise cevap olacak şekilde ($5 + 3 = ?$) eşitliğin iki tarafını yer değiştirerek soruyu düzenledikleri ve daha sonra çözdükleri görülmüştür (Behr ve ark., 1980). Yapılan bazı çalışmalarda $3 + 5 = 6 + 2$ gibi eşitlikleri gören öğrencilerin eşittir işaretinin tek tarafında işlem olur düşüncesiyle verilen soru cümlesini $3 + 5 = 8$ ve $6 + 2 = 8$ şeklinde iki farklı şekilde gösterdikleri görülmüştür (Falkner ve ark., 1999; Kieran, 1989). Eşitlik işaretinin işlemsel anlamıyla ilgili karşılaşılan bir başka zorluk ise öğrencilerin $6 = 6$ gibi bir ifadeyi anlamsız veya yanlış kabul etmeleridir (Baroody ve Ginsburg, 1982). Karşılaşılan diğer hatalar ise öğrencilere $8 + 4 = \square + 5$ şeklinde bir soru cümlesi yöneltildiğinde öğrencilerin 5 sayısını görmezden gelerek “ $8 + 4 = 12$ ise $\square = 12$ ” cevabını vermeleri, işlemlerin ve eşittir işaretinin yerini değiştirerek $8 + 4 + 5 = \square$ şeklinde çözüp $\square = 17$ cevabını vermeleri ve son olarak satır boyu işlem yaparak $8 + 4 = 12 + 5 = 17$ cevabını vermeleridir (Carpenter ve ark., 2003).

Literatürde görülen yanlışların sebepleri arasında hesap makinesinde yapılan işlemin sonucunu elde etmek için “=” işaretinin kullanılması (Baroudi, 2006), yapılan işlemlerin çoğu zaman satır boyu devam ettirilmesi ve öğretmenlerin bu ve benzeri durumlara müdahalede bulunmaması gösterilebilir (Knuth ve ark., 2008). Bu şekilde karşılaşılan kavram yanlışlarını tespit etmek ve önlemek amacıyla ilk aşamada doğru-yanlış cümleleri kullanılabilir. Öğrencilere $5 + 3 = 8$, $8 = 5 + 3$, $6 + 2 = 2 + 6$, $4 + 4 = 7 + 1$ gibi sayı cümleleri verilerek işlemlerin doğruluğu veya yanlışlığı sorgulatılabilir (Behr ve ark., 1980; Carpenter ve ark., 2003; OME, 2013). Daha sonraki aşamalarda açık sayı cümlelerine yer verilebilir. Açık sayı cümleleri $8 + 4 = ? + 5$ ifadesinde olduğu gibi bir tarafta sayılar ve işlemlerin olduğu diğer tarafta ise bilinmeyen ve işlemlerin olduğu sayı cümleleridir (Stephens ve ark., 2013). Açık sayı cümlelerinin kullanımıyla $5 + 3 = ?$, $5 + ? = 8$, $8 = ? + 3$, $? = 5 + 3$, $5 + 3 = ? + 4$, $5 + ? = 8 + 4$, $5 + 3 = 9 - ?$ gibi bilinmeyen farklı konumlarda olduğu örnekler verilerek öğrencide bulunan eski bilgilerin üstüne yeni bilgilerin aktarımı sağlanır (Carpenter ve ark., 2003). Ayrıca öğrencilerde denge kavramının somutlaştırılması

için benzer soru cümleleri verilerek somut materyallerden denge modeli (terazi modeli) kullanımına başvurulabilir (OME, 2013; Warren ve Cooper, 2005). Son olarak öğretmenler eşittir işaretini içeren ifadelerde “üç artı beş eşittir sekiz” gibi yanılgıya sebep olabilecek bir söylem yerine “üç artı beşin toplamı sekiz ile aynıdır veya sekize denktir” gibi bir söylemle eşitliğin işlemsel anlamından ziyade ilişkisel anlamına vurgu yapabilirler (Van de Walle ve ark., 2016). Böylece tüm bu tavsiyeler doğrultusunda öğrencilerin eşittir işaretinin “işlemsel” anlamından ayrılıp “ilişkisel” anlamına yönlendirilmesi sağlanabilmektedir (Herscovics ve Kieran, 1980).

2.2.1.1.3. Değişken Olarak Sembolleri Kullanma

Değişken, cebirsel kavramların, sembol ve ilişkilerin öğretiminde kullanılan, matematiğin en önemli kavramlarından biridir (Philipp, 1992). Değişkeni TDK (2023), farklı sayı değerleri alabilen, bir denklemin katsayılarındaki farklılık gösteren nicelik, parametre olarak tanımlanmaktadır. Literatürde ise değişken, bir veya birden fazla değişen niceliği temsilen kullanılan harf ya da semboller (Chalouh ve Herscovics, 1988; Kieran, 1981; Küchemann, 1978; Philipp, 1992), herhangi bir değeri veya nesneyi temsilen kullanılan sembol (Boz, 2013), sonsuz sayıda değeri alabilen bir nicelik olarak (Osborne, 1909, aktaran Boz, 2013) tanımlanmaktadır. Değişken kavramı, aritmetikten cebire geçişte önemli bir rol oynamaktadır. Hem cebirin hem de matematiksel düşünmenin temelinde yer alır. Ayrıca değişken kavramını yalnızca cebir öğrenme alanı ve matematik dersi ile sınırlamak doğru değildir. Değişken kavramını anlamak, fonksiyonları anlamada ve analiz konularındaki limit ve türev kavramlarını anlamada da kolaylık sağlamaktadır. Bunun yanı sıra değişken kavramı olasılık ve veri işleme öğrenme alanlarındaki bağımlı-bağımsız değişkenlerin kullanımı, geometri öğrenme alanında formüllerin gösterimi, nokta ve açı gibi kavramların isimlendirilmesi gibi sembolik gösterimleri içeren diğer öğrenme alanları ile de ilişkilidir. Fen bilimleri ve sosyal bilimler gibi diğer derslerde de değişkenin kullanıldığı durumlar mevcuttur (Gürefe, 2021).

Cebirde harflerin değişken olarak kullanılmasının Aristo’ya dayandığı düşünülmektedir (Mates, 1972). Cebirin tarihi cebirin söz aşaması, söz-sembol aşaması ve sembol aşaması şeklinde üç döneme ayrılmaktadır. Cebirin söz aşaması olarak bilinen ilk döneminde denklemler sözel olarak ifade edilmiştir (Boz, 2013).

Cebirin söz-sembol aşaması olarak bilinen ikinci döneminde sözel ifadelerde geçen bilinmeyenlerin yerine semboller kullanılmıştır. Bu dönemin önemli temsilcisi olan Diophantus, bilinmeyenleri belirtmek için ϵ , Λ , γ , β , Δ gibi Yunan harflerini ve sembolleri kullanmıştır (Baki ve Bütüner, 2011). Yine bu dönemde yaşamış cebir alanındaki önemli matematikçilerden biri de Harezmi'dir. Harezmi'nin çalışmaları son dönem olan sembolik cebir dönemine geçişi sağlamıştır. Cebirin isim babası olan Harezmi, bilinmeyen için “şey” sözcüğünü kullanmıştır. Bu sözcük İspanyolcada “xei” olarak kullanılmakta ve kısaltmasının “x” olmasından dolayı günümüzde de bilinmeyenleri belirtmek için “x” kullanılmaktadır (Moore, 2012). Bilinmeyenlerin yerine “x” harfini kullanan ilk matematikçi Descartes'tir. Ayrıca Descartes, bilinmeyenler için x, y ve z harflerini de kullanmış, x^2 'yi xx , x^3 'ü ise xxx şeklinde ifade etmiştir (Baki ve Bütüner, 2011). Günümüzde Descartes'in kullanımına ek olarak bilinmeyenler için Yunan harfleri yerine Latin harfleri kullanılmakta, çoğunlukla x, y, z, a, b, m, n gibi harflere yer verilmektedir.

Öğretim programımızda, öğrencilerin hazır bulunuşlukları ve somuttan soyuta geçiş evreleri dikkate alındığından dolayı eğitimin ilk kademelerinde değişkenler için harflerin kullanımına yer verilmemekte, bilinmeyen nicelikleri temsil etmek için ♥, □, ▲ gibi semboller kullanılmaktadır. Değişken kavramının harfli kullanımına ilk olarak 6. sınıfta yer verilmekte ve bilinmeyen nicelikleri temsil etmek için x, y, a, b gibi harfler kullanılmaktadır (MEB, 2018a). Örneğin eğitimin ilk kademelerinde, $0 + ♥ = ♥$ ve $4 \cdot □ = 12$ eşitliklerinde olduğu gibi şekilsel semboller kullanılırken ilerleyen kademelerde verilen eşitlikler $0 + x = x$ ve $4 \cdot a = 12$ şeklinde harflerin kullanımıyla cebirsel bir ifadeye dönüşmektedir (OME, 2013).

Literatürde harflerin matematikteki farklı kullanımlarına yönelik çeşitli sınıflandırmalar bulunmaktadır (Baykul, 2014; Dogbey, 2010; Küchemann, 1978; Philipp, 1992; Ursini ve Trigueros, 2001). Bu sınıflandırmalarda harflerin kullanıldığı yerlere ve durumlara göre harflerin rollerinin bazı yerlerde çakıştığı bazı yerlerde ise değişkenlik gösterdiği görülmektedir. Literatürde yapılan kullanımlara göre çoğunlukla harfin bilinmeyen anlamı ve değişen nicelik anlamı üzerinde durulduğu görülmektedir (Van de Walle ve ark., 2016).

Küchemann (1978), öğrencilerin harfleri altı farklı şekilde yorumladıklarını ifade etmiştir ve bu ifadelere Tablo 7’de yer verilmiştir.

Tablo 7. Küchemann’ın (1978) harflerin kullanımına yönelik sınıflandırması

Harflerin Kullanımı	Açıklama	Örnek
Harfe değer verilmesi	Deneme-yanılma yolu ile harfin sayısal değerinin belirlenmesi	Eğer $a+5=7$ ise $a=?$
Harfin görmezden gelinmesi	Değişken içeren ifadeyi hesaplamaya gerek görülmemesi	Eğer $2a + b = 30$ ise $2a + b + 5 = ?$
Harfin bir nesne olarak kullanılması	Bir nesnenin özelliğinden ziyade, bir nesnenin kısaltması olarak kullanılması	“Manavda satılan muzların bir tanesi 2 TL, narların bir tanesi 3 TL’dir. Manavdan alınan muzlara ve narlara toplam 60 TL para ödenmiştir. Eğer m alınan muzların sayısını, n alınan narların sayısını gösteriyorsa m ve n arasındaki ilişkiyi gösteren denklem nedir?” sorusuna $2m + 3n = 60$ cevabının verilmesi
Harfin belirli bir bilinmeyen olarak kullanılması	Harfe değer verilmeksizin işlem yapılabilecek belirli bir sayı olması	Eğer $r = s + t$ ve $r + s + t = 30$ ise $r = ?$
Harfin genelleştirilmiş bir sayı olarak kullanılması	Harfin birden fazla değer alabilmesi	$c + d = 10$ ve $c < d$ ise c hakkında ne söylenebilir?
Harfin değişen bir miktar (nicelik) olarak kullanılması	Harfe verilen değerler arasında sistematik olarak değişen bir ilişkinin olması	$2n$ ve $n + 2$ ifadelerinden hangisi büyüktür?

Philipp (1992) harfli sembollerin kullanımını yedi farklı sınıfa ayırmıştır ve bu kullanımlara Tablo 8’de yer verilmiştir.

Tablo 8. Philipp’in (1992) harfli sembollerin kullanımına yönelik sınıflandırması

Harfli Sembollerin Kullanımı	Örnek
Etiket (bir nesne isminin kısaltması) olarak kullanılması	$3k = e$ (erkekler kızların 3 katı)
Sabit olarak kullanılması	π, e, c sayıları
Bilinmeyen olarak kullanılması	$5x - 9 = 21$ ifadesindeki x
Genelleştirilmiş bir sayı olarak kullanılması	$a + b = b + a$ ifadesindeki a ve b
Değişen bir nicelik (miktar, sayı) olarak kullanılması	$y = 3x + 5$ ifadesindeki x ve y
Parametre olarak kullanılması	$y = mx + n$ ifadesindeki m ve n
Soyut sembol olarak kullanılması	$e * x = x$ ifadesindeki e ve x

Baykul (2014) cebirde değişkeni bilinmeyen bir değer temsilcisi, bir yapı genelleyicisi ve birlikte değişen çoklukların temsilcisi olmak üzere üç sınıfa ayırmıştır ve bu sınıflandırmaya Tablo 9’da yer verilmiştir.

Tablo 9. Baykul’un (2014) değişkenlerin kullanımına yönelik sınıflandırması

Değişkenin kullanımı	Açıklama	Örnek
Bilinmeyen bir değer temsilcisi	Değişkenin ilk başta değerinin bilinmediği, çeşitli işlemler sonucunda değerinin hesaplandığı durumlardaki kullanımıdır	$2x+8=x-10$ denkleminde, x bilinmeyen olarak kullanılmıştır
Bir yapı genelleyicisi	Değişkenin hem bir sayıyı hem de bir yapının genelleyicisini belirtme durumlarındaki kullanımıdır	1, 3, 5... şeklinde devam eden bir örüntünün kuralı $2n-1$ şeklindedir. Buradaki n değişkeni bir yapının genelleyicisi olarak kullanılmıştır
Birlikte değişen çoklukların temsilcisi	İki veya daha çok çokluğun belli bir ilişki içerisinde değişmesini ifade etme durumlarındaki kullanımıdır	Bir kenar uzunluğu a olan karenin kenarı ve çevresi arasındaki ilişki olarak $\Ç=4a$ formülü kullanılmıştır

Cebirsel akıl yürütmenin kalbinde sembollerle ifade edilen genellemeler vardır. Öğrenci, aritmetik bir özelliğin birden fazla durumunu keşfedebilir ve ardından özellik hakkında açıklamalar yapmak için semboller kullanabilir. Bu üst düzey düşünme dört işlemin ve işlemler arasındaki ilişkilerin anlaşılmasını sağlar. $4 + a = 12$ ifadesinde kullanılan “ a ” harfi bilinmeyen bir sayıyı temsil edebildiği gibi başka bir durum için $a + 0 = a$ ifadesinde kullanılan “ a ” harfi $a = 1, 2, 3 \dots$ gibi birden fazla değer alarak bir genellemeye ulaşmak için de kullanılabilir. Burada “ a ” yerine hangi değer konulursa konulsun işlemin sonucunun yine kendisine eşit olduğunu gören öğrenci 0’ın toplamaya göre etkisiz eleman olduğu genellemesine ulaşabilir (OME, 2013; Van de Walle ve ark., 2016). Böylelikle öğrenciler değişkenler yardımıyla sembolik bir dil kullanmayı ve genellemeler yapmayı öğrenir (MEB, 2005).

Cebire geçişte öğrenciler aritmetiği ve cebiri birbirinden ayırt etmede zorlanmaktadır. Literatür incelendiğinde öğrencilerin değişken kavramına yönelik pek çok kavram yanılgısına sahip olduğu görülmektedir (Dede ve Argün, 2003; Küchemann, 1978; MacGregor ve Stacey, 1997; Philipp, 1992). Karşılaşılan yanılgılar maddeler halinde aşağıda verilmiştir.

- Harfin bir kelimenin kısaltması veya nesne olarak kullanılması: $3e$ ifadesindeki e ’nin elma olarak düşünülmesi bu duruma örnek olarak gösterilebilir (Küchemann, 1978). Oysaki bu ifade elmaların sayısının 3 katını temsil etmektedir.
- Harflerin basamak değeri olduğu düşünülmesi: Öğrenciler harflerin rakamdan başka değeri alamayacağını düşünmektedir. Örneğin ab ya da $5a$ gibi ifadeleri $a.b$ ya da $5.a$ şeklinde cebirsel bir işlem olarak değil de iki basamaklı bir sayı olarak düşünebilmektedir. Verilen bir durumda öğrenciler a ’yı tek basamaklı bir sayı olarak düşündüğü için $a = 12$ gibi bir ifadede a ’nın iki basamaklı bir sayıya eşit olamayacağını; ab ’yi çift basamaklı bir sayı olarak düşündüğü için $ab = 6$ veya $ab = 132$ gibi ifadelerde ab ’nin bir basamaklı veya üç basamaklı bir sayıya eşit olamayacağını düşünür. Ayrıca bu düşünceye sahip öğrencilere $3a = 36$ şeklinde bir ifade verildiğinde öğrencilerin a için 6 değerini verdiği de görülmektedir (Perso, 1992; MacGregor ve Stacey, 1997).
- Benzer olmayan terimler arasında toplama veya çıkarma işlemlerinin yapılması: $4x + 5 = ?$ sorusunda, $4x$ ile 5 arasında toplama işlemi yapılarak $9x$

şeklinde cevap verilmesi bu duruma örnektir. Bu soruda öğrenciler değişkeni görmezden gelerek 4 ve 5 sayılarını toplayarak 9 cevabını da verebilmektedirler. Bu durum, öğrencilerin toplama ve çıkarma işlemi içeren cebirsel ifadeleri sonuç olarak kabul etmemelerinden kaynaklanmaktadır. Örneğin $4x + 5$ ifadesini bir süreç olarak düşünerek $4x$ ile 5 arasında toplama işlemi yapmaya çalışmaktadırlar (Collis, 1974, Sfard ve Linchevski, 1994).

- Değişkeni temsil eden harfin tek bir değere sahip olması veya farklı harflerin farklı değerlere sahip olması: Öğrencilerde verilen bir problem durumunda kurulan $4 + a = 12$ ifadesinde $a = 8$ iken başka bir problem durumunda a 'nın 8'den başka bir değer alamayacağı düşüncesine sahip olunmasıdır. Ayrıca öğrencilerde $4 + x = 12$ ve $4 + y = 12$ ifadelerinde yer alan x ve y harflerinin farklı olmasından dolayı alacakları değerlerinde farklı olacağı düşüncesinin olduğu görülmektedir (Kieran, 1985; Küchemann, 1978; Stephens, 2005; Booth, 1988).
- İfadede verilen harflerin alfabe ile ilişkilendirilerek değişkene değer verilmesi: Öğrenciler harflere alfabedeki sırasına göre değer verebilmektedirler. $e+f=8$ ise $e+f+g=?$ sorusunda öğrenciler g yerine 7 yazarak 15 cevabını verebilmektedir (Küchemann, 1978). Burada öğrencilerin g yerine 7 yazmalarının sebebi g harfinin İngiliz alfabesinin 7. harfi olmasından kaynaklanmaktadır.

2.2.1.2. Fonksiyonel Düşünme

Cebirsel düşünmenin gelişiminin temelinde, nicelikler ve nicelikler arasındaki ilişkiler yer almaktadır (Uygur-Kabael ve Tanışlı, 2010). Kieran (2004) nicelikler arasındaki ilişkileri keşfetme sürecini fonksiyonel düşünme olarak adlandırmaktadır. Fonksiyonel düşünme birlikte değişen nicelikler arasındaki ilişkilerin genelleştirilmesidir (Blanton ve ark., 2011; Kaput, 2008). MEB (2018a) öğretim programına göre birlikte değişen nicelikler arasındaki ilişkilerin, ilkökul seviyesinde örüntüyü bulma ve ilerletme üzerine odaklandığı görülürken, ortaokul seviyesinde değişken kavramının öğrenimiyle birlikte örüntünün kuralını bulma ve doğrusal denklemleri oluşturma üzerine odaklandığı görülmektedir. Örneğin ilkökul seviyesinde 3, 6, 9... şeklinde devam eden bir sayı örüntüsü verilip örüntünün 10.

teriminin bulunmasına yönelik çalışmalar yapılmakta iken ortaokul seviyesinde örüntünün kuralının cebirsel olarak bulunmasına yönelik çalışmalar yapılmaktadır. Aynı zamanda örüntülerin cebirsel olarak ifade edilmesi ve doğrusal denklemlerin gösterimi fonksiyonel bir ilişkiyi içerir (Kaput, 2008; NCTM, 2000). Bu fonksiyonel ilişki ortaöğretimde soyut düşünmenin gelişimiyle birlikte fonksiyon kavramı üzerinde biçimlenmektedir (Uygur-Kabael ve Tanışlı, 2010).

Van de Walle ve arkadaşları (2016) cebirsel düşünmenin gelişiminin sayılar ve işlemlerle genellemeler yapmayı, yapılan genellemeleri sembollerle göstermeyi, örüntü ve fonksiyon kavramlarını anlamayı içerdiğini belirtmiştir. Cebirsel düşünmenin gelişiminde, fonksiyonel düşünme becerisinin gelişiminin önemli bir yeri vardır (Blanton ve ark., 2011; Kaput, 2008; OME, 2013). Warren ve arkadaşları (2006) fonksiyonel düşünmenin gelişimine ilkökul seviyesinden itibaren önem verilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. MEB (2018b) öğretim programına göre her ne kadar fonksiyonlar konusuna ortaöğretim seviyesinde yer verilse de fonksiyonel düşünmenin gelişimine 1. sınıftan itibaren yer verilen örüntüler konusuyla birlikte başladığı görülmektedir (MEB, 2018a). NCTM (2000) örüntülerin ve doğrusal denklemler konusunun öğretiminde çoklu temsillerin (sembolik ifadeler, tablo, şekil, grafik) kullanılmasının fonksiyonel düşünmenin gelişimine katkı sağlayacağını vurgulamaktadır. OME (2013) ise örüntüleri genelleme ve ters işlemleri kullanmayı fonksiyonel düşünmeyi geliştirici bileşenler olarak ele almaktadır.

2.2.1.2.1. Örüntüleri Genelleme

Gündelik yaşamda ve matematiğin tüm alanlarında örüntülere rastlamak mümkündür. Örüntüyü aramak, örüntüleri tarif edebilmeyi öğrenmek, örüntünün başka bir duruma nasıl aktarılacağını ve genişletilebileceğini öğrenmek cebirsel düşünmenin ve matematik yapmanın bir parçasıdır (Van de Walle ve ark., 2016). TDK'ye (2023) göre örüntü, olay ya da nesnelerin birbirini takip eden bir düzende gelişmesidir. Örüntüler, sayıların, şekillerin, nesnelerin vb. bir kural dahilinde oluşturulması, tekrarlanması ve genel ifadelerle yorumlanmasıdır (Guerrero ve Rivera, 2002; Olkun ve Toluk-Uçar, 2006; Threlfall, 1999). Örüntüdeki tekrar eden terimler, öğrenciye örüntü içindeki genellemeyi bulma konusunda yardımcı olur ve öğrencinin bir sonraki adımı tahmin etmesini sağlar. Daha ileriki aşamalarda öğrencinin bağımlı

ve bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi anlamasını sağlayarak herhangi bir adımdaki durumu tespit etmesine olanak tanır (OME, 2013). Örüntülerde terim sırası ile terim sırasına karşılık gelen değer arasında sistematik bir ilişki oluşturma, örüntünün devamına yönelik tahminlerde bulunma, örüntüleri parçalama ve örüntüleri tamamlama öğrencinin soyut düşünmesine katkı sağlamakla birlikte matematiksel anlayışını da geliştirir. Başka bir ifadeyle terim sırası ile terim sırasına karşılık gelen değer arasındaki ilişkiyi niceliksel olarak gösterebilme ve genellemeyebilme, değişkenleri ve cebirsel sembolleri kullanabilme matematik yapmanın ve cebirsel düşünmenin bir parçasıdır (Steele, 2005) ve öğrencilerin cebirsel düşünmesini geliştirmeye katkı sağlamaktadır (Van de Walle ve ark., 2016). Aynı zamanda genelleme, matematik öğretimindeki temel hedeflerden biri olmakla birlikte (NCTM, 2000) cebirdeki önemli konulardan da biridir (Tanışlı ve Özdaş, 2009). “Genelleme, matematiğin can damarıdır” ifadesini kullanan Mason (1996), genelleme yapmanın matematik için olan önemine de bu şekilde vurgu yapmıştır. Genellemenin, cebirin can damarı olarak düşünüldüğü, örüntünün ise onun temelinde yer aldığı söylenebilir (Tanışlı ve Özdaş, 2009). Öğrencide ilişkisel düşünme, cebirsel düşünme ve genelleme yapabilme gibi anlayışlar oluşmaya başladıkça, öğrenci örüntülerde daha karmaşık ve üst düzey genellemeleri yapabilecek düzeye gelecektir (OME, 2013).

Literatür incelendiğinde genellikle örüntülerin yapı bakımından tekrarlanan/tekrarlayan örüntü ve genişleyen/değişen örüntü olacak şekilde iki grupta ele alındığı görülmektedir (Ley, 2005; Olkun ve Yeşildere, 2007; Tanışlı ve Özdaş, 2009; Warren ve Cooper, 2006). Tekrarlanan/tekrarlayan örüntü, örüntünün en küçük biriminin en az iki nesnesinin döngüsel tekrarını içerecek şekilde ötelenmesidir (Liljedahl, 2004; Zaskis ve Liljedahl, 2002). Tekrarlanan/tekrarlayan örüntülere “1, 2, 1, 2, 1, 2...”, “A, B, C, A, B, C...” ve “♥, ●, ■, ▲, ♥, ●, ■, ▲...” örnek olarak verilebilir. Genişleyen/değişen örüntüler ise belirli bir kurala bağlı kalarak devam eden yapılardır. Genişleyen/değişen örüntülere “4, 7, 10...” ve “1, 4, 9...” örnek olarak verilebilir. Diğer örüntüler ise belli bir kuralı olmamasına rağmen kendi içinde belli bir ilişki bulunan örüntülerdir. Bu örüntülere Pascal üçgeni, Fibonacci ve Lucas sayıları gibi örüntü grupları örnek verilebilir.

Örüntüler tablo, sayı, sözel problem ve şekil olmak üzere dört farklı biçimde sunulabilir (Ley, 2005). Tablo biçiminde sunulan örüntüler, girdi sütunundaki değere

bağlı olarak çıktı sütunundaki değerin değiştiği, iki değer arasındaki sistematik ilişkinin aynı satır üzerinde verildiği örüntülerdir. Sayısal biçimde sunulan örüntüler, genelde ritmik sayma yöntemi ile sayıların virgülle veya belirli boşluklarla ayrılarak soldan sağa doğru yazıldığı örüntülerdir. Bu tarz örüntülerde sayılar arasındaki verilmeyen terimlerin bulunması veya sayıların ilerletilmesi istenebilir. Sözel problem biçiminde sunulan örüntüler, bir hikâye kurgusu üzerine oluşturulmuş örüntülerdir. Oluşturulan hikâyede örüntüye dair cevaplanması beklenen sorular da yer almaktadır. Son olarak şekil biçiminde sunulan örüntüler, örüntüdeki noktaların, çubukların, kibrit çöplerinin, birimkarelerin veya birim küplerin belli bir düzende ve artarak ilerlemesi sonucu oluşturulur (Ley, 2005, Yaman ve Umay, 2013). Şekil örüntüleri, öğrencilerin görsel muhakemelerini desteklediği ve farklı çözüm yollarına imkân sağladığı için gerek literatürde (Chua ve Hoyles, 2010; El Mouhayar ve Jurdak, 2013; Lannin ve ark., 2006; Ley, 2005; Rivera ve Becker, 2008; Tanışlı ve Köse, 2013; Yeşildere ve Akkoç, 2011) gerekse de öğretim programlarında (MEB, 2005 ve 2018a) sıklıkla kullanılmaktadır. Öğrencinin örüntü anlayışı geliştikçe öğrenci farklı temsiller arasında da ilişkiler kurmaya başlamaktadır (OME, 2013). Örneğin, verilen bir şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürebilir, verilen bir sayı örüntüsünü tablo biçiminde gösterebilir veya sözel bir problem oluşturabilir. Örüntü sunum biçimlerinin örneklerine Tablo 10'da yer verilmiştir.

Tablo 10. Örüntü sunum biçimleri

Örüntü Sunum Biçimleri	Örnek										
Tablo	<table><tr><th>Girdi</th><th>Çıktı</th></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>10</td></tr><tr><td>...</td><td>...</td></tr></table>	Girdi	Çıktı	1	4	2	7	3	10	...	...
Girdi	Çıktı										
1	4										
2	7										
3	10										
...	...										
Sayı	4, 7, 10, ...										
Sözel Problem	Bir telefon şirketi, yapılan aramalara bir ücret tarifiesi uygulamaktadır. Bu tarifeye göre yapılan aramadaki ilk 5 dakikalık görüşme için toplam 10 TL ödenmekte ve 5 dakikadan sonraki fazladan görüşülen her 1 dakika için dakika başına 6 TL ödenmektedir. Buna göre yapılan aramalarda 3 dakikalık, 8 dakikalık ve 15 dakikalık görüşmeler için ne kadar ücret ödenmektedir? Açıklayınız. (Lannin ve ark., 2006)										
Şekil	 1. Adım 2. Adım 3. Adım (Özdemir ve ark., 2015)										

Örüntü sorularını çözmede çeşitli çözüm stratejileri kullanılabilmektedir. Bu stratejiler öğrencide birden fazla çözüm yolu ortaya çıkarabilme, örüntünün matematiksel yapısı hakkında düşünceler geliştirebilme ve çözüme yönelik gerekçeleri sunabilme imkânı sağlar (OME, 2013). Örüntüleri genellemek için kullanılan stratejiler Tablo 11’de açıklanmıştır. Tablo 11’in oluşturulmasında Chua ve Hoyles (2010), El Mouhayar ve Jurdak (2013), Lannin (2003, 2005), Lannin ve ark. (2006), Ley (2005), Orton ve Orton (1999), Rivera ve Becker (2005), Stacey’nin (1989) çalışmalarından faydalanılmıştır.

Tablo 11. Örüntü genelleme stratejileri

Stratejiler	Özellikleri
Yinelemeli (Recursive)	Terimler arasında bulunan farka göre örüntü devam ettirilir ve fark son terime eklenerek problemde istenilen terim elde edilir.
Tahmin-Kontrol (Guess and Check)	Örüntünün genelinden ziyade daha özel bir durum denenerek örüntüye uygun olduğu düşünülen cebirsel bir kural oluşturulur. Kuralın işlerliği denetlenmez.
Orantı (Bütüne Genişletme) (Whole-Object or Proportion)	Terim sıraları ve terim değerleri arasında orantısal bir ilişki kurulur. Verilen terimlerin katları kullanılarak istenilen terimler bulunur.
Fonksiyonel (Explicit)	Terim sırası ve terim değerlerine bağlı kalarak terimler arasındaki ilişkinin cebirsel olarak hesaplanmasıdır. Örüntüde istenilen herhangi bir terimin bulunmasına ve genel terimin oluşturulmasına imkân verir.
Yığılmalı (Gruplamalı) (Chunking)	Örüntüde kurulan ilişkiye bağlı olarak istenen niteliğin bilinen değerlerine bir birim ekleyerek yinelemeli bir model oluşturulmasıdır.
Yapıcı (Constructive)	Örüntünün terimleri birbiri ile ortak elemanı olmayan parçalara ayrılır. Ayrılan her bir parçadaki nesnelerin veya şekillerin sayısı ilgili terim sırası ile ilişkilendirilerek örüntünün kuralı bulunur.
Yapıyı Çözücü (Deconstructive)	Örüntünün terimleri birbiri ile ortak elemanı olan parçalara ayrılır. Ayrılan parçalardaki nesnelerin veya şekillerin sayısı ilgili terim sırası ile ilişkilendirilerek örüntünün kuralı bulunur. Burada ortak elemanların birden fazla sayılmasını engelleyecek şekilde gerekli düzenlemeler yapılır.
Dönüşüme Dayalı Yapıcı/ Yapıyı Çözücü (Transformative Constructive/Deconstructive)	Örüntünün her bir terimindeki nesnelerin veya şekillerin yerleri değiştirilerek, örüntünün terimleri daha bilindik bir duruma getirilir. Daha sonra yapıcı veya yapıyı çözücü stratejiler ile örüntünün kuralı bulunur.
Tamamlamaya Dayalı Yapıcı/ Yapıyı Çözücü (Auxiliary Constructive/ Deconstructive)	Örüntünün her bir terimini daha bilindik bir yapıya dönüştürmek için gerekli düzenlemeler (şekil/ nesne ekleme) yapılır. Daha sonra yapıcı veya yapıyı çözücü stratejiler ile örüntünün kuralı bulunur. Dönüşüme dayalı stratejiden ayrılan yönü terimlere dışarıdan şekil veya nesne eklenmesidir.

2.2.1.2.2. Ters İşlemleri Kullanma

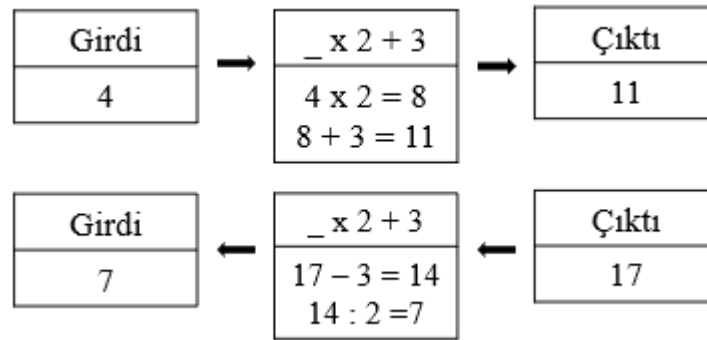
Matematik öğretim programında yer alan temel becerilerden biri de problem çözme becerisidir (MEB, 2018a). Problem çözme, nasıl çözüleceği ilk başta belli olmayan durumların, belirli adımların takibi sonucu çözümüne ulaşmayı içeren bilişsel bir süreçtir. Bu süreçte bir çözüm yolu planlanır ve önceki öğrenmelerin analizi yapılır (Cooper, 1986; Mayer, 1992; Schoenfeld, 1989). “Problem çözmek sadece matematik öğrenmenin bir amacı değil, aynı zamanda matematik öğrenmenin temel bir aracıdır” (NCTM, 2000). Problem çözme, yalnızca çözüme ulaşmayı hedeflemez ya da matematiksel bir bilgiyi pekiştirmez aynı zamanda öğrencilerde merakı, sorgulamayı, yeni cevaplar bulmayı, öğrenileni kullanmayı ve uygulamayı, farklı bakış açıları ve stratejiler geliştirmeyi, matematiksel anlayışlarını genişletmeyi ve derinleştirmeyi de sağlar (MEB, 2018a). Dolayısıyla problem çözme, matematiğin önemli bir süreç becerisi olarak görülmektedir (Olkun ve Toluk-Uçar, 2020).

Problem çözme süreci aşamalı bir süreçtir. Polya (1957), problem çözme sürecinin, problemin anlaşılması, çözümle ilgili kullanılacak stratejinin seçilmesi, seçilen stratejinin uygulanması ve çözümün değerlendirilmesi şeklinde dört aşamadan oluştuğunu belirtmiştir (Altun, 2010; Olkun ve Toluk-Uçar, 2020).

- Problemin anlaşılma aşaması, verilenlerin ve istenenlerin bulunmasını, problemde eksik veya fazla bilgilerin tespit edilmesini, önemli yerlerin belirlenmesini ve problemin alt kısımlara ayrılarak incelenmesini kapsamaktadır.
- Çözümle ilgili stratejinin seçilme aşaması, öğrencinin daha önce buna benzer bir problemi çözüp çözmediğini, çözdüyse nasıl bir yol izlediğini, çözümde kurabilecek bağıntıların olup olmadığını, problemi daha nasıl basitleştirebileceğini düşünmesini ve problemleri kısım kısım çözerek çözüme ne kadar yaklaştığına yönelik kendini sorgulamasını kapsamaktadır. Kısaca çözüm için plan yapma aşamasıdır.
- Stratejinin uygulanma aşaması, seçilen stratejinin kullanımı ile çözüme gidilmesini, yapılan işlemlerin kontrol edilmesini ve eğer kullandığı strateji işe yaramazsa başka bir strateji ile çözüme ulaşılmasını kapsamaktadır.
- Çözümün değerlendirilme aşaması ise sonucun doğruluğunun ve problemin çözümünde gidilen yolların incelenmesini, varsa başka çözüm yolları ile

çözülmesini, problemin farklı şekillerde ifade edilerek yeniden çözülmesini ve çözümün başka problem durumlarına da genellenmesini kapsamaktadır (Altun, 2010; Olkun ve Toluk-Uçar, 2020).

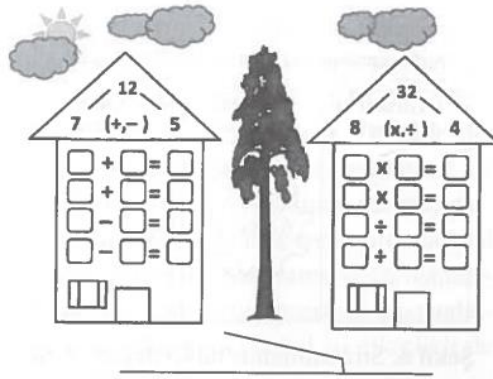
Problemlerin çözümünde belirli bir yolun ya da yöntemin kullanımı yoktur (Altun, 2010). Bir problemin çözümüne farklı stratejiler kullanılarak da ulaşılabilmektedir. Bunlardan bazıları örüntü arama, tahmin ve kontrol, tablo yapma, diyagram ve şekil çizme, modelleme yapma, bağıntı kurma, problemi basitleştirme, sistematik liste yapma, dolaylı akıl yürütme ve geriye doğru çalışmadır (Altun, 2010; Olkun ve Toluk-Uçar, 2020; Toptaş ve Kılıçkaya, 2017; Yazgan, 2007). Bu stratejiler arasında yer alan geriye doğru çalışma stratejisi uygulanırken, ters işlemlerden faydalanılmaktadır. Geriye doğru çalışma stratejisi adım adım geriye gitme yöntemiyle problemde istenilen sonucun bulunmasıdır (Posamentier ve Krulik, 1998). Öğrenciler işlemler arasındaki ilişkiyi öğrendikçe ters işlemler arasındaki ilişkiyi de kavramaya başlar. Öğrencide zamanla toplamının tersi çıkarmaysa çıkarmanın da tersi toplamadır, çarpmanın tersi bölmeyse bölmenin de tersi çarpmadır mantığı oluşur (OME, 2013). Şekil 1’de ters işlemleri kullanmaya yönelik işlemlerdeki girdi-çıkıtı arasındaki ilişkiyi gösteren bir örneğe yer verilmektedir.



Şekil 1. Girdi-çıkıtı arasındaki ilişkiyi gösteren tablo (OME, 2013)

Girdilerle işlem yaparak çıktıya ulaşabilen ve ters işlemler arasındaki ilişkiyi kavrayan bir öğrenci, çıktıdan yola çıkarak girdiye nasıl ulaşabileceğini de kavrayabilir (Driscoll, 1999; OME, 2013). Öğrencilerin ters işlem kullanma becerisini geliştirmek için *Fact Families* etkinliklerinden faydalanılabilir (Akkan, 2016). Bir ailedeki bireyler arası ilişkilerin bulunması gibi Fact Families etkinliklerinde de verilen sayılar arasındaki matematiksel ilişkiler buldurulur. İlkinde toplama ve

çıkarma işlemini, ikincisinde çarpma ve bölme işlemlerini içeren bir Fact Families etkinlik örneğine Şekil 2’de yer verilmiştir.



Şekil 2. Fact Families etkinlik örneği

Geriye doğru çalışma stratejisi ile problem çözülürken hangi işlemin yapılacağını tespit edilmesi önemlidir. Örneğin, “Ahmet’in yaşı Mehmet’in yaşının 2 katından 3 fazladır. Ahmet 17 yaşında ise Mehmet’in yaşını bulunuz” probleminin çözümünde geriye doğru çalışma stratejisini kullanan kişinin Mehmet’in yaşını bulabilmesi için önce 17’den 3’ü çıkarması, daha sonra bulduğu sonucu 2’ye bölmesi gerekmektedir. Problem cümlesinde önce çarpma sonra toplama işlemi yer alırken; çözümde önce çıkarma işlemi daha sonra bölme işlemi yapılmaktadır. Yani burada geriye doğru çalışma stratejisi ile problemi çözebilmek için ters sıra ile ters işlemlerin uygulanması gerekmektedir. Eğer problem cümlesinde geçen işlemler ve sıralarından herhangi birinin veya her ikisinin de tersi alınmazsa, bu strateji ile doğru cevaba ulaşamayacaktır. Dolayısıyla geriye doğru çalışma stratejisi ile problem çözebilmek için ters işlemleri tespit etme ve kullanma, doğru cevaba ulaşmada önemli bir adımdır (OME, 2013). Birçok öğrenci ters işlemleri kavramakta zorluk çekiyor olsa da ters işlemleri kavrayan öğrencilerin matematik öğrenimi olumlu yönde desteklenmektedir (Altun ve ark., 2007; OME, 2013; Yıldız ve ark., 2012).

3. LİTERATÜR TARAMASI

Alan yazın incelendiğinde matematik eğitiminde cebir özelinde yürütülen araştırmaların çoğunlukla öğrencilerin cebirsel düşünmelerinin belirlenmesi (Gülpek, 2020; Hart ve ark., 1998; Küchemann; 1978), çeşitli öğretim yöntemlerinin öğrencilerin cebirsel düşünmelerine etkisinin incelenmesi (Kaya, 2015), matematik öğretmenlerinin veya öğretmen adaylarının cebirsel düşünmeye yönelik pedagojik alan bilgilerinin belirlenmesi (Amaç ve Kabar, 2019; İdil ve Narlı, 2021;), matematik öğretmenlerinin veya öğretmen adaylarının cebirsel düşünmeye yönelik fark etme becerilerinin incelenmesi (Callejo ve Zapatera, 2017; Doğan-Coşkun, 2021; Gürsoy, 2019; Kılıç, 2019b; Magiera ve Zambak, 2021; Özel, 2019; Yıldız, 2022) gibi konulara odaklanıldığı görülmüştür.

Literatür incelendiğinde özellikle 2015 yılından itibaren fark etme becerisi üzerine yapılan araştırmalara yönelik ilginin arttığı ve bilimsel çalışmalara sıkça konu olduğu görülmektedir (Birgin ve Eryılmaz, 2022; Dede ve Özdemir, 2022; Weyers ve ark., 2023). Son yıllarda öğrenci düşünmesine yönelik fark etme becerisinin incelenmesiyle ilgili öğretmenlerle (Birinci, 2018; Çetin, 2023; Gürsoy, 2019; LaRochelle ve ark., 2019; Şermetoğlu ve Baki, 2019; Türker-Biber ve Yetkin-Özdemir, 2021; Yıldız, 2022) ve öğretmen adaylarıyla (Çopur ve Tekin-Sitrava, 2024; Doğan-Coşkun, 2021; Erbay, 2018; Güner, 2017; Güner ve Akyüz, 2017a, 2017b; Didiş-Kabar ve Tataroğlu-Taşdan, 2019; Kılıç, 2019b; Magiera ve Zambak, 2021; Özel, 2019; Şimşek, 2019; Tataroğlu-Taşdan, 2019; Tün, 2018; Türk, 2020) çalışmalar yapılmıştır.

Matematiğin farklı alanları ile ilgili fark etme becerilerinin incelendiği çalışmalarda birden fazla konunun ele alındığı (Bozkuş, 2020; Doğan ve Kılıç, 2019; Osmanoğlu, 2012; Tün, 2018; Türk, 2020; Yeşil, 2021) ya da sadece geometri ve ölçmenin (Açıl ve Zeybek, 2017; Baki ve Özmen, 2021; Çaylan-Ergene, 2024; Çaylan-Ergene ve Işıksal-Bostan, 2022; Çelikdemir, 2018; Dişbudak-Kuru ve ark., 2022; Girit-Yıldız ve ark., 2022; Güner, 2017; Güner ve Akyüz, 2017b; Özdemir-Baki ve Akgün, 2024; Son ve Sinclair, 2010; Tataroğlu-Taşdan ve ark., 2023; Ulusoy ve Çakıroğlu, 2021; Yılmaz ve Özdemir-Baki, 2023), matematiksel modellemenin (Baş, 2013; Kuşakçı-Konuş, 2022; Türker-Biber ve Yetkin-Özdemir, 2021), kesirlerin

(Birinci, 2018; Didiş-Kabar ve Tataroğlu-Taşdan, 2019; Dreher ve Kuntze, 2014; Erbay, 2018; Güner ve Akyüz, 2017a; Son ve Crespo, 2009; Tekin-Sitrava ve ark., 2022; Zeybek-Şimşek, 2020), türev ve limitin (Fernández ve ark., 2017; Şimşek, 2019; Sánchez-Matamoros ve ark., 2019), oran-orantının (Son, 2013; Şermetoğlu ve Baki 2019), istatistiğin (Shin, 2020; Shin, 2021; Tekin-Sitrava ve ark., 2024; Türker-Biber, 2017; Türker-Biber ve Yetkin-Özdemir, 2021), fonksiyonun (Tataroğlu-Taşdan, 2019) ve cebir konularının (Callejo ve Zapatera, 2017; Çetin, 2023; Çopur ve Tekin-Sitrava, 2024; Doğan-Coşkun, 2021; Gürsoy, 2019; Kılıç, 2019b; LaRochelle ve ark., 2019; Magiera ve Zambak, 2021; Özel, 2019; Simpson ve Haltiwanger, 2017; Tün, 2018; Yıldız, 2022) ele alındığı çalışmalara rastlanmaktadır.

Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerine yönelik fark etme becerilerinin incelendiği çalışmaların birçoğunun örüntü genellemeye (Callejo ve Zapatera, 2017; Çetin, 2023; Çetin-Argaç ve Didiş-Kabar, 2024; Doğan-Coşkun, 2021; Gürsoy, 2019; Hawthorne, 2016; Kılıç, 2019a; LaRochelle ve ark., 2019; Lee ve Lee, 2023; Magiera ve Zambak, 2021; Özel, 2019; Simpson ve Haltiwanger, 2017; Tün, 2018; Yıldız, 2022) odaklandığı görülürken daha az sayıda çalışmanın eşitlik (Çopur ve Tekin-Sitrava, 2024), değişken kullanımı ve denklemler (Kılıç, 2019b; Tün, 2018) gibi diğer cebir konularına odaklandığı görülmektedir.

van Es ve Sherin (2002), matematik ve fen bilgisi öğretmen adaylarının video analiz destek aracı (video analysis support tool [VAST]) ile fark etme becerilerinin gelişimini incelemişlerdir. Çalışmanın katılımcıları VAST'ı kullanan öğretmen adayları ve kullanmayan öğretmen adayları şeklinde iki gruba ayrılmıştır. Çalışmanın analiz çerçevesinde van Es ve Sherin (2002)'in kendi oluşturdukları teorik çerçeve kullanılmıştır. Çalışmanın sonucunda VAST'ı kullanan öğretmen adaylarının sınıf içindeki önemli olayları fark etme becerilerinde gelişme olduğu ve yorumlayıcı yaklaşımlarının geliştiği görülmüştür.

Jacobs ve arkadaşları (2010), ilkökul öğretmenleri ve öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşüncelerini profesyonel olarak fark etmelerini incelemişlerdir. Katılımcılar öğretmen adayları, 0-2 yıllık deneyime, 2-4 yıllık deneyime ve 4 yıl ve üzeri deneyime sahip öğretmenler şeklinde dört gruba ayrılmıştır. Her bir grup mesleki deneyim yönünden kendinden daha iyi olan bir üst düzeydeki

grup ile karşılaştırılmıştır. Katılımcılara öğrenci çözümlerini içeren düzenlenmiş bir ders videosu izletilmiş ve farklı bir problem özelinde öğrenci yazılı çalışmalarının olduğu üç farklı çalışma dağıtılmıştır. Katılımcıların öğrenci çözümlerine katılma, öğrenci çözümlerini yorumlama ve öğrenci çözümlerine nasıl yanıt vereceğine karar verme becerileri Jacobs ve arkadaşlarının (2010) teorik çerçevesi kullanılarak üç basamakta ölçülmüştür. Öğrenci stratejilerine katılma basamağında 0-2 ve 2-4 yıllık deneyime sahip öğretmenler arasında deneyim yılına bağlı olarak fark etme becerilerinin arttığı görülmüştür. Öğrenci anlayışlarını yorumlama basamağında tüm ikili gruplamalarda deneyim yılına bağlı olarak fark etme becerisinin arttığı görülmüştür. Nasıl yanıt verileceğine karar verme basamağında ise öğretmen adayları ve 0-2 yıllık deneyime sahip öğretmenler arasında fark etme becerilerine yönelik öğretim deneyiminden kaynaklı bir farklılaşma görülmezken, diğer iki gruplamalarda öğretmenlerin fark etme becerilerinde artışın olduğu görülmüştür.

Simpson ve Haltiwanger (2017), ortaokul matematik öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşüncelerini fark etme becerilerini incelemiştir. Çalışmaya lisans ikinci, üçüncü, dördüncü sınıf öğretmen adayları ve lisansüstü öğrenciler katılmıştır. Çalışmada cebir ve fonksiyonlarla ilgili problemlere yer verilmiştir. Cebir alanında bir örüntü genelleme sorusuna yönelik öğrencilerin yazılı çözümleri kullanılmıştır. Çalışmanın verileri Jacobs ve arkadaşlarının (2010) teorik çerçevesi kullanılarak analiz edilmiştir. Çalışmanın sonucunda son sınıf lisans öğrencilerinin ve lisansüstü öğrencilerinin diğer sınıf düzeyindeki öğrencilere kıyasla öğrenci düşüncelerine katılma basamağında daha başarılı olduğu görülmüştür. Yorumlama basamağında ise öğretmen adaylarının yalnızca öğrencilerin anladığı yerlere odaklandıkları, öğrencilerin anlamadıkları yerleri ise dikkate almadıkları görülmüştür. Yanıt verme basamağında ise öğretmen adaylarının verdikleri yanıtların çoğunluğunun öğrenci çalışmalarıyla ilgili olmadığı görülmüştür.

Callejo ve Zapatera (2017), sınıf öğretmeni adaylarının örüntü genellemelerini fark etme becerilerini incelemiştir. Veri toplama aracında üç farklı şekil örüntüsüne ait gerçek öğrenci çözümleri kullanılmıştır. Çalışmada Jacobs ve arkadaşlarının (2010) teorik çerçevesi kullanılarak verilerin analizi yapılmıştır. Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının öğrenci çözümlerindeki matematiksel unsurları belirleyebilme yönünden dikkat etme basamağında kanıt göstermiş oldukları; ama öğrenci

öz mlerini yorumlama basamağında yeterince başarı gösteremedikleri tespit edilmiştir.

LaRochelle ve arkadaşları (2019), ortaokul matematik öğretmenlerinin örüntü genelleme ile ilgili  ğrenci düşünmelerini profesyonel olarak fark etmelerini incelemişlerdir. Veri toplama aracı olarak öğretmenlere  ğrenci düşünmelerini içeren bir ders kayıt videosu izletilmiş ve öğretmenlerden istenilen soruları cevaplamaları beklenmiştir. Çalışmada Jacobs ve arkadaşlarının (2010) teorik erevesi kullanılarak verilerin analizi yapılmıştır. Çalışmanın sonucunda öğretmenlerin  ğrenci düşünmelerine katılımlarına yönelik sağlam kanıt sunulabildikleri görülürken yorumlama ve nasıl dönüt vereceğine karar verme basamaklarında sağlam kanıt sunamadıkları görülmüştür. Hatta dönüt verme basamağında eksik kanıt sunma durumlarının sınırlı kanıt sunma durumlarına kıyasla daha fazla olduğu görülmüştür.

Özel (2019), ortaokul matematik  ğretmeni adaylarının öğrencilerin cebirsel d ş nmelerindeki fark etme becerilerini örüntüler konusu kapsamında incelemiştir. Çalışma için ortaokul öğrencilerine örüntü genelleme testi uygulanmış ve aralarından seçilen  ğrenci çözümleri çalışmaya katılan otuz iki  ğretmen adayına anket şeklinde uygulanmıştır. Aralarından seçilen sekiz matematik  ğretmeni adayı ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Görüşme soruları Jacobs ve arkadaşlarının (2010) teorik çerçevesinde kullanılan sorulardan oluşmaktadır. Çalışmanın sonucunda  ğretmen adaylarının öğrencilerin doğru çözümlerini yorumlamada yanlış çözümlerini yorumlamaya kıyasla daha başarılı olduğu; fakat verilen doğru  ğrenci çözümlerine kıyasla yanlış  ğrenci çözümlerinde öğrencilerin cebirsel düşünmelerini daha iyi destekleyebildikleri görülmüştür.

Doğan-Coşkun (2021), sınıf  ğretmeni adaylarının öğrencilerin cebirsel düşünmelerine yönelik fark etme becerilerini incelemiştir. Öğrencilere yöneltilen bir şekil örüntüsüne yönelik soru ile öğrencilerin verdiği   doğru ve bir yanlış çözümü içeren cevaplar  ğretmen adaylarına gösterilmiştir. Öğretmen adaylarının fark etme becerileri Jacobs ve arkadaşlarının (2010) teorik erevesi kullanılarak analiz edilmiştir. Çalışmanın sonucunda  ğretmen adaylarının dikkat etme ve yorumlama basamaklarında yeteri kadar sağlam kanıt sunamadıkları, dönüt verme basamağında ise sağlam kanıtlar sundukları tespit edilmiştir.

Magiera ve Zambak (2022), ortaokul matematik öğretmenleri adaylarının yazılı çalışmalar ve video kayıtlar bağlamında öğrencilerin örüntü genellemeleri ile ilgili fark etme becerilerini incelemiştir. Veri toplama aracında üç farklı şekil örüntüsüne yer verilmiştir. Öğrencilerin yazılı çalışmaları (2 yazılı çalışma) ve video kayıtları (2 video kaydı) öğretmen adaylarına gösterilmiş ve çalışma soruları sorulmuştur. Çalışmanın verileri Jacobs ve arkadaşlarının (2010) teorik çerçevesi kullanılarak analiz edilmiştir. Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının video kayıtlarına kıyasla öğrenci çözümlerine yazılı çalışmalarda daha iyi odaklandıkları ve öğrenci düşüncelerini daha iyi analiz edebildikleri görülmüştür. Video kayıtlarında gözden kaçabilen durumların yazılı çalışmalarda daha detaylı incelenebilme fırsatının sağlandığı görülmüştür.

Yıldız (2022), ortaokul matematik öğretmenlerinin gerçek öğrenci çözümlerine ilişkin öğrencilerin sayı örüntülerini genelleme sürecine dönük farkındalıklarını incelemiştir. Araştırmaya katılan öğretmenlere, öncelikle öğrenci çözümlerini içermeyen örüntü genelleme soruları gösterilmiş, sonrasında öğretmenlerden öğrencilerin bu sorularda düşebilecekleri hatalara ve soruları çözerken kullanabilecekleri stratejilere dair tahminlerde bulunmaları istenmiştir. Daha sonra öğrenci çözümleri gösterilerek öğretmenlerden öğrencilerin çözümlerindeki hataları ve çözümlerinde kullandıkları stratejileri belirlemeleri istenmiş ve yapılan hataların giderilmesi için dönütler alınmıştır. Araştırmanın verileri Jacobs ve arkadaşlarının (2010) teorik çerçevesi dikkate alınarak analiz edilmiştir. Çalışmanın bulgularında öğretmenlerin, öğrencilerin daha çok görünür stratejilerine odaklandıkları, diğer basamaklara kıyasla dikkat etme basamağında daha başarılı oldukları görülmüştür. Ayrıca öğrenci çözümlerini yorumlama ve öğrencilere dönüt verme basamaklarında ise yetersiz kanıt sunma durumlarının çok daha fazla olduğu görülmüştür.

Çetin (2023), ortaokul matematik öğretmenlerinin öğrencilerin şekil örüntülerine yönelik cebirsel düşünceleri ile ilgili fark etme becerilerini incelemiştir. Veri toplama aracında doğru ve yanlış çözümleri içeren öğrenci çözüm kağıtları, video kayıtları ve öğretmenlerle yapılan mülakatların yanıtları yer almaktadır. Araştırmanın verileri Jacobs ve arkadaşlarının (2010) teorik çerçevesi dikkate alınarak analiz edilmiştir. Çalışmanın sonucunda öğretmenlerin öğrenci düşüncelerine dikkat etme ve yorumlama basamaklarında yalnızca bir sağlam kanıt sunduğu, sınırlı kanıt ve yetersiz kanıt sunma durumlarının ise birbirine yakın değerler aldığı görülmüştür.

Öğrenci düşünmelerine yanıt verme aşamasında ise cevaplar yanıt türlerine göre kodlanmıştır. Verilen dönütlerde çoğunlukla öğrenciyi doğru cevaba yönlendirici sorular sorulduğu, konunun yeniden anlatıldığı ya da sözel pekiştireçlerde bulunduğu görülmüştür.

Tün (2018), ortaokul matematik öğretmen adaylarının fark etme becerilerini 7. sınıf öğrencilerinin sayılar, cebir, veri analizi ve geometri konularını içeren matematik etkinliklerini kullanarak incelemiştir. Cebir alanına yönelik kullanılan etkinlikler örüntü genelleme, değişken kullanımı ve denklemler konularını içermektedir. Öğretmen adaylarının fark etme becerilerindeki değişimlerin incelenmesi için çalışma sırasındaki ve sonrasındaki öğrenci etkileşimlerini içeren ders videoları ile yapılan uygulamalara yönelik yansıtıcı raporlar veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Çalışmanın verileri Jacobs ve arkadaşlarının (2010) teorik çerçevesi kullanılarak analiz edilmiştir. Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşünmelerini gerekçeleriyle yorumladıkları ve fark etme becerilerinin gelişiminde video analizlerinin ve yazılı raporların etkili olduğu görülmüştür.

Gürsoy (2019), bir ortaokul matematik öğretmenin cebir öğretimindeki fark etme becerisini incelemiştir. Çalışma bir eylem araştırmasıdır ve araştırmacı kendi ders videolarını izleyerek her dersin sonunda video günlükler tutmuştur. Ders videolarında cebir alanına yönelik örüntüleri genelleme ve değişken kullanımı konuları ele alınmıştır. van Es ve Sherin (2002) ve Jacobs ve arkadaşlarının (2010) tanımlarından yola çıkılarak oluşturulan kodlar ile çalışmanın analizi yapılmıştır. Çalışmanın sonucunda araştırmacı, öğrenci düşünmelerinde dikkat etmediği şeyleri fark ettiğini, öz sorgulama becerisinin geliştiğini, öğrencilerin yaşadığı güçlükleri fark etme konusunda gelişme kaydettiğini ve kendisinin zaman zaman öğrencilerin öğrenmesinde güçlüklerle sebep olduğunu fark etmiştir.

Kılıç (2019b), ortaokul matematik öğretmeni adaylarının öğrencilerin cebir öğrenme alanında denklemler konusundaki hata ve kavram yanlışlarına yönelik farkındalıklarını incelemiştir. Çalışmaya katılan altı öğretmen adayından üçü ile görüşmeler yapılmıştır. Öğretmen adayları önce ortaokul öğrencileriyle denklemler konusundaki hata ve kavram yanlışlarının belirlenmesine yönelik görüşmeler yapmış, daha sonra öğretmen adaylarına fark etme becerilerinin incelenmesine yönelik görüşme formu doldurtulmuştur. Görüşme formlarının analizi için Jacobs ve

arkadaşlarının (2010) ve Barnhart ve van Es'in (2015) çerçeveleri kullanılmıştır. Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının diğer adımlara kıyasla teşhis adımıyla başarılarının daha fazla olduğu, fakat bu başarının diğer adımlara etkisinin yeterli olmadığı görülmüştür.

Türk (2020), ders imecesinin sınıf öğretmeni adaylarının farklı matematik konularına yönelik fark etme becerilerine etkisini incelemiştir. Çalışma, 3. ve 4. sınıf kazanımlarının ele alındığı ve öğretmen adaylarına sekiz haftalık ders planının hazırlatıldığı bir eylem araştırmasıdır. Çalışmada ders imecesi yönteminin öğrencilerin matematiksel düşüncelerini nasıl etkilediği ve öğrencilerin kavram yanılgıları ve kavramsal öğrenmelerinin öğretmen adaylarının fark etmelerine etkisinin nasıl olduğu belirlenmeye çalışılmıştır. Öğretmen adayları, ders imecesi çalışmasına daha önceden katılanlar ve katılmayanlar şeklinde gruplara ayrılmıştır. Verilerin analizinde van Es'in (2011) fark etme düzeylerini içeren teorik çerçevesi kullanılmıştır. Çalışmanın sonucunda ders imecesi grubunun düzey 3 ve düzey 4 seviyesinde olduğu görülürken karşılaştırma grubunun düzey 1 ve düzey 2 seviyesinde olduğu görülmüştür.

Çopur ve Tekin-Sitrava (2024), öğretmen adaylarının cebirsel ifadelerle yönelik kavram yanılgılarını fark etme becerilerini incelemişlerdir. Çalışmada öğretmen adaylarına değişken içeren bir işlemin sonucunun yer aldığı öğrenci çözümü gösterilmiş ve araştırma soruları yöneltilmiştir. Araştırmanın verileri Jacobs ve arkadaşlarının (2010) teorik çerçevesi dikkate alınarak analiz edilmiştir. Çalışmanın sonucunda dikkat etme basamağında yetersiz kanıt sunma durumlarının sağlam kanıt sunma durumlarına kıyasla oldukça fazla olduğu görülürken yorumlama basamağında bu durumun tam tersi olduğu görülmüştür. Dönüt verme basamağında ise en fazla yetersiz düzeyde kanıtın sunulduğu görülürken, bu basamağın üç düzeyinde de kanıtların birbirine yakın değer aldığı görülmüştür.

Literatürde öğretmen ve öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerine yönelik fark etme becerilerinin incelendiği çalışmalarda, çoğunlukla cebirsel düşünmenin tek bir bileşenine odaklanıldığı görülürken çalışmaların sadece birkaçında birden fazla konunun ele alındığı görülmektedir. Çalışmalarda toplanan veri çeşitliliğinin daha fazla elde edilebilmesinden dolayı çoğunlukla çalışmalarda örüntüleri genelleme konusu çalışılmış; çok az çalışmada ise değişkenlerin kullanımı, denklemler ya da eşitlik kavramı ile ilgili bileşenler üzerinde ayrı ayrı çalışıldığı

görülmüştür. Cebirsel düşünme ve cebir öğrenme alanları ile ilgili yapılan çalışmalarda genellikle Jacobs ve arkadaşlarının (2010) teorik çerçevesi kullanılmış ve veri toplama aracı olarak çoğunlukla öğrenci çözümlerini içeren yazılı çalışmalar tercih edilmiştir.

OME'ye (2013) göre cebirsel düşünme, genelleştirilmiş aritmetik ve fonksiyonel düşünme şeklinde iki bileşene ayrılmaktadır. Genelleştirilmiş aritmetik kendi içinde üçe, fonksiyonel düşünme ise kendi içinde iki bileşen olmak üzere cebirsel düşünme toplamda beş alt bileşene ayrılmaktadır. Literatürdeki çalışmaların çoğunlukla bu beş alt bileşenden yalnızca bir veya ikisine yönelik olduğu görülmektedir. Yapılan bu çalışmayı diğer çalışmalardan ayıran en önemli özellik ise mevcut çalışmada cebirsel düşünmenin tek bir bileşenine odaklanılmayıp, tüm bileşenlerinin incelenmesidir. Cebirsel düşünmenin tüm bileşenlerinin bir bütün halinde ele alınmasına yönelik literatürde böyle bir çalışmaya ulaşılamamıştır. Bundan dolayı cebirsel düşünme ile ilgili fark etme becerilerine yönelik yapılan bu çalışmanın literatürdeki bu boşluğu doldurması beklenmektedir.

4. YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın desenine, çalışma grubuna, verilerin toplanmasına, pilot çalışmaya, veri analizine ve geçerlik ve güvenilirliğe detaylı olarak yer verilmiştir.

4.1. Araştırma Deseni

Yapılan bu çalışmada nitel araştırma desenlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Çalışmada ortaokul matematik öğretmeni adaylarının OME (2013) cebirsel düşünme çerçevesi kapsamında hazırlanmış olan senaryolara yönelik verdikleri cevaplar fark etme becerisi bileşenlerine göre değerlendirilmiştir. Çalışmanın verileri yarı yapılandırılmış mülakatlar ile toplanmıştır. Bu mülakatlar sonucunda öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerine yönelik fark etme becerilerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Nitel çalışmalara yönelik Creswell ve Plano Clark (2018), az sayıdaki katılımcının bakış açılarına detaylı bir şekilde yer verilmesi, her bir katılımcının deneyimlerinin ayrı ayrı değerlendirilmesi, araştırmacıdan ziyade katılımcıların görüşlerine bağlı olması ve katılımcı görüşlerine detaylı olarak yer verilmesi bakımından nitel çalışmaların güçlü yönlerine vurgu yapmaktadır. Creswell ve Creswell'e (2021) göre nitel araştırmalar bir bireyin veya bir topluluğun, insani veya toplumsal sorunlara yüklediği/yükledikleri manaları anlama ve araştırma yaklaşımıdır. Ayrıca nitel yaklaşımlar, yeniliğe ve önceki araştırmacıların oluşturduğu çerçeveler üzerinde çalışma yapmaya daha fazla fırsat sunar. Durum çalışmasını Chmiliar (2010), sınırlı bir sistemin nasıl işlediği ve nasıl çalıştığı hakkında sistematik bilgi toplayabilmek için çoklu veri toplama yöntemlerini kullanarak o sistemin derinlemesine incelenmesini içeren metodolojik bir yaklaşım olarak görmektedir. Stake (2005) ise durum çalışmasının metodolojik bir yaklaşım olmadığını, durum çalışmasının neye yönelik çalışılacağına ilişkin bir seçenek olduğu düşüncesini savunur. Bazı araştırmacılara (Creswell, 2021; Merriam, 2013; Yin, 2009) göre durum çalışması belirli bir sistemin, stratejinin detaylı anlatımı ve kapsamlı incelenmesidir. Durum çalışmasında neden, nasıl gibi soruları yanıtlamaya odaklanılır ve çalışmada oluşan durumlarda araştırmacının fazla bir kontrolü bulunmamaktadır. Hitchcock ve Hughes (1995), durum çalışmasının durumun içindeki olaya veya olaylara yönelik zengin tanımlamalar yapılması, olayların ve çalışma analizinin içsel

bir tartışmayla bağlanması ve araştırılan konunun kapsamlı bir şekilde sunulmasını gibi özelliklerinin olduğunu belirtir. Creswell (2021), durum çalışmasını güncel sınırlı bir durumun, sınırlı bir zamanda veya mekânda ele alınması, çoklu veri toplama yöntemlerinin (gözlemler, mülakatlar, dokümanlar, materyaller...) kullanılarak çalışma için derinlemesine bir anlayış sunulması, ele alınan durumun detaylı betimlenmesi olarak ele almaktadır. Yapılan bu tanımlamalar doğrultusunda mevcut çalışmanın amacı ve araştırma problemlerinin niteliğinden, çalışmada sınırlı bir durumun ele alınmış olmasından, bu sınırlı durumun kapsamlı bir şekilde incelenerek katılımcı görüşlerine detaylı bir şekilde yer verilmesinden ve zamanın, mekânın ve katılımcı sayısının sınırlı olması gibi durumlardan dolayı, bu çalışma nitel bir durum çalışmasıdır.

4.2. Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu, Türkiye'nin kuzey doğusunda yer alan bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği ana bilim dalının dördüncü sınıfında eğitim gören 5 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Çalışmanın yapıldığı üniversite uygun/elverişli örnekleme (convenience sampling) yöntemi ile seçilmiştir. Uygun örnekleme çalışmaya zaman ve ekonomiklik açısından pratiklik kazandırırken katılımcıların erişilebilirliği de göz önünde bulundurulur (Creswell, 2021; Patton 2005; Yıldırım ve Şimşek, 2021). Çalışmaya katılan öğretmen adayları ile veri toplama sürecinde farklı günlerde yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılması planlanmıştır. Bu yüzden çalışmada araştırmacının ve katılımcıların ulaşımı, erişilebilirliği ve uygunluğu açısından ilgili üniversitenin eğitim fakültesinde bulunan matematik öğretmenleri adaylarıyla çalışılmıştır. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme kullanılmıştır. Buradaki ölçüt ya da ölçütler daha önceden hazırlanmış bir ölçüt listesi olabilirken araştırmacı tarafından sonradan da hazırlanabilir (Marshall ve Rossman, 2014; Patton, 2005). Katılımcılar, hazırlanan ölçütleri sağlayıp sağlamadıklarına bağlı olarak seçilir. Çalışmanın katılımcılarının belirlenmesinin ölçütü olarak öğretmen adaylarının önceki yıllarda almış oldukları cebirsel düşünmeyle doğrudan ilişkili olduğu düşünülen “cebir”, “cebir öğretimi”, “sayıların öğretimi”, “matematik öğretiminde kavram yanılgıları”, “matematikte problem çözme”, “matematik öğrenme ve öğretim yaklaşımları”

derslerinde başarılı olmaları belirlenmiştir. Bu derslerin içeriklerinin ya öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin gelişimine ya da fark etme becerilerinin gelişimine önemli katkılar sağladığı düşünülmektedir. YÖK (2018) ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programına göre bu derslerin içeriğinde öğrencilerin herhangi bir kavrama veya konuya yönelik düşünme biçimleri, problem çözme stratejileri ve yaşayabilecekleri zorluklar, kavramların veya konuların öğretiminde kullanılacak yöntem ve teknikler... hakkında öğretmen adaylarının ilgili becerilerinin geliştirilmesi vurgulanmaktadır. Bu beceriler ise Jacobs ve arkadaşlarının (2010) ortaya koyduğu profesyonel fark etme becerisinin alt basamakları ile doğrudan ilişkilidir. Başarı ölçütü olarak öğretmen adaylarının genel ağırlıklı not ortalamalarının 2.50'nin üzerinde olması şeklinde belirlenmiştir. Programa kayıtlı olan 60 öğretmen adayından 21 tanesi bu ölçütü sağlamıştır. Bu ölçütü sağlayan öğretmen adaylarına çalışmanın içeriği hakkında bilgi verilmiştir. Çalışmaya gönüllü olarak katılmayı kabul eden 12 öğretmen adayı arasından ifade gücü yüksek ve iletişime açık 5 kişi belirlenmiştir. Ayrıca katılımcılara çalışmanın raporlanmasında gerçek isimleri yerine takma isimler kullanılacağı belirtilmiştir. Bu amaçla çalışma içerisinde kullanılan katılımcı isimleri Alper, Berke, Cemre, Damla ve Eylem olarak belirlenmiştir.

4.3. Verilerin Toplanması

Verilerin toplanması 2022-2023 akademik yılının güz döneminde gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte ilk olarak veri toplama aracı geliştirilmiştir. Araştırmacı ve alanında uzman bir matematik eğitimcisi tarafından geliştirilen veri toplama aracı uzman görüşüne gönderilmiştir. Uzmanlardan gelen dönütlere göre veri toplama aracına son hali verilmiştir. Veri toplama sürecinde ise önce pilot çalışma yapılmış, yapılan pilot çalışmaya göre asıl çalışmanın nihai planına karar verilmiştir. Veri toplama sürecinde çalışmaya katılan öğretmen adayları ile farklı zamanlarda yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Veri toplama aracının geliştirilmesi, yarı yapılandırılmış mülakat formunun geliştirilmesi ve veri toplama sürecine aşağıdaki bölümlerde detaylı bir şekilde yer verilmiştir.

4.3.1. Veri Toplama Aracının Geliştirilmesi

Veri toplama aracında kullanılan sorular, OME (2013) cebirsel düşünme çerçevesine göre oluşturulmuştur. Bu çerçeveye göre; cebirsel düşünme genelleştirilmiş aritmetik ve fonksiyonel düşünme olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Genelleştirilmiş aritmetik kendi içinde; ilişkileri ve özellikleri keşfetme, nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme, değişken olarak sembolleri kullanma şeklinde üçe ayrılmaktadır. Fonksiyonel düşünme de kendi içinde; örüntüleri genelleme ve ters işlemleri kullanma şeklinde ikiye ayrılmaktadır.

Veri toplama aracında yalnızca yazılı çözümlere yer verilmiştir. Magiera ve Zambak (2021) çalışmalarında hem video kaydına hem de yazılı çözümlere yer vermiş ve çalışmanın sonunda video kayıtlarına kıyasla yazılı çözümlerde öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel anlayışlarına daha fazla odaklandıkları görülmüştür. Çalışmada yer alan yazılı çözümler farklı senaryolar altında ele alınmıştır. Veri toplama aracında bulunan senaryolar, genelleştirilmiş aritmetik ve fonksiyonel düşünme bileşenlerine göre belirlenmiş olup her bir alt bileşen için iki farklı senaryo verilmiştir. Her bir senaryoda 1 doğru ve 1 yanlış problem çözümü yer almaktadır. Senaryoların oluşturulmasında literatürde yer alan çalışmalardan ve ders kitaplarından yararlanılmıştır. Literatürde öğrenci çözümlerine yer verilen bazı çalışmalarda kullanılan doğru ve yanlış çözüm sayıları farklılık göstermektedir. Örneğin Dişbudak-Kuru ve arkadaşları (2022) yapmış oldukları çalışmada dikdörtgenler prizmasının hacmini bulmayla ilgili sordukları bir problem için yalnız 1 doğru öğrenci çözümüne, Doğan-Coşkun (2021) çalışmasında kullandığı bir örüntü sorusu için 3'ü doğru 1'i yanlış 4 öğrenci çözümüne, Özel (2019) çalışmasında kullandığı üç farklı örüntü sorusu için 2'si doğru 3'ü yanlış toplam 5 öğrenci çözümüne yer vermiştir.

Uzman görüşü öncesi oluşturulan veri toplama aracının ilk halinde 10 senaryoya ve her bir senaryoya ait 4 problem çözümüne (2 doğru ve 2 yanlış çözüm şeklinde) yer verilmiştir. Ayrıca yarı yapılandırılmış mülakat formu oluşturulmuştur. Veri toplama aracı ve yarı yapılandırılmış mülakat formu, cebirsel düşünme ve fark etme becerisi üzerine çalışmaları olan ve alanında uzman iki öğretim elemanına uzman görüşü için gönderilmiştir. Uzmanlardan, veri toplama aracında kullanılan mülakat formunun, senaryoların ve problem çözümlerinin anlaşılabilirliği, yeterliliği, şekil ve

içerik bakımından uygunluğunun incelenmesi istenmiştir. Uzman görüşlerine bağlı olarak bazı değişiklikler yapılmıştır. Bu değişikliklerden birincisi çözüm 7 (Ç7), çözüm 20 (Ç20) ve çözüm 21'e (Ç21) yöneliktir. İkincisi cebirsel düşünmenin “değişken olarak sembolleri kullanma” bileşeni için oluşturulan senaryo 6'daki sözel problem, ortaokul müfredatına uygun olmadığı görüşüyle değiştirilmiş ve yerine ortaokul matematik müfredatına uygun yeni bir senaryo oluşturulmuştur. Üçüncüsü, her bir senaryo için 2 doğru ve 2 yanlış çözümün çok fazla olduğu gerekçesiyle çözümler her bir senaryo için 1 doğru ve 1 yanlış çözüme indirgenmiştir. Çözümler arasından uzmanların da uygun gördükleri çözümler tercih edilmiştir. Her bir senaryo için 2 farklı çözüm kullanılırken, yalnızca örüntüleri genelleme bileşeni için kullanılan her bir senaryo iki problem içerdiğinden dolayı bu bileşende dörder çözüm bulunması uygun görülmüştür. Yapılan sonuncu değişiklik ise yarı yapılandırılmış mülakat formunda yer alan birinci soruya yöneliktir. Bu değişiklik yarı yapılandırılmış mülakat formunu geliştirme bölümünde açıklanmıştır.

Öğretmen adayları ile yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlar aracılığıyla veri toplama sırasında senaryolardaki doğru ve yanlış çözümlerin sırası belirli bir sisteme bağlı olmadan karışık olarak verilmiştir. Uzman görüşü sonrası yapılan değişiklik örneğine aşağıdaki Tablo 12'de yer verilmiştir.

Tablo 12. Uzman görüşü sonrası yapılan değişiklik örneği

Uzman Görüşü Öncesi	Uzman Görüşü Sonrası
Ç7: Her iki denklemde de aynı sembol kullanılmış. Bu yüzden ■'nin alması gereken değerler aynıdır.	Ç7: $2■ + 16 = 38$ $2■ = 22$ $■ = 2$ $2■ + 16 - 8 = 38 - 8$ $2■ + 8 = 30$ $2■ = 22$ $■ = 2$

İlişkileri ve özellikleri keşfetme bileşeni için öğrencilere, senaryo 1'de tam sayılarda toplama ve çıkarma işlemini ve temel özelliklerini içeren matematiksel bir işlem sorusu sorulmuştur. Senaryo 2'de temel genellemeleri içeren 2 farklı soru

sorulmuştur. Genellemelerde OME'den (2013) ve Van de Walle ve arkadaşlarından (2016) esinlenilmiştir. Sorulan genellemelerin çözümlerinde 1 doğru ve 1 yanlış olmak üzere farklı ve orijinal çözüm oluşturabilme durumlarının sınırlı olmasından dolayı senaryo 2'nin iki farklı soruyu içermesi uygun görülmüştür. Bu yüzden çözümlerinin çalışma formatına uygun olması için sorulan bir sorunun çözümü doğru, sorulan diğer bir sorunun ise çözümü yanlış olacak şekilde ayarlanmıştır. Çalışmanın 1. ve 2. senaryoları “İlişkileri ve Özellikleri Keşfetme” bileşeni altında ele alınmış ve Tablo 13 ve 14'te yer verilmiştir.

Tablo 13. Senaryo 1 için çözüm 1 ve çözüm 2

Senaryo 1: $20 - 12 + 8 - 4 = ?$ işleminin sonucunu öğrendiğiniz toplama ve çıkarma işlemlerinin özelliklerini kullanarak bulunuz.	
Çözüm 1: $20 - 12 + 8 - 4$ $= 20 - 8 + 12 - 4$ $= 12 + 8$ $= 20$	Çözüm 2: $20 - 12 + 8 - 4$ $= 20 + 8 - (12 + 4)$ $= 28 - 16$ $= 12$

*Çözüm 1 yanlış, çözüm 2 doğrudur.

Senaryo 1'in yer aldığı Tablo 13 incelendiğinde çözüm 1'de (Ç1) iki basamaklı sayılardan tek basamaklı sayıları çıkarmanın daha kolay olunacağı düşüncesi ile sayıların yerlerinde değişiklik yapılmıştır. Yapılan toplama ve çıkarma işlemlerinde herhangi bir hata bulunmamasına rağmen ilk adımda yapılan yer değiştirmede çıkarmanın değişme özelliği olmaması durumu göz ardı edilmiştir. Başka bir ifadeyle toplama işleminin değişme özelliği çıkarma işlemine genellenmiştir. Bu yüzden Ç1 hatalı bir çözümdür. Çözüm 2'de (Ç2) verilen işlemde toplama ve çıkarma yapılırken bu iki işlem arasında herhangi bir işlem önceliğinin bulunmadığı durum göz ardı edilmiştir. Çözümde öncelikle negatif sayılar ortak çarpan parantezine alınmış, sonra işlem önceliğine dikkat edilerek parantez içindeki işlem yapılmış ve son olarak işlem sırası kullanılıp doğru bir çözüme ulaşılmıştır.

Tablo 14. Senaryo 2 için çözüm 3 ve çözüm 4

Senaryo 2: Aşağıda verilen problemleri ve problem çözümlerini inceleyiniz. a) ζ çift tam sayıyı, T tek tam sayıyı göstermek üzere; $\zeta \div T = ?$ b) $\frac{a}{0} = ?$ ($a \neq 0$)	
Çözüm 3: a) $\zeta \div T$ için; $\zeta, T = \zeta$ olduğunu biliyoruz. Buradan $\rightarrow \zeta \div \zeta = T$ ve $\rightarrow \zeta \div T = \zeta$ elde edilir. Bu sebeple $\zeta \div T = \zeta$ olur.	Çözüm 4: b) $\frac{a}{0}$ için; $\frac{a}{0}$ ifadesi tanımsızdır. Çünkü herhangi bir sayı ile sıfırı çarparsak sıfırdan farklı bir sayı bulamayız.

*Çözüm 3 yanlış, çözüm 4 doğrudur.

Senaryo 2'nin yer aldığı Tablo 14 incelendiğinde çözüm 3'te (Ç3), “tek sayı ile çift sayının çarpımı çifttir” genellemesinden hareketle soru çözülmeye çalışılmıştır. İlk adımda yapılan işlem doğrudur. Diğer adımlarda yapılan işlemler ise her zaman doğru olmamaktadır. Çözümde birbirini tam bölen sayılarda aksine örnekler bulunabileceği gibi bu sayıların birbirini tam bölmeyen sayılar olabileceği düşüncesi de göz ardı edilmektedir. Bu sebeple Ç3 yanlış bir çözümdür. Çözüm 4'te (Ç4) kullanılan stratejisi şu şekildedir: Başlangıçta $\frac{a}{0} = k$ gibi bir sayı kabul edilmiştir. Daha sonra içler dışlar çarpımı yapılarak $a = 0.k$ bulunmuştur. Buradan $a = 0$ elde edilmiştir. Bu durum soru cümlesindeki $a \neq 0$ ile çelişmesinden dolayı verilen ifadenin tanımsız olduğu belirtilmiştir. Bu yüzden Ç4 doğru bir çözümdür.

Nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme bileşeni için içerisinde bilinmeyen bulunan iki farklı eşitlik senaryosu oluşturulmuştur. Çalışmanın 3. senaryosu Falkner ve arkadaşlarından (1999) esinlenerek oluşturulmuştur. Çalışmanın 4. senaryosu OME'nin (2013) ilgili bileşen altında verilen örnekten uyarlanmıştır. Böylelikle çalışmanın 3. ve 4. senaryoları “Nicelikler Arasındaki İlişki Olarak Eşitliği Keşfetme” bileşeni altında ele alınmış ve Tablo 15 ve 16'da yer verilmiştir.

Tablo 15. Senaryo 3 için çözüm 5 ve çözüm 6

Senaryo 3: $13+19= \blacksquare +22$ ifadesinde $\blacksquare$ yerine ne gelmelidir?	
Çözüm 5: $13 + 19 = 32 + 22 = 54$	Çözüm 6: $13 + 19 = 32$ ise $\blacksquare + 22 = 32$ olmalıdır. Bu yüzden $\blacksquare = 10$ olur.

*Çözüm 5 yanlış, çözüm 6 doğrudur.

Senaryo 3'ün yer aldığı Tablo 15 incelendiğinde çözüm 5'te (Ç5) eşittir işaretine işlemsel anlam yüklendiği görülmektedir. Bu çözümde yapılan hata, Carpenter ve arkadaşları (2003) tarafından problemi genişletme (extend the problem) şeklinde isimlendirilmiştir. Burada 13 ve 19 sayıları toplanarak kutu yerine 32 yazılması problemin çözümünde yapılan ilk hatadır. Devamında ise satır boyunca işlem devam ettirilerek 54 cevabına ulaşılmıştır. 32 sayısı ile 22 sayısının toplanması da problemin çözümünde yapılan ikinci hatadır. Bu sebeple Ç5 yanlış bir çözümdür. Çözüm 6'da (Ç6) eşittir işaretinin ilişkisel anlamına odaklanıldığı görülmektedir. Matthews ve arkadaşlarına (2012) göre bu strateji temel ilişkisel olarak adlandırılmaktadır. Bu stratejiye göre eşitliğin her iki tarafı birbirine eşit olmalıdır. Bu sebeple eşittir işaretinin sol tarafındaki sayıların toplamı ile sağ tarafındaki sayıların toplamı birbirine eşitlenerek çözüm yapılmıştır. Bu sebeple Ç6 doğru bir çözümdür.

Tablo 16. Senaryo 4 için çözüm 7 ve çözüm 8

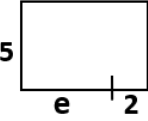
Senaryo 4: $2 \blacksquare + 16 = 38$ ve $2 \blacksquare + 16 - 8 = 38 - 8$ ifadeleri veriliyor. $\blacksquare$ yerine yazılması gereken sayıların aynı olup olmadığı hakkında ne söylenebilir?	
Çözüm 7: $2 \blacksquare + 16 = 38$ $2 \blacksquare = 22$ $\blacksquare = 2$ $2 \blacksquare + 16 - 8 = 38 - 8$ $2 \blacksquare + 8 = 30$ $2 \blacksquare = 22$ $\blacksquare = 2$	Çözüm 8: 1.denklemin her iki tarafından da aynı sayı (8) çıkarılarak 2. denklem elde edilmiş. Bu yüzden her iki denklemde de $\blacksquare$ yerine yazılması gereken sayı aynıdır.

*Çözüm 7 yanlış, çözüm 8 doğrudur.

Senaryo 4'ün yer aldığı Tablo 16 incelendiğinde çözüm 7'de (Ç7) her iki denklem için de $2 \blacksquare = 22$ ifadesine kadar olan işlemler doğru yapılmıştır. Bu aşamadan sonra 2 ile $\blacksquare$ arasında çarpma işlemi olması gerektiği tespit edilememiştir. Bilinmeyen niceliği temsil eden $\blacksquare$ sembolü, iki basamaklı bir sayının birler basamağındaki bir rakam olarak düşünülmüştür. Eşitliğin sağ tarafındaki 22 sayısının birler basamağında 2 rakamı olduğu için $\blacksquare$ yerine 2 yazılması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Çözümde $\blacksquare$ yerine yazılması gereken sayının aynı olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Ancak çözüm yolu ve $\blacksquare$ için verilen değerler hatalıdır. Bu yüzden Ç7 yanlış bir çözümdür. Perso (1992) ve MacGregor ve Stacey (1997) bu hatayı “harfin basamak değeri olduğunun düşünülmesi” şeklinde isimlendirmişlerdir. Çözüm 8'de (Ç8) eşdeğer denklemlerin tespit edildiği anlaşılmaktadır. Bu soru özelinde birinci denklemin her iki tarafından aynı sayı çıkarılarak, birinci denkleme eşdeğer olan ikinci denklem elde edilmiştir. Dolayısıyla Ç8 doğru bir çözümdür.

Değişken olarak sembolleri kullanma bileşeni için kenar uzunluğunda değişken bulunan bir dikdörtgenin alanının bulunmasına ve değişken içeren iki farklı ifadenin karşılaştırılmasına yönelik senaryolar oluşturulmuştur. Çalışmanın 5. ve 6. senaryoları Küchemann'ın (1978) çalışmasından alınmış olup “Değişken Olarak Sembolleri Kullanma” bileşeni altında ele alınmış ve Tablo 17 ve 18'de yer verilmiştir.

Tablo 17. Senaryo 5 için çözüm 9 ve çözüm 10

Senaryo 5:  Yukarıda verilen dikdörtgenin alanını bulunuz.	
Çözüm 9: Dikdörtgenin alanı, dikdörtgenin boyunun uzunluğu ile eninin uzunluğunun çarpımına eşittir. $A = 5. (2. e)$ $A = (5.2). e$ $A = 10e$ olarak bulunur.	Çözüm 10: $A = 5. (e + 2)$ $A = 5e + 10$

*Çözüm 9 yanlış, çözüm 10 doğrudur.

Senaryo 5'in yer aldığı Tablo 17 incelendiğinde çözüm 9'da (Ç9) dikdörtgenin alan formülü doğru ifade edilmiştir. Fakat " $A = 5. (2. e)$ " ifadesinde 2 ile e arasında toplama işlemi yapılması gerekirken çarpma işlemi yapılmıştır. Devamında çarpma işleminin birleşme özelliği doğru uygulanarak $10e$ cevabına ulaşılmıştır. Çözümde, 2 ile e arasındaki işlem doğru tespit edilemediği için Ç9 yanlış bir çözümdür. Çözüm 10'da (Ç10) dikdörtgenin yatay kenar uzunluğu, dikdörtgenin alan formülü ve çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği doğru uygulanmıştır. Bu yüzden Ç10 doğru bir çözümdür.

Tablo 18. Senaryo 6 için çözüm 11 ve çözüm 12

Senaryo 6: $2n$ ya da $n + 2$ ifadelerinden hangisi daha büyüktür? Açıklayınız.	
Çözüm 11: $2n$ değişmez fakat $n + 2 = 3n$ olur. $3n$, $2n$ 'den daha büyük olacağı için $n + 2 > 2n$ olur.	Çözüm 12: <u>1.durum:</u> $n + 2 > 2n$ $2 > n$ olur. Bu durumda n yerine yazılacak 2'den küçük değerler için $n + 2$ ifadesi daha büyüktür. <u>2.durum:</u> $n + 2 = 2n$ $2 = n$ olur.Bu durumda n yerine 2 yazılırsa iki ifade birbirine eşittir. <u>3.durum:</u> $n + 2 < 2n$ $2 < n$ olur. Bu durumda n yerine yazılacak 2'den büyük değerler için $2n$ ifadesi daha büyüktür.

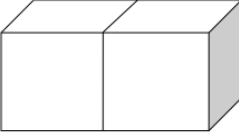
*Çözüm 11 yanlış, çözüm 12 doğrudur.

Senaryo 6'nın yer aldığı Tablo 18 incelendiğinde çözüm 11'de (Ç11) benzer olmayan terimler arasında toplama işlemi yapılarak hatalı bir sonuca ulaşılmıştır. $3n$ ve $2n$ ifadesinde de n 'in sıfır ve negatif değerler alabileceği durumlar göz ardı edilerek $3n$ ifadesinin, daima $2n$ ifadesinden büyük olacağı belirtilmiştir. Dolayısıyla Ç11 yanlış bir çözümdür. Çözüm 12'de (Ç12) iki cebirsel ifadenin birbirine eşit, küçük veya büyük olabileceği durumların üçü de göz önüne alınarak çözüme doğru bir şekilde başlanmıştır. Devamında eşitsizlik ve eşitlik durumlarındaki işlemler ve işlemler sonucunda elde edilen ifadeler doğru bir şekilde yorumlanmıştır. Bu yüzden Ç12 doğru bir çözümdür.

Örüntüleri genelleme bileşeni için iki farklı şekil örüntüsünü içeren senaryolar oluşturulmuştur. Diğer örüntü çeşitlerine göre veri çeşitliliğinin en fazla şekil örüntülerinden elde edilebileceği düşüncesi ile iki senaryoda da şekil örüntüsü

kullanılmıştır. 7. senaryoda kullanılan şekil örüntüsü ile sunulmuş problem Lannin ve arkadaşlarının (2006) çalışmasından alınmıştır. 8. senaryoda kullanılan şekil örüntüsü ise El Mouhayar'ın (2019) çalışmasında kullandığı bir şekil örüntüsünden uyarlanmıştır. Senaryolarda verilen örüntülere ilişkin iki problem kullanılmıştır. Bu problemlerde yakın uzaklıktaki terimi bulma, uzak terimi bulma, terim sırasını bulma ve örüntünün genel kuralını bulma sorulmuştur. Çalışmada örüntüleri genelleme bileşeni dışındaki tüm senaryolarda ikişer çözüme yer verilirken bu bileşen altındaki senaryolarda dört problem çözümüne yer verilmiştir. Bunun sebebi bu senaryoların iki problem içermesidir. Çalışmanın 7. ve 8. senaryoları “Örüntüleri Genelleme” bileşeni altında ele alınmış ve Tablo 19 ve 20’de yer verilmiştir.

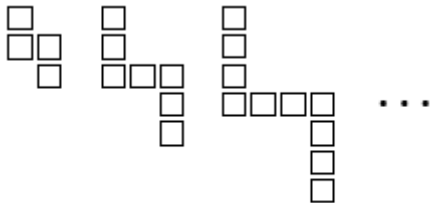
Tablo 19. Senaryo 7 için çözüm 13, çözüm 14, çözüm 15 ve çözüm 16

Senaryo 7: Bir şirket, küpleri yan yana sıralayarak çubuklar üretmekte ve üretilen çubuktaki küplerin dışarıdan görünen her bir yüzeyine etiket yapıştırmaktadır. Örneğin uzunluğu 2 olan çubuğu kaplamak için 10 tane etiket gereklidir.  a) Uzunluğu 90 olan çubuk için gerekli olan etiket sayısı kaçtır? b) Herhangi bir uzunluktaki bir çubuk için gerekli olan etiket sayısını veren kuralı bulunuz.			
Çözüm 13: a) $90.6 = 540$ $540 - 89.2 = 362$	Çözüm 14: a) $\begin{array}{r} 2 \quad 10 \\ 90 \quad ? \\ \hline ? = 10.45 \\ ? = 450 \end{array}$ $450 - 45.2 = 360$	Çözüm 15: b) Örüntünün kuralı $6n - 2(n - 1)$ şeklindedir.	Çözüm 16: b) Küpün 6 yüzeyi olduğundan her bir küp için 6 etiket kullanılmaktadır. Bu sebeple kuralda $6n$ ifadesi bulunacaktır. Her iki küp birleştiğinde birleşen yüzeylerdeki etiketler çıkartılacaktır. Bu sebeple örüntünün kuralı $6n - 2$ olur.

*Çözüm 13 ve çözüm 15 doğru, çözüm 14 ve çözüm 16 yanlıştır.

Senaryo 7'nin yer aldığı Tablo 19 incelendiğinde çözüm 13'te (Ç13) öğrenci bir küpün 6 yüzü olduğunun farkındadır ve ilk adımda 90 tane küpte toplam kaç yüz olacağı hesaplanmıştır. İkinci adımda ise 90 tane küpün birleşiminden arada kaç tane birleşim olacağı ve her birleşimde kaç tane yüze etiket yapıştırılamayacağı doğru hesaplanmıştır. Toplam yüz sayısından etiket yapıştırılmayacak yüz sayısı çıkartılarak doğru cevaba ulaşılmıştır. Çözüm 14'te (Ç14) orantı stratejisi kullanılmıştır. 2 küpte 10 etiket varsa 90 küpte kaç etiket olacağı hesaplanmıştır. Daha sonra 45 tane ikili küpün birleşiminden etiket yapıştırılmayacak yüzler çıkarılarak 360 cevabına ulaşılmıştır. Burada 45 tane ikili küpün birleşiminde 44 tane birleşim noktası olacağı doğru tespit edilemediği için yanlış cevaba ulaşılmıştır. Çözüm 15'te (Ç15) yapıyı çözücü strateji kullanılmıştır. Çözümdeki $6n$ ifadesi ile tüm küplerin yüz sayısı doğru hesaplanmıştır. Çünkü bir tane küpte 6 yüz, iki tane küpte 12 tane yüz, üç tane küpte 18 tane yüz, ..., n tane küpte $6n$ tane yüz bulunur. $2.(n - 1)$ ifadesi ile etiket yapıştırılmayacak yüz sayısı doğru bulunmuştur. Çünkü iki küp birleştirildiğinde 2 yüze, üç küp birleştirildiğinde 4 yüze, dört küp birleştirildiğinde 6 yüze, ..., n tane küp birleştirildiğinde $(n - 1).2$ tane yüze etiket yapıştırılmayacaktır. Toplam yüz sayısından, etiket yapıştırılmayacak yüz sayısı çıkarılarak etiket yapıştırılacak yüz sayısını veren kural doğru bulunmuştur. Çözüm 16'da (Ç16) yapıyı çözücü strateji kullanılmıştır. Çözümde $6n$ ifadesini doğru bulunmuştur. Birleşen küplerdeki etiket yapıştırılmayacak yüz sayısı da doğru belirtilmiştir. Ancak üç küp birleştirildiğinde 4, dört küp birleştirildiğinde 6, ..., n küp birleştirildiğinde $(n-1).2$ yüze etiket yapıştırılmayacağı tespit edilememiştir. Sadece iki küp birleştirildiğinde 2 yüze etiket yapıştırılmayacağı düşüncesi ile $6n-2$ kuralına ulaşılmıştır. Dolayısıyla Ç16 yanlış bir çözümdür.

Tablo 20. Senaryo 8 için çözüm 17, çözüm 18, çözüm 19 ve çözüm 20

Senaryo 8:  1. Adım 2. Adım 3. Adım Yukarıda verilen şekil örüntüsünde 1. adımda 4 tane birimkare, 2. adımda 7 tane birimkare ve 3. adımda 10 tane birimkare yer almaktadır. Buna göre; a) Örüntünün 7. adımındaki birimkare sayısını bulunuz. b) Örüntünün kaçınıcı adımında 112 tane birimkare olduğunu bulunuz.			
Çözüm 17: a) $8 + 6 + 8 = 22$	Çözüm 18: a) $8 + 8 + 8 - 1 = 23$	Çözüm 19: b) $112 - 4 = 108$ $108 \div 3 = 36$ $36 + 1 = 37$	Çözüm 20: b) $112 - 30 = 82$ $82 - 30 = 52$ $52 - 30 = 22$ $22 - 15 = 7$ $7 - 6 = 1$ $10 + 10 + 10 + 5 + 2 + 1 = 38$

*Çözüm 17 ve çözüm 19 doğru, çözüm 18 ve çözüm 20 yanlıştır.

Senaryo 8'in yer aldığı Tablo 20 incelendiğinde çözüm 17'de (Ç17) yapıcı strateji kullanılmıştır. Verilen soruda kullanılan şekil ortak birimkare olmayacak biçimde dikey-yatay-dikey olarak parçalara ayrılmıştır. Örüntünün 7. adımındaki birimkare sayısı doğru bulunmuştur. Çözüm 18'de (Ç18) yapıyı çözücü strateji kullanılmıştır. Verilen soruda kullanılan şekil ortak birimkare olacak biçimde dikey-yatay-dikey olarak parçalara ayrılmıştır. Ancak parçalanmış şeklindeki ortak olan birimkarelerin sayısı yanlış tespit edilmiştir. $8 + 8 + 8 - 2$ olması gerekirken, -2 yerine -1 alınmıştır. Bu ise Ç18'i yanlış bir cevap yapmaktadır. Çözüm 19'da (Ç19) örüntünün kuralından hareketle geriye doğru çalışma stratejisi ile problem çözülmüştür. $112 - 4$ işlemi ile ilgili terimden birinci terim çıkarılmıştır. $108 \div 3$ işlemi ile birinci terimden itibaren kaç terim ilerlendiği bulunmuştur. Daha sonra ilk terim ile ilerlenen terim sayısı toplanarak doğru cevaba ulaşılmıştır. Yapılan işlemlerden örüntünün kuralının $4 + (n - 1) \cdot 3$ şeklinde bulunduğu ve kuralın 112'ye

eşitlendiği $(4 + (n - 1).3 = 112)$ anlaşılmaktadır. Bu sebeple Ç19 doğru bir çözümdür. Çözüm 20’de (Ç20), 112 tane birimkarenin kaçınıcı terime karşılık geldiği bulunmak için ardışık terimler arasındaki artış miktarından faydalanılmıştır. Çözümün ilk üç basamağında 30 sayısı art arda çıkarılmıştır. 30 sayısı örüntünün on adımındaki artış miktarıdır. 22 sayısına ulaşıldıktan sonra 30 sayısı çıkarılamayacağı için, 15 sayısı çıkarılmıştır. 15 sayısı örüntünün beş adımındaki artış miktarına karşılık gelmektedir. Daha sonra 7 sayısından 6 çıkarılmıştır. 6 sayısı örüntünün iki adımındaki artış miktarına karşılık gelmektedir. Kalan 1 sayısı da örüntünün adım sayısı olarak düşünülmüştür. Çözümün son basamağında ise çıkarılan sayıların karşılık geldiği adım sayıları toplanarak 38 cevabına ulaşılmıştır. Bu çözüm yaklaşımı doğru olmakla birlikte 7 sayısından 6 çıkarıldıktan sonra elde edilen 1 sayısının adım sayısı olarak ele alınması ile hata yapılmıştır. Dolayısıyla ulaşılan cevap yanlıştır. Bu strateji ile çözümün doğru olması için 7 sayısı elde edildikten sonra iki farklı yol takip edilebilirdi. Bu yollardan birincisi şu şekildedir: 7 sayısı elde edildikten sonra, $7 - 3 = 4$ ve $4 - 4 = 0$ işlemleri yapılırdı. Daha sonra $10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1$ şeklinde toplanarak doğru cevaba ulaşılabilirdi. $7 - 3$ işlemindeki eksilen sayı, çıkarma işlemleri sonucunda kalan birimkare sayısını ifade ederken; çıkan sayı, örüntünün bir adımındaki artış miktarına karşılık gelmektedir. $4 - 4$ işlemindeki eksilen sayı, çıkarma işlemleri sonucunda kalan birimkare sayısını ifade ederken; çıkan sayı, örüntünün 1. adımındaki birimkare sayısına karşılık gelmektedir. Bu yollardan ikincisi ise şu şekildedir: Çözümün son basamağında kalan 1 sayısı örüntünün adım sayısı olarak yorumlanmamalıydı. Burada kalan 1 sayısı adım sayısı olarak değil de örüntünün 1. adımına ilave edilmesi gereken birimkare olarak düşünülmeliydi. Çünkü örüntünün 1. adımında 3 değil 4 tane birimkare vardır. Bu şekilde düşünülseydi çözümün son basamağı $10 + 10 + 10 + 5 + 2 = 37$ şeklinde yapılarak doğru cevaba ulaşılabilirdi.

Ters işlemleri kullanma bileşeni için ters işlemleri kullanmayı gerektiren iki farklı senaryo oluşturulmuştur. 9. senaryoda yer alan problem Kieran’dan (1992), 10. senaryoda yer alan problem ise Van Dooren ve arkadaşlarının (2002) çalışmasından uyarlanmıştır. Çalışmanın 9. ve 10. senaryoları “Ters İşlemleri Kullanma” bileşeni altında ele alınmış ve Tablo 21 ve 22’de yer verilmiştir.

Tablo 21. Senaryo 9 için çözüm 21 ve çözüm 22

Senaryo 9: Buse, okula gitmeden önce annesi Buse'ye 15 TL harçlık vermiştir. Buse, okula giderken kırtasiyeden 23 TL'ye defter almış ve geriye 56 TL'si kalmıştır. Buna göre annesi harçlık vermeden öncesinde Buse'nin ne kadar parası vardır?	
Çözüm 21: $56 + 23 = 79$ $79 - 15 = 64$	Çözüm 22: $56 - 23 = 33$ $33 - 15 = 18$

*Çözüm 21 doğru, çözüm 22 yanlıştır.

Senaryo 9'un yer aldığı Tablo 21 incelendiğinde çözüm 21'de (Ç21) geriye doğru çalışma stratejisi kullanılarak doğru cevaba ulaşılmıştır. Problemden $56 + 23$ işlemi ile defter almadan önceki, $79 - 15$ işlemi ile de annesinden harçlık almadan önceki para miktarı hesaplanmıştır. Çözüm 22'de (Ç22) geriye doğru çalışma stratejisi kullanılırken çözümün birinci basamağında toplama işlemi yapılması gerekirken çıkarma işlemi yapılmıştır. Çözümün ikinci basamağında yapılan çıkarma işlemi doğrudur. Ç22, birinci basamakta yapılan hatadan dolayı yanlış bir çözümdür.

Tablo 22. Senaryo 10 için çözüm 23 ve çözüm 24

Senaryo 10: Bir kırtasiyecisi pazartesi, salı ve çarşamba günlerinde toplam 78 tane kalem satmıştır. Salı günü sattığı kalem sayısı, pazartesi günü sattığı kalem sayısının 2 katıdır. Çarşamba günü sattığı kalem sayısı 24 ve salı günü sattığı kalem sayısından 12 eksiktir. Kırtasiyecinin pazartesi günü sattığı kalem sayısını bulunuz.	
Çözüm 23: $78 - 24 = 54$ $54 \div 3 = 18$	Çözüm 24: $24 - 12 = 12$ $24 + 12 = 36$ $78 - 36 = 42$

*Çözüm 23 doğru, çözüm 24 yanlıştır.

Senaryo 10'un yer aldığı Tablo 22 incelendiğinde çözüm 23'ün (Ç23) birinci basamağında toplam satılan kalem sayısından çarşamba günü satılan kalem sayısı çıkarılarak ($78 - 24$ işlemi ile), pazartesi ve salı günlerinde toplam kaç kalem satıldığını bulmuştur. Çözümün ikinci basamağında ise salı günü satılan kalem sayısı, pazartesi günü satılan kalem sayısının 2 katı olduğundan pazartesi günü satılan kalem

sayısı bu iki günde satılan kalem sayısının $\frac{1}{3}$ 'üne karşılık gelmektedir. Dolayısıyla iki günde satılan kalem sayısı 3'e bölünerek doğru cevaba ulaşılmıştır. Çözüm 24'ün (Ç24) ilk basamağında salı günü satılan kalem sayısını bulmak için çarşamba günü satılan kalem sayısı ile 12 sayısı arasında toplama işlemi yapılması gerekirken çıkarma işlemi yapılmıştır. Çözümün ikinci basamağında yapılan işlem ile salı ve çarşamba günleri satılan toplam kalem sayısı hesaplanmıştır. Çözümün son basamağında ise toplam satılan kalem sayısından, salı ve çarşamba günleri satılan kalem sayıları çıkarılarak pazartesi günü satılan kalem sayısı hesaplanmaya çalışılmıştır. Ç24, birinci adımdaki hatadan dolayı yanlış bir çözümdür.

Böylelikle veri toplama aracında toplamda 10 senaryo; örüntüleri genelleme bileşenindeki iki senaryo için dörder çözüm ve diğer sekiz senaryo için ikişer çözüm olmak üzere toplam 24 farklı problem çözümü yer almaktadır. Veri toplama aracı ile ilgili bilgilere Tablo 23'te yer verilmiştir. Veri toplama aracında kullanılan senaryolar ve problemle çözümleri ise Ek-1'de yer almaktadır.

Tablo 23. Veri toplama aracındaki cebirsel düşünme bileşenlerine ait senaryo ve çözüm numaraları

Cebirsel Düşünmenin Bileşenleri	Cebirsel Düşünmenin Alt Bileşenleri	Senaryo Numarası/Çözüm Numarası
Genelleştirilmiş Aritmetik	İlişkileri ve Özellikleri Keşfetme	Senaryo 1/ Ç1
		Senaryo 1/ Ç2
		Senaryo 2/ Ç3
		Senaryo 2/ Ç4
	Nicelikler Arasındaki İlişki Olarak Eşitliği Keşfetme	Senaryo 3/ Ç5
		Senaryo 3/ Ç6
		Senaryo 4/ Ç7
		Senaryo 4/ Ç8
	Değişken Olarak Sembollerini Kullanma	Senaryo 5/ Ç9
		Senaryo 5/ Ç10
Fonksiyonel Düşünme	Örüntüleri Genelleme	Senaryo 6/ Ç11
		Senaryo 6/ Ç12
		Senaryo 7/ Ç13
		Senaryo 7/ Ç14
	Ters İşlemleri Kullanma	Senaryo 7/ Ç15
		Senaryo 7/ Ç16
		Senaryo 8/ Ç17
		Senaryo 8/ Ç18
		Senaryo 8/ Ç19
		Senaryo 8/ Ç20
		Senaryo 9/ Ç21
		Senaryo 9/ Ç22
		Senaryo 10/ Ç23
		Senaryo 10/ Ç24

4.3.2. Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formunun Geliştirilmesi

Yarı yapılandırılmış mülakatlar sırasında çalışmanın veri toplama aracında bulunan her bir senaryo ve problem çözümleri öğretmen adaylarına gösterilmiştir. Öğretmen adaylarından verilen senaryoyu ve senaryoda yer alan problem çözümlerini incelemeleri istendikten sonra her bir çözüm için yarı yapılandırılmış mülakat soruları yöneltilmiştir. Mülakat sorularında öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerine dikkat etme, problem çözümlerini yorumlama ve problem çözümlerine dönüt verme becerilerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Oluşturulan mülakat soruları Jacobs ve arkadaşlarının (2010) çalışmasından alınarak uyarlanmıştır.

Yarı yapılandırılmış mülakat formunun ilk halinde fark etme becerisinin dikkat etme basamağı için kullanılan birinci sorusu “Problemin çözümünde hangi kısımlar dikkatinizi çekmiştir? Çözüm doğru mudur? Bu problem çözümünün nasıl yapıldığını (kullanılan strateji, düşünme biçimi, yapılan açıklamalar vb.) ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.” şeklinde oluşturulmuştur. Uzman görüşünde dikkat etme basamağına yönelik sorulan bu sorunun “Çözüm doğru mudur? Bu problem çözümünün nasıl yapıldığını (kullanılan strateji, düşünme biçimi, yapılan açıklamalar vb.) ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.” ve “Problem çözümünde hangi kısımlar dikkatinizi çekmiştir?” şeklinde iki alt soruda incelenmesi önerilmiştir. Pilot çalışmada bu öneri doğrultusunda öğretmen adayıyla, oluşturulmuş 4 soru üzerinden yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Fakat yapılan mülakatta öğretmen adayının dikkat etme basamağındaki bu iki soruyu birbirinden ayırt etmekte zorlandığı ve aynı cevapları verdiği görülmüştür. Bu yüzden uzman görüşlerinden gelen dönütler doğrultusunda ve pilot çalışmada karşılaşılan olumsuzluktan dolayı dikkat etme basamağı için sorulan birinci soru, bu iki soru birleştirilerek tek soru halinde sorulmuştur. Diğer soruların daha açıklayıcı olması için sonda soruları kullanılmıştır. Böylece yarı yapılandırılmış mülakat sorularına son hali verilmiştir.

Yarı yapılandırılmış mülakat formunun son hali şu şekildedir:

1. Problemin çözümünde hangi kısımlar dikkatinizi çekmiştir? Çözüm doğru mudur? Bu problem çözümünün nasıl yapıldığını (kullanılan strateji, düşünme biçimi, yapılan açıklamalar vb.) ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.
2. Problem çözümünden hareketle bu çözümü yapan öğrencinin konuya ilişkin kavrayışı hakkında ne düşünüyorsunuz? Başka bir ifadeyle öğrenci matematiksel olarak neleri doğru anlamıştır ve hangi kısımlarda kavram karmaşasına sahip olabilir? Açıklayınız.
3. Bu şekilde çözüm yapan bir öğrencinin öğretmeni siz olsaydınız, öğrenciye nasıl dönüt verirdiniz? Ne tür sorular/ problemler sorardınız? Bu yeni problemlerle neyi amaçladığınızı açıklayınız.

4.3.3. Veri Toplama Süreci

Çalışma verileri 2022-2023 akademik yılının güz döneminde yarı yapılandırılmış mülakatlarla toplanmıştır. Mülakatlarda katılımcılarla yüz yüze veya telefonda görüşmeler gerçekleştirilmekte, katılımcıların fikirlerini açıkça belirtebileceği açık uçlu sorular yer almakta, mülakat sırasındaki gözlemlerde araştırmacı katılımcılarla ve etkinliklerle ilgili yapılandırılmış ya da yarı yapılandırılmış sorulara cevap arayarak alan notları tutmaktadır (Creswell ve Creswell, 2021).

Veri toplama sürecinde çalışmaya katılan öğretmen adaylarıyla yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmış ve Ek-2'deki form kullanılmıştır. Yarı yapılandırılmış mülakat formlarının her biri, 1 senaryo, 1 çözüm ve mülakat sorularını içerecek şekilde hazırlanmıştır. Formda yer alan sorulara ek olarak araştırmacı mülakat sırasında gerekli gördüğü yerlerde öğretmen adaylarına “Bunu daha detaylı anlatır mısınız, burada ne demek istediniz, neden bu şekilde düşündünüz?” gibi verilen cevapları açıklayıcı ve detaylandırıcı sorulara yer vermiştir. Bu yüzden mevcut çalışmada kullanılan mülakat formu yapılandırılmış olarak değil de yarı yapılandırılmış olarak değerlendirilmiştir.

Öğretmen adaylarına her bir mülakat formu sırayla verilmiştir. Her bir formda yalnızca verilen senaryoya yönelik tek bir çözüm incelenmiş, öğretmen adayının diğer senaryo ve çözümlere dair bilgisi olmadan mülakat gerçekleştirilmiştir. Öğretmen

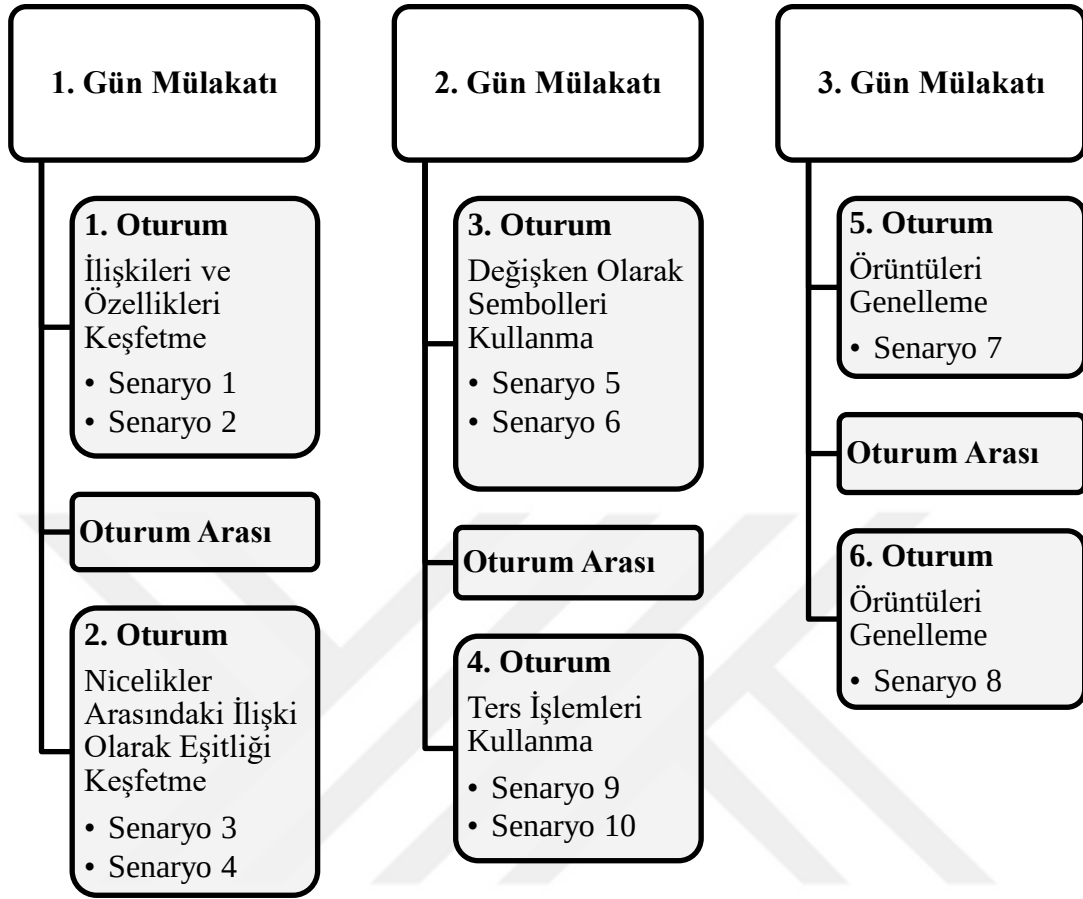
adaylarının, çözümleri incelemeleri ve yöneltilecek sorulara yönelik verecekleri cevapları düşünmeleri için öğretmen adaylarına her bir mülakattan önce yaklaşık 5 dakika düşünme süresi verilmiştir. Böylece öğretmen adaylarının mülakat sırasında paniğe kapılma duygusunun azaltılması, heyecan faktörünün ortadan kalkması, senaryolara ve sorulara dair düşünme zamanı verilmesi ve cevabın birden akla gelmeme durumunun ortadan kalkması sağlanmaya çalışılmıştır. Öğretmen adayları verilen süre içerisinde düşünüp mülakat için hazır olduklarını belirttiklerinde mülakata başlanmıştır. Mülakatlar farklı oturumlarda gerçekleştirilmiştir ve öğretmen adaylarının izni doğrultusunda ses kaydına alınmıştır. Mülakat sırasında öğretmen adaylarının gerekli gördükleri durumlarda çizim yapmaları, sözel ifade edemeyeceklerini düşündükleri durumları ve bahsi geçen matematiksel durumları göstermeleri ve ihtiyaca yönelik kişisel notlar tutmaları için mülakat formunda yer alan boş kısımları kullanabileceklerine dair açıklamalar yapılmıştır. Aynı zamanda araştırmacı, gözlemci rolü ile mülakat sırasında ses kayıtlarında anlaşılması zor olabilecek yerlerde kişisel notlar tutmuştur. Süreç sonunda öğretmen adaylarına toplamda 24 mülakat formu gösterilmiş ve mülakat sorularına yönelik görüşleri alınmıştır. Öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatlardan alınan ses kayıtları yazılı metne dönüştürülmüştür. Mülakat sırasında öğretmen adayının mülakat formunda belirttiği ifadeler ve araştırmacının tuttuğu kişisel notlar da yazılı metne eklenmiştir.

Yapılan pilot çalışmada cebirsel düşünmenin her bir alt bileşeni için mülakatta geçen tahmini süreler tespit edilmiştir. Bu tespit sonucunda mülakatlarda geçen süre bakımından oturumlarda sorulan senaryoların soruluş sırasında düzenlemeler yapılmıştır. Problem çözümlerinin fazla olmasından dolayı mülakatlar her bir öğretmen adayıyla üç farklıgünde ve cebirsel düşünmenin her bir bileşeni farklı oturumda incelenecek şekilde yapılmıştır.

Birinci gün yapılan mülakatlar iki oturumdan oluşmaktadır. Birinci günün birinci oturumunda veri toplama aracında bulunan “ilişkileri ve özellikleri keşfetme” bileşeni altındaki senaryolar (senaryo 1 ve 2) sorulmuş ve birinci oturum yaklaşık 20-30 dakika arası sürmüştür. Birinci günün ikinci oturumunda “nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme” bileşeni altındaki senaryolar (senaryo 3 ve 4) sorulmuş ve ikinci oturum yaklaşık 20-30 dakika arası sürmüştür. İkinci gün yapılan mülakatlar da iki oturumdan oluşmaktadır. İkinci günün birinci oturumunda veri toplama aracında

bulunan “değişken olarak sembolleri kullanma” bileşeni altındaki senaryolar (senaryo 5 ve 6) sorulmuş ve birinci oturum yaklaşık 20-30 dakika arası sürmüştür. İkinci günün ikinci oturumunda “ters işlemleri kullanma” bileşeni altındaki senaryolar (senaryo 9 ve 10) sorulmuş ve ikinci oturum da yaklaşık 20-30 dakika arası sürmüştür. Son olarak, diğer senaryolara kıyasla örüntüleri genelleme senaryolarında dörder tane problem çözümü kullanılması ve bu senaryoların daha fazla vakit alması nedeniyle mülakatların üçüncü günü sadece “örüntüleri genelleme” bileşeni altındaki senaryolar kullanılarak yürütülmüştür. Başka bir ifade ile üçüncü günün mülakatı, senaryo 7 için bir oturum ve senaryo 8 için bir oturum şeklinde yapılmıştır. Yapılan son mülakat yaklaşık 60-90 dakika arasında tamamlanmıştır.

Yapılan mülakatlar her bir adayla üçer günde toplam 6 (2-2-2) oturum olacak şekilde ayarlanmıştır. Veri toplama süreci toplamda 30 oturumda [5 (öğretmen adayı ile) $\times$ 6 (oturum) = 30 oturum] ve yaklaşık 15 saatte tamamlanmıştır. Genel bir bakış açısıyla veri toplama sürecinin aşamalarına Şekil 3’te yer verilmiştir.



Şekil 3. Veri toplama sürecinin aşamalı gösterimi

4.4. Pilot Çalışma

Pilot çalışmanın amacı veri toplama aracında oluşturulan senaryoların ve mülakat sorularının öğretmen adayları tarafından anlaşılabilirliğini teyit etmek ve asıl çalışma için gerekli olan süre dağılımını tespit etmektir. Pilot çalışmaya katılan öğretmen adayı asıl çalışma grubunun seçimi için ele alınan ölçütler kullanılarak asıl çalışma grubunun bulunduğu okul ve bölümden seçilmiştir.

Pilot çalışma için belirlenen öğretmen adayı ile mülakatlar, birinci gün iki oturum ve ikinci gün iki oturum olmak üzere toplam 4 oturumda (2-2) gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın birinci gününde veri toplama aracındaki “genelleştirilmiş aritmetik” bileşenine ait senaryolar üzerinden mülakatlar yapılmış, ikinci gününde de “fonksiyonel düşünme” bileşenine ait senaryolar üzerinden

mülakatlar yapılmıştır. İlk gün yapılan mülakatta senaryoların fazla olmasından dolayı öğretmen adayının sonlara doğru yorulduğu, mülakat sorularına benzer cevaplar vermeye başladığı görülmüştür. İkinci gün yapılan mülakatta öğretmen adayının örüntüleri genelleme senaryolarını cevaplamak için diğer senaryolara kıyasla daha fazla düşünmeye ihtiyaç duyduğu ve ilk güne kıyasla cevaplama süresinin daha uzun olduğu görülmüştür. Bu yüzden genelleştirilmiş aritmetiğe ait senaryoların bir gün içerisinde değil de alt bileşenlerin dağıtılarak iki gün içerisinde yapılmasının; fonksiyonel düşünmeye ait örüntüleri genelleme senaryolarının da ayrı bir günde yapılmasının daha uygun olacağı görüşüne varılmıştır. Böylece asıl çalışma için senaryoların soruluş sırasında değişiklikler yapılmış ve mülakatların 3 farklı günde yapılmasına karar verilmiştir.

Mülakat sorularına yönelik hazırlanan yarı yapılandırılmış mülakat formundaki 1. ve 2. soruda öğretmen adayının bu soruların farkını ayırt edemediği ve farklı cevaplar vermekte zorlandığı görülmüştür. Mülakat sorularına yönelik hazırlanan 3. ve 4. soruda herhangi bir sıkıntı yaşanmadığı, soruların anlaşılır olduğu görülmüştür. Böylece 1. ve 2. sorunun birleştirilmesine karar verilmiştir. Yapılan pilot çalışmanın sonucunda veri toplama aracına yönelik olarak hazırlanan senaryolarda, problem çözümlerinde ve mülakat sorularında anlatılmak istenenin gayet açık olduğu öğretmen adayı tarafından teyit edilmiştir.

4.5. Veri Analizi

Nitel veri analizi, verileri hazırlamayı, düzenlemeyi, kodlamayı, kodları geniş kategorilerde ele almayı veya temalara indirgemeyi, elde edilen bulguları tablolar, şekiller grafikler yardımıyla göstermeyi ve bunları karşılaştırıp yorum yapmayı içermektedir (Creswell, 2021; Huberman ve Miles, 1994; Wolcott, 1994). Kısaca nitel veri analizi, elde edilen verileri tanımlama, sınıflandırma ve veriler arasındaki bağlantıyı anlatma sürecini içerir (Maxwell, 2013). Nitel veri analizi araştırmacının takip edeceği aşamalara hâkim olmasına, verilerin doğru işlenmesine ve yorumlanmasına, dolayısıyla bulgularının gerçekçi olarak yansıtılmasına olanak sağlar (Çelik ve ark., 2020). Nitel araştırmalarda farklı analiz türlerine rastlansa da sıklıkla kullanılan iki analiz türü vardır: İçerik analizi ve betimsel analiz (Strauss ve Corbin, 1990; Wolcott, 1994). İçerik analizinde elde edilen benzer veriler, belirli kavramlar ve

temalarca birleştirilir, sonradan okuyucunun anlayacağı şekilde düzenlenip yorumlanır (Strauss ve Corbin, 1990; Yıldırım ve Şimşek, 2021). Betimsel analiz, içerik analizine göre daha yüzeyseldir. Betimsel analizde daha önceden hazırlanmış çerçeveler veya temalar kullanılarak çalışmanın bulguları yorumlanır (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Betimleme sürecinde verilerin anlamlandırılması için sık sık doğrudan alıntılara yer verilerek bulgular sunulur (Patton, 2002; Strauss ve Corbin, 1990). Mevcut çalışmada daha önceden hazırlanmış bir çerçeve ele alınmıştır. Bu yüzden çalışmanın analizinde betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır.

Öğretmen adaylarının fark etme becerisinin incelenmesi için verilerin analizinde Jacobs ve arkadaşlarının (2010) çerçevesi kullanılmıştır. Bu çerçeveye göre fark etme becerisi farklı kategorilerden ve farklı düzeylerden oluşmaktadır. Merriam (2009), çalışmanın analizinde, kullanılan çerçeveye bağlı olarak dışarıda veri kalmayacak şekilde çerçeveye ait kategorilerin kapsamlı bir şekilde ele alınması gerektiğini, verilerin hangi kategoriye ait olduğunun rahatça anlaşılabilmesi için kategorilerin özel ve hassas olması gerektiğini belirtmektedir. Bu sebeple mevcut çalışmanın analiz çerçevesinin daha kapsayıcı olabilmesi ve fark etme becerisinin bileşenlerine yönelik düzeylerin daha açıklayıcı olabilmesi için yakın zamanda bu alanında yapılmış olan bazı çalışmaların (Doğan-Coşkun, 2021; Kılıç, 2019b; Dişbudak-Kuru ve ark., 2022; Magiera ve Zambak, 2021; Özel, 2019) analizinde kullanılan çerçevelerden yardım alınmıştır. Jacobs ve arkadaşları (2010) çalışmalarında kullandıkları çerçevede öğrenci çözümlerine katılma basamağını “kanıt (1) ve kanıt eksikliği (0)” şeklinde iki kategoride değerlendirmiştir. Öğrenci çözümlerini yorumlama basamağını ve öğrenci çözümlerine nasıl yanıt vereceğine karar verme basamağını ise “sağlam kanıt (2), sınırlı kanıt (1) ve eksik kanıt (0)” şeklinde üç kategoride değerlendirmiştir. Kılıç (2019b) yapmış olduğu çalışmada “teşhis, analiz ve yanıt” basamaklarını kullanarak analizini “az gelişmiş (1), orta seviye (2) ve çok gelişmiş (3)” şeklinde 3 puanlı bir kodlamayla yapmıştır. Doğan-Coşkun (2021) ve LaRochelle ve arkadaşları (2019) yapmış oldukları çalışmalarda “dikkat etme, yorumlama, dönüt verme” basamaklarını kullanarak analizini “sağlam kanıt, sınırlı kanıt, yetersiz kanıt” şeklinde kodlamıştır. Dişbudak-Kuru ve arkadaşları (2022) yapmış oldukları çalışmada “dikkate alma” basamağını “tam, sınırlı, yetersiz dikkate alma ve yanıtsız” şeklinde dört kategoride, “yorumlama” basamağını “tam,

geliştirilebilir, sınırlı, yetersiz yorumlama ve yanıtsız” şeklinde beş kategoride, “karşılık verme” basamağını ise diğerlerinden farklı olarak yanıt türüne göre “detaylı inceleme, ortaya çıkarma, yineleme, ilgisiz, cevapsız” şeklinde beş kategoride ele almıştır. Özel (2019) yapmış olduğu çalışmada öğrenci çözümlerine katılma ve öğrenci çözümlerini yorumlama basamağını diğerlerinden farklı olarak “sağlam kanıt, ortaya çıkan kanıt, sınırlı kanıt ve kanıt eksikliği” şeklinde dört kategoride ele almıştır. Dönüt verme basamağı için ise yine diğerlerinden farklı olarak yanıt türüne göre “öğrencilerin cebirsel düşünmesini genişletme/destekleme, yanıt olarak alıştırma sorma ve genel yanıt verme” şeklinde üç kategoride ele almıştır. Mevcut çalışmanın analizinde ise fark etme becerileri “dikkat etme, yorumlama ve dönüt verme” basamakları altında; her bir beceri de “sağlam kanıt, sınırlı kanıt ve yetersiz Kanıt” düzeyleri altında ele alınmıştır.

Problem çözümlerine dikkat etme basamağı için yapılan mülakatta öğretmen adaylarına “Problemin çözümünde hangi kısımlar dikkatinizi çekmiştir? Çözüm doğru mudur? Bu problem çözümünün nasıl yapıldığını (kullanılan strateji, düşünme biçimi, yapılan açıklamalar vb.) ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.” sorusu yöneltilmiştir. Burada öğretmen adaylarının problem çözümlerinde nelere dikkat ettikleri ve kullanılan yöntemlere dair bilgilerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Yapılan bu çalışmada dikkat etme basamağının analizi Jacobs ve arkadaşlarından (2010) farklı olarak “sağlam kanıt, sınırlı kanıt ve yetersiz kanıt” şeklinde üç kategoride ele alınmıştır.

Yorumlama basamağı için öğretmen adaylarına “Problem çözümünden hareketle bu çözümü yapan öğrencinin konuya ilişkin kavrayışı hakkında ne düşünüyorsunuz? Başka bir ifadeyle öğrenci matematiksel olarak neleri doğru anlamıştır ve hangi kısımlarda kavram karmaşasına sahip olabilir? Açıklayınız.” sorusu yöneltilmiştir. Burada öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşüncelerini nasıl anlamlandıracakları, öğrencilerin olası kavram karmaşalarını tespit edip edemeyecekleri gibi durumların incelenmesi amaçlanmıştır. Yapılan mevcut çalışmada yorumlama basamağının analizi Jacobs ve arkadaşları (2010) ile benzer olarak “sağlam kanıt, sınırlı kanıt ve yetersiz kanıt” şeklinde üç kategoride ele alınmıştır.

Dönüt verme basamağı için öğretmen adaylarına “Bu şekilde çözüm yapan bir öğrencinin öğretmeni siz olsaydınız, öğrenciye nasıl dönüt verirdiniz? Ne tür sorular/

problemler sorardınız? Bu yeni problemlerle neyi amaçladığınızı açıklayınız.” sorusu yöneltmiştir. Burada öğretmen adaylarının verilen problem çözümlerine yönelik nasıl dönütler verecekleri, çözümün doğru veya yanlış olmasına bağlı olarak bir sonraki adımda kullanacakları soruların nitelikleri gibi durumların incelenmesi amaçlanmıştır. Yapılan bu çalışmada dönüt verme basamağının analizi Jacobs ve arkadaşları (2010) ile benzer olarak “sağlam kanıt, sınırlı kanıt ve yetersiz kanıt” şeklinde üç kategoride ele alınmıştır.

Çalışmanın analiz çerçevesini oluşturan fark etme becerilerine yönelik beceri düzeyleri ve düzeylerin açıklamalarına Tablo 24’te detaylı olarak yer verilmiştir.

Tablo 24. Çalışmanın analiz çerçevesi

Fark Etme Becerileri	Düzeyleyler	Düzeyleylerin Açıklamaları
Dikkat Etme	Sağlam Kanıt	• Problem çözümünün doğru veya yanlış olduğunu doğru bir şekilde değerlendirir • Yapılan çözümü matematiksel ayrıntılarla detaylandırır • Yapılan çözüme yönelik özgün kanıtlar sunar • Çözümde yapılan hataya yönelik matematiksel ayrıntılara yer verir
	Sınırlı Kanıt	• Problem çözümünün doğru veya yanlış olduğunu genel ifadeler kullanarak değerlendirir • Yapılan çözümün doğru veya yanlış olduğunu doğru bir şekilde değerlendirmesine rağmen bir açıklamada bulunmaz • Yapılan çözümdeki matematiksel ayrıntılara detaylı olarak yer vermez
	Yetersiz Kanıt	• Problem çözümünün doğru veya yanlış olduğunu yanlış bir şekilde değerlendirir • Yapılan çözümün doğru veya yanlış olduğunu doğru bir şekilde değerlendirmesine rağmen çözümde kullanılan stratejileri veya yapılan açıklamaları yanlış bir şekilde değerlendirir

Tablo 24 (Devam). Çalışmanın analiz çerçevesi

Fark Etme Becerileri	Düzeyler	Düzeylerin Açıklamaları
Yorumlama	Sağlam Kanıt	• Problem çözümünü matematiksel ayrıntılara yer vererek yorumlar • Öğrencinin matematiksel düşünmesine yönelik fikir belirtir • Öğrencinin konuya dair bildiklerini veya bilmediklerini detaylı olarak belirtir • Öğrencide var olan veya olası kavram karmaşasına yönelik fikirlerini detaylı olarak belirtir • Çözümde yapılan hatayı açıklamaya yönelik yorumlarda bulunur
	Sınırlı Kanıt	• Problem çözümünü ve öğrencinin matematiksel düşünmesini doğru bir şekilde ifade eder fakat genel ifadelerle yorumlar • Yalnızca yapılan çözüme bağlı kalarak problemin çözümüne yönelik bağlantılar kurar • Öğrencinin bir kavram karmaşasına sahip olduğunu belirtir fakat buna yönelik detaylı açıklamalara yer vermez
	Yetersiz Kanıt	• Problem çözümünü ve öğrencinin matematiksel düşünmesini yanlış bir şekilde yorumlar • Problem çözümüne ve öğrencinin matematiksel düşünmesine yönelik fikir belirtmez • Yapılan çözümle ilgisi olmayan yorumlar yapar

Tablo 24 (Devam). Çalışmanın analiz çerçevesi

Fark Etme Becerileri	Düzeyler	Düzeylerin Açıklamaları
Dönüt Verme	Sağlam Kanıt	• Öğrencinin matematiksel düşünmesini geliştirici sorular yöneltir • Çözümde kullanılan stratejiye ilave olarak öğrenciyi başka bir stratejiye yönlendirir veya yönlendirici sorular yöneltir • Öğrencinin çözümünü sorgulATICI sorular yöneltir (Hatalı çözüm olması durumunda hatayı keşfettirici sorular sorar, örnekler verir; doğru çözüm olması durumunda çözümünü detaylandırıcı sorular sorar) • Yapılan çözüme bağlı kalarak gerekli yerlerde öğrencinin çözümü genellemesini sağlayıcı soruları yöneltir
	Sınırlı Kanıt	• Öğrenci düşünmesini anlamaya yönelik ve öğrencinin çözümünü açıklattırıcı sorular yöneltir • Öğrencinin anlayışını temel alan daha yüzeysel veya genel ifadeler içeren sorular yöneltir • Öğrenciye ne yapması gerektiğini direkt söyler
	Yetersiz Kanıt	• Problem çözümüne yönelik öğrenciye sözel pekiştiricilerde bulunur • Öğrenciye problem çözümünden bağımsız önerilerde bulunur • Öğrenciye problemi zorlaştırarak yeniden yöneltir • Öğrenciye problemi benzer ifadeler kullanarak yeniden yöneltir • Öğrenci düşünmesine yönelik fikir sunmaz ve herhangi bir dönütte bulunmaz

Çalışmada öğretmen adayları, yarı yapılandırılmış mülakatlar esnasında cebirsel düşünme ile ilgili hazırlanmış sorulara yönelik problem çözümlerini değerlendirmişlerdir. Yapılan mülakatlardan alınan ses kayıtları araştırmacı tarafından yazılı metne dönüştürülmüştür. Ayrıca öğretmen adayının mülakat formunda belirttiği

ifadeler ve araştırmacının tuttuğu kişisel notlar da yazılı metne eklenmiştir. Elde edilen verilere son düzenlemeler yapılmış ve veriler analiz edilmeye hazır hale getirilmiştir.

Veri analizi yapılırken kullanılan kodlamalarda tutarlılık sağlanması için oluşturulan senaryolar ve çözümlerin analizinde, dikkat etme, yorumlama ve dönüt verme basamaklarına yönelik her çözüm için öğretmen adaylarının cevapları sırayla analiz edilmiştir. Örneğin, 1. senaryoda verilen çözümler için öğretmen adaylarının cevapları ilk önce dikkat etme basamağına göre, daha sonra yorumlama basamağına göre ve son olarak dönüt verme basamağına göre analiz edilmiştir. 1. senaryo için verilen cevapların analizi bittikten sonra 2. senaryonun analizine geçilmiştir.

Veriler araştırmacı ve fark etme becerisi alanında uzman bir matematik eğitimcisi tarafından bağımsız olarak kodlanmıştır. Her bir veri ayrı ayrı analiz edildikten sonra yapılan kodlamalar karşılaştırılmış ve güvenilirlik hesaplanmıştır.

4.6. Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel çalışmalarda geçerliğin ve güvenirliliğin sağlanması, nicel çalışmalara göre farklılık göstermektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Nitel çalışmalarda geçerlik ve güvenirlik için yapı geçerliğine, iç geçerliğe, dış geçerliğe ve güvenirliliğe bakmanın önemine vurgu yapılmaktadır (LeCompte ve Goetz, 1982). İç geçerliğin sağlanması için bulgular hakkında uzman görüşünün alınması, katılımcılarla uzun süreli gözlemlerin yapılması, verinin veri kaynağına kontrol ettirilmesi, çeşitlemenin kullanılması, çalışmanın başında araştırmacının görüş ve düşüncelerini belirtmesi ve katılımcıların tüm sürece dahil olması önerilmiştir (Merriam, 1998; Miller, 1992). Merriam (1998) dış geçerliğin arttırılması için durumun özelliklerini belirtirken çalışmada zengin betimlemelere yer verilmesini önermiştir. Gibbs (2007), çalışmanın güvenirliliği için farklı çalışmalar arasında ve araştırmacılar arasında tutarlılığın bulunmasına vurgu yapmaktadır. Böylece çalışmanın tutarlı olması ve aşamalı olarak detaylandırılması, ileride yapılacak çalışmalara da yol gösterici nitelikte olacaktır. Merriam (1998), güvenirliliğin arttırılması için ise yöntem çeşitlemesine yer verilmesini, çalışmanın detaylandırılıp yol göstericiliği sayesinde bağımsız bir okuyucunun bulguları doğrulayabilmesini, araştırmacının çalışmadaki rolünün açıkça belirtilmesini önermiştir.

Çalışmanın veri toplama aracına yönelik yapı geçerliliğinin sağlanması için veri toplama aracında hazırlanan senaryolar, çözümler ve yarı yapılandırılmış mülakat soruları uzman görüşüne gönderilmiştir. Uzmanlardan gelen dönütler doğrultusunda çalışmanın veri toplama aracı, yapı ve içerik bakımından yeniden düzenlenmiştir. Daha sonra çalışmanın uygulanabilirliğini test etmek amaçlı pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışma sonucunda veri toplama aracında düzenlenmesi gereken alanlar yeniden tespit edilmiştir. Öğretmen adayından senaryoların, çözümlerin ve mülakat sorularının anlaşılır olduğu görüşü alınmıştır. Aynı zamanda çalışmanın yapılabilmesi için uygun olan mülakat sürelerine karar verilmiştir. Asıl çalışmaya başlamadan öncesinde öğretmen adaylarına her bir mülakat formu için 5 dakikalık düşünme süreleri verilmiştir. Verilen düşünme süresinin amacı hem öğretmen adayının soruların anlaşılabilirliğini onaylaması hem de mülakat sırasında olması beklenen heyecan faktörünün ve düşünmeden cevap vermenin getirdiği veri eksikliğinin ya da kaybının önlenmesidir.

Çalışmada bulguların iç geçerliliği, elde edilen verilerin öğretmen adaylarının, öğrencilerin cebirsel düşüncelerini fark etme becerilerini gerçekçi bir şekilde yansıtabilmesi ile ilgilidir. Çalışmada iç geçerliliği artırmak için yarı yapılandırılmış mülakatlar ile veriler toplanmış, öğretmen adaylarıyla farklı günlerde oturumlar düzenlenmiş, gözlemler yapılmış ve verilerin toplanması sırasında katılımcı onayının alınması durumu sağlanmıştır.

Veri toplama sürecinde yarı yapılandırılmış mülakatlar sırasında veri kaybını önlemek amaçlı öğretmen adaylarının cevapları ses kaydına alınmıştır. Mülakat sırasında öğretmen adaylarının gerekli gördükleri durumlarda ve araştırmacının öğretmen adayından bizzat belirtmesini istediği durumlarda mülakat formunun boş kısımlarının kullanılması istenmiştir. Araştırmacı, yapılan mülakatlar sırasında öğretmen adayının bahsettiği duruma yönelik anlamakta ve yorumlamakta zorlandığı durumlarda, öğretmen adaylarına düşüncelerini teyit ettirme amaçlı sorular sorarak cevaplarının doğruluğunun anlaşılması konusunda öğretmen adaylarının onaylarını almıştır. Aynı zamanda araştırmacı, mülakat sırasında ses kayıtlarında anlaşılması zor olabilecek yerlerde kişisel notlar tutmuştur. Böylelikle mülakatlardan elde edilen veriler, mülakat formunda yazılan yazılarla ve araştırmacının mülakat sırasında tuttuğu

notlarla desteklenmiştir. Tüm bu durumlar ele alındığında veri analizi sürecinde veri kaybına izin verilmeyecek önlemler alınmaya çalışılmıştır.

Çalışmanın veri toplama sürecinde öğretmen adaylarının müsaitlik durumları, mülakat boyunca sıkılma ve yorulma gibi durumları, dinlenme ihtiyaçları göz önünde bulundurulmuş, mülakatların farklı günlerde ve birden fazla oturumda yapılması sağlanmıştır. Bu süreçte her bir öğretmen adayıyla yapılan mülakat 3 farklı günde ve 6 oturumda yapılmış ve mülakatların her biri ortalama olarak 3 saat sürmüştür. Öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilen bu mülakatlar verilerinin iç geçerliliğini artırmada önemli bir rol oynamıştır.

Mülakatlar sırasında tutulan ses kayıtları teker teker dinlenerek öğretmen adaylarının mülakat sorularına verdikleri cevaplar yazılı metne dönüştürülmüştür. Bunlara ek olarak öğretmen adayının mülakat formlarında belirttiği çizimler, notlar vb. açıklamalar ve araştırmacının gözlem sırasında tuttuğu notlardaki bilgiler de yazılı metne eklenmiştir. Veri analizi yapılırken kullanılan sınıflandırmalarda tutarlılık sağlanması adına oluşturulan senaryolar ve çözümlerin analizinde, dikkat etme, yorumlama ve dönüt verme basamaklarına yönelik her çözüm için öğretmen adaylarının cevapları teker teker analiz edilmiştir. Çalışmadan elde edilen veriler, analiz çerçevesinde kullanılan düzeylere göre sınıflandırılmış ve dış geçerlilik sağlanmıştır.

Veriler araştırmacı ve fark etme becerisi alanında uzman bir matematik eğitimcisi tarafından bağımsız olarak kodlanmıştır. Her bir veri ayrı ayrı analiz edildikten sonra yapılan kodlamalar karşılaştırılmış ve güvenilirlik hesaplanmıştır. Kodlayıcılar arasındaki uyum oranı Miles ve Huberman'ın (1994) güvenilirlik formülüne, $Uyum\ Oranı = \frac{Görüş\ Birliği}{Görüş\ Birliği + Görüş\ Ayrılığı}$, göre hesaplanmış ve uyum oranı 0,92 çıkmıştır. Kodlayıcılar arasındaki uyum oranının en az %80 olması beklenmektedir (Miles ve Huberman, 1994; Patton, 2002). Yapılan bu çalışmada uyum oranının 0,92 çıkması çalışmanın güvenilirliğinin yüksek olduğunu göstermektedir. Analizler sırasında belirli zaman aralıklarında kodlamaların tartışılmasına yönelik toplantılar yapılmıştır. Yapılan farklı kodlamalar analiz çerçevesi göz önüne alınarak tartışılmış ve yapılan tartışmalar sonucunda kodlamalarda görüş birliğine varılmıştır. Gibbs (2007), kodlayıcıların düzenli iletişim halinde olmasının ve yapılan analizlere dair toplantıların yapılmasının da güvenilirliği arttırdığına vurgu yapmaktadır.

Araştırmacı çalışmaya araştırmacı ve gözlemci rolü ile katılmıştır. Süreç içerisinde ğretmen adaylarıyla yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmış, mülakatlar sırasında yapılan gözlemler doğrultusunda kişisel notlar tutulmuştur. Tutulan kişisel notlar verilerin analiz sürecini destekleyici niteliktedir. Baltacı (2017), nicel araştırmalardan farklı olarak nitel araştırmalarda araştırmacının çalışmaya öznel olarak katılmasına ve objektif yöntemlere başvurmasına vurgu yapmaktadır. Bu da çalışmanın geçerlik ve güvenirliğini büyük ölçüde etkilemektedir.



5. BULGULAR

Bu bölümde çalışmanın amacı doğrultusunda matematik öğretmeni adaylarının, öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili fark etme becerilerine yönelik elde edilen bulgulara yer verilmiştir. İlk olarak öğretmen adaylarının, fark etme becerisinin dikkat etme basamağına ilişkin bulgular sunulmuştur. İkinci olarak, matematik öğretmeni adaylarının, fark etme becerisinin yorumlama basamağına ilişkin bulgular sunulmuştur. Son olarak matematik öğretmeni adaylarının, fark etme becerisinin dönüt verme basamağına ilişkin bulgular sunulmuştur. Ayrıca bu bölümde bulgulara ait yüzde frekans tablolarına ve mülakatlardan elde edilen bulgulara ilişkin doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Sunulan alıntılarda öğretmen adaylarının çözümlere yönelik açıklama yaparken mülakat formu üzerinde karalama olarak gösterdiği yerler veya araştırmacının mülakat sırasında tuttuğu bazı kişisel notlar köşeli parantez kullanılarak belirtilmiştir.

5.1. Öğretmen Adaylarının, Öğrencilerin Cebirsel Düşünceleri ile İlgili Problem Çözümlerine Dikkat Etmelerine Yönelik Bulgular

Bu bölümde araştırmanın alt problemlerinin birincisi olan “Ortaokul matematik öğretmeni adayları, öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerine ne düzeyde dikkat etmektedirler?” problemine yönelik bulgulara yer verilmiştir.

Fark etme becerilerinin ilki olan problem çözümlerine dikkat etme becerisi, öğretmen adaylarının problem çözümlerinde nelere dikkat ettiğini, problem çözümlerindeki düşünme biçimlerinin ve kullanılan stratejilerin ne kadar farkında olduklarını açıklayabilmeleridir. Bu çalışmada, elde edilen verilerin analizine dayanarak öğretmen adaylarının problem çözümlerine dikkat etme düzeylerine dair kanıtlar üç düzeyde ele alınmıştır: Problem çözümlerine dikkat ettiklerine dair sağlam kanıt, problem çözümlerine dikkat ettiklerine dair sınırlı kanıt ve problem çözümlerine dikkat edildiğine dair yetersiz kanıt. Problem çözümlerine dikkat ettiklerine dair sağlam kanıt gösteren öğretmen adayları, çözümlerin doğru veya yanlış olduğuna dair görüşlerini doğru bir şekilde ifade ederken neden doğru veya yanlış olduğunu da çözümdeki işlem ve stratejilerin tüm detaylarını açıklayarak belirtir. Problem

çözümlerine dikkat ettiklerine dair sınırlı kanıt gösteren öğretmen adayları, çözümlerin doğru veya yanlış olduğuna dair görüşlerini doğru bir şekilde ifade ederken neden doğru veya yanlış olduğuna dair herhangi bir açıklamada bulunmaz ya da çözüme yönelik matematiksel ayrıntıları genel ifadeler kullanarak açıklar. Son olarak, problem çözümlerine dikkat ettiklerine dair yetersiz kanıt gösteren öğretmen adayları, çözümlerin doğru veya yanlış olduğuna dair görüşlerini yanlış bir şekilde ifade eder, çözümdeki işlem ve stratejiye dair doğru bir açıklamada bulunmaz.

Genelleştirilmiş aritmetik bileşeni 12 problem çözümü içerdiği için dikkat etme basamağına yönelik 5 öğretmen adayından toplam 60 yanıt elde edilmiştir. Fonksiyonel düşünme bileşeni 12 problem çözümü içerdiği için dikkat etme basamağına yönelik 5 öğretmen adayından toplam 60 yanıt elde edilmiştir. Fark etme becerisinin dikkat etme basamağına yönelik öğretmen adaylarından elde edilen yanıtların frekans dağılımına Tablo 25'te yer verilmiştir.

Tablo 25. Fark etme becerisinin dikkat etme basamağına yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı

Cebirsel Düşünme	Sağlam Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Toplam
Genelleştirilmiş Aritmetik	45	10	5	60
Fonksiyonel Düşünme	48	10	2	60
Toplam	93 (%77,5)	20 (%16,7)	7 (%5,8)	120 (%100)

*N= 120 yanıt

Tablo 25 incelendiğinde, öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerine en fazla oranda sağlam kanıt düzeyinde; en az oranda ise yetersiz kanıt düzeyinde dikkat ettikleri görülmüştür. Sunulan sağlam, sınırlı ve yetersiz kanıtlar arasındaki oran farkının fazla olması öğretmen adaylarının cebirsel düşünmeye yönelik problem çözümlerine dikkat etme becerilerinin oldukça yüksek olduğunun bir göstergesidir. Cebirsel düşünmenin bileşenleri incelendiğinde, fonksiyonel düşünme bileşeninde sunulan sağlam kanıt sayıları genelleştirilmiş aritmetik bileşenine kıyasla fazla olsa da değerler birbirine oldukça yakındır. Sunulan sınırlı kanıtların sayısı her iki bileşen için aynıdır. Genelleştirilmiş aritmetik

bileşeninde sunulan yetersiz kanıt sayıları fonksiyonel düşünme bileşenine kıyasla fazla olsa da değerler birbirine oldukça yakındır.

Öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşünmelerine yönelik problem çözümlerine dikkat etme becerileri “genelleştirilmiş aritmetik” ve “fonksiyonel düşünme” bileşenleri altında ayrı ayrı ele alınmış ve detaylı olarak incelenmiştir.

5.1.1. Öğretmen Adaylarının Genelleştirilmiş Aritmetik Bileşeni ile İlgili Problem Çözümlerine Dikkat Etmelerine Yönelik Bulgular

Fark etme becerisinin dikkat etme basamağında, cebirsel düşünmenin genelleştirilmiş aritmetik bileşenine yönelik öğretmen adaylarından elde edilen yanıtların frekans dağılımına Tablo 26’da yer verilmiştir.

Tablo 26. Öğretmen adaylarının genelleştirilmiş aritmetik ile ilgili problem çözümlerine dikkat etmelerine yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı

Genelleştirilmiş Aritmetik	Senaryolar	Problem Çözümleri	Sağlam Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
İlişkileri ve Özellikleri Keşfetme	Senaryo 1	Ç1 (Y)	5	0	0
		Ç2 (D)	5	0	0
	Senaryo 2	Ç3 (Y)	1	1	3
		Ç4 (D)	4	0	1
Nicelikler Arasındaki İlişki Olarak Eşitliği Keşfetme	Senaryo 3	Ç5 (Y)	3	2	0
		Ç6 (D)	4	1	0
	Senaryo 4	Ç7 (Y)	4	1	0
		Ç8 (D)	4	1	0
Değişken Olarak Sembolleri Kullanma	Senaryo 5	Ç9 (Y)	5	0	0
		Ç10 (D)	2	3	0
	Senaryo 6	Ç11 (Y)	4	0	1
		Ç12 (D)	4	1	0
Toplam			45 (%75)	10 (%16,7)	5 (%8,3)
N=60 yanıt					

*Problem çözümlerinin doğru veya yanlış olduğu parantez içinde belirtilmiştir.

Tablo 26’dan elde edilen bulgulara göre öğretmen adayları genelleştirilmiş aritmetik bileşeni altında problem çözümlerine %75 oranında sağlam kanıt, %16,7 oranında sınırlı kanıt ve %8,3 oranında yetersiz kanıt düzeylerinde dikkat etmektedir. Sağlam kanıt için verilen 45 yanıtın 23 tanesi doğru çözüme aitken, 22 tanesi yanlış çözüme aittir. Doğru ve yanlış çözümler için birbirlerine yakın değerler elde edilmiş

olması öğretmen adaylarının her iki yanıt türü için de dikkat etme düzeylerinin yüksek olduğunun göstergesidir. Bu durum doğru veya yanlış çözümlerin, öğretmen adaylarının dikkat etme basamağında sundukları kanıtlarda değişikliğe sebebiyet vermediği şeklinde yorumlanabilir. Bir başka ifadeyle öğretmen adaylarının doğru veya yanlış çözüm fark etmeksizin dikkat etme basamağında sağlam kanıt sunma durumları oldukça yüksektir. Sınırlı kanıt için verilen 10 yanıtın 6 tanesi doğru çözüme aitken, 4 tanesi yanlış çözüme aittir. Yetersiz kanıt için verilen 5 yanıtın 1 tanesi doğru çözüme aitken, 4 tanesi yanlış çözüme aittir. Öğretmen adaylarının verdikleri yanıtların neredeyse tamamında sağlam kanıt sayısı, sınırlı ve yetersiz kanıt sayısından fazladır. Bu bulgunun aksine Ç3'te sunulan sağlam kanıt sayısı yetersiz kanıt sayısından, Ç10'da sunulan sağlam kanıt sayısı ise sınırlı kanıt sayısından daha az olduğu tespit edilmiştir.

Genelleştirilmiş aritmetiğin alt bileşenleri kendi içinde değerlendirildiğinde, her üç bileşen için de öğretmen adaylarının verdiği toplam 20 yanıttan 15 tanesi sağlam kanıt düzeyindedir. Bu bulgu genelleştirilmiş aritmetiğin alt bileşenleri için sağlam kanıt sunma durumları arasında herhangi bir değişiklik olmadığı şeklinde yorumlanabilir. Ancak sunulan sınırlı ve yetersiz kanıt sayıları arasında önemli farklılıklar vardır. Örneğin ilişkileri ve özellikleri keşfetme bileşeninde yalnızca 1 tane, nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme bileşeninde 5 tane ve değişken olarak sembolleri kullanma bileşeninde 4 tane sınırlı kanıtın sunulduğu görülmüştür. İlişkileri ve özellikleri keşfetme bileşeninde 4 tane ve değişken olarak sembolleri kullanma bileşeninde yalnızca 1 tane yetersiz kanıtın sunulduğu görülmüştür. Nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme bileşeninde ise herhangi bir kanıt rastlanmamıştır.

Genelleştirilmiş aritmetik bileşeni altında öğretmen adaylarının problem çözümlerine dikkat etmesine yönelik sağlam kanıt, sınırlı kanıt ve yetersiz kanıt düzeylerinde verdikleri yanıtlardan alınan bazı alıntılara aşağıda yer verilmiştir.

Alper'in senaryo 4'teki Ç8'e (bkz. Tablo 16) dikkat etmesine yönelik sağlam kanıt örneği:

Öğrenci, çözümünde aslında doğru bir sonuca ulaşmıştır ve soruda karenin cevabını istemediği için güzel bir yorum yapmıştır. Sorunun iki tarafına da -8 eklendiğini ve karenin eşit olduğunu görmüştür.

Alper'in yukarıda yaptığı açıklamada çözümün doğruluğunu doğru bir şekilde ifade ettiği anlaşılmaktadır. Öğretmen adayı verdiği yanıtta öğrencinin çözümünü detaylandırmış ve öğrencinin soruda asıl sorulmak istenene dair verdiği cevabı doğru bir şekilde açıklamıştır. Bu yüzden Alper'in verdiği yanıt sağlam kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

Alper'in senaryo 3'teki Ç5'e (bkz. Tablo 15) dikkat etmesine yönelik sınırlı kanıt örneği:

Öğrencinin çözümü yanlıştır. Öğrencinin çözümde yapmış olduğu işlem $13+19$ 'un sonucunu yanındaki kareye yazmasıdır. Bulduğu sonucu kareye yazmasının sebebi ise eşittir gördüğünde işlemin sonucu olduğunu düşünmesidir, bundan dolayı 32 yazmıştır.

Alper'in yukarıdaki açıklamalarında çözümün yanlışlığını doğru bir şekilde belirttiği anlaşılmaktadır. Çözümün ilk kısmında kullanılan stratejiyi de doğru bir şekilde ifade etmiştir. Fakat öğretmen adayı, soruda yer alan $+22$ 'yi öğrencinin neden kullanmadığına dair herhangi bir açıklamada bulunmadığı için çözümü detaylı bir şekilde açıklamamıştır. Bu yüzden Alper'in verdiği yanıt sınırlı kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

Berke'nin senaryo 2'deki Ç3'e (bkz. Tablo 14) dikkat etmesine yönelik yetersiz kanıt örneği:

Öğrencinin ilk olarak cevabı doğrudur ama çözüm yolunun bayağı bir yanlış olduğunu düşünüyorum. Çift÷Tek olarak düşünmek yerine Çift x Tek olarak düşünüp, onun cevabının çift olduğunu biliyor. Zaten doğru bir kanıya varmış orada. Oradan da işlemler üzerinde değişim yapmaya çalışmış, mesela eşitliğin sağ tarafındaki çifti karşıya bölü Ç olacak şekilde atmış. Daha sonrasında yaptığını şöyle açıklayayım. $\text{Ç} \div \text{Ç} = T$ demiş ama burada sadece sayıyı kendisine böldüğünü düşünüyorum. Örneğin $4/4$ mesela. Bunun sonucundan tek sonucuna ulaştığını fark etmiş. Ama mesela $8/4$ olsa, cevap çift oluyor. Sayıyı kendisine bölünce cevap tek olabilir ama çift

oluyor. Eğer orayı doğru saysaydık öğrencinin diğer aşamalarının daha doğru daha etkili olduğunu düşünüyorum. Çünkü $\frac{C}{T} = T$ ’te paydadaki çifti karşıya çarpı çift, sonuçtaki teki de paydaya bölü tek olarak atmış [içer dışlar çarpımı yapmak gibi] ve $\frac{C}{T} = C$ olarak bulmuş. Yani cevabı doğru bulmuş ama izlediği yolda hatalar var.

Berke’nin, öğrencinin izlediği yollarda hata olduğunu düşünmesine rağmen cevabın doğru olduğunu belirterek yanlış bir sonuca ulaştığı anlaşılmaktadır. Kullandığı örneklerde aksine örnek olabilecek durumlara örnek vermesine rağmen sorunun doğru cevabına ulaşabilmesi için gerekli olan örneklerin tamamına yer vermemiştir. Bu durum Berke’nin doğru cevaba ulaşmasına engel olmuştur. Bu yüzden Berke’nin verdiği yanıt yetersiz kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

5.1.2. Öğretmen Adaylarının Fonksiyonel Düşünme Bileşeni ile İlgili Problem Çözümlerine Dikkat Etmelerine Yönelik Bulgular

Fark etme becerisinin dikkat etme basamağında, cebirsel düşünmenin fonksiyonel düşünme bileşenine yönelik öğretmen adaylarından elde edilen yanıtların frekans dağılımına Tablo 27’de yer verilmiştir.

Tablo 27. Öğretmen adaylarının fonksiyonel düşünme ile ilgili problem çözümlerine dikkat etmelerine yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı

Fonksiyonel Düşünme	Senaryolar	Problem Çözümleri	Sağlam Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
Örüntüleri Genelleme	Senaryo 7	Ç13 (D)	4	1	0
		Ç14 (Y)	3	2	0
		Ç15 (D)	3	2	0
		Ç16 (Y)	3	2	0
	Senaryo 8	Ç17 (D)	4	0	1
		Ç18 (Y)	3	2	0
		Ç19 (D)	4	0	1
		Ç20 (Y)	5	0	0
Ters İşlemleri	Senaryo 9	Ç21 (D)	5	0	0
		Ç22 (Y)	4	1	0
Kullanma	Senaryo 10	Ç23 (D)	5	0	0
		Ç24 (Y)	5	0	0
Toplam			48 (%80)	10 (%16,7)	2 (%3,3)
N=60 yanıt					

*Problem çözümlerinde cevapların doğru veya yanlış olduğu parantez içinde belirtilmiştir.

Tablo 27’den elde edilen bulgulara göre öğretmen adayları fonksiyonel düşünme bileşeni altında problem çözümlerine %80 oranında sağlam kanıt, %16,7 oranında sınırlı kanıt ve %3,3 oranında yetersiz kanıt düzeylerinde dikkat etmektedir. Fonksiyonel düşünme bileşeninde öğretmen adaylarının yanıtlarından elde edilen sağlam kanıt sayısı sınırlı kanıt ve yetersiz kanıt sayısından fazladır. Sağlam kanıt için verilen 48 yanıtın 25 tanesi doğru çözüme aitken, 23 tanesi yanlış çözüme aittir. Doğru ve yanlış çözümler için birbirlerine yakın değerler elde edilmiş olması öğretmen adaylarının her iki yanıt türü için de dikkat etme düzeylerinin yüksek olduğunun göstergesidir. Bu durum doğru veya yanlış çözümlerin, öğretmen adaylarının dikkat etme basamağında sundukları kanıtlarda değişikliğe sebebiyet vermediği şeklinde yorumlanabilir. Bir başka ifadeyle öğretmen adaylarının doğru veya yanlış çözüm fark etmeksizin dikkat etme basamağında sağlam kanıt sunma durumları oldukça yüksektir. Sınırlı kanıt için verilen 10 yanıtın 3 tanesi doğru çözüme aitken, 7 tanesi yanlış çözüme aittir. Yetersiz kanıt için verilen 2 yanıtın ise tamamı doğru çözüme aittir.

Fonksiyonel düşünmenin alt bileşenleri kendi içinde değerlendirilecek olursa, örüntüleri genelleme bileşeninde %72,5 (29/40) oranında sağlam kanıt, %22,5 (9/40) oranında sınırlı kanıt ve %5 (2/40) oranında yetersiz kanıt sunulmuştur. Ters işlemleri kullanma bileşeninde ise %95 (19/20) oranında sağlam kanıt ve %5 (1/20) oranında sınırlı kanıt sunulmuştur. Buradan örüntüleri genelleme ve ters işlemleri kullanma bileşenleri için sunulan sağlam kanıt sayısının sınırlı ve yetersiz kanıt sayısından fazla olduğu anlaşılmaktadır. Sınırlı kanıtların sayısının en fazla örüntüleri genelleme bileşenindeki senaryo 7 olduğu görülmüştür. Ters işlemleri kullanma bileşeninde yalnızca 1 tane sınırlı kanıt sunulurken, senaryo 10’da ise herhangi bir sınırlı kanıt rastlanmamıştır. Yetersiz kanıtların yalnızca örüntüleri genelleme bileşeninde sunulduğu ve senaryo 8’de olduğu görülmüştür. Örüntüleri genelleme bileşenindeki senaryo 7’de ve ters işlemleri kullanma bileşeninde ise herhangi bir yetersiz kanıt rastlanmamıştır.

Fonksiyonel düşünme bileşeni altında öğretmen adaylarının problem çözümlerine dikkat etmesine yönelik sağlam kanıt, sınırlı kanıt ve yetersiz kanıt düzeylerinde verdikleri yanıtlardan bazı alıntılara aşağıda yer verilmiştir.

Cemre'nin senaryo 10'daki Ç24'e (bkz. Tablo 22) dikkat etmesine yönelik sağlam kanıt örneği:

Öğrencinin çözümü yanlıştır. Çözümü incelediğimde öğrenci, çarşamba günü satılan kalem sayısı soruda direkt verildiği için çarşamba gününden hareket etmiştir. Ama salıya geçişte, “çarşamba günü satılan kalem sayısı salı günü satılan kalem sayısından 12 eksik” ifadesinden yola çıkarak, öğrencinin eksik diyorsa ne yapmalıyım diye düşünüp, burada çıkarma işlemi yapacağım düşüncesinin olduğunu fark ettim. O yüzden çarşambadan salıya geçişte bir hata yapmış. Aslında sonrasındaki düşünceye göre öğrenci, salıyla çarşambayı toplarım, toplam kalem sayısından da bulduğum sonucu çıkarırsam bana pazartesiye verir şeklinde düşünüyor. Ama öğrenci salıyı yanlış bulduğu için dolayısıyla pazartesiye de yanlış bulmuş oldu.

Cemre'nin yukarıda yaptığı açıklamalarında çözümün yanlışlığını doğru bir şekilde ifade ettiği anlaşılmaktadır. Öğretmen adayı verdiği yanıtta, öğrencinin yaptığı her işlemin sebebini detaylı olarak açıklamıştır. Öğrencinin nerede hata yaptığına da dair detaylı bir açıklama sunmuştur. Bu yüzden Cemre'nin verdiği yanıt sağlam kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

Damla'nın senaryo 7'deki Ç13'e (bkz. Tablo 19) dikkat etmesine yönelik sınırlı kanıt örneği:

Öğrenci küp sayısı ile bir küpte bulunan yüzey sayısını çarpıp devamında küp sayısının 1 eksiği ile 2'yi çarpmıştır. Yani öğrencinin çözümü doğrudur.

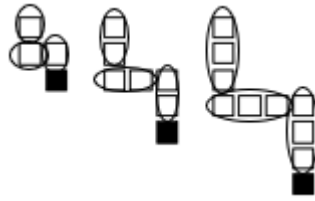
Damla'nın yukarıda yaptığı açıklamalarda çözümün doğruluğunu doğru bir şekilde ifade etmiştir. Ancak çözümde yalnızca öğrencinin yaptığı işlemleri anlatmıştır. Bu işlemlerin neden yapıldığına dair detaylı bir açıklamada bulunmamıştır. Bu yüzden Damla'nın verdiği yanıt sınırlı kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

Cemre'nin, senaryo 8'deki Ç19'a (bkz. Tablo 20) dikkat etmesine yönelik yetersiz kanıt örneği:

Aslında öğrencinin çözümü doğru. Yani yaptığı şeye baktığım zaman öğrencinin üçlü gruplama yapmak istediğini görüyorum. Şöyle düşünmüş olabilir: 112'yi üçe bölmek istediğinde bölemeyeceğini fark etti sanırım, sonra 112'yi üçe bölebilmek için bundan 4'ü çıkarmış. Üçe bölünebilmenin kuralı da rakamları

toplamının 3 veya 3'ün tam katı olmasıdır. Bu yüzden 112'nin rakamları toplamını, 112'den çıkarmış. Sonra üçlü gruplama yapabilmek için burada elde ettiği sonucu üçe bölmüştür. Üçlü gruplama yaptığında [birinci adımda 3 tane birli grup, ikinci adımda 3 tane ikili grup, üçüncü adımda 3 tane üçlü grup gibi] her seferinde bir kare dışarıda kalacağı için, bu bir kareyi de adım sayısına eklemiş ve 37. adım olarak doğru bir cevaba ulaşmıştır ama adımı hesaplamada doğru ilerleyememiş sanırım.

Cemre'nin yukarıdaki açıklamalarından çözümün doğruluğunu doğru bir şekilde tespit ettiği anlaşılmaktadır. Ancak öğrencinin çözümde kullandığı stratejiyi doğru tespit edemediği ve yanlış bir açıklama yaptığı görülmektedir. Bu yüzden verilen yanıt yetersiz kanıt olarak ele alınmıştır.



Şekil 4. Cemre'nin Ç19'a yönelik belirttiği durum

5.2. Öğretmen Adaylarının, Öğrencilerin Cebirsel Düşünceleri ile İlgili Problem Çözümlerini Yorumlamalarına Yönelik Bulgular

Bu bölümde araştırmanın alt problemlerinin ikincisi olan “Ortaokul matematik öğretmeni adayları, öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerine ne düzeyde yorumlamaktadırlar?” problemine yönelik bulgulara yer verilmiştir.

Fark etme becerilerinin ikincisi olan problem çözümlerini yorumlama becerisi, öğretmen adaylarının problem çözümlerindeki öğrencilerin matematiksel akıl yürütmelerini, matematiksel anlayışlarını, konuya dair hakimiyetlerini ve olası kavram karmaşalarını ya da yanlışlarını yorumlayabilmeleridir. Bu çalışmada, elde edilen verilerin analizine dayanarak öğretmen adaylarının problem çözümlerini yorumlama düzeylerine dair kanıtlar üç düzeyde ele alınmıştır: Problem çözümlerini yorumlamaya dair sağlam kanıt, problem çözümlerini yorumlamaya dair sınırlı kanıt ve problem çözümlerini yorumlamaya dair yetersiz kanıt. Problem çözümlerini yorumlamaya dair sağlam kanıt gösteren öğretmen adayları, problem çözümlerini ve öğrencilerin matematiksel düşüncelerini detaylı olarak yorumlar, problem çözümlerindeki hataları açıklar, öğrencinin konuya hakimiyeti hakkında ve öğrencideki olası kavram

karmaşaları/yanılgıları hakkında detaylı açıklamalar yapar. Problem çözümlerini yorumlamaya dair sınırlı kanıt gösteren öğretmen adayları, problem çözümünü ve öğrencinin matematiksel düşünmesini genel ifadelerle yorumlar, öğrencinin konuya hakimiyetinden veya olası kavram karmaşası/yanılgısı olduğundan bahseder ama detaylara yer vermez. Son olarak, problem çözümlerini yorumlamaya dair yetersiz kanıt gösteren öğretmen adayları, problemin çözümüne ve öğrencinin matematiksel düşünmesine yönelik fikir belirtmez veya yanlış yorumlamalar yapar, çözümle ilgisiz yorumlar yapar.

Genelleştirilmiş aritmetik bileşeni 12 problem çözümü içerdiği için yorumlama basamağına yönelik 5 öğretmen adayından toplam 60 yanıt elde edilmiştir. Fonksiyonel düşünme bileşeni 12 problem çözümü içerdiği için yorumlama basamağına yönelik 5 öğretmen adayından toplam 60 yanıt elde edilmiştir. Fark etme becerisinin yorumlama basamağına yönelik öğretmen adaylarından elde edilen yanıtların frekans dağılımına Tablo 28’de yer verilmiştir.

Tablo 28. Fark etme becerisinin yorumlama basamağına yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı

Cebirsel Düşünme	Sağlam Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Toplam
Genelleştirilmiş Aritmetik	50	7	3	60
Fonksiyonel Düşünme	29	29	2	60
Toplam	79 (%65,8)	36 (%30)	5 (%4,2)	120 (%100)

*N=120 yanıt

Tablo 28 incelendiğinde, öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerini en fazla oranda sağlam kanıt düzeyinde; en az oranda ise yetersiz kanıt düzeyinde yorumladıkları görülmüştür. Sunulan sağlam, sınırlı ve yetersiz kanıtlar arasındaki oran farkının fazla olması öğretmen adaylarının cebirsel düşünmeye yönelik problem çözümlerini yorumlama becerilerinin oldukça yüksek olduğunun bir göstergesidir. Cebirsel düşünmenin bileşenleri incelendiğinde, öğretmen adaylarının genelleştirilmiş aritmetik bileşeninde sundukları sağlam kanıtların fonksiyonel düşünme bileşenine kıyasla daha fazla olduğu görülmektedir. Fonksiyonel düşünme bileşeninde sundukları sınırlı kanıtların sayısının ise

genelleştirilmiş aritmetik bileşenine kıyasla daha fazla sayıda olduğu görülmektedir. Sağlam kanıt ve sınırlı kanıttan elde edilen bulgular göz önüne alındığında, öğretmen adaylarının fonksiyonel düşünme bileşenine yönelik problem çözümlerini yorumlamada daha fazla zorluk yaşadıkları söylenebilir. Genelleştirilmiş aritmetik bileşeninde sunulan yetersiz kanıt sayıları fonksiyonel düşünme bileşenine kıyasla fazla olsa da değerler birbirine oldukça yakındır.

Öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerine yönelik problem çözümlerini yorumlama becerileri “genelleştirilmiş aritmetik” ve “fonksiyonel düşünme” bileşenleri altında ayrı ayrı ele alınmış ve detaylı olarak incelenmiştir.

5.2.1. Öğretmen Adaylarının Genelleştirilmiş Aritmetik Bileşeni ile İlgili Problem Çözümlerini Yorumlamalarına Yönelik Bulgular

Fark etme becerisinin yorumlama basamağında, cebirsel düşünmenin genelleştirilmiş aritmetik bileşenine yönelik öğretmen adaylarından elde edilen yanıtların frekans dağılımına Tablo 29’da yer verilmiştir.

Tablo 29. Öğretmen adaylarının genelleştirilmiş aritmetik ile ilgili problem çözümlerini yorumlamalarına yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı

Genelleştirilmiş Aritmetik	Senaryolar	Problem Çözümleri	Sağlam Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
İlişkileri ve Özellikleri Keşfetme	Senaryo 1	Ç1 (Y)	5	0	0
		Ç2 (D)	5	0	0
	Senaryo 2	Ç3 (Y)	2	2	1
		Ç4 (D)	4	0	1
Nicelikler Arasındaki İlişki Olarak Eşitliği Keşfetme	Senaryo 3	Ç5 (Y)	4	1	0
		Ç6 (D)	5	0	0
	Senaryo 4	Ç7 (Y)	5	0	0
		Ç8 (D)	5	0	0
Değişken Olarak Sembolleri Kullanma	Senaryo 5	Ç9 (Y)	5	0	0
		Ç10 (D)	3	2	0
	Senaryo 6	Ç11 (Y)	4	0	1
		Ç12 (D)	3	2	0
Toplam			50(%83,3)	7 (%11,7)	3 (%5)
N=60 yanıt					

N=60 yanıt

*Problem çözümlerinin doğru veya yanlış olduğu parantez içinde belirtilmiştir.

Tablo 29'dan elde edilen bulgulara göre öğretmen adayları genelleştirilmiş aritmetik bileşeni altında problem çözümlerini %83,3 oranında sağlam kanıt, %11,7 oranın sınırlı kanıt ve %5 oranında yetersiz kanıt düzeylerinde yorumlamaktadır. Sağlam kanıt için verilen 50 yanıtın yarısı doğru çözüme aitken diğer yarısı ise yanlış çözüme aittir. Doğru ve yanlış çözümler için eşit değerlerin elde edilmiş olması öğretmen adaylarının her iki yanıt türü için de yorumlama düzeylerinin yüksek olduğunun göstergesidir. Bu durum doğru veya yanlış çözümlerin, öğretmen adaylarının yorumlama basamağında sundukları kanıtlarda değişikliğe sebebiyet vermediği şeklinde yorumlanabilir. Bir başka ifadeyle öğretmen adaylarının doğru veya yanlış çözüm fark etmeksizin yorumlama basamağında sağlam kanıt sunma düzeyleri oldukça yüksektir. Sınırlı kanıt için verilen 7 yanıtın 4 tanesi doğru çözüme aitken, 3 tanesi yanlış çözüme aittir. Yetersiz kanıt için verilen 3 yanıtın 1 tanesi doğru çözüme aitken, 2 tanesi yanlış çözüme aittir.

Genelleştirilmiş aritmetiğin alt bileşenleri kendi içinde değerlendirilecek olursa, her üç bileşen için de sağlam kanıt düzeyinde verilen yanıtların sayısı sınırlı ve yetersiz kanıtların sayısına göre fazladır. Her üç bileşen için sunulan sağlam kanıt sayılarının birbirine yakın olduğu görülmüş ve en fazla sayıda sağlam kanıt nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme bileşeninde rastlanmıştır. Sınırlı kanıt ve yetersiz kanıt sunma durumları arasında ise önemli bir farklılık görülmemektedir. Örneğin, değişken olarak sembolleri kullanma bileşeninde 4 tane sınırlı kanıt sunulurken, ilişkileri ve özellikleri keşfetme bileşeninde 2 sınırlı kanıt ve nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme bileşeninde yalnızca 1 tane sınırlı kanıt sunulmuştur. İlişkileri ve özellikleri keşfetme bileşenindeki senaryo 1'de ve nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme bileşenindeki senaryo 4'te sınırlı kanıt rastlanmamıştır. Yetersiz kanıt sunma durumları arasında ise önemli bir farklılık görülmemektedir. Örneğin ilişkileri ve özellikleri keşfetme bileşeninde senaryo 2'de 2 tane ve değişken olarak sembolleri kullanma bileşeninde senaryo 6'da 1 tane yetersiz kanıt sunulmuştur. Senaryo 2 ve 6 dışındaki diğer senaryolarda ise herhangi bir yetersiz kanıt rastlanmamıştır.

Genelleştirilmiş aritmetik bileşeni altında öğretmen adaylarının problem çözümlerini yorumlamasına yönelik sağlam kanıt, sınırlı kanıt ve yetersiz kanıt düzeylerinde verdikleri yanıtlardan bazı alıntılara aşağıda yer verilmiştir.

Cemre'nin senaryo 5'teki Ç9'u (bkz. Tablo 17) yorumlamasına yönelik sağlam kanıt örneği:

Matematiksel açıdan dikdörtgenin alanını bilmesinde bir problem yok ama bunu cebirsel olarak ifade etmede sorun yaşamış. Sanırım buradaki uzun kenarı yani eninin uzunluğunu nasıl desem çarpım olarak almış. İkisi yan yana olduğu için, bunları da çarpmam gerekiyor gibi de düşünmüş olabilir. Devamında buradaki parantezin $[A = (5.2) \cdot e]$ yerini değiştirmiş. Tamam onu da değiştirebilir, onda da bir sorun yaşamamış. Ama işte buradaki sorunun temeli zaten eninin uzunluğunu ifade etmekte. Dikdörtgenin eninin uzunluğunu ifade ederken, matematiksel olarak şöyle diyebilirim, yazma anlamında bir sorun var. Alanı sözel ifade edebiliyor ama onu matematik diline dökerken zorluk yaşıyor bence.

Cemre, öğrencinin matematiksel düşünmesine yönelik açıklama yaparken öğrencinin konuya dair bildiklerine ve yaşamış olduğu karmaşaya vurgu yapmıştır. Ayrıca çözümü matematiksel ayrıntılarına yer vererek yorumlamıştır. Bu yüzden Cemre'nin verdiği bu yanıt, sağlam kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

Eylem'in senaryo 6'daki Ç12'yi (bkz. Tablo 18) yorumlamasına yönelik sınırlı kanıt örneği:

Öğrencinin kavram yanılgısı yoktur. Eşitsizliğin farkındadır.

Eylem, verdiği yanıtta öğrencinin kavram yanılgısının olmadığını farkındadır. Ancak Ç12'de uygulanan çözüm stratejisine yönelik yorum yapmayarak, yalnızca öğrencinin sahip olduğu anlayışı genel ifadelerle belirtmiştir. Bu yüzden Eylem'in verdiği bu yanıt, sınırlı kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

Berke'nin senaryo 2'deki Ç4'ü (bkz. Tablo 14) yorumlamasına yönelik yetersiz kanıt örneği:

Öğrenci herhangi bir sayının 0 ile çarpıldığında, cevabın 0 olacağını farkındadır. Burada muhtemelen şey yapmış olabilir: $a/0$ ile 0'ı çarptığımızda cevabın 0 olmasını beklemiş olabilir. Ama sadeleştirme de yapabileceğini düşünmüş olabilir. Yani 0 ile 0'ı sadeleştirip cevabın a çıkacağını düşünüyor olabilir diye düşündüm. O yüzden bir sayının 0 ile işleme girdikten sonra 0'dan başka cevap geldiği için tanımsız olduğunu da fark etmiş de olabilir. Az önce belki ezbere olabileceğini düşünmüştüm ama bunu da yapmış olabilir.

Berke, verdiği yanıtta problem çözümünü yanlış bir şekilde yorumlamıştır. Berke iki farklı düşünme biçimi ortaya koymuş. Birinci düşüncesinde sıfırın çarpma işleminde yutan eleman özelliğinden hareketle sonucun sıfır olacağını belirtmiştir. İkinci düşüncesinde ise $\frac{a}{0} \cdot 0$ ifadesinde sıfırları sadeleştirerek, $\frac{a}{0} \cdot 0 = a$ sonucunu bulduğunu belirtmiştir. Halbuki $\frac{a}{0} = k$ gibi bir sayıya eşitlenmektedir. İçler dışlar çarpımı yapılırsa $a = 0 \cdot k$ ve $a = 0$ bulunur. Bu ise soruda verilen $a \neq 0$ ile çelişmektedir. Dolayısıyla $\frac{a}{0}$ tanımsız olmaktadır. Bu yüzden Berke'nin verdiği yanıt, yetersiz kanıt olarak ele alınmıştır.

5.2.2. Öğretmen Adaylarının Fonksiyonel Düşünme Bileşeni ile İlgili Problem Çözümlerini Yorumlamalarına Yönelik Bulgular

Fark etme becerisinin yorumlama basamağında, cebirsel düşünmenin fonksiyonel düşünme bileşenine yönelik öğretmen adaylarından elde edilen yanıtların frekans dağılımına Tablo 30'da yer verilmiştir.

Tablo 30. Öğretmen adaylarının fonksiyonel düşünme ile ilgili problem çözümlerini yorumlamalarına yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı

Fonksiyonel Düşünme	Senaryolar	Problem Çözümleri	Sağlam Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
Örüntüleri Genelleme	Senaryo 7	Ç13 (D)	3	2	0
		Ç14 (Y)	2	3	0
		Ç15 (D)	0	5	0
		Ç16 (Y)	1	4	0
	Senaryo 8	Ç17 (D)	1	3	1
		Ç18 (Y)	2	3	0
		Ç19 (D)	2	2	1
		Ç20 (Y)	2	3	0
Ters İşlemleri	Senaryo 9	Ç21 (D)	4	1	0
		Ç22 (Y)	4	1	0
Kullanma	Senaryo 10	Ç23 (D)	4	1	0
		Ç24 (Y)	4	1	0
Toplam			29 (%48,3)	29 (%48,3)	2 (%3,3)
N=60 yanıt					

*Problem çözümlerinin doğru veya yanlış olduğu parantez içinde belirtilmiştir.

Tablo 30'dan elde edilen bulgulara göre öğretmen adayları fonksiyonel düşünme bileşeni altında problem çözümlerini %48,3 oranında sağlam kanıt, %48,3 oranında sınırlı kanıt ve %3,3 oranında yetersiz kanıt düzeylerinde yorumlamışlardır. Sağlam kanıt için verilen 29 yanıtın 14 tanesi doğru çözüme aitken 15 tanesi yanlış çözüme aittir. Doğru ve yanlış çözümler için birbirlerine yakın değerler elde edilmiş olması öğretmen adaylarının her iki yanıt türü için de yorumlama düzeylerinin yüksek olduğunun göstergesidir. Bu durum doğru veya yanlış çözümlerin, öğretmen adaylarının yorumlama basamağında sundukları kanıtlarda değişikliğe sebebiyet vermediği şeklinde yorumlanabilir. Sınırlı kanıt için verilen 29 yanıtın 14 tanesi doğru çözüme aitken, 15 tanesi yanlış çözüme aittir. Yetersiz kanıt için verilen 2 yanıtta doğru çözüme aittir.

Fonksiyonel düşünmenin alt bileşenleri kendi içinde değerlendirilecek olursa, örüntüleri genelleme bileşeninde %32,5 (13/40) oranında sağlam kanıt, %62,5 (25/40) oranında sınırlı kanıt ve %5 (2/40) oranında yetersiz kanıt sunulmuştur. Ters işlemleri kullanma bileşeninde %80 (16/20) oranında sağlam kanıt ve %20 (4/20) oranında sınırlı kanıt sunulmuştur. Ters işlemleri kullanma bileşeninde daha fazla oranda sağlam kanıt sunulurken, örüntüleri genelleme bileşeninde de ise sınırlı kanıtların daha fazla oranda sunulduğu görülmüştür. Sağlam kanıt elde edilmeyen tek çözüm senaryo 7'de bulunan Ç15'tir. Ç15'ten elde edilen bulguların tamamı ise sınırlı kanıt düzeyindedir. Yetersiz kanıtların yalnızca örüntüleri genelleme bileşeninde sunulduğu ve senaryo 8'de olduğu görülmüştür. Yetersiz kanıt 2 tane bulgu sunulmuş ve ikisinin de doğru çözüme ait olduğu görülmüştür. Örüntüleri genelleme bileşenindeki senaryo 7'de ve ters işlemleri kullanma bileşeninde herhangi bir yetersiz kanıt rastlanmamıştır.

Fonksiyonel düşünme bileşeni altında öğretmen adaylarının problem çözümlerini yorumlamasına yönelik sağlam kanıt, sınırlı kanıt ve yetersiz kanıt düzeylerinde verdikleri yanıtlardan bazı alıntılara aşağıda yer verilmiştir.

Damla'nın senaryo 9'daki Ç21'i (bkz. Tablo 21) yorumlamasına yönelik sağlam kanıt örneği:

Öğrencinin ters işlem yapma becerisi gelişmiştir. Konuyu kavramıştır fakat bu soru cebirsel ifadeler konusunda sorulan bir soru ise cebirsel ifadeleri kullanmakta eksiklikleri olabilir.

Damla, verdiği yanıtta öğrencinin kullandığı stratejiyi doğru kavramasına yönelik açıklama yapmış ve olası eksikliğine değinmiştir. Bu yüzden Damla'nın verdiği yanıt, sağlam kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

Eylem'in senaryo 7'deki Ç14'ü (bkz. Tablo 19) yorumlamasına yönelik sınırlı kanıt örneği:

Öğrencinin kavram yanlışlığı vardır. Öğrenci doğru orantının mantığını anlamamıştır. Öğrenci örüntü genelleme ve kuralını bulmaya ilişkin kavram yanlışlarına sahiptir.

Eylem, verdiği yanıtta öğrencinin matematiksel anlayışını genel ifadeler ile yorumlamıştır. Öğrencinin kavram yanlışlığına sahip olduğunu belirtmesine rağmen sahip olduğu yanlışlığa dair detaylı bir açıklama yapmamıştır. Ç14'te doğru orantı doğru bir şekilde uygulanmıştır ancak istenen soru için kullanılan strateji yanlış bir stratejidir. Eylem buna yönelik yalnızca öğrencinin strateji mantığını kavrayamadığını belirtmiştir. Bu yüzden Eylem'in verdiği yanıt, sınırlı kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

Alper'in senaryo 8'deki Ç17'yi (bkz. Tablo 20) yorumlamasına yönelik yetersiz kanıt örneği:

Öğrencinin matematiksel olarak doğru bir şekilde anlamadığını düşünüyorum. Çünkü soruda verilen şekilde adımlar arasındaki işlemi doğru bir şekilde kavrayıp ona göre işlem yapması lazımdı. Doğru sonuç bulmuş ama işlemleri yanlıştır. Yani öğrenci cevabı tesadüfen bulmuştur.

Alper, öğrencinin matematiksel düşünmesine dair doğru bir açıklama yapmamıştır. Öğrencinin kullandığı stratejiyi belirtmemiş, çözümünü çok genel ifadeler ile yorumlamıştır. Bu yüzden Alper'in verdiği yanıt, yetersiz kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

5.3. Öğretmen Adaylarının, Öğrencilerin Cebirsel Düşünceleri ile İlgili Problem Çözümlerine Dönüt Vermelerine Yönelik Bulgular

Bu bölümde araştırmanın alt problemlerinin üçüncüsü olan “Ortaokul matematik öğretmeni adayları, öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerine ne düzeyde dönüt vermektedirler?” problemine yönelik bulgulara yer verilmiştir.

Fark etme becerilerinin üçüncüsü olan problem çözümlerine dönüt verme becerisi, öğretmen adaylarının problem çözümlerine nasıl dönütler verecekleri,

öğrencinin soruyu doğru veya yanlış çözmesine bağlı olarak bir sonraki adımlarda hangi amaçla ne tür sorulara başvuracakları gibi durumların incelenmesidir. Bu çalışmada, elde edilen verilerin analizine dayanarak öğretmen adaylarının problem çözümlerine dönüt verme düzeylerine dair kanıtlar üç düzeyde ele alınmıştır: Problem çözümlerine verilen dönütlere dair sağlam kanıt, problem çözümlerine verilen dönütlere dair sınırlı kanıt ve problem çözümlerine verilen dönütlere dair yetersiz kanıt. Problem çözümlerine yönelik verilen dönütlere dair sağlam kanıt gösteren öğretmen adayları, çözümlerin doğru veya yanlış olması durumunda öğrenciye çözümlerini detaylandırttığı, genellettiği ya da sorgulattığı sorular yöneltir, öğrencinin hatasını keşfettirici örnekler verir, öğrencinin matematiksel düşünmesini geliştirici sorular yöneltir ve öğrenciyi sorunun çözümü için farklı stratejilere yönlendirir veya öğrenciye farklı bir strateji yöneltir. Problem çözümlerine yönelik verilen dönütlere dair sınırlı kanıt gösteren öğretmen adayları, öğrenciye çözümünü açıklattırıcı sorular yöneltir, öğrencinin anlayışını anlamaya yönelik genel sorular yöneltir ve öğrenciye çözümde ne yapması gerektiğini direkt söyler. Son olarak, problem çözümlerine yönelik verilen dönütlere dair yetersiz kanıt gösteren öğretmen adayları, sözel pekiştireçlerde bulunur, çözümden bağımsız önerilerde bulunur, aynı problemi benzer ifadeler kullanarak ya da zorlaştırarak yeniden yöneltir veya herhangi bir dönütte bulunmaz.

Genelleştirilmiş aritmetik bileşeni 12 problem çözümü içerdiği için dönüt verme basamağına yönelik 5 öğretmen adayından toplam 60 yanıt elde edilmiştir. Fonksiyonel düşünme bileşeni 12 problem çözümü içerdiği için dönüt verme basamağına yönelik 5 öğretmen adayından toplam 60 yanıt elde edilmiştir. Fark etme becerisinin dönüt verme basamağına yönelik öğretmen adaylarından elde edilen yanıtların frekans dağılımına Tablo 31’de yer verilmiştir.

Tablo 31. Fark etme becerisinin dönüt verme basamağına yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı

Cebirsel Düşünme	Sağlam Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt	Toplam
Genelleştirilmiş Aritmetik	40	11	9	60
Fonksiyonel Düşünme	35	10	15	60
Toplam	75 (%62,5)	21 (%17,5)	24 (%20)	120 (%100)

*N=120 yanıt

Tablo 31 incelendiğinde, öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerine en fazla oranda sağlam kanıt düzeyinde; en az oranda ise sınırlı kanıt düzeyinde dönüt verdikleri görülmüştür. Sunulan sağlam, sınırlı ve yetersiz kanıtlar arasındaki oran farkının fazla olması öğretmen adaylarının cebirsel düşünmeye yönelik problem çözümlerine dönüt verme becerilerinin oldukça yüksek olduğunun bir göstergesidir. Dönüt verme basamağında sunulan yetersiz kanıtların oranının sınırlı kanıtların oranına kıyasla daha fazla olması öğretmen adaylarının problem çözümlerine dönüt vermede diğer basamaklara kıyasla daha fazla zorluk yaşadıkları şeklinde yorumlanabilir. Cebirsel düşünmenin bileşenleri incelendiğinde, genelleştirilmiş aritmetik bileşeninde sunulan sağlam ve sınırlı kanıt sayıları fonksiyonel düşünme bileşeni içerisinde karşılık gelen kanıt sayılarına kıyasla fazla olsa da değerler birbirine oldukça yakındır. Fonksiyonel düşünme bileşeninde sunulan yetersiz kanıt sayısının genelleştirilmiş aritmetik bileşenine kıyasla daha fazla olduğu görülmektedir. Bu da öğretmen adaylarının fonksiyonel düşünme bileşenine yönelik problem çözümlerine dönüt vermede daha fazla zorluk yaşadıkları şeklinde yorumlanabilir.

Öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerine yönelik problem çözümlerine dönüt verme becerileri “genelleştirilmiş aritmetik” ve “fonksiyonel düşünme” bileşenleri altında ayrı ayrı ele alınmış ve detaylı olarak incelenmiştir.

5.3.1. Öğreten Adaylarının Genelleştirilmiş Aritmetik Bileşeni ile İlgili Problem Çözümlerine Dönüt Vermelerine Yönelik Bulgular

Fark etme becerisinin dönüt verme basamağında, cebirsel düşünmenin genelleştirilmiş aritmetik bileşenine yönelik öğretmen adaylarından elde edilen yanıtların frekans dağılımına Tablo 32’de yer verilmiştir.

Tablo 32. Öğretmen adaylarının genelleştirilmiş aritmetik ile ilgili problem çözümlerine dönüt vermelerine yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı

Genelleştirilmiş Aritmetik	Senaryolar	Problem Çözümleri	Sağlam Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
İlişkileri ve Özellikleri Keşfetme	Senaryo 1	Ç1 (Y)	4	1	0
		Ç2 (D)	3	1	1
	Senaryo 2	Ç3 (Y)	2	3	0
		Ç4 (D)	2	1	2
Nicelikler Arasındaki İlişki Olarak Eşitliği Keşfetme	Senaryo 3	Ç5 (Y)	5	0	0
		Ç6 (D)	3	0	2
	Senaryo 4	Ç7 (Y)	4	1	0
		Ç8 (D)	3	1	1
Değişken Olarak Sembolleri Kullanma	Senaryo 5	Ç9 (Y)	5	0	0
		Ç10 (D)	4	1	0
	Senaryo 6	Ç11 (Y)	4	0	1
		Ç12 (D)	1	2	2
Toplam			40(%66,7)	11(%18,3)	9 (%15)

N=60 yanıt

*Problem çözümlerinin doğru veya yanlış olduğu parantez içinde belirtilmiştir.

Tablo 32’den elde edilen bulgulara göre öğretmen adayları genelleştirilmiş aritmetik bileşeni altında problem çözümlerine %66,7 oranında sağlam kanıt, %18,3 oranında sınırlı kanıt ve %15 oranında yetersiz kanıt düzeylerinde dönüt vermektedir. Sağlam kanıt için verilen 40 yanıtın 16 tanesi doğru çözüme aitken 24 tanesi yanlış çözüme aittir. Bu da öğretmen adaylarının doğru çözüme kıyasla yanlış çözüme daha fazla sayıda sağlam kanıt düzeyinde dönüt verdiklerinin göstergesidir. Bu durum doğru veya yanlış çözümlerin, öğretmen adaylarının dönüt verme basamağında sundukları kanıtlarda değişikliğe sebebiyet verdiği şeklinde yorumlanabilir. Sınırlı kanıt için verilen 11 yanıtın 6 tanesi doğru çözüme aitken 5 tanesi yanlış çözüme aittir. Yetersiz kanıt için verilen 9 yanıtın 8 tanesi doğru çözüme aitken 1 tanesi yanlış

çözümüne aittir. Bu da öğretmen adaylarının yanlış çözüme kıyasla doğru çözüme daha fazla sayıda yetersiz kanıt düzeyinde dönüt verdikleri şeklinde yorumlanabilir. Öğretmen adaylarının vermiş olduğu yanıtların neredeyse tamamında sağlam kanıt sayısı, sınırlı ve yetersiz kanıt sayısından fazla olurken yalnızca Ç12’de sağlam kanıt sayısının diğer kanıtlara kıyasla daha az olduğu görülmektedir.

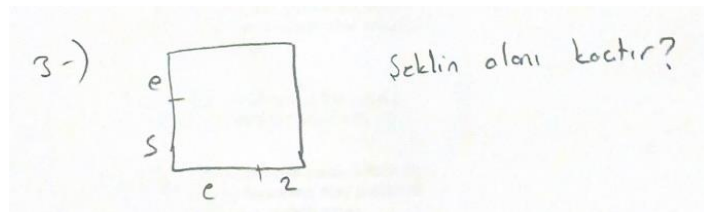
Genelleştirilmiş aritmetiğin alt bileşenleri kendi içinde değerlendirilecek olursa, her üç bileşen için de sağlam kanıt düzeyinde verilen yanıtlar çoğunluk göstermiştir. Üç alt bileşen için verilen sağlam kanıt sunma durumları birbirine yakındır. En fazla sayıda sağlam kanıt nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme bileşeninde, en az sayıda sağlam kanıt ise ilişkileri ve özellikleri keşfetme bileşeninde rastlanmıştır. Sınırlı kanıt sunma durumları için yalnızca nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme bileşenindeki senaryo 3’te herhangi bir kanıt rastlanmamıştır. Yetersiz kanıt sunma durumları için yalnızca değişken olarak sembolleri kullanma bileşenindeki senaryo 5’te herhangi bir kanıt rastlanmamıştır.

Genelleştirilmiş aritmetik bileşeni altında öğretmen adaylarının problem çözümlerine dönüt vermelerine yönelik sağlam kanıt, sınırlı kanıt ve yetersiz kanıt düzeylerinde verdikleri yanıtlardan bazı alıntılara aşağıda yer verilmiştir.

Eylem’in senaryo 5’teki Ç10’a (bkz. Tablo 17) dönüt vermesine yönelik sağlam kanıt örneği:

Öğrenciye iki kenarında da bilinmeyen olan bir şeklin alanını sorardım. Bir kenar uzunluğu $e+5$, diğer kenarın uzunluğu $e+2$ olan dikdörtgenin alanını hesaplamasını isterdim.

Eylem, öğrencinin çözümü doğru olduğu için bir sonraki adım olarak öğrencinin matematiksel anlayışını geliştirici başka bir soru yöneltmiştir. Bu yüzden öğretmen adayının verdiği bu yanıt, sağlam kanıt düzeyinde ele alınmıştır.



Şekil 5. Eylem’in Ç10’a verdiği dönütte kullandığı soru

Eylem'in senaryo 1'deki Ç1'e (bkz. Tablo 13) dönüt vermesine yönelik sınırlı kanıt örneği:

İşlemden verilen sayıları önündeki işareti ile taşımamız gerektiğini ifade ederdim. $20-12+8-4$ işleminde $+8$ 'i ve -12 'yi taşıyarak doğru sonuca ulaşırsın. Yani şu şekilde $20+8-12-4$ olacaktır. Bundan sonra sırayla $20+8=28$, $-12-4=-16$, $28-16$ işlemlerini yapardım. $28-16$ 'dan doğru cevap 12 çıkacaktır.

Eylem, öğrenciye stratejiye yönelik bir açıklama yaptıktan sonra direkt sorunun nasıl çözülmesi gerektiğini söylemiştir. Çözümü anlatarak cevaba kendisi ulaşmıştır. Öğretmen adayının verdiği dönüt öğretimsel bir süreç içermesine rağmen öğrenciye hatasını kendisinin keşfetmesini sağlayıcı bir yöntem değildir. Bu yüzden öğretmen adayının verdiği yanıt, sınırlı kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

Cemre'nin senaryo 3'teki Ç6'ya (bkz. Tablo 15) dönüt vermesine yönelik yetersiz kanıt örneği:

Yani şimdi öğrenci doğru cevap verdiği için açıklamasını isterdim. Çözümünü gördüğümde de doğru anladığını düşündüğüm için doğru çözmüşsün derdim ya da olumlu pekiştireçler kullanarak bir dönüt verirdim. Onun dışında da bir dönütüm olmazdı diye düşünüyorum.

Cemre, verdiği yanıtta öğrencinin cevabı doğru olmasına rağmen öğrenciye yalnızca pekiştireçlerle dönüt vereceğini belirtmiştir. Öğrencinin matematiksel anlayışını geliştirici herhangi bir dönüt vermemiştir. Bu yüzden Cemre'nin verdiği yanıt, yetersiz kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

5.3.2. Öğretmen Adaylarının Fonksiyonel Düşünme Bileşeni ile İlgili Problem Çözümlerine Dönüt Vermelerine Yönelik Bulgular

Fark etme becerisinin dönüt verme basamağında, cebirsel düşünmenin fonksiyonel düşünme bileşenine yönelik öğretmen adaylarından elde edilen yanıtların frekans dağılımına Tablo 33'te yer verilmiştir.

Tablo 33. Öğretmen adaylarının fonksiyonel düşünme ile ilgili problem çözümlerine dönüt vermelerine yönelik elde edilen yanıtların frekans dağılımı

Fonksiyonel Düşünme	Senaryolar	Problem Çözümleri	Sağlam Kanıt	Sınırlı Kanıt	Yetersiz Kanıt
Örüntüleri Genelleme	Senaryo 7	Ç13 (D)	1	1	3
		Ç14 (Y)	4	1	0
		Ç15 (D)	1	1	3
		Ç16 (Y)	5	0	0
	Senaryo 8	Ç17 (D)	2	0	3
		Ç18 (Y)	2	2	1
		Ç19 (D)	2	0	3
		Ç20 (Y)	5	0	0
Ters İşlemleri Kullanma	Senaryo 9	Ç21 (D)	3	0	2
		Ç22 (Y)	4	1	0
	Senaryo 10	Ç23 (D)	2	3	0
		Ç24 (Y)	4	1	0
Toplam			35 (%58,3)	10 (%16,7)	15 (%25)

N=60 yanıt

*Problem çözümlerinin doğru veya yanlış olduğu parantez içinde belirtilmiştir.

Tablo 33'ten elde edilen bulgulara göre öğretmen adayları fonksiyonel düşünme bileşeni altında problem çözümlerine %58,3 oranında sağlam kanıt, %16,7 oranında sınırlı kanıt ve %25 oranında yetersiz kanıt düzeylerinde dönüt vermektedir. Sağlam kanıt için verilen 35 yanıtın 11 tanesi doğru çözüme aitken 24 tanesi yanlış çözüme aittir. Bu da öğretmen adaylarının doğru çözümlere kıyasla yanlış çözümlere daha fazla oranda sağlam kanıt düzeyinde dönüt verdiklerinin göstergesidir. Bu durum doğru veya yanlış çözümlerin, öğretmen adaylarının dönüt verme basamağında sundukları kanıtlarda değişikliğe sebebiyet verdiği şeklinde yorumlanabilir. Sınırlı kanıt için verilen 10 yanıtın 5 tanesi doğru çözüme aitken 5 tanesi yanlış çözüme aittir. Yetersiz kanıt için verilen 15 yanıtın 14 tanesi doğru çözüme aitken 1 tanesi yanlış çözüme aittir. Bu da öğretmen adaylarının yanlış çözümlere kıyasla doğru çözümlere daha fazla oranda yetersiz kanıt düzeyinde dönüt verdikleri şeklinde yorumlanabilir. Ayrıca yetersiz kanıt için sunulan kanıtların oranının sınırlı kanıt için sunulan kanıtların oranından fazla olduğu durum fark etme becerisinin yalnızca dönüt verme basamağında görülmüştür.

Fonksiyonel düşünmenin alt bileşenleri kendi içinde değerlendirilecek olursa, örüntüleri genelleme bileşeninde %55 (22/40) oranında sağlam kanıt, %12,5 (5/40) oranında sınırlı kanıt ve %32,5 (13/40) oranında yetersiz kanıt sunulmuştur. Ters işlemleri kullanma bileşeninde ise %65 (13/20) oranında sağlam kanıt, %25 (5/20) oranında sınırlı kanıt ve %10 (2/20) oranında yetersiz kanıt sunulmuştur. Ters işlemleri kullanma bileşeninde daha fazla oranda sağlam ve sınırlı kanıt sunulurken, örüntüleri genelleme bileşeninde de ise yetersiz kanıtların daha fazla oranda sunulduğu görülmüştür. Sınırlı kanıt sunma durumları için senaryo 7’de Ç16 ve senaryo 9’da Ç21 için herhangi bir kanıta rastlanmazken, senaryo 8’de yalnızca Ç18’de sınırlı kanıta rastlanmıştır. Yetersiz kanıtlara yalnızca ters işlemleri kullanma bileşeninde senaryo 9’da rastlanmıştır. Senaryo 10’da ise herhangi bir yetersiz kanıta rastlanmamıştır.

Fonksiyonel düşünme bileşeni altında öğretmen adaylarının problem çözümlerine dönüt vermelerine yönelik sağlam kanıt, sınırlı kanıt ve yetersiz kanıt düzeylerinde verdikleri yanıtlardan bazı alıntılara aşağıda yer verilmiştir.

Alper’in senaryo 7’deki Ç16’ya (bkz. Tablo 19) dönüt vermesine yönelik sağlam kanıt örneği:

Öğrenci yanlış anladığı için yani işlemleri doğru bir şekilde ifade edemediği için, ya bir önceki öğrencinin [Ç15] yaptığı gibi bir işlem $[6n - 2(n - 1)]$ yapıp ya da birinci durum, ikinci durum şeklinde belirterek, birinci adımda 6 yüze etiket kullanıldığını, ikinci adımda 10 etiket kullanıldığını göstererek adımlar arasındaki artış miktarıyla formülü verirdim. Formül $an+b$ ’dir. Bunları öğrettiğimiz için formülde a yerine 4 yazdığımızda $4n$, olacağını, birinci terime yönelik ekleme ya da çıkarma yapmamız için b yerine de 2 koymamız gerektiğini kavratarak öğrenciye yanlış yaptığını gösterirdim.

Alper, öğrencinin hatasının olduğunu farkındadır. Öğrenciye çözümündeki hatasını kavratırmaya ve öğrenciyi farklı stratejilere yönlendirmeye yönelik bir dönüt vermiştir. Bu yüzden Alper’in verdiği yanıt, sağlam kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

Damla’nın senaryo 10’daki Ç23’e (bkz. Tablo 22) dönüt vermesine yönelik sınırlı kanıt örneği:

Farklı çözüm yolları sunmasını isterdim. Bu sayede öğrenci bir soru için ne kadar çok çözüm yolu olabileceğini gözlemleyip zorlandığı problemlerde bu çözüm yollarını kullanmayı düşünebilir.

Damla, öğrencinin çözüm yoluna bağlı olarak farklı çözüm yolları sunabileceğini belirtmiştir. Farklı çözüm yollarına yönelik detaylı bir açıklama yapmamış, genel ifadelerle bir dönüt vereceğini belirtmiştir. Bu yüzden Damla'nın verdiği yanıt, sınırlı kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

Berke'nin, senaryo 8'deki Ç18'e (bkz. Tablo 20) dönüt vermesine yönelik yetersiz kanıt örneği:

İlk önce zaten öğrenciye neden böyle $[8+8+8-1]$ yaptığını sorarım. Çünkü anlayabilmiş değilim. Onun verdiği dönüte göre artık soracağım problem ve sorular değişir. Artık bilmiyorum ne diyeceğimi.

Berke, öğrencinin çözümünü anlamadığı için öğrenciden çözümü açıklamasını istemiş ve herhangi bir dönütte bulunmamıştır. Bu yüzden Berke'nin verdiği yanıt, yetersiz kanıt düzeyinde ele alınmıştır.

6. TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde elde edilen bulguların alan yazındaki diğer çalışmalarla benzerlik ve farklılıklarının yanı sıra bu benzerlik ve farklılıkların olası nedenlerine yer verilmiştir. Ayrıca çalışmada elde edilen bulgular ışığında çeşitli önerilere yer verilmiştir.

6.1. Tartışma

Yapılan bu araştırmada ortaokul matematik öğretmeni adaylarının öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili fark etme becerileri incelenmiştir. Çalışma kapsamında cebirsel düşünmenin her bir bileşeni için senaryo örnekleri ve problem çözümleri oluşturulmuştur. Çalışmaya katılan öğretmen adayları ile öğrencilerin cebirsel düşüncelerinin fark edilmesine yönelik hazırlanan yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Öğretmen adaylarının öğrencilerin problem çözümlerine dikkat etme, problem çözümlerini yorumlama ve problem çözümlerine dönüt vermeleri düzeyleri değerlendirilmiştir. Çalışmanın sonucunda elde edilen bulgular ilgili literatür taramaları göz önünde bulundurularak bu bölümde tartışılmıştır.

6.1.1. Öğretmen Adaylarının Öğrencilerin Cebirsel Düşünceleri ile İlgili Problem Çözümlerine Dikkat Etmeleri

Çalışmanın birinci alt problemi öğretmen adaylarının, öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerine ne düzeyde dikkat ettiklerine yöneliktir. Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerine oransal olarak en fazla sağlam kanıt düzeyinde dikkat ettikleri görülmüştür. Bu durum önceki çalışmalarla (Barnhart ve van Es, 2015; Callejo ve Zapatera, 2017; Dişbudak-Kuru ve ark., 2022; Kılıç, 2019b; LaRochelle ve ark., 2019; Magiera ve Zambak, 2021; Özel, 2019; Yıldız, 2022) benzerlik gösterirken, Çetin (2023) ve Çopur ve Tekin-Sitrava'nın (2024) çalışmalarında, bu çalışmada elde edilen bulgudan farklı olarak katılımcıların öğrenci düşüncelerine oransal olarak en az sağlam kanıt düzeyinde dikkat ettikleri görülmektedir. Çetin'in (2023) bu çalışmadan farklı olarak öğretmen adayları yerine öğretmenlerle çalışmış olması; Çopur ve Tekin-Sitrava'nın (2024) ise çalışmasında birden fazla senaryo yerine bir soru özelinde sadece bir öğrenci çözümü

kullanmış olması, bu çalışmadan farklı sonuçlara ulaşılmasına sebebiyet vermiş olabilir.

Cebirsel düşünmenin bileşenlerinden genelleştirilmiş aritmetik ve fonksiyonel düşünmenin bileşenlerinin ayrı ayrı incelenmesi (bkz. Tablo 26 ve 27) sonucunda, her bir bileşen için öğretmen adaylarının oransal olarak en çok sağlam kanıt düzeyinde dikkat ettikleri görülmüştür. Problem çözümlerine en fazla sağlam kanıt düzeyinde dikkat edilmesi, öğretmen adaylarının problem çözümlerindeki stratejilere yönelik özgün kanıtlar sundukları ve matematiksel detayları ayrıntılı bir şekilde anlamlandırdıkları sonucuna ulaşılabilir. Ayrıca öğretmen adaylarına yöneltilen dikkat etme basamağına yönelik mülakat sorusunun “Problemin çözümünde hangi kısımlar dikkatinizi çekmiştir? Çözüm doğru mudur? Bu problem çözümünün nasıl yapıldığını (kullanılan strateji, düşünme biçimi, yapılan açıklamalar vb.) ayrıntılı bir şekilde açıklayınız” ifadesini içermiş olması öğretmen adaylarına problem çözümlerinde dikkat edecekleri noktalara dair ipucu vermiş olabileceğinden, bu durum öğretmen adaylarının dikkat etmelerini güçlendirmiş olabilir.

Fark etme becerisine yönelik sunulan bulguların hepsi bütüncül olarak değerlendirildiğinde, en fazla sayıda sağlam kanıtın diğer basamaklara kıyasla dikkat etme basamağında sunulduğu görülmüştür. Benzer bulguya önceki çalışmalarda da rastlanmaktadır (LaRochelle ve ark., 2019; Yıldız, 2022). Literatürde dikkat etme basamağının fark etme becerisinin en kolay bileşeni olduğuna yönelik görüşler yer almaktadır (Jacobs ve ark., 2010; LaRochelle, 2018; Sánchez-Matamoros ve ark., 2019). Bundan dolayı sağlam kanıt sunma durumlarının dikkat etme basamağında en fazla olması beklenen bir sonuçtur.

Yürütülen bu çalışmada, öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşünmelerine yönelik oransal olarak en az yetersiz kanıt düzeyinde dikkat ettikleri görülmüştür. Önceki çalışmalarda da (Doğan-Coşkun, 2021; Magiera ve Zambak, 2021; Özel, 2019; Yıldız, 2022) benzer bulgulara rastlanmaktadır. Hatta bulguları cebirsel düşünmenin bileşenlerine göre detaylandırdığımızda, mevcut çalışmada nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme ve ters işlemleri kullanma alt bileşenlerinde yetersiz kanıta hiç rastlanmamıştır. Bu da öğretmen adaylarının bu iki alt bileşen için en az, sınırlı kanıt düzeyinde öğrenci düşünmelerine dikkat ettiklerinin bir göstergesidir. Yetersiz kanıta yönelik yukarıda ifade edilen bulgulardan farklı

olarak, dikkat etme basamağında sadece ilişkileri ve özellikleri keşfetme alt bileşeninde sunulan yetersiz kanıtların sayısının sınırlı kanıtların sayısından fazla olduğu görülmüştür. Bu durumun sebebi olarak öğretmen adaylarının diğer alt bileşenlere kıyasla bu alt bileşendeki problem çözümleri ile daha az karşılaşmış olmaları ve olası yanlış çözümlere aşına olmamaları gösterilebilir.

Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının dikkat etme basamağında doğru çözümlere 48, yanlış çözümlere 45 tane sağlam kanıt; doğru çözümlere 9, yanlış çözümlere 11 tane sınırlı kanıt; doğru çözümlere 3, yanlış çözümlere 4 tane yetersiz kanıt sunulduğu görülmüştür. Buradan öğretmen adaylarının doğru ve yanlış çözümlere yönelik sağlam, sınırlı ve yetersiz kanıt sunma sayılarının birbirine oldukça yakın olduğu anlaşılmaktadır. Problem çözümlerinin doğru veya yanlış olması, öğretmen adaylarının problem çözümlerine dikkat etmelerinde büyük bir farklılığa sebebiyet vermediği şeklinde yorumlanabilir. Bu bulgu Özel (2019) ve Doğan-Coşkun'un (2021) çalışmasındaki dikkat etme basamağına yönelik sağlam ve sınırlı kanıtlardan elde edilen bulgular ile benzerlik gösterirken yetersiz kanıtlar için farklılık göstermektedir. Bazı araştırmacılar doğru ve yanlış problem çözümüne bağlı olarak öğretmen adaylarının yetersiz kanıt düzeyinde dikkat etmelerine yönelik birbirinden farklı sonuçlar elde etmiştir. Özel (2019) yanlış çözümlere yetersiz kanıt düzeyinde daha fazla dikkat edildiği; Doğan-Coşkun (2021) ise doğru çözümlere yetersiz kanıt düzeyinde daha fazla dikkat edildiği sonucuna ulaşmıştır. Benzer şekilde mevcut çalışmadan elde edilen bulgular, Yıldız'ın (2022) çalışmasındaki sınırlı ve yetersiz kanıt düzeyinden elde edilen bulgular ile benzerlik gösterirken, sağlam kanıt düzeyinde doğru çözümlere daha fazla dikkat edildiği bulgusuyla farklılık göstermektedir. Tüm bu farklılıkların sebeplerinden biri olarak yukarıda bahsi geçen üç çalışmanın sadece örüntüleri genelleme özelinde çalışması gösterilebilir. Çünkü bu üç çalışmanın aksine mevcut çalışmada cebirsel düşünmenin farklı bileşenleri bir bütüncül olarak ele alınmıştır. Diğer bir farklılık sebebi olarak ise bu üç çalışmada katılımcıların değerlendirmesi için kullanılan doğru ve yanlış problem çözümlerinin farklı sayılarda olması gösterilebilir. Mevcut çalışmada doğru ve yanlış problem çözümlerinin eş sayıda olması durumunun kanıt türlerine yönelik elde edilen kanıt sayılarını karşılaştırmayı daha elverişli kıldığı söylenilebilir.

6.1.2. Öğretmen Adaylarının Öğrencilerin Cebirsel Düşünceleri ile İlgili Problem Çözümlerini Yorumlamaları

Çalışmanın ikinci alt problemi öğretmen adaylarının, öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerini ne düzeyde yorumladıklarına yöneliktir. Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerini oransal olarak en fazla sağlam kanıt düzeyinde yorumladıkları görülmüştür. Bu durum önceki bazı çalışmalarla (Kılıç, 2019b; Magiera ve Zambak, 2021) benzerlik gösterirken, bazı çalışmalarla (Çetin, 2023; Dişbudak-Kuru ve ark., 2022; Doğan-Coşkun, 2021; LaRochelle ve ark., 2019; Yıldız, 2022) ise farklılık göstermektedir. LaRochelle ve arkadaşları (2019) çalışmalarında uzman öğretmenlerin yorumlama becerilerine yönelik herhangi bir sağlam kanıt rastlamazken; Çetin (2023), Dişbudak-Kuru ve arkadaşları (2022) ve Yıldız (2022) öğretmenlerin öğrenci düşüncelerini yorumlamada oransal olarak en az sağlam kanıt düzeyinde açıklamalar yaptığını tespit etmiştir. Oluşan farklılıkların sebebi olarak LaRochelle ve arkadaşları (2019), Çetin (2023), Dişbudak-Kuru ve arkadaşları (2022) ve Yıldız (2022) çalışmalarında öğretmenlerle çalışılması; mevcut çalışmada ise öğretmeni adayları ile çalışılmış olması gösterilebilir. Barnhart ve van Es (2015) öğretmenlerin öğretim deneyimlerinin fazla olmasının onların yorumlama becerileri üzerine etkisi olduğuna vurgu yapmaktadır. YÖK'ün (2018) güncellemiş olduğu ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programıyla birlikte daha önceden özel öğretim yöntemleri I-II olarak verilen öğretim dersleri ayrıştırılarak (cebir öğretimi, geometri ve ölçme öğretimi, sayıların öğretimi, olasılık ve istatistik öğretimi gibi) derslerin sayısı arttırılmış; öğrenci düşüncelerini anlama, yorumlama, hata ve kavram yanlışlarını tespit etme gibi durumlara odaklanılarak derslerin içeriği derinleştirilmiştir. Ayrıca yeni lisans programıyla okul deneyimi ve öğretmenlik uygulaması dersleri kaldırılmış yerine öğretmenlik uygulaması 1-2 dersleri getirilmiş ve bu derslerle birlikte öğretmen adaylarına daha fazla öğretim deneyimi kazandırılması amaçlanmıştır (YÖK, 2018). Bu da çalışmaya katılan 4. sınıf öğretmen adaylarının hem öğretim derslerini başarılı bir şekilde tamamlamış olmaları hem de öğretmenlik uygulamaları dersi ile öğretim deneyimlerinin artmış olmasından dolayı yorumlama basamağında oransal olarak en fazla sağlam kanıt sunmalarına gerekçe olarak gösterilebilir. Bu gerekçelere ek olarak yorumlama basamağına yönelik öğretmen adaylarına sorulan mülakat sorusunda

“Başka bir ifadeyle öğrenci matematiksel olarak neleri doğru anlamıştır ve hangi kısımlarda kavram karmaşasına sahip olabilir?” ifadesinin bulunmuş olması öğretmen adaylarına problem çözümlerinde yorum yapabilecekleri durumlara dair ipucu vermiş olabileceğinden, bu durum öğretmen adaylarının yorumlamalarını güçlendirmiş olabilir.

Cebirsel düşünmenin bileşenleri ayrı ayrı incelendiğinde (bkz. Tablo 29 ve 30) öğretmen adaylarının genelleştirilmiş aritmetik bileşeni için öğrenci düşüncelerini en fazla sağlam kanıt düzeyinde yorumladıkları; fonksiyonel düşünme bileşeni için ise öğrenci düşüncelerini sağlam ve sınırlı kanıt düzeylerinde eşit şekilde yorumladıkları görülmüştür. Fonksiyonel düşünmede sağlam ve sınırlı kanıt oranlarının eşit çıkmasının nedeni, örüntüleri genelleme alt bileşeninde sunulan sınırlı kanıtların sayısının sağlam kanıtların sayısından daha fazla olmasıdır. Öğretmen adaylarının problem çözümlerini yorumlarken yeteri kadar sağlam kanıt sunamamalarının altında yatan nedenler arasında örüntüleri genellemeye yönelik çok farklı çözüm stratejilerinin bulunması ve kullanılan senaryolardaki problem çözümlerinin (örneğin Ç15, Ç17, Ç18) adım adım verilmemiş olması gösterilebilir. Özel (2019) örüntüleri genelleme ile ilgili yaptığı çalışmada öğrenci çözümlerinin detaylandırılarak verilmesinin yorumlamayı kolaylaştırdığına vurgu yapmıştır. Fakat genel olarak öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili yorumlama basamağında sunulan sağlam kanıtların fazla olması göz önüne alındığında, öğretmen adaylarının öğrenci düşüncelerini detaylandırdığı, öğrencilerin konuya dair bilgilerine ve var olan/olası yanlışlarına hâkim oldukları ifade edilebilir.

Öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerini yorumlama basamağına yönelik sunulan sınırlı kanıtların oranı sağlam kanıtların oranının yaklaşık yarısı kadardır. Bu bulgudan farklı olarak, alan yazın incelendiğinde bazı çalışmaların (Doğan-Coşkun, 2021; Jacobs ve ark., 2010; Özel, 2019; Çopur ve Tekin-Sitrava, 2024; Yıldız, 2022) yorumlama basamağında en fazla oranda sınırlı kanıt sunulduğu görülmüştür. Her ne kadar mevcut çalışmanın yorumlama basamağında en fazla oranda sınırlı kanıt sunulmamış olsa da fark etme becerisinin tüm basamaklarından elde edilen kanıtlar incelendiğinde oransal olarak en fazla sayıda sınırlı kanıta yorumlama basamağında rastlanmıştır. Bu durum Özel (2019) ve Yıldız (2022) ile benzerlik gösterirken Doğan-Coşkun (2021) ile farklılık göstermektedir. Tüm bu

farklılıkların sebebi çalışılan konu çeşitlilikleri, soru sayıları veya çalışma gruplarının değişkenlik göstermesi olarak düşünülebilir. Bu farklılıklara rağmen, mevcut çalışmada sınırlı kanıtların oranının düşük olmaması öğretmen adaylarının problem çözümlerini doğru bir şekilde değerlendirdikleri, problem çözümünü yeterince detaylandıramasalar bile öğrencinin olası yanılgılarına yönelik bir görüş sundukları anlamına gelmektedir.

Öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerini yorumlamalarına yönelik en az oranda kanıtın yetersiz kanıt düzeyinde olduğu görülmüştür. Dikkat etme basamağında olduğu gibi bu basamakta da nicelikler arasındaki ilişki olarak eşitliği keşfetme ve ters işlemleri kullanma alt bileşenlerinde yetersiz kanıtla rastlanmamıştır. Bu durum öğretmen adaylarının sınırlı da olsa öğrenci düşüncelerini yorumlamaya yönelik kanıtlar sunduğunun bir göstergesidir. Öğrenci düşüncelerini yorumlarken oransal olarak en az yetersiz kanıt düzeyinde bulgulara ulaşılması bazı çalışmalar (Çopur ve Tekin-Sitrava, 2024; Doğan-Coşkun, 2021; Jacobs ve ark., 2010; Kılıç, 2019b; Magiera ve Zambak, 2021; Özel, 2019; Son, 2013) ile paralellik gösterirken, bazı çalışmalarda (Çetin, 2023; Dişbudak-Kuru ve ark., 2022; LaRochelle ve ark., 2019; Yıldız, 2022) yorumlama basamağında en az oranda sağlam kanıt düzeyine rastlanılmasından dolayı bu çalışmalardan farklılaşmaktadır. Erdik (2014) ve Barnhart ve van Es (2015) deneyimsiz öğretmenlerin deneyimli öğretmenlere göre öğrenci çözümlerini yorumlamada daha fazla zorlandıklarını belirtmişlerdir. Bu yüzden mevcut çalışma da öğretmen adaylarının deneyim seviyelerinin düşük olması problem çözümlerini yorumlarken yetersiz kanıt sunmalarının gerekçesi olarak gösterilebilir.

Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının yorumlama basamağında doğru çözümlere 39, yanlış çözümlere 40 tane sağlam kanıt; doğru çözümlere 18, yanlış çözümlere 18 tane sınırlı kanıt; doğru çözümlere 3, yanlış çözümlere 2 tane yetersiz kanıt sunulduğu görülmüştür. Buradan öğretmen adaylarının doğru ve yanlış çözümlere yönelik sağlam, sınırlı ve yetersiz kanıt sunma sayılarının birbirine oldukça yakın olduğu anlaşılmaktadır. Bu durum, problem çözümlerinin doğru veya yanlış olmasının öğretmen adaylarının problem çözümlerini yorumlamalarında, büyük bir farklılığa sebebiyet vermediği şeklinde yorumlanabilir. Bu bulgu Doğan-Coşkun'un (2021) çalışmasındaki yorumlama basamağına yönelik sağlam ve sınırlı kanıtlar için benzerlik gösterirken yetersiz kanıtlar için farklılık göstermektedir. Ayrıca Özel

(2019) ve Yıldız'ın (2022) çalışmalarında ise bu bulgu her üç düzey için de farklılık göstermektedir. Doğan-Coşkun'un (2021) çalışmasında öğretmen adaylarının oransal olarak en çok yetersiz kanıt düzeyinde öğrencilerin doğru çözümlerini yorumladıkları ifade edilmektedir. Özel'in (2019) çalışmasında öğretmen adaylarının öğrencilerin doğru çözümleri oransal olarak en fazla sağlam kanıt düzeyinde yorumladığı; fakat öğrencilerin yanlış çözümlerini ise oransal olarak en çok sınırlı ve yetersiz kanıt düzeylerinde yorumladıkları görülmüştür. Yıldız'ın (2022) çalışmasında ise matematik öğretmenlerinin sağlam, sınırlı ve yetersiz kanıt düzeylerinde öğrencilerin doğru çözümlerini yanlış çözümlerine kıyasla daha fazla oranda yorumladıkları sonucunu elde etmiştir. Mevcut çalışmanın sonuçlarının bahsi geçen bu üç çalışmanın bulgularından farklılaşmasının sebeplerinden biri olarak mevcut çalışmada sadece örüntüleri genellemenin ele alınmayıp cebirsel düşünmenin tüm bileşenlerinin araştırmaya dahil edilmesi gösterilebilir. Bir diğer farklılaşma sebebi olarak ise senaryolarda kullanılan doğru ve yanlış problem çözümlerinin mevcut çalışmada eş sayıda olması durumunun kanıt türlerine yönelik elde edilen kanıt sayılarını karşılaştırmayı daha elverişli kıldığı söylenilebilir.

6.1.3. Öğretmen Adaylarının Öğrencilerin Cebirsel Düşünceleri ile İlgili Problem Çözümlerine Dönüt Vermeleri

Çalışmanın üçüncü alt problemi öğretmen adaylarının, öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerine ne düzeyde dönüt verdiklerine yöneliktir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerine oransal olarak en fazla sağlam kanıt düzeyinde dönüt verdikleri görülmüştür. Bu bulgu Kılıç (2019b) ve Özel (2019) ile benzerlik gösterirken, bazı çalışmalarda (Çopur ve Tekin-Sitrava, 2024; Doğan-Coşkun, 2021; Jacobs ve ark., 2010; LaRochelle ve ark., 2019; Magiera ve Zambak, 2021; Yıldız, 2022) sağlam kanıtların en az oranda dönüt verme basamağında bulunmasından dolayı farklılaşmaktadır. Bu farklılığın sebepleri arasında katılımcıların öğretim deneyimlerinin farklı olması veya çalışılan konulardaki çeşitliliğin farklı olması gösterilebilir. Literatürde dikkat etme basamağında yüksek oranda sağlam kanıt sunulması durumunun yorumlama ve dönüt verme basamaklarını olumlu etkileyebileceğine dair görüşler mevcuttur (Barnhart ve van Es, 2015).

Cebirsel düşünmenin bileşenleri ayrı ayrı incelendiğinde (bkz. Tablo 32 ve 33) genelleştirilmiş aritmetik ve fonksiyonel düşünmenin her bir bileşeni için öğretmen adaylarının oransal olarak en fazla sağlam kanıt düzeyinde dönüt verdikleri görülmüştür. Bu durumun sebebi olarak çalışmaya katılan öğretmen adaylarının YÖK'ün (2018) hazırladığı lisans programındaki değişiklikleri içeren bir öğretim sürecinden geçmesi nedeniyle alan bilgisi dersleri ile alan eğitimi derslerini daha detaylı olarak almış olmaları ve özellikle de cebir öğretimi dersini başarılı bir şekilde tamamlamış olmaları gösterilebilir. Çünkü öğretmenlerin yalnızca alan bilgisine sahip olmaları yeterli değildir. Öğrencilerin matematiksel düşüncelerini geliştirici dönütler verebilmek için öğretmenlerde aynı zamanda matematiği öğretme bilgisinin de olması gerekmektedir (Son ve Sinclair, 2010). Mevcut çalışmada dönüt verme basamağı için sağlam kanıt sunan öğretmen adaylarının, doğru çözüm yapan öğrencilerin matematiksel düşüncelerini geliştirici ve çözümünü genelleştirici sorular yönelttikleri, öğrencileri farklı çözüm stratejilerine yönlendirdikleri görülürken, yanlış çözüm yapan öğrencilere ise çözümlerini sorgulamalarını sağlayıcı, hatalarını keşfettirici sorular yönelttikleri görülmüştür.

Dönüt verme basamağında sınırlı kanıtın sağlam ve yetersiz kanıta göre en az oranda sunulduğu görülmüştür. Bu bulgu Özel'in (2019) çalışmasıyla benzerlik gösterirken, bazı çalışmalardan (Dişbudak-Kuru ve ark., 2022; Magiera ve Zambak, 2021; Son, 2013) dönüt verme basamağında sınırlı kanıtın en fazla oranda bulunması yönünden farklılaşmaktadır. Dönüt verme basamağında sınırlı kanıtın en az oranda görülmesinin sebebi, özellikle örüntüleri genelleme bileşeninde yetersiz kanıt sayısının sınırlı kanıt sayısından fazla olmasıdır. Bu durumun oluşmasında, örüntüleri genellemede çok farklı çözüm stratejilerinin olması ve öğretmen adaylarının farklı çözüm stratejisi içeren öğrenci çözümlerine yeterince aşina olmamalarının etkisinin olduğu düşünülebilir.

Fark etme becerisine yönelik sunulan kanıtların sayısı incelendiğinde en fazla sayıda yetersiz kanıtın diğer basamaklara kıyasla dönüt verme basamağında sunulduğu görülmüştür. Bu bulgu bazı çalışmalar (Doğan-Coşkun, 2021; Özel, 2019; Yıldız, 2022) ile benzerlik göstermektedir. Dönüt verme ile ilgili yetersiz kanıt sunan öğretmen adaylarının çoğunlukla doğru çözüm yapan öğrencilere sözel pekiştiricilerle dönüt verdikleri, öğrencilerin matematiksel anlayışını geliştirmeyecek şekilde benzer

sorular yönelttikleri; yanlış çözüm yapan öğrencilere ise soruyu değiştirerek yeniden sundukları, konuyu yeniden anlatma eğiliminde oldukları görülmüştür. Dönüt verme basamağında yetersiz kanıt sunulan önceki çalışmalarda da öğretmenlerin sözel pekiştireçleri yeterli bir dönüt olarak gördükleri ve öğrencileri hatalarını keşfetmelerini sağlayıcı yöntemlerden ziyade hatasını direkt göstermeye veya konuyu anlatmaya meyilli oldukları görülmüştür (Crespo, 2002; Son, 2013; Son ve Crespo, 2009; Son ve Sinclair, 2010). Bu durum öğretmen adaylarının henüz göreve başlamamış olmalarından dolayı gerçek öğrenci çözümleri ile yeterince etkileşim halinde bulunmamalarından kaynaklanabilir. Ayrıca dönüt verme basamağının fark etme becerisinin en zorlanılan bileşeni olmasından (Barnhart ve van Es, 2015; Jacobs ve ark., 2010) ve öğretmen adaylarının etkileşim içinde olmadıkları hayali bir öğrenciye dönüt veriyor olmalarından kaynaklı, verilen yetersiz kanıt oranının diğer basamaklara kıyasla fazla olması beklenen bir durumdur (Son, 2013). Öğretmen adaylarının yetersiz kanıt sunmalarının sebepleri arasında öğretmen adaylarının öğrenciyi yeterince tanımadıkları ve özel alan bilgilerinin yetersiz olması da gösterilebilir (Baki ve ark., 2018; Ball ve ark., 2008). Alan bilgisi öğretmen adaylarının fark etme becerilerinin gelişimi için tek başına yeterli olmasa da gerekli bir etken olmaktadır (Barnhart ve van Es, 2015; Kılıç, 2019b).

Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının dönüt verme basamağında doğru çözümlere 27, yanlış çözümlere 48 tane sağlam kanıt; doğru çözümlere 11, yanlış çözümlere 10 tane sınırlı kanıt; doğru çözümlere 22, yanlış çözümlere 2 tane yetersiz kanıt sunulduğu görülmüştür. Buradan öğretmen adaylarının doğru ve yanlış çözümlere yönelik sınırlı kanıt sunma sayılarının birbirine oldukça yakın olduğu anlaşılmaktadır. Doğru ve yanlış çözümlere sağlam kanıt sunma sayıları fark etme becerisinin dikkat etme ve yorumlama basamaklarında birbirine oldukça yakındır. Ancak dönüt verme basamağında öğretmen adaylarının doğru çözümlere kıyasla yanlış çözümlere daha fazla sağlam kanıt sundukları; yanlış çözümlere kıyasla da doğru çözümlere daha fazla yetersiz kanıt sundukları tespit edilmiştir. Bu bulgular daha önceki yapılan çalışmalarla da (Doğan-Coşkun, 2021; Özel, 2019; Taylan, 2018; Yıldız, 2022) paralellik göstermektedir. Öğretmen adayları doğru çözüm yapan öğrencilerin matematiksel anlayışlarını geliştirici dönütler vermede zorlanmakta ve sözel pekiştireç vermenin yeterli bir dönüt olduğunu düşünmektedirler (Crespo, 2002).

Fakat öğretmen adaylarına yanlış çözüm yapan öğrencileri, hatasını fark etmesini sağlayıcı farklı yöntem ve stratejilere yönlendirmek daha kolay gelmektedir.

6.2. Sonuç

Bu bölümde çalışmanın bulgularından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşünmelerine yönelik fark etme becerilerinin incelendiği bu çalışmada dikkat etme basamağı ile ilgili bulguların çoğunlukla sağlam kanıt düzeyinde sunulduğu görülmüştür. Sağlam kanıt düzeyinde sunulan kanıtların en çok dikkat etme basamağında yer aldığı sonucu elde edilmiştir. Çalışmada kullanılan problem çözümlerinin doğru veya yanlış olması, öğretmen adaylarının problem çözümlerine dikkat etmelerinde büyük bir farklılığa sebebiyet vermemiştir.

Öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşünmelerine yönelik fark etme becerilerinin incelendiği bu çalışmada yorumlama basamağı ile ilgili bulguların çoğunlukla sağlam kanıt düzeyinde sunulduğu görülmüştür. Sınırlı kanıt düzeyinde sunulan kanıtların en çok yorumlama basamağında yer aldığı sonucu elde edilmiştir. Çalışmada kullanılan problem çözümlerinin doğru veya yanlış olması, öğretmen adaylarının problem çözümlerini yorumlamalarında büyük bir farklılığa sebebiyet vermemiştir.

Öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşünmelerine yönelik fark etme becerilerinin incelendiği bu çalışmada dönüt verme basamağı ile ilgili bulguların çoğunlukla sağlam kanıt düzeyinde sunulduğu görülmüştür. Yetersiz kanıt düzeyinde sunulan kanıtların en çok dönüt verme basamağında yer aldığı sonucu elde edilmiştir. Çalışmada kullanılan problem çözümlerinde öğretmen adaylarının doğru çözümlerine en fazla oranda yetersiz kanıt düzeyinde, yanlış çözümlere ise en fazla oranda sağlam kanıt düzeyinde dönüt verdikleri görülmüştür.

Öğretmen adaylarının öğrencilerin cebirsel düşünmelerine yönelik sağlam kanıt sunma durumunun dikkat etme basamağında en fazla oranda görüldüğü, yorumlama ve dönüt verme basamaklarında ise bu oranın azaldığı görülmüştür. Benzer şekilde yetersiz kanıt sunma durumunun dönüt verme basamağında en fazla oranda görüldüğü, yorumlama ve dikkat etme basamaklarında ise bu oranın azaldığı görülmüştür.

6.3. Öneriler

Bu bölümde araştırmada elde edilen bulgular doğrultusunda eğitim uygulamalarına ve gelecekte yapılacak çalışmalara yönelik çeşitli önerilerde bulunulmuştur.

Fark etme becerisi ile ilgili gelecekte yapılacak çalışmalara yönelik öneriler:

- Cebirsel düşünmenin her bir bileşenine, özellikle de daha önceden çalışılmamış bileşenlerine yönelik, öğretmen adayları ve öğretmenlerle benzer çalışma yapılabilir.
- Mevcut çalışma öğretmen adayları ile sınırlıdır. OME'nin (2013) yapmış olduğu sınıflandırma ele alınarak öğretmenlerin fark etme becerileri incelenebilir. Elde edilen sonuçlar bu çalışmanın sonuçları ile karşılaştırılarak, öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının fark etme becerilerindeki güçlü ve zayıf yönleri hakkında detaylı bilgi sahibi olunabilir.
- Mevcut çalışma 5 öğretmen adayı ile yapılmıştır. OME'nin (2013) yapmış olduğu sınıflandırma ele alınarak daha fazla sayıda öğretmen adayının katılımı ile öğretmen adaylarının fark etme becerileri incelenebilir. Elde edilen sonuçlar bu çalışmanın sonuçları ile karşılaştırılarak öğretmen adaylarının fark etme becerilerine yönelik daha genelleştirici bulgular elde edilebilir.
- Bu çalışmanın verileri araştırmacı tarafından oluşturulan senaryolarla toplanmıştır. Benzer çalışma gerçek öğrenci çözümleri veya gerçek sınıf ortamında elde edilen video kayıtlar ile yapılabilir.

Öğretmen adaylarının fark etme becerilerinin geliştirilmesine yönelik öneriler:

- Öğretmen adaylarına cebir öğretimi ve sayıların öğretimi gibi alan öğretimi derslerinde fark etme becerilerini geliştirici çalışmalar yaptırılabilir.
- Bu çalışmada doğru ve yanlış problem çözümlerine yönelik oluşturulan senaryolar kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının fark etme becerisinin dönüt verme basamağında yanlış çözümlere daha fazla sağlam kanıt sunabildikleri sonucuna ulaşılırken, doğru çözümler içinse daha çok yetersiz kanıt sundukları görülmektedir. Dolayısıyla öğretmen adayları için cebir öğretimi ve sayılar öğretimi gibi alan öğretimi derslerinde doğru ve yanlış problem çözümleri üzerine çalışmalar yaptırılarak sağlam kanıt sunma becerileri geliştirilebilir.

- Öğretmenin fark etme becerisinin gelişmiş olması öğretimi de olumlu etkilemektedir. Dolayısıyla geleceğin öğretmeni olan öğretmen adaylarının fark etme becerilerinin geliştirilmesine yönelik uygulamalar yapılmalıdır.



KAYNAKÇA

- Açıl, E. ve Zeybek, Z. (2017). Öğrencilerin matematiksel dili kullanma ve anlama becerisi ile öğretmenlerinin öğrencilerin matematiksel dili nasıl kullandıklarını fark edebilme yeteneği. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 42(42), 87-107.
- Akgün, L. (2006). Cebir ve değişken kavramı üzerine. *Journal of Qafqaz University*, 17(1), 25-29.
- Akkan, Y. (2016). Cebirsel düşünme. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Edt.). *Matematik eğitim teorileri içinde* (s. 43-64). Pegem Akademi.
- Akkaya, R. ve Durmuş, S. (2006). İlköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki kavram yanılgıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31(31), 1-12.
- Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M. ve Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning*, 9, 221-247. doi:10.1080/10986060701360902
- Altun, M. (2010). İlköğretim ikinci kademedeki (6., 7. ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi. *Bursa: Alfa Aktüel*
- Altun, M., Memnun, D. S. ve Yazgan, Y. (2007). Sınıf öğretmeni adaylarının rutin olmayan matematiksel problemleri çözme becerileri ve bu konudaki düşünceleri. *İlköğretim Online*, 6(1), 127-143.
- Amaç, R. ve Kabar, M. G. D. (2019). Matematik öğretmeni adaylarının cebirde harflerin kullanımı ve cebirsel işlemler ile ilgili öğrenci hatalarına yönelik farkındalıkları. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, 7(4), 1525-1552.
- An, S. ve Wu, Z. (2012). Enhancing mathematics teachers' knowledge of students' thinking from accessing and analyzing misconceptions in homework. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10, 717-753.
- Baki, A. (2018). Matematiği öğretme bilgisi. *Pegem Atıf İndeksi*, 001-360.
- Baki, A. ve Bütünler, S. (2011). Cebirin tarihsel gelişimi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 2(3), 198-231.
- Baki, M., Çelik, D., Güler, M. ve Sönmez, N. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının öğrenciyi tanıma bilgilerinin incelenmesi: Bir ders analizi çalışması. *Kastamonu Education Journal*, 26(1).

- Baki, M. ve Özmen, Z. M. (2021). Investigating the impact of written feedback on preservice teachers' noticing. *Turkish Journal of Mathematics Education*, 2(3), 91-96.*
- Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that preservice teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, 90, 449-466.
- Ball, D. L., Thames, M. H. ve Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Baltacı, A. (2017). Nitel veri analizinde Miles-Huberman modeli. *Ahi Evran Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 3(1), 1-14.
- Barnhart, T. ve van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, 45, 83-93.
- Baroody, A. J. ve Ginsburg, H. P. (1982). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association* (ERIC) Document Reproduction Service No. ED214765
- Baroudi, Z. (2006). Easing students' transition to algebra. *Australian Mathematics Teacher*, 62(2), 28-33.
- Baş, S. (2013). An investigation of teachers' noticing of students' mathematical thinking in the context of a professional development program [Yayımlanmamış doktora tezi]. Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Baykul, Y. (2014). Harfli ifadeler, özdeşlikler, çarpanlara ayırma ve öğretimi. *Ortaokulda Matematik Öğretimi (5-8. Sınıflar)* içinde, (2. baskı, sayfa: 298), Ankara. Pegem Akademi.
- Behr, M., Erlwanger, S. ve Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, 92, 13-15.
- Bingölbali, E. ve Özmantar, M. F. (2009). Matematiksel kavram yanılgıları: Sebepleri ve çözüm arayışları. E. Bingölbali ve M. F. Özmantar (Edt.), *İlköğretimde Karşılaşılan Matematiksel Zorluklar ve Çözüm Önerileri* içinde (Sayfa: 1-30). Ankara, Pegem Akademi.
- Birgin, O. ve Eryılmaz, E. (2022). Türkiye’de matematik eğitimi alanında öğretmenin fark etmesi konusunda yapılan çalışmaların sistematik incelenmesi. *International Journal of Educational Studies in Mathematics*, 9(3), 184-203.
- Birinci, M. (2018). Bir ortaokul matematik öğretmenin mesleki gelişiminden yansımalar: Kesir öğretiminde fark etme becerisinin işe koşulması [Yayımlanmamış doktora tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

- Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. ve Zbiek, R. M. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5. *Series in Essential Understandings*. National Council of Teachers of Mathematics. 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1502.
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. *The ideas of algebra, K-12*, 20-32.
- Boz, N. (2013). Matematiğin temel yapı taşlarından “Değişken”. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Edt.). *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar içinde* (s. 329-338). Pegem Akademi.
- Bozkuş, F. (2020). Ortaokul matematik öğretmenlerinin öğrencilerin matematiksel düşüncelerini fark etme becerilerinin incelenmesi [Yayımlanmamış doktora tezi]. Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bolu.
- Callejo, M. L. ve Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20, 309-333.
- Carpenter, S. R. (2003). Incorporation of a cooperative learning technique in organic chemistry. *Journal of Chemical Education*, 80, 330-332.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. ve Levi, L. (2003). Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.
- Carpenter, T. P. ve Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. Res. Rep. (00-2). *Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*.
- Chalouh, L. ve Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. *In The Ideas of algebra, K-12* (s. 33-42). NCTM Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics: Reston, Virginia.
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. ve Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics*, 98, 57-76.
- Chmiliar, L. (2010). Multiple-case designs. A. J. Mills, G. Eupapas and E. Wiebe (Eds.). *In Encyclopedia of Case Study Research* (pp 582-583). USA: SAGE Publications.
- Chua, B. L. ve Hoyles, C. (2010). Teacher and student choices of generalising strategies: A tale of two views?.
- Collis, K. F. (1974). Cognitive development and mathematics learning, paper prepared for the Psychology of Mathematics Education Workshop. Publisher at the *Shell Mathematics Unit Centre for Science Education*, Chelsea College, University of London, U.K.

- Cooper, T. (1986). Problem solving. Queensland: Mathematics Education, Brisbane College of Advanced Education.
- Crespo, S. (2002). Praising and correcting: Prospective teachers investigate their teacherly talk. *Teaching and Teacher Education*, 18(6), 739-758.
- Creswell, J. W. (2021). *Nitel araştırma yöntemleri. Qualitative research methods* (6. Baskı). (M. Bütün ve S.B. Demir, Çev. Ed.). İstanbul: Siyasal Kitapevi. (Orijinal eserin yayın tarihi 2013, 3. Baskı).
- Creswell, J. W. ve Creswell, J. D. (2021). *Araştırma tasarımı: Nitel, nicel ve karma yöntem yaklaşımları*. (E. Karadağ, Çev.). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık. (Orijinal eserin yayın tarihi 2018, 5. Baskı).
- Creswell, J. W. ve Plano Clark, V. L. (2018). *Designing and conducting mixed methods research* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Çaylan-Ergene, B. (2024). Developing pre-service mathematics teachers' professional noticing of students' thinking in geometric measurement through pedagogies of practice [Unpublished masters' thesis]. Middle East Technical University, Ankara.
- Çaylan-Ergene, B. ve Işıksal-Bostan, M. (2022). Supporting pre-service mathematics teachers' professional noticing of students' reasoning about length. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 10(1), 50-70.
- Çelik, H., Başer-Baykal, N. ve Kılıç-Memur, H. N. (2020). Nitel veri analizi ve temel ilkeleri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, 8(1), 379-406. doi:10.14689/issn.2148-2624.1.8c.1s.16m
- Çelikdemir, K. (2018). Fostering preservice mathematics teachers' professional identity orientations through noticing practices in a video case-based community [Unpublished masters' thesis]. Middle East Technical University, Ankara.
- Çelikten, M. Şanal, M. ve Yeni, Y. (2005), Öğretmenlik mesleği ve özellikleri, Erciyes Üniversitesi, *Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, Sayı 19, Yıl: 2005/2 (207-237)
- Çetin, H. (2023). Matematik öğretmenlerinin öğrenci düşüncelerini fark etme becerilerinin örüntü genellemesi konusunda incelenmesi [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Tokat.
- Çetin-Argaç, H. ve Didiş-Kabar, M. G. (2024). Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Örüntüler Konusunda Öğrenci Düşüncelerine Yönelik Cevap Verme Yaklaşımları. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, (60), 1622-1653.

- Çopur, N. S. ve Tekin-Sitrava, R. (2024, Mart, 16-17). Matematik öğretmen adaylarının cebirsel ifadelerle ilişkin kavram yanılgılarını fark etme becerilerinin incelenmesi (s. 126-135). [Sözlü Sunum]. 19. Uluslararası Bilimsel Araştırma Kongresi, Ankara, Türkiye.
- Davis, R. B. (1984). Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education. London: Croom Helm Publisher.
- Dede, E. ve Özdemir, E. (2022). Matematik eğitiminde fark etme becerisi üzerine yapılan araştırmaların bibliyometrik analizi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17(36), 1547-1571.
- Dede, Y. ve Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(24).
- Demirel, Ö. (1999). *Planlamadan Değerlendirmeye Öğretme Sanatı*, Ankara: Pegem A., s.192.
- Didiş-Kabar, M. G. ve Tataroğlu-Taşdan, B. (2019). Matematik öğretmen adaylarının klinik görüşmeler aracılığıyla öğrenci düşüncelerine yönelik tespitleri ve yorumları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 13(2), 759-788.
- Dişbudak-Kuru, Ö., Ucuzoğlu, A. N., Işıksal-Bostan, M., Yemen-Karpuzcu, S. ve Tekin-Sitrava, R. (2022). Ortaokul matematik öğretmenlerinin mesleki fark etme becerileri: Dikdörtgenler prizmasının hacmine ilişkin problem durumu. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(2), 154-174.
- Dogbey, J. K. (2010). Concepts of variable in middle-grades mathematics textbooks during four eras of mathematics education in the United States. University of South Florida.
- Doğan, O. ve Kılıç, H. (2019). Matematik öğrenme fırsatları: fark etme ve harekete geçme. *Eğitim ve Bilim*, 44(199), 1-19.*
- Doğan-Coşkun, S. (2021). Sınıf öğretmeni adayları öğrencilerin yazılı çözümlerindeki cebirsel düşünme biçimlerini nasıl fark etmektedir? *Journal of Qualitative Research in Education*, 27, 103-124.doi:10.14689/enad.27.6
- Dreher, A. ve Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 88, 89-114.
- Driscoll, M. (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers, Grades 6-10*. Heinemann, 361 Hanover Street, Portsmouth, NH 03801-3912.
- Durmuş, S. (2004). Matematikte öğrenme güçlüklerinin saptanması üzerine bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 125.

- Ekinci, İ. (2021). Harizmî'nin Kitâbu'l-Cebr ve'l-Mukâbele isimli eserinin arap dilindeki yeri ve önemi. *İçtimaiyat* içinde, 5(1), 103-116.
- El Mouhayar, R. (2019). Exploring teachers' attention to students' responses in pattern generalization tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22, 575-605.
- El Mouhayar, R. R., ve Jurdak, M. E. (2013). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 379-396.
- Engelhardt, J. M. (1977). Analysis of children's computational errors: A qualitative approach. *British Journal of Educational Psychology*, 47, 149-154.
- Erbaş, A. K., Çetinkaya, B. ve Ersoy, Y. (2009). Öğrencilerin basit doğrusal denklemlerin çözümünde karşılaştıkları güçlükler ve kavram yanılgıları. *Eğitim ve Bilim*, 34(152).
- Erbaş, A. K. ve Ersoy, Y. (2003). Kassel projesi cebir testinde bir grup Türk öğrencisinin başarısı ve öğrenme güçlükleri. *İlköğretim Online Dergisi*, 4(1), 18-39.
- Erbay, H. N. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının fark etme becerilerin video-kulüp uygulamalarıyla gelişim sürecinin incelenmesi [Yayımlanmamış doktora tezi]. *Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul.
- Erdik, E. (2014). A comparative analysis of noticing of mathematics teachers with varying teaching experience. [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul.
- Erdoğan, A. ve Özdemir-Erdoğan, E. (2009). Toplama ve çıkarma kavramlarının öğretimi ve öğrenci güçlükleri. E. Bingölbali ve M. F. Özmantar (Edt.). *İlköğretimde Karşılaşılan Matematiksel Zorluklar ve Çözüm Önerileri* içinde (Sayfa: 31-58). Ankara, Pegem A Yayıncılık.
- Estapa, A. T., Amador, J., Kosko, K. W., Weston, T., de Araujo, Z. ve Aming-Attai, R. (2018). Preservice teachers' articulated noticing through pedagogies of practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(4), 387-415.
- Evirgen, O. (2014). İlköğretim 7. sınıf matematik öğretim programında zor olarak algılanan konular ve öğretmen, öğrenci görüşleri [Yüksek lisans tezi]. Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Falkner, K., Levi, L. ve Carpenter, T. (1999). Early childhood corner: Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching children mathematics*, 6(4), 232-236.
- Fernández, C., Llinares, S., Callejo, M. L., Moreno, M. ve Sánchez-Matamoros, G. (2017). Characteristics of a learning environment to support prospective secondary mathematics teachers' noticing of students' thinking related to the limit concept. In *CERME 10*.

- Gibbs, G. R. (2007). Analyzing qualitative data. U. Flick (Ed.). *The Sage qualitative Research kit* (First ed.). Sage Publications.
- Girit-Yıldız, D., Osmanoğlu, A. ve Gündoğdu-Alaylı, F. (2023). Providing a video-case-based professional development environment for prospective mathematics teachers to notice students' misconceptions in measurement. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 26(2), 179-209.
- Guerrero, L. ve Rivera, A. (2002). Exploration of patterns and recursive functions. In *Proceedings of the 24th PME-NA Conference* (Vol. 1).
- Gülpek, P. (2020). İlköğretim 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin gelişimi [Doctoral dissertation]. Bursa Uludağ Üniversitesi, Bursa.
- Güner, P. (2017). Investigating preservice middle school mathematics teachers' noticing of students' mathematical thinking in the context of lesson study [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Güner, P. ve Akyüz, D. (2017a). Ders imecesi (lesson study) mesleki gelişim modeli: Öğretmen adaylarının fark etme becerilerinin incelenmesi. *İlköğretim Online*, 16(2), 428-452.*
- Güner, P. ve Akyüz, D. (2017b). Öğretmen adaylarının ders imecesi (lesson study) kapsamında matematiksel fark etmelerinin niteliği. *Ondokuz Mayıs University Journal of Education Faculty*, 36(1), 47-82.
- Gürefe, N. (2021). Cebirsel ifade ve değişken kavramının öğretimi. G. Sarpkaya Aktaş (Edt.). *Uygulama örnekleriyle cebirsel düşünme ve öğretimi* içinde (2. Baskı, s. 103-130). Pegem Akademi.
- Gürsoy, P. (2019). Bir matematik öğretmeninin cebir öğretim sürecinden yansımalar: fark etme becerisi [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Trabzon Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Hart, K. M., Brown, M. L., Kerslake, D. M., Küchemann, D. E. ve Ruddock, G. (1998). Children's understanding of mathematics: 11-16. London: Athenaeum Press.
- Hawthorne, C. W. (2016). *Teachers' Understanding of Algebraic Generalization*. San Diego State University.
- Herbert, K. ve Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 3(6), 340-344.
- Herscovics, N. ve Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, 73, 572-580.

- Hitchcock, G. ve Hughes D. (1995). *Research And The Teacher: A Qualitative Introduction To School-Based Research*. 26.02.2010, http://books.google.com/books?id=qRuNQ6_KLSsC&printsec=frontcover&q=hitchcock+hughes&hl=tr&cd=1#v=onepage&q=&f=false
- Huberman, A. M. ve Miles, M. B. (1994). Data management and analysis methods. N. K. Denzin and Y. S. Lincoln (Eds.). In *Handbook of qualitative research* (s. 428-444). Thousand Oaks, CA: Sage.
- İdil, F. H. ve Narlı, S. (2021). Ortaokul matematik öğretmen adaylarının cebir öğrenme alanına ilişkin alan ve pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, (52), 359-391.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. ve Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for research in mathematics education*, 41(2), 169-202.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra1. In *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Routledge.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? J. J. Kaput, D. W. Carraher and M. L. Blanton (Eds.). (2017). *Algebra in the early grades*. Routledge.
- Kaya, D. (2015). Çoklu temsil temelli öğretimin öğrencilerin cebirsel muhakeme becerilerine, cebirsel düşünme düzeylerine ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisi üzerine bir inceleme [Yayımlanmamış doktora tezi]. Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimler Enstitüsü, İzmir.
- Kılıç, S. D. (2019a). Matematik öğretmen adaylarının, 6. sınıf öğrencilerinin cebirsel örüntüleri genellemelerine ilişkin farkındalıkları. *Kastamonu Education Journal*, 27(4), 1713-1728.
- Kılıç, S. D. (2019b). Öğretmen adaylarının 7. sınıf öğrencilerinin denklemler konusundaki hata ve kavram yanlışlarına ilişkin farkındalıkları. *Sakarya University Journal of Education*, 9(1), 184-207.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, 12, 317-326.
- Kieran, C. (1985). The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students. Paper presented at the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, The Netherlands.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner and C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33–56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 96-112). New York: Cambridge University Press.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Handbook of research on mathematics teaching and learning. *National Council of Teachers of Mathematics-NCTM, New York*.
- Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. *The future of the teaching and learning of algebra the 12 th ICMI study*, 21-33.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, 707-762.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M. ve Stephens, A. C. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(9), 514-519.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. ve Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312.
- Kuşakçı-Konuş, B. (2022). Modelleme sürecinde matematik öğretmenlerinin fark etme düzey değişiminin incelenmesi [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, Niğde.
- Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*, 7(4), 23-26.
- Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(7), 342-348.
- Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning*, 7(3), 231-258.
- Lannin, J. K., Barker, D. D. ve Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding? *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(4), 299-317. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.11.004>
- LaRochelle, R. M. (2018). Secondary teachers' professional noticing of students' mathematical thinking. [Unpublished doctoral dissertation]. UC San Diego, California, USA.
- LaRochelle, R., Nickerson, S. D., Lamb, L. C., Hawthorne, C., Philipp, R. A. ve Ross, D. L. (2019). Secondary Practising Teachers' Professional Noticing of Students' Thinking about Pattern Generalisation. *Mathematics Teacher Education and Development*, 21(1), 4-27.

- Lawrence, A. ve Hennessy, C. (2002). *Lessons for Algebraic Thinking (Grades 6-8)*. Math Solutions Publications: Sausalito, CA.
- LeCompte, M. D. ve Goetz, J. P. (1982). Problems of reliability and validity in ethnographic research. *Review of educational research*, 52(1), 31-60.
- Lee, M. Y. ve Lee, J. E. (2023). An analysis of elementary prospective teachers' noticing of student pattern generalization strategies in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 26(2), 155-177.
- Ley, A., F. (2005). "A Cross-Sectional Investigation of Elementary School Students' Ability to Work with Linear Generalizing Patterns: The Impact of Format and Age on Accuracy and Astrategy Shoice" [Master dissertation], Toronto University, Canada.
- Liljedahl, P. (2004). Repeating Pattern Or Number Pattern: The Distinction is Blurred. *Focus On Learning Problems in Mathematics*, 26(3), 24-42.
- Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 113-120.
- MacGregor, M. ve Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 217-232.
- MacGregor, M. ve Stacey, K. (1997). Students' undersatnding of algebraic notation: 11-15, *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1-19
- MacGregor, M. ve Stacey, K. (1999). A flying start to algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(2), 78-85.
- Magiera, M. T. ve Zambak, V. S. (2021). Prospective K-8 teachers' noticing of student justifications and generalizations in the context of analyzing written artifacts and video-records. *International Journal of STEM Education*, 8, 1-21.
- Marshall, C. ve Rossman, G. B. (2014). *Designing Qualitative Research*. New York: Sage.
- Mason, J. (1996). Expressing Generality And Roots Of Algebra. In N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Eds.), *Approaches To Algebra: Perspectives For Research And Teaching* (Pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge.
- Mason, J. (2011). Noticing: Roots and branches. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs and R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 35-50). Routledge.

- Mates, B. (1972). Elementary logic. New York: Oxford University Press.
- Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K. ve Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 316-350.
- Maxwell, J. A. (2013). Qualitative research design: An interactive approach (third edition). Los Angeles, USA: Sage.
- Mayer, R. E. (1992). Thinking, problem solving, cognition. New York: Freeman.
- Merriam, S. B. (1998). Qualitative Research and Case Study Applications in Education. Revised and Expanded from "Case Study Research in Education.". Jossey-Bass Publishers, 350 Sansome St, San Francisco, CA 94104.
- Merriam, S. B. (2009). Qualitative research: A guide to design and implementation: Revised and expanded from qualitative research and case study applications in education. San Francisco, USA: Jossey-Bass.
- Merriam, S. B. (2013). Nitel araştırma: Desen ve uygulama için bir rehber (3. Baskıdan Çeviri, Çeviri Editörü: S. Turan). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Miles, M. B. ve Huberman, A. M. (1994). Qualitative data analysis: An expanded Sourcebook. (2nd ed). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Miller, D. L. (1992). The experiences of a first-year college president: An ethnography. The University of Nebraska-Lincoln.
- Millî Eğitim Bakanlığı (MEB). (2005). Orta Öğretim Matematik Dersi Programı ve Klavuzu: 9-12. Sınıflar. Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı
- Millî Eğitim Bakanlığı (MEB). (2017). Öğretmenlik Mesleği Genel Yeterlikleri.
- Millî Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018a). Matematik Dersi Öğretim Programı (1,2,3,4,5,6,7,8. Sınıflar). Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı
- Millî Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018b). Matematik Dersi Öğretim Programı (9,10,11,12. Sınıflar). Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı
- Moore, T. (2012, Şubat). Terry Moore: Why is x unknown? 20.07.2024 tarihinde alınmıştır.
https://www.ted.com/talks/terry_moore_why_is_x_the_unknown?subtitle=en
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM). (1991). Professional standards for teaching mathematics. Reston, VA: Author

- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
- Olkun, S. ve Toluk-Uçar, Z. (2006). İlköğretimde matematik öğretimine çağdaş yaklaşımlar: Yeni ilköğretim programları ve öğretmen yeterlilikleri ışığında. Ekinoks Eğitim Danışmanlık.
- Olkun, S. ve Toluk-Uçar, Z. (2020). İlköğretimde Etkinlik Temelli Matematik Öğretimi. Ankara: Vizetek Yayınları
- Olkun, S. ve Yeşildere, S. (2007). “Sınıf öğretmeni adayları için” temel matematik 1. Ankara: Maya Akademi.
- Ontario Ministry of Education (OME). (2013). Paying Attention to Algebraic Reasoning K-12: Support Document for Paying Attention to Mathematics Education.
<http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/PayingAttentiontoAlgebra.pdf>.
- Orton, A. ve Orton, J. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. In A. Orton (Ed.) *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104–120). Cassell, London.
- Osmanoğlu, A. (2010). Preparing pre-service teachers for reform-minded teaching through online video case discussions: Change in noticing [Unpublished doctoral dissertation]. Middle East Technical University, Graduate School of Social Sciences, Ankara.*
- Özaltun, A. (2014). Matematik öğretmenlerinin mesleki gelişimleri: öğrenci düşüncesi bilgisinin öğretime yansması [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Özdemir, E., Dikici, R. ve Kültür, M. N. (2015). Öğrencilerin örüntüleri genelleme süreçleri: 7. sınıf örneği. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(2), 523-548.
- Özdemir-Baki, G. ve Akgün, L. (2024). Supporting teacher noticing based on student mathematical thinking through video club. *Turkish Journal of Education*, 13(1), 1-23.
- Özel, Z. (2019). Investigation into prospective middle school mathematics teachers' noticing of students' algebraic thinking within the context of pattern generalization [Yüksek lisans tezi]. Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Özkan, H. H. (2011). Matematik dersinde öğretmenlerin ders içi yönelttiği sorular ve öğrenci cevapları düzeyi. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, 35(35), 64-81.
- Palabıyık, U. ve İspir, O. A. (2011). Örüntü temelli cebir öğretiminin öğrencilerin cebirsel düşünme becerileri ve matematiğe karşı tutumlarına etkisi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30(30), 111-123.

- Patton, M.Q. (2002). Qualitative research and evaluation methods (3rd Ed.). London: Sage Publications, Inc.
- Patton, M. Q. (2005). Qualitative Research. New York: John Wiley & Sons, Ltd.
- Perso, T. (1992). Using Diagnostic Teaching to Overcome Misconceptions in Algebra. The Mathematical Association of Western Australia.
- Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The mathematics teacher*, 85(7), 557-561.
- Polya G. (1957). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton, NJ: Princeton University Press (Orijinal olarak 1945 de yayınlanmıştır).
- Posamentier, A. S. ve Krulik, S. (1998). Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions. California, Corwin Press Inc.
- Rittle-Johnson, B. ve Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175–189. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.1.175>
- Rivera, F. ve Becker, J. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in Algebra. In *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(4), 198-203.
- Rowell, A. J., Dawson, C. J. ve Harry, L. "Changing Misconceptions: a challenge to science education". *International Journal Science Education*, Sayı: 12(2), ss. 167-175, 1990.
- Russell, S. J. (1999) Mathematical reasoning in the elementary grades. In Lee V. Stiff (Ed.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12/1999 yearbook*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. ve Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 100, 83-99.
- Sarpkaya-Aktaş, G. (2021). Cebirin Tarihi. G. Sarpkaya-Aktaş (Edt.). *Uygulama örnekleriyle cebirsel düşünme ve öğretimi içinde* (2. Baskı, s. 1-22). Pegem Akademi.
- Schifter, D. (2001). Perspectives from a mathematics educator. In *Mathematics Teacher Preparation Content Workshop Program Steering Committee, Center for Education*, National Research Council (Eds.), *Knowing and learning mathematics for teaching: Proceedings of a workshop* (pp. 69-71).
- Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 338-355.

- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification the case of algebra. *Educational studies in mathematics*, 26, 191-228.
- Sherin, B. ve Star, J. R. (2011). Reflections on the study of teacher noticing. In *Mathematics teacher noticing* (pp. 96-108). Routledge.
- Shin, D. (2020). Prospective mathematics teachers' professional noticing of students' reasoning about mean and variability. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 20(3), 423-440.
- Shin, D. (2021). Preservice mathematics teachers' selective attention and professional knowledge-based reasoning about students' statistical thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(5), 1037-1055.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 4-14.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1-23.
- Simons, D. J. (2000). Attentional capture and inattention blindness. *Trends in Cognitive Sciences*, 4, 147-155.
- Simpson, A. ve Haltiwanger, L. (2017). "This is the first time I've done this": Exploring secondary prospective mathematics teachers' noticing of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20, 335-355.
- Son, J. W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational studies in mathematics*, 84, 49-70.
- Son, J. W. ve Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 235-261.
- Son, J. W. ve Sinclair, N. (2010). How preservice teachers interpret and respond to student geometric errors. *School Science and Mathematics*, 110(1), 31-46.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164.
- Stake, R.E. (2005). Qualitative case studies. In N. K. Denzin ve Y. S. Lincoln (Ed.). *The Sage handbook of qualitative Research* (s. 443-466). London: Sage.
- Steele, D. (2005). Using writing to access students' schemata knowledge for algebraic thinking. *School Science and Mathematics*, 103 (3), 142-154.
- Stephens, A. C. (2005). Developing students' understandings of variable. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(2), 96-100.

- Stephens, A. C., Knuth, E. J., Blanton, M. L., Isler, I., Gardiner, A. M. ve Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 173-182.
- Strauss, A. ve Corbin, J. (1990). Basics of qualitative research. Sage publications.
- Sun, J. ve van Es, E. A. (2015) . An explotory study of the influence that analyzing teaching has on preservice teachers' classroom practice. *Journal of Teacher Education*, 66 (3), 201-221.
- Şermetoğlu, H. ve Baki, M. (2019). Oran ve orantı konusu öğretim sürecinin bir matematik öğretmenin fark etme becerisi bağlamında incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 10 (2), 394-425. DOI: 10.16949/turkbilmat.461124
- Şimşek, M. G. (2019). Matematik öğretmen adaylarının fark etme becerilerinin kavram yanılgıları ve öğrenci zorlukları esas alınarak oluşturulan limit dersi videoları kullanılarak incelenmesi [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Tanışlı, D. ve Köse, N. Y. (2013). Sınıf öğretmen adaylarının genelleme sürecindeki bilişsel yapıları: Bir öğretim deneyi. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, 12(44), 255-283.
- Tanışlı, D. ve Özdaş, A. (2009). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemede kullandıkları stratejiler. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 9(3), 1453-1497.
- Tataroğlu-Taşdan, B. (2019). Matematik öğretmeni adaylarının fark etme becerilerinin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 10(1), 232-259.*
- Tataroğlu-Taşdan, B., Yiğit-Koyunkaya, M. ve Tekin-Dede, A. (2023). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının derslerindeki argümantasyon sürecine ilişkin fark etme becerilerinin incelenmesi. *Manisa Celal Bayar Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(2), 220-244.
- Taylan, R. D. (2018). The relationship between pre-service mathematics teachers' focus on student thinking in lesson analysis and lesson planning tasks. *International Journal Of Science And Mathematics Education*, 16(2), 337-356.
- Tekin-Sitrava, R., Kaiser, G. ve Işıksal-Bostan, M. (2022). Development of prospective teachers' noticing skills within initial teacher education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(7), 1611-1634.

- Tekin-Sitrava, R., Şahin, N., Çopur, N. S. ve Ayıkol-Baykal, A. (2024). Matematik öğretmen adaylarının öğrencilerin aritmetik ortalamaya yönelik düşüncesini fark etme becerilerinin geliştirilmesi: Bir öğretim deneyi. *Van Yüzyüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 21(1), 306-331.
- Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. *Pattern in the teaching and learning of mathematics*, 18-30.
- Toptaş, V. ve Kılıçkaya, M. (2017). Problem çözme: Literatür incelemesi. *International Journal of Education Technology and Scientific Researches*, 2(2), 20-31.
- Tün, S. S. (2018). An investigation of mathematics preservice teachers' noticing skills [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Türk Dil Kurumu Sözlüğü (TDK, 2023). <http://www.tdk.gov.tr> adresinden 04.02.2024 tarihinde alınmıştır.
- Türk, Y. (2020). Ders imcesinin öğretmen adaylarının öğrencinin öğrenmelerine yönelik farkındalık becerilerine etkisi [Yayımlanmamış doktora tezi]. Trabzon Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Trabzon.
- Türker-Biber, B. (2017). İstatistikle ilgili modelleme etkinlikleri bağlamında öğretmen farkındalığı: Bir durum çalışması [Yayımlanmamış doktora tezi]. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Türker-Biber, B. ve Yetkin-Özdemir, İ. (2021). Matematiksel modelleme etkinlikleri bağlamında öğrenci düşüncelerine yönelik öğretmen farkındalığı ve fark etme stratejileri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, (53), 521-554.
- Ulusoy, F. ve Çakıroğlu, E. (2021). Exploring prospective teachers' noticing of students' understanding through micro-case videos. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 24(3), 253-282.
- Ursini, S. ve Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4-327).
- Usiskin, Z. (1997). Doing algebra in grades K-4. *Teaching Children Mathematics*, 3(6), 346-356.
- Uygur-Kabael, T. ve Barak, B. (2017). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının problem çözmedeki fonksiyonel düşünme becerileri. *Uluslararası Eğitim Bilimleri Dergisi*, (13), 311-321.
- Uygur-Kabael, T. ve Tanışlı, D. (2010). Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim. *İlköğretim Online*, 9(1), 213-228.

- Ünlü, M. (2021). Cebirsel düşünme ve cebirsel düşünmenin matematik öğretimindeki yeri. G. Sarpkaya Aktaş (Ed.), *Uygulama örnekleriyle cebirsel düşünme ve öğretimi* içinde (2. Baskı, s. 23-41). Pegem Akademi.
- Van Amerom, B. A. (2002). Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra [Unpublished doctoral dissertation]. University of Utrecht, The Netherlands
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S. ve Bay-Williams, J. (2016). Elementary and middle school mathematics teaching developmentally (7th edition). United State of America: Pearson Education.
- Van Dooren, W., Verschaffel, L. ve Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in mathematics education*, 33(5), 319-351.
- van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. In *Mathematics teacher noticing* (pp. 164-181). Routledge.
- van Es, E. A. ve Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of technology and teacher education*, 10(4), 571-596.
- van Es, E. A. ve Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and teacher education*, 24(2), 244-276.
- Vance, J. (1998). Number operations from an algebraic perspective. *Teaching Children Mathematics*, 4 (5), 282-285. <https://doi.org/10.5951/TCM.4.5.0282>.
- Varol, F. ve Kubanç, Y. (2012). Öğrencilerin dört işlemde yaşadıkları yaygın aritmetik güçlükler. *Electronic Turkish Studies*, 7(1).
- Verschaffel, L. ve De Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in mathematics education*, 28(5), 577-601.
- Warren, E. ve Cooper, T. J. (2005). Young children's ability to use the balance strategy to solve for unknowns. *Mathematics education research journal*, 17(1), 58-72.
- Warren, E. ve Cooper, T. J. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(1), 9.
- Warren, E. A., Cooper, T. J. ve Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 208-223.
- Welder, R. M. (2012). Improving algebra preparation: Implications from research on student misconceptions and difficulties. *School science and mathematics*, 112(4), 255-264.

- Weyers, J., Koenig, J., Scheiner, T., Santagata, R. ve Kaiser, G. (2023). Teacher noticing in mathematics education: a review of recent developments. *ZDM–Mathematics Education*, 1-16.
- Wilson, P. H., Mojica, G. F. ve Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 103-121.
- Witzel, B.S., Mercer, C.D. ve Miller, D.M. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research&Practice*, 18(2), 121-131.
- Wolcott, H. F. (1994). Transforming qualitative data: Description, analysis, and interpretation. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Yaman, H. ve Umay, A. (2013). İlköğretim öğrencilerinin sunum biçimlerine göre matematiksel örüntüleri algılayışları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28(28-1), 405-416.
- Yang, X., Kaiser, G., König, J. ve Blömeke, S. (2021). Relationship between Chinese mathematics teachers' knowledge and their professional noticing. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19, 815-837.
- Yazgan, Y. (2007). Dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerinin rutin olmayan problem çözme stratejileriyle ilgili gözlemler. *İlköğretim Online*, 6(2), 249-263.
- Yeşil, D. (2021). Bir ortaokul matematik öğretmeninin fark etme becerisi bağlamında mesleki gelişimi [Yayımlanmamış doktora tezi]. Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.*
- Yeşildere, S. ve Akkoç, H. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30(30), 141-153.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2021). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. (12. Baskı). Ankara:SeçkinYayıncılık.
- Yıldız, A., Baltacı, S., Kurak, Y. ve Güven, B. (2012). Üstün yetenekli ve üstün yetenekli olmayan 8. sınıf öğrencilerinin problem çözme stratejilerini kullanma durumlarının incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25(1), 123-143.
- Yılmaz, H. K. ve Özdemir-Baki, G. (2023). Bir ortaokul matematik öğretmeninin fark etme becerisinin alan ölçme öğretimine yansımaları. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, (55), 95-118.
- Yükseköğretim Kurulu (YÖK, 2018). İlköğretim matematik öğretmenliği lisans programı.

- Zaskis, R. ve Liljedahl, P. (2002). Generalization Of Patterns: The Tension Between Algebraic Thinking And Algebraic Notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379- 402.
- Zembat, İ, Ö. (2010). Kavram yanılgısı nedir? Özmantar, M. F., Bingölbalı, E. ve Akkoç, H. (Edt.), *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri*. Ankara; PegemA Yayıncılık.
- Zenor, S. (1989). Standards for College and University Learning Resources Programs: Technology in Instruction. *Association for Educational Communications and Technology*.
- Zeybek-Şimşek, Z. (2020). Pre-service middle grade mathematics teachers' ability to notice: The case of fractions. *Başkent University Journal of Education*, 7(2), 250-266.



EKLER

Ek-1. Veri toplama aracı

Senaryo 1: $20 - 12 + 8 - 4 = ?$ işleminin sonucunu öğrendiğiniz toplama ve çıkarma işlemlerinin özelliklerini kullanarak bulunuz.	
Çözüm 1: $\begin{aligned} 20 - 12 + 8 - 4 \\ = 20 - 8 + 12 - 4 \\ = 12 + 8 \\ = 20 \end{aligned}$	Çözüm 2: $\begin{aligned} 20 - 12 + 8 - 4 \\ = 20 + 8 - (12 + 4) \\ = 28 - 16 \\ = 12 \end{aligned}$

Senaryo 2: Aşağıda verilen problemleri ve problem çözümlerini inceleyiniz. a) $\mathbb{C}$ çift tam sayıyı, T tek tam sayıyı göstermek üzere; $\mathbb{C} \div T = ?$ b) $\frac{a}{0} = ?$ ($a \neq 0$)	
Çözüm 3: a) $\mathbb{C} \div T$ için; $\mathbb{C}, T = \mathbb{C}$ olduğunu biliyoruz. Buradan $\rightarrow \mathbb{C} \div \mathbb{C} = T$ ve $\rightarrow \mathbb{C} \div T = \mathbb{C}$ elde edilir. Bu sebeple $\mathbb{C} \div T = \mathbb{C}$ olur.	Çözüm 4: b) $\frac{a}{0}$ için; $\frac{a}{0}$ ifadesi tanımsızdır. Çünkü herhangi bir sayı ile sıfırı çarparsak sıfırdan farklı bir sayı bulamayız.

Senaryo 3: $13+19= \blacksquare +22$ ifadesinde $\blacksquare$ yerine ne gelmelidir?	
Çözüm 5: $13 + 19 = 32 + 22 = 54$	Çözüm 6: $13 + 19 = 32$ ise $\blacksquare + 22 = 32$ olmalıdır. Bu yüzden $\blacksquare = 10$ olur.

Ek-1 (Devam). Veri toplama aracı

Senaryo 4: $2 \cdot \blacksquare + 16 = 38$ ve $2 \cdot \blacksquare + 16 - 8 = 38 - 8$ ifadeleri veriliyor. $\blacksquare$ yerine yazılması gereken sayıların aynı olup olmadığı hakkında ne söylenebilir?

Çözüm 7:

$$2 \blacksquare + 16 = 38$$

$$2 \blacksquare = 22$$

$$\blacksquare = 11$$

$$2 \blacksquare + 16 - 8 = 38 - 8$$

$$2 \blacksquare + 8 = 30$$

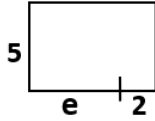
$$2 \blacksquare = 22$$

$$\blacksquare = 11$$

Çözüm 8:

1.denklemin her iki tarafından da aynı sayı (8) çıkarılarak 2. denklem elde edilmiş. Bu yüzden her iki denklemde de $\blacksquare$ yerine yazılması gereken sayı aynıdır.

Senaryo 5:



Yukarıda verilen dikdörtgenin alanını bulunuz.

Çözüm 9:

Dikdörtgenin alanı, dikdörtgenin boyunun uzunluğu ile eninin uzunluğunun çarpımına eşittir.

$$A = 5 \cdot (2 \cdot e)$$

$$A = (5 \cdot 2) \cdot e$$

$$A = 10e \text{ olarak bulunur.}$$

Çözüm 10:

$$A = 5 \cdot (e + 2)$$

$$A = 5e + 10$$

Ek-1 (Devam). Veri toplama aracı

Senaryo 6: $2n$ ya da $n + 2$ ifadelerinden hangisi daha büyüktür? Açıklayınız.

Çözüm 11:

$2n$ değişmez fakat $n + 2 = 3n$ olur.
 $3n$, $2n$ 'den daha büyük olacağı için
 $n + 2 > 2n$ olur.

Çözüm 12:

1.durum:

$$n + 2 > 2n$$

$$2 > n \text{ olur.}$$

Bu durumda n yerine yazılacak 2'den küçük değerler için $n + 2$ ifadesi daha büyüktür.

2.durum:

$$n + 2 = 2n$$

$2 = n$ olur. Bu durumda n yerine 2 yazılırsa iki ifade birbirine eşittir.

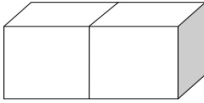
3.durum:

$$n + 2 < 2n$$

$$2 < n \text{ olur.}$$

Bu durumda n yerine yazılacak 2'den büyük değerler için $2n$ ifadesi daha büyüktür.

Senaryo 7: Bir şirket, küpleri yan yana sıralayarak çubuklar üretmekte ve üretilen çubuktaki küplerin dışarıdan görünen her bir yüzeyine etiket yapıştırılmaktadır. Örneğin uzunluğu 2 olan çubuğu kaplamak için 10 tane etiket gereklidir.



a) Uzunluğu 90 olan çubuk için gerekli olan etiket sayısı kaçtır?

b) Herhangi bir uzunluktaki bir çubuk için gerekli olan etiket sayısını veren kuralı bulunuz.

Çözüm 13:

a)

$$90.6 = 540$$

$$540 - 89.2 = 362$$

Çözüm 14:

a)

$$\begin{array}{r} 2 \quad 10 \\ 90 \quad ? \\ \hline \end{array}$$

$$? = 10.45$$

$$? = 450$$

$$450 - 45.2 = 360$$

Çözüm 15:

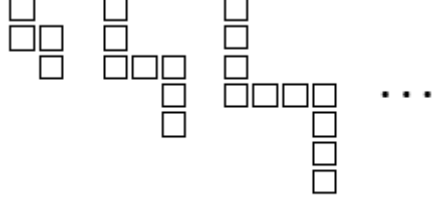
b) Örüntünün kuralı
 $6n - 2(n - 1)$
şeklindedir.

Çözüm 16:

b) Küpün 6 yüzeyi olduğundan her bir küp için 6 etiket kullanılmaktadır. Bu sebeple kuralda $6n$ ifadesi bulunacaktır. Her iki küp birleştğinde birleşen yüzeylerdeki etiketler çıkartılacaktır. Bu sebeple örüntünün kuralı $6n - 2$ olur.

Ek-1 (Devam). Veri toplama aracı

Senaryo 8:



1. Adım 2. Adım 3. Adım

Yukarıda verilen şekil örüntüsünde 1. adımda 4 tane birimkare, 2. adımda 7 tane birimkare ve 3. adımda 10 tane birimkare yer almaktadır. Buna göre;

- c) Örüntünün 7. adımındaki birimkare sayısını bulunuz.
ç) Örüntünün kaçınıcı adımında 112 tane birimkare olduğunu bulunuz.

Çözüm 17:

a)

$$8 + 6 + 8 = 22$$

Çözüm 18:

a)

$$8 + 8 + 8 - 1 = 23$$

Çözüm 19:

b)

$$112 - 4 = 108$$

$$108 \div 3 = 36$$

$$36 + 1 = 37$$

Çözüm 20:

b)

$$112 - 30 = 82$$

$$82 - 30 = 52$$

$$52 - 30 = 22$$

$$22 - 15 = 7$$

$$7 - 6 = 1$$

$$10 + 10 + 10 + 5 + 2 + 1 = 38$$

Senaryo 9: Buse, okula gitmeden önce annesi Buse'ye 15 TL harçlık vermiştir. Buse, okula giderken kırtasiyeden 23 TL'ye defter almış ve geriye 56 TL'si kalmıştır. Buna göre annesi harçlık vermeden öncesinde Buse'nin ne kadar parası vardır?

Çözüm 21:

$$56 + 23 = 79$$

$$79 - 15 = 64$$

Çözüm 22:

$$56 - 23 = 33$$

$$33 - 15 = 18$$

Ek-1 (Devam). Veri toplama aracı

Senaryo 10: Bir kırtasiyeci pazartesi, salı ve çarşamba günlerinde toplam 78 tane kalem satmıştır. Salı günü sattığı kalem sayısı pazartesi günü sattığı kalem sayısının 2 katıdır. Çarşamba günü sattığı kalem sayısı 24 ve salı günü sattığı kalem sayısından 12 eksiktir. Kırtasiyecinin pazartesi günü sattığı kalem sayısını bulunuz.

Çözüm 23:

$$78 - 24 = 54$$

$$54 \div 3 = 18$$

Çözüm 24:

$$24 - 12 = 12$$

$$24 + 12 = 36$$

$$78 - 36 = 42$$

Ek-2. Yarı yapılandırılmış mülakat formunun örneği

Senaryo 1: $20 - 12 + 8 - 4 = ?$ işleminin sonucunu öğrendiğiniz toplama ve çıkarma işlemlerinin özelliklerini kullanarak bulunuz.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned} 20 - 12 + 8 - 4 \\ = 20 - 8 + 12 - 4 \\ = 12 + 8 \\ = 20 \end{aligned}$$

Yukarıda verilen senaryo ve problem çözümünü inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- 1) Problemin çözümünde hangi kısımlar dikkatinizi çekmiştir? Çözüm doğru mudur? Bu problem çözümünün nasıl yapıldığını (kullanılan strateji, düşünme biçimi, yapılan açıklamalar vb.) ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.
- 2) Problem çözümünden hareketle bu çözümü yapan öğrencinin konuya ilişkin kavrayışı hakkında ne düşünüyorsunuz? Başka bir ifadeyle öğrenci matematiksel olarak neleri doğru anlamıştır ve hangi kısımlarda kavram karmaşasına sahip olabilir? Açıklayınız.
- 3) Bu şekilde çözüm yapan bir öğrencinin öğretmeni siz olsaydınız, öğrenciye nasıl dönüt verirdiniz? Ne tür sorular/ problemler sorardınız? Bu yeni problemlerle neyi amaçladığınızı açıklayınız.

Ek-3. Uzman görüş formu

Sayın Hocam,

Yüksek lisans tez çalışmamda kullanmayı düşündüğüm veri toplama aracının uygunluğuna dair uzman görüşüne ihtiyaç duymaktayım. Yoğun çalışmalarınız arasında, değerli görüşlerinizi benimle paylaşırsanız çok memnun olurum.

Bu çalışmada, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının öğrencilerin cebirsel düşüncelerine yönelik fark etme becerilerinin incelenmesi amaçlanmaktadır.

Araştırmaya yön veren alt problemler şunlardır:

- 1) Ortaokul matematik öğretmeni adayları, öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerine ne düzeyde dikkat etmektedirler?
- 2) Ortaokul matematik öğretmeni adayları, öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerini ne düzeyde yorumlamaktadırlar?
- 3) Ortaokul matematik öğretmeni adayları, öğrencilerin cebirsel düşünceleri ile ilgili problem çözümlerine ne düzeyde dönüt vermektedirler?

Veri toplama aracı olarak kullanılması düşünülen sorular aşağıda yer almaktadır. Veri toplama sürecinde öğretmen adayları ile yapılacak görüşmelerde öğretmen adaylarına sorulacak olan sorular için, her bir soru ve her bir öğrencinin çözümü aşağıda verilen örnekte gibi ayrı ayrı kağıtlarda yer alacak şekilde hazırlanmıştır. Her soru için 2 doğru ve 2 yanlış cevap bulunmaktadır. Sorular, sizin genel bir bakış açısıyla görmeniz ve yorumlarınızı daha rahat belirtebilmeniz için fazla sayfa olmaması bakımından her bir soru ve öğrenci çözümleri kendi içinde tek tablo olarak paylaşılmıştır. Öğretmen adayları ile yapılacak olan görüşmenin örnek formatı aşağıdaki gibidir.

Senaryo 1: $20 - 12 + 8 - 4 = ?$ işleminin sonucunu öğrendiğiniz toplama ve çıkarma işlemlerinin özelliklerini kullanarak bulunuz.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned} 20 - 12 + 8 - 4 \\ = 20 - 8 + 12 - 4 \\ = 12 + 8 \\ = 20 \end{aligned}$$

Yukarıda verilen problemi ve problem çözümünü inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Problemin çözümünde hangi kısımlar dikkatinizi çekmiştir? Çözüm doğru mudur? Bu problem çözümünün nasıl yapıldığını (kullanılan strateji, düşünme biçimi, yapılan açıklamalar vb.) ayrıntılı bir şekilde açıklayınız.
2. Problem çözümünden hareketle bu çözümü yapan öğrencinin konuya ilişkin kavrayışı hakkında ne düşünüyorsunuz? Başka bir ifadeyle öğrenci matematiksel olarak neleri doğru anlamıştır ve hangi kısımlarda kavram karmaşasına sahip olabilir? Açıklayınız.
3. Bu şekilde çözüm yapan bir öğrencinin öğretmeni siz olsaydınız, öğrenciye nasıl dönüt verirdiniz? Ne tür sorular/ problemler sorardınız? Bu yeni problemlerle neyi amaçladığınızı açıklayınız.

Ek-4. Katılım formu

Sayın Katılımcımız,

Katılacağınız bu yüksek lisans tez çalışması, “*Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebirsel Düşünme ile İlgili Fark Etme Becerilerinin İncelenmesi*” adıyla, Leyla DEDE tarafından 2022-2023 güz yarıyılında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Çalışmaya katılım, tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çalışma sırasında sizden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmeyecek ve çalışmada gerçek isimlerinize yer verilmeyecektir. Sizlerle, çalışma verilerini toplamak amacıyla yarı yapılandırılmış bir görüşme yapılacak olup vereceğiniz cevaplar hem kendinizi daha rahat ifade edebilmeniz açısından hem de anlaşılabilirliği güçlendirmek adına ses kaydına alınacaktır ve gerekli görülen yerlerde yazılı cevaplarınız alınacaktır. Çalışma içerisinde kullanılması planlanan cevaplar ise takma isimler verilerek örnek gösterilecektir. Tutulan ses kayıtları ve vereceğiniz cevaplar yalnızca bu çalışma içerisinde kullanılacak ve yalnızca çalışmanın araştırmacıları tarafından değerlendirilecektir.

Çalışmada her bir katılımcı ile bireysel görüşme yapılacak olup tahmini 6 oturumun gerçekleşmesi planlanmaktadır. Oturum zamanları araştırmacı ve katılımcının müsaitlik durumuna göre ortak belirlenecektir. Katılımı onaylanmanız durumunda oturumların tümüne eksiksiz katılmanız önemle rica olunur. Yapılan görüşmelerde ihtiyaca yönelik molalar verilecektir. Görüşmeler, kişisel rahatsızlık verecek soruları ve durumları içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden dolayı rahatsız hissederseniz cevaplama işini yarıda bırakabilirsiniz.

Katılımı onaylamadan önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra şahsıma telefon veya e-posta yoluyla ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımla,

Araştırmacı: Leyla DEDE

İletişim Bilgileri:

Telefon:-----

e-posta:-----

Yukarıda bilgileri bulunan araştırmaya katılmayı kabul ediyorum.

20/12/2022

İmza: -----

Katılımcı Adı-Soyadı: -----

ETİK KURUL KARARI



T.C.

RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER ETİK KURULU

DEĞERLENDİRME RAPORU

Toplantı Tarihi : 11/01/2023
Toplantı K. Sayısı : 2023/015

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitimi Enstitüsü Öğrencisi Leyla DEDE'nin "Matematik Öğretmeni Adaylarının Cebirsel Düşünme İle İlgili Fark Etme Becerilerinin İncelenmesi" isimli projesi kapsamında yürütülecek çalışmalar için izin talebi kurulumuzca değerlendirilmiş olup;

- ☒ Etik açıdan uygun bulunmuştur.
- ☐ Etik açıdan uygun bulunmamıştır.
- ☐ Etik açıdan önerilen değişikliklerin yapılmasıyla uygun bulunmuştur.

Prof. Dr. Nebi GÜMÜŞ

Başkan