

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI**

**MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ TÜREV KAVRAMINI
ANLAMALARI VE YAPTIKLARI HATALAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gökay AÇIKYILDIZ

TRABZON

Ocak, 2013

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI**

**MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ TÜREV KAVRAMINI
ANLAMALARI VE YAPTIKLARI HATALAR**

Gökay AÇIKYILDIZ

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nce Yüksek
Lisans Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

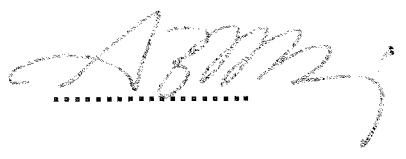
**Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Tuba GÖKÇEK**

**TRABZON
Ocak, 2013**

KTÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

**Bu çalışma jürimiz tarafından İlköğretim Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS
tezi olarak kabul edilmiştir. 23 / 01 / 2013**

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Tuba GÖKÇEK 

Üye : Prof. Dr. Adnan BAKİ 

Üye : Doç. Dr. Selahattin ARSLAN 

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Haluk ÖZMEN
Enstitü Müdürü

BİLDİRİM

Tezimin içerdiki yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı ve bu tezi KTÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsünden başka bir bilim kuruluşuna akademik gaye ve unvan almak amacıyla vermediğimi; tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ediyorum.

Gökay AÇIKYILDIZ

23/01/2013

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, matematik öğretmeni adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamaları ve karşılaştıkları zorluklar ortaya koymak amaçlanmıştır. Bu amaçla sırasıyla türev-limit, türev-değişim oranı ve türev-teğet/eğim ilişkine yönelik hazırlanan sorulara öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar analiz edilmiştir. Yapılan klinik mülakatlarla da verdikleri yanlış veya doğru cevapların nedenleri irdelenmiştir. Elde edilen bulgu ve sonuçlar ilgili bölümlerde sunulmuştur.

Yüksek lisans tezim boyunca danışmanlığımı üstlenen, araştırma konumun şekillenmesinde ve diğer aşamalarında desteklerini aldığım, sürekli olarak bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Tuba GÖKÇEK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ders alma ve tez hazırlama sürecinde görüş ve önerilerinden faydalandığım değerli hocalarım Prof. Dr. Adnan BAKİ, Doç. Dr. Selahattin ARSLAN, Doç. Dr. Bülent GÜVEN ve Yrd. Doç. Dr. Gönül GÜNEŞ'e teşekkürlerimi sunarım.

Tezin çeşitli aşamalarında görüş ve düşüncelerinden yararlandığım, çalışma ile ilgili olarak eksik noktaları görmemde ve bunları gidermemde, bana büyük katkıda bulunan hocam Yrd. Doç. Dr. Derya ÇELİK'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışmanın örneklemini oluşturan Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği öğrencilerine ilgi ve yardımlarından dolayı teşekkür ediyorum.

Lisansüstü eğitim süresince beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, sevgilerini, ilgilerini, desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen sevgili annem Bilginur AÇIKYILDIZ'a, sevgili babam Atilla AÇIKYILDIZ'a ve sevgili kardeşlerime çok teşekkür ederim.

Ocak, 2013
Gökay AÇIKYILDIZ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
ABSTRACT	VIII
TABLolar LİSTESİ.....	IX
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	XI
KISALTMALAR LİSTESİ.....	XIV
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Araştırmanın Gerekçesi.....	2
1.2. Araştırmanın Problemi.....	5
1.3. Araştırmanın Amacı.....	6
1.4. Araştırmanın Önemi	6
1.5. Araştırmanın Varsayımları	7
1.6. Araştırmanın Sınırlıkları	7
2. LİTERATÜR TARAMASI.....	8
2.1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi	8
2.1.1. Türev Kavramı	8
2.1.1.1. Türev ve Teğet İlişkisi.....	9
2.1.1.2. Türev ve Değişim Oranı İlişkisi	10
2.1.1.3. Türev ve Limit İlişkisi	11
2.1.2. Öğretmenin Bilgisi.....	13
2.1.3. Türev Kavramına Yönelik Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar	15
2.1.4. Türev Kavramına Yönelik Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar	20
2.2. Literatür Taramasının Sonucu	25
3. YÖNTEM	27
3.1. Araştırmanın Yöntemi.....	27
3.2. Araştırmanın Tasarımı ve Yürütülmesi	27
3.3. Çalışma Grubu	28
3.4. Veri Toplama Araçları.....	28
3.4.1. Yazılı Sınavlar.....	29

3.4.2. Klinik Mülakatlar	30
3.5. Verilerin Analizi.....	31
3.5.1. Yazılı Sınavların Analizi	31
3.5.2. Klinik Mülakatların Analizi	32
4. BULGULAR.....	33
4.1. Türev-Limit İlişkisine Yönelik Bulgular	33
4.2. Türev-Değişim Oranı İlişkisine Yönelik Bulgular	61
4.3. Türev-Teğet İlişkisine Yönelik Bulgular	86
5. TARTIŞMA	108
5.1. Türev-Limit İlişkisine Yönelik Tartışma	108
5.2. Türev-Değişim Oranı İlişkisine Yönelik Tartışma	110
5.3. Türev-Teğet/Eğim İlişkisine Yönelik Tartışma	114
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	119
6.1. Sonuçlar	119
6.2. Öneriler	122
6.2.1. Araştırma Sonuçlarına Dayalı Öneriler	122
6.2.2. İleride Yapılacak Araştırmalara Yönelik Öneriler	123
7. KAYNAKLAR	124
8. EKLER	129
9. ÖZ GEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ.....	136

ÖZET

Matematik Öğretmeni Adaylarının Türev Kavramını Anlamaları ve Yaptıkları Hatalar

Bu araştırmanın amacı, matematik öğretmeni adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarını ve bu kavramı anlama sürecinde karşılaştıkları zorlukları ortaya koymak şeklinde belirlenmiştir. Türev kavram olarak limit, değişim oranı ve teğet/eğim kavramları ile yakından ilişkilidir ve bu kavramlar kullanılarak tanımlanmaktadır. Bu sebeple bu araştırmada öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamaları ortaya koyulurken türev ile limit, türev ile değişim oranı ve türev ile teğet/eğim arasındaki ilişkiler dikkate alınmıştır.

Araştırma bir özel durum çalışmasıdır. Bir devlet üniversitesinde ortaöğretim fen ve matematik alanları eğitimi bölümü matematik öğretmenliği programına devam eden 45 öğretmen adayı çalışma grubunu oluşturmaktadır. Araştırma kapsamında veriler birer hafta ara ile uygulanan 3 yazılı sınav (1. yazılı sınav türev ve limit ilişkisine; 2. yazılı sınav türev ve değişim oranı ilişkisine; 3. yazılı sınav türev ve teğet/eğim ilişkisine odaklanan sorulardan oluşmaktadır) ve 6 öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlardan elde edilmiştir. Yazılı sınavlardan elde edilen veriler öncelikle “tam doğru yanıt”, “kısmen doğru yanıt”, “yanlış yanıt” ve “yanıt yok” şeklinde dört temel kategoride sınıflandırılmış ve her kategoriye düşen cevaplar frekans ve yüzdelere ifade edilmiştir. Ayrıca öğretmen adayları tarafından verilen yanlış cevaplar kendi içinde benzerlik ve farklılıklarına göre gruplandırılmıştır. Bu şekilde öğretmen adayları tarafından üretilen yanlış tipleri ortaya konmuştur. Öğretmen adaylarını doğru ve yanlış cevaplara götüren fikirleri ortaya koymak için yürütülen klinik mülakatlardan elde edilen veriler ise benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflandırılmıştır.

Yapılan çalışma öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili olarak yüzeysel anlamaya sahip olduklarını göstermektedir. Anlamaları daha çok kavrama ilişkin tanımlarla sınırlı olan öğretmen adaylarının, tanımların içeriklerini tam olarak özümsemediği ortaya çıkmıştır. Bu nedenle türev–limit, türev–değişim oranı ve türev–teğet/eğim kavramları arasındaki ilişkileri yorumlamaya çalışırken zorlandıkları ve bu ilişkilerin niteliği hakkında çok fazla fikirleri olmadığı tespit edilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının cebirsel formda bir noktada türev kavramını yorumlamada, grafiksel ve tablo gösterimlerine oranla daha başarılı oldukları ortaya çıkmıştır.

Anahtar Kelimeler: Türev Kavramı, Öğretmen Adayı, Anlama, Hatalar

ABSTRACT

Mathematics Candidate Teachers' Understanding of Derivative Concept and Their Mistakes

The aim of this study was determined as stating Mathematics candidate teachers' understanding of derivative concept and difficulties they encounter within the process of understanding the concept. Derivative concept is closely related to limit, rate of change and tangent/slope concepts and it is defined with the help of these concepts. Accordingly this study concerned relations between derivative and limit, derivative and rate of change and finally derivative and tangent/slope while describing Mathematics candidate teachers' understanding of derivative concept.

The research is a case-study. The working group was composed of 45 candidate teachers registered to Mathematics Education program in Secondary Schools Science& Mathematics Field Education Department in a state-owned university. The data of the study were gathered with: 3 written exams applied with a week in between (1st focused on relation between derivative and limit; 2nd focused on relation between derivative and rate of change; and 3rd one focused on relation between derivative and tangent/slope) and clinical interviews conducted with 6 candidate teachers. First, the data coming from examinations were grouped in four basic categories as; "fully right answer", "partially right answer", "wrong answer" and "no answer". The rate of each type of answer which fell in the groups was expressed with frequency and percentile. In addition, the wrong answers given by the candidate teachers were also grouped with respect to their similarities and differences, which stated the mistake types committed by the candidate teachers. In order to state opinions directing candidate teachers to right answers and wrong answers, the data coming from clinical interviews were categorized based on their similarities.

The study conducted showed that candidate teachers have superficial knowledge about derivative concept. Since candidate teachers, whose understanding were mainly restricted to definitions, they could not fully consolidate the content of definitions. Therefore they had difficulties in interpreting relations between derivative-limit, derivative-rate of change and derivative-tangent/slope. It was also determined that they hardly had opinions about the attribution of these relations. As another piece of finding, the research came up with that candidate teachers were more successful the interpretation of derivate concept in algebraic form rather than graphical and table representations.

Key Words: Derivative concept, Candidate teacher, Understanding, Mistakes

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo No	Tablo Adı	Sayfa No
1.	Birinci yazılı sınavdaki soruların amaçları.....	29
2.	İkinci yazılı sınavdaki soruların amaçları	29
3.	Üçüncü yazılı sınavdaki soruların amaçları	30
4.	Öğretmen adaylarının 1. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	33
5.	Öğretmen adaylarının 1. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	37
6.	Öğretmen adaylarının 2. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	40
7.	Öğretmen adaylarının 2. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	44
8.	Öğretmen adaylarının 3. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	46
9.	Öğretmen adaylarının 4. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	48
10.	Öğretmen adaylarının 4. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	52
11.	Öğretmen adaylarının 5. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	55
12.	Öğretmen adaylarının 5. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	58
13.	Öğretmen adaylarının değişim oranı 1a sorusuna verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	62
14.	Öğretmen adaylarının 1a sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	65
15.	Öğretmen adaylarının 1b sorusuna verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	68
16.	Öğretmen adaylarının 1b sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	70
17.	Öğretmen adaylarının 2a sorusuna verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	71

Tablo No	Tablo Adı	Sayfa No
18.	Öğretmen adaylarının 2a sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	73
19.	Öğretmen adaylarının 2b sorusuna verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	75
20.	Öğretmen adaylarının 2b sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	76
21.	Öğretmen adaylarının 3a sorusuna verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	79
22.	Öğretmen adaylarının 3a sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	82
23.	Öğretmen adaylarının 3b sorusuna verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	82
24.	Öğretmen adaylarının 3b sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	85
25.	Öğretmen adaylarının 1. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	86
26.	Öğretmen adaylarının 1. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	89
27.	Öğretmen adaylarının 2. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	91
28.	Öğretmen adaylarının 2. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	93
29.	Öğretmen adaylarının 3. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	94
30.	Öğretmen adaylarının 3. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	96
31.	Öğretmen adaylarının 4. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	98
32.	Öğretmen adaylarının 2. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	100
33.	Öğretmen adaylarının 5. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri	102
34.	Öğretmen adaylarının 5. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması.....	105

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil No	Şekil Adı	Sayfa No
1.	Bir eğriye teğet olma fikri ile bir çembere teğet olma fikrinin birbirinden farklılaştığı durumlara örnekler	9
2.	$y=f(x)$ eğrisinin $P(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetinin eğimi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	10
3.	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ f 'nin $[x_0, x_0 + \Delta x]$ aralığındaki ortalama değişim oranıdır	11
4.	43Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	34
5.	10Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	34
6.	37Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	34
7.	1Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	35
8.	9Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	36
9.	15Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	36
10.	8Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	37
11.	43Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	40
12.	45Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	41
13.	41Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	41
14.	20Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	42
15.	24Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	47
16.	44Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	47
17.	37Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	49
18.	17Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	50
19.	16Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	51
20.	37Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	55
21.	26Ö kodlu öğretmen adayının cevabı	56

Şekil No	Şekil Adı	Sayfa No
22.	28Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	57
23.	16Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	58
24.	26Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	62
25.	27Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	63
26.	16Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	64
27.	42Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	64
28.	26Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	68
29.	24Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	69
30.	10Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	70
31.	30Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	72
32.	21Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	73
33.	30Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	79
34.	34Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	80
35.	19Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	81
36.	43Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	83
37.	37Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	83
38.	33Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	84
39.	38Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	84
40.	28Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	87
41.	29Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	87
42.	18Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	88
43.	41Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	88
44.	2Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	89
45.	8Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	92
46.	26Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	92
47.	43Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	93
48.	31Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	93

<u>Şekil No</u>	<u>Şekil Adı</u>	<u>Sayfa No</u>
49.	29Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	95
50.	7Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	96
51.	24Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	99
52.	29Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	99
53.	39Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	100
54.	29Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	102
55.	32Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	104
56.	7Ö kodlu öğretmen adayının cevabı.....	105

KISALTMALAR LİSTESİ

A	: Araştırmacı
APOS	: Action-Process-Object-Schema
BCS	: Bilgisayar Cebiri Sistemleri
MEB	: Milli Eğitim Bakanlığı
ÖSYM	: Öğrenci Seçme Yerleştirme Merkezi
1Ö...-45Ö	: Öğretmen Adayları

1. GİRİŞ

Analiz tıpkı aritmetik, cebir ve geometri gibi matematiğin temel çalışma alanlarından biridir. Matematik terimleri sözlüğünde analiz (calculus) “fonksiyonların diferansiyeli, integrali ve bunlarla ilgili kavramlar ve uygulamalarla uğraşan matematik dalı, diferansiyel ve integral hesap” şeklinde tanımlanmaktadır (Hacısalıhoğlu ve diğerleri, 2000, s. 205). Bu haliyle türev daha genel haliyle diferansiyel hesap ve integral kavramları analiz için temel teşkil oluşturmaktadır. Diğer taraftan bu kavramları tanımlamada kullanılan limit ve süreklilik kavramları da analizin diğer önemli kavramları arasında yer almaktadır.

Matematik, fen bilimleri ve mühendislik alanlarında çok önemli bir yere sahip olan analiz kavramları ileri düzey matematiğin başlangıç noktasıdır (Ubuz, 1999). Dolayısıyla ileri düzey matematik konularının tam anlamıyla anlaşılabilir olması açısından analiz kavramları temel teşkil etmektedir. Çalışılması ve anlaşılması üst düzey düşünme becerileri gerektiren analiz konuları, Türkiye’de olduğu gibi birçok ülkede de ortaöğretim matematik programlarının önemli bir kısmını oluşturmaktadır (Bingölbalı, 2008; Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2011). Üniversite giriş sınavlarında özellikle fen bilimleri ve matematik ile ilgili alanlarda tercih yapacak öğrenciler için analiz konu ve kavramları anahtar niteliktedir. Ayrıca başta matematik olmak üzere fen bilimleri ve mühendislik alanlarında öğrenim görecektik üniversite öğrencileri için de önemli bir yere sahiptir. Bu çalışmada, sadece matematiğin kendi içinde değil, fen bilimleri ve mühendislikle ilgili alanlar için de öğrenilmesi ve öğretilmesi büyük öneme sahip analiz kavramlarından türev kavramı ele alınacaktır.

Analizin birçok bilim dalı için önemli bir konu olması nedeniyle öğrencilerin analiz kavramlarını anlamaları üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Çünkü öğrencilerin belli bir kavramla ilgili olarak sahip olduğu anlamaları, hata ve kavram yanlışlarını ortaya koymak önemlidir. Öğrencilerin yaptıkları hatalar ve sahip oldukları kavram yanlışları sadece o konuyu öğrenmelerinde engel oluşturmaz, onların sonraki öğrenmelerini de etkiler (Baki, 2008). Özellikle matematik gibi ardışık ve yığılmalı bir bilim dalında herhangi bir kavram onun önkoşulu olan kavramlar kazandırılmadan verilmemelidir. Bu açıdan ileri matematik konuları için temel teşkil eden analiz kavramlarının öğrenciler tarafından öğrenilmiş olması önemlidir. Literatürde öğrencilerin (ortaöğretim veya üniversite) türev kavramı ile ilgili anlamalarına odaklanan çalışmalarda yürütülmüştür (Orton, 1983; Amit ve Vinner, 1990; White ve Mitchelmore, 1996; Bezuidenhout, 1998; Pinzka 1999; Pustejovsky, 1999; Hauger, 2000; Aspinwall ve Miller 2001; Ubuz, 2001; Duru, 2006; Gür ve Barak, 2007;

Hacıömeroğlu, 2007; Park, 2011). Yapılan çalışmalar öğrencilerin türev kavramı ile ilgili birçok hata ve kavram yanılgısına sahip olduklarını ortaya koymuştur.

Öğrencilerin belli bir matematiksel konuda öğrenme eksikliklerinin farkında olup, bunları düzeltecek yönde tedbirler alma görevi öğretmene aittir. Öğretmenin bu görevi tam olarak yerine getirebilmesindeki öncelikli faktörlerden biri öğretmenin bilgisidir. Alan bilgisi etkili öğrenme-öğretme ortamı hazırlamak açısından tek başına yeterli olmamakla birlikte, böyle bir ortamın hazırlanması için gereken temel bileşenlerden biridir. Gerçekten de yapılan araştırmalar öğretmenin matematiksel bilgisinin, eğitim ve öğretim ile ilgili aldığı kararları etkilediğini ortaya koymuştur (Stein, Baxter ve Leinhardt, 1990; Fennema ve Franke, 1992; Bütün, 2012). Bu bağlamda bu çalışmada geleceğin öğretmeni olan öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili alan bilgisine odaklanılacaktır.

1.1. Araştırmanın Gerekçesi

Analiz denince akla limit, süreklilik, türev ve integral şeklinde dört temel kavram gelmektedir. Bu kavramlar sadece matematiğin kendi içinde değil, fen bilimleri ve mühendislikle ilgili alanlar için de çok büyük bir öneme sahiptir. Örneğin matematik ile birlikte birçok konu alanında karşılaşılan türev kavramı fizikte hız ve ivme, kimyada reaksiyon hızı, ekonomide marjinal gelir ve marjinal fiyat kavramlarını açıklamada kullanılmaktadır (Balcı, 2000). Ortaöğretim matematik programlarında, bunun bir sonucu olarak üniversiteye giriş sınavlarında önemli bir yere sahip olan ve yüksek matematik konuları için olduğu kadar, gerçek yaşam durumları için de temel nitelikte analiz kavramlarından biri olan türev bu çalışmanın odağında yer almaktadır.

Türev, ortaöğretim 12. sınıf matematik dersi öğretim programının bölümlerinde biridir. Bu bölüm “Türev” ve “Türevin Uygulamaları” adı altında iki alt bölümden ve toplam 14 kazanımdan oluşmaktadır (MEB, 2011)

Türev kavramı cebirsel olarak bağımsız değişkene verilen artmanın fonksiyonda meydana getireceği değişikliğin, değişkendeki artmaya oranının limit durumu olarak tanımlanmaktadır (Balcı, 2000). Tanım dikkatlice incelendiğinde bu kavramın bağımlı değişkendeki değişimin (bağımsız değişkene bağlı olarak) bağımsız değişkendeki değişime oranı ve limit kavramı yardımı ile tanımlandığı anlaşılmaktadır. Dolayısıyla fonksiyon, değişim oranı ve limit kavramı türev kavramının anlaşılır olması açısından önemlidir (Zandieh, 2000). Diğer taraftan ders kitaplarında çok sıklıkla karşılaşılan ve genellikle “Türevin Geometrik Yorumu” başlığı altında verilen bir diğer tanımı da genel olarak “bir fonksiyonun grafiğe belirli bir noktadan çizilen teğetin eğimi” şeklindedir. Sonuç olarak türev kavramı bir bütün olarak limit, değişim oranı ve teğet/eğim kavramlarını da içermektedir. Türevin tam anlamıyla anlaşılabilir olması tüm bu kavramlar ve birbiri ile

ilişkilerinin anlaşılabilir olmasına bağlıdır. Bu yüzden türev kavramına odaklanan bu çalışmada türevin limit, değişim oranı ve teğet/eğim ile ilişkisi ele alınacaktır.

Öğrencilerin hatalarından, özellikle sistemli bir şekilde ürettikleri hatalardan haberdar olmak öğretmenler açısından önemlidir. Bu hatalar bazen dikkatsizliğin bir ürünü olabileceği gibi bazen de öğrencilerin öğrenme eksiklikleri ve kavram yanlışlarının habercisi olabilir (Baki, 2008). Bu hata ve yanlışlar eğer düzeltilmezse öğrencilerin diğer matematik konularında yapacağı başka hata ve yanlışların sebebi olacaktır. Matematik gibi birikimli bir bilim dalı için bu kaçınılmaz bir sonuçtur. Öğrencilerin matematikte herhangi bir kavram özel olarak türev kavramı ile ilgili hata ve kavram yanlışlarından haberdar olmak, öğretmenlerin öğrencilerinin muhtemel eksikliklerini dikkate alarak bir öğretim ortamı hazırlaması açısından çok önemli ve gereklidir. Ulusal ve uluslararası literatür incelendiğinde farklı sınıf seviyelerinde ve matematiğin farklı konularında öğrencilerin yaptığı hata ve kavram yanlışlarının tespitine yönelik birçok çalışmanın yapıldığı görülmektedir. Bu bağlamda türev kavramı ile ilgili öğrencilerin anlamalarını ortaya koyma amaçlı lise ve üniversite öğrencileri üzerinde yürütülmüş çalışmalara da rastlanılmaktadır (Orton, 1983; Amit ve Vinner, 1990; White ve Mitchelmore, 1996; Bezuidenhout, 1998; Pinzka 1999; Pustejovsky, 1999; Hauger, 2000; Ubuz, 2001; Aspinwall ve Miller 2001; Duru, 2006; Gür ve Barak, 2007; Hacıömeroğlu, 2007; Park, 2011). Bu çalışmaların çoğunluğu üniversite 1. sınıf öğrencilerinin analiz kavramları ile ilgili anlamalarına odaklanmaktadır (Orton, 1983; Pinzka 1999; Pustejovsky, 1999; Ubuz, 2001; Aspinwall ve Miller, 2001; Duru, 2006; Hacıömeroğlu, 2007; Park, 2011).

Türev kavramı limit yardımı ile tanımlanmıştır. Yani limit, türev için öncül kavramlardan biridir. Yapılan araştırmalar öğrencilerin limit kavramını anlamada ve anlamlaştırmada zorlandıklarını ve kavram yanlışlarına sahip olduklarını göstermektedir (Bingölbali, 2008). Buradan hareketle öğrencilerin türev kavramını da anlamlandırma da güçlüklerle sahip olabileceği çıkarımını yapmak zor olmayacaktır. Orton (1983) 16-22 yaş arası 110 İngiliz öğrenci ile yaptığı çalışma sonrasında, öğrencilerin en fazla türev ve limit arasındaki ilişkiyi kullanmasını gerektiren sorularda zorluk çektiklerini belirlemiştir. Benzer şekilde Gür ve Barak (2007) da 11. sınıf öğrencileri yürüttükleri çalışma kapsamında öğrencilerin türevin limite dayanan tanımını anlayamadıklarını sonucuna ulaşmıştır.

Bir noktadaki türev fonksiyona o noktadan çizilen teğetin eğimini vermektedir. Bu her ne kadar kolay anlaşılabilir bir tanım olarak görünse de yapılan çalışmalar öğrencilerin bu tanımı uygun olmayan şekillerde kullandıklarını ve yanlış anlamlar yüklediğini ortaya koymaktadır (Amit ve Vinner, 1990; Aspinwall ve Miller, 2001; Ubuz, 2001). Amit ve Vinner (1990)'in bir öğrenci üzerinde yürüttükleri çalışmalarında, öğrenci "bir noktadaki türev bir grafiğe belirli bir noktadan çizilen teğetin eğimi" şeklinde tanımlamış olmasına

rağmen teğet doğrusunun denklemini fonksiyonun o noktadaki türevi gibi kullanmışlardır. Amit ve Vinner'e göre öğrenci türev ve teğet arasındaki bu ilişkiyi anlamlaştırmadan ezberleme yoluna gitmiştir. Herhangi bir anlam olmaksızın yapılan ezberleme işlemi sonrasında tanım için hayati öneme sahip bazı kelimeler öğrenciler tarafından kullanılmamakta (türev, fonksiyonun bir noktasından çizilen teğettir gibi) ve tanımı uygun olmayan bir şekilde belleklerine yerleştirmektedirler.

Bir fonksiyona belli bir noktadan çizilen teğetin eğimi yani o noktadaki türevi, aynı zamanda o noktadaki anlık değişim oranını vermektedir. Ancak yapılan çalışmalar öğrencilerin bu fikri anlamada ciddi zorluklara sahip olduğunu ortaya koymaktadır. Orton (1983) türev ve değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi incelediği çalışmasında; öğrencilerin bir fonksiyon üzerindeki bir noktada değişim oranı fikrini ve fonksiyon üzerindeki her noktanın farklı bir değişim oranına sahip olabileceği fikrini anlamakta güçlük çektiklerini bulmuştur. Orton ayrıca öğrencilerin ortalama değişim oranı ile bir noktadaki değişim oranı arasındaki farkı ayırt etmede ve bir noktadaki değişim oranının o noktadaki türevi verdiğini anlamakta zorlandıklarını ortaya koymuştur. Yapılan araştırmalar öğrencilerin değişim oranı kavramı ile ilgili zorluklarını ortaya koymakta ve öğrencilerin türevin bir değişim oranı olduğunun farkında olmadıklarını göstermektedir (White ve Mitchelmore, 1996; Bezuidenhout, 1998; Hauger, 2000). Sonuç olarak öğrencilerin türev kavramı ile ilgili birçok hata ve kavram yanılgısına sahip oldukları söylenebilir.

Öğrencilerin belli bir matematiksel konuda öğrenme eksikliklerinin farkında olup, bunların oluşmasını engelleyecek veya oluşmuşsa düzeltecek yönde tedbirler alma görevi öğretmene aittir. Öğretmenin bu görevi tam olarak yerine getirebilmesindeki öncelikli faktörlerden biri öğretmenin bilgisidir. Öğretmenin bilgisinin sınıf içerisindeki eğitim-öğretim faaliyetlerinin planlanması, uygulanması, değerlendirilmesi sürecinde aktif rol oynadığı bilinen bir gerçektir. Bu anlamda öğretimin niteliği belirleyen, dolayısıyla öğrencinin öğrenmesi üzerindeki en önemli etkenlerden biri öğretmenin bilgisidir (Shulman, 1986; Fennema ve Franke, 1992). Öğretmenin bilgisi ve bileşenleri üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Shulman (1986) genel olarak öğretmenin bilgisini birbiri ile ilişkili üç kategoride incelemektedir. Bunlar alan bilgisi (subject-matter knowledge), alanı öğretme bilgisi (pedagogical content knowledge), müfredat bilgisi (curriculum knowledge) şeklindedir. Fennema ve Franke (1992) ise daha özel olarak matematik öğretmenin bilgisinin ana bileşenlerini; alan bilgisi, öğrenci bilgisi, matematiksel temsil etme bilgisi ve pedagojik bilgi şeklinde sınıflandırmıştır. Türkiye'de Milli Eğitim Bakanlığı tarafından yürütülen ortaöğretim öğretmenleri özel alan yeterliliklerini belirlemeye yönelik çalışma kapsamında, matematik öğretmenlerinin özel alan yeterlilikleri tanımlanmıştır (URL-1,

2012). Buna göre yeterlilik alanları; alan bilgisi, alan eğitimi bilgisi, tutum ve değerler, mesleki gelişim ve matematik kültürünü destekleme şekilde oluşturulmuştur.

Bu sınıflandırmaların hepsinde öğretmenin alan bilgisinin öncelikli olarak yer aldığı görülmektedir. Alan bilgisi etkili öğrenme-öğretme ortamı hazırlamak açısından tek başına yeterli olmamakla birlikte, böyle bir ortamın hazırlanması için gereken temel bileşenlerden biridir. Gerçekten de yapılan araştırmalar öğretmenin matematiksel bilgisinin, eğitim ve öğretim ile ilgili aldığı kararları etkilediğini ortaya koymuştur (Stein, Baxter ve Leinhardt, 1990; Fennema ve Franke, 1992; Lloyd ve Wilson, 1998; Van Dooren, Verschaffel ve Onghena, 2002). Stein, Baxter ve Leinhardt (1990) öğretmenin sahip olduğu bilgi zenginliğinin, matematiksel anlamayı geliştirmeye yönelik alt yapı oluşturma becerilerini etkilediğini ifade etmektedir. Onlar, zayıf içerik bilgisine sahip öğretmenlerin genelde kurallara dayalı bir öğretim yaptıklarını ve bu şekilde ancak yapısal yönden zayıf anlamalara sahip öğrenciler yetiştirebileceklerini vurgulamaktadırlar. Buradan hareketle, güçlü anlamalara sahip bireyler yetiştirmek için bu bireyleri yetiştirmede önemli rol oynayan öğretmenlerin daha güçlü anlamalara sahip olması gerektiği sonucuna ulaşmak zor olmayacaktır. Bu bakış açısı altında yarının öğretmeni, bugünün öğretmen adaylarının analizin önemli kavramlarından biri olan türev ile ilgili anlamalarının ve varsa eksikliklerinin ortaya konulması gerekmektedir.

1.2. Araştırmanın Problemi

Öğretmen veya öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarını ortaya koymaya çalışan araştırmalar, öğrenciler üzerinde yürütülenlere kıyasla çok daha azdır (Doğan, Sulak ve Cihangir, 2002; Akkaya, 2009; İşleyen ve Akgün, 2010; Park, 2011). Doğan, Sulak ve Cihangir (2002) çalışmasını ilköğretim matematik öğretmeni adayları üzerinde yürütmüştür. Ancak çalışmalarını yürüttükleri öğretmen adayları matematik öğretmenliği programına yeni kayıt yaptırmış öğrencilerdir. Zaten çalışmanın amacı da lisedeki öğrenmeleri değerlendirmektir. Akkaya (2009) çalışmasında öğretmen adaylarının Teknolojik Pedagogik Alan Bilgisi “öğrenci zorlukları” bileşeninde gelişimlerini incelemiştir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının alan bilgisine odaklanılacaktır. İşleyen ve Akgün’ün (2010) çalışmalarında ise matematik öğretmen adaylarının türev ve diferansiyel kavramlarıyla ilgili anlama seviyeleri ve bu kavramlar arasındaki farklılıkları incelemiştir. Bu çalışmada farklı olarak türev kavramı ile tanım olarak içinde barındırdığı limit, değişim oranı ve teğet kavramları arasındaki ilişkiye odaklanılacaktır. Park (2011) araştırmasında analiz dersi veren öğretim elemanları ile öğrencilerinin, türev kavramını ve fonksiyon-türev fonksiyonu-bir noktadaki türev kavramları arasındaki ilişkiyi nasıl tanımladıklarını araştırmıştır. Yürütülen çalışmada yalnızca öğretmen adayı boyutu ele alınıp türev

kavramı teğet, limit ve değişim oranı arasındaki ilişkilere aynı anda derinlemesine odaklanılması düşünülmüştür.

Çalışmanın ana problemi; “öğretmen adayları türev kavramını nasıl anlamakta ve bu süreçte ne tür zorluklarla karşılaşmaktadır?” şeklinde belirlenmiştir. Bu ana problem doğrultusunda alt problemler;

1. Öğretmen adaylarının türev-limit arasındaki ilişkiye yönelik anlamaları ve karşılaştıkları zorluklar nelerdir?
2. Öğretmen adaylarının türev-değişim oranı arasındaki ilişkiye yönelik anlamaları ve karşılaştıkları zorluklar nelerdir?
3. Öğretmen adaylarının türev-teğet arasındaki ilişkiye yönelik anlamaları ve karşılaştıkları zorluklar nelerdir?

1.3. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarını ve bu kavramı anlama sürecinde karşılaştıkları zorlukları ortaya koymak şeklinde belirlenmiştir.

1.4. Araştırmanın Önemi

Öğrencilerin öğrenmelerinde öğretim programı, öğretim materyalleri, öğrenci özellikleri, ortam, öğretmen özellikleri gibi birçok faktör etkili olmaktadır. Ancak öğretmen bunlar arasında en etkili faktörlerden biridir. Çünkü öğretmen öğretim programının uygulayıcısı, öğretim materyallerinin belirleyicisi, öğrenme ortamını hazırlayan kişidir. Bu bağlamda soyut olan matematik kavramlarıyla ilgili olarak güçlü anlamalara sahip bireyler yetiştirmede öğretmenlerin sahip olduğu rolün önemi ortaya çıkmaktadır. Tüm matematik konu ve kavramlarında olduğu gibi ileri düzey matematik konularına temel teşkil eden türev kavramı için de aynı şey söz konusudur.

Literatür incelendiğinde yapılan çalışmaların daha çok öğrenciler üzerinde yürütüldüğü ve öğrencilerin türev kavramı ile ilgili birçok güçlüğe sahip olduğu görülmektedir. Bu güçlüğün sebeplerinden biri kavramın kendisi olabilir. Diğer bir sebep ise yapılan öğretimle ilişkili olabilir. Öğretimi tasarlayan ve uygulayan kişi öğretmendir. Burada öğretim becerileri olduğu kadar öğretmenin bu kavramla ilgili doğru ve derin anlamaları etkili bir öğretim ortamı açısından gereklidir. Dolayısıyla görevde olan öğretmenlerin veya öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili sahip olduğu anlamaların ortaya konulması önemlidir. Bu çalışmada öğretmen adaylarına odaklanılacaktır. Çalışmadan elde edilecek sonuçlar hizmet öncesi öğretmen eğitimi programları için

değerli veriler sunacaktır. Ayrıca bu çalışmadan elde edilen sonuçlar öğrencilerin sahip olduğu güçlüklerin sebeplerinin ortaya koyulmasında öğretmen faktörünün yerini göstermesi açısından önemlidir.

1.5. Araştırmanın Varsayımları

Bu araştırmada veriler 45 öğretmen adayına uygulanan bir yazılı yoklama ve 6 öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlardan elde edilmiştir. Öğretmen adaylarının yazılı yoklama ve klinik mülakatlarda gerçek anlamda bildiklerini doğru bir şekilde yansıttıkları varsayımında bulunulmuştur.

1.6. Araştırmanın Sınırlıkları

Bu araştırma bir devlet üniversitesinin ortaöğretim matematik öğretmenliği programına devam eden 45 öğretmen adayı ve bu adayların yazılı yoklama ve mülakatlara verdikleri cevaplar ile sınırlıdır.

2. LİTERATÜR TARAMASI

Bu bölümde sırasıyla “Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi” ve “Literatür Taramasının Sonucu” başlıklarına yer verilmiştir.

2.1. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi

Bu başlık altında sırasıyla “Türev Kavramı”, öğretmenin bilgisine yönelik çalışmaların yer aldığı “Öğretmenin Bilgisi”, türev kavramı ile ilgili yurt içinde ve dışında yapılan çalışmaların sunulduğu “Türev Kavramına Yönelik Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar” ve “Türev Kavramına Yönelik Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar” başlıklarına yer verilmiştir.

2.1.1. Türev Kavramı

Kavramlar üzerine araştırma yapan birçok araştırmacı, bireylerin belli bir kavramla ilgili sahip olduğu anlamaların ve zihinsel görüntülerin söz konusu kavramın farklı gösterim şekillerini de içerdiğini ifade etmektedir (Tall ve Vinner, 1981; Zandieh, 2000). Aslında bireyin bir kavramla ilgili anlamalarının derinliği, farklı içeriklerde kavramın sahip olduğu anlamların farkında olması ile yakından ilişkilidir.

Zandieh (2000) türev kavramını tanımlamaya yönelik iki temel bileşene sahip bir çatı geliştirmiştir. Farklı içeriklerde kavramın sahip olduğu anlamların, kavramı özümseme sürecindeki öneminden hareketle Zandieh’in çatısındaki temel bileşeninden ilki kavramın sunulduğu içeriktir. Zandieh (2000)’e göre türev kavramını;

1. Farkların oranının limiti olarak sembolik biçimde
2. Eğriye bir noktasından çizilen teğetin eğimi olarak grafiksel biçimde
3. Anlık değişim oranı olarak sözel biçimde

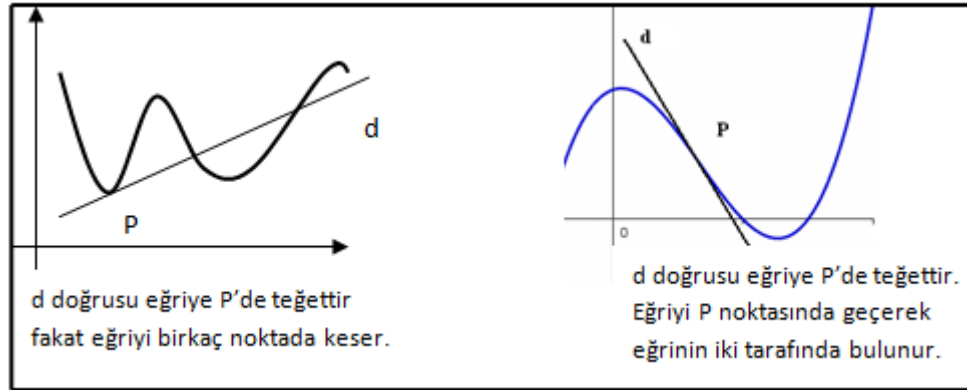
üç farklı içerikte tanımlamak mümkündür.

Zandieh (2000)’in çatısındaki ikinci temel bileşeni ise bu kavramın yapılandırılmasında çok önemli yere sahip üç öncül kavram (oran, limit ve fonksiyon) oluşturmaktadır. Her bir içerikte türev kavramının tanımlanabilmesi için bu öncül kavramlara ihtiyaç vardır. Bundan sonraki kısımda türev kavramı bu üç farklı içerikte ve üç öncül kavram dikkate alınarak ele alınacaktır.

2.1.1.1. Türev ve Teğet İlişkisi

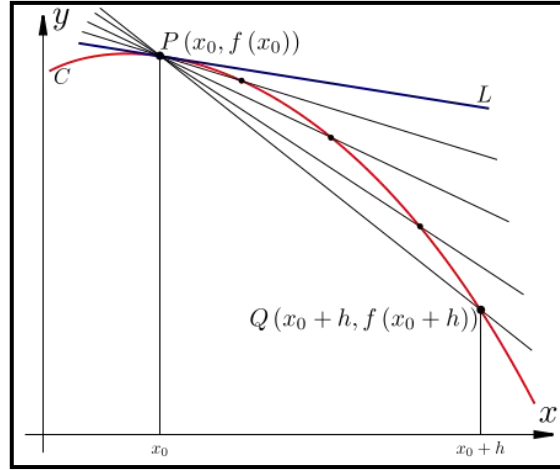
Çemberler için teğet kavramı oldukça açıktır ve ortaokul yıllarından itibaren öğrenciler “çembere teğet olan doğrular” fikri ile karşılaşmaktadır (MEB, 2009; MEB, 2011). Fakat bir d doğrusunun genel anlamda bir eğriye teğet olması, d doğrusunun çembere teğet olması durumundan farklı özellikler göstermektedir. O merkezli çembere P noktasında teğet olan bir d doğrusu için;

1. d doğrusu P 'den, P ile çemberin O merkezini birleştiren doğruya dik geçer,
2. d doğrusu çemberin tek bir noktasından yani P 'den geçer,
3. d doğrusu P 'den geçer ve çemberin sadece bir tarafında bulunur (Thomas, Weir, Hass ve Giordano, 2005) önermeleri doğru iken herhangi bir eğri için bu ifadeler her zaman doğru olmak zorunda değildir. Çoğu eğrinin bir merkezi yoktur ve eğriye teğet olarak tanımlanan doğrular eğriyi başka noktalarda kesebileceği gibi teğet noktasında da kesebilir (Thomas ve diğerleri, 2005). Bir eğriye teğet doğrular ile ilgili ifade edilen durumlar Şekil 1'de örneklendirilmiştir.



Şekil 1. Bir eğriye teğet olma fikri ile bir çembere teğet olma fikrinin birbirinden farklılaştığı durumlara örnekler

Genel anlamda bir eğriye teğet kavramını tanımlamak için, teğet noktasından (P) ve eğri üzerindeki bir başka nokta olan, giderek P 'ye yaklaşan Q noktasından geçen kırımların eğimlerinin dikkate alınacağı dinamik bir yaklaşıma ihtiyaç vardır (Thomas ve diğerleri, 2005; Caferov, 2012). Ancak bu şekilde Q eğri üzerinde P 'ye yaklaşırken kırımların eğimlerinin limiti (eğer varsa) P noktasındaki teğetin eğimi olarak kavranabilir.

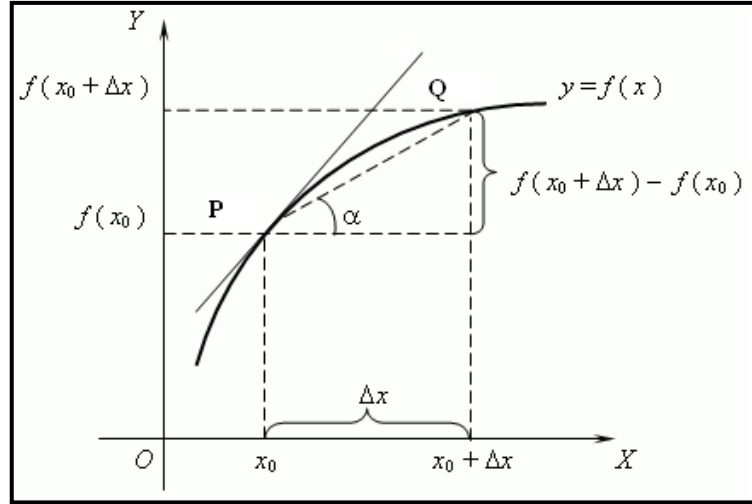


Şekil 2. $y=f(x)$ eğrisinin $P(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetinin eğimi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Bir fonksiyonun belli bir noktadaki türevi, fonksiyonun grafiğine o noktadan çizilen teğetin eğimini vermektedir. Türev ve teğet /eğim ilişkisini ortaya koyan bu tanım her ne kadar kolay anlaşılabilir olarak görünse de yapılan çalışmalar öğrencilerin bu tanımı uygun olmayan şekillerde kullandıkları ve yanlış anlamlar yüklediğini ortaya koymaktadır (Amit ve Vinner, 1990; Aspinwall ve Miller, 2001; Ubuz, 2001). Birçok öğrenci teğet doğrusunun denklemiyle, bir noktadaki türevi veya türev fonksiyonunu aynı şey olarak düşünmektedir (Bingölbalı, 2008).

2.1.1.2. Türev ve Değişim Oranı İlişkisi

Herhangi bir $y=f(x)$ fonksiyonu için y 'nin $[x_1, x_2]$ aralığında x 'e bağlı ortalama değişim oranı $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, ($x_2 \neq x_1$) şeklinde hesaplanmaktadır (Thomas ve diğerleri, 2005). Geometrik olarak f 'nin $[x_1, x_2]$ aralığındaki ortalama değişim oranı $P(x_1, f(x_1))$ ve $Q(x_2, f(x_2))$ noktalarından geçen doğrunun yani kirişin eğimi ile aynıdır.



Şekil 3. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ f 'nin $[x_0, x_0 + \Delta x]$ aralığındaki ortalama değişim oranıdır.

$y=f(x)$ için x_0 'a Δx kadar artma verildiğinde $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ifadesi f 'nin x_0 noktasındaki artması, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ifadesi de f 'nin $[x_0, x_0 + \Delta x]$ aralığındaki ortalama değişim oranı adını alır. Δx giderek 0'a yaklaştıkça yani aralığın boyu küçüldükçe, nihayet limit durumunda (eğer varsa) elde edilen değer f 'nin x_0 noktasındaki anlık değişim oranı olacaktır (Thomas ve diğerleri, 2005; Caferov, 2012). Sembolik olarak $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ cebirsel ifadesi $x=x_0$ noktasında f 'nin x 'e göre değişim oranını verecektir (Thomas ve diğerleri, 2005; Caferov, 2012). f 'nin x 'e göre değişim oranı sembolik olarak $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ile temsil edilmektedir ki bu aynı zamanda geometrik olarak P noktasından geçen teğetin eğimini vermektedir. Bu noktada temel nitelikteki sorulardan biri, öğrencilerin bir fonksiyonun belli bir noktadaki teğetinin eğiminin aynı zamanda fonksiyonun o noktadaki anlık değişimini verdiği fikrine gerçekte sahip olup olmadığıdır. Yapılan çalışmalar öğrencilerin bu fikri anlamada ciddi zorluklara sahip olduğunu ortaya koymaktadır (Orton, 1983; White ve Mitchelmore, 1996; Bezuidenhout, 1998; Hauger, 2000).

2.1.1.3. Türev ve Limit İlişkisi

Bağımlı değişkendeki değişimin, bağımsız değişkendeki değişime oranı olarak ifade edilen farkların oranı $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ türev ve teğet ilişkisinin anlatıldığı kısımda eğri üzerindeki iki

noktadan geçen kirişin eğimini, türev ve değişim oranı ilişkisinin anlatıldığı kısımda ise ortalama değişim oranını belirlemek için kullanılmıştır. Farkların oranının limiti ($\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$)

ise sırasıyla “bir eğriye belli bir noktadan çizilen teğetin eğimi” ve “bir fonksiyonun belli bir noktadaki değişim oranı” olarak tanımlanmıştır. Farkların oranı sembolik olarak genellikle;

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ (} \Delta x, x_0 \text{ ' a verilen artma miktarını göstermektedir) veya}$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ (} h, x_0 \text{ ' a verilen artma miktarını göstermektedir) eşdeğer}$$

formlarından biri ile ifade edilir. Bu oran limit kullanılarak;

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ veya}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ şeklinde ifade edilir. Bu ifade bir } f \text{ fonksiyonunun } x_0$$

noktasındaki türev değerini vermektedir. Bu limit alma işi f nin tanım kümesindeki her nokta için tekrarlandığı düşünüldüğünde ise türev fonksiyonu fikrine ulaşılmaktadır.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Bir noktada türev ile türev fonksiyonu birbirinden çok farklı kavramlardır. Genel anlamda bir noktada türev, türev fonksiyonunun söz konusu noktada aldığı değerdir. Bu çalışma kapsamında ağırlıklı olarak bir noktada türev kavramı üzerinde durulacaktır. Her iki kavramı da tanımlarken limit kullanılmaktadır. Limit kavramı türevin doğasında vardır ve limit olmaksızın türev kavramını anlamak söz konusu değildir (Bingölbalı, 2008). Ancak limit kavramı kullanılarak, kirişlerin eğiminden teğetin eğimine ve ortalama değişim oranından hareketle anlık değişim oranına ulaşmak mümkündür (Bingölbalı, 2008). Yani limit, türev için öncül kavramlardan biridir. Yapılan araştırmalar öğrencilerin limit kavramını anlamada ve anlamlaştırmada zorlandıklarını ve kavram yanılgılarına sahip olduklarını göstermektedir (Bingölbalı, 2008). Buradan hareketle öğrencilerin türev kavramını da anlamlandırma da güçlüklerle sahip olabileceği çıkarımını yapmak zor olmayacaktır.

2.1.2. Öğretmenin Bilgisi

Öğretmen bilgisi öğrenci başarısını etkileyen en önemli faktörlerden biri olarak tanımlanmaktadır. Literatürde öğretmen bilgisini tanımlamaya yönelik birçok çalışma yapılmıştır. Bu alanda ilklerden biri olması ve birçok çalışmaya esin kaynağı olması açısından Shulman'ın (1986; 1987) çalışması önemlidir. Shulman (1986) genel olarak öğretmenin bilgisini birbiri ile ilişkili üç kategoride tanımlamaktadır. Bunlar aşağıdaki şekilde sıralanmıştır;

Alan Bilgisi: Konu alanı ile ilgili temel kavramlar, işlemler ve bunlar arasındaki ilişkileri içerir.

Alan Eğitimi Bilgisi: Konu alanını öğrenciler için anlaşılır bir hale getirmek için gerekli tüm bilgi ve yöntemleri içerir. Öğrencilerin ilgili kavramlarla ilgili yanlışları ve zorluklarını bilmeyi de içerir.

Müfredat Bilgisi: Konuların öğretimine yönelik tüm ders materyalleri (öğretim programı, ders kitabı, somut materyaller, yazılımlar,... gibi) bilgisini içermektedir.

Shulman (1987) daha sonra öğretmenin bilgisini yedi alt bileşende daha ayrıntılı bir şekilde tanımlamış ve ele almıştır. Bunlar; alan bilgisi, genel eğitim bilgisi, alan eğitimi bilgisi, müfredat bilgisi, eğitimsel bağlamlar bilgisi, eğitimsel amaçlar ve değerler ile bunların felsefi ve tarihsel temelleri ile ilgili bilgisidir.

Fennema ve Franke (1992) daha özel olarak matematik öğretmenlerinin bilgisi üzerine yaptıkları çalışmayı Shulman'ın teorik çatısı üzerine kurmuşlardır. Araştırmacılar öğretmenin bilgisini matematik bilgisi, matematiksel temsil bilgisi, öğrenci bilgisi ve son olarak öğretim ve karar verme bilgisi şeklinde sınıflandırmıştır. "Matematik Bilgisi" bileşeni Shulman'ın çalışmasındaki alan bilgisi kapsamında düşünülebilir. Bu bileşen matematik konuları ile ilgili kavramsal anlamaya vurgu yapan bir bileşendir. Fennema ve Franke (1992)'ye göre öğretmenin matematik ile ilgili kavramsal anlamaya sahip olması sınıf uygulamalarını olumlu yönde etkilemektedir. Bu yüzden öğretmenin matematik bilgisine sahip olması son derece önemlidir. Matematiksel temsil bilgisi ve öğrenci bilgisi öğrenme ortamlarının oluşturulmasında işe koşulan diğer iki önemli bilgidir. Öğretmenin bilgisinin son bileşeni "Öğretim ve Karar Verme Bilgisi" Shulman'ın çalışmasındaki alanı öğretme bilgisi ile ilişkilidir. Fennema ve Franke (1992)'ye göre öğretmenin sahip olduğu bilgi, inançlar ve değerler eğitim-öğretim faaliyetlerinin planlanması ve uygulanması esnasında aldıkları kararları etkilemektedir. Bu şekilde Fennema ve Franke (1992), inançları öğretmenin alanı öğretme bilgisini etkileyen bir faktör olarak tanımlamıştır.

Baki (2010) öğretmenin sahip olması gereken bilgiyi temelde "Alan Bilgisi", "Alanı Öğretme Bilgisi" ve "Genel Kültür" olarak üç ayrı başlıkta ele almıştır. Alanı öğretme bilgisinin kapsamını; öğreteceği müfredatı bilme, müfredatın öğrenme alanlarını bilme ve

ilişkilendirme, alt öğrenme alanlarının kazanımlarını bilme, öğrencinin nasıl anladığını bilme, konuya özgü öğrencinin mevcut işlemsel ve kavramsal bilgisini bilme, konuya özgü özel öğretim yöntemlerini bilme, konuya özgü materyal tasarlayabilme, konuya özgü öğrenme etkinliklerini düzenleyebilme, öğrencinin öğrenmelerini ölçme ve değerlendirme şeklinde ayrıntılandırmıştır.

Anlaşıldığı üzere literatürde öğretmenin bilgisi üzerine farklı modeller ortaya atılmakta, araştırmacılar mevcut modellerin geçerliliğini kontrol etme veya yenilerini geliştirmeye devam etmektedirler. Burada önemli olan öğretmenin bilgisinin çok boyutlu olduğunun farkında olmak ve alan bilgisi özel olarak matematik bilgisinin sunulan her modelde bu boyutlardan birini temsil ettiğini görebilmektir.

Öğretmenlik meslek bilgisine yönelik olarak son yıllarda Türkiye’de Milli Eğitim Bakanlığı bünyesinde de çalışmalar yapılmakta, bu bağlamda öğretmenlik meslek yeterlilikleri ortaya konmaya çalışılmaktadır. Milli Eğitim Bakanlığı “Temel Eğitime Destek Programı” kapsamında öğretmen yeterliliklerinin belirlenmesi görevini yine MEB bünyesindeki Öğretmen Yetiştirme ve Eğitimi Genel Müdürlüğüne vermiştir. Bu kapsamda öğretmenlik mesleği genel yeterlilikleri, ilköğretim ve ortaöğretim kademesinde görev yapan öğretmenlere yönelik özel alan yeterliliklerinin tanımlanmasına ilişkin çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmaların sonuçlarını içeren raporları ilgili birimin internet sayfasından (<http://otmg.meb.gov.tr/index.html>) indirmek mümkündür. Oluşturulan bu öğretmen yeterliliklerinin; öğretmen yetiştirme politikalarının belirlenmesinde, hizmet öncesi öğretmen yetiştirme programlarında, öğretmenlerin hizmet içi eğitiminde, öğretmenlerin seçiminde, öğretmenlerin iş başında performanslarının değerlendirilmesinde ve öğretmenlerin kendilerini tanıma ve kariyer gelişimlerinde kullanılması düşünülmektedir (URL-1, 2012). Öğretmenlik mesleği genel yeterlilikleri “Kişisel ve Mesleki Değerler-Mesleki Gelişim”, “Öğrenciyi Tanıma”, “Öğrenme ve Öğretme Süreci”, “Öğrenmeyi, Gelişimi İzleme ve Değerlendirme”, “Okul-Aile ve Toplum İlişkileri” ve “Program ve İçerik Bilgisi” şeklinde altı yeterlilik alanı şeklinde tanımlanmıştır. Ortaöğretim matematik öğretmeni özel alan yeterlilikleri ise dört temel yeterlilik alanı ve bunlara ilişkin alt yeterlilikler ve performans göstergeleri ile ifade edilmiştir. Aşağıda bu dört temel yeterlilik alanına ait tanımlamalara yer verilmiştir (URL-2, 2012);

Alan bilgisi: Ortaöğretim matematik öğretim programları (matematik ve geometri) ve ilgili matematik konularını, bu konuların tarihsel, kültürel ve bilimsel gelişimini, matematik konularının diğer disiplinler ve gerçek hayattaki uygulamaları bilgisi ve matematiksel süreçleri kapsamaktadır.

Alan eğitimi bilgisi: Matematik öğretim sürecini planlayıp uygulayabilme, matematik öğrenmeyi teşvik edici bir ortam oluşturabilme, matematik öğretiminde uygun kaynak,

materyal ve teknolojileri uygulama ve seçme, öğrenim sürecini izleme ve değerlendirmeyi kapsamaktadır.

Tutum ve değerler: Matematiğin doğası, matematiği öğrenme ve öğretme süreçlerine yönelik olumlu tutum ve değerleri kapsamaktadır.

Mesleki gelişim ve matematik kültürünü destekleme: Öğretmenin bilgi ve uygulama becerilerini geliştirme, öz değerlendirme yapabilme, toplumda matematik kültürünün gelişimine katkı sağlama, matematik eğitim ve kültürünü geliştirmek için işbirliği yapmayı kapsamaktadır.

Türkiye’de öğretmen yetiştirme ve eğitiminden sorumlu birimin hazırlattığı matematiğe özel alan yeterlilikleri içerisinde de alan bilgisi ilk sırada yer almaktadır.

Alan bilgisi etkili bir öğretim ortamı hazırlamak için tek başına yeterli olmamakla birlikte böyle bir ortamın hazırlanma sürecindeki temel bileşenlerden biri olduğu açıktır. Yapılan araştırmalarda öğretmenin matematik bilgisinin sınıf dışı-içi öğretim pratikleri ile ilgili kararlar üzerinde etkili olduğunu ortaya koymaktadır (Stein, Baxter ve Leinhardt, 1990; Van Dooren, Verschaffel ve Onghena, 2002). Stein, Baxter ve Leinhardt (1990) zayıf içerik bilgisine sahip öğretmenlerin genelde kurallara dayalı bir öğretim yaptıklarını ortaya koymuştur. Van Dooren, Verschaffel ve Onghena (2002) matematik öğretmeni adayları üzerinde yürüttükleri çalışma sonucunda öğretmen adaylarının kendi matematik bilgi, anlama ve tercihleri doğrultusunda öğrencilerin çalışmalarını değerlendirdiklerini belirlemiştir. Sonuç olarak öğretmenin bilgisinin temel bileşenlerinden biri olan matematik bilgisi matematik öğrenme-öğretme etkinliklerinin planlanması, sınıf içinde uygulanması ve değerlendirilmesi sürecinde alınan kararlarda oldukça etkili olduğu söylenebilir. Bu nedenle, bu çalışmada öğretmen adaylarının matematik bilgisine odaklanılmıştır.

2.1.3. Türev Kavramına Yönelik Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar

Bu başlık altında türev kavramı ile ilgili olarak ulusal literatürde yer alan çalışmalar tarih sırası dikkate alınarak sunulacaktır.

Serhan (2000), araştırmasında grafik hesap makinelerinin kullanımının öğrencilerin bir noktada türev kavramını anlamaları üzerine etkilerini araştırmıştır. Ayrıca grafik hesap makinelerinin öğrencilerin bir noktadaki türevle ilgili uygun bir kavram görüntüsü kurmalarına yardım edip etmediği de incelenmiştir. İki üniversiteden 24’ ü deney grubu, 47’si kontrol grubu olmak üzere 71 öğrenciyle yapılan araştırmada deney grubu öğrencilerinin grafik hesap makinesi kullanmalarına izin verilmiştir. Her iki sınıftaki öğrenciler ön-test ve daha sonra son-test uygulanarak çalışmanın sonunda bütün öğrencilere kavram haritaları çizilmiştir. Buna ek olarak 6’sı kontrol ve 5’i deney grubundan 11 öğrenci ile araştırmacı tarafından birebir mülakat yapılmıştır. Verilerden

elde edilen sonuçlar iki sınıf arasındaki önemli bir farkı ortaya koymuştur. Deney grubundaki öğrencilerin normal eğitim alan sınıftaki öğrencilere oranla bir noktadaki türevi çok daha iyi anlamışlardır. Araştırmada sonuç olarak analiz kavramı öğretiminde çoklu temsillere daha çok yer verilmesine ve farklı temsiller arasındaki bağlantıların göz ardı edilmemesi gerektiği sonucuna varılmıştır.

Ubuz (2001) İngiltere’de mühendislik fakültesi birinci sınıf öğrencilerinin analiz dersindeki hata ve kavram yanılgılarını belirlemeye yönelik bir çalışma yapmıştır. Bu çalışma kapsamında öğrencilerin analiz dersinde yaptıkları hataları; şekillerin kavramların yerine konulması, tanımların içeriklerinin anlaşılabilmesi, aynı kapsam ve çerçevede sıklıkla karşılaşılan kavramların ayırt edilememesi, grafiksel bilgileri kullanmadaki zorluklar, bilinmeyen bilme eğilimi, dar ve sınırlı bakış açısı, özel bir durumun uygun olmayan bir şekilde genellenmesi, bir sözcüğün bir başka sözcük ile uygun olmayan bağlantısı şeklinde sınıflamıştır. Çalışma sonunda Ubuz, öğrencilerin analizi zayıf kavramsal imgeler üzerine kurulan algoritmik düzeyde öğrendikleri ve çoklu temsiller arasındaki geçişte sıkıntı yaşadıkları sonucuna ulaşmıştır. Türkiye’de daha geniş ve farklı örneklemelerde, farklı konularda bu alanda çalışmalara ihtiyaç olduğunu vurgulamıştır.

Doğan, Sulak ve Cihangir (2002) ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin özel fonksiyonlar, fonksiyonlarda limit ve fonksiyonlarda türev ve uygulamaları konularında yeterliliklerini tespit etmek amacıyla bir araştırma yürütmüşlerdir. Araştırmada önceki yıllarda ÖSYM tarafından üniversitelere öğrenci yerleştirmek için yapılan sınavlarda sorulan sorulardan yararlanılarak 18 soruluk bir test hazırlanmıştır. Bu test İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalına kayıt yaptıran 189 öğrenciye güz yarıyılıının ilk dersinde uygulanmıştır. Çalışmadan elde edilen sonuçlara göre öğrenciler türev ve uygulamaları ile ilgili sorulara verdikleri doğru cevapların ortalaması % 6’dır. Öğrencilerin büyük bir kısmı soruları boş bırakma yönünde bir eğilim göstermiştir. Araştırmacılar öğrencilerin lisede öğrenmeleri gereken konuları tam olarak öğrenemedikleri için üniversite programlarının aksadığını belirtmiştir.

Duru (2006), üniversite öğrencilerinin bir fonksiyonla onun türevi ve bir fonksiyonun sürekliliği ile türevlenebilmesi arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaştıkları zorluklar araştırılmıştır. Bu bağlamda üniversite 1. sınıfta öğrenim gören 52 öğrenci ile karşılaştıkları zorlukları belirlemek için özel durum çalışmasını araştırma modeli yapılmıştır. Araştırmada ki veriler; fonksiyon ve türevle ilgili işlemsel beceri testi, bir fonksiyonla onun türevi, süreklilik ve türevlenebilme arasındaki ilişkiyi anlamayla ilgili bilgi testi, bir fonksiyonla onun türevi arasındaki ilişkiyi anlama testi, süreklilik ve türevlenebilme arasındaki ilişkiyi anlama testi ve mülakatlardan elde edilmiştir. Araştırmanın sonucunda bir fonksiyonla onun türevi ve süreklilik ile türevlenebilme

arasındaki ilişkiyi anlamada öğrencilerin bir takım zorluklara sahip olduğu görülmüştür. Derslerde mümkün olduğunca fazla yöntem uygulanması, gerek fonksiyon ve türev kavramlarının çoklu gösterimleri arasındaki ilişkinin gerekse bir fonksiyonla türevi arasındaki ilişkinin daha iyi anlaşılması için hazırlanmış animasyon ve oyunların kullanılması, öğrencilerin çalışma alışkanlıklarını gününe gün olarak düzenlemeye çalışması yönünde önerilerde bulunulmuştur.

Yıldız (2006) çalışmasında, yüksek matematiğin temelini oluşturan analizin türev konusu ile ilgili dünyanın çeşitli yerlerinden “Ask Dr. Math” adlı uluslararası internet sitesindeki sorular ve bunlara verilen cevaplar hakkında öğrencilerin ve öğretim elemanlarının görüşlerini almıştır. Bunun için “Ask Dr. Math” sitesine sorulan sorulardan 12 tanesi seçilerek dikkatlice yazılmış ve belirli bir sıraya konulmuştur. Araştırmada toplanan veriler “içerik analizi” tekniğiyle analiz edilmiştir. Araştırma sonunda elde edilen bulguların matematik öğretimi ve öğrenimi için rehber niteliğinde olması hedeflenmiş, türev öğretimi ve öğrenimine farklı bir bakış açısı getireceği beklenmiştir. Ayrıca öğretmen ve öğretim elemanlarının araştırmada sunulan konulara ve önerilere dikkat çekmeleri durumunda öğrencilerin kavramsal olarak anlamaları ve kalıcı öğrenmelerinin sağlanabileceği ifade edilmiştir.

Gür ve Barak (2007), çalışmalarında öğrencilerin türev konusundaki hata ve yanlışlıklarını bulmayı ve hangi alanlarda kavram yanlışlarına sahip olduklarını belirlemeyi amaçlamışlardır. Bunu için “Öğrenci Seçme Sınavından” 7 soru seçilmiş ve açık uçlu sorular haline getirilmiştir. Lisede yapılan araştırmanın sonuçları tanımlanmış ve tartışılmıştır. Araştırma soruları 2005-2006 eğitim öğretim yılının güz yarısında Balıkesir Fatma Emin Kutvar Anadolu Lisesinde 53 öğrenciye uygulanmıştır. Araştırmanın bulguları öğrencilerin limite bağlı türev tanımını anlamadıklarını, trigonometrik ve bileşke fonksiyonlarda hatalar yaptıklarını ve bir eğrinin tanjantının eğimi ile normalinin eğimi arasında yanlış ilişkiler kurduklarını göstermiştir. Araştırmacılar öğretmenlerin, öğrencilerin çözümlerindeki hata ve kavram yanlışlarını bulmaları gerektiğini ve kavram haritaları, türev hakkında çalışma kâğıtları gibi anlamlı öğrenme stratejilerini uygulamalarının gerekliliğini önermiştir.

Aksoy (2007), bu araştırmanın amacı, Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin (BCS), Üniversite birinci sınıf “Genel Matematik” dersindeki türev kavramının öğretiminde öğrencilerin akademik başarı, kavramsal anlama, işlemsel beceri ve problem çözme becerileri üzerindeki etkisini incelemektir. Araştırma için seçilen üniversite birinci sınıfını öğrencileri genel matematik konularına yönelik hazır bulunuşlukları, matematiğe yönelik ön tutumları ve cinsiyet bakımından birbirine denk seviyede olacak şekilde sınıf iki gruba ayrılarak deney grubu ve kontrol grubu oluşturulmuştur. Deney grubunda 22 öğrenci,

kontrol grubunda 21 öğrenci yer almıştır. BCS'nin etkisini gözlemlemek amacıyla deney grubuna yapılandırmacı yaklaşıma dayalı BCS (Maple) destekli öğretim yapılırken kontrol grubuna sadece yapılandırmacı yaklaşıma dayalı öğretim yapılmıştır. 5 haftalık (30 ders saati) uygulama sonucunda son test ve son tutum ölçekleri uygulanmıştır. Elde edilen nicel veriler uygun parametrik ve parametrik olmayan istatistik testleri ile analiz edilerek yorumlanmış ve aşağıdaki sonuçlar tespit edilmiştir. Son test sonuçları genel olarak değerlendirildiğinde deney grubundaki öğrencilerin kontrol grubundakilerden istatistiksel olarak daha başarılı olduğu ortaya çıkmıştır. BCS desteğinin öğrencilerin kavramsal anlamalarına olumlu yönde katkı sağladığı bu araştırmanın sonucu olarak ortaya çıkmıştır.

Hacıömeroğlu (2007) araştırmasında üç katılımcısının analizdeki türev grafikleriyle ilgili olarak zihinsel görüntülerini, temsillerini ve anlamak için kullandıkları metotları tanımlayan durumlar geliştirmiştir. İncelenen iki araştırma sorusu : (1) Analiz öğrencilerinin türev grafiklerinin anlamalarının doğası nedir? (2) Analiz öğrencileri türev grafikleriyle ilgili nasıl anlam çıkarırlar? Araştırma üç katılımcıyla gerçekleştirilmiştir ve araştırmada, katılımcıların bilgileri fazlasıyla bir matematiksel işlemle ilişkili ve zayıf bir şekilde diğer matematiksel işlemlerle ilişkili olduğundan, onların bir temsil üzerindeki tek taraflı düşüncelerinin veya kendilerine aşırı güvenlerinin türev grafiklerini anlamalarına engel olduğu bulunmuştur.

Akkaya (2009) çalışmasında öğretmen adaylarının Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi “öğrenci zorlukları” bileşeninde gelişimlerini incelemiştir. Hazırlanan eğitimler 2008- 2009 eğitim öğretim yılında, Matematik Öğretmenliği bölümünde öğrenim gören, Seçmeli Ilve Özel Öğretim Yöntemleri II dersine katılan 40 öğretmen adayına verilmiştir. Ayrıca bu çalışmada belirtilen öğretmen adaylarından mikro öğretim yapan beş öğretmen adayının gelişimleri derinlemesine ortaya konulmuştur. Araştırma sonucunda elde edilen verilerin analizleri öğretmen adaylarının verilen eğitim sonucunda türev kavramına yönelik teknolojik pedagojik alan bilgisinin öğrenci zorlukları bileşeninde kayda değer bir gelişme elde ettiklerini ortaya çıkarmıştır. Ayrıca çalışmanın sonucunda, Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi kuramsal çerçevesinde hazırlanan çalıştaylardan özellikle fen ve matematik alanlarındaki öğretmen yetiştirme programlarının içeriğinin oluşturulmasında faydalanabileceği sonucuna varılmıştır.

İşleyen ve Akgün (2009), araştırmalarında matematik öğretmen adaylarının türev ve diferansiyel kavramlarıyla ilgili anlama seviyeleri ve bu kavramlar arasındaki farklılıklar incelenmiştir. Çalışmanın örneklemini Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde okuyan 76 matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Veriler, araştırmacılar tarafından hazırlanan türev ve diferansiyel kavramları arasındaki farkın anlaşılıp anlaşılmadığını belirleyebilecek açık uçlu sorulardan

oluşan bilgi testi ile toplanmıştır. Elde edilen veriler matematik öğretmen adaylarının türev ve diferansiyel kavramları arasındaki farklılıkları tam olarak anlayamadıklarını ve bu kavramları birbirleri yerine kullandıklarını göstermiştir.

Ergene (2011)'in çalışması Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi çerçevesinde matematik öğretmen adaylarına başarılı bir teknoloji entegrasyonu için ihtiyaç duyacakları bilginin kazandırılmasını hedefleyen bir program geliştirme amacıyla yapılan daha büyük bir projesinin parçasıdır. Ergene çalışmasında öğretmen adaylarının teknolojik pedagojik alan bilgilerinin “çoklu temsiller” bileşeninde gelişimlerini incelemektedir. Geliştirilen program çerçevesinde öğretmen adaylarına “çalıştay” olarak adlandırılan eğitimler verilmiştir. Araştırmanın örneklemi, 2009-2010 Eğitim-Öğretim yılında Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Eğitimi bölümüne devam eden, “Özel Öğretim Yöntemleri II” ve “Teknoloji Destekli Matematik Öğretimi” dersine katılan 41 kişilik 5. sınıf öğretmen adaylarından oluşmaktadır. Bu çalışmada 41 öğretmen adayının türev kavramına yönelik teknolojik pedagojik alan bilgileri çoklu temsiller bileşeninde ele alınmış ve 5 öğretmen adayının bireysel gelişimleri derinlemesine incelenmiştir. 41 öğretmen adayının gelişimi açık uçlu sorulardan oluşan Pedagojik Alan Bilgisi ve Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi anketleri, türev konusunda hazırladıkları ders planları ve detaylı ders notları analiz edilerek ortaya konmuştur. Derinlemesine incelenen 5 öğretmen adayının gelişimi ise yukarıdakilere ek olarak mülakatlar ve mikro-öğretim derslerinin videoları analiz edilerek incelenmiştir. Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi eğitimleri sonucunda elde edilen verilerin analizi, öğretmen adaylarının çoklu temsil bilgilerinin hem çoklu temsilleri kullanma hem de kullandıkları temsiller arasındaki bağlantıları kurma yönünde geliştiğini ve bu gelişimin teknolojinin devreye girmesiyle daha da belirginleştiğini ortaya koymaktadır.

Özgen (2011), araştırmasında yapılandırmacı öğrenme yaklaşımı kapsamında, öğrencilerin öğrenme stillerine uygun olarak öğrenme etkinlikleri geliştirmek ve etkinliklerle öğrenmenin öğrencilerin akademik başarılarına, matematiğe yönelik tutumlarına, etkinlik türlerine yönelik tercihlerine, öğrenme süreci ve ortamına yönelik görüşlerine etkilerini belirlemektir. Araştırma yarı deneysel bir çalışmadır ve kontrol gruplu ön test-son test modeline dayanmaktadır. Araştırmanın çalışma grubu, 2010-2011 eğitim-öğretim yılında İzmir ilindeki bir devlet lisesindeki öğrencilerden oluşmaktadır. Bu çalışmada fonksiyon ve türev kavramlarının öğrenimi sürecinde, yapılandırmacı öğrenme yaklaşımı kapsamında, McCarthy'nin 8 aşamalı 4MAT sistemi benimsenerek öğrencilerin öğrenme stillerine uygun öğrenme etkinlikleri geliştirme ve uygulama yoluna gidilmiştir. Kişisel bilgi formu, rutin olmayan problemler, öğrenme stilleri ölçeği, matematik tutum ölçeği, öğrenme etkinliklerine yönelik tercih ölçeği, öğrenci günlükleri ve görüşme formları gibi veri toplama

araçları ile nicel ve nitel veriler toplanmıştır. Nicel verilerin analizinde betimsel ve parametrik olmayan istatistiksel analizler kullanılmıştır. Nitel verilerde ise betimsel ve içerik analizi tekniklerine başvurulmuştur. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, deney grubu öğrencilerinin öğrencilerin öğrenme stillerine uygun etkinliklerle yapılan öğrenme sürecinin onların akademik başarılarını arttırmada ve problem çözme becerilerine olumlu katkılarının olduğu belirlenmiştir. Buna karşın, öğrencilerin matematiğe yönelik tutumları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunamamıştır. Uygulama sonunda her iki grupta da öğrencilerin öğrenme stillerine göre akademik başarı ve tutum düzeylerinin anlamlı olarak farklılaşmadığı görülmüştür. Öğrencilerin öğrenme etkinliği türlerine yönelik görüşlerinin genelde olumlu olduğu belirlenmiştir. Ayrıca, öğrencilerin öğrenme stillerine göre öğrenme etkinliklerine yönelik tercihlerinin anlamlı bir şekilde farklılaşmadığı saptanmıştır. Uygulanan öğrenme etkinliklerinin matematik dersinde öğrenmeye yönelik görüşlerine olumlu etkilerinin olduğu söylenebilir. Öğrencilerin uygulama öncesi görüşleri arasında bazı güçlüklerin, sıkıntıların var olduğu ve uygulama sonrasında da halen devam ettiği anlaşılmaktadır. Uygulama sonrasında ise deney grubu öğrencilerinin öğrenci odaklı ders, üst düzey bilişsel beceriler, uygulama, ilişkilendirme, bilgisayar destekli öğrenme ve grupla çalışmaya yönelik istek ve tercihi yönünde görüş bildirmişlerdir.

2.1.4. Türev Kavramına Yönelik Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar

Bu başlık altın türev kavramı ilke ilgili yurt dışında yürütülen çalışmalar tarih sırasına göre verilmiştir.

Orton (1983), araştırmasında öğrencilerin analiz kavramları ile ilgili anlamalarını incelemiştir. Yaşları 16 ve 22 arasında değişen 110 öğrenci ile klinik mülakatlar yapmıştır. Örneklemin tamamı 55 erkek ve 55 kızdandır oluşmaktadır. İlk mülakatta öğrencilere çoğunlukla limit, alan ve integral içeren sorular yöneltilmiş ikinci mülakatta ise değişim oranı, türev ve uygulamaları sorulmuştur. Sorulara verilen cevaplar 0 ile 4 arasında puanlama yapan bir ölçekle değerlendirilmiştir. Orton (1983) öğrencilerin en fazla türev ve limit arasındaki ilişkiyi kullanmasını gerektiren sorularda zorluk çektiklerini belirlemiştir. Türev ve değişim oranı kavramları ile ilgili olarak; öğrencilerin bir fonksiyon üzerindeki bir noktada değişim oranı fikrini ve fonksiyon üzerindeki her noktanın farklı bir değişim oranına sahip olabileceğini anlamakta güçlük çektiklerini bulmuştur. Orton (1983) ayrıca öğrencilerin ortalama değişim oranı ve bir noktadaki değişim oranı arasındaki farkı ayırt etmede ve bir noktadaki değişim oranının o noktadaki türevi verdiğini anlamakta zorlandıklarını ortaya koymuştur.

Amit ve Vinner (1990)'in bir öğrenci üzerinde yürüttükleri çalışmalarında, öğrenci “türev bir grafiğe belirli bir noktadan çizilen teğetin eğimi” şeklinde tanımlamış olmasına

rağmen teğet doğrusunun denklemini fonksiyonun o noktadaki türevi gibi kullanmıştır. Amit ve Vinner'e göre öğrenci türev ve teğet arasındaki bu ilişkiyi anlamlaştırmadan ezberleme yoluna gitmiştir. Herhangi bir anlam olmaksızın yapılan ezberleme işlemi sonrasında tanım için hayati önem sahip bazı kelimeler öğrenciler tarafından kullanılmamakta (türev, fonksiyonun bir noktasından çizilen teğettir gibi) ve tanımın uygun olmayan bir şekilde belleklerine yerleştirmektedirler.

Asiala, Cottrill ve Dubinsky (1997) çalışmalarında analiz dersi alan öğrencilerin bir fonksiyon ve onun türevinin grafiği ile ilgili anlamalarını araştırmıştır. Çalışmada ilk olarak bu anlamalar için gerekli bilişsel yapının teorik analizine yer verilmiştir. Öğrencilerin bu zihinsel yapıları oluşturmalarına yardım edecek öğretimsel tasarım yapılmıştır. Bu anlamda bu tasarımın uygulandığı deney sınıfı ve geleneksel şekilde analiz derslerinin yürütüldüğü kontrol sınıfından öğrencilerin performansları karşılaştırılmıştır. Çalışma daha önce en az iki dönem analiz dersleri alan 41 mühendislik, fen ve matematik öğrencileri üzerinde yürütülmüştür. Bu öğrencilerden 17'si deney grubunda, 24'ü ise kontrol grubundadır. Uygulamadan sonra yapılan mülakatlardan elde edilen bulgular tartışılmıştır. Öğrencilerin anlamaları APOS (action-process-object-schema) teorisine göre analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlar öğrenme ile ilgili teorik analize dayalı olarak hazırlanan derslere devam eden öğrencilerin geleneksel derse devam eden öğrencilere göre daha başarılı olduğunu ortaya koymuştur.

Bezuidenhout (1998) araştırmasında temel analizin kavramlarından biri olan değişim oranı üzerinde öğrencilerin anlamalarını araştırmıştır. Araştırmanın örneklemini Güney Afrika'daki üç üniversitenin analiz dersi alan 523 birinci sınıf fizik ve mühendislik öğrencisi oluşturmaktadır. Öğrencilerin değişim oranı ile ilgili düşüncelerini araştırmak amacıyla yapılan araştırmada yazılı testler ve klinik mülakatlar yoluyla veriler toplanmıştır. Yazılı testlerin tümüne cevap veren 15 öğrenci ile klinik mülakatlar yapılmıştır. Mülakatlara ve testlere verilen cevaplar analiz edildiğinde öğrencilerin değişim oranı ile ilgili kavram yanlışlarına sahip oldukları sonucu ortaya çıkmıştır. Aynı zamanda araştırma öğrencilerin değişim oranı kavramını anlamalarıyla ilgili sahip oldukları kavram yanlışlarını ve yaptıkları yaygın hataları tanımlamıştır.

Pinkza (1999), bu araştırmada üniversite analiz dersi alan öğrencilerin fonksiyon kavramını kavrayışları ile türev kavramını anlama ve uygulama yetenekleri arasındaki ilişki incelenmiştir. Nicel ve nitel yöntemlerin kullanıldığı karma araştırma yöntemi kullanılmıştır. Nicel olarak öğrencilerin fonksiyon ve türev hakkındaki işlemsel ve kavramsal bilgileri arasındaki ilişkinin gücü ve doğası belirlenmiş, nitel olarak ise öğrencilerin türevle ilgili kavram görüntüleri ve kavram hatalarıyla bağlantılı fonksiyon kavram görüntüleri ve kavram hataları incelenmiş ve bunun öğrencilerin türev kavramını uygulamalarını nasıl

etkilediği araştırılmıştır. Nicel bilgilerin toplanması için 37 birinci sınıf analiz öğrencisinin türevle ilgili bilgilerini ölçmek için iki ankete ve üç yazılı sınavına verdiği cevaplar kullanılmış ayrıca amaca yönelik örneklem için seçilen altı öğrenci ile özel durum çalışması yapılmıştır. Bu bilgiler öğrencilerin fonksiyon bilgileri ile türev bilgileri arasındaki ilişkinin varlığını ortaya koymuştur. Nitel verilerse öğrencilerin türev kavramını anlamalarının fonksiyonun geometrik kavram görüntüsü ve fonksiyonların grafiklerini anlama ve yorumlama yetenekleriyle bağlantılı olduğunu göstermiştir.

Pustejovsky (1999), bu çalışmada lise sonrası matematik eğitiminde türev konusu hakkındaki öğrencilerin düşüncelerini incelenmiştir. Çalışmada biri analizi öğrenme ve öğretmek diğeri de değişim oranını öğrenme ve öğretmek üzerine olmak üzere iki literatür araştırması yapılmıştır. Marquette Üniversitesinde her biri 20-30 kişilik sınıflardan türev konusundaki anlamalarının gelişimine göre seçilen üç öğrenci üzerinde durum çalışması modeli uygulanmış ve yazılı testler, mülakatlar ve açık uçlu sorularla veriler toplanmıştır. Araştırma yapılan öğrencilerin diğer öğrencilere oranla türev kavramını daha güçlü bir şekilde anladıkları sonucuna varılmıştır.

Krouse (2000) araştırmasında yazmanın lise öğrencilerinin türev kavramını öğrenmeleri üzerindeki etkilerini incelemiştir. Araştırmasını biri 19 diğeri 17 kişilik iki lise öğrenci grubu üzerinde yapmıştır. 19 kişilik öğrenci grubuna türev konusuna odaklı yazılı görev verilmiş, daha sonra bu öğrencilerin türev konusu ile ilgili anlama ve başarıları aynı öğretmen tarafından ders verilen ancak yazılı görev uygulanmayan diğer öğrenci grubuyla karşılaştırılmıştır. Araştırmada aynı zamanda öğretmenlerin, bu yazılı görevlerin etkilerini ve değerini kavrayışları incelenmiştir. Her iki gruptaki öğrencilerin başarıları sınıf içi sınav ve quizler aracılığıyla ölçülmüştür. Her bir gruptan dörder öğrenci ile klinik mülakatlar yapılarak bu mülakatlardan elde edilen veriler APOS teorisi kullanılarak, öğrencilerin türev konusuyla ilgili ortaya çıkan anlamalarını analiz etmede kullanılmıştır. Çalışma sonucunda yazılı görevlerin verildiği öğrencilerin en az nesne (object) seviyesine ulaştıkları, diğer gruptaki öğrencilerin ise nadiren süreç (process) seviyesine ulaştıkları görülmüştür.

Fisher (2001), araştırmasında öğrencilerin türev kavramını anlamalarını değerlendirmek için, açık uçlu yazılı sınavları (tasks) kullanımını, mülakat ve geleneksel sınavlarla karşılaştırmıştır. Araştırmanın verileri 13 öğrencinin 2 saatlik mülakatlara, 11 sınav ve 3 sınıf içi sınava verdiği cevaplar oluşturmaktadır. Araştırmanın teorik yapısı türevi, her biri nümerik, grafiksel, sembolik ve içeriksel olarak kavramlaştırılabilecek bir oran, limit ve fonksiyon olarak betimlemektir. Veri analizleri hem nitel hem de nicel olarak yapılmıştır. Mülakat soruları ve günlük (journal) öğrencilerin kavramsal anlamalarını değerlendirmek için hazırlanırken araştırmadaki sınavlar öncelikle yöntemsel değerlendirmelerdir. Araştırmanın sonucunda günlük yazılı ödevlerin öğrencilerin

anlamalarını değerlendirmede geleneksel sınavlara göre daha güvenilir olduğu ortaya çıkmıştır.

Aspinwall ve Miler (2001) üniversite de Analiz-I dersi okutan öğretmenlerle beraber öğrencilerin analizin temel kavramalarını anlamalarıyla ilgili bir çalışma yapmışlardır. Hazırlanan çalışma yaprakları matematiksel işlemler ya da özel bir kavramın açıklanmasına yönelik öğrenci düşüncelerini belirlemeye odaklanmıştır. 15 haftalık dönemde 25 çalışma yaprağı verilmiştir. Bunların bazıları derste dağıtılıp ders sonunda toplanırken bazılarını da evde yapmalarına izin verilmiştir. Araştırmacılar öğrencilerden cevaplarını matematiksel formül ve semboller kullanmadan İngilizce kelime ve cümlelerle açıklamalarını istemişlerdir. Onların çalışmasındaki veriler, öğrencilerin çalışma yapraklarına verdiği cevaplardan ve öğretmenlerin cevaplarına verdiği tepkiden oluşmaktadır. Verilerden elde edilen sonuçlar bazı öğrencilerin, artan fonksiyon, pozitif değerli fonksiyon, artan eğim ve pozitif eğim arasındaki farkı ayırt edemediğini göstermiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin analizdeki nümeriksel, grafiksel ve analitiksel gösterimler arasında ilişki kurabildikleri oranda anlamalarının zenginleştiği ortaya konulmuştur.

Murphy (2003) araştırmasında, analiz dersine katılan öğrencilere türev kavramını öğretmek için bilgisayar grafik yöntemi kullanılan iki yöntem karşılaştırılmıştır. İlk metotta öğrenciler bir hareket sensörü önünde yürüyüp hareketlerini bilgisayar ekranında gördükleri bir mikro bilgisayar destekli laboratuvarlar kullanılmıştır. İkinci metotta araştırmacı tarafından yazılan bir Java Applet programı kullanılmıştır. Araştırmacının amacı Java Applet programının uygulamada ki hareket sensörü kadar etkili olduğunu göstermektir. Sınıf dışında birkaç saatlik eğitim aktiviteleri 60 üniversite öğrencisiyle gerçekleştirilmiştir. 32 öğrenci hareket sensörü 28 öğrenci Java Applet kullanmıştır. Araştırma öncesi ve sonrası çok seçenekli başarı testi ve tutum anketleri uygulanmış ayrıca sekiz katılımcıyla bireysel mülakatlara yapılmıştır.

Hahkiöniemi (2005) araştırmasında farkların oranının limiti ile ilgili olarak öğrencilerin sahip olduğu bilgiler işlemsel ve kavramsal anlama boyutuna odaklanmıştır. Araştırmanın problemleri aşağıdaki şekilde belirlenmiştir;

1. Öğrenciler farkların oranının limitini nasıl hesaplamaktadır?
2. Limit alma sürecinde öğrencilerin sahip oldukları gösterimler nelerdir?
3. Öğrenciler limit alma sürecindeki gösterimlerini farkların oranının limiti ile nasıl ilişkilendirmişlerdir?

Bu amaçla beş 11. sınıf öğrencisi ile klinik mülakatlar yapılmıştır. Matematik başarısı açısından bu öğrencilerden biri zayıf, ikisi orta ve birisi iyi olarak nitelendirilmiştir. Çalışmada öğrencilerin yukarıdaki sorulara verdikleri cevaplara odaklanılmıştır.

Öğrencilerin işlemsel anlamaları APOS teori kullanılarak analiz edilmiştir. Kavramsal anlamaları ise limit alma sürecinde kullandıkları gösterim çeşitleri ve bunları niceliklerin farkının limiti ile nasıl ilişkilendirdikleri incelenmiştir. Bu beş öğrencide farkların oranı limiti ile ilgili bazı işlemsel bilgilere sahiptir. Hahkiöniemi daha önce yaptığı bir araştırmada yaptığı araştırmada bir öğrencilerin aynı kavramın farklı gösterimleri ile 10 farklı APOS seviyesine sahip olabileceğini göstermiştir. Bu 5 öğrenci limit alma süreci ile ilgili farklı gösterimlere sahiptir, ayrıca onlar niceliklerin farkının limitinin sembolik temsili ile farklı şekillerde ilişkilendirme yapmışlardır. Mülakatlarda en az iki farklı ilişkilendirme ortaya çıkmıştır.

Viholainen (2006) çalışmasının başlangıç noktasını, Finlandiya’da altı üniversiteden toplam 146 matematik öğretmeni aday ve İsveç’te bir üniversiteden 20 matematik öğretmeni adayının dörtte birinden fazlasının kendilerine verilen bir fonksiyon hakkında sürekli olmadığı ancak türevlenebilir olduğu şeklinde bir sonuca varması olmuştur. Araştırmacı bu sonucu çok şaşırtıcı ve aydınlatılması gereken bir durum olarak tanımlamıştır. Araştırmacı çalışmasının temel problemini “niçin birçok öğrenci bu türden bir sonuca varmış?” ya da daha genel olarak “öğrenciler nasıl sonuç çıkarırlar?” ve “niçin bazı sonuçlar yanlıştır” şeklinde belirlemiştir. Veriler 166 katılımcının yazılı sınava verdiği cevaplar ve bu katılımcılardan 28’i ile yapılan klinik mülakatlardan elde edilmiştir. Klinik mülakatlarda öğrencilere kuralları verilen fonksiyonların türevlenebilir olup olmadıklarını araştırmaları istenmiştir. Görüşmede ayrıca türev ve diferansiyellenmenin anlamı, süreklilik ve türevlenebilme arasındaki ilişkinin ne olduğuna dair sorular öğretmen adaylarına yöneltilmiştir. Mülakat yapılacak öğretmen adayları diğer katılımcılar arasından yazılı sınavda verdikleri cevabın niteliği (en ilginç cevapları örneklendirecek şekilde), sınavdaki performansları (farklı performansları temsil edecek şekilde) ve gönüllülük esas alınarak seçilmiştir. Yapılan araştırmalar herhangi bir seviyede öğrencinin tanıma başvurmaya zor bulduğunu ve bunu yapmadığını ortaya koymaktadır. Bu çalışmadan elde edilen sonuçlarda bu durumu doğrular niteliktedir. Ayrıca yapılan mülakatlar öğrencilerin tanımlardan ziyade, kendi kullandıkları metotlarını problemin çözümü ile ilgili sonuca götürücü kanıt olarak kullandıklarını ortaya koymaktadır. Bu öğrencilerin matematiksel bilgi açısından tanımların rollerini tam olarak içselleştiremediklerini göstermektedir.

Bingölbalı, Monaghan ve Roper (2006), araştırmalarında mekanik mühendislik öğrencilerinin matematik ve türev kavramı üzerine görüşlerini incelemiştir. Araştırma verileri ilk ve son test, geciktirilmiş son test, tercih testi, öğrencilerle mülakat ve Analiz derslerinin içeriğinden elde edilmiştir. Matematik öğrencilerinden elde edilen veriler mühendislik öğrencilerinden elde edilen verilerle karşılaştırılmıştır. Sonuçlar, matematik öğrencilerinin türev kavramını teğet olma doğrultusunda geliştirdiklerini mühendislik

öğrencilerinin ise değişim oranı doğrultusunda geliştirdiklerini göstermiştir. Mühendislik öğrencileri matematiği daha çok bir araç olarak görmüşlerdir. Mühendislik öğrencilerinin gelişimci yaklaşımları, matematik ile ilgili görüşleri ve bölümle ilgili bağlantıları düşünüldüğünde mühendislik öğrencilerinin matematik eğitimi için eğitimsel uygulamalar önerilmiştir.

Goerd (2007), çoklu durum çalışması deseni kullanılarak yapılan bu araştırmada geleneksel ve modern analiz kitaplarının analizin en temel kavramlarından olan türevi öğrencilerin anlamaları üzerine yapılan farklı vurgularının etkileri araştırılmıştır. Analiz dersine katılan 51 öğrenciden 22 sine geleneksel analiz müfredatı 29 una ise modern analiz müfredatı uygulanmıştır. Öğrencilerin türev konusunu anlamalarında modern analizle geleneksel analiz arasındaki istatistiksel olarak önemli farklılıkları belirlemek için nicel yöntemler kullanılmıştır. Ayrıca öğrencilerin başlangıçtaki matematiksel yeterliliklerini değerlendirmek için ön-test ve türev konusundaki anlamalarını ölçmek için ise son-test uygulanmış ve gelişigüzel bir şekilde modern ve geleneksel analiz müfredatını takip eden öğrenciler arasından mülakatlar yapılmıştır. Araştırmanın sonucu modern analiz müfredatını takip eden öğrencilerin daha esnek bir anlayışa sahip olduklarını ve kavramın temsilleri içinde ve arasındaki geçişlerde çok daha yetenekli olduklarını göstermiştir.

Park (2011), araştırmasında üniversitede Analiz dersi öğretmenlerinin ve öğrencilerinin türev konusu üzerine görüşlerini karşılaştırmış ve incelemiştir. Çalışmada özellikle öğrenci ve öğretmenlerin, türev kavramını, bir fonksiyonla bir noktada türevi arasındaki ilişkiyi ve bir fonksiyonun türevinin başka bir fonksiyon olduğunu nasıl tanımladıkları araştırılmıştır. Bu çalışmada ki veriler üniversitede altı haftalık türev dersleri boyunca üç analiz sınıfından elde edilmiştir. Araştırmada sınıf gözlemleri, öğrenci anketleri ile öğrenci ve öğretmen mülakatları yapılmıştır. Araştırmanın sonucu öğretmenlerin türev konusu hakkında açık ve anlaşılır oldukları zaman öğrencilerin düşüncelerinin neyin daha doğru olduğuna yakın olacağını göstermiştir.

Chavez ve Figueroa (2012), araştırmalarında Meksika'da bir lisede analiz eğitimi veren 12 profesörün türevden anlamalarını ve türevin onlar için ne anlam ifade ettiğini ortaya koymayı amaçlamışlardır. Bu amaçla birkaç tane anket hazırlanmıştır. Çalışma bir özel durum çalışmasıdır ve niteldir. Anketler rutin olmayan problemleri içermektedir. Araştırmanın sonuçları analiz profesörlerinin türev kavramı hakkında sınırlı bir anlamaya sahip olduklarını ortaya koymuştur.

2.2. Literatür Taramasının Sonucu

Yurt içi ve yurt dışı literatür incelendiğinde türev kavramı ile ilgili öğrencilerin anlamalarını ortaya koyma amaçlı lise ve üniversite düzeyinde yürütülmüş birçok

çalışmaya rastlanılmaktadır (Orton, 1983; Amit ve Vinner, 1990; White ve Mitchelmore, 1996; Bezuidenhout, 1998; Pinzka 1999; Pustejovsky, 1999; Hauger, 2000; Ubuz, 2001; Aspinwall ve Miller 2001; Duru, 2006; Gür ve Barak, 2007; Hacıömeroğlu, 2007; Park, 2011). Bu çalışmaların çoğu üniversite 1. sınıf öğrencilerinin analiz kavramları ile ilgili anlamalarına odaklanmaktadır (Orton, 1983; Pinzka 1999; Pustejovsky, 1999; Ubuz, 2001; Aspinwall ve Miller, 2001; Duru, 2006; Hacıömeroğlu, 2007; Park, 2011). Öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarına ve karşılaştıkları zorluklara odaklanan araştırma sayısı azdır.

Yurt içi ve yurt dışı literatürdeki çalışmaların bir kısmı türevin cebirsel tanımına, bir kısmı türev ve değişim oranı arasındaki ilişkiye ve diğer bir kısmı da türev ve teğet/eğim ilişkisine odaklanmıştır (White ve Mitchelmore, 1996; Bezuidenhout, 1998; Hauger, 2000; Amit ve Vinner, 1990; Aspinwall ve Miller, 2001; Ubuz, 2001; Orton, 1983). Bu çalışmada aynı katılımcı grup üzerinde türev ile limit, teğet/eğim ve değişim oranı arasındaki ilişkiye odaklanılmış, yani türev kavramı üç farklı içerikte bir bütün olarak ele alınmıştır.

Yurt içinde öğretmen adayları üzerinde yürütülen çalışmalar kapsamında Akkaya (2009), Ergene (2011), İşleyen ve Akgün (2010) çalışmaları dikkati çekmektedir. Akkaya (2009) ve Ergene (2011) bu çalışmadan farklı olarak türev kavramı ile ilgili olarak öğretmen adaylarının alanı öğretme bilgilerini ele almıştır. İşleyen ve Akgün (2010) ise alan bilgisi kapsamında türev ve diferansiyel kavramları arasındaki ilişkiye odaklanmışlardır.

Öğrenci ve öğretmen adaylarının kavramsal anlamaları üzerine yürütülen çalışmalarda çoğunlukla daha derinlemesine veriler elde etmek amacıyla klinik mülakatlardan yararlanılmıştır (Amit ve Vinner, 1990; Bezuidenhout, 1998; Orton, 1983; Pinkza, 1999; Viholainen, 2006; Park, 2011). Bu çalışmada benzer şekilde bir yol takip edilmiştir.

3. YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın problemine çözüm sunmak için araştırmanın yöntemi, araştırmanın tasarımı ve yürütülmesi, çalışma grubu, veri toplama araçları ve verilerin analizi başlıkları altında takip edilen adımlar açıklanacaktır.

3.1. Araştırmanın Yöntemi

Öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarını derinlemesine ortaya koymayı amaçlayan bu araştırmanın yöntemi özel durum çalışmasıdır.

Özel durum çalışması veri toplama araçlarının (mülakat, anket, gözlem ve doküman analizi...) tümünü kapsayabilen şemsiye niteliğinde olup, geneli aydınlatmak için incelenen özel durumları etrafıca tanıtmayı amaçlar (Çepni, 2005). İnceleme, belirlenmiş bir özel durum (tanımlanmış veya bilinen bir çevre, bir grup, bir olay, bir birey, bir sınıf vb.) etrafında derinlemesine yapılır ve sebep- sonuç ilişkileri üzerinde yoğunlaşır (Çepni, 2005; Ekiz, 2003).

Bu çalışma kapsamında matematik öğretmeni adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamaları üç boyutta (türev-limit, türev-teğet, türev-değişim oranı) ele alınmıştır. Çalışmanın asıl odağı öğretmen adaylarının bu kavramla ilgili sorulara ürettikleri doğru ya da yanlış sonuçlar değil, onları bu sonuçlara götüren süreçtir. Cevaba ulaşma sürecinde ne yaptıkları, nasıl yaptıkları ve neden yaptıkları hakkında fikir sahibi olmak ancak sürece yoğunlaşan bir özel durum çalışması yöntemi ile ortaya çıkarılabilir.

3.2. Araştırmanın Tasarımı ve Yürütülmesi

Araştırmanın tasarımı ve yürütülmesi sırasında takip edilen adımlar aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

1. İlk olarak öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarını ortaya koymayı amaçlayan sorular hazırlanmıştır. Bunun için bu konuda yazılmış tezler ve makaleler ile analiz ders kitapları incelenmiştir. Amaca uygun olduğu düşünülen sorular tespit edilmiş veya oluşturulmuştur.

2. Araştırma türev ile limit, teğet ve değişim oranı kavramları arasındaki ilişkilerin anlaşılmasına odaklanmıştır. Her bir durumu karşılayacak nitelikte oluşturulan sorular sınıflandırılmış ve ayrı birer yazılı sınav formatına dönüştürülmüştür. Bu şekilde 3 yazılı sınav formu ortaya çıkmıştır. 1. yazılı sınav türev ve limit ilişkisine; 2. yazılı sınav

türev ve değişim oranı ilişkisine; 3. yazılı sınav türev ve teğet/eğim ilişkisine odaklanan sorulardan oluşmaktadır.

3. Bu üç yazılı sınav formu, çalışmanın amacının ne olduğu açıklanarak, 3 matematik eğitimcisi ve 1 matematik öğretmeninin görüşlerine sunulmuştur. Onlardan gelen dönütler doğrultusunda yazılı sınav soruları düzenlenmiştir.

4. Uzman ve öğretmen görüşleri doğrultusunda şekillenen yazılı sınavlar pilot çalışma kapsamında, ilköğretim matematik öğretmenliği programında 4. sınıfa devam eden 21 öğretmen adayına uygulanmıştır. Pilot çalışma veri toplama araçlarına son şeklini vermek, cevaplama süresini tespit etmek ve verileri analiz edip yorumlamada nasıl bir yol takip edileceği konusunda araştırmacıya fikir vermesi açısından önemlidir. Pilot çalışma sonrasında 1. ve 2. yazılı sınavın birlikte yaklaşık 70 dakikalık bir zamanda 3. yazılı sınavın ise yaklaşık 45 dakikalık bir zamanda uygulanabileceğine karar verilmiştir. Yine pilot çalışma sonrasında öğretmen adaylarının sorulara verdikleri cevapları yalnızca doğru, yanlış ve boş şeklinde sınıflandırmanın uygun bir yaklaşım olmayacağına karar verilmiştir. Bunun için doğru ve yanlış arasında kısmen doğru şeklinde en az bir kategori daha olması gerekmektedir. Bu kategorilerin genel nitelikleri literatür yardımı ile tanımlanmıştır. Her bir soru bu genel nitelikler dikkate alınarak analiz edilmiştir.

5. Pilot çalışma sonrası son şeklini alan yazılı sınavlar (Bkz. Ek1, Ek2, Ek 3) çalışma grubuna 2011-2012 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde uygulanmıştır. 1. ve 2. yazılı sınavlar aynı anda, 3. yazılı sınav ise bir hafta sonra uygulanmıştır.

6. Yazılı sınavlardan elde edilen verilerin ön analizi ile mülakat yapılacak 6 öğretmen adayı belirlenmiş ve mülakatlar yapılmıştır.

7. Klinik mülakatlar tamamlandıktan sonra ise veri analizi aşamasına geçilmiştir.

3.3. Çalışma Grubu

Bu çalışma Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği programında 4. sınıfa devam eden 45 öğretmen adayı (24 kız ve 21 erkekten oluşan) üzerinde yürütölmüştür.

3.4. Veri Toplama Araçları

Bu çalışmada veriler, 3 yazılı sınav ve 6 öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlardan elde edilmiştir. Aşağıda veri toplama araçları tanıtılmıştır.

3.4.1. Yazılı Sınavlar

Yazılı sınavlar cevaplayıcıya sorulan sorulara kendine özgü bir biçimde cevap verme olanağı tanıyan sınavlardır (Baki, 2009). Bu sınavlar özellikle üst düzeydeki bilişsel öğrenmelerin dolayısıyla kavramsal anlamaların ölçülmesinde etkilidir (Baki, 2009). Bu sebepten ötürü öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili olarak anlamalarını ortaya koymayı amaçlayan bu çalışmada yazılı sınav yapılmasına karar verilmiştir.

Araştırmanın problemleri doğrultusunda türev ve limit, türev ve değişim oranı, türev ve teğet/eğim ilişkisini ortaya koymaya yönelik yazılı sınav soruları oluştururken, literatürde ilgili çalışmalardan (Goert, 2007; Kendal ve Stacey, 2003) ve analiz kitaplarından (Bittinger, Ellenbogen, Surgent, 2012; Thomas ve diğerleri, 2005) yararlanılmıştır. Soru sayısının fazla olması ve soruların odağının farklılaşmasından dolayı sorular üç farklı yazılı sınav formatında tasarlanmıştır. 1. yazılı sınav türev ve limit ilişkisine; 2. yazılı sınav türev ve değişim oranı ilişkisine; 3. yazılı sınav türev ve teğet/eğim ilişkisine odaklanan sorulardan oluşmaktadır.

1.yazılı sınav türev ve limit ilişkisine odaklanan 5 sorudan oluşmaktadır (Bkz. Ek 1). Her bir sorunun amacı aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

Tablo 1. Birinci yazılı sınavdaki soruların amaçları

Soru	Amacı
1. soru	Türev kavramını tanımlama
2. soru	Türevin limit kavramı yardımıyla farklı cebirsel formlarda tanımlanabileceğinin farkında olma
3. soru	Türevin tanımını kullanarak sembolik formda bir fonksiyonun bir noktadaki türevini bulma
4. soru	Türevin tanımını kullanarak sayısal formda bir fonksiyonun bir noktadaki türevini bulma
5. soru	Türevin tanımını kullanarak bir fonksiyon grafiğinden hareketle türevli olduğu noktaları belirleme

2. yazılı sınav türev ve değişim oranı ilişkisine odaklanan 6 sorudan oluşmaktadır (Bkz. Ek 2). Her bir sorunun amacı aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

Tablo 2. İkinci yazılı sınavdaki soruların amaçları

Soru	Amacı
1a. soru	Kuralı bilinen yol-zaman fonksiyonundan hareketle belirli noktalarda ortalama hızı bulma
1b. soru	Ortalama hız ile anlık hız arasında nasıl bir ilişkinin olduğunun belirlenmesi
2a. soru	Bir hareketliye ait tablodaki sayısal verilerden hareketle belirli aralıklarda ortalama hızın belirlenmesi

Tablo 2'nin devamı

2b. Soru	Bir hareketliye ait tablodaki sayısal verilerden hareketle belli bir noktada anlık hızın belirlenmesi
3a. soru	Verilen bir fonksiyon grafiğinde belirli aralıklardaki ortalama değişim oranının belirlenmesi
3b. Soru	Verilen bir fonksiyon grafiğinde belli bir noktadaki anlık değişim oranının belirlenmesi

3. yazılı sınav türev ve teğet/eğim ilişkisine odaklanan 5 sorudan oluşmaktadır (Bkz. Ek 3). Her bir sorunun amacı aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

Tablo 3. Üçüncü yazılı sınavdaki soruların amaçları

Soru	Amacı
1. soru	Türev ile eğim arasında nasıl bir ilişki olduğunu belirleme
2. soru	Teğet kavramını tanımlama
3. soru	Belirli noktalarda bir fonksiyon grafiğine teğet olan doğruları belirleme
4. soru	Bir fonksiyonla teğeti arasındaki ilişkiden yararlanarak, kuralı verilen bir fonksiyonun bir noktada türevinin belirlenmesi
5. soru	Verilen bir fonksiyon grafiğine belirli noktalarda teğet çizilip çizilemeyeceğini belirleme

Asıl çalışmada 1. ve 2. yazılı sınav birlikte yaklaşık 70 dakikalık bir zamanda öğretmen adaylarına uygulanmıştır. 3. yazılı sınav ise ilk uygulamadan bir hafta sonra yaklaşık 45 dakikalık bir zamanda yapılmıştır.

3.4.2. Klinik Mülakatlar

Klinik mülakat, üzerinde çalışılan konu hakkında bireyin sahip olduğu bilgileri derinlemesine incelemek ve ortaya çıkarmak için araştırmacı ve birey (görüşülen kişi) arasında yapılan karşılıklı görüşmeler olarak tanımlanabilir (Zazkis ve Hazzan, 1999; Karataş ve Güven, 2003). Bu metodun esas amacı; bireyin sahip olduğu kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkararak bireyin bilişsel becerilerini tespit etmek ve düşüncelerindeki zenginliği keşfetmektir (Goldin 1998; Zazkis ve Hazzan 1999; Karataş ve Güven, 2003).

Bu çalışmada öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarına odaklanılmıştır. Çalışmanın amacı sadece öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili problemlerdeki başarı yüzdelerini ortaya koymak değildir. Bu problemlere cevap verirken ne yaptıklarına ek olarak, nasıl ve neden yaptıkları ile de ilgilenildiğinden bu çalışmada klinik mülakatlardan yararlanılmasına karar verilmiştir.

Yazılı sınavlar uygulandıktan sonra belirlenen 6 öğretmen adayı ile klinik mülakatlar yapılmaya başlanmıştır. Bu öğretmen adayları belirlenmesindeki temel kriter yazılı sınavlar olmuştur. Grubun genelini temsil etmesi açısından yazılı sınavdan düşük, orta seviyede ve yüksek puan alan öğretmen adaylarında ikişer kişi seçilmiştir. Bu seçim yapılırken;

1. Benzer ve farklı nitelikte cevap veren (doğru veya yanlış) öğretmen adaylarını örneklendirebilecek

2. Kız ve erkek sayısını dengeleyecek

3. Düşüncelerini rahatlıkla ifade edebilecek olması da dikkate alınmıştır.

Her bir öğretmen adayı ile yaklaşık 60-70 dakikalık bir sürede görüşme yapılmıştır. Öğretmen adaylarına sırasıyla yazılı sınavlarda verdikleri cevaplar gösterilmiş, bu cevabı nasıl elde ettiklerini açıklamaları istenmiştir. Bu sırada araştırmacı öğretmen adayına açıklamaları paralelinden “Bunu neden yaptın?”, “Nasıl düşündün?” gibi sorular yöneltilmiştir. Yazılı sınavlardaki her bir soru için bu süreç tekrarlanmıştır. Her bir görüşme dijital olarak kayda alınmış, daha sonra bilgisayarda yazıya dökülmüştür.

3.5. Verilerin Analizi

Verilerin analizi yazılı sınavdan elde edilen verilerin analizi ve klinik mülakatlardan elde edilen verilerin analizini yansıtacak şekilde iki alt başlıkta sunulacaktır.

3.5.1. Yazılı Sınavların Analizi

Yazılı sınavlardan elde edilen veriler öncelikle “tam doğru yanıt”, “kısmen doğru yanıt”, “yanlış yanıt” ve “yanıt yok” şeklinde dört temel kategoride sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırmaya ilişkin ayrıntılar aşağıda yer almaktadır.

Tam Doğru Yanıt: Geçerli cevabın tüm bileşenlerini içeren cevaplar.

Kısmen Doğru Yanıt: Geçerli yanıtın bileşenlerinden en az birini içeren, hepsini içermeyen cevaplar.

Yanlış Yanıt: Konu ile ilgili ya da ilgisiz yanlış bilgi içeren, kavram yanılgısı olduğunu gösteren veya mantıksız cevaplar.

Yanıt Yok: Soruları boş bırakma.

Yazılı sınavlar soru soru analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının her bir soruya verdikleri cevaplar yukarıdaki kategori tanımları dikkate alınarak sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırma işlemi araştırmacı tarafından farklı zamanlarda tekrar edilmiş, bu şekilde zamanlama üçgenlemesi yapılmıştır. Genel olarak yapılan sınıflamanın uygun olup olmadığı ve araştırmacı tarafından nasıl sınıflandırılacağı konusunda şüpheye düşülen

durumlarda 2 matematik eğitimcisinin görüşlerine başvurulmuştur. Her bir kategorideki cevaplar frekans ve yüzdelerle ifade edilmiştir.

Öğrencilerin cevapları “Tam Doğru Yanıt” için 2, “Kısmen Doğru Yanıt” için 1, “Yanlış Yanıt” ve “Yanıt Yok” için 0 olarak puanlanmıştır. Bu tür bir puanlama mülakat yapılacak öğretmen adaylarının seçimi ve öğretmen adaylarının genel başarı durumunu resmetmesi amacıyla kullanılmıştır.

Yazılı sınavlara ait analizin ikinci kısmında sadece öğretmen adaylarının yanlış cevaplarına odaklanılmıştır. Öğretmen adayları tarafından verilen yanlış cevaplar kendi içinde benzerlik ve farklılıklarına göre gruplandırılmıştır. Bu şekilde öğretmen adayları tarafından üretilen yanlış tipleri ortaya konmuştur. Her bir gruba düşen cevaplar frekans ve yüzdelerle ifade edilmiştir.

3.5.2. Klinik Mülakatların Analizi

Ses kayıt cihazı kullanılarak tamamlanan klinik mülakatlar daha sonra analiz edilmek amacı ile bilgisayar ortamında yazıya dökülmüştür. Her bir öğretmen adayı ile yapılan görüşme notları dikkatli bir şekilde birkaç kez okunmuştur. Klinik mülakatları yapmadaki amaç öğretmen adaylarının doğru ya da yanlış cevaplarının altında yatan sebepler olduğundan, okuma işlemi bu soruya cevap verebilecek fikirleri ortaya koymak amacıyla yapılmıştır. Öğretmen adaylarını doğru ve yanlış cevaplara götüren fikirler benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflandırılmıştır. Bulgularda sunulurken de her bir fikri örneklendirecek gerçek görüşme kayıtları olduğu gibi sunulmuştur.

4. BULGULAR

Bu araştırmada ğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamaları ve karşılaştıkları zorlukları ortaya koymak amacıyla türev-limit, türev-değişim oranı ve türev-teğet/eğim ilişkilerine yönelik bulgulara yer verilmiştir.

Bulguların sunumu yapılırken 45 ğretmen adayının temsilen 1Ö, 2Ö, ...45Ö kodu, araştırmacıyı temsilen A kodu kullanılmıştır. Ayrıca verilerin analizinden ortaya çıkan yanlış tipleri ilgili olduğu konu ve soru dikkate alınarak kodlanmıştır. Örneklendirmek gerekirse; “L1.1. tip” kodu türev-limitle ilgili 1. soruda ortaya çıkan birinci yanlış tipini, “D2.3. tip” kodu türev-değişim oranıyla ilgili 2. soruda ortaya çıkan üçüncü yanlış tipini ve son olarak “T3.2. tip” kodu türev-teğetle ilgili 3. soruda ortaya çıkan ikinci yanlış tipini temsil etmektedir.

4.1. Türev-Limit İlişkisine Yönelik Bulgular

Bu araştırma kapsamında türev limit ilişkisine yönelik ğretmen adaylarının anlamalarını ve karşılaştıkları zorlukları ortaya koymak amacıyla ğretmen adaylarının bu konuya yönelik hazırlanan 5 soruya verdikleri cevaplardan elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Bu amaçla her bir soruya ilişkin ğretmen adaylarının yazılı sınava verdikleri cevaplar ile klinik mülakatlardaki açıklamaları analiz edilmiş ve ayrı ayrı sunulmuştur.

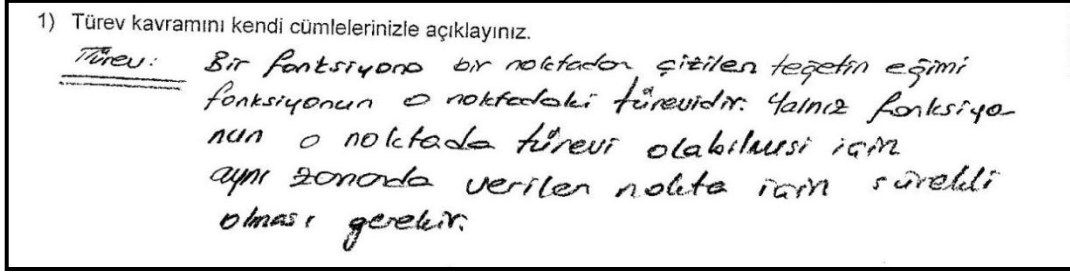
Birinci soru

Tablo 4. Öğretmen adaylarının 1. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
1.soru	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
	11	24	7	16	22	49	5	11	45	100

1. soruya ğretmen adaylarının hemen hemen yarısı (%49) yanlış cevap verirken tam doğru yanıt veren ğretmen adayları sayısı sınıfın %24'dür.

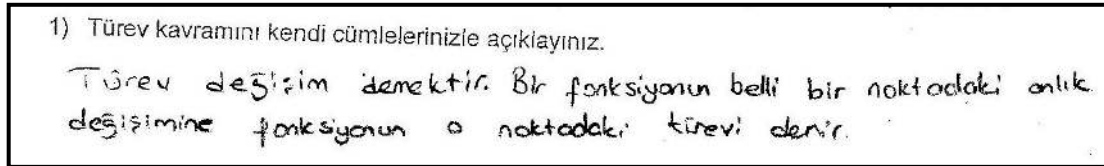
Cevabı “Tam Doğru Yanıt” olarak sınıflandırılan 11 ğretmen adayının 5 i türevi “fonksiyonun bir noktadaki teğetinin eğimi”, diğer 4 ğretmen adayı ise “fonksiyonun bir noktadaki anlık değişimi” olarak ifade etmişlerdir. 2 ğretmen adayı ise türevin tanımından yararlanarak soruya cevap vermişlerdir. şekil 4’de 43Ö kodlu ğretmen adayının soruya verdiği cevaba yer verilmiştir.



Şekil 4. 43Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Soruya aynı cevabı veren diğer öğretmen adaylarından farklı olarak bir fonksiyonun türevli olabilmesi için sürekli olması gerektiği de 43Ö kodlu öğretmen adayı tarafından vurgulanmıştır.

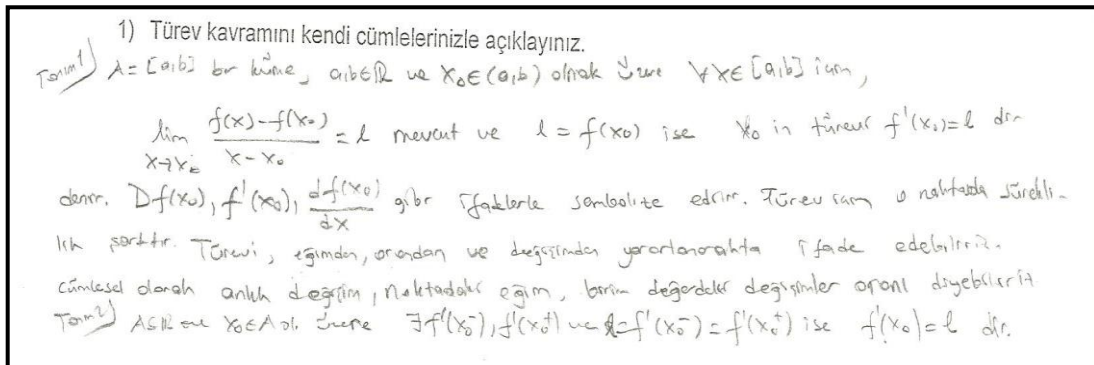
Aşağıda 10Ö kodlu öğretmen adayının bir noktadaki anlık değişimden yararlanarak yaptığı türev tanımına yer verilmiştir.



Şekil 5. 10Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Öğretmen adayları gerek teğetin eğimi gerekse anlık değişimden yararlanarak türevin tanımını yaparken hep bir noktadaki anlık değişim veya teğetin eğimini belirtmişlerdir.

37Ö kodlu öğretmen adayı türev tanımından yararlanarak cevapladığı soruda ayrıca farklı ifadelerle de yer vermiştir. Aşağıda bu öğretmen adayının soruya vermiş olduğu cevap yer almaktadır.



Şekil 6. 37Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Görüldüğü gibi diğer öğretmen adaylarından farklı olarak türev kavramını tek bir açıdan değil de birçok şekilde ele alarak ifade etmeye çalışmıştır. Diğer öğretmen adayı da benzer bir şekilde soruyu cevaplamıştır.

Mülakat yapılan 6 öğretmen adayından biri (37Ö) soruya tam doğru olarak cevap vermiştir. Aşağıda 37Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

- A :Eğimden, orandan ve değişimden yararlanırsınız dedin, biraz açar mısın?
- 37Ö :Bir nokta alıyorum mesela x , daha sonra başka bir nokta x_0 daha alarak bir doğru çiziyorum bu noktayı x noktasına yaklaştırmaya çalışacağım. Bu noktayı hareketli kılacağım ben burada. Şuradaki anlık teğet eğimini bulmak için x_0 noktasını x 'e yaklaştırmayı hedefliyorum, burada h kadar bir mesafe oluyor mesela x_0 'ı $x+h$ kadar almış oluyorum. Aslında amacım h 'yi sıfıra limitlemek x_0 noktasının x üzerinde özdeşi olan bir nokta haline getirdiğim anda şu teğetin iki noktadan geçtiğinden dolayı ve bu x noktası üzerinde iki nokta üst üste geldiğinden dolayı tek noktada isteğim yapıya teğet olduğunu görmeye çalışıyorum. Böylece tam istediğim nokta üzerinde bir teğet elde ediyorum ve türevi kullanmış oluyorum
- A : Tanım 2 yazmışsın, bu tanımdan bahset biraz
- 37Ö :Tanım 2'de sağdan ve soldan türevler var ve bu türevler birbirine eşit ise direk olarak o noktada türevinin olduğundan bahsedilebilir.

37Ö kodlu öğretmen adayı $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ifadesinin neden f fonksiyonunun x_0

noktasındaki türevi olduğunu geometrik bir şekilde açıklayarak soruya cevap vermeyi tercih etmiştir. Ayrıca bu tanıma ek olarak sağ ve sol türevlerinin var ve birbirine eşit olması gerektiğini eklemiştir.

Cevabı “Kısmen Doğru Yanıt” olarak 7 öğretmen adayından 3 ü türev kavramını değişim oranını kullanarak, 2'si teğetin eğiminden, bir öğretmen adayı sağ ve sol türevlerin eşitliğinden ve diğer öğretmen adayı ise sadece anlık hız ifadesini kullanarak açıklamaya çalışmıştır.

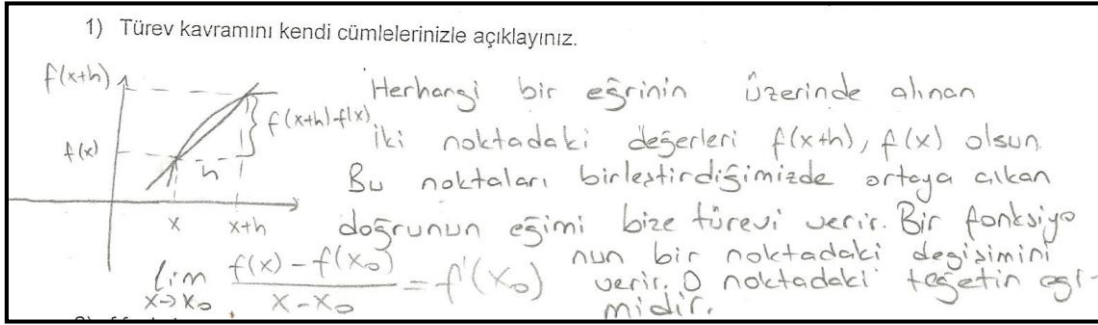
Aşağıda 1Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.

1) Türev kavramını kendi cümlelerinle açıklayınız.
Fonksiyonun belirli bir noktası yada aralığındaki anlık değişimdir.

Şekil 7. 1Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

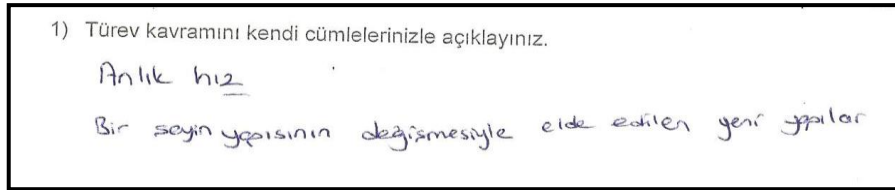
Görüldüğü gibi öğretmen adayı türevin bir aralıkta da anlık değişim olduğunu belirtmiştir. Buna ek olarak anlık değişim oranı veya anlık değişim hızı yerine sadece “anlık değişim” ifadesini kullanmayı tercih etmiştir.

44Ö ve 9Ö kodlu öğretmen adayları türevi “fonksiyonun bir noktadaki teğetinin eğimi” olarak ifade etmiş olmalarına rağmen diğer açıklamalarıyla türev kavramını yanlış ifade etmişlerdir. Örneğin 9Ö kodlu öğretmen adayı çizdiği bir fonksiyonun iki noktasını birleştirerek elde ettiği kirisin eğiminin de türevi vereceğini belirtmiştir. Aşağıda 9Ö kodlu öğretmen adayının cevabına yer verilmiştir.



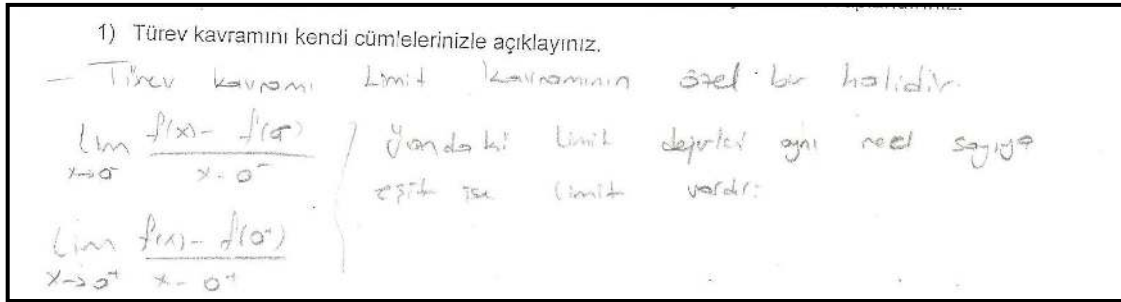
Şekil 8. 9Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

15Ö kodlu öğretmen adayı türev kavramını sadece “anlık hız” olarak ifade etmiş ayrıca türevin günlük hayatımızdaki kullanımına da yer vermiştir. Aşağıda bu öğretmen adayının cevabına yer verilmiştir.



Şekil 9. 15Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

8Ö kodlu öğretmen adayı türevin limit kavramının özel bir hali olduğunu belirterek sağ ve sol türevlerin eşit olması durumuna değinmiştir. Aşağıda bu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 10. 8Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 22 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 5. Öğretmen adaylarının 1. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
L1.1.tip	Türevi fonksiyonun bir noktadaki eğimi olarak yorumlamışlardır.	“Bir eğrinin üzerindeki herhangi bir noktadaki eğimine, o noktadaki türevi denir.”	10
L1.2.tip	Türevi bir noktada veya aralıkta değişim olarak yorumlamışlardır.	“Verilen bir fonksiyonun istenen noktadaki değişimidir.” “Bir fonksiyonun herhangi bir aralıkta anlık değişimidir.” “Çok küçük bir aralıkta x in değişme hızıdır.”	6
L1.3.tip	Türevi bir fonksiyonun limitinin var olması ya da sürekli olması olarak yorumlamışlardır.	“Bir fonksiyonun verilen noktadaki limitinin 3 fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olmasına türev denir.” “Bir noktada oluşan eğrinin sağdan ve soldan limitlerinin eşit olması durumunda o fonksiyonun o noktada türevi olduğundan bahsedebiliriz.”	3
Diğer		“Analitik düzlemde bir eğrinin teğeti şeklinde algılayabiliriz.” “Türev; bir noktanın bir doğruya göre eğimi anlamına gelir.” “Türev; fonksiyonun herhangi bir anındaki yaklaşımıdır.”	3

Tablo 5’e bakıldığında soruyu yanlış yanıtlayan öğretmen adaylarının çoğunun türevi “fonksiyonun bir noktadaki teğetinin eğimi” yerine “fonksiyonun bir noktadaki eğimi” olarak ifade ederek yanlış bir tanımlama yaptıkları görülmüştür. İkinci tip yanlış cevaplarda ise fonksiyonun bir aralıktaki değişimi türev olarak yorumlanmıştır. Öğretmen adayları bir noktadaki türevi sadece değişim olarak düşünmüş, o noktadaki anlık değişim veya değişim oranının limit durumunda incelenmesi kısımlarını atlamışlardır. Ayrıca

fonksiyonun bir noktadaki anlık değişimi yerine bir aralıktaki anlık değişim ifadesi kullanılarak soruya cevap verilmiştir. Aynı tip yanlıştaki diğer bir tanımda ise “x in çok küçük bir aralıktaki değişim hızı” türev olarak ifade edilmiştir. Oysaki türevy’nin x e göre *değişme hızını ifade eder*. Soruya verilen üçüncü tip yanlış cevaplarda ise bir fonksiyonun bir noktada sürekliliği veya limitinin var olması durumu türev olarak ifade edilmiştir. Türev süreklilik ilişkisi yanlış bir şekilde yorumlanarak süreklilik tanımı türev olarak algılanmıştır. Diğer yanlış türlerine baktığımızda teğet, eğim ve yaklaşım kavramlarının yanlış olarak yorumladığı görülmektedir.

Türevin ne olduğu sorusuna “bir noktada fonksiyonun eğimi” şeklinde cevap veren öğretmen adaylarından 27Ö kodlu öğretmen adayıyla yapılan görüşme kaydı aşağıdadır.

- A :Bir fonksiyonun belli bir noktada eğimi derken, bir fonksiyonun eğiminden bahsedebilir miyiz?
- 27Ö :Fonksiyon eğimi derken doğru kullanılacak
- A :Fonksiyonun eğimiyle kastettiğin neydi?
- 27Ö :Tam olarak, o noktada çizilen doğrunun eğimi

Buradan hareketle 27Ö kodlu öğretmen adayının fonksiyonun eğimi derken aslında o noktadan çizilen teğetin eğimini zihninde canlandığı anlaşılmaktadır. Ancak bunu ifade etmede başarılı olamamıştır. Bu, matematiksel dili kullanmadaki zayıflığın bir göstergesi olabileceği gibi temelde konuyla ilgili bilgi eksikliğinin bir göstergesidir.

17Ö kodlu öğretmen adayı da benzer şekilde türevi tanımlarken “fonksiyonun bir noktadaki eğimi” ifadesini kullanmıştır. Bu öğretmen adayı kendisiyle yapılan mülakatta tıpkı 27Ö kodlu öğretmen adayında olduğu gibi fonksiyonun eğiminden kastettiği şeyin o noktada fonksiyona çizilen teğetin eğimi olduğunu belirtmiştir.

Türevin “fonksiyonun bir noktadaki limit değeri “olarak tanımlayan 25Ö kodlu öğretmen adayıyla araştırmacı arasındaki diyaloga aşağıda yer verilmiştir.

- 25Ö :Türevi genel olarak limitle ifade ediyorsak limitte sonuçta bir sayıya yaklaşıyor, sağdan ve soldan her iki taraftan
- A :Fonksiyonun limitinin aldığı değer o noktada türev midir?
- 25Ö :Tam limit değeri değil de limitle ilişkilendirildiği için
- A :Nasıl bir ilişkilendirme?
- 25Ö :Sonuçta türevin tanımı $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ olduğundan buradan ilişkilendirebiliriz.
- A :Buradaki limitle fonksiyonun o noktadaki limiti aynı şey midir?

25Ö :Yok, hayır

25Ö kodlu öğretmen adayıyla yapılan görüşmeden öğretmen adayının türev ile limit arasında bir ilişki olduğunun farkında olmakla birlikte bu ilişkinin niteliği hakkında herhangi bir fikri olmadığı anlaşılmaktadır.

Türevin limit, teğet-eğim ve oranlama açısından açıklanabileceğini ifade eden 2Ö kodlu öğretmen adayının mülakat kaydına aşağıda yer verilmiştir.

- A :Değişim gösterirken nasıl bir değişimden bahsediyorsun?
- 2Ö :Fonksiyon üzerindeki iki noktadan geçen bir kirişi o noktaya yaklaştırırken o nokta üzerinde, eğim açısından bir değişim gözlemlendiği için oradaki türev, değişimden kastettiğim o
- A :Limit ve teğet açısından?
- 2Ö :Limit sonsuza giderken yine o noktadaki değişimin sıfır olduğunu limit kavramından açıklanabilir. Teğet-eğim açısından, yine türev o nokta üzerindeki çizdiğimiz teğetin eğimi.
- A :Peki, oranlama derken?
- 2Ö :Hem limitte hem de türevde oranlamadan bahsettiğimiz için.

2Ö kodlu öğretmen adayıyla yapılan mülakat kaydı sonrasında öğretmen adayının türevinin limit, teğet ve değişim oranıyla olan ilişkisi hakkında bilgisi sahibi olduğu sonucuna varılabilir. Ancak bu bilginin son derecede yüzeysel olduğu bundan dolayı öğretmen adayının türevin limit, teğet ve değişim oranı ile olan ilişkisini anlatmakta zorluk çektiği görülmüştür.

Türevi “çok küçük bir aralıkta x in değişme hızıdır” olarak tanımlayan 24Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda verilmiştir.

- A :Ne demek x in çok küçük bir aralıkta değişme hızıdır, biraz açar mısın?
- 24Ö :Çok küçük bir aralıkta çok yavaş mı artıyor yoksa çok hızlı mı artıyor ya da sabit bir hızla mı artıyor. Sabit olarak artıyorsa türevi sıfırdır diye biliyoruz. Hızla artıyorsa türevi de pozitif yönde artıyordur azalıyorsa negatif yönde artıyordur demektir.

Öğretmen adayı sadece bağımsız değişkendeki değişim üzerinden türev kavramını açıklamaya çalışmış ve bağımlı değişken y deki değişimi göz ardı etmiştir. Açıklamasını desteklemesi istendiğinde fonksiyonun artışıyla veya azalmasıyla türevini eşdeğer tutacak bir açıklama yaparak konuyla ilgili bilgilerinin eksik olduğunu göstermiştir. Örneğin türev çok herhangi bir aralıkta değil o noktadaki değişimdir. Benzer bir şekilde sabit olarak artan

bir fonksiyon olarak doğrusal bir fonksiyonu gösterebiliriz ve doğrusal fonksiyonların türevi öğretmen adayının iddia ettiği gibi türevi sıfır değil sabit bir sayıya eşittir.

İkinci Soru

Tablo 6. Öğretmen adaylarının 2. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
2. soru	0	0	39	87	6	13	0	0	45	100

2.soruya tam olarak doğru yanıt veren öğretmen adayı bulunmamaktadır. Sınıfın çoğunluğu (%87) soruya kısmen doğru yanıt verirken yanlış yanıt veren öğretmen adayı sayısı sınıfın %13'üdür.

Cevabı “kısmen doğru yanıt” olarak sınıflandırılan 39 öğretmen adayından 12'i hiçbir açıklama ihtiyacı hissetmeden, 11 tanesi sadece “türevin tanımından dolayı” açıklamasıyla doğru seçenekleri işaretlemiştir. Aşağıda 43Ö kodlu öğretmen adayının cevabı yer almaktadır.

2) f fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon ise aşağıdakilerden hangisi/hangileri f fonksiyonunun a noktasındaki türevini verir? Neden?

I. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ✓ *Türevin tanımı gereği a noktasındaki türevini verir.*

II. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ✓

III. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Şekil 11. 43Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Görüldüğü gibi öğretmen adayı yaptığı seçimin gerekçesini yapmada başarılı olamamıştır. Geriye kalan 16 öğretmen adayı da cevaplarına ilişkin bir açıklama yapmaya çalışmış ancak bu açıklamalar verdikleri cevapların neden doğru olduğunu açıklamada yetersiz kalmıştır.

Aşağıda 45Ö kodlu öğretmen adayı h, 0'a yaklaşırken buradaki limitin fonksiyonun grafiğinin “a” noktasındaki teğetini verdiğini ifade etmiştir. Hâlbuki “a” noktasındaki limit, fonksiyonun o noktadaki teğetinin eğimini vermektedir.

2) f fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon ise aşağıdakilerden hangisi/hangileri f fonksiyonunun a noktasındaki türevini verir? Neden?

I. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ f fonksiyonu bir grafik belirtir. h, 0'a yaklaştıkça buradaki limit, f fonksiyonunun a noktasındaki teğetini bize verir. Bu da f fonksiyonunun a noktasındaki türev anlamına gelir.

II. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ → Benzer şekilde x, a'ya yaklaştıkça buradaki limit bize f fonksiyonunun a noktasındaki teğetini verir. Bu da f fonksiyonunun a noktasındaki türev anlamına gelir.

III. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ → Bu limit, f fonksiyonunun teğet almaz. Dolayısıyla a noktasındaki türevini verip vermemesi h'ya bağlıdır.

Şekil 12. 45Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

18Ö kodlu öğretmen adayı da benzer şekilde cevap vermiştir. 41Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap Şekil 13'de yer almaktadır.

2) f fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon ise aşağıdakilerden hangisi/hangileri f fonksiyonunun a noktasındaki türevini verir? Neden?

I. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ → Herden 2 nokta arasında, fonksiyonun değeri vardır.

II. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ → //

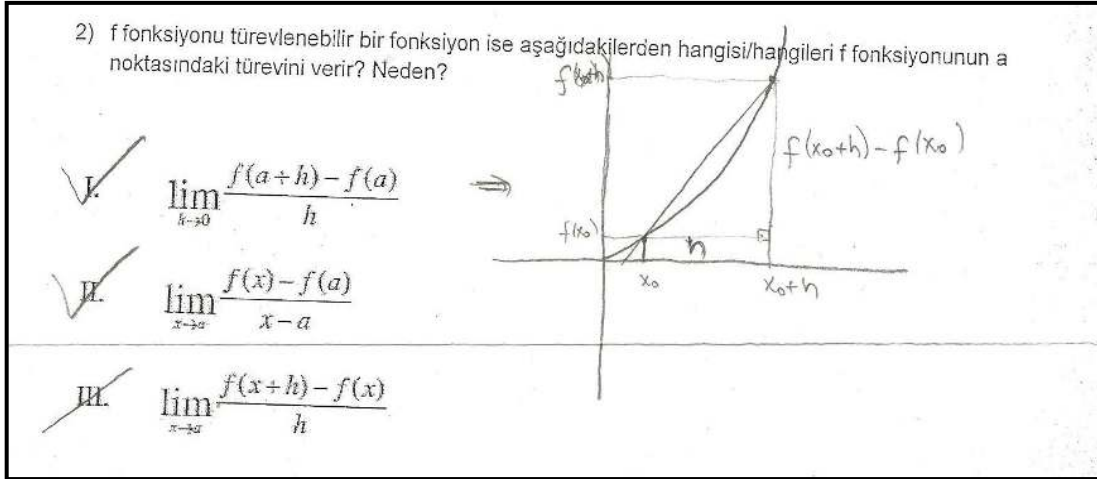
III. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ →

Şekil 13. 41Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Öğretmen adayı burada iki nokta arasındaki değişimi türev olarak tanımlamıştır.

20Ö kodlu öğretmen adayı grafik çizerek sorunun doğrulunu göstermeye çalışmıştır.

Aşağıda bu öğretmen adayının soruya verdiği cevap bulunmaktadır.



Şekil 14. 20Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Görüldüğü üzere öğretmen adayı iki nokta arasındaki kirişi çizmiş ve buradaki eğimin muhtemelen türevi işaret ettiğini belirtmeye çalışmıştır. Ancak doğrunun o noktadaki teğetinin eğimi ile herhangi bir çizim veya açıklama yapmamıştır.

Mülakat yapılan öğretmenler arasından üçü (17Ö, 25Ö, 37Ö) ikinci soruya kısmen doğru yanıt vermişlerdir. Soruya “ I ve II nolu limitler fonksiyonun a noktasındaki türevini verir” diyerek cevaplayan 17Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda yer almaktadır.

- A :Sen cevabını bir ve iki olarak belirtmişsin ama açıklama yapmamışsın
- 17Ö :Ya, türevin tanımını yaparken böyle tanımladığımızı hatırlayarak sanırım böyle yaptım, bide limit sıfıra giderken sıfır bölü sıfır olmalı diye düşünmüştüm o yüzden bu ikisini söyledim.
- A :Türevin tanımını bildiğinden mi bunların olduğunu söyledin?
- 17Ö :Evet, öyle düşündüm.
- A :Peki, neden 3 değil?
- 17Ö :Burada da a'ya gidiyor, şuraların sıfır bölü sıfır olması gerektiğini düşünmüştüm hani x, a'ya giderken olduğu için bunun öyle olmadığını düşündüm.
- A :Türevin tanımına ve sıfır bölü sıfır olduğuna mı baktın?
- 17Ö :Evet

Tıpkı 17Ö kodlu öğretmen adayı gibi 25Ö kodlu öğretmen adayı da benzer gerekçelerle ilk iki seçeneğin doğru olduğunu belirtmiştir. Öğretmen adaylarının türevin limit ile olan ilişkisini formül bazında bildikleri ve türevin tanımıyla ilgili yüzeysel bilgilere

sahip oldukları için sorunun çözümü için gerekli açıklamaları yapamadıkları açıkça görülmektedir.

37Ö kodlu öğretmen adayı ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda yer almaktadır.

- A :2.soruda I ve II olarak cevaplamışsın, onları tercih etmenin sebepleri nelerdir?
- 37Ö :Tanım 1 de yapmış olduğumuz yapıya ulaşmayı hedefledim. Bu amaçla $a+h$ ifadesine x değişken dönüşümü uyguladım. Bu durumda h sıfıra giderken x değerinin a 'ya yaklaştığını gördüm dolayısıyla limit h sıfıra gider yerine x , a 'ya gider diye yazabildim. Sonra $a + h$ 'ye x dediğim için buradan $f(x)$ geldi, h yerine buradan çektim $x + a$ yazdım. Tam da tanımdaki yapıya ulaştığım için buradan rahatlıkla bu noktada türevi vardır ve $f'(a)$ ' ya eşittir diyebildim.
- A :Burada türevinden tanımından mı yararlanarak soruya cevap verdin?
- 37Ö :Evet, ikinci olarak h yerine 0 yazayım dedim ve sıfır bölü sıfır elde ettim, L'Hopital kuralını uygularsam $f'(a)$ 'yı elde ettim ve oradan da bulunabilir diye düşündüm.
- A :III. seçenek neden değildir?
- 37Ö : h yerine a yazdığımda elde ettiğim ifade fonksiyonun a noktasındaki türevinden farklıydı, her zaman sağlamaz diye düşündüm.

37Ö kodlu öğretmen adayı türevin tanımından hareketle $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

ifadesinin fonksiyonun a noktasındaki türevi olduğunu bildiği için bu ifadede $x = a + h$

dönüşümü uygulayarak $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ifadesini elde etmiş ve her ikisinin doğru

olduğunu belirtmiştir. Farklı olarak bu ifadelere L'Hopital kuralını uyguladığında $f'(a)$ ' yı verdiği için I. ve II. doğru olduğunu söylemiştir. Öğretmen adayının gerek türevin tanımından yararlanarak gerekse L'Hopital kuralını uygulayarak yaptığı çözümler daha çok formüllerden ve kurallardan hareketle yapılan çözümlerdir. Öğretmen adayı verilen ifadelerin neden doğru olduğunu geometrik veya daha teorik bir yaklaşımla açıklayamamıştır. Bu durum öğretmen adayında ezbere işlem uygulamalarına yönelik bir eğilimin olduğunu göstermektedir.

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 6 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 7. Öğretmen adaylarının 2. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
L2.1.Tip	Fonksiyonun a noktasındaki türevini veren ifade yerine daha genel bir yaklaşımla fonksiyonun x noktasındaki türevi doğru olarak belirtilmiştir.	$I.\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ yanlıştır}$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ olmalıdır.}$	3
L2.2.Tip	h'nin 0'a yaklaşırken fonksiyonun limiti yerine x, a'ya yaklaşırken fonksiyonun limitini f'(a) olarak düşünülmüştür.	$III.\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	1
L2.3.Tip	Türevin tanımından hareketle dönüşüm yapılarak I seçeneğinin doğru olduğu ifade edilmesine rağmen II nolu seçenek olarak işaretlenmemiştir.	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ $x - a = h \Rightarrow x = a + h$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ olduğundan}$	1
L2.4.Tip	Sadece açıklama yapılarak I ve III seçenekleri işaretlenmiştir.	"Yalnızca I ve III fonksiyonun a noktasındaki türevini verir bize."	1

Tablo 7'e bakıldığında yanlış yapan öğretmen adaylarından üç tanesi "a" noktasındaki türevi veren ifadenin yerine "x" noktasındaki türevi veren ifadeyi doğru seçenek olarak belirtmişlerdir. Bu durum öğretmen adaylarının kendi kafalarında şekillendirdikleri türev kavramının daha çok $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ifadesiyle özdeşleştirilmesinden kaynaklanmış olabilir. Diğer yanlış türlerinde bakıldığında bazı öğretmen adaylarının $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ifadesini x in a'ya yaklaşıyor olmasından hareketle f fonksiyonunun "a" noktasındaki türevi olarak düşündükleri tahmin edilmektedir. Yine 28Ö kodlu öğretmen adayı II nolu seçenekteki $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ifadesinden yararlanarak h=x-a dönüşümü yapmış ve $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ifadesini elde ederek sadece ilk ifadeyi doğru seçenek olarak işaretlemiştir. Burada ikinci ifade türevi asıl temsil eden tanım olarak düşünülmüştür.

2.soruya yanlış cevap veren 24Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat kaydı aşağıda yer almaktadır.

- A :Birinci seçeneğin yanlış olduğunu belirtmişsin, nedenini açıklar mısın?
- 24Ö :a'nın değişken olması lazım yani ters olması lazım, şu $a + h$ 'nin $x + h$ olması lazım
- A :Peki, bu ifade neyi verir bize?
- 24Ö :Bir noktadaki türevi verir.
- A :Hangi noktadır o?
- 24Ö :Sıfır noktasındaki türevi
- A :Ama biz soruda "a" noktasındaki türevi istiyoruz
- 24Ö :Tamam, h yerine a yazacağız o durumdaysa
- A :h'ye vereceğimiz değere göre mi belirleyeceğiz hangi noktada türevli olduğunu?
- 24Ö :Evet
- A :İkincisi neden doğrudur?
- 24Ö :Zaten tanımı belliydi. Tanımı biliyorduk. Diğer zaten bunun dönüşüm yapılmış hali, bu zaten eğimi veriyor eğer geometrik olarak çizersek. Türevde biraz eğimle ilişkili olduğu için burada a eğer sıfıra giderse türevi verir, burada hani çok küçük bir aralıktan değişimi verir bize
- A :III neden doğru değildir?
- 24Ö :h, a'ya olması lazımdı... Şu anda yanlış yapmış olabilirim kafam karıştı biraz

24Ö kodlu öğretmen adayının vermiş olduğu cevaplara bakıldığında, öğretmen adayı $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ifadesinin f fonksiyonunun "a" noktasında türevi olması için a yerine x yazılması gerektiğini belirtmiştir. Aslında burada öğretmen adayı türevin tanımını ezberden bildiği için x yerine başka bir nokta verildiğinde bunun o noktada türev olabileceğini kestirememiştir. Zaten ikinci seçeneğin doğru olduğuna tanımı bildiğini belirterek cevap vermiş dolayısıyla üçüncü seçenek gibi farklı bir ifadeyi yorumlamakta zorlanmış ve kafasının karıştığını belirtmiştir.

2Ö kodlu öğretmen adayı da kendisiyle yapılan mülakatta sadece ikinci seçeneğin doğru olduğunu "Bu bana daha mantıklı geliyor. Benim düşündüğüm bu formülle ifade ediliyor" cümlesiyle belirtmiştir. Buradan hareketle öğretmen adayının soruya ezberden cevap verdiği görülmüştür ve bu nedenle tıpkı 24Ö kodlu öğretmen adayı gibi birinci seçeneği yorumlamakta zorlanmış ve doğru olmadığını belirtmiştir.

Soruya " I ve III a noktasındaki türevi verir, h sıfıra giderken gibi çok küçük bir değerdeki değişimini verir" şeklinde cevap veren 27Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda verilmiştir.

- A :I ve III seçenekleri doğru olarak belirttin, açıklar mısın?
- 27Ö :Fonksiyonun belli bir değerindeki küçük bir değişimini ifade ediyor... Yani limit aslında
- A :Küçük bir değişimi mi inceliyoruz bir orada?
- 27Ö :Yani...
- A :Peki, I ve III ifadelerinin birbirinin aynısı mı olduğunu mu düşünüyorsun?
- 27Ö :Aynısı değil ama III de daha genel bir ifade var, I de özel bir ifade var
- A :Soruda fonksiyonun “a” noktasındaki türevi isteniyor, genel bir şey mi arıyoruz yoksa özel bir durum mu?
- 27Ö :”a” noktası dediği için daha özel oluyor
- A :Peki, soruda h'nin sıfıra veya x'in a'ya gittiğine dikkat ettin mi?
- 27Ö :Yani muhtemelen etmedim ve benzer olduğunu düşündüm
- A :II. İfade türevi vermez mi?
- 27Ö :x, a'ya doğru giderken sıfır olurdu aslında hesaplanabilirdi, a olduğu zaman belirtirdi, belirsizlik oluşurdu.
- A :Ama o noktada türevi vermediğini ifade etmişsin
- 27Ö :Evet

27Ö kodlu öğretmen adayı türevin $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ yapısında yazılması

gerektiğini düşünerek limitin hangi noktada alındığını önemsemeden bu formata uygun olarak gördüğü I ve III seçeneklerini doğru olarak belirtmiştir. Öğretmen adayı ikinci seçenek için yöneltilen sorudan sonra bu seçeneğin de doğru cevap olabileceğini düşünmüştür. Burada öğretmen adayının türevin tanımıyla ilgili yetersiz bilgiye sahip olduğu bu nedenle türev, limit ve değişim arasındaki ilişkileri açıklamada güçlük çektiği görülmektedir.

Üçüncü Soru

Tablo 8. Öğretmen adaylarının 3. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
	f	%	F	%	f	%	f	%	f	%
3. soru	37	82	8	18	0	0	0	0	45	100

3. soruya yanlış yanıt veren öğretmen adayı bulunmadığı gibi tam doğru yanıt veren öğretmen adayı sayısı sınıfın %82'sini oluşturmaktadır.

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri “tam doğru yanıt” kategorisine yerleştirilen cevapları incelendiğinde 29 öğretmen adayının $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ tanımını kullanarak, 8

öğretmen adayının da $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+2) - f(2)}{h}$ tanımını kullanarak soruyu cevapladıkları görülmüştür. Aşağıda 24Ö kodlu öğretmen adayının cevabı yer almaktadır.

3) Türevin tanımını kullanarak $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 1$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $x = 2$ noktasında türevini hesaplayınız.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a+h)^2 + 1 - 3a^2 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 + 1 - 3a^2 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6a + 3h}{1} = \lim_{h \rightarrow 0} 6a = 6a \text{ ve } a=2 \text{ için } 6 \cdot 2 = 12 \text{ . Yani } f'(2) = 12$$

Şekil 15. 24Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Cevabı “kısmen doğru yanıt” olarak sınıflandırılan 8 öğretmen adayından biri olan 44Ö kodlu öğretmen adayının cevabı aşağıda yer almaktadır.

3) Türevin tanımını kullanarak $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 1$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $x = 2$ noktasında türevini hesaplayınız.

$$f(x) = 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 6x$$

$$f'(2) = 6 \cdot 2 = 12$$

Şekil 16. 44Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

44Ö kodlu öğretmen adayı soruda türevin tanımı kullanılarak çözüm bulması istenmiş olmasına rağmen, doğrudan türev alma kuralını kullanarak cevaba ulaşmıştır. Diğer 7 öğretmen adayı da benzer çözüm yapmıştır. Bu şekilde yapılan çözümün sonucu her ne kadar yanlış olmasa da soruda istenen çözüm yolu değildir. Öğretmen adayları ezberden giderek ya da türev tanımını kullanmayı bilmediklerinden böyle bir çözüm yapmışlardır.

Türevin tanımını kullanarak $f(x) = 3x^2 + 1$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $x=2$ noktasındaki türevini hesaplarken hiçbir öğretmen adayı soruya yanlış cevap vermemiştir. Soruyu doğru olarak cevaplayan öğretmen adayları arasında 37Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat kaydı aşağıda yer almaktadır.

A :3.soruya baktığımızda neden böyle bir çözüm yaptın?

37Ö :Burada da türevin tanımından gitmek istedim

A :Neden?

37Ö : Soruda o şekilde istediği için, bizzat tanımı uyguladım türevin tanımını kullanarak çözmüş oldum.

A : Soruda türevin tanımını kullanarak demeseydi böyle bir çözüm yapar mıydın?

37Ö : Her zaman değil aslında direk türevini alıp yazabilirdim burada.

Burada 37Ö kodlu öğretmen adayı türevin tanımını kullanarak ifadesini doğru algılayarak bu tanımdan hareketle bir çözüm yapmıştır. Türevle limit arasındaki ilişkiyi bildiği formül kullanarak çözüm yapmak yerine tanımını kullanarak çözüm yapmıştır. Mülakat yapılan diğer öğretmen adayları da benzer açıklamalar yaparak soruyu neden bu şekilde çözdüklerini belirtmişlerdir.

Dördüncü Soru

Tablo 9. Öğretmen adaylarının 4. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
4. soru	1	2	3	7	38	84	3	7	45	100

Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu (%84) soruya yanlış yanıt verirken doğru cevap veren bir 1 kişi (%2) ve kısmen doğru yanıt veren 3 kişi (%7) bulunmaktadır.

Cevabı “Tam Doğru Yanıt” olarak sınıflandırılan sadece bir öğretmen adayı bulunmaktadır. 37Ö kodlu öğretmen adayı tabloda verilen nümerik bilgilerden hareketle öncelikle fonksiyonun “5” noktasında sürekli olduğunu ve bu yüzden türevlenebilir olduğunu ifade etmiştir. Aşağıda 37Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.

4) Aşağıda f fonksiyonunun $x = 5$ noktası ve civarındaki bazı noktalarda aldığı değerler verilmiştir. Bu bilgileri $f'(5)$ 'yi hesaplamak için kullanınız. Cevabınızı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.

x	4,997	4,998	5,000	5,001	5,002
$f(x)$	15,470	15,482	15,500	15,508	15,515

Verilerden $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 15,500$ ve $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 15,500$ olduğu sezilir.

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 15,500$ ve $15,500 = f(5) \Rightarrow$ sürekli olarak türelenir.

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \frac{15,500 - 15,500}{5 - 5} \left(\frac{0}{0} \right) \Rightarrow \frac{15,482 - 15,500}{4,998 - 5} = \frac{-0,018}{-0,002} = 9.$

$\Rightarrow \frac{15,508 - 15,500}{5,001 - 5} = \frac{0,008}{0,001} = 8.$

$8 < f'(5) < 9$ dir.

Şekil 17. 37Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Görüldüğü gibi $x=5$ noktasındaki türevin sorunun cevabı olduğunu düşünmüş ve bunu hesaplamak için 5 noktasına sağdan ve soldan en yakın noktalardan türev hesaplayarak cevaba gitmiştir.

Aşağıda 37Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

37Ö : $f(x)$ fonksiyonunda 5'e sağda yaklaşırken fonksiyonun 15,500'e yaklaştığını gördüm yine 5'e soldan yaklaşırken görüntünün 15,500 olduğunu gördüm ve ilk başta sağ ve sol limitleri eşit olduğundan limitinin olduğunu söyledim. Türevin varlığından bahsetmek için bunlara baktım. Daha 5 noktasındaki değere baktım onun da 15,500 olduğunu gördüm o zaman süreklilikte vardır dedim. Sürekliyse türevlenebilir deyip türevin tanımından işe girmeye başladım.

A :Peki, burada yazdığın $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$ ifadesi ne anlama geliyor?

37Ö :Bu fonksiyonun 5 noktasındaki türevini veriyor aslında burada minimal aralıkları düşünmek istedim

A :5 noktasındaki türevi bulmak için yaptığın şey bu yaklaşımlar mı?

37Ö :Evet, bu yaklaşımları inceledim ve birbirine oranladım çünkü burada eğimi düşündüm yani y 'nin x e oranı şeklinde türevin oranla ilişkisinden işe gitmeye çalıştım.

A :Peki bu bulduğun değerler hangi taraftan?

37Ö :9 değeri soldan yaklaştığımda sağdan yaklaştığımda da 8 değerini bulmuşum. Dolayısıyla türevin bu iki sayı arasında olabileceğini söyledim.

Anlaşılabacağı üzere 37Ö kodlu öğretmen adayı türev, süreklilik ve eğim arasındaki ilişkilerin farkındadır. Bu ilişkileri doğru bir şekilde yorumlayarak soruya cevap vermiştir.

Cevabı “Kısmen Doğru Yanıt” olarak sınıflandırılan 3 öğretmen adayının cevaplarına bakıldığında hepsinin tabloda verilen nümerik değerleri kullanarak f fonksiyonun $x=5$ komşuluklarındaki değişim oranlarını tek tek hesapladıkları görülmüştür. Ancak sadece 17Ö kodlu öğretmen adayı bulduğu verilerden hareketle soruya cevap vermiştir. Aşağıda 17Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.

4) Aşağıda f fonksiyonunun $x = 5$ noktası ve civarındaki bazı noktalarda aldığı değerler verilmiştir. Bu bilgileri $f'(5)$ 'yi hesaplamak için kullanınız. Cevabınızı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.

x	4,997	4,998	5,000	5,001	5,002
f(x)	15,470	15,482	15,500	15,508	15,515

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{f(5) - f(4,998)}{5 - 4,998} = \frac{15,500 - 15,482}{0,002} = \frac{0,018}{0,002} = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{f(5,002) - f(5)}{5,002 - 5} = \frac{15,515 - 15,500}{0,002} = \frac{0,015}{0,002} = 7,5$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{f(5,001) - f(5)}{5,001 - 5} = \frac{15,508 - 15,500}{0,001} = \frac{0,008}{0,001} = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{f(5) - f(4,997)}{5 - 4,997} = \frac{15,500 - 15,470}{0,003} = \frac{0,030}{0,003} = 10$$

10 9 8 7,5

elimde değerlerden ve soldan sağa doğru gittiği için $f'(5) = 8$

Şekil 18. 17Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Öğretmen adayının bulduğu veriler göz önüne alındığında soruya kesin bir cevap yerine yaklaşık bir sonuç vermesi gerekirken sorunun cevabını 8 olarak vermiştir. Diğer iki öğretmen adayından 16Ö kodlu öğretmen adayını soruya verdiği cevap aşağıda yer almaktadır.

4) Aşağıda f fonksiyonunun $x = 5$ noktası ve civarındaki bazı noktalarda aldığı değerler verilmiştir. Bu bilgileri $f'(5)$ yi hesaplamak için kullanınız. Cevabınızı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.

x	4,997	4,998	5,000	5,001	5,002
$f(x)$	15,470	15,482	15,500	15,508	15,515

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \frac{f(5,002) - f(5)}{5,002 - 5} = \frac{15,515 - 15,500}{0,002} = \frac{0,015}{0,002} = 7,5$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \frac{f(5,001) - f(5)}{5,001 - 5} = \frac{15,508 - 15,500}{0,001} = \frac{0,008}{0,001} = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \frac{f(5) - f(4,997)}{5 - 4,997} = \frac{15,500 - 15,470}{0,003} = \frac{0,03}{0,003} = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \frac{f(5) - f(4,998)}{5 - 4,998} = \frac{15,500 - 15,482}{0,002} = \frac{0,018}{0,002} = 9$$

Şekil 19. 16Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Benzer şekilde 40Ö kodlu öğretmen adayı da aynı sonuçları elde etmiş ancak sorunun tam cevabı için bir açıklama yapmamıştır.

Mülakat yapılan öğretmen adayları arasından soruya kısmen doğru yanıt veren 17Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat kaydına aşağıda yer verilmiştir.

A :Bu bulduğun 9, 7,5, 8 ve 10 değerleri nedir?

17Ö :5 noktasına doğru giderken nasıl bir azalış ya da artım olduğunu gösteriyor, neye doğru yaklaşıyor hangi sayıya doğru yaklaşıyor diye baktım.

A :Peki, bu yaklaşımın bize türevi mi vereceğini düşünüyorsun?

17Ö :Limit değeri aslında ama tanımda da o limite baktığımız için onun o türevi vereceğini düşünerek yaptım

A :Soruda f fonksiyonunun 5 noktasındaki türevini 8 olarak belirttin ama dört tane değer buldun neden 8'i seçtin?

17Ö :8'e doğru yaklaştığını düşündüğüm için hani 9 ve 10, 7,5, 8'e yaklaştığı için.

A :Şurada yazmışsın 10 ve 9 sol taraftan 7,5 ve 8 sağ taraftan

17Ö :Ya, tam olarak bir değer olsun istedim

A :Mesela, 9 diyemez miydin?

17Ö :Belki 8 ve 9 arasında bir sayı olabilir ama 8'i tercih etmişim. Aslında ortada bir değer olsa sanki daha iyi olur. Çünkü iki tarafında belli bir sayıya yaklaşmış olması gerekir.

17Ö kodlu öğretmen adayı yaklaşımları doğru olarak bulmuş olmasına rağmen sonucu tam olarak doğru bir şekilde yorumlayamamıştır. Sonucun 8 ile 9 arasında bir

değer alması gerekirken sonuç öğretmen adayı tarafından 8 olarak belirlenmiştir. Bu durum öğretmen adayının 5 noktasında fonksiyonun türevini karşılık gelen değeri tam olarak belirlemek istemesinden kaynaklanmıştır.

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 38 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 10. Öğretmen adaylarının 4. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
L4.1.Tip	x=5 noktasının sağından veya solundan bir nokta belirlenerek hesaplanan değişim oranının limit durumu incelenmeye çalışılmıştır.	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(5,001) - f(5,000)}{0,001}$ $= \frac{15,508 - 15,500}{0,001} = \frac{0,008}{0,001} = 8$	13
L4.2.Tip	x=5 noktasının sağından veya solundan seçilen noktalardan geçen doğrunun eğimi bulunmuş ve 5 noktasındaki türev olarak yorumlanmıştır.	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15,500 - 15,470}{5,000 - 4,997} = \frac{0,03}{0,003} = 10$	10
L4.3.Tip	Tablodaki nümerik verilerden fonksiyonun x=5 noktasındaki türevi istenmesine rağmen fonksiyonun o noktadaki limiti sorunun cevabı olarak düşünülmüştür.	$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 15,500$ $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 15,500 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 15,500$	5
L4.4.Tip	Fonksiyonun 5 noktasındaki türevi sadece formüle edilmiş sorunun cevabına ulaşmak için kullanılmıştır.	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \frac{f(x) - 15,500}{x - 5}$	4
L4.5.Tip	Grafik temsil	Tablodaki nümerik verilerden yararlanarak sadece bir grafik çizilmiştir.	4
	Diğer	Üstteki sınıflardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	2

Tablo 10'a bakıldığında 1. tipte yanlış yapan öğretmen adayları soruda verilen nümerik değerlerden hareketle türevin tanımını kullanarak x=5 noktasında türev bulmaya çalışmıştır. Öğretmen adayları x=5 noktasında fonksiyonun türevinin soruda istenilen şey olduğunu düşünmüş ancak sorunun çözümü için gerekli işlemleri doğru olarak yapamamıştır. Öğretmen adayları 5 noktasının sağından veya solundan seçtikleri bir

noktadaki değişim oranını hesaplayıp bu oranın limitini alarak soruyu cevaplamaya çalışmıştır. Ancak bunu yaparken seçtikleri formülde f fonksiyonun denklemini yazmaları gerektiği için türevin tanımını yanlış kullanarak çözüm yapmışlardır. Çünkü türevin tanımını kullanarak 5 noktasındaki türevi bulmak için f fonksiyonunun formülünü bilmeleri gerekirdi. 2. tipte yanlış yapan öğretmen adayları 5'in sağından veya solundan seçtikleri noktalardan geçen doğrunun eğimini hesaplayarak bu eğimin fonksiyonun $x=5$ noktasında fonksiyonun türevi olduğunu belirtmişlerdir. 3. tipte yanlış yapan öğretmen adayları tabloda verilen değerlerden hareketle 5'e sağdan ve soldan yaklaştığında fonksiyonun aynı değere gittiğini belirtmiş ve fonksiyonun $x=5$ noktasındaki limitini 15,500 olarak bulmuştur. Ancak bu limitin fonksiyonun 5 noktasındaki türevi olduğunu düşünerek soruya cevap vermişlerdir. 4. tipte yanlış yapan öğretmen adayları türevin tanımından yararlanarak fonksiyonun $x=5$ noktasındaki türevini yazmış fakat çözüm yapmamışlardır. Bu öğretmen adayları verilen nümerik değerleri kullanmamış ve fonksiyonun formülünü bilmedikleri için $x=5$ noktasındaki türevini hesaplayamamışlardır. 5. tipte yanlış yapan öğretmen adayları verilen değerleri kullanarak sadece grafik çizerek soruyu cevaplamışlardır. 3 öğretmen adayı soruya yanıt vermemiştir.

Tabloda verilen değerlerden hareketle $x=5$ noktasında f fonksiyonunun türevine ilişkin soruda yanlış cevap veren öğretmen adaylarının yaklaşımı genelde birbirine benzer olmuştur. Aşağıda 2Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

- A :Türevin tanımından yararlanarak 5 noktasında fonksiyonun türevini neden yazdın?
- 2Ö :Bu ifade bize 5 noktasındaki türevi veriyor onu belirtmek istedim
- A :Sorunun çözümünde bundan yaralandın mı?
- 2Ö :5 noktasına yaklaşırken bu tanımdaki gibi bir oranlama yapamam gerekir diye düşündüm
- A :Bir aralık seçmişsin 5 noktasının sol tarafından
- 2Ö :O iki noktada değişim olarak türevine baktım.
- A :O noktalara arasındaki değişim oranını 10 olarak hesaplamışsın, bunun 5 noktasındaki türevi verdiğini söyleyebilir misin tam olarak?
- 2Ö :Bir noktadan bakmak yeterli olmuyor, sağdan ve soldan türevlerine bakıyorduk... Birde grafik çizerken veya grafiği verilen sorularda daha başarılı olduğumu fark ettim eğer grafik çizersem kafamda mutlaka bir şeyler oluşuyor.

Buradan hareketle 2Ö kodlu öğretmen adayı sorunun çözümü için atması gereken adımları biliyor olmasına rağmen kendisini çözüme götürecek işlemleri yapmakta yetersiz kalmıştır. Bu durum öğretmen adayının konuyla ilgili yeterli düzeyde bilgiye ya da

tecrübeye sahip olmamasından kaynaklanmaktadır. Benzer bir açıklamayı 27Ö kodlu öğretmen adayı da yapmıştır. Görüldüğü gibi öğretmen adaylarının konuyla ilgili eksiklikleri kendilerine olan güveni azaltmış ve çözüm için gerekli adımları atmalarına engel olmuştur.

24Ö kodlu öğretmen adayı tek bir aralık yerine sağdan ve soldan birer aralık seçerek soruya cevap vermeyi tercih etmiştir. Aşağıda bu öğretmen adayına ait mülakat yer almaktadır.

24Ö :Sağdan yaklaştım, soldan yaklaştım çok küçük bir aralıkta, hani dedim ortalamasıdır diye düşündüm

A :Bu yaklaşımlar bize o noktada türevi mi verecek?

24Ö :Yani, birbirine eşit ise türevi veriyor zaten. Tanıma göre eşit olması lazım eğer eşitse türevi veriyor. Gerçi burada eşit değil ama birbirine çok yakın, grafiği görmek lazım diye düşündüm ama

A :Neden h, 0,002'ye yaklaşıırken?

24Ö :0,001 alacaktım, sonuçta sağdan ve soldan aynı derecede yaklaşmak lazım, burada 4,999 yoktu, hani sonuçta ikisini de aynı uzaklık olsun diye onu aldım

A :Limit kavramını kullanman için fonksiyonun kuralını bilmen gerekmez miydi, bir önceki sorudaki gibi?

24Ö :Hatırladığım bu şekilde

A :Sağdan ve soldan birer noktadan baktın, neden diğer noktalardan bakmadın?

24Ö :Aynı uzaklıktaki noktaları seçtim, mesela şurada 4,997'ye baktığımda diğer tarafta 5,003'e bakacak bir değer yoktu. Olsaydı belki onlar da denenebilirdi. Mesela şurada, 5,001 ama 4,999 olmadığı için eşit uzaklıkta bakamadım

A :Bulduğun sonuçların neden ortalamasını aldın?

24Ö :O değerlere çok yaklaşıktır. En azından şu değerlere yakındır. 9 ve 7,5 değildir ama onlar arasında bir değerdir.

24Ö kodlu öğretmen adayı 5 noktasına ne kadar yakın bir aralıktan yaklaşımı incelerse sonucun o kadar doğru olduğunu düşündüğü için sağ ve soldan birer nokta seçmiştir. Ancak yaklaşımların hangi yönde olduğunu anlamak ve buna göre yorum yapmak için sırasıyla bütün aralıkları incelenmesi gerekirdi. Buna ek olarak tablodaki nümerik değerlerden hareketle elde ettiği değişim oranlarını limit durumunda inceleyerek bulunduğu sonuçları türevle ilişkilendirmeye çalışmış olması türevle diğer kavramlar arasındaki ilişkiyi yanlış şekilde değerlendirdiğinin bir göstergesi olarak gözükmektedir.

Beşinci Soru

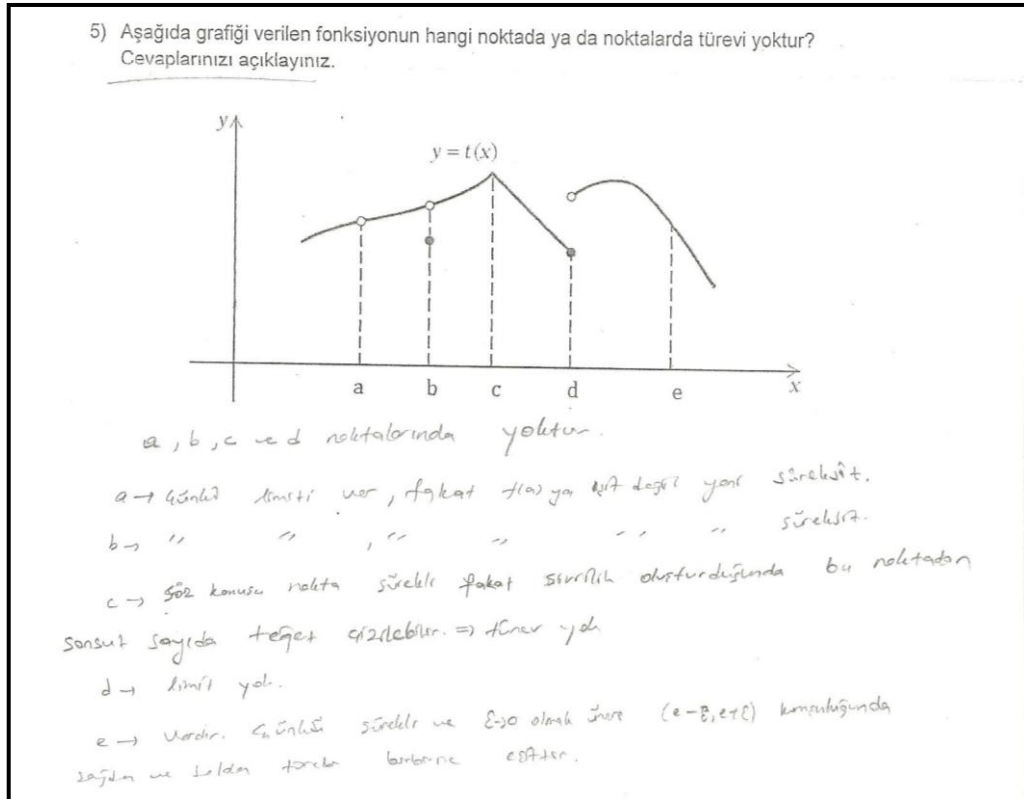
Tablo 11. Öğretmen adaylarının 5. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
5. soru	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
	4	9	5	11	35	78	1	2	45	100

5. soruya sınıfın %78 gibi büyük bir çoğunluğu yanlış yanıt verirken tam doğru ve kısmen doğru yanıt veren öğretmen adaylarının sayısı birbirine yakındır.

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri “Tam Doğru Yanıt” kategorisine yerleştirilen cevapları incelendiğinde öğretmen adayları a, b ve d noktalarında fonksiyonun süreksiz olduğu için türevi olmadığını e noktasında ise sürekli olduğu için türevi olduğunu ifade etmiştir. Öğretmen adayları c noktası için “sürekli olmasına rağmen teğet çizilemeyeceği ya da sonsuz sayıda teğet olduğu için”, “fonksiyonun kırılma noktası için” ve “fonksiyon karakter değiştirdiği için” ifadelerinin kullanarak türevi olmadığını belirtmişlerdir.

Aşağıda 37Ö kodlu öğretmen adayının cevabı yer almaktadır.



Şekil 20. 37Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Mülakat yapılan 6 öğretmen adayı arasından 17Ö ve 37Ö kodlu öğretmen adayları soruya çok boyutlu bir yaklaşım sergileyerek limit, süreklilik ve teğet durumlarını göz önünde bulundurarak doğru cevaba ulaşmışlardır. Aşağıda 37Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

A : Bir fonksiyonun grafiğine baktığında bir noktada ya da herhangi bir noktada türevli olması için hangi şartları ararsın?

37Ö : Aslında ilk olarak aklıma gelen şey o noktada nasıl bir teğetler oluşabildiği. Mesela şu "c" noktası sivri bir uç ve burada sonsuz tane teğet çizilebileceğini biliyorum ben sivri uçlardan sonsuz tane teğet geçer. Ama "e" noktasında tek bir teğet çizebilirim o da bana yardımcı oluyor.

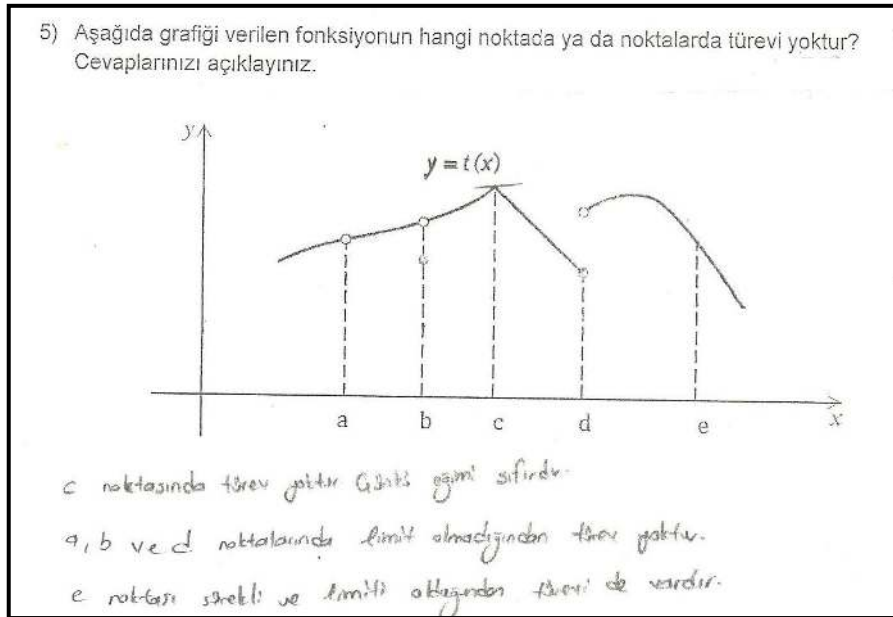
A : Bu yeterli mi?

37Ö : Aslında yeterli değil o noktada tanımlı olması ve süreklilik onları da irdelemem lazım ama ilk bakış açım böyle oluyor böylece çok fazla noktayı atmış olabiliyorum direk.

17Ö kodlu öğretmen adayı da benzer açıklamalar yaparak türevin limit, süreklilik ve teğet kavramlarıyla olan ilişkilerini kullanarak soruya cevap verdiğini belirtmiştir.

Cevabı "Kısmen Doğru Yanıt" olarak sınıflandırılan 5 öğretmen adayı fonksiyonun c noktasında türevinin olmamasıyla ilgili yanlış açıklamalarda bulunmuşlardır.

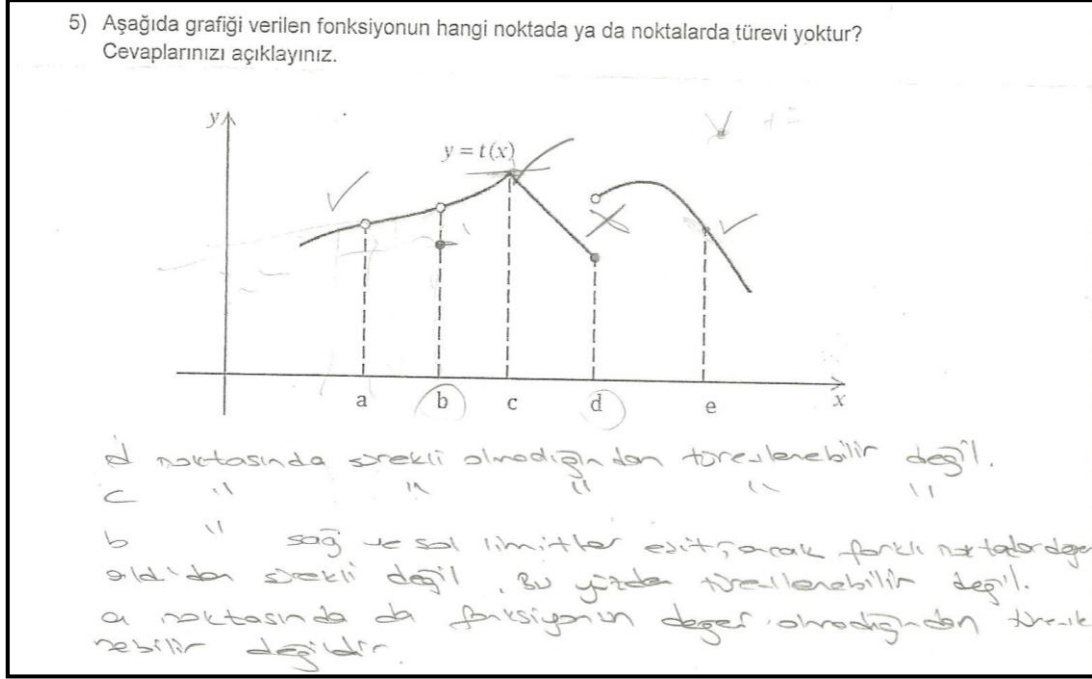
Aşağıda 26Ö kodlu öğretmen adayının cevabı yer almaktadır.



Şekil 21. 26Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

26Ö kodlu öğretmen adayı eğimin sıfır olduğu noktalarda fonksiyonun türevinin olmadığını ifade etmiştir. Benzer bir şekilde 43Ö kodlu öğretmen adayı da teğetin eğiminden yola çıkarak “c noktasında çizilen teğetin eğimi sonsuz olduğu için türevi yoktur” açıklamasını yapmıştır.

28Ö kodlu öğretmen adayı türev-süreklilik ilişkisini kullanarak soruyu cevaplamıştır. Aşağıda bu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 22. 28Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Görüldüğü gibi fonksiyon “c” noktasında sürekli olmasında rağmen öğretmen adayı fonksiyonun bu noktada süreksiz olduğu için türevinin olmadığını belirtmiştir.

16Ö ve 29Ö kodlu öğretmen adayları da sırasıyla “c” noktasının fonksiyonun tepe noktası ve büküm noktası olduğu için türevsiz olduğunu ifade etmişlerdir. Aşağıda 16Ö kodlu öğretmen adayının cevabı yer almaktadır.

Tablo 12'nin devamı

L5.4.Tip	Bir fonksiyonun limitinin olduğu noktalarda türevinin de olduğu düşünülmüş ve “c” noktası kırılma noktası ya da sivri uç olarak yorumlandığı için türev olmadığı ifade edilmiştir.	5 “a, b ve e noktalarında türev vardır. c ve d noktalarında türev yoktur.”
L5.5.Tip	Süreklilik kavramı yanlış yorumlanarak fonksiyonun sürekli olduğu noktalarda türevinin olduğu süreksiz olduğu noktalar da ise türevinin olmadığı ifade edilmiştir.	3 “b, c ve e noktalarında fonksiyon tanımlı ve sürekli olduğundan türevi vardır. a ve d noktalarında fonksiyon sürekli olmadığından türevi yoktur.”

Tablo 12'deki cevaplara bakıldığında yanlış cevap veren öğretmen adaylarının çoğu bir fonksiyonun sürekli olduğu her noktada türevli olduğunu düşünmüşlerdir. 1.tipteki yanlış cevaplarda her ne kadar a, b, d ve e noktaları için doğru cevap verilmiş olsa da c noktası sürekli olduğu için türevlenebilir olarak ifade edilmiştir. Ancak c noktasında fonksiyon sürekli olmasına rağmen bu noktada türevi yoktur ve öğretmen adayları fonksiyonun sürekli oluşu her noktada türevli olduğunu düşünmüşlerdir. 2.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise bir fonksiyonun verilen bir noktada türevinin olması için o noktada sadece limiti olması gerektiğini düşünerek fonksiyonun yalnızca limitinin olmadığı d noktasında türevi olmadığını düşünmüşlerdir. 3.tipte yanlış yapan öğretmen adayları verilen noktaların hepsi yerine sadece birkaç tanesi için çözüm yapmışlardır. Örneğin sadece a ve c noktaları için süreksiz oldukları için türevleri yoktur açıklaması yapan öğretmen adayı diğer noktalar için her hangi bir fikir belirtmemiştir. 4.tipte yapılan yanlışlara baktığımızda öğretmen adaylarının a, b ve noktalarını limitleri olduğu için türevlenebilir olarak ifade etmiş, c noktasında limit olmasında karşın kırılma noktası ya da sivri uç olarak ifade edilerek bu noktada türevinin olmadığını düşünmüşlerdir. Yine, fonksiyonun d noktasında limiti olmadığı için bu noktada türevli olmadığı ifade edilmiştir. 5.tipteki yanlış cevaplarda öğretmen adayları süreklilikten hareketle fonksiyonun istenilen noktada türevi olup olmadığına karar vermişlerdir. Ancak süreklilik tanımı yanlış olarak kullanılmıştır. Örneğin b noktasında fonksiyon açık uçludur yani süreksizdir ancak fonksiyonun b noktasında aldığı bir değer vardır. Fakat öğretmen adayları bu durumu sürekli olarak yorumlayarak bu noktada türev olduğu belirtmişlerdir. Bunun dışında diğer noktalarda fonksiyonun sürekliliğine bakılarak türevli olup olmadığına karar verilmiş

dolayısıyla c noktasındaki süreklilik durumu da fonksiyonun o noktada türevli olarak yorumlanmasına neden olmuştur.

Bu soruya yanıt vermeyen bir öğretmen adayı bulunmaktadır.

Grafiği verilen bir fonksiyonun türevli/türevsiz olduğu noktaların istendiği soruya yanlış cevap veren 24Ö kodlu öğretmen adayı ile gerçekleştirilen mülakat kaydı aşağıda yer almaktadır.

A :Grafiği verilen bir fonksiyona baktığında bir noktada veya herhangi bir noktada türevli olabilmesi için gerekli koşullar nelerdir?

27Ö :Sağdan ve soldan yaklaştığımızda birbirine eşit çıkması lazım hani limitlerinin birbirine eşit olması lazım, değerinin o noktada aynı olması yerine. Mesela “b” noktasında sağdan ve soldan değerler birbirine yaklaşıyor ama o değerde ona eşit değil, ama sonuçta türevi vardır diyebiliyoruz

A :Limitin olması yeterli mi?

27Ö :Evet, sağ ve sol limitin birbirine eşit olması lazım, yani aynı değere yaklaşması lazım

A :O zaman bu mantıkla “a” noktası için ne dedin?

27Ö :“a” noktası için türevi vardır dedim

A :Neden?

27Ö :Çünkü sonuçta şu boşluktaki değere yaklaşıyor. Belki fonksiyonun değeri o değildir ama oradaki eğim sabittir, eğim aynı derecede değişiyor.

A :“b” noktasında?

27Ö :“b” noktasında da aynı şekilde dediğim gibi “a” ile aynı, sadece değeri o noktada farklı, yine türevi vardır diyebiliriz.

A :Peki, “c” noktasında limiti olmasına rağmen neden yoktur dedin?

27Ö :Mesela şöyle şöyleyim, c’den d’ye sabit azalıyor, c’den b’ye doğru sabit azalmıyor biraz daha kavisli azalıyor. Türevleri eşit çıkmaz zaten, eğimle alakalandığını biliyoruz birazda, hani eşit çıkmayacak

A :“d” noktası için?

27Ö :Sağdan ve soldan limitleri eşit değil

A :“e” noktasına bakalım

27Ö :“e” noktası zaten “a”, “b” gibi bir nokta, değer de var o noktada türevlenebilir.

27Ö kodlu öğretmen adayı türevin tanımındaki limit durumunu göz önünde bulundurarak türevi tamamıyla limitle ilişkilendirmiştir ve böylece öğretmen adayı bir fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda da teğet çizilebileceği düşüncesine kapılmıştır. Bu durum öğretmen adayının türev kavramını sadece limitle ilişkilendirmesinden kaynaklanmaktadır. Türevin teğet ve eğim gibi kavramlarla ilişkisini sadece tanım

düzeyinde bilmek ya da derinlemesine bir bilgiye sahip olmamak öğretmen adayının soruyu yorumlayamamasına neden olmuştur. Sadece “c” noktasında limit olmasına rağmen bu noktada sağ ve sol türevlerinin eşit olmayacağını diğer noktalardan farklı olarak yorumlamıştır.

Benzer bir şekilde 27Ö, 25Ö ve 2Ö kodlu öğretmen adayı da bir fonksiyonun limitinin var olduğu bir noktada türevli olabileceğini düşünerek soruya cevap vermişlerdir. Yalnız 2Ö kodlu öğretmen adayı “c” noktası içinde fonksiyonun türevli olduğunu belirtmiştir. Aşağıda 2Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat kaydına yer verilmiştir.

2Ö :Sağdan ve soldan limitleri aynı noktaya geliyorsa, mevcutsa türevi vardır.
Süreklilik farklı.

A :Türevinin olması için limitinin olması yeterli midir?

2Ö :Evet

A :Sağdan ve soldan türevlerinin eşit olması o noktada sağdan ve soldan türevlerinin eşit olduğu anlamına mı gelir?

2Ö :Birbirine eşit olması o noktada türevinin olduğunu gösterir.

A :Süreklilik?

2Ö :Süreklilik şart değil

Diğer öğretmen adayları her ne kadar 2Ö kodlu öğretmen adayıyla aynı fikirde olmalarına rağmen “c” noktasındaki farklılığı göz önüne alarak bu noktada türev olmadığını belirtmişlerdir. 2Ö kodlu öğretmen adayı hiçbir nokta için farklılık gözetmeden mülakatta yapmış olduğu tanımı uygulayarak verilen noktalar için soruya cevap vermiştir. 2Ö kodlu öğretmen adayı daha önceki sorularda türevin sadece limit olmadığını teğet, eğim ve değişim açısından da açıklanabileceğini belirtmiş olmasına rağmen bu bilgilerinin yüzeysel olması nedeniyle soruyu farklı boyutlarıyla inceleyememiştir.

4.2. Türev-Değişim Oranı İlişkisine Yönelik Bulgular

Bu araştırma kapsamında türev değişim oranı ilişkisine yönelik öğretmen adaylarının anlamalarını ve karşılaştıkları zorlukları ortaya koymak amacıyla 3 soruya yer verilmiştir. Bu başlık altında her bir soruya ilişkin öğretmen adaylarının yazılı sınava verdikleri cevaplar ve klinik mülakatlardaki açıklamaları analiz edilmiş ve ayrı ayrı sunulmuştur.

Birinci Soru

Tablo 13. Öğretmen adaylarının değişim oranı 1a sorusuna verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
1a. soru	11	24	7	16	25	56	2	4	45	100

1.sorunun a şıkkına yanlış yanıt veren öğretmen adayları sınıfın %56'sına karşılık gelmektedir. Sınıfın %24'ü soruya tam doğru yanıt, %16 ise kısmen doğru yanıt vermiştir.

Cevabı "Tam Doğru Yanıt" olarak sınıflandırılan 11 öğretmen adayının soruya verdiği cevaplar incelendiğinde 7 öğretmen adayının ortalama hızı verecek bir formül elde ettikleri ve bu formülü kullanarak istenen noktalarda ortalama hızları buldukları

görülmüştür. Diğer 4 öğretmen adayı her bir aralık için tek tek $v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ifadesini

kullanarak soruya cevap verdikleri görülmüştür.

Aşağıda 26Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.

1) Bir hareketlinin t zamanına bağlı olarak aldığı yol $x(t) = 4t^2 + 3$ fonksiyonu ile veriliyor (t saniye, x metre)

a) Hareketlinin $t = 1$ ve $t = 1 + h$ zaman aralığındaki ortalama hızını h'nin aşağıdaki değerleri için bulunuz.

i) $h = 0,1$ ii) $h = 0,01$ iii) $h = 0,001$

$x(1) = 4 \cdot 1 + 3 = 7$, $x(1+h) = 4 \cdot (1+h)^2 + 3 = 4(1+2h+h^2) + 3 = 7 + 8h + 4h^2$

geçen zaman $(h+1) - 1 = h$

alınan yol $x(1+h) - x(1) = 7 + 8h + 4h^2 - 7 = 4h^2 + 8h$

$v_{ort} = \frac{4h^2 + 8h}{h} = \frac{4h(h+2)}{h} = 4h + 8$

i) $h = 0,1$ için $v_{ort} = 4 \cdot (0,1) + 8 = 8,4 \text{ m/s}$

ii) $h = 0,01$ için $v_{ort} = 4 \cdot (0,01) + 8 = 8,04 \text{ m/s}$

iii) $h = 0,001$ için $v_{ort} = 4 \cdot (0,001) + 8 = 8,004 \text{ m/s}$

Şekil 24. 26Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Görüldüğü gibi 26Ö kodlu öğretmen adayı ortalama hızı $4h + 8$ olarak formüle etmiş ve bu formülü kullanarak istenilen aralıklardaki ortalama hızları hesaplamıştır. Diğer 6 öğretmen adayı da soruya benzer şekilde cevap vermişlerdir.

Aşağıda $v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ifadesini kullanarak soruya cevap veren 27Ö kodlu öğretmen

adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.

1) Bir hareketinin t zamanına bağlı olarak aldığı yol $x(t) = 4t^2 + 3$ fonksiyonu ile veriliyor (t saniye, x metre)

a) Hareketinin $t = 1$ ve $t = 1 + h$ zaman aralığındaki ortalama hızını h'nin aşağıdaki değerleri için bulunuz.

i) $h = 0,1$ ii) $h = 0,01$ iii) $h = 0,001$

i) $t = 1$ için $4 \cdot 1^2 + 3 = 7$ $t = 1 + h = 1 + 0,1 = 1,1$ için $4 \cdot (1,1)^2 + 3 = 4,84 + 3 = 7,84$

ortalama hız $\frac{7,84 - 7}{0,1} = \frac{0,84}{0,1} = 8,4 \text{ m/s}$

ii) $t = 1$ için 7 ve $t = 1 + h = 1 + 0,01 = 1,01$ için $4 \cdot (1,01)^2 + 3 = 4,0804 + 3 = 7,0804$

ortalama hız $\frac{7,0804 - 7}{0,01} = \frac{0,0804}{0,01} = 8,04 \text{ m/s}$

iii) $t = 1 + h = 1 + 0,001 = 1,001$ için $4 \cdot (1,001)^2 + 3 = 4,008004 + 3 = 7,008004$ $\Rightarrow \frac{7,008004 - 7}{0,001} = \frac{0,008004}{0,001} = 8,004 \text{ m/s}$

b) a şıkında verdiğiniz cevapları kullanarak hareketinin $t = 1$ deki anlık hızını bulunuz.

Şekil 25. 27Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Diğer 3 öğretmen adayı da soruya benzer şekilde cevap vermiştir.

Mülakat yapılan 6 öğretmen adayından üçü (2Ö, 27Ö, 37Ö) soruya tam doğru cevap veren öğretmen adaylarıdır. Aşağıda bu öğretmen adayları arasında 37Ö kodlu öğretmen adayının mülakatı yer almaktadır.

37Ö :Burada işin doğrusu biraz fizik bilgimi kullanmaya çalıştım. Öncelikle yolun zamana bağlı fonksiyonu verilmiş, bu fonksiyonu kullanarak yapmaya çalıştım

A :Çözümünü anlatır mısın?

37Ö :Aslındaki y'deki düşey farkın x eksenindeki yatay farkına oranından, eğimden gitmeye çalışmışım. Dolayısıyla eğimi kullanarak gördüğüm değerleri yerine yazdım fonksiyonda. Sırasıyla 8,4, 8,04 ve 8,004 değerleriyle karşılaştım burada

Mülakattan da anlaşılacağı gibi öğretmen adayı y'deki farkla yolları farkı ve x'deki farkla zamanları farkını ifade ederek tıpkı teğetin eğimini hesaplar gibi ortalama hızları bulmuştur. Mülakat yapılan diğer 2Ö ve 27Ö kodlu öğretmen adayları soruya doğru çözmüş ve birbiriyle benzer açıklamalar yaparak ortalama hızı bulduklarını ifade etmişlerdir

Cevabı “Kısmen Doğru Yanıt” olarak sınıflandırılan 7 öğretmen adayından 5'i

$$v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ ifadesini kullanarak sorunun sadece ilk şıkkı için cevap vermişlerdir.}$$

Aşağıda 16Ö kodlu öğretmen adayının cevabı yer almaktadır.

1) Bir hareketlinin t zamanına bağlı olarak aldığı yol $x(t) = 4t^2 + 3$ fonksiyonu ile veriliyor (t saniye, x metre)

a) Hareketlinin $t = 1$ ve $t = 1 + h$ zaman aralığındaki ortalama hızını h'nin aşağıdaki değerleri için bulunuz.

i) $h = 0,1$ ii) $h = 0,01$ iii) $h = 0,001$

i) $h = 0,1$ için $4(1,1)^2 + 3 = 4 \cdot \frac{121}{100} + 3 = \frac{196}{25} = 7,84$

$4 + 3 = 7 \Rightarrow 7,84 - 7 = 0,84$ $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0,84}{0,1} = 8,4$

ii) $h = 0,01$ için - - -

iii) - - -

Şekil 26. 16Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

7Ö, 17Ö, 18Ö ve 45Ö kodlu öğretmen adayları da sorunun ilk şıkkını tıpkı 16Ö kodlu öğretmen adayı gibi çözmüştür.

42Ö ve 43Ö kodlu öğretmen adayları ise hareketlinin verilen noktalardaki hızlarını hesaplamış ve ortalamalarını alarak cevaba gitmişlerdir. Aşağıda 42Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.

1) Bir hareketlinin t zamanına bağlı olarak aldığı yol $x(t) = 4t^2 + 3$ fonksiyonu ile veriliyor (t saniye, x metre)

a) Hareketlinin $t = 1$ ve $t = 1 + h$ zaman aralığındaki ortalama hızını h'nin aşağıdaki değerleri için bulunuz.

i) $h = 0,1$ ii) $h = 0,01$ iii) $h = 0,001$

$t = 1$ için $x(1) = 7$

$\frac{dx}{dt} = 8t$, $\frac{dx}{dt} = 8t$

i) $\rightarrow x'(1) = 8$, $x'(1,1) = 8,8 \rightarrow v_{ort} = \frac{8,8 + 8}{2} = 8,4$

ii) $\rightarrow x'(1) = 8$, $x'(1,01) = 8,08 \rightarrow v_{ort} = \frac{8 + 8,08}{2} = 8,04$

iii) $\rightarrow x'(1) = 8$, $x'(1,001) = 8,008 \rightarrow v_{ort} = 8,004$

Şekil 27. 42Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Soruya kısmen doğru yanıt veren 17Ö kodlu öğretmen adayı ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda yer almaktadır.

A :Anlatır mısın nasıl çözdüğünü?

17Ö :Türevden çözüp çözmeyeceğimi bayağı düşünmüşüm sonradan da normalde de hani toplam yol bölü toplam zamanı kullanarak çözmeye çalıştım

A :Şu bulduğun değerlerden bahsedelim. 7,84 ve 7 bunlar hangi değerler?

17Ö : $t=1$ için 7 ve $t=1,1$ için 7,84 ü buldum.

A :Nedir bu değerler?

17Ö :O zamanlarda alınan yol, yolları farkını zamanları farkına bölerek ortalama hızını bulmaya çalıştım. Fizikte öyle çözdüğümüzü hatırlıyorum.

A :Neden sadece birinciyi çözdün?

17Ö :Diğerlerini de aynı şekilde çözebilirdim o yüzden tekrardan onları çözmek istemedim.

17Ö kodlu öğretmen adayıyla yapılan mülakat sonucunda öğretmen adayının ortalama hız kavramını bildiği anlaşılmaktadır. Ancak öğretmen adayı sadece verilen ilk aralık için çözüm yapmış ve diğer aralıklarla ilgili çözüm yolunu bildiği için çözmeye ihtiyacı hissetmemiştir.

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 25 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 14. Öğretmen adaylarının 1a sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
D1a.1tip	Hızları farkı ortalaması hesaplanarak cevaba gidilmiştir. Benzer şekilde hızlarının farkı da cevap olarak verilmiştir.	$x'(t) = v(t) = 8t$ $i)V(1) = 8, V(1,1) = 8,8 \Rightarrow V_{ort} = \frac{8,8-8}{2} = \frac{0,8}{2} = 0,4$ $ii)V(1) = 8, V(1,01) = 8,08 \Rightarrow V_{ort} = \frac{8,08-8}{2} = \frac{0,8}{2} = 0,04$ $iii)V(1) = 8, V(1,001) = 8,008 \Rightarrow V_{ort} = \frac{8,008-8}{2} = \frac{0,8}{2} = 0,004$	6
D1a.2.Tip	Bir noktadaki türevi ortalama hızın hesaplanmasında kullandıkları görülmüştür.	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(h+1)^2 + 3 - 7}{h} = 4h + 8$ $i)4.0,1 + 8 = 8,4$ $ii)4.0,01 + 8 = 8,04$ $iii)4.0,001 + 8 = 8,004$	5

Tablo 14'ün devamı

D1a.3.Tip	x=v.t denklemini kullanarak verilen zaman aralıklarında hız hesaplanmaya çalışılmıştır.	$t = 1, x(t) = 7, yol = hız.zaman \Rightarrow hız = 7$ $t = 1 + h = 1,1$ $x(t) = 7,84 \Rightarrow 7,84 = hız.1,1 \Rightarrow hız = 7.12$	4
D1a.4.Tip	Verilen noktalarda hareketlinin aldığı yollar toplamı zamanlar toplamına bölünerek cevap verilmiştir.	$V_{ort} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = \frac{7 + 4(1,1)^2 + 3}{2,1} \cong 7$ $V_{ort} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = \frac{7 + 4(1,01)^2 + 3}{2,01} \cong 7$ $V_{ort} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = \frac{7 + 4(1,001)^2 + 3}{2,001} \cong 7$	3
Diğer	Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil 7 olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.		

Tablo 14'e bakıldığında soruya 1.tipte yanlış cevap veren 6 öğretmen adayı bulunmaktadır. Öğretmen adayları soruda verilen zamana bağlı yol denkleminin türevini aldıktan sonra istenilen aralıktaki ortalama hız bulmak için sırasıyla $t=1$ ve $t=1,1$ değerlerini elde ettikleri denklemde yerine koymuşlardır. Buldukları değerleri hareketlinin o noktalardaki hızları olarak düşünmüş ve bu aralıkta ortalama hızı bulmak için bu değerleri birbirinden çıkartarak sonuca gitmeye çalışmışlardır. Bazı öğretmen adayları tabloda belirtilenden farklı olarak bu değerlerin ortalama hızı verdiğini belirtmiş bazıları ise buldukları bu farkı 1 ile 1,1 arasında geçen zamana yani 0,1'e bölerek cevap vermeye çalışmışlardır. Benzer işlemler sorunun diğer adımlarında da yapılarak çözüme devam edilmiştir. 2.tipte yanlış yapan öğretmen adayları h değerinin 0'a yaklaşan değerlerinde istenen ortalama hızları bulmak için türevin tanımından yararlanarak tabloda verildiği gibi sonucu $4h+8$ olarak bulmuştur. Ancak işlemin devamında h yerine sıfır yazılarak sonuca gidilmemiş, $4h+8$ ifadesinde h yerine değerler verilerek ortalama hız hesaplanmaya çalışılmıştır. Bazı öğretmen adayları türevin tanımında h sıfıra giderken ifadesi yerine h, 0,001'e ya da h, x'e giderken ifadelerini kullanmıştır. Burada öğretmen adayları çok küçük bir aralıkta ortalama hız istendiğinden bunu limitle ifade etmenin daha doğru olduğunu düşünerek ortalama hızı veren oranın limitini almayı tercih etmişlerdir. 3.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ilk olarak verilen denklemde t'nin 1,1, 1,01 ve 1,001 değerlerine karşılık gelen yolu bulmuş ve bu değerleri "x=v.t" denkleminden yerine yazarak buradan

hareketlinin ortalama hızını elde etmeye çalışmıştır. 4.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise toplam yol bölü toplam zaman ifadesini yanlış kullanarak verilen zaman aralıklarına karşılık gelen yol ve zaman değerlerinin ayrı ayrı toplayarak birbirine oranlamıştır.

Soruya yanıt vermeyen iki öğretmen adayı bulunmaktadır.

Soruya yanlış cevap veren öğretmen adaylarından biri olan 24Ö kodlu öğretmen adayı soruyu çözerken ezberden giderek çözüm yapmaya çalışmış ve mülakat esnasında yanlışlarının farkına varmıştır. Aşağıda bu öğretmen adayına ait mülakat yer almaktadır.

A :İlk soru için çözümünü anlatır mısın?

24Ö :Bildiğimiz $x = v.t$, direk oradan yaptım. Fonksiyon da yerine yazarak, hani türevle yapılabilir mi diye düşündüm baktım türev ani hızı veriyordu, ortalama hızı normal bildiğimiz son zamanda alınan yol, ilk zamanda alına yol bölü zaman olarak.

A :Toplam yol 7 ve 7,84'ü nasıl hesapladın?

24Ö :Birincisi için $x=0,1$ 'i aldım, diğeri için 1,01 aldım bunları fonksiyonda yerine yazdım. Benzer şekilde diğerlerini buldum

A : Burada 1,den 1,01'e giderken 2,1 saniye mi geçmiş oluyor?

24Ö :Şuan hatamı fark ettim, yanlış yaptım. Çıkarmam lazımdı.

A :Toplam yolu nasıl hesapladın?

24Ö :1'deki gittiği yolu ile 1,1'de gittiği yolu topladım. Birinde 7 diğerinde 7,84 çıkıyor onları topladım ama şu an düşündüğümde farkı almam daha iyi olurdu. Birinci de belli bir yol almış zaten, ikincide de belli bir yol almış. İkinci ile birinciye çıkarmam lazımdı

Görüldüğü gibi öğretmen adayının konuyla ilgili ezberden bir çözüm yapması böylesine kolay sayılabilecek bir sorunun çözümünde bile yanlış bir şekilde cevap vermesine neden olmuştur. Benzer şekilde 25Ö kodlu öğretmen adayı da toplam yol toplam zaman ifadesinden hareketle ezberden çözüme gitmiş ve formülü yanlış yorumlayarak soruya cevap vermiştir. Aşağıda bu öğretmen adayının mülakatı yer almaktadır.

A :Neden birinci türevini aldın?

25Ö :Birinci türev hızı veriyor, bende 1,1, 1,01 ve 1,001 değerlerini yerine yazarak hızları buldum

A :Bu bulduğun değerler ortalama hızlar mı?

25Ö :Hayır, anlık hızı veriyor o zamanlarda

A :Ortalama hızları nasıl elde ettin?

25Ö :Ortalama hızı toplam yol bölü toplam zamandan buluyorum. 1 zamanındaki değeri de buldum yine türevde yerine koyarak

A :Sonra?

25Ö :1,1 deki hızla 1 deki hızları çıkarıp geçen zaman böldüm sırayla bu işlemleri diğer zamanlar içinde yaparak ortalama hızları elde ettim

Görüldüğü gibi öğretmen adayı toplam yol bölü toplam zaman formülünden ortalama hızları hesapladığını belirtmesine rağmen hızları farkını geçen zamana bölerek soruyu çözmüştür. Ayrıca öğretmen adayı anlık hız olarak bulduğunu belirttiği değerleri soru kâğıdında metre olarak belirtmiş ve bu hatasını mülakat esnasında fark etmiştir. Buradan da anlaşılacağı gibi öğretmen adayının kavramları karıştırdığı ve birbiriyle ilişkilendiremediği ortaya çıkmıştır.

İkinci Soru

Tablo 15. Öğretmen adaylarının 1b sorusuna verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
1b.soru	30	67	1	2	8	18	6	13	45	100

Sınıfın yarısında fazlası (%67) 1.sorunun b şikkına tam doğru yanıt vermiştir. Yanlış yanıt veren kişi sayısı sınıfın %18'i iken sınıfın %13'ü soruya yanıt vermemiştir.

Cevabı "Tam Doğru Yanıt" olarak sınıflandırılan 30 öğretmen adayının soruya verdiği cevaplar incelendiğinde hareketlinin $t=1$ 'deki anlık hızı fonksiyonun o noktadaki türevi alınarak hesaplanmıştır. Sadece üç öğretmen adayı çözümlerine ek olarak açıklama yapmışlardır. Aşağıda 26Ö kodlu öğretmen adayının soruya vermiş olduğu cevap yer almaktadır.

b) a şikkında verdiğiniz cevapları kullanarak hareketlinin $t = 1$ deki anlık hızını yaklaşık olarak hesaplayınız.
 Yolun zamana göre türevini alarak anlık hızı bulunuz.
 $x'(t) = 8t \rightarrow v_a = 8.1 = 8 \text{ m/s}$

Şekil 28. 26Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Benzer şekilde 22Ö ve 3Ö kodlu öğretmen adayları da çözümlerine ek olarak açıklama yapmıştır.

Soruya doğru cevap veren öğretmen adaylarının yarısı fonksiyonun $t=1$ noktasındaki türevini hesaplarırken türevin tanımından yararlanmış diğer kısmı ise türevin formülünü kullanmışlardır. Aşağıda 24Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.

b) a şıkında verdiğiniz cevapları kullanarak hareketlinin $t = 1$ deki anlık hızını yaklaşık olarak hesaplayınız.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(1+h)^2 + 3 - 4 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^2 + 8h + 4 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4h + 8)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} 4h + 8 = 8$$

Şekil 29. 24Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Görüldüğü gibi türevin tanımından yararlanarak $t=1$ noktasındaki anlık hız hesaplanmıştır.

Soruya tam doğru cevap veren öğretmen adaylarının cevaplarına bakıldığında 20 öğretmen adayı sorunun a şikkını yanlış çözmüş olmalarına rağmen sorunun bu kısmını doğru olarak çözmüşlerdir.

Mülakat yapılan 6 öğretmen adayından dördü (24Ö, 25Ö, 27Ö, 37Ö) soruya tam doğru yanıt vermiştir. 24Ö, 25Ö ve 27Ö kodlu öğretmen adayları b şikkına cevap verirken a şikkında buldukları değerleri kullanmamış ve bir noktada birinci türevin anlık hızı verdiğini belirterek soruyu çözmüşlerdir. Aşağıda 27Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

A : Peki, bu cevabı verirken a şikkından yararlandın mı?

27Ö :Kullanmadım ben direk sonuca gittim.

A :Nasıl çözdün?

27Ö :Bildiğim bir kural olduğu için, o noktadaki türev anlık hızı verir.

Görüldüğü gibi öğretmen adayı bu soruda ortalama hız ile anlık hız arasındaki bağlantıyı kuramadığından direk türevin fiziksel yorumunu kullanarak soruya cevap vermiştir. Öğretmen adayları bu konuyla ilgili formül düzeyinde bilgilere sahip oldukları için bu iki kavram arasındaki ilişkiyi yorumlayamamıştır. Bu öğretmen adaylarından farklı olarak 37Ö kodlu öğretmen adayı hem a şikkındaki verilerden yararlanmış hemde türevin fiziksel yorumunu kullanarak soruyu çözmüştür. Aşağıda bu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

A :b şıkında sen bu cevabı verirken a şıkında verdiğin cevaplardan yararlandın mı?

37Ö :Aslında evet yararlandım. Bir nevi limit gibi düşündüm gördüğüm değerler sürekli 8'e doğru yaklaşmakta olduğunun gördüm buda bana anlık hızın 8'e yaklaşmakta olduğunun haberini verdi.

A :Peki, burada yaptığın şey neydi?

37Ö :Direk türevi uyguladım, türevle de bunu garantilemiş oldum.

Anlaşılabacağı üzere öğretmen adayı bu soruda ortalama ve anlık hız kavramları arasındaki ilişkinin farkında bir şekilde a şıkında elde ettiği yaklaşımları kullanarak sorunun cevabını tahmin etmiş ve türev yardımıyla anlık hızı hesaplayarak soruya cevap vermiştir.

Cevabı "Kısmen Doğru Yanıt" olarak sınıflandırılan bir öğretmen adayı bulunmaktadır. 10Ö kodlu öğretmen adayı sadece hareketlinin yol denkleminin zaman göre türevini hesaplayıp bırakmıştır. Bu öğretmen adayının soruya verdiği cevap aşağıda yer almaktadır.

b) a şıkında verdiğiniz cevapları kullanarak hareketlinin $t = 1$ deki anlık hızını yaklaşık olarak hesaplayınız.

$$x'(t) = 8t$$

Şekil 30. 10Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Cevabı "Yanlış" olarak sınıflandırılan 8 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 16. Öğretmen adaylarının 1b sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
D1b.1.Tip	Hareketlinin $t=1$ 'deki anlık hızı 1.saniyede aldığı yolun zamana oranı şeklinde yorumlanmıştır.	$V = \frac{\text{ToplamYol}}{\text{Zaman}}$ $V = \frac{4t^2 + 3}{1} = \frac{4 + 3}{1} = 7$ $(t = 1)$	4
	Diğer	Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	4

Tablo 16'ya bakıldığında soruya yanlış cevap veren öğretmen adaylarının çoğu soruda verilen yol-zaman denklemini kullanarak t yerine 1 yazmış ve hareketlinin aldığı yolu 7 olarak hesaplamıştır. Daha sonra bulduğu yolu 1'e bölerek hareketlinin hızını 7 olarak hesaplamışlardır. Ancak bu hareketlinin yol boyunca hızıdır ve soruda öğretmen adaylarından $t=1$ anındaki anlık hız istenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının sorunun a şıkında buldukları değerlerden hareketle b şıkına cevap vermeleri istenmesine rağmen buldukları değerleri kullanmadan b şıkına cevap verdikleri gözlenmiştir. Öğretmen adayları sorunun türev ile olan bağlantısını bilmedikleri bu yüzden de basitçe bir denklem kullanarak hareketlinin anlık hızını buldukları düşünülmektedir. 6 öğretmen adayı ise soruya yanıt vermemiştir.

Birinci sorunun a şikkıyla bağlantılı olan b şıkına yanlış cevap veren iki öğretmen adayı sorunun ilk bölümünde buldukları ortalama hızlarla ikinci kısımda istenen anlık hız arasındaki ilişkiyi görememişlerdir. Aşağıda 2Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat yer almaktadır.

- A :1.sorunun b şıkında a'da bulduğün değerleri mi kullanarak cevaba gittin?
 2Ö :Ben bu soruyu çözerken bu şekilde düşündüm formül elde etmeye çalıştım ve bunu buldum
 A :Verilen denklemde x yerine 1 mi yazdın?
 2Ö :Evet
 A :Peki, bu bize neyi verir?
 2Ö :Yolu verir, burada tam olarak cevap olarak yazmadım...

2Ö kodlu öğretmen adayı konuyla ilgili bilgilerinin yeterli düzeyde olmaması nedeniyle ilk kısımda elde ettiği ortalama hızlarla anlık hız arasında bir bağlantı kuramadığı gibi soruyu çözmeye yönelik yaptığı işlemlerden de bir sonuç çıkaramamıştır. Benzer biçimde 17Ö kodlu öğretmen adayı da sorunun ilk kısmını çözmüş olmasına rağmen b şikkını boş bırakmıştır. Her iki öğretmen adayı sorunun şıkları arasındaki bağlantıyı göremedikleri gibi türevle anlık hız arasındaki ilişkiyi de bilmemektedirler.

Üçüncü Soru

Tablo 17. Öğretmen adaylarının 2a sorusuna verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
2a.soru	26	57	4	9	12	27	3	7	45	100

2.sorunun a şıkkına yanlış cevap veren öğretmen adayı sayısı sınıfın %57'sine karşılık gelirken yanlış yanıt veren öğretmen adayı sayısı sınıfın %27'sine karşılık gelmektedir.

Cevabı "Tam Doğru Yanıt" olarak sınıflandırılan 27 öğretmen adayının

$V_{ort} = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2}$ tanımını kullanarak soruyu cevapladıkları görülmüştür. Aşağıda 30Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.

2) Aşağıdaki tabloda bir hareketlinin yol (cm)-zaman (sn) değişimine ait değerler verilmiştir.

t	0	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	2
x(t)	6,000	83,040	89,318	89,932	90,000	90,068	90,678	96,640	142,000

a) Hareketlinin

i) $0 \leq t \leq 1$

ii) $1 \leq t \leq 2$ zaman aralıklarındaki ortalama hızını bulunuz.

i) $V_{ort} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{90,000 - 6,000}{1 - 0} = 84,000 \text{ cm/sn}$

ii) $V_{ort} = \frac{142,000 - 90,000}{2 - 1} = \frac{52,000}{1} = 52,000 \text{ cm/sn}$

Şekil 31. 30Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Diğer 26 öğretmen adayı da benzer şekilde soruya cevap vermiştir.

Mülakat yapılan öğretmen adaylarından üçü (24Ö, 27Ö, 37Ö) soruya tam doğru olarak yanıt vermişlerdir. Aşağıda 24Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

A :Peki, 2.soruda ortalama hız istenirken ne yaptığınızı anlatır mısınız?

24Ö :Ortalama hız dediğimiz normal bildiğimiz, türevle alakası yok bunun. Birinci sorunun a şıkkında olduğu gibi toplam yol bölü toplam zaman olacaktı. Mesela $[0,1]$ aralığında 6 cm ile başlamış 90 cm ile bitirmiş, arada 84 cm almış geçen zamanda 1 saniye, böldüğümüzde 84.

A :Diğer şıkta da aynı şeyi mi yaptın?

24Ö :Aynı çözüm benzer şekilde

Bu öğretmen adayı tablodaki değerleri doğru bir şekilde kullanarak istenilen aralıklardaki ortalama hızları hesaplamışlardır. 27Ö ve 37Ö kodlu öğretmen adayları da benzer açıklamalar yaparak soruyu çözdüklerini ifade etmişlerdir.

Cevabı “Kısmen Doğru Yanıt” olarak sınıflandırılan 3 öğretmen adayı ortalama hızın hesaplanması istenen iki farklı aralıktan sadece birini doğru olarak çözmüş diğerinde ise basit işlem hatası yapmıştır. Aşağıda 21Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.

2) Aşağıdaki tabloda bir hareketlinin yol (cm)-zaman (sn) değişimine ait değerler verilmiştir.

t	0	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	2
x(t)	6,000	83,040	89,318	89,932	90,000	90,068	90,678	96,640	142,000

a) Hareketlinin

i) $0 \leq t \leq 1$

ii) $1 \leq t \leq 2$ zaman aralıklarındaki ortalama hızını bulunuz.

$x(t) = V(t) \cdot t$

$\Delta x = 90,000 - 6,000 = 84,000$

$\Delta t = 1 - 0 = 1$

i) $\Delta V = \frac{84,000}{1} = 84,000$

ii) $\Delta x = 142,000 - 90,000 = 52,000$

$\Delta t = 2 - 1 = 1$

$\Delta V = \frac{52,000}{1} = 52,000$

Şekil 32. 21Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Görüldüğü gibi öğretmen adayı II. şıkta çıkarma işlemini yanlış yapmıştır.

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 12 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 18. Öğretmen adaylarının 2a sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
D2a.1.Tip	Toplam yol ve toplam zaman yanlış olarak yorumlanmış ve birbirine oranlanarak ortalama hız elde edilmiştir.	$V_{ort} = \frac{90,000 + 89,932 + \dots + 6,000}{0 + 0,9 + 0,99 + 0,999 + 1} = \frac{358,290}{4,898} \approx 73$ $V_{ort} = \frac{90,000 + 90,068 + \dots + 142,000}{1 + 1,001 + 1,01 + 1,1 + 2} = \frac{509,386}{6,411} \approx 77$	3

Tablo 18'in devamı

D2a.2.Tip	Ortalama hızlar limit durumunda incelenerek hesaplanmaya çalışılmıştır.	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{90,000 - 83,040}{1} = 6,960$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(1)}{2 - 0} = \frac{142,000 - 90,000}{2 - 1} = 52,000$	2
D2a.3.Tip	Grafik temsil	Tabloda verilen nümerik veriler sadece grafik grafiğe aktarılarak soruya cevap verilmiştir.	3
	Diğer	Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	4

Soruya yanlış cevap veren öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde 1.tipte yanlış cevap veren öğretmen adayları toplam yolun toplam zamana oranından yararlanarak verilen aralıktaki ortalama hızı hesaplamaya çalışmıştır. Fakat her bir zaman dilimine karşılık gelen yolu ve her bir zaman aralığını ayrı ayrı toplayarak birbirine oranlamış ve yanlış cevaba gitmişlerdir. Burada öğretmen adaylarının ortalama hız kavramıyla ilgili eksik veya yanlış bilgilere sahip oldukları çok açıkça görülmektedir. 2.tipte yanlış yapan öğretmen adayları seçtikleri aralıklardaki ortalama hızları limit durumunda incelemeye çalışmış ve soruyu türev kavramıyla bağdaştırarak çözmek istemişlerdir. 3.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise tabloda verilen değerleri kullanarak sadece grafik çizerek soruyu cevaplandırmaya çalışmışlardır. 3 öğretmen adayı ise soruya yanıt vermemiştir.

Soruya yanlış cevap veren öğretmen adayları arasından 17Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda verilmiştir.

17Ö :*[0,1] aralığındaki değerleri bulup 1'e soldan yaklaştım, tablodaki değerleri verip sonra tekrar sağdan yaklaştım*

A :*Burada fonksiyonun kuralı verilmemiş, limiti kullanmasan da aynı şey olur muydu?*

17Ö :*Aslında olurdu, çünkü limit kullanmama gerek yok gerçekten de*

A :*Peki, neden limit kullanmak istedin?*

17Ö :*1'e soldan yaklaştığımı ifade edebilmek için hani sol taraftaki değerleri kullandım*

A :*Bulduğun bu sonuç [0,1] aralığındaki ortalama hız mıdır?*

17Ö :*Ortalama hızdır. Hepsinde farklı değerler çıkıyor, bilmiyorum o anlık hızda olabilir.*

17Ö kodlu öğretmen adayının ortalama hız ile anlık hız arasındaki nasıl bir ilişki olduğu konusunda tam olarak bir fikri olmadığından sorunun çözümünde güçlük çekmiştir. 1'e soldan yaklaşırken verilen aralıklardaki değişim oranlarının limitini alarak soruyu

türevle ilişkilendirmeye çalışmıştır. Bu durum ortalama hız yerine anlık hızı hesaplamasına neden olmuştur. 2Ö kodlu öğretmen adayı ortalama hızı tabloda verilen değerleri grafiğe dökerek çözmeye çalışmış ancak bunda başarılı olamamıştır. Aşağıda 2Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

- A :Grafik çizmişsin bu sorunun cevabı için yeterli midir?
 2Ö :Grafiğin altında kalan alan hızı verir.
 A :O alandan hareketle mi ortalama hızı bulmaya çalıştın?
 2Ö :Evet, ama grafik yeterli olmuyor o yüzden hızı bulamadım
 A :Başka bir şekilde çözmeyi denemedin mi?
 2Ö :1.sorudaki ortalama hızı hesapladığım gibi olabilir
 A :Nasıl mesela?
 2Ö :Aradaki mesafe, 90'dan 6'yı çıkartırsak 84 olur. 1'e böleriz
 A :Neden?
 2Ö :Geçen zaman olduğu için 0'dan 1'e

2Ö kodlu öğretmen adayı bir önceki soruda yolun zamana bağlı denkleminin verildiği soruda ortalama hızı bulmuş olmasına rağmen nümerik değerlerin verildiği bu soruda ortalama hızı hesaplayamamıştır. Öğretmen adayı cebirsel ifadelerin yer aldığı soruları çözebilmesine rağmen tablodaki verileri yorumlayamadığından soruyu çözememiştir. Bu yüzden grafik çizerek soruya cevap aramaya çalışmıştır.

25Ö kodlu öğretmen adayı tabloda verilen değerlerle soruda istenilenler arasında bir bağlantı kuramadığını belirterek soruyu boş bırakmıştır.

Dördüncü Soru

Tablo 19. Öğretmen adaylarının 2b sorusuna verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
2b. soru	0	0	0	0	24	53	21	47	45	100

2.sorunun b şıkkına öğretmen adaylarından hiçbiri tam doğru veya kısmen doğru yanıt verememiştir. Sınıfın %53'ü soruya yanlış cevap verirken geriye kalan %47'lik kısım soruya yanıt vermemiştir.

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 24 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 20. Öğretmen adaylarının 2b sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
D2b.1.Tip	Sağdan veya soldan birer tane aralık seçilerek bu aralıktaki ortalama hız hareketlinin $t=1$ anındaki hızı olarak belirtilmiştir.	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{90 - 89,932}{1 - 0,999} = \frac{0,068}{0,001} = 68$ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{90,068 - 90}{1,001 - 1} = \frac{0,068}{0,001} = 68$	4
D2b.2.Tip	Yolun zamana bağlı cebirsel formülü olan $x(t)$ 'yi bilinmediğinden limit hesaplanamamıştır.	$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{x(t) - x(1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{x(t) - 90}{t - 1}$	4
D2b.3.Tip	$x=v.t$ formülünden yararlanılarak $t=1$ için hız hesaplanmış ve anlık hız olarak yorumlanmıştır.	$V_{anlık} = \frac{x}{t} = \frac{90}{1} = 90$	4
D2b.4.Tip	Sağdan veya soldan seçilen bir aralıktaki ortalama hız limit durumunda hesaplanmaya çalışılarak anlık hızı bulmaya çalışılmıştır.	$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{V_{ort}}{zaman} = \frac{90,000 - 89,932}{1 - 0,999} = \frac{0,068}{0,001} = 68$	3
D2b.5.Tip	Sorunun a şikkında bulunan ortalama hızın $t=1$ için zamana oranı anlık hız olarak yorumlanmıştır.	$V_{anlık} = \frac{V_{ort}}{t} \Rightarrow \frac{84}{1} = 84$	3
Diğer	Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.		6

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde 1.tipte yanlış yapan öğretmen adayları anlık hızın istenildiği $x=1$ noktasının sağından veya solundan bir aralık seçmiş ve bu aralıktaki ortalama hızı hesaplamışlardır. Seçtikleri aralığın $x=1$ noktasına çok yakın bir aralık olması öğretmen adaylarını soruya doğru cevap verdiklerine inandırmış olabilir ya da öğretmen adayları buldukları cevabın diğer aralıkları kontrol etmeksizin onları doğru cevaba götüreceğini düşünmüşlerdir. Ancak $x=1$ noktasına sağdan veya soldan tek taraflı yaklaşarak türev hesaplanmaya çalışıldığından verilen cevaplar yetersiz kalmıştır. 2.tipte yanlış yapan öğretmen adayları $x=1$ noktasında türevin

tanımını yazmış fakat sorunun çözümü için gerekli adımları atmamıştır. Bu öğretmen adaylarının fonksiyonun kuralını bilmedikleri için cevaba gidemedikleri düşünülmektedir. 3.tipte hata yapan öğretmen adayları hareketlinin $x=1$ anındaki aldığı yolu zamana bölerek soruyu cevaplamışlardır. Yani bir saniyede 90 metre giden bir hareketli için $x=v.t$ formülünü kullanarak hesaplama yapmışlardır. 4.tipte yanlış yapan öğretmen adayları seçtikleri bir aralıktaki ortalama hızı limit durumunda inceleyerek o noktada fonksiyonun türevini hesapladıklarını düşünmüşlerdir. 5.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise sorunun ilk bölümünde $0 \leq x \leq 1$ aralığında hesapladıkları ortalama hızı 1'e bölerek $x=1$ anındaki anlık hızı bulmaya çalışmışlardır. 21 öğretmen adayı soruya cevap vermemiştir.

Mülakat yapılan 6 öğretmen adayından dördü (24Ö, 25Ö, 27Ö, 37Ö) soruya yanlış cevap vermiştir. $x=1$ noktasında anlık hızın istendiği soruya tek taraflı bir yaklaşımla cevap veren öğretmen adayları arasından 27Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda verilmiştir.

A : $t=1$ anındaki anlık hızı nasıl buldun?

27Ö :Anlık hız yine türevle alakalı, burada türevi kullanarak, eğimi kullanarak aslında, eğimi bulursak türevi verir.

A :Peki, neden soldan bakma ihtiyacı duymadın, farklı bir şey mi gelirdi?

27Ö :Aynı şey gelmesi gerekirdi.

A :Tek taraftan bakmak yeterli midir?

27Ö :Yeterli değil ama yakın bir değer verir.

Öğretmen adayı fonksiyonun o noktadaki türevinin anlık hızı vereceğini doğru olarak düşünmesine rağmen sadece sağ türeve bakmıştır. Ancak burada öğretmen adayının türev kavramıyla ilgili yeterli bilgiye sahip olmadığı, her iki taraftan türevi incelemesi gerekirken sadece sağ taraftan türevi bulup bunu o noktadaki türeve eşitlemesinden anlaşılmaktadır. Aynı şekilde 25Ö kodlu öğretmen adayı da sağdan türeve bakarak bunun çözüm için yeterli olduğunu düşünmüştür. Aşağıda 25Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

A :Sen sağ taraftan ilk aralıktan bakmışsın, sol taraftan veya sağdan diğer aralıklardan bakmana gerek var mıydı?

25Ö :Baksak ta sonuçta anlık hız aynı değil mi?

A :Yani diyelim sağ taraftan baktın ve 68, diğer taraftan baktın ve 70 buldun sonuç için ne derdin?

25Ö :O zaman şu değerler yanlış verilmiş derdim

A :Bulduğun sonucun yeterli olduğunu düşünüyor musun?

25Ö :Evet

24Ö kodlu öğretmen adayı ise her iki taraftan değişim oranlarını limit durumunda inceleyerek soruya cevap vermiştir. Bu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda verilmiştir.

A :Açıklar mısın bu çözümü?

24Ö :Anlık hız dediği belki çok çok küçük bir aralıkta değer olması lazımdı belli bir aralıkta olduğu için onları alamıyorum. 0,99 aldım hem sağdan hem soldan yaklaştım hani eğer eşit çıkarsa bu noktadaki değer türevine eşittir. Türevde zaten bir noktadaki anlık hızı verir.

A :Peki, limiti kullanmasaydın o değerleri bulamaz mıydın?

24Ö :Bulurdum gerçi yine ortalamadan aynı değerler bulunabilirdi.

A :Limiti kullanmanın sebebi nedir?

24Ö :Limit kullanmamın sebebi hani aralığı biraz daha küçülterek diye düşünülebilir, çok çok daha küçültmek.

Öğretmen adayı sağdan ve soldan değişim oranlarının limitini alarak soruyu türevle ilişkilendirebilmeyi hedeflemiştir. Çünkü soruda anlık hız istenmiştir ve anlık hızı türevle bulacağını düşündüğünden türevin limitle ilişkisini yanlış yorumlayarak elde ettiği değişim oranlarını limit durumunda incelemiştir. Oysaki değişim oranları zaten o noktadaki türevi bulmak için yeterli bir çözümdü. Öğretmen adayının türev ile limit arasındaki ilişki hakkında derinlemesine bir bilgiye sahip olmadığı anlaşılmaktadır.

37Ö kodlu öğretmen adayı sorunun a şıkında bulduğu değerlerden hareketle anlık hızı bulmaya çalışmıştır. Aşağıda bu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

A :b şıkında ilk kısımda bulduğun değerlerin ortalamasını aldın, 1 noktasında ki anlık hız deyince aklına ne geliyor?

37Ö :Anlık hız deyince aslında o noktada ki türevi aklıma geliyor, ortalamalarda anlık hızı verir diye düşünmüştüm

A :Yani sonuca yaklaşık mı olacağını söylüyorsun?

37Ö :Evet, yaklaşıktır diye düşündüm

Öğretmen adayının yapmış olduğu çözüm hareketlinin yol boyunca ortalama hızını vermiştir. Her ne kadar bu soruda $x=1$ noktasındaki anlık hız yol boyunca ortalama hıza eşit olsa da bu tarz bir genelleme yaparak anlık hızı bulan öğretmen adayı bu sonucun en azından sorunun çözümü için yaklaşık bir değer vereceğini düşünmüştür. Daha önceki sorularda bu tipte bir soruyu doğru olarak çözen öğretmen adayı bu soruda aynı ilişkilendirmeyi yapamamıştır. Öğretmen adayının cebirsel soruları çözmedeki becerisini

türevin fiziksel yorumunda gösterememiştir. Diğer iki öğretmen adayı ise mülakatta anlık hızla ilgili yeterli bilgiye sahip olmadıkları için soruyu cevaplamadıklarını belirtmişlerdir.

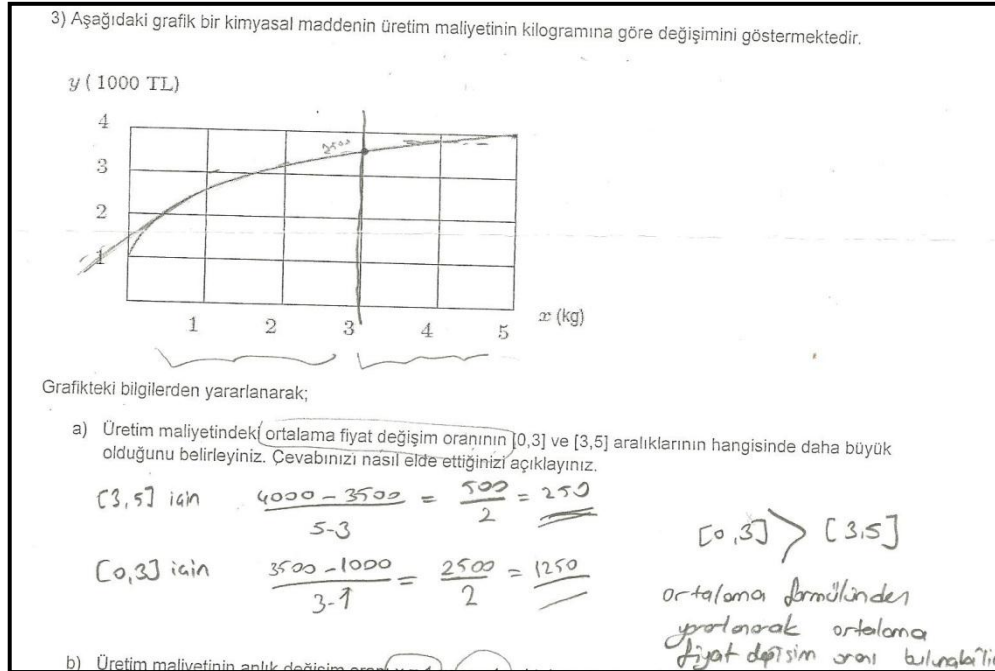
Beşinci Soru

Tablo 21. Öğretmen adaylarının 3a sorusuna verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	F	%	f	%
3a.soru	16	36	19	42	5	11	5	11	45	100

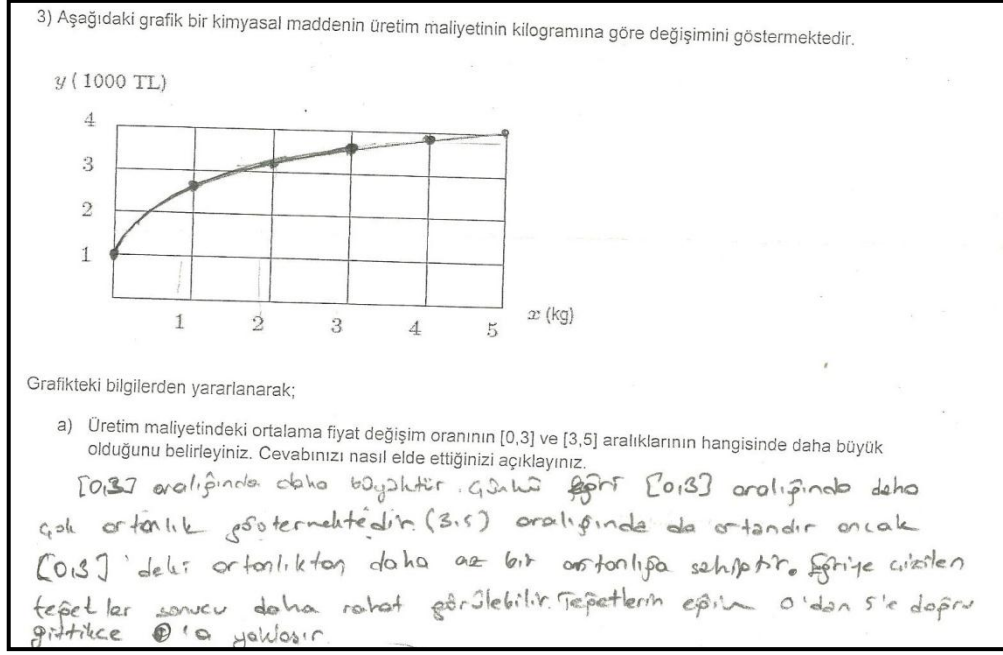
Sınıfın yarısına yakın bir kısmı (%42) 3.sorunun a şikkına kısmen doğru yanıt verirken sınıfın %36'sı tam doğru yanıt vermiştir.

Cevabı "Tam Doğru Yanıt" olarak sınıflandırılan 16 öğretmen adayının cevaplarına bakıldığında 15 öğretmen adayı verilen aralıklara karşılık gelen değerleri yaklaşık olarak hesapladıktan sonra y'deki değişimin x'deki değişime oranını bularak cevaba gitmiştir. Aşağıda 30Ö kodlu öğretmen adayının soruya vermiş olduğu cevap yer almaktadır.



Şekil 33. 30Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Bu cevap tarzından farklı olarak 34Ö kodlu öğretmen adayı eğrinin $[0,3]$ aralığında daha fazla artanlık gösterdiğini ve eğriye çizilen teğetlerin eğiminin giderek azaldığını ifade ederek soruyu cevaplamıştır. Aşağıda bu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 34. 34Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Mülakat yapılan öğretmen adaylarından dördü (2Ö, 24Ö, 27Ö, 37Ö) soruya tam doğru yanıt vermiştir. Aşağıda 24Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat yer almaktadır.

A : $[0,3]$ aralığında daha büyük olduğunu ifade ettin, neden?

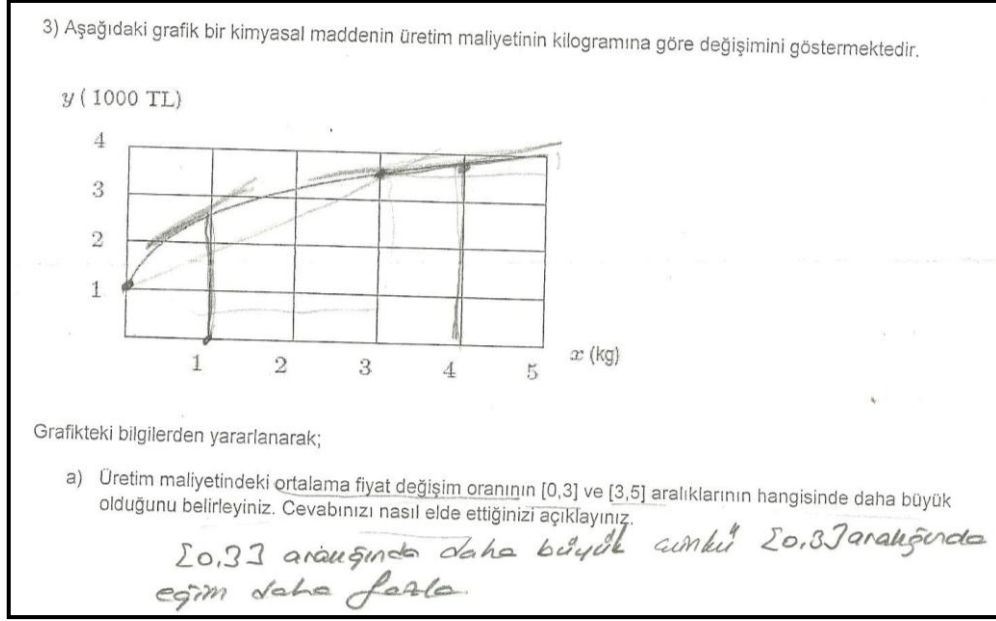
24Ö : $[0,3]$ deki değeri $[3,5]$ deki değerden farklı çıkıyor. Y deki değişimleri x değişimlere bölerek buldum

A : Nasıl hesapladın bu değişimleri?

24Ö : 0 ve 3 noktasına karşılık gelen y değerlerinin farkını 3'e bölerek aynı şekilde 3 ve 5 noktalarına karşılık gelen değerleri 2'ye bölerek buldum

24Ö kodlu öğretmen adayı verilen aralıklardan geçen doğruların eğimlerini yaklaşık olarak hesaplayarak doğru cevaba gitmiştir. Diğer öğretmen adayları da yapılan mülakat sonucunda benzer şekilde cevaba gittiklerini belirtmişlerdir.

Cevabı "Kısmen Doğru Yanıt" olarak sınıflandırılan 19 öğretmen adayı " $[0,3]$ aralığında eğim daha büyüktür" açıklamasıyla soruya cevap vermişlerdir. Aşağıda 43Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 35. 19Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Görüldüğü gibi öğretmen adayları $[0,3]$ aralığında çizilecek bir kirişin eğiminin büyüklüğünden bahsetmek yerine bu aralıkta eğim daha büyüktür ifadesini kullanmayı tercih etmişlerdir. Bu kategorideki diğer öğretmen adayları da benzer açıklamalar yaparak soruya cevap vermişlerdir.

Mülakat yapılan öğretmen adayları arasından soruya kısmen doğru yanıt veren 17Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda yer almaktadır.

A :a şıkkında ortalama değişim oranı isteniyor.

17Ö :Eğimine bakmışım

A : $[0,3]$ aralığında neden daha büyük olduğunu düşündün?

17Ö :Açısıyla alakalı, yani oranladığın zaman tanjantına bakmak için

A :Onu çizerek gösterir misin?

17Ö :0 noktasından 3 noktasına bir doğru çizersek sonra 3 noktasından 5 noktasına bir doğru çizersek, yaklaşık olarak baktığımızda $[0,3]$ aralığındaki doğrunun eğimi daha büyük çıkıyor.

Öğretmen adayı herhangi bir hesaplama ya da çizim yapamadan $[0,3]$ noktasındaki eğimin daha büyük olduğuna karar vermiştir. Ancak bunu grafiksel olarak göstermesi istendiğinde verilen aralıklarda eğriye kirişler çizerek eğimlerini karşılaştırarak cevaba gitmeye başarmıştır.

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 5 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 22. Öğretmen adaylarının 3a sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
D3a.1.Tip	Sadece verilen aralıklardaki değişimler hesaplanılarak karşılaştırılmıştır.	3 kg'daki değişim 2500 2 kg'daki değişim 500 [0,3] aralığında değişim daha büyük	3
D3a.2.Tip	Verilen noktalardaki değişim oranı limit durumunda incelenmiştir.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{3500 - 1000}{3} = \frac{2500}{3}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{4000 - 3500}{2} = 250$	2

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde 1.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ortalama fiyat değişimi oranının istendiği bir soruda sadece verilen aralıklarda fonksiyonun değişimini hesaplayarak elde ettikleri değerlere göre soruya cevap vermişlerdir. Her ne kadar soruya doğru cevap vermiş olsalar da fiyat değişiminin büyük olması fiyat değişim oranının büyük olacağı anlamına gelmemektedir. Ancak öğretmen adayları bunu dikkate almadan veya aynı şey olduklarını düşünerek soruya cevap vermişlerdir. 2.tipte yanlış yapan öğretmen adayları verilen aralıklarda değişim oranını hesaplamalarına rağmen bu oranın limitini almaya çalışarak cevap vermişlerdir. Burada öğretmen adayları soruda istenilen ifadeyle türev arasında bir bağlantı kurmaya çalışmış ve değişim oranının limitini alarak türevin tanımından soruyu çözmek istemişlerdir. 5 öğretmen adayı ise soruya yanıt vermemiştir.

Altıncı Soru

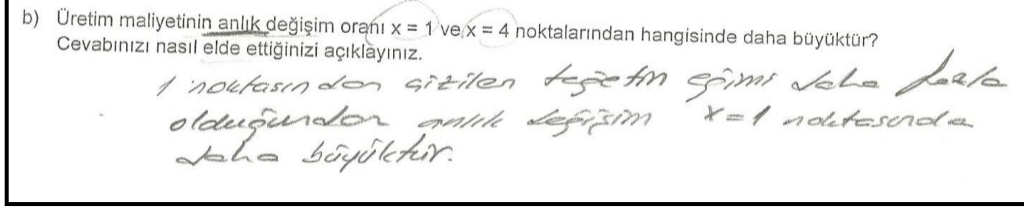
Tablo 23. Öğretmen adaylarının 3b sorusuna verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	F	%	f	%
3b.soru	10	22	15	33	8	18	12	27	45	100

3.sorunun b şıkkına kısmen doğru yanıt veren kişi sayısı sınıfın %33'üne, yanıt vermeyen kişi sayısı ise sınıfın %27'ine karşılık gelmektedir. Tam doğru yanıt ve yanlış yanıt veren öğretmen adayları yüzdesi birbirine yakın olup sırasıyla %22 ve %18 dir.

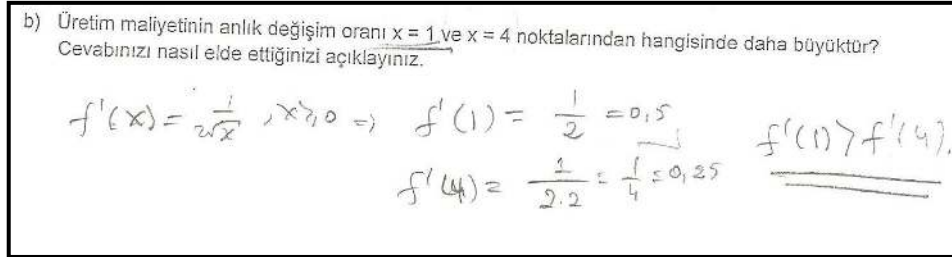
Cevabı “Tam Doğru Yanıt” olarak sınıflandırılan 10 öğretmen adayından 9’u “ $x=1$ noktasında çizilen teğetin eğimi daha fazla olduğundan 1 noktasında anlık değişim oranı daha büyük” ifadesini kullanmışlardır.

Aşağıda 43Ö kodlu öğretmen adayının bu soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 36. 43Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Diğer öğretmen adayları da verilen noktalarda çizilen teğetlerden yola çıkarak soruyu cevaplamışlardır. Ancak 37Ö kodlu öğretmen adayı grafikte verilen eğriyi temsil eden bir fonksiyon yazarak bu fonksiyonun verilen noktalardaki türevlerini alarak bu noktalardaki anlık değişim oranlarını hesaplamıştır. Aşağıda bu öğretmen adayına ait cevap yer almaktadır.



Şekil 37. 37Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Mülakat yapılan öğretmen adaylarından ikisi (24Ö, 37Ö) soruya tam doğru yanıt vermiştir. 24Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda yer almaktadır.

A :Sen 1 noktasında daha büyüktür dedin anlatır mısın?

24Ö :İstenen noktalarda grafiğe teğetler çizeriz. 1 noktasında çizeriz birde 4 noktasında çizeriz. Hangisinin eğimi daha büyükse demek ki orada daha hızlı artmış.

A :Teğetin eğimini anlık değişim oranı ile bir mi tuttun?

24Ö :Evet, o nokta olarak evet

A :Yani, türevin anlık değişim olduğunu mu ifade etmeye çalıştın

24Ö :Evet o noktadaki anlık değişim.

Öğretmen adayı soruyu istenilen noktalardaki türevleri hesaplamaya çalışarak çözmeye çalışmış bu amaçla verilen noktalarda fonksiyona teğetler çizmiştir. Elde ettiği teğetlerin eğimlerinden hareketle hangi noktada anlık değişim oranının daha büyük olduğuna karar vermiştir. 24Ö kodlu öğretmen adayından farklı olarak 37Ö kodlu öğretmen adayı verilen eğrinin kuralını yazmış ve istenilen noktalarda türev olarak doğru cevaba gitmiştir. Aşağıda 37Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat yer almaktadır.

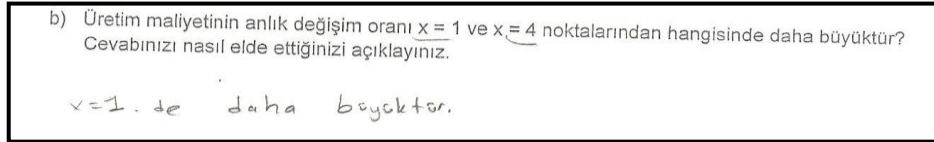
A :B şıkında anlık değişimi nasıl yorumladın?

37Ö :Aslında benim için çok zor olmadı çünkü fonksiyonu tanımladıktan sonra söz konusu verilen noktalardaki anlık değişim bulmam kolay oldu. Fonksiyonun türevini aldım ve türevinde gelen noktaları yerine yazdığım da direk olarak bana anlık değişim oranlarını verdi.

Görüldüğü üzere öğretmen adayı istenilen noktalardaki anlık değişim oranını hesaplamak için o noktalardaki türevlerden yararlanmıştır.

Cevabı “Kısmen Doğru Yanıt” olarak sınıflandırılan öğretmen adaylarından 5’i “ $x=1$ noktasında daha fazladır” şeklinde 10 tanesi de “Eğim $x=1$ de daha fazla olduğundan $x=4$ deki anlık değişimden daha fazladır” şeklinde soruya cevap vermişlerdir.

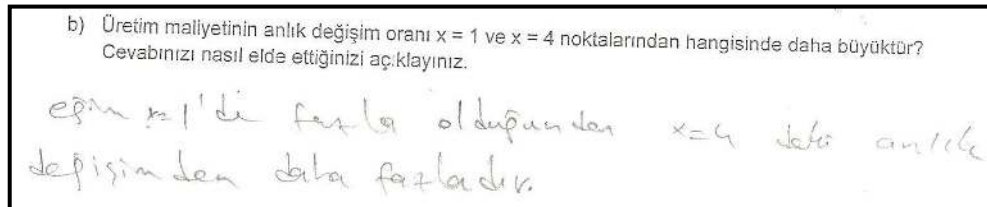
Aşağıda 33Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 38. 33Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Görüldüğü gibi hiçbir açıklamaya ihtiyaç duyulmadan soruya cevap verilmiştir.

Şekil 39’da 38Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 39. 38Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 8 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 24. Öğretmen adaylarının 3b sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
D3b.1.Tip	Fonksiyonun teğetinin eğimi yerine fonksiyonun eğimi ifadesi kullanılarak cevap verilmiştir.	" $x=1$ noktasında fonksiyonun eğimi daha fazladır."	5
D3b.2.Tip	Fonksiyonun daha büyük değer aldığı noktadaki anlık değişim oranı cevap olarak verilmiştir.	" $f(4) > f(1)$ olduğundan $x=4$ noktasındaki anlık değişim oranı $x=1$ noktasındaki anlık değişim oranından daha büyüktür."	2
	Diğer	Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	1

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde 1. tipte yanlış yapan öğretmen adayları grafikte verilen noktalarda fonksiyonun hareketine bakarak $x=1$ noktasında eğimin daha fazla olduğunu ifade etmişlerdir. Ancak öğretmen adayları bunu ifade ederken " $x=1$ noktasında fonksiyonun eğimi daha fazladır" şeklinde soruyu cevaplayarak fonksiyonun o noktada teğetinin eğimi yerine fonksiyonun eğimi ifadesini kullanmıştır. 2. tipte hata yapan öğretmen adayları $x=1$ ve $x=4$ noktalarında fonksiyonun aldığı değerleri karşılaştırmış 4 noktasında fonksiyonun değerinin büyük olmasını o noktada anlık değişim oranının büyük olması olarak yorumlamışlardır. 12 öğretmen adayı soruya cevap vermemiştir.

Soruya " $x=1$ noktasında fonksiyonun eğimi daha fazladır" şeklinde cevap veren 17Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda verilmiştir.

- A : $x=1$ noktasında grafiğin eğiminin büyük olması ne anlama geliyor?
- 17Ö :Eğer 1 noktasından bir teğet çizersem, o noktaları tam belirleyemiyorum ama yaklaşık olarak değer verebilirim
- A :Peki, $x=4$ noktasında?
- 17Ö :O da 4 noktasında çizilecek olan teğet, 1 deki eğiminin daha büyük olduğu açıkça gözüküyor.
- A : $x=1$ deki eğim derken?
- 17Ö :Teğetinin eğimi
- A : $x=1$ 'deki teğetinin eğiminin büyük olması anlık değişim oranının da büyük olması olarak mı yorumladın?
- 17Ö :Evet

Buradan hareketle 17Ö kodlu öğretmen adayının grafiğin eğimi derken aslında o noktadan çizilen teğetin eğimini ifade etmeye çalıştığı anlaşılmaktadır. Ancak bunu ifade etmede başarılı olamamıştır. Bu, matematiksel dili kullanmadaki zayıflığın bir göstergesi olabileceği gibi temelde konuyla ilgili bilgi eksikliğinin de bir göstergesidir. Benzer bir yorum 27Ö kodlu öğretmen adayı tarafından da yapılmıştır. Aynı işlemleri yaparak soruyu cevaplayan öğretmen adayı “grafiğin eğimi” ifadesini kullanarak o noktadaki teğetin eğimini kastettiğini belirtmiştir.

2Ö kodlu öğretmen adayı anlık değişim oranını fonksiyonun o noktadaki değeri olarak düşünerek soruyu cevaplamıştır. 2Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat kaydı aşağıda verilmiştir.

2Ö :Anlık denince o noktadaki değerleri bulmam gerekiyor gibi düşünmüştüm

A :O noktadaki değer fonksiyonun anlık değişimini mi verir bize?

2Ö :Değişimi vermez o noktada ki değeri verir

A :Sen bulduğun değerlerden 4 noktasında anlık değişimin daha mı büyük olduğunu ifade ettin?

2Ö :Evet.

Öğretmen adayının konuyla ilgili yeteri seviyede bilgi sahibi olmadığından soruya bu şekilde cevap vermeyi daha uygun görmüştür.

4.3. Türev-Teğet İlişğine Yönelik Bulgular

Bu araştırma kapsamında türev değişim oranı ilişkisine yönelik öğretmen adaylarının anlamalarını ve karşılaştıkları zorlukları ortaya koymak amacıyla 5 soruya yer verilmiştir. Bu başlık altında her bir soruya ilişkin öğretmen adaylarının yazılı sınava verdikleri cevaplar ve klinik mülakatlardaki açıklamaları analiz edilmiş ve ayrı ayrı sunulmuştur.

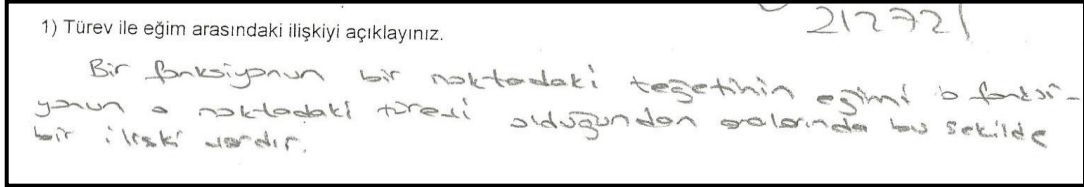
Birinci Soru

Tablo 25. Öğretmen adaylarının 1. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
1. soru	15	33	10	22	18	40	2	5	45	100

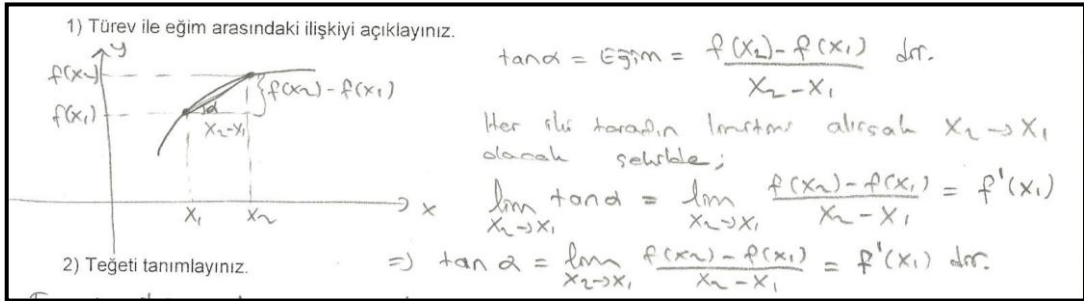
1. soruya cevap veren öğretmen adaylarının yarıya yakını (%40) yanlış yanıt verirken doğru yanıt veren kişi sayısı sınıfın %33'ü, yanlış yanıt veren kişi sayısı ise %22'dir.

Cevabı “Tam Doğru Yanıt” olarak sınıflandırılan öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde 15 öğretmen adayından 14’ü türev ile eğim arasındaki ilişkiyi benzer bir biçimde açıklayarak “bir noktada fonksiyona çizilen teğetin eğimi o noktada fonksiyonun türevine eşittir” ifadesini kullanmışlardır. Aşağıda 28Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 40. 28Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Soruya benzer bir şekilde cevap veren diğer öğretmen adaylarından farklı olarak 29Ö kodlu öğretmen adayı türevin tanımından yararlanarak soruyu cevaplamıştır. Çizdiği grafikte bir fonksiyonun iki noktasından geçen kirisin eğimini y 'deki değişimin x 'deki değişime oranı şeklinde ifade edip limit durumunda incelemiştir. Aşağıda bu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 41. 29Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Mülakat yapılan öğretmen adayları arasından 24Ö kodlu öğretmen adayı soruya tam doğru yanıt vermiştir. Aşağıda bu öğretmen adayına ait mülakat yer almaktadır.

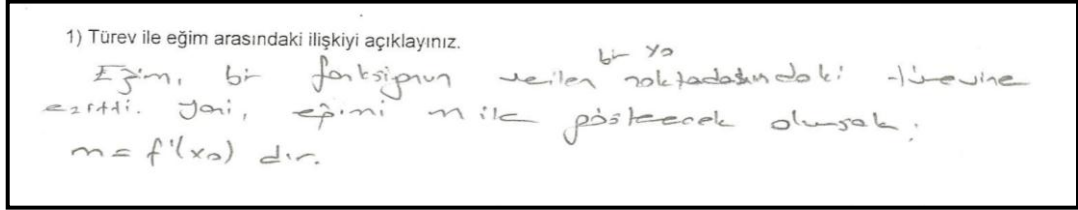
A :Neden fonksiyonun bir noktadaki türevi o noktada teğetin eğimine eşittir?

24Ö :Bu aslında bildiğimiz bir ifade, bir noktada çizilen teğetin eğimi o noktadaki türeve eşittir. Türevin başka bir tanımıdır yani.

24Ö kodlu öğretmen adayının soruya doğru cevap vermiş olmasına rağmen neden öyle olduğu hakkında sorulan soruya istenilen şekilde cevap verememiştir. Öğretmen

adayı konuyu tanım düzeyinde bilmekte olup türevle teğet arasındaki bu ilişkinin tam olarak bilincinde değildir.

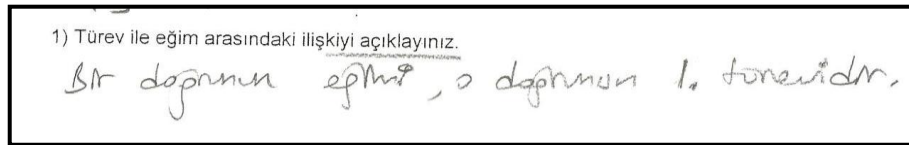
Cevabı “Kısmen Doğru Yanıt” olarak sınıflandırılan 12 öğretmen adayından beşi “eğim, bir fonksiyonun verilen noktadaki türevine eşittir.” İfadesini kullanmıştır. Aşağıda 18Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 42. 18Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

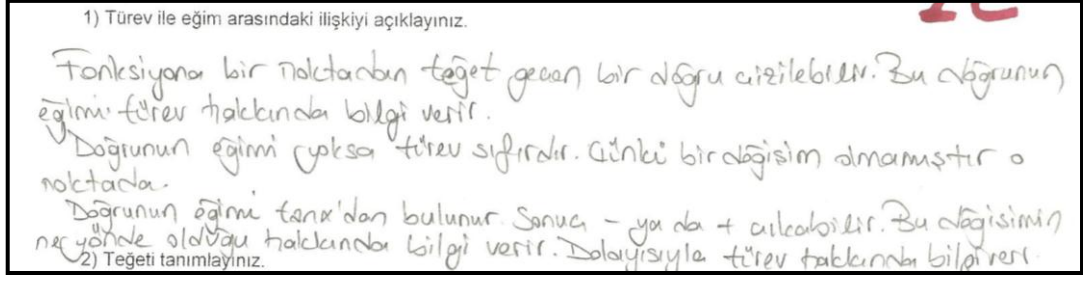
Görüldüğü gibi sadece eğim ifadesi kullanılmış bu eğimin eğriye o noktada çizilen teğete ait olduğu belirtilmiştir. Diğer dört öğretmen adayı da soruya benzer şekilde cevap vermiştir.

4 öğretmen adayı ise doğrudan hareketler “bir doğrunun eğimi o doğrunun birinci türevidir” ya da “ $f(x) = m \cdot x + n$ doğrusunun birinci türevi” gibi ifadelerle türevle eğim arasındaki ilişkiyi kısmen açıklamaya çalışmıştır. Aşağıda 41Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 43. 41Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

2Ö kodlu öğretmen adayı açıklamalarına ek olarak “doğrunun eğimi yoksa türevi sıfırdır” ifadesini kullanarak soruya cevap vermiştir. Aşağıda bu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 44. 2Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

2Ö kodlu öğretmen adayı ile yapılan mülakat aşağıda verilmiştir.

- A : Bir noktadan çizdiğimiz teğet türev hakkında nasıl bir bilgi verir?
- 2Ö : Bir noktada teğet çizdiğimiz zaman bu teğetin eğimi bize o noktada fonksiyonun eğimini verecektir.
- A : Peki, neden doğrunun eğimi yoksa türev sıfırdır?
- 2Ö : Türev aynı zamanda değişim olduğundan doğrunun eğiminin olmadığı durumlarda değişim yoktur yani türev sıfır olur.
- A : Teğetin eğimi olmamasını başka şekilde yorumlayamaz mısın?
- 2Ö : Bu şekilde olur.

Bir noktadaki teğetin eğiminin olmaması o noktada bir değişim olmamasıyla eşdeğer görülmüş, değişimin olmaması da türevin sıfıra eşit olması olarak yorumlanmıştır. Bu durum türev-teğet ve türev-değişim ilişkilerinin doğru olarak bilinmemesinden kaynaklanmaktadır. Çünkü bir noktada teğetin eğiminin olmaması o noktada türevinde olmayacağı anlamına gelmektedir. Ya da bir fonksiyon üzerinde bir noktada değişim olmaması türevin o noktada sıfır olacağı anlamına gelmemektedir. Kavramlar arasındaki kopukluk öğretmen aday öğretmen adayının soruya tam doğru cevap vermesini engellemektedir.

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 18 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 26. Öğretmen adaylarının 1. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
T1.1.Tip	Fonksiyonun teğetinin eğimi yerine fonksiyonun eğimi ifadesi kullanılmıştır.	“Bir fonksiyonun belli bir noktadaki türevi aynı fonksiyonun o noktadaki eğimini verir.”	12

Tablo 26'nın devamı

T1.2.Tip	Öğretmen adaylarının birbirinden farklı yanlış cevapları bir arada verilmiştir.	“Türev koordinat düzleminde y değişkeninin x değişkenine oranıdır. Eğimde bu şekilde 4 tanımlanabilir.” “Eğim iki nokta arasındaki artışın değişim oranını verir, türev ise bir noktada anlık değişimi” “Türev, fonksiyona göre istenilen noktada eğimi verir.” “Bir fonksiyonun bir noktadaki teğeti, o noktadaki fonksiyonun türevini verir.”
Diğer		Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil 2 olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde 11 öğretmen adayının aynı tipte yanlış yaptıkları görülmektedir. Tablo 26'da görüldüğü gibi öğretmen adayları türevi eğim ile ilişkilendirirken fonksiyonun bir noktadaki eğimi ifadesini kullanarak soruya cevap vermişleridir. Burada öğretmen adayları fonksiyona bir noktada çizilen teğetin eğimi yerine fonksiyonun eğimi ifadesini kullanmış olmalarına rağmen aslında kastettikleri şeyin teğetin eğimi olduğu ve bu ifadelerin kullanımlarına çok dikkat etmedikleri düşünülmektedir. İkinci kısımda öğretmen adaylarına ait bazı yanlış cevaplara yer verilmiştir. Örneğin bir öğretmen adayı bir fonksiyonun bir noktadaki teğetinin fonksiyonun o noktada türevini vereceğini belirtmiş ancak aynı soruda teğetin eğiminin o noktada türevine eşit olduğunu " $f'(x_0) = m_t$ " ifadesiyle göstermiştir. Yine öğretmen adayının dikkatsizlik sonucu bu şekilde bir yanlış yaptığı anlaşılmaktadır. Diğer öğretmen adayları da birbirinden farklı yanlış cevaplar vererek soruyu cevaplamışlardır. İki öğretmen adayı soruya cevap vermemiştir.

Türev ile eğim arasındaki ilişkiyi açıklayınız sorusuna “Bir fonksiyonun belli bir noktadaki türevi aynı fonksiyonun o noktadaki eğimini verir” şeklinde cevap veren öğretmen adayları arasından 17Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda yer almaktadır.

A :Türev fonksiyonun belli bir noktasındaki eğimidir ifadesiyle kastedilen şey nedir?

17Ö :Teğetinin eğimi, bu ifade o noktadaki türev ile aynıdır.

Benzer biçimde 27Ö ve 25Ö kodlu öğretmen adayları da fonksiyonun eğimi ifadesini kullanmışlardır. Ancak kendileriyle yapılan mülakatta ise bununla ifade etmek istedikleri şeyin o noktada teğetin eğimi olduğunu açıklamışlardır. Gerçektende öğretmen adayları fonksiyonun eğimi ifadesini sıklıkla kullanarak bu konuda hem matematiksel dilin

kullanımında sıkıntı yaşadıklarını hem de konuyla ilgili bazı altyapı eksikliklerinin olduğunu göstermişlerdir.

37Ö kodlu öğretmen adayı soruya cevabını "fonksiyona bir noktada çizilen teğet o noktada fonksiyonun türevine eşittir." şeklinde vermiştir. Aşağıda 37Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

A :Bir fonksiyonun bir noktadaki teğeti o noktada fonksiyonun türevine eşittir demişsin, açıklar mısın?

37Ö :Fonksiyona bir noktada teğet çizdiğimiz zaman, o nokta x_0 olsun. Bu noktada fonksiyonun türevi $f'(x_0)$ ve teğetin eğimi x_0 noktasında fonksiyonun türevine eşit olur.

A :Burada da yazarak onu göstermişsin

37Ö :Evet

A :Ama tanım yaparken o noktada çizilen teğetin o noktadaki türeve eşit olduğunu belirtmişsin.

37Ö :Yani, teğet derken aslında teğetin eğimini kastettim, zaten burada yazdım ama tanım yaparken dikkat etmedim sanırım

37Ö kodlu öğretmen adayı hem soruya verdiği cevabın devamında hemde kendisiyle yapılan mülakatta bu durumu "bir noktada çizilen teğetin eğimi" olarak düzeltmesi bu durumun basit bir hatadan kaynaklandığını göstermektedir

2Ö ve 24Ö kodlu öğretmen adayları da "fonksiyonun bir noktadaki teğetinin eğimi, o noktadaki türevini verir" ifadesini kullanarak benzer açıklamalarda bulunmuşlardır.

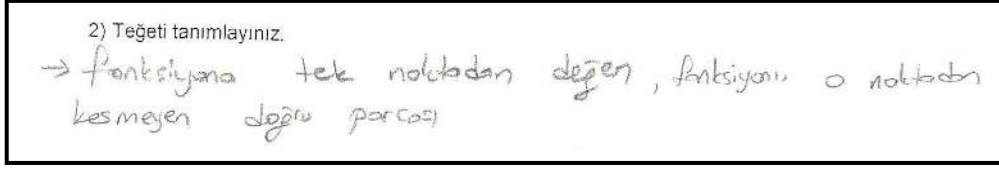
İkinci Soru

Tablo 27. Öğretmen adaylarının 2. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
2.soru	16	35	3	7	22	49	4	9	45	100

2.soruya yanlış cevap veren öğretmen adayı sayısı sınıfın %49'una karşılık gelirken sınıfın %33'ü ise soruya tam doğru yanıt vermiştir.

Cevabı "Tam Doğru Yanıt" olarak sınıflandırılan 16 öğretmen adayının cevapları incelendiğinde bütün öğretmen adaylarının teğetin tanımıyla ilgili benzer açıklamalarda bulundukları görülmüştür. Aşağıda 8Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 45. 8Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Görüldüğü gibi öğretmen adayları teğeti “ bir noktada fonksiyona değen ancak o noktada fonksiyonu kesmeyen doğru” olarak belirtmişlerdir.

Mülakat yapılan öğretmen adayları arasında üçü (17Ö, 24Ö, 37Ö) soruya tam doğru olarak cevap vermişlerdir. Aşağıda 17Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

A :Teğeti tanımını açar mısın?

27Ö :Eğriyi yanından geçen ve sadece bir noktada değen doğru

A :Teğet olması için bir noktada değmesi mi gerekiyor?

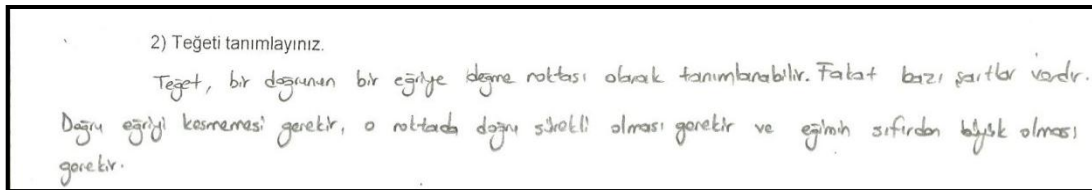
27Ö :Evet

A :Keserse peki?

27Ö :Yani, yanından geçmesi ve degecek şekilde geçmesi gerektiğini düşünüyorum, keserse teğet olmaz.

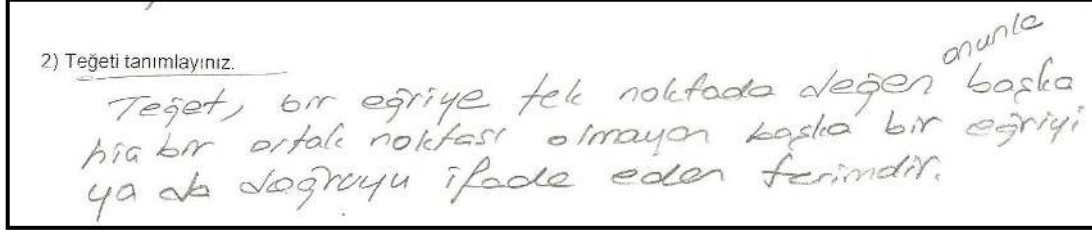
Öğretmen adayı açıklamasında bir doğrunun teğet olma durumunu açıklarken en baştan eğriye bir noktada degecek şekilde geçmesi gerektiğini belirterek kesmesi durumunda teğet olmayacağını belirtmiştir. Diğer iki öğretmen adayı da benzer açıklamalar yapar çözüm yaptıklarını belirtmiştir.

Cevabı “Kısmen Doğru Yanıt” olarak sınıflandırılan 3 öğretmen adayının cevaplarına bakıldığında teğetle ilgili doğru tespitlerle birlikte bazı yanlışlara da yer verdikleri görülmüştür. Örneğin 26Ö kodlu öğretmen adayının cevabına bakıldığında teğetin eğiminin sıfırdan büyük olması gerektiğini belirttiği görülmektedir. Aşağıda bu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



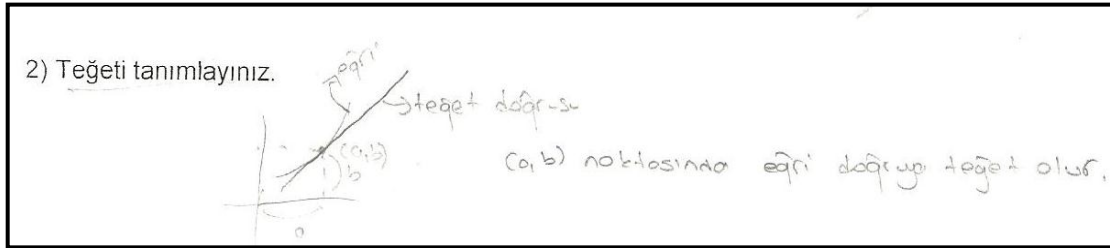
Şekil 46. 26Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

43Ö kodlu öğretmen adayı da benzer bir şekilde hata yapmıştır. Aşağıda bu öğretmen adayının cevabı yer almaktadır.



Şekil 47. 43Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Görüldüğü gibi öğretmen adayı teğetin eğriye bir noktada değen bir doğru olduğunu ancak eğriyi başka hiçbir noktada kesmeyen bir doğru olduğunu belirtmiştir. Bir noktada bir eğriye teğet olan bir doğru fonksiyonu başka noktalarda kesebilir. Bu cevaplardan farklı olarak 31Ö kodlu öğretmen adayı teğetin tanımını yapmak yerine sadece grafiksel olarak teğeti göstermiştir. Aşağıda 31Ö kodlu öğretmen adayının cevabı yer almaktadır.



Şekil 48. 31Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 22 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 28. Öğretmen adaylarının 2. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
T2.1.Tip	Teğeti, eğriyi bir noktada kesen doğru olarak belirtmişlerdir.	“ Bir eğriye tek noktada kesen doğruya teğet denir”	8
T2.2.Tip	Teğet olma durumu, doğrunun eğiminin sıfır ya da x eksenine paralel olması şeklinde düşünülmüştür.	“Grafiğe dik değil paralel değen doğru” “Verilen bir noktaya çizilen eğimi sıfır olan doğru” “180° açıyla paralel çakıştığı noktadan geçen doğru”	6

Tablo 28'in devamı

T3.3.Tip	Teğet-eğim ilişkisi yanlış kurulmuştur.	<i>"Bir eğrinin bir noktasındaki eğimine teğet denir"</i>	2
	Diğer	Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	6

Tablo 28'e bakıldığında 1.tipte hata yapan öğretmen adaylarının teğeti eğriyi bir noktada kesen bir doğru olarak algıladıkları görülmektedir. Oysa teğet fonksiyonu bir noktada kesen değil o noktada fonksiyona değen bir doğru olarak bilinmektedir. İkinci tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise bir doğrunun teğet olma durumunu bu doğrunun eğiminin sıfır olması veya x eksenine paralel olması durumlarıyla kısıtlamışlardır. 3.tipte hata yapan öğretmen adayları ise eğim teğet ilişkisini yanlış ilişkilendirerek soruya cevap vermişlerdir.

4 öğretmen adayı soruya yanıt vermemiştir.

Mülakat yapılan öğretmen adayları arasından soruya yanlış cevap veren 27Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda yer almaktadır.

A :Nedir teğet?

27Ö : Eğrinin bir doğru tarafından kesilmesi

A : Nasıl kesmesi gerekiyor?

27Ö : Tek bir noktada kesecek ama tek bir noktada değecek

Görüldüğü gibi öğretmen adayı "eğrinin bir doğru tarafından kesilmesi" ifadesiyle çok genel bir yaklaşım sergileyerek teğeti açıklamaya çalışmıştır. İfadesini biraz daha açması istendiğinde teğetin kesme durumunun eğriye değecek şekilde olması gerektiğini belirtmiştir. Aslında öğretmen adayının teğetin eğriyi kesmesiyle kastettiği şeyin eğriyi bir noktada değecek şekilde geçmesidir ki bunu hem cevap kâğıdında hem de mülakat sırasında başlangıçta ifade etmekte başarılı olamamıştır. Bu durum öğretmen adayının düşündüğünü tam olarak ifade edemediğinin ve matematiksel dili kullanmada zayıf kaldığının bir göstergesidir.

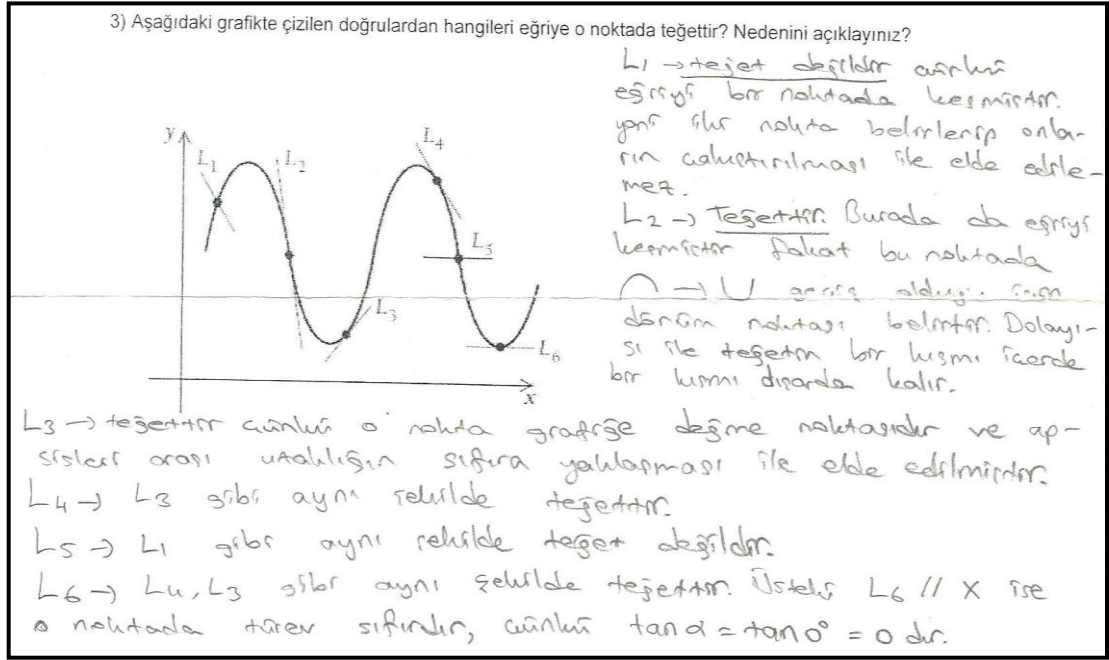
Üçüncü Soru

Tablo 29. Öğretmen adaylarının 3. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
3.soru	2	4	3	7	40	85	0	0	45	100

Sınıfın %85 gibi büyük bir bölümü 3.soruya yanlış yanıt verirken %4'ü tam doğru yanıt %7'si ise kısmen doğru yanıt vermiştir.

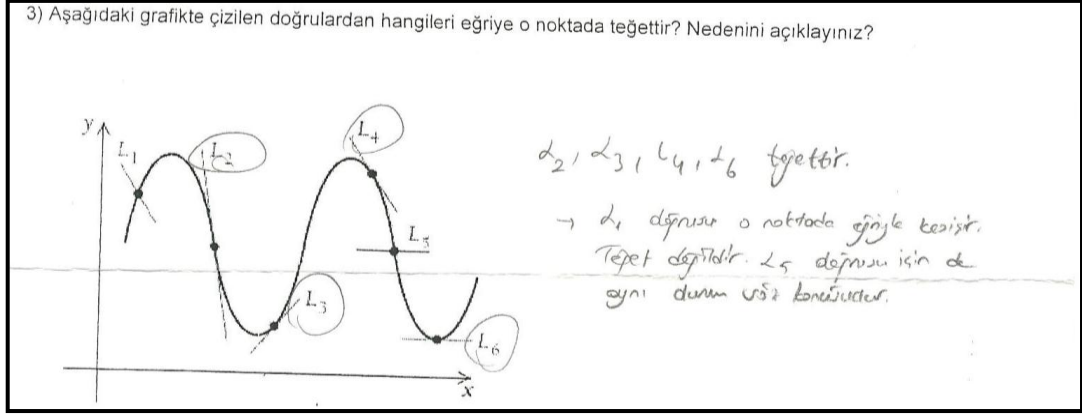
Cevabı "Tam Doğru Yanıt" olarak sınıflandırılan 2 öğretmen adayının cevapları incelendiğinde her iki öğretmen adayında hangi noktaların teğet olup olmadıklarını nedenleri ile birlikte belirttikleri görülmüştür. Özellikle öğretmen adaylarının en çok yanlış yaptıkları L_2 doğrusunun geçtiği noktanın dönüm noktası olması nedeniyle doğrunun bu noktada fonksiyona teğet olduğu belirtilmiştir. Aşağıda 29Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 49. 29Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Diğer öğretmen adayı da soruya benzer bir şekilde cevap vermiştir.

Cevabı "Kısmen Doğru Yanıt" olarak sınıflandırılan 3 öğretmen adayının cevaplarına bakıldığında öğretmen adayları verilen doğrular arasından hangilerinin teğet olduklarını belirtmiş ancak hiçbir açıklama yapmamıştır. Aşağıda 7Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 50. 7Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

19Ö ve 39Ö kodlu öğretmen adayları da benzer şekilde sadece eğriye teğet olan doğruları belirterek soruya cevap vermişlerdir.

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 40 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 30. Öğretmen adaylarının 3. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
T3.1.Tip	L_2 doğrusu dönüm noktasından geçen bir teğet olmasına rağmen eğriyi kesen bir doğru olarak algılanmıştır.	L_3, L_4, L_6 teğettir, bu doğrular eğriye bir noktada değer	39
T3.2.Tip	Sadece L_3 doğrusunun teğet olduğu kaçırılmıştır.	L_2, L_4, L_6 teğettir, onlar fonksiyonu 1 kesmemişler sadece tek noktada kesişmişler.	

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde biri hariç hepsinin tek tip bir yanlış yaptıkları görülmektedir. 1.tipte yanlış yapan öğretmen adaylarının belirttikleri doğrular fonksiyona o noktalarda teğet olmasına rağmen L_2 doğrusu hariç tutulmuştur. L_2 doğrusu fonksiyonun dönüm noktasından geçen bir teğettir ve öğretmen adayları tarafından diğer teğetlerden farklı olarak fonksiyonu kesiyormuş gibi algılanmıştır. Bu yüzden öğretmen adayları bu L_2 doğrusunu teğet olarak kabul etmemiştir. 2.tipte yanlış yapan öğretmen adayı hiçbir açıklama yapmadan L_4 ve L_6 'ya benzer bir şekilde fonksiyona teğet olan L_3 doğrusuna cevabında yer vermemiştir. Soruya yanıt vermeyen öğretmen adayı bulunmamaktadır.

Soruya yanlış cevap veren öğretmen adayları arasından 37Ö koldu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda yer almaktadır.

37Ö : L_1 doğrusu teğet değildir, eğriye dıştan veya içten değmemiştir.

A:Ne demek dıştan veya içten değmemiş olması?

37Ö :Fonksiyonun üstünde ve altında kalan bölgelerden birinde kalacak şekilde çizilirse teğet olur.

A :Peki, her iki bölgeden de geçiyorsa?

37Ö :O zaman doğruyu kestiği için, yani her iki bölgede de yer aldığından teğet değildir.

A :Diğerleriyle devam edelim

37Ö : L_2 'de aynı şekilde teğet değildir, L_5 de onun gibi eğriyi kestikleri için teğet değiller.

A :Diğerleri?

37Ö : L_3 tek bir noktada içten teğet, L_4 yine tek bir noktada dıştan teğet ve L_6 tek bir noktada eğriye dıştan teğettir.

A : L_2 doğrusuna tekrar bakarsak, o noktada çizilecek teğet nasıl olurdu?

37Ö :Eğer şu şekilde çizersek, şöyle fonksiyonun üstünde kalacak şekilde...

A :O noktada fonksiyonun üstünde kalacak şekilde çizmek mümkün mü gerçekten?

37Ö :Aslında fonksiyonu kesmek zorunda

A :Böyle bir durumda ne derdin?

37Ö :Eğriyi kestiğine göre teğet olmamalı diye düşünüyorum

A :O nokta için bir farklılık söz konusu olabilir mi?

37Ö :Aslında o nokta için dönüm noktasıdır diyebiliriz

A :Peki, böyle bir durumda?

37Ö :Dönüm noktası için bilmiyorum, yani çizilip çizilemeyeceğinden emin değilim.

Buradan hareketle öğretmen adayının bir doğrunun bir eğriye hangi durumlarda teğet olabileceği hakkında genel bilgilere sahip olduğunu söyleyebiliriz. Fakat diğer öğretmen adayları gibi 37Ö kodlu öğretmen adayı da konuyla ilgili derinlemesine bir bilgiye sahip değildir. Bu nedenle L_2 doğrusunun eğriye dönüm noktasında teğet olma durumunu daha genel bir yorumda bulunarak değerlendirmiş ve yanlış cevaba gitmiştir. Benzer hata diğer öğretmen adayları tarafından da yapılmış ve kendileriyle yapılan mülakat esnasında L_2 doğrusunun durumuyla ilgili kesin bir fikirleri olmadığını belirtmişlerdir. Aşağıda 17Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

A :Peki, L_2 'ye tekrar bakalım. O noktada bir teğet çizecek olsaydın bunu nasıl çizerdin?

17Ö :Bunu yaparken L_2 'de bende aynı şeyi düşünmüştüm yani nasıl bir şey çizeyim acaba teğet olabilir mi diye

A :Mesele şurada bir tane çizmeye çalışalım

17Ö :Pek çizemiyorum aslında kesmesi gerekiyor illa bir teğet çizmem için, bilmiyorum o yüzden teğet olmuş olabilir. Çözerken de bir tereddüt yaşadım

A :Böyle bir nokta için farklılık olabilir mi, kesiyormuş gibi gözüküyor ama o noktanın bir ayrıcalığı var mıdır?

17Ö :Olabilir, teğetmiş gibi duruyor ama kesmemesi gerektiğini düşünerekten, kesiyormuş gibi gelmişti o yüzden L_2 teğet değildir diye düşünmüştüm ama çelişmiştim L_2 konusunda. Diğerlerinde direk değildir demiştim ama L_2 'de düşünmüştüm.

Görüldüğü gibi 17Ö kodlu öğretmen adayının L_2 doğrusunun durumuyla ilgili bazı tereddütleri olduğundan doğrunun eğriye teğet olup olmadığını tam emin olamamıştır. Diğer öğretmen adaylarıyla da yapılan mülakat sonucunda aynı sonuçlar çıkmış yani öğretmen adaylarının konuyla ilgili genel bilgileri olmasına rağmen derinlemesine bir bilgiye ve yeterli yorum gücüne sahip olmadıkları görülmüştür.

Dördüncü Soru

Tablo 31. Öğretmen adaylarının 4. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
4. soru	23	51	2	4	17	38	3	7	45	100

4. soruya tam doğru yanıt veren kişi sayısı sınıfın %51'ine, yanlış yanıt veren kişi sayısı %38'ine karşılık gelmektedir.

Cevabı "Tam Doğru Yanıt" olarak sınıflandırılan 23 öğretmen adayının cevaplarına bakıldığında 10 öğretmen adayı soruda verilen noktalardan geçen doğrunun eğiminin fonksiyonun $x=1$ noktasındaki türevine eşit olduğunu düşünmüştür. Buradan hareketle doğrunun eğimini hesaplayarak cevaba ulaşmışlardır. Aşağıda 24Ö kodlu öğretmen adayını soruya verdiği cevap yer almaktadır.

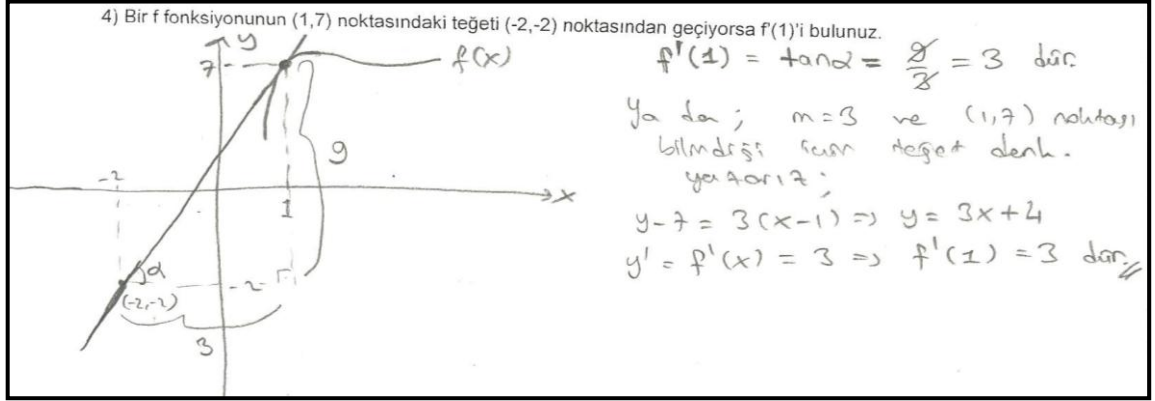
4) Bir f fonksiyonunun (1,7) noktasındaki teğeti (-2,-2) noktasından geçiyorsa $f'(1)$ 'i bulunuz.

$$m = \frac{-2-7}{-2-1} = \frac{-9}{-3} = 3 \text{ olup } x=1 \text{ noktasından geçen teğetin eğimi } 3 \text{ tür. Bu}$$

do fonksiyonun $x=1$ noktasındaki türevine eşittir $\Rightarrow f'(1) = 3$

Şekil 51. 24Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

13 öğretmen adayı ise çizdikleri grafiklerden hareketle doğrunun tanjantından eğimini hesaplayarak bunun $x=1$ noktasındaki türevi verdiğini belirtmişlerdir. Aşağıda 29Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 52. 29Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Görüldüğü gibi öğretmen adayı çizdiği grafikten yararlanarak türevi hesaplamıştır.

Mülakat yapılan öğretmen adaylarından beşi (17Ö, 24Ö, 25Ö, 27Ö ve 37Ö) soruya tam doğru yanıt vermişlerdir. Aşağıda bu öğretmen adayları arasından 37Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat verilmiştir.

A :Çözümünü açıklar mısın?

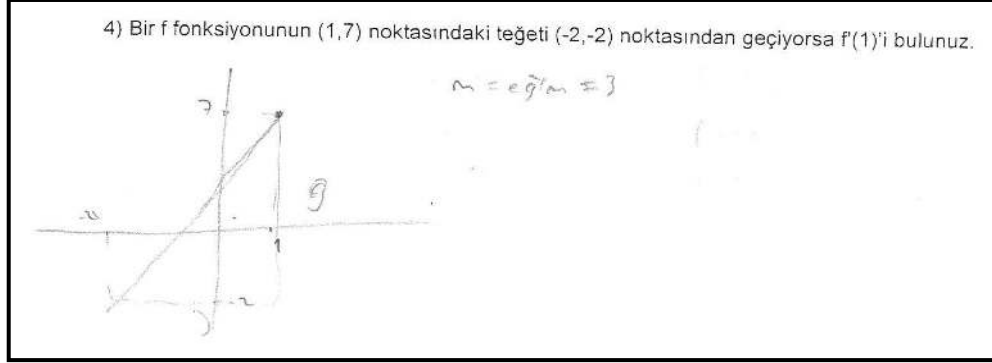
17Ö :İki noktayı biliyorum. Bilinen iki noktadan eğimi bulabiliyorduk, eğimde türeve eşit diye tanımda da öyle kullanmıştık o yüzden türevini böyle buldum

A :Teğetin eğimini bulmak yeterli miydi?

17Ö :Evet, o noktadaki türevi

Görüldüğü gibi öğretmen adayı teğetin eğiminden hareketle istenilen noktadaki türevi bulmayı başarmıştır. Diğer öğretmen adayları da benzer çözüm ve açıklamalarla soruyu doğru olarak çözmeyi başarmıştır.

Cevabı “Kısmen Doğru Yanıt” olarak sınıflandırılan 2 öğretmen adayı verilen noktalardan geçen doğrunun eğimini hesaplamış ancak bunun fonksiyonun $x=1$ noktasındaki türevi olduğunu belirtmemişlerdir. Aşağıda 39Ö kodlu öğretmen adayının cevabı yer almaktadır.



Şekil 53. 39Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Diğer öğretmen adayı da benzer bir çözüm yaparak soruya cevap vermiştir.

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 17 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 32. Öğretmen adaylarının 2. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
T3.1.Tip	Grafiği yanlış okuma veya dikkatsizlik	Öğretmen adayları çizdikleri grafiklerden hareketle eğimi hesaplayarak fonksiyonun $x=1$ noktasındaki türevini hesaplamaya çalışmış ancak grafikteki değerleri yanlış okuyarak soruya cevap vermişlerdir.	4
T3.2.Tip	Teğetin denklemini aynı zamanda fonksiyonun o noktadaki türevi olarak belirtilmiş ve doğru denkleminde $x=1$ için çözüm yapılmıştır.	$(1, 7)$ ve $(-2, -2)$ noktalarından geçen teğet doğrusu $\frac{x-1}{3} = \frac{y-7}{9} \Rightarrow 3x-3 = y-7$ $y = 3x + 4 \rightarrow f$ 'nin türevi aynı zamanda $f'(1) = 3 + 4 = 7$	4
T3.3.Tip	Hiçbir açıklamada yapılmadan fonksiyonun noktasındaki türevini -2 olarak belirtilmiştir.	$f'(1) = -2$	3

Tablo 32'nin devamı

T3.4.Tip	İşlem yapılmıştır.	hatası	$f'(1) = m = \frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{1 + 2}{7 + 2} = \frac{1}{3}$	2
	Diğer		Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	3

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde 1.tipte yanlış yapan öğretmen adayları soruyu cevaplamak için bir fonksiyon ve bu fonksiyona ait teğetin grafiğini çizmişlerdir. Çizilen grafikten hareketle teğetin eğimi geometrik olarak hesaplanmak istenmiş ancak verilen değerleri grafiğe yanlış taşıdıkları için ya da değerleri grafikten yanlış okudukları için teğetin eğimini yanlış hesaplamışlardır. Yani işlem hatası yapmışlardır. 2.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise verilen noktalardan geçen teğetin denklemini doğru bir şekilde bulmuş olmalarına rağmen bu doğruyu türev fonksiyonu olarak belirtmişlerdir. Elde etikleri bu doğrunun eğimi yerine doğru denkleminde bir noktasına karşılık gelen değeri fonksiyonun türevi olarak bulmuşlardır. 3.tipte yanlış yapan öğretmen adayları hiçbir açıklama ihtiyacı hissetmeden fonksiyonun $x=1$ noktasındaki türevinin -2 olduğunu belirtmişlerdir. Bunu fonksiyonun $(-2,-2)$ noktasından geçmesiyle ilişkilendirerek belirttikleri düşünülmektedir. 4.tipte yanlış yapan öğretmen adaylarının ise dikkatsizlik veya işlem hatası sonucu teğetin eğimini yanlış olarak belirledikleri düşünülmektedir. Soruya yanıt vermeyen 3 öğretmen adayı bulunmaktadır.

Soruya işlem hatası yaparak yanlış cevap veren 2Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda yer almaktadır.

- A : Sorunun çözümü için ne yaptığınızı anlatır mısınız?
- 2Ö : bir eğri çizmeye çalıştım ve bu eğriye verilen noktadaki teğeti çizdim
- A : Sonra
- 2Ö : Teğeti verilen diğer noktadan geçecek şekilde çizdim.
- A : Amacın neydi?
- 2Ö : Teğetin eğimini bulursam o noktada türevi verir diye düşündüm.
- A : Teğetin geçtiği noktaları doğru olarak belirledin mi?
- 2Ö : $(-2,-2)$ yerine $(-2,0)$ noktasını almışım
- A : İşlem hatası mı yaptın?
- 2Ö : Evet

Bu durumda öğretmen adayının sorunun çözümü için doğru bir strateji belirlediğini ancak soruda verilen noktaları grafiğe yanlış aktardığı için işlem hatası yaparak yanlış bir sonuç elde ettiğini söyleyebiliriz. Ayrıca bu durumun dikkatsizlikten kaynaklandığını ve

öğretmen adaylarının soruların çözümünde daha yüksek bir konsantrasyona ihtiyaç duydukları söylenebilir.

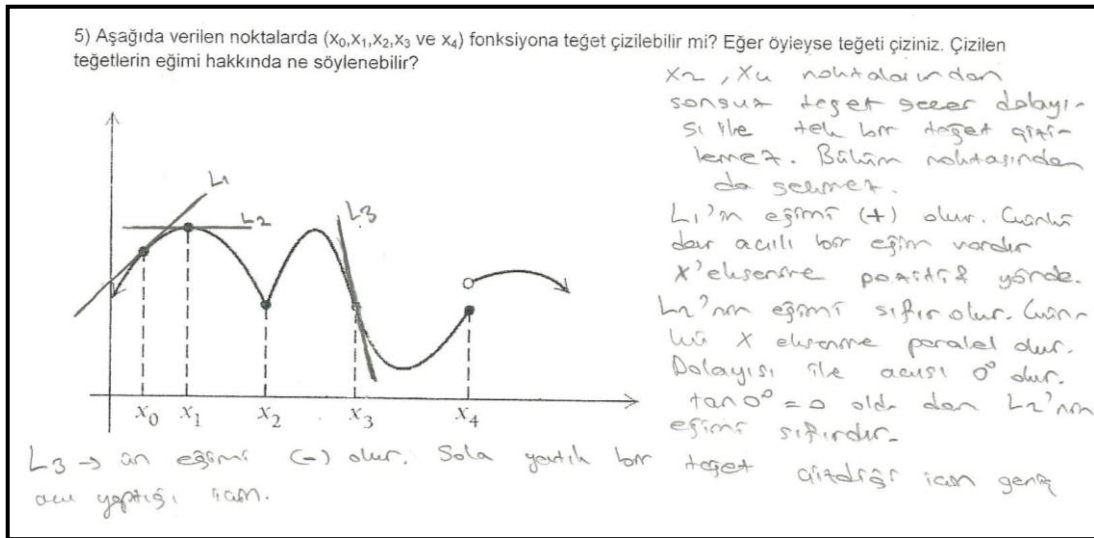
Beşinci Soru

Tablo 33. Öğretmen adaylarının 5. soruya verdikleri cevapların frekans ve yüzdeleri

Soru	Tam Doğru Yanıt		Kısmen Doğru Yanıt		Yanlış Yanıt		Yanıt Yok		Toplam	
	f	%	F	%	f	%	f	%	f	%
5.soru	5	11	7	16	31	69	2	4	45	100

Sınıfın büyük bir çoğunluğu (%69) soruya yanlış yanıt vermiştir. Soruya tam doğru yanıt ve kısmen doğru yanıt veren kişi sayısı birbirine yakın olup sırasıyla sınıfın %11 ve % 16'sına karşılık gelmektedir.

Cevabı "Tam Doğru Yanıt" olarak sınıflandırılan 5 öğretmen adayının cevapları incelendiğinde hepsi verilen noktalardan teğet çizilebilecek olanları çizmiş ve eğimleri hakkında doğru görüş bildirmişlerdir. Aşağıda 29Ö kodlu öğretmen adayının bu soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 54. 29Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Mülakat yapılan 6 öğretmen adayından üçü (17Ö, 24Ö ve 27Ö) bu soruya tam doğru yanıt vermiştir. Aşağıda araştırmacı ve 24Ö kodlu öğretmen adayı arasındaki diyaloga yer verilmiştir.

24Ö : x_0 noktasında ve x_1 noktalarında şekilde gösterdiğim gibi teğetler çizilebilir bu noktalarda fonksiyon süreklidir. x_0 noktasındaki teğetin eğimi artan bir teğet olduğu için pozitifdir diğeri x eksenine paralel olduğu için sıfırdır.

A : x_2 noktası?

24Ö : x_2 den çizilmeyeceğini biliyorum açıkçası da hani biraz yorumlamak zor açıkçası, belki değişiyor kesmiyor ama pek açıklayamıyorum. Sağ ve sol türevleri birbirine eşit olmadığın türevi yoktur, türevi yoksa zaten teğet çizilemez

A : x_3 noktasına bakalım

24Ö :Bir önceki soruyla çelişiyor

A :Burada teğet çizmişsin daha önceki soruda teğet değil demiştin

24Ö :Şu an bende yoktur diye düşünüyorum, belki yanlış olabilir cevabım.

A :Neden çizilemez?

24Ö :Kestiğini düşündüğüm için

24Ö kodlu öğretmen adayının soru kâğıdındaki cevabı tam doğru olarak sınıflandırılmasına rağmen mülakat sonucunda bazı noktalarda kafasında soru işaretleri olduğu anlaşılmaktadır. Aslında öğretmen adayının x_2 noktasında fonksiyonun türevi olmadığı için teğet çizilemeyeceği fikri doğrudur. Ancak öğretmen adayı türev-teğet ilişkisini " x_2 noktasında fonksiyona tek bir teğet çizilemiyor olması o noktadaki eğimi belirsiz yaptığından fonksiyonun o noktada türevi yoktur" şeklinde tanımlayabilseydi çözümüne olan güveni tam olabilirdi. Öğretmen adayının türev-teğet ilişkisine tek taraflı ya da sınırlı bir görüş açısıyla bakması kafasındaki soru işaretinin en büyük nedenidir. Ayrıca öğretmen adayı cevap kâğıdındaki 3.soruya verdiği cevapla çeliştğini düşünerek x_3 noktası için teğet çizilemeyeceğini belirterek doğru cevabını değiştirmiştir. Bu durum temelde konuyla ilgili bilgilerin tam oturmaması nedeniyle öğretmen adayının kendine güvenmemesinden kaynaklanmış olabilir. Benzer bir şekilde 27Ö kodlu öğretmen adayı da x_3 noktasında çizdiği teğeti 3.soruya verdiği cevapla çeliştğini düşündüğü için fonksiyonu kesen bir doğru olarak yorumlamış ve o noktada teğet olmadığını belirtmiştir. 17Ö kodlu öğretmen adayının x_3 noktasıyla ilgili fikri farklı olup aşağıda bu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

A :3.soruda x_3 noktasına benzer bir noktadan çizilen doğru için teğet değildir demiştin, şimdi o noktada teğet çizdin açıklar mısın?

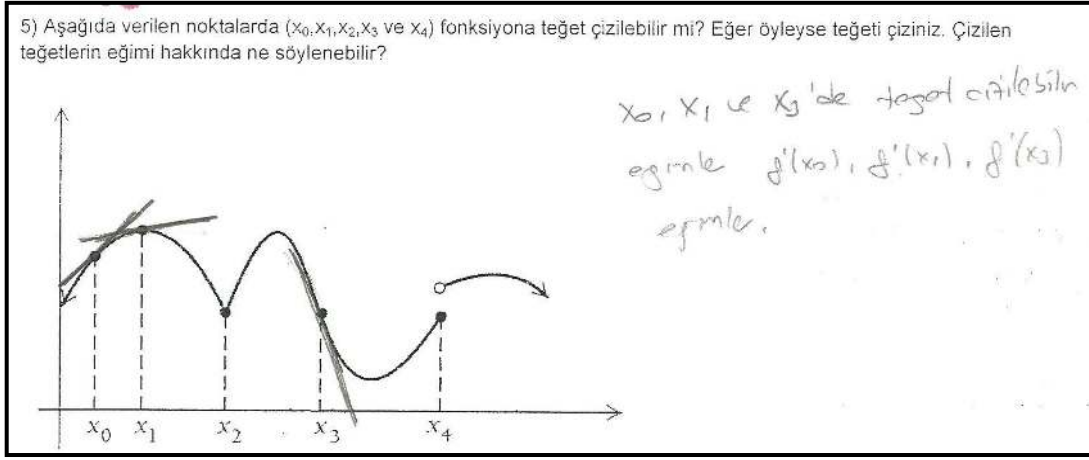
17Ö :Zaten o soruda tereddütlerim vardı o noktayla ilgili, fonksiyonu kesiyormuş gibi görünüyordu. Şimdi çizilebileceğini düşünüyorum

A :Neden?

17Ö :Çünkü fonksiyon o noktada sürekli ve türevli olmasına bir mani yok o yüzden teğet çizilebilir.

Anlaşılabacağı gibi 17Ö kodlu öğretmen adayı verdiği cevaba sadık kalmış ve 3.sorudaki çözümünün yanlış olduğunu belirtmiştir. Bunu yaparken türev-teğet ilişkisini doğru yorumlayarak fonksiyona o noktada bir teğet çizilebileceğini belirtmiştir.

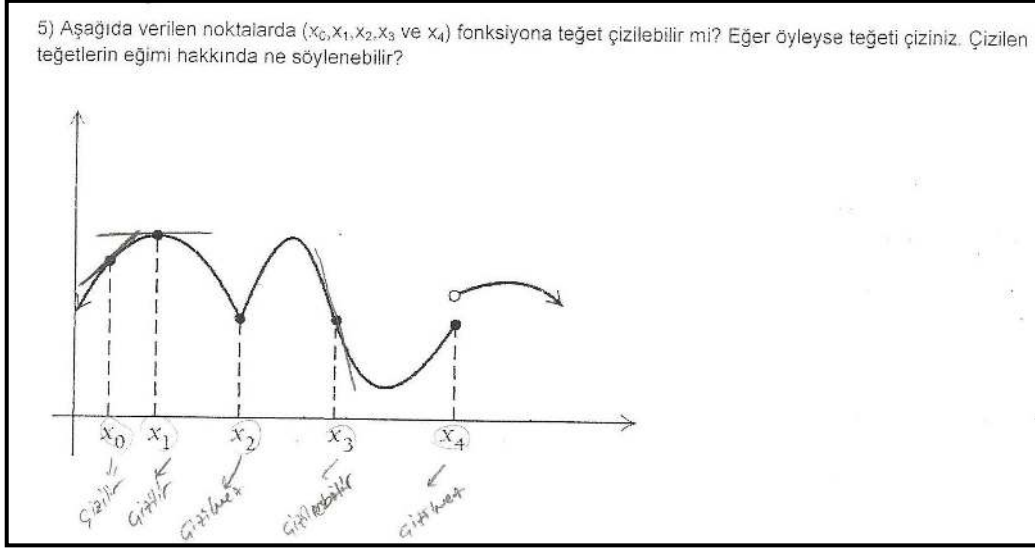
Cevabı “Kısmen Doğru Yanıt” olarak değerlendirilen 7 öğretmen adayının cevaplarına bakıldığında 6 öğretmen adayı fonksiyona teğet çizilebilecek noktaları doğru belirlemiş yalnız x_3 noktasında teğeti çizerken yanlış bir şekilde çizmişlerdir. Aşağıda 32Ö kodlu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 55. 32Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Görüldüğü gibi öğretmen adayı eğrinin altında kalacak şekilde bir teğet çizmeye çalışmıştır. Bu şekilde bir çizim yaparak teğetin o noktada eğriye tek bir noktada değmesi yani teğet olması amaçlanmış ancak x_3 noktasının bir dönüm noktası olabileceği durumu göz önüne alınmamıştır. Diğer öğretmen adayları da benzer bir şekilde teğet çizerek soruyu cevaplamışlardır.

7Ö kodlu öğretmen adayı ise verilen noktaların hepsinde teğetleri doğru çizmiş olmasına rağmen teğetlerin eğimleri hakkında bir açıklama yapmamıştır. Aşağıda bu öğretmen adayının soruya verdiği cevap yer almaktadır.



Şekil 56. 7Ö kodlu öğretmen adayının cevabı

Cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan 31 öğretmen adayının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 34. Öğretmen adaylarının 5. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
T5.1.Tip	x_0 ve x_1 noktalarında teğetler çizilerek soru cevaplanmıştır.	x_0 ve x_1 noktalarında çizilebilir, diğer noktalarda çizilemez	14
T5.2.Tip	Bir noktada teğet çizilebilmesi için fonksiyonun o noktada türevli olması gerektiği düşünülerek soru cevaplanmış, ancak x_2 noktasında fonksiyonun türevli olmadığı fark edilememiştir.	x_0, x_1, x_2 ve x_3 noktalarında türev var olduğu için teğet çizilebilir.	6
T5.3.Tip	Soru hakkında açıklama yapılmamış veya belirtilen noktalarda fonksiyonun sürekli olduğu düşünülerek cevap verilmiştir.	x_0, x_1 ve x_2 noktalarında teğet çizilebilir, çünkü fonksiyon bu noktalarda sürekli dir.	4
T5.4.Tip	Açıklama yok	x_0, x_1, x_3 ve x_4 noktalarında teğet çizilebilir	2
T5.5.Tip	Fonksiyona her noktada teğet çizilebileceği düşünülmüştür.	Bütün noktalarda fonksiyona teğet çizilmiştir.	2
Diğer		Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	3

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde 1.tipte yanlış cevap veren 14 öğretmen adayı verilen noktalardan x_0 ve x_1 de teğetler çizerek bu noktalarda fonksiyonların teğetleri olduğunu ifade etmiştir. Aslında bu iki noktada fonksiyona teğet çizilebilmektedir ancak bu iki noktaya ek olarak x_3 noktasında da fonksiyona teğet çizilebilmektedir. Ancak öğretmen adayları x_3 noktasında çizilen teğetin fonksiyonu kestiğini düşündükleri için bu noktada çizilen doğruyu teğet olarak almamışlardır. x_3 noktası fonksiyonun dönüm noktası olarak düşünülmüş olsa da öğretmen adayları bu noktadan teğet geçmeyeceği fikrine kapılmışlardır. 2.tipte hata yapan öğretmen adayları belirledikleri noktalar olan x_0 , x_1 , x_2 ve x_3 noktalarında fonksiyona teğetler çizmiş ve fonksiyonun bu noktalarda türevli olduğu için teğetlerinin olduklarını düşünmüşlerdir. Ancak x_2 noktası her ne kadar diğer üç nokta gibi sürekli olsa da bu noktada fonksiyon bir sivri uca sahiptir ve sağ ve sol türevler birbirine eşit değildir. Ancak bu durum öğretmen adayları tarafından fark edilmemiştir. Ayrıca öğretmen adayları bu noktada sonsuz sayıda teğet çizilebiliyor olmasına rağmen kendi belirledikleri bir şekilde teğet çizmişlerdir. 3.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise x_0 , x_1 ve x_2 noktalarında teğetler çizerek soruyu cevaplamıştır. Diğer yanlış tipinde olduğu gibi x_2 noktasında fonksiyon sivri uca sahip olduğu halde sürekli olduğu düşünüldüğü için teğet çizilmiştir. Bu yanıla ek olarak yine x_3 noktasında çizilen doğrunun fonksiyonu kestiği düşünülerek teğet olarak kabul edilmemiştir. 4.tipte yanlış yapan iki öğretmen adayı x_2 noktası hariç bütün noktalarda teğet çizerek soruyu cevaplandırmıştır. Öğretmen adaylarından birisi x_2 noktasında çizilen teğetin fonksiyonu başka noktalarda da keseceğinden teğet olamayacağını belirtmiştir. Ek olarak x_4 noktasında fonksiyonun limiti olmamasına rağmen fonksiyonun tanımlı olduğu uçtan teğet çizmiştir. 5.tipte yanlış yapan öğretmen adayları da fonksiyonun verilen noktalardaki durumuna aldırış etmeden her noktada teğet çizerek soruyu cevaplandırmışlardır. Soruyu yanıtlamayan öğretmen adayı bulunmamaktadır.

Soruya yanlış cevap veren öğretmenler arasından 2Ö kodlu öğretmen adayı bazı noktalarda teğetleri doğru bir şekilde çizmiş bazı noktalarda ise yanlış çizim ve yorumlamalarda bulunmuştur. Aşağıda bu öğretmen adayına ait mülakat kaydı aşağıda yer almaktadır.

A : x_1 noktasından bahseder misin?

2Ö :Bu noktada teğet çizilebilir

A :Eğimi?

2Ö :Eğimi yoktur

A :Neden yoktur?

2Ö :O nokta da türevi sıfırdır, eğim olmadığından türev sıfırdır

A :Türevin sıfır olması teğetin eğimini de sıfır yapmaz mı?

2Ö :Eğim olmadığından değişimden bahsedemeyiz dolayısıyla türev sıfır olur.

A : x_2 noktasında çizdiğin teğet başka şekilde de çizilemez miydi?

2Ö :Böyle de olurdu farklı şekillerde de olabilirdi

A :Bir noktaya birden fazla teğet çizilebilir mi?

2Ö :Çizilemez, ben bir tane çizmem gerektiğini düşündüğüm için onu çizdim

Öğretmen adayının verdiği cevaplardan hareketle teğet kavramıyla ilgili temelde bazı eksikliklerinin olduğu anlaşılmaktadır. Örneğin öğretmen adayı x eksenine paralel olacak şekilde çizdiği bir teğet için eğimi olmadığını bundan hareketle değişim olmadığını ve türevin sıfır olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla hem teğeti çizip hem de çizdikten sonra eğimi olmadığından bahsetmesi çelişkili bir durum olarak ortaya çıkmıştır. Bu durum aynı zamanda öğretmen adayının kavramlar arasındaki ilişkiyi tam olarak anlamadığından ve yeterli yorum gücüne sahip olmamasından kaynaklanmaktadır.

25Ö kodlu öğretmen adayının teğet kavramıyla ilgili oldukça yüzeysel bilgilere sahip olduğu yapılan mülakata sonucunda ortaya çıkmıştır. Aşağıda bu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

A :Hangi noktalarda teğetler çizilebilir?

25Ö : x_0 ve x_1 noktalarında, burada da çizerek gösterdim

A :Eğimleri hakkında ne söyleyebilirsiniz?

25Ö :...Pozitif olması lazım, bir bölgede olunca yönüne mi bakıyorduk bir şeyinden bakıyorduk...

A : x_2 noktası?

25Ö :O noktada çizeceğimiz teğet fonksiyonu başka bir noktada kestiği için x_2 de teğet çizemeyiz

A :Sadece o nokta için incelememiz gerekmez mi?

25Ö :Ben öyle düşünüyorum, tam bir fikrim yok

A : x_3 noktası?

25Ö :Dönüm noktası, şimdi çizilebilir diye düşünüyorum.

Öğretmen adayı daha basit sayılabilecek noktalarda teğetleri çizmiş ancak sivri uç ve dönüm noktası gibi farklı noktalarda ise teğetlerin durumu ile ilgili yanlış bilgiler vermiştir. Ayrıca öğretmen adayı teğetlerin eğimleri hakkında sağlıklı bir fikir öne sürememiştir. Öğretmen adayı bu konu hakkında çok genel bilgilere sahiptir ve bu yüzden farklı durumlar için yorum yapamamıştır.

5. TARTIŞMA

Bu çalışmada, matematik öğretmeni adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamaları ve karşılaştıkları zorlukları ortaya koymak amaçlanmıştır. Bu amaçla sırasıyla türev-limit, türev-değişim oranı ve türev-teğet/eğim ilişkine yönelik yazılı sınavlardaki sorulara öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar analiz edilmiştir. Yapılan klinik mülakatlarla da öğretmen adaylarının verdikleri yanlış veya doğru cevapların nedenleri irdelenmiştir. Bu bölümde her bir alt problemle ilişkili olarak elde edilen bulgular literatür desteğinde tartışılacak ve buradan sonuçlara ulaşılabacaktır.

5.1. Türev-Limit İlişkisine Yönelik Tartışma

Türev ve limit ilişkisi yönelik öğretmen adaylarının anlamalarını ortaya koymayı amaçlayan soruların analizinden elde edilen bulgular, genel anlamda öğretmen adaylarının bu ilişki hakkında yüzeysel bilgilere sahip olduğunu göstermektedir. Bu nedenle kavramlar arasındaki ilişkileri yorumlamaya veya ifade etmeye çalışırken zorlandıkları ve bu ilişkilerin niteliği hakkında çok fazla fikirleri olmadığı tespit edilmiştir. Örneğin *“Türevi kendi cümlelerinizle açıklayınız?”* sorusunu ele alalım. Öğretmen adaylarının yalnızca %24’ü bu soruya tam doğru bir cevap verirken, %49’u yanlış cevaplar vermiştir. Cevapları yanlış olarak nitelendirilen öğretmen adayları ağırlıklı olarak *“Bir eğrinin üzerindeki herhangi bir noktadaki eğimine, o noktadaki türevi denir”* ve *“Bir fonksiyonun herhangi bir aralıkta anlık değişimidir”* şeklinde cevap vermişlerdir. Oysa türev, bir eğrinin bir noktadaki teğetinin eğimi veya bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki anlık değişim oranı olarak tanımlanmaktadır. Bu durum Ubuz’un (1996) öğrenci hatalarını sınıflandırdığı çalışmasında *“Tanımların içeriklerinin anlaşılması”* ve *“Verilen tanımın bir bütün olarak anlaşılmasından kaynaklanmaktadır”* şeklinde ifade edilmiştir. Ubuz, öğrencilerin analizi zayıf kavramsal imgeler üzerine kurulan algoritmik düzeyde öğrendikleri ve çoklu temsiller arasındaki geçişte sıkıntı yaşadıkları sonucuna ulaşmıştır. Benzer bir şekilde öğretmen adayları da çoklu temsiller arasında sıkıntı yaşamış kavramsal anlama yerine işlemsel anlamayı tercih etmişlerdir.

Bu kısımda yer alan bazı sorulara öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar ve bu cevaba ulaşma nedenlerinin sorgulandığı birçok durumda, öğretmen adaylarının yeterli sayılabilecek düzeyde doyurucu açıklamalar yapamadıkları görülmüştür. Örneğin bu kısımda yer alan ikinci soru için öğretmen adayları türev-limit arasındaki ilişkiyi formüle edebilmelerine karşın, bu formülün altındaki kavramsal yapıyı açıklamada zorluk

yaşamıştır. Öğretmen adaylarının gerek yazılı sınavda gerek klinik mülakatlarda verdikleri

cevaplar $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ve $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ cebirsel ifadelerinin bir f fonksiyonun belli bir “a” noktasındaki türevini

verdiği bilgisine sahip olduklarını göstermektedir. Ancak hiçbir öğretmen adayı yeterli sayılabilecek düzeyde bu formülün alt yapısını açıklayamamıştır. Açıklamaların bir kısmı “türevin tanımı gereği böyle” şeklinde ifadeler ile sınırlı kalmıştır. Bu ise kavramsal anlamalardan yoksun işlemsel öğrenmelerin bir göstergesi olabilir. Bir öğretmen adayı için hangi konu ya da kavramla ilişkili olursa olsun bir soruya doğru cevap vermesinden daha çok, soruyu doğru çözüme ulaştırma sürecinde ne yaptığının farkında olması, kullandığı ilişki, formül ve özelliklerin anlamını bilmesi ve açıklaması istendiğinde anlaşılır bir şekilde çözümünü desteklemesi önemlidir. Bu ilişkili konu ve kavram ile ilgili anlamalarının derinliğini göstermesi açısından önemli ve gereklidir.

Araştırmanın birinci alt problemine ait 3. ve 4. sorulara öğretmen adaylarının verdikleri cevaplara bakıldığında belirgin bir durum göze çarpmaktadır. Üçüncü soruda öğretmen adaylarından kuralı bilinen bir fonksiyonun bir noktadaki türevi limit tanımı kullanılarak bulmaları istenmiş ve öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu bu soruya tam doğru olarak cevap vermiştir. Ancak dördüncü soruda bir fonksiyona ait nümerik değerlerden hareketle bir noktada türevin istendiği soruya sadece bir öğretmen adayı tam doğru olarak yanıt verebilmiştir. Öğretmen adaylarının tamamına yakını dördüncü soruya yanlış yanıt vermiştir. Bu durum öğretmen adaylarının sınırlı bir görüş açısına sahip oldukları şeklinde yorumlanacağı gibi yukarıda da bahsedildiği gibi türev-limit arasındaki ilişkiyi derinlemesine bilmemekten kaynaklanmaktadır. Öğretmen adayları belli gösterim şeklinde verilen (cebirsel) soruların çözümünde başarılı olurken aynı başarıyı diğer gösterim şekilleriyle verilen sorularda gösterememektedir. Bu yüzden öğretmen adayları farklı gösterimlerle verilen soruların çözümünü yaparken soruyu bildikleri bir çözüm formatına dönüştürmeye çalışarak cevap vermeye çalışmışlardır. Örneğin 3. soruyu cebirsel bir çözüm yaparak doğru cevaplayan öğretmen adayları dördüncü soruda tabloda bir fonksiyona ait nümerik verilerden oluşan sorunun çözümünü yapmak için fonksiyonun kuralını bulmaya çalışarak veya direk üçüncü soruya benzeterek bir çözüm yapmaya çalışmışlardır. Daha önce yapılmış bazı çalışmalarda öğrencilerin bir fonksiyonun türevini bulmak için fonksiyonun cebirsel gösterimini bulmaya yöneldiklerini ortaya koymuştur (Park, 2011). Cebirsel gösterime yönelik buna benzer bir durum araştırmanın ikinci alt problemde yer alan ve grafiği verilen bir fonksiyonun belirli noktalardaki ortalama ve

anlık değişimlerinin istenildiği sorularda da ortaya çıkmıştır. Araştırmanın ikinci alt problemine yönelik tartışma ve sonuçlarda bu durumuma değinilecektir. Bunlara ek olarak öğretmen adaylarının gerek orta öğretimlerinde gerekse lisans düzeyinde cebirsel gösterimlerin kullanıldığı soruları çözmeye alışık olması bu durumun ortaya çıkmasının nedenlerinden biri olabilir.

Aynı zamanda yapılan çalışma öğretmen adaylarının türev ile limit arasındaki ilişkiyi yanlış yorumladıklarını ve temelde bu kavramlar arasındaki ilişkisinin tam olarak oturmadığını ortaya çıkarmıştır. Türev-limit ilişkisini ölçmeye yönelik uygulamanın son sorusunda bazı öğretmen adayları türevi “*Bir fonksiyonun verilen noktadaki limitinin fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olmasına türev denir*” veya “*Bir noktada oluşan eğrinin sağdan ve soldan limitlerinin eşit olması durumunda o fonksiyonun o noktada türevi olduğundan bahsedebiliriz*” şeklinde ifade ederek süreklilik ve limit kavramlarını türevle eşdeğer tutmuştur. Bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin var olması ve o noktada sürekli olması fonksiyonun o noktada türevli olması için gerekliliktir. Yapılan klinik mülakatlarla bazı öğretmen adaylarının bir fonksiyonun bir noktada türevinin olması için sadece o noktada fonksiyonun limitinin var olmasının yeterli olduğunu ifade etmesi bilgi eksikliğinin ve kavramlar arasındaki kopukluğun açık bir göstergesidir. Selden (2000) ve Viholanen (2006) öğretmen adayları üzerinde yaptıkları çalışmalarında öğrencilerin süreklilik ve türevlenebilme arasındaki ilişkiyi anlamalarının yeterli olmadığını belirtmişlerdir. Öğretmen adayları ile yapılan bu çalışmada öğrencilerle yürütülen çalışmalardakine benzer bir durumun ortaya çıkması dikkat çekicidir.

Bunun yanı sıra bazı öğretmen adayları sürekliliğin fonksiyonun bir noktada türevli olması için yeterli koşul olduğunu düşünerek fonksiyonun sürekli ancak türevsiz olduğu sivri uçlarda hataya düşmüşlerdir. Öğretmen adaylarının daha çok belirli örnekler üzerinde çalışmaları onları farklı sorularda yanlış yapmaya götüren başlıca etkenlerden birisidir.

5.2. Türev-Değişim Oranı İlişkisine Yönelik Tartışma

Türev ile değişim oranı arasındaki ilişkiyi ölçmeye yönelik matematik öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar analiz edildiğinde öğretmen adaylarının ortalama hız ile anlık hız arasındaki ilişkiyi tam olarak bilmedikleri ortaya çıkmıştır. Araştırmanın ikinci alt problemine ait ilk iki soru farklı gösterimlerle oluşturulmuş ortalama ve anlık hız sorularıdır. Birinci soru öğretmen adaylarına cebirsel olarak ikinci soru ise nümerik olarak sunulmuştur. Araştırmanın üçüncü ve son sorunda grafiği verilen bir fonksiyonun belirli bir aralıkta ortalama değişim oranı ve belli bir noktada anlık değişim oranı istenmiştir.

Öğretmen adaylarına yöneltilen ilk sorunun “a” şıkında çok küçük aralıklarda bir hareketlinin ortalama hızı istenmiştir. Sorunun “b” şıkında ise a’da elde ettikleri verileri

kullanarak hareketlinin belli bir noktadaki anlık hızı istenmiştir. Öğretmen adaylarının a şıkkını çözme başarıları %24 iken b şıkkını çözme başarıları %67'dir. Öğretmen adaylarından a şıkkında buldukları ortalama hızlardan hareketle b şıkkına cevap vermeleri beklenirken hiçbir öğretmen adayı a ve b şıklarını ilişkilendirerek soruya cevap vermemiştir. Sadece yapılan klinik mülakatlarda bir öğretmen adayı bu ilişkiyi gördüğünü belirtmiştir. 20 öğretmen adayı da sorunun a şıkkını yanlış çözmüş olmasına rağmen b şıkkını doğru çözmüştür. Bu durum öğretmen adaylarının ortalama hız ile anlık hız arasındaki ilişkiyi özümsemediklerini yani ortalama değişim oranı ile anlık değişim oranı arasındaki bağlantıyı bilmediklerini ortaya koymuştur. Benzer şekilde Baki (2008) öğrencilerin ortalama değişim oranı ve değişim oranı kavramlarını birbirleriyle karıştırdıkları ve birbirlerinin yerine kullandıklarını ifade etmektedir. Bu kargaşa kavramlara ilişkin sembolik gösterimlerde de kendini göstermektedir ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$ yerine $\frac{dy}{dx}$ kullanmaları).

Öğretmen adayları bir hareketlinin belli bir zamandaki anlık hızını hesaplarken türev kullanmaları gerektiğini bilmektedirler. Tıpkı birinci alt problemde olduğu gibi cebirsel gösterimdeki soruların çözümündeki başarılarını burada da göstermişlerdir. Yapılan araştırmalar öğrencilerin güçlü bir işlemsel beceriye sahip olduklarını ancak ortalama değişimi kavramak konusunda zorlandıklarını ortaya koymuştur (Park, 2011). Benzer bir durum Orton'un çalışmasında da ortaya çıkmıştır. Orton'un (1983) çalışmasında yer alan 110 öğrenciden 60'ı grafiğiyle birlikte verilen bir fonksiyonun $x=a$ ile $x=a+h$ aralığında ortalama değişim oranını bulmakta başarısız olmuşlardır. Öğrencilerin işlem becerisine sahip olmaları onların ortalama değişim oranı ile anlık değişim oranı arasındaki bağlantıyı derinlemesine bir şekilde anlamalarına yardımcı olmaz (Hauger, 1998). Gerçekten de öğretmen adayları türev alma kuralları ile ilgili işlemsel becerilere sahip olmasına rağmen değişim oranı kavramını türev ile ilişkilendirmekte zorlanmışlardır. Bu kavramın iyi anlaşılması türevi daha derinlemesine anlamak için önemlidir. Thompson (1994) çalışmasında ortalama değişim oranını ilişkilendirerek anlamının öğrencilerin türev kavramını ve analizdeki teoremleri anlamalarına yardımcı olacağını belirtmiştir.

Öğretmen adaylarının ortalama hızı bulmaya çalışırken yapmış oldukları en yaygın hata yol-zaman denkleminin türevini aldıktan sonra elde ettikleri denklemde ortalama hızın istenildiği zamanlara karşılık gelen değerlerin farkını alarak ikiye bölmek olmuştur. Yani istenilen zamanlara karşılık gelen hızları farkının yarısını o aralıktaki ortalama hız olarak düşünmüşlerdir. Öğretmen adayları ortalama hız kavramının türevle ilişkili olduğunun farkında olmalarına rağmen bu ilişkiyi nasıl kullanmaları gerektiğini bilmemektedir. Yapılan klinik mülakatta da bu durum ortaya çıkmıştır. Yaygın olarak yaptıkları bir diğer hata türü de bir noktadaki türevi ortalama hızın hesaplanmasında yararlanacakları bir formül olarak

kullanmalarındır. Çok küçük bir aralıkta ortalama hızın isteniyor olması öğretmen adaylarını ortalama hızı veren oranın limitini almaya itmiştir. Bu durum iki kavram arasındaki bağlantının nasıl kurulması gerektiğini bilmemelerinden kaynaklanmaktadır.

Öğretmen adayları tabloda nümerik verilerin bulunduğu ikinci sorunun a şıkkını

kolayca $V_{ort} = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2}$ formülünden çözmüşlerdir. Öğretmen adaylarının yarısından biraz

fazlası bu sorunun çözümünde başarılı olmuştur. Soruyu yanlış çözen öğretmen adaylarının oranı ise %27 olmuştur. Öğretmen adaylarının bu sorunun çözümünde yapmış

oldukları en yaygın hata türü sorunun çözümünde $V_{ort} = \frac{ToplamYol}{ToplamZaman}$ formülünü yanlış

olarak yorumlamak olmuştur. Öğretmen adayları tablodaki her bir zamanı ve bu zamanlara karşılık gelen mesafeleri ayrı ayrı toplayarak birbirine oranlamıştır. Ortalama hız genellikle bir hareketlinin belli bir aralıkta toplam kat ettiği yolun toplam zamana oranı olarak bilinir. Ancak bu durum öğretmen adayları tarafından tabloda verilen aralıktaki tüm verilerin toplanarak oranlanması olarak algılanmıştır. Öğretmen adayları zihinlerinde doğru bir şekilde formüle ettikleri bir kavramının uygulamasını yanlış yapmışlardır. Bu durum soruyu yanlış çözen öğretmen adaylarının yeterli düzeyde bu konuyla ilgili uygulama yapmadıklarından kaynaklanmış olabilir. Ortaya çıkan bir diğer hata türü de yolları farkı oranının zamanlarına farkı oranının alınarak limit durumunda incelenmesidir. Öğretmen adayları aynı hatayı birinci sorunun a şıkkında ortalama hızı hesaplarken de yapmışlardı.

Türev-değişim oranı yazılı sınavının ikinci sorusunun b şıkkında tabloda verilen değerleri kullanarak öğretmen adaylarından $t=1$ anındaki anlık hız istenmiştir. Öğretmenler adaylarından hiç biri bu soruya doğru yanıt verememiştir. Soruya yanlış yanıt veren öğretmen aday sayısı sınıfın yarısıdır ve geriye kalan öğretmen adayları ise soruyu yanıtsız bırakmıştır. Öğretmen adayları bir önceki alt problemde olduğu gibi kuralını bilmedikleri bir fonksiyonun belli bir noktadaki türevi hesaplamakta zorlanmış ve bu soruda da $t=1$ noktasındaki anlık hızı nümerik değerlerden hareketle hesaplayamamıştır. Aslında soruyu yanlış hesaplayan birçok öğretmen aday $t=1$ anındaki anlık hızı hesaplarken türev kavramını kullanmaları gerektiğini bilmektedir. Ancak öğretmen adaylarının daha çok cebirsel gösterimle verilen soruların çözümüne eğilimli olması ve gerek türev-limit gerekse türev-değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi tam olarak kuramaması bu tür soruların çözümde sonuca ulaşmalarına engel olmuştur. Yapılan en yaygın hata türlerine gelecek olursak, öğretmen adayları verilen noktanın hem sağından hem de solundan türevine bakmaları gerekirken sadece bir taraftan bir aralık seçerek bu aralıktaki ortalama hızı $t=1$ anındaki anlık hız olarak belirtilmiştir. Öğretmen adayları 1 noktasının çok yakınındaki bir

aralıktaki ortalama hız bulmaları halinde bu değerin $t=1$ noktasındaki anlık hıza yakın bir değer vereceğini düşünerek hareket etmişlerdir. Yapılan klinik mülakatlarda bu sonuca paralel veriler elde edilmiş hatta öğretmen adayları tek taraflı türeve bakmanın yeterli olacağını diğer taraftan da aynı sonucun geleceği beklentisi içinde olduklarını belirtmişlerdir. Bir diğer hata türünde ise öğretmen adayları verilen noktanın sağından veya solundan elde ettikleri oranları limit durumunda inceleyerek bu durumu $t=1$ noktasındaki türev olarak belirtmişlerdir. Gelişigüzel bir şekilde limit almak öğretmen adaylarının diğer alt problemlerde de yapmış oldukları bir hata türü olarak karşımıza çıkmaktadır.

Öğretmen adaylarının grafiği verilen fakat denklemi bilinmeyen bir fonksiyonun belirli aralıklarda ortalama değişim oranı ile belli noktalarda anlık değişim oranını hesaplama başarıları sırasıyla %36 ve %22'dir. Bu öğretmen adayları fonksiyona istenilen aralıklarda kırımlar çizerek eğimlerinden ortalama değişim oranlarını karşılaştırmıştır. Benzer bir şekilde verilen noktalardaki anlık değişim oranlarını karşılaştırmak için o noktalarda teğetler çizerek eğimlerini karşılaştırmışlardır. Bir çok öğretmen adayı çözüm yapmak yerine $[0,3]$ aralığında ortalama değişim oranının daha büyük olduğunu veya $x=1$ noktasında anlık değişim oranının daha büyük olduğunu sözel olarak belirterek soruyu cevaplamıştır. Fonksiyonun şekline bakarak sonucu tahmin etmeye çalışmışlardır. Fonksiyonun kuralını bilmeyen öğretmen adayları probleme ilişkin açıklayıcı bir çözüm yapamamıştır. Çoğu araştırmalar öğrencilerin fonksiyon kavramı ile ilgili olarak çalışırken cebirsel formüle ihtiyaç duyma ve kullanma gereksiniminde olduklarını göstermektedir (Asiala, Cottrill ve Dubinsky, 1997; Tall ve Vinner, 1981). Literatürdeki bu sonuç fonksiyonun cebirsel kuralının verilmediği bu problem durumunda öğretmen adaylarının verdikleri cevabı neden destekleyemediklerinin bir gerekçesi olabilir.

Ortalama değişim oranını yanlış cevaplayan öğretmen adayları ya ortalama değişim oranı yerine verilen aralıktaki değişim miktarına bakarak bir değerlendirme yapmış ya da değişim oranlarını limit durumunda incelemiştir. Öğretmen adaylarının değişim oranlarını limit durumda incelemesi soruyu türevle ilişkilendirmek istemelerinden kaynaklanmaktadır. Bu hata türü araştırmanın genelinde yaygın olarak yapılmıştır. Anlık değişim oranını yanlış cevaplayan öğretmen adayları $x=1$ noktasında fonksiyonun eğiminin daha büyük olduğunu belirterek soruya cevap vermişlerdir. Oysaki fonksiyonun eğimi yerine fonksiyonun teğetinin eğimi ifadesinin kullanılması gerekirdi. Yapılan klinik mülakattan hareketle burada fonksiyonun eğimi ifadesiyle aslında anlatılmak istenenin o noktadaki teğetinin eğimi olduğu ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının anlatmak istediklerini doğru bir şekilde ifade etmek için matematiksel dili etkin bir şekilde kullanmayı bilmeleri

gerekmektedir. Bu durum aynı zamanda konuyla ilgili bilgi eksikliğinin de bir göstergesi olabilir.

5.3. Türev-Teğet/Eğim İlişkisine Yönelik Tartışma

Türev ile teğet/eğim ilişkisini ölçmeye yönelik sorulara verilen cevapları analiz edildiğinde matematik öğretmen adaylarının bu kavramlar arasındaki ilişkileri tam olarak bilmedikleri, yanlış bilgilere sahip oldukları ve bu konuya ait son derece genel bilgilerle soruları çözmeye çalıştıkları ortaya çıkmıştır.

“Türev ile eğim arasındaki ilişkiyi açıklayınız.” sorusuna doğru cevap veren öğretmen adayları “*bir noktada fonksiyona çizilen teğetin eğimi o noktada fonksiyonun türevine eşittir.*” ifadesini kullanarak soruya cevap vermiştir. Bazı öğretmen adaylarının cevapları ise hem doğru hem de yanlış bilgileri içermektedir. Örneğin bir öğretmen adayı “*fonksiyona bir noktadan çizilen teğetin eğimi o noktada türevi verir*” ifadesiyle birlikte “*doğrunun eğimi yoksa türevi sıfırdır*” ifadesini birlikte kullanarak bu konu hakkında yanlış düşüncelerinin de olduğunu ortaya koymuştur. Yine başka bir öğretmen adayının “*bir doğrunun eğimi o doğrunun birinci türevidir*” tanımı ise sadece doğrular için geçerli olan kısıtlı bir ifadedir. Bu ifadelerden anlaşılacağı üzere öğretmen adaylarının konuyu derinlemesine yorumlayacak bir bilgi birikimi yoktur. Soruya verilen en yaygın hata türü ise “*Bir fonksiyonun belli bir noktadaki türevi aynı fonksiyonun o noktadaki eğimini verir.*” cevabı olmuştur. Öğretmen adayları fonksiyona çizilen teğetin eğimi yerine fonksiyonun eğimi ifadesini kullanmışlardır. Bu durum aynı zamanda birinci alt problemin “Türevi kendi cümlelerinizle tanımlayınız” sorusunda yapılan en yaygın hata türü olarak karşımıza çıkmaktadır. Buradan hareketle öğretmen adaylarının matematiksel dili etkin bir şekilde kullanamadıkları, bilgi eksiklikleri olduğu veya dikkatsiz davrandıkları gibi sonuçlara varılabilir. Yapılan klinik mülakatta iki öğretmen adayı verdikleri cevaplarda kast etikleri şeyin teğetin eğimi olduğunu belirtmişlerdir.

“Teğeti tanımlayınız” sorusuna öğretmen adaylarının %35’i doğru cevap vermiştir. Üç öğretmen adayı soruyla ilgili doğru tespitlerle birlikte yanlış ifadelere de yer vermiştir. Örneğin bir öğretmen adayı teğetin tanımını doğru yaptıktan sonra teğetin eğiminin sıfırdan büyük olması gerektiğini belirterek daha dar bir kapsamda durumu değerlendirmiştir. Bir diğer öğretmen adayı ise teğetin eğriye bir noktada değen bir doğru olduğunu ve eğriyi başka hiçbir noktada kesmemesi gerektiğini belirterek yanlış bir açıklama yapmıştır. Benzer hata Biza, Christou ve Zachariades’in (2006) çalışmasında birçok öğrenci tarafından yapılmış olmasına rağmen bizim çalışmamızda bu hatayı yapan bir öğretmen adayı bulunmaktadır. Öğretmen adayları teğeti veya teğet doğrusunun tanımını birçok farklı şekilde yapmaya çalışmıştır. En çok yapılan hata türlerinden birisi

teğetin eğriyi tek bir noktada kesen doğru olduğu şeklinde yapılan ifadedir. Bu tanımdan hareketle bir eğriyi kesen her doğrunun teğet olabileceği sonucuna varılabilir. Yapılan tanım çok genel bir yargıya sahip olup teğet olma durumuyla ilgili hiçbir özel durumu kapsamamaktadır. Öğretmen adaylarının konuyla ilgili bilgileri son derece yüzeysel kalmıştır. Bir diğer hata türü de teğet olma durumunun teğet doğrusunun eğiminin sıfır olması ya da x eksenine paralel olması olarak belirtilmesidir. Her iki hata türüne de baktığımızda soruyu yanlış cevaplayan öğretmen adaylarının soruya doğru cevaplayacak bir bilgi birikimlerinin olmadığı ortaya çıkmıştır. Bu durum öğretmen adaylarının ya kavramları dar bir kapsamda incelemelerine ya da özel durumları gözden kaçırıp çok daha genel açıklamalarda bulunmalarına neden olmaktadır.

Bu bölümün üçüncü probleminde öğretmen adaylarının başarı oranı çok düşük olmakla birlikte soruya yanlış cevap veren öğretmen adayları sınıfın %85'ini oluşturmaktadır. Türevin geometrik yorumuna ilişkin bu kısımda öğretmen adaylarının bilgi düzeylerinin yeterli seviyede olmaması türev konusunun genelinde öğretmen adaylarının anlamalarını zorlaştırmaktadır. Öğretmen adaylarının belli başlı bazı örnekler üzerinde çalışmaları sınırlı bir görüş açısına sahip olmalarına neden olmaktadır. Bu nedenle farklı uygulama örnekleri üzerinde başarılı olamamaktadırlar. Örneğin çoğu öğretmen adayı herhangi bir noktada fonksiyona bir teğetin nasıl çizilmesi gerektiğini bilirken dönüm noktasında fonksiyona çizilen teğetin durumuyla ilgili net fikirlere sahip değildir. Bu durum yapılan klinik mülakatlarda da ortaya çıkmıştır. Bu nedenle öğretmen adayları dönüm noktasında fonksiyona çizilen teğet konusunda tereddüt yaşamış ve çoğu çizilen bu doğrunun fonksiyonu kestiğini düşünerek teğet olmadığını belirtmiştir. Öğretmen adayları cebirsel formdaki soruları çözerken grafiksel ve tablo tipindeki sorulara oranla daha başarılı olmuşlardır. Öğretmen adaylarının okullarda aldıkları eğitimin işlemsel bilgi ve beceriler gerektirdiği düşünüldüğünde bu durum çok şaşırtıcı bir durum değildir.

Türev-teğet/eğim ilişkisinin incelendiği sorular arasında öğretmen adaylarının en yüksek başarı oranına sahip oldukları soru dördüncü sorudur. Öğretmen adaylarının yarısı bu sorunun çözümünde başarılı olmuştur. Soruyu doğru cevaplayan öğretmen adaylarının bir kısmı teğetin eğiminden yararlanarak istenilen noktadaki türevi hesaplarken bir kısmı da çizdikleri doğrunun tanjantından türevi hesaplamayı başarmıştır. Öğretmen adaylarının cebirsel formda verilen soruların çözümündeki başarılarını burada da devam ettirdiklerini söyleyebiliriz. Öğretmen adayları teğetin tanımını yapmakta zorlanmış ve hangi noktalarda nasıl teğet çizilebileceğini tam olarak kavrayamamış olmalarına rağmen bu sorunun çözümünde başarılı olmuşlardır. Sorunun ilk ve orta öğretimde seviyesinde ve sınavlardan alışık oldukları tarzda sorulmuş olmasının da sorunun çözümüne katkısı olduğu düşünülmektedir. Selden, Selden ve Mason (1994)'a göre öğrenciler rutin analiz

problemlerini çözerken çok iyi bir performans sergilemelerine rağmen, rutin olmayan problemleri çözerken büyük zorluklara sahiptir ya da bu türden problemleri çözememektedir. Bu durum söz konusu kavramlarla ilgili öğretmen adaylarının sınırlı kavramsal anlamalara sahip olduklarını göstermektedir. Gerçi cevaba yanlış cevap veren öğretmen adaylarının cevabı azımsanamayacak kadar çoktur. Sınıfın %38'i soruya yanlış cevap vermiştir.

Öğretmen adaylarının en yaygın olarak yaptığı hata türenden biri işlem hatası olmuştur. Öğretmen adayları soruda verilen değerleri kullanarak grafik çizmiş daha sonra bu grafikteki değerleri yanlış okuyarak soruya cevap vermiştir. Yapılan klinik mülakat sonucunda da öğretmen adayı işlem hatasının farkına varmıştır. İşlem hatası veya dikkatsizlik hemen hemen her soruda yapılan bir hata türü olmasına rağmen bu soruda bu oran biraz daha artmıştır. Her ne kadar öğretmen adaylarının cebirsel formadaki soruların çözümünde başarılı olduklarını düşünsek de bu tarz soruların çözümünde en sık yapılan hata türü işlem hatasıdır. Bu durum öğretmen adaylarının soruların çözümünde daha dikkatli olmalarının gerekliliğini ortaya koymaktadır. Bir diğer hata türü de teğet denkleminin herhangi bir noktada türevi veren bir fonksiyon olarak düşünülmesi olmuştur. Öğretmen adayları (1, 7) ve (-2, -2) noktalarından geçen teğet doğrusunun denklemini $y=3x + 4$ olarak bulmuştur. Bu doğrunun eğimini sorunun cevabı olarak söylemeleri gerekirken elde ettikleri denklemde x yerine 1 yazarak cevabı 7 olarak vermişlerdir. Amit ve Vinner (1990) araştırmalarında öğrencilerin bir fonksiyonun türevini, verilen bir noktada fonksiyona çizilen teğet doğrusunun denklemi olarak gördüklerini ortaya çıkarmıştır. Ayrıca çalışmalarına katılan öğrencinin türevle teğet doğruları arasındaki ilişkiyi biliyor gibi görünmesine rağmen teğet doğrusunun teğet noktasındaki denklemini sanki o noktada türevmiş gibi kullandığını görmüşlerdir. Bu çalışmada da daha önce belirttiğimiz gibi öğretmen adayları türevle teğet arasındaki ilişki hakkında bazı bilgilere sahip olmalarına rağmen benzer bir hata yapmışlardır. Öğretmen adaylarının ve öğrencilerin aynı hataları yapmaları oldukça dikkat çekici bir durumdur. Buradan hareketle öğretmen adaylarının bir noktada türev ile o noktada çizilen teğet doğrusu arasındaki ilişkiyi bilmediklerini ya da ezberleme yoluyla öğrenmeye yönelerek böyle bir yanılgıya sahip olduklarını söyleyebiliriz.

Öğretmen adaylarından bir grafiğe ait belirli noktalardan geçen teğetlerin çizilmesinin istendiği son soruda sınıfın %69'u soruya yanlış cevap vermiştir. Bu oran araştırmanın benzer nitelikteki ikinci sorusundaki orana yakındır ve öğretmen adayları genel olarak teğetle ilgili bilgilere sahip olsalar bile bu bilgiler özel durumları yorumlamalarına veya grafiksel olarak türev-teğet ilişkisini kurmalarına çok fazla katkı sağlamamıştır. Konuyla ilgili öğretmen adaylarının yeterli bilgiye sahip olmadıkları açıkça

ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının konuyla ilgili yeterli bilgiye sahip olmayışı onların soruların çözümde özgüvenlerini kaybetmelerine neden olmaktadır. Örneğin soruya doğru cevap veren bir öğretmen adayı araştırmanın ikinci sorusunda dönüm noktasında çizilen teğetin eğriyi kestiği düşüncesiyle teğet olmayacağını belirtmiş olmasına rağmen bu soruda dönüm noktasında teğet çizmiştir. Yani çelişkili bir durum ortaya çıkmıştır. Bu durum mülakatta esnasında öğretmen adayına hatırladığında cevabını değiştirerek dönüm noktasındaki teğetin eğriyi kestiğini belirterek soruya yanlış cevap vermiştir. Benzer bir durumun tersi de yine mülakat esnasında ortaya çıkmıştır. Araştırmanın üçüncü sorusunda dönüm noktasında teğet çizilmeyeceğini belirten öğretmen adayı yine bu soruda diğer öğretmen adayı gibi çizilebileceğini belirtmiştir. Bu durum kendisine hatırlatıldığında ise ikinci sorudaki cevabının yanlış olduğunu ifade edip dönüm noktasıyla ilgili olarak “çünkü fonksiyonun o noktada sürekli ve türevli olmasına bir mani yok o yüzden teğet çizilebilir” açıklamasını yapmıştır. İki öğretmen adayıyla yapılan mülakatta elde edilen bu durumu kısaca özetleyecek olursak, konuyla ilgili yeterli bilgiye sahip olmayan öğretmen adaylarının sorunun çözümü için gerekli yorum gücüne ve özgüvene sahip olmadıklarını bu yüzden her sorunun çözümünde başarılı olamadıklarını söyleyebiliriz. Tam tersi bir durumda ise bilgi düzeyi iyi olan, kavramlar arası ilişkileri kurmada başarılı olan öğretmen adayları soruların çözümünde ve yorumlanmasında başarılı olmuşlardır. Öğretmen adaylarının sahip oldukları alan bilgisinin önemi bir kez daha ortaya çıkmıştır.

Bu soruya verilen en yaygın hata türünü yapan öğretmen adaylarının hepsi dönüm noktasında teğet çizilemeyeceğini belirtmiştir. Bu durum araştırmanın üçüncü probleminde de öğretmen adaylarının en çok yapmış oldukları hata türüydü. Bir diğer hata türünde ise öğretmen adayları fonksiyonun sürekli olduğu her noktada türevli olabileceğini düşünerek fonksiyonun sürekli olduğu x_0 , x_1 , x_2 ve x_3 noktalarında teğetler çizmişlerdir. Yalnız x_2 noktasındaki sivri uçta çizilebilecek sonsuz tane teğet var iken bu noktada öğretmen adayları kendi belirledikleri bir teğet çizerek soruya yanlış cevap vermişlerdir. Araştırmanın birinci alt probleminde de benzer nitelikteki bir soruya öğretmen adayları yine aynı gerekçeyle yanlış cevap vermişlerdir. Yapılan hatalar göz önünde bulundurulduğunda özellikle öğretmen adaylarının dönüm noktası ve sivri uç gibi bir eğri üzerindeki farklı tipteki noktalarda türev-teğet ilişkisini kuramadığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının teğet ve eğimle ilgili bilgileri olduğu söylenebilir ancak bu bilgiler farklı durumlarla karşılaşıldığında yorum yapmak ve derinlemesine düşünmek için yeterli değildir. Öğretmen adaylarının bu konuları ileride öğretecek olduklarını düşünürsek sadece tanım düzeyinde bilgi sahibi olmak veya cebirsel gösterimde soruların çözümünde

başarılı olmak bu konuların öğrencilere sağlıklı bir şekilde aktarılmasında yeterli olmayacaktır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu başlık altında önce araştırmadan elde edilen sonuçlar, daha sonrada bu sonuçlara ve araştırmacının deneyimlerine dayalı öneriler verilecektir.

6.1. Sonuçlar

Bu araştırmanın amacı matematik öğretmeni adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarını ve bu kavramı anlama sürecinde karşılaştıkları zorlukları ortaya koymak şeklinde belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarını derinlemesine ortaya koymayı amaçlayan bu araştırmanın yöntemi özel durum çalışmasıdır. Çalışma kapsamında veriler yazılı sınavlar ve klinik mülakatlardan elde edilmiştir. Bu bölümde elde edilen verilerle ilgili ortaya çıkan sonuçlara yer verilecektir.

Öğretmen adaylarının türevle ilgili kavramları ayrı konu başlıkları altında anlamaları ne kadar önemliyse bu kavramlar arasındaki ilişkiyi anlamaları da en az o kadar önemlidir. Analizin en önemli konularında biri olan türev kavramını derinlemesine anlamak türevin limit, değişim oranı ve teğet/eğim kavramlarıyla olan ilişkilerini anlamaktan geçmektedir. Türev kavramını anlamlandırma temelde oran, fonksiyon ve limit kavramlarını bilmeyi gerektirir (Zandieh, 2000). Bununla birlikte eğim, teğet, süreklilik gibi temel matematiksel kavramlara da ihtiyaç duyulmaktadır (Bingölbali, 2008).

Araştırmayı değerlendirdiğimizde öğretmen adaylarının işlemsel anlamalarının ön plana çıktığı ve sadece cebirsel gösterimde verilen soruların çözümünde başarı oranlarının daha yüksek olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır. Türevin limit, değişim oranı ve teğet kavramlarıyla ilişkisini anlama düzeyi genel olarak tanımlarla sınırlı olmakla birlikte bu tanımların içerikleri tam olarak bilinmemektedir. Kavramlar arası ilişkilerin doğru olarak kurulamaması öğretmen adaylarının türev konusunu anlamalarını güçleştirmiştir. Bu nedenle öğretmen adaylarının türev-limit, türev-değişim oranı ve türev-teğet/eğim kavramlarını anlamalarında ve bu kavramları birbirleriyle ilişkilendirmede bir takım zorluklarla karşılaştıkları görülmüştür. Bu zorlukları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

1. Kavramların tanımlarının veya içeriklerinin tam olarak anlaşılmamış olması
2. Ezbere dayalı bilgilerle işlem yapmak
3. Türevle ilgili nümerik veya grafiksel soruların çözümünde cebirsel gösterim bulmaya yönelik eğilim
4. Nümerik ve grafiksel soruların çözümü için gerekli bilgi düzeyinin olmayışı
5. Kavramlar arasındaki ilişkilerin yanlış yorumlanması

6. Öğretmen adaylarının türev ve diğer kavramlar arasındaki bilgilerinin sınırlı olmasından kaynaklı zorluklar
7. Ortalama değişim oranı ile anlık değişim oranı arasındaki ilişkinin anlaşılmamış olması
8. Öğretmen adaylarının kavramsal anlama yerine işlemsel anlamayı tercih etmelerinden kaynaklanan zorluklar

Öğretmen adayları kavramların tanımı veya içeriklerini tam olarak anlamamış olması araştırmanın önemli sonuçlarından birisidir. Öğretmen adaylarına yapılan yazılı uygulamaların tanım sorularına verilen cevaplara bakıldığında birçok öğretmen adayının kavramların tanımlarını dahi bilmediği ortaya çıkmıştır. Bu sorulara doğru cevap veren öğretmen adaylarının bir kısmının da yaptıkları tanımlarda yer alan bilgileri kullanma ihtiyacı duymadan sorulara cevap vermeye çalıştıkları görülmüştür. Türev kavramı doğası gereği anlaşılması zor bir konudur. Buna rağmen gerek öğrenciler gerekse öğretmen adayları türev kavramını tam olarak bilmeseler bile formülleri ve kuralları kullanarak türevle ilgili birçok soruyu çözebilmektedirler. Bu durum öğretmen adaylarının kendilerinde türev kavramını bildikleri algısına kapılmalarına neden olabilir ancak araştırmanın sonuçları tersi bir durumu işaret etmektedir.

Araştırmanın türev-limit, türev-değişim oranı ve türev-teğet/eğim ilişkilerine yönelik uygulanan yazılı sınavlarında cebirsel gösterimle verilen sorular öğretmen adaylarının başarı oranlarının en yüksek olduğu sorulardır. Ancak bu durum öğretmen adaylarının türev kavramını tam olarak anladıkları manasına gelmemektedir. Ezbere dayalı bir şekilde işlem yapmak sadece cebirsel gösterimdeki soruların çözümünde öğretmen adaylarına yardımcı olmaktadır. Araştırmanın öğretmen adaylarının türev kavramıyla ilgili kavramsal anlamalarını ölçmeye yönelik sorularında ise başarı oranı oldukça düşüktür. Araştırma bu yönüyle öğretmen adaylarının ezbere dayalı veya işlem gücü gerektiren sorulara önem verdiğini ortaya koymuştur. Bu nedenle öğretmen adayları araştırma kapsamında sorulan nümerik ve grafiksel soruların çözümünde sorunlar yaşamışlardır. Özellikle nümerik sorularda karşılaştıkları zorlukları aşmak için öğretmen adayları soruyu cebirsel bir formata dönüştürerek çözmeyi tercih etmişlerdir. Birkaç öğretmen adayı da benzer bir şekilde grafiği verilen bir fonksiyonun bir noktadaki türevini bulmak için fonksiyonun kuralını bulmayı denemiş ve sonrasında elde ettiği fonksiyonun istenilen noktada türevini almıştır. Bu durumdan hareketle öğretmen adaylarının nümerik veya grafiksel bir biçimde sunulan soruların çözümüne gitmek için cebirsel bir gösterim bulma eğiliminde olduklarını söyleyebiliriz.

Türev kavramının diğer kavramlarla ilişkilerinin yanlış bir şekilde yorumlandığı birçok durum vardır. Öğretmen adayları genel olarak bu kavramlar arasındaki ilişkilerin farkında

olmalarına rağmen bu ilişkilerin hangi düzeyde oldukları konusunda tam olarak fikir sahibi değildirler. Bu nedenle kavramları birbirleriyle ilişkilendirmede ve yorumlamada bir takım zorluklar yaşamışlardır. Bu zorluklar öğretmen adaylarının hata yapmalarına neden olmuştur. Öğretmen adaylarının kavramlar arasındaki ilişkiyi yanlış olarak ifade ettikleri durumları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

1. Soruları türev ile ilişkilendirme düşüncesiyle yanlış şekilde limitin kullanılması
2. Ortalama değişim oranı ile anlık değişim oranı arasındaki ilişkinin bilinmiyor olması
3. Türevi tanımlarken bir noktada fonksiyona çizilen teğetin eğimi yerine fonksiyonun eğimi ifadesinin kullanılması
4. Sürekliliğin türevle eş değer tutulması ve süreklilik ile türev ilişkisinin tam olarak bilinmiyor olması

Öğretmen adaylarının söz konusu kavramlarla ilgili bilgilerinin sınırlı olması türevi anlama ve anlamlandırmada zorluklar yaşamalarına neden olan önemli bir etken olarak karşımıza çıkmaktadır. Limit kavramı türevin kavramının bir parçasıdır ve türevin anlaşılmasında son derece önemli bir konudur. Öğretmen adayları limit ile türev arasındaki ilişkiyi aslında türev bir limittir şeklinde klişe bir ifadeyle kurarak soruların çözümünde bu ilişkiyi daha derin bir boyutta inceleyememişlerdir. Öğretmen adayları elde ettikleri herhangi bir aralıktaki ortalama değişim oranının gelişigüzel bir şekilde limitini alarak soruyu türevle ilişkilendirmeyi amaçlamıştır. Zaten limit ile türev arasındaki bu kopukluk doğal olarak öğretmen adaylarının ortalama değişim oranı ile anlık değişim oranı arasındaki bağlantıyı kurmalarını güçleştirmiştir. Sonuç olarak ortalama değişim oranının anlık değişim oranına yaklaşımı limit kavramının iyi bir şekilde anlaşılmasıyla mümkün olabilir.

Öğretmen adayları türev-teğet ilişkisini kurmakta da bazı zorluklarla karşılaşmışlardır. Birçok öğretmen adayı bir noktada fonksiyonun eğimi o noktadaki türevi verir ifadesini kullanarak bu ilişkiyi ortaya koymayı amaçlamıştır. Oysaki literatürde “bir fonksiyona belirli bir noktada çizilen teğetin eğimi” olarak belirtilmiştir. Öğretmen adaylarının konuyla ilgili bilgilerinin yeterli düzeyde olmayışı, dikkatsizlikleri ve matematiksel dili doğru bir şekilde kullanmıyor olmaları karşılaştıkları zorlukların nedenleri olarak gösterilebilir. Kavramlar arasındaki ilişkilerin yanlış bir şekilde kurulduğu bir başka durumda türev-süreklilik ilişkisi olmuştur. Sürekli bir fonksiyonun bir noktada aldığı değer o noktada türev gibi düşünülmesi ya da bir fonksiyonun sürekli olduğu her yerde türevlenebileceği fikri öğretmen adaylarının bu konuda dar kapsamlı düşündüklerini veya sınırlı bir görüş açılarının olduğunu ortaya koymaktadır.

Türevin limit, değişim oranı ve teğet/eğim kavramlarıyla ve bu kavramların birbirleriyle olan ilişkisini kurmada öğretmen adaylarının güçlük çekmesinin nedeni kavramsal öğrenme yerine işlemsel öğrenmeyi tercih etmelerinden kaynaklanmaktadır. Kavramsal bir altyapı oluşturmada türev ile ilgili derinlemesine bilgi sahibi olmak, farklı durumlar ve kavramlar arası ilişkiler üzerine yorum yapabilmek ve rutin olmayan problemleri çözmek mümkün değildir. Öğretmen adayları matematik alan bilgilerini sadece işlemsel becerileri üzerine değil aynı zamanda kavramsal anlama üzerine inşa etmeli ve böylelikle bilgilerini gelecek nesillere sağlıklı bir şekilde aktarmalıdır.

6.2. Öneriler

Çalışmanın bu kısmında, çalışmayla birlikte ortaya çıkan sonuçlara yönelik ve yeni çalışmalar için öneriler sunulacaktır.

6.2.1. Araştırma Sonuçlarına Dayalı Öneriler

Çalışmanın sonuçlarında ağırlıklı olarak öğretmen adaylarının işlemsel çözümleri tercih ettiklerine, konuyla ilgili sınırlı bilgilere sahip olduklarına ve söz konusu kavramlar arasındaki ilişkileri kurmakta zorlandıklarına değinilmiştir. Bu sonuçları göz önünde bulundurursak konuyla ilgili verilen eğitimde ağırlıklı olarak işlemsel becerilerin geliştirildiği formül veya kuralların kullanılarak soruların çözüldüğü dersler yerine kavramsal anlamının ön planda olduğu, konunun teorik alt yapısına daha çok vurgu yapılan bir eğitim verilebilir. Öğrencilerin kısa işlemlerle hızlı bir şekilde cevap veremeyeceği yorum ve derinlemesine düşünmeyi gerektiren sorulara yer verilmelidir. Özellikle türevin limit kavramı kullanarak yapılan tanımına ağırlık verilerek türev-limit ilişkisinin tam olarak anlaşılmasına olanak sağlanmalıdır.

Araştırma sonuçları öğretmen adaylarının cebirsel gösterimle verilen soruları çözmedeki başarılarını nümerik ve grafiksel sorularda gösteremediklerini ortaya koymuştur. Özellikle öğretmen adaylarının ortalama değişim oranı ile anlık değişim oranı arasındaki ilişkiyi yorumlayamadıklarını göz önüne alırsak bu ilişkinin iyi bir şekilde anlaşılması için nümerik yöntemlerin kullanıldığı sorulara yer verilebilir.

Öğretmen adaylarının değişim oranı ve teğet kavramlarını anlayabilmeleri için teknolojiye ihtiyaçları vardır. Literatürde bilgisayar destekli uygulamaların öğrencilerin türev kavramını anlamalarına olumlu yönde katkı sağladığına dair bulgular bulunmaktadır (Serhan, 2000; Aksoy, 2007). Özellikle ortalama değişim oranının anlık değişim oranına yaklaşımını ve sekant doğrularının eğimlerinin teğetin eğimine yaklaşımını daha anlaşılır

bir hale getirebilmek için bilgisayar cebir sistemi yazılımları veya dinamik matematik yazılımlarına derslerde yer verilmelidir.

6.2.2. İleride Yapılacak Araştırmalara Yönelik Öneriler

Bu araştırma öğretmen adayları üzerinde yapılmıştır ve öğretmen adaylarının alan bilgilerine ölçmeye yöneliktir. Alan bilgisinin eksiksiz bir şekilde öğrenilmesi öğretmen adaylarının öğretmenlik hayatlarında ne derece önemliyse alan öğretme bilgisi de öğretmen adayları için o derece önemlidir. İleride öğretmen adaylarının türev kavramıyla ilgili alan öğretme bilgilerini ölçmeye yönelik çalışmalar yapılabilir.

Öğretmen adayları geleceğin öğretmenleridir. Bu yüzden öğretmen adayların bu kavramlarla ilgili yaşadıkları zorlukları tespit edip öğretmenlik hayatlarına başlamadan önce gerekli tedbirleri almak önemlidir. Bunun yanı sıra bu konuların her yıl okullarda anlatıldığı da bir gerçektir. Bu yüzden türev kavramıyla ilgili öğretmen adaylarının yanı sıra öğretmenlerle de bir çalışma yapılarak öğretmenlerin konuyu nasıl öğrettikleri ve eksikliklerinin neler olduğu incelenebilir.

Türev analizin önemli konularından biridir. Bununla birlikte limit ve integralde türev gibi analizin önemli konularındandır. Bu konuların birbiriyle olan ilişkilerini ve herhangi birinin diğerini anlamlandırmadaki katkısını düşünersek bu çalışma ile benzer nitelikte araştırmalar limit ve integral kavramları üzerinde yapılabilir.

7. KAYNAKLAR

- Akkaya, E. (2009) Matematik öğretmen adaylarının türev kavramına ilişkin teknolojik pedagojik alan bilgilerinin öğrenci zorlukları bağlamında incelenmesi. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Aksoy, Y. (2007) Türev kavramının öğretiminde bilgisayar cebiri sistemlerinin etkisi. Yayınlanmamış doktora tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Amit, M. and Vinner, S. (1990). Some misconception in calculus: Anecdotes or the tip of an iceberg?. In G. Booker ve T.N. Mendicuti (Eds.), Proceedings of the 14th Annual meeting of the International Group of Psychology of Mathematics Education: Vol. 1 (pp. 3-10). Cinvestav, Mexico.
- Asiala M., Cottrill J. and Dubinsky, E. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16 (4), 399–431.
- Aspinwall, L and Miller, L.D. (2001). Diagnosing conflict factors in calculus through students' writings: one teacher's reflections. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(1), 89–107.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi* (4. Baskı). Trabzon: Harf Eğitim Yayıncılığı.
- Baki, A. (2009). Eğitimde kullanılan ölçme araçları ve özellikleri. S. Çepni ve S. Akyıldız (Ed.), Ölçme ve Değerlendirme (s 75-98). Trabzon: Celepler Matbaacılık.
- Baki, A..(2010). Öğretmen eğitiminin lisans ve lisansüstü boyutlardan değerlendirilmesi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(3), 15-31.
- Balcı, M. (2000). *Genel Matematik 1*. Ankara: Balcı Yayınları.
- Bezuidenhout, J. (1998). First-year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29, 389-399.
- Bingolbali, E., Monaghan, J. and Roper, T. (2006, July). Engineering students' views of mathematics: the role of the institution in shaping students' views, 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level, İstanbul.
- Bingölbalı, E. (2008). Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler. M. F. Özmentar, E. Bingölbalı ve H. Akkoç (Ed.), Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri içinde (s. 223-255). Ankara: PegemA.
- Bittinger, M.L., Ellenbogen, D.J. & Surgent, S.A. (2012). *Calculus and its application* (10 th Edition). Addison-Wesley.

- Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T.(2006). Students' thinking about the tangent line. Prodeedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 177-184). Prague, Czech Republic.
- Bütün, M. (2012). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının önerilen entegre program sürecinde matematiği öğretme bilgilerinin gelişimi. Yayınlanmamış doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Caferov, V. (2012).Türev Kavramı. <http://w2.anadolu.edu.tr/aos/kitap/IOLTP/2285/unite09.pdf> adresinden 6 Şubat 2012 tarihinde edinilmiştir.
- Chavez, M. D. & Figueroa, A. R. (2012). Understanding of the Derivative and Its Meanings; A Case Of Calculus Professors. The 12 th International Congress on Mathematical Education (pp.2697-2705). Seoul, Korea.
- Çepni, S. (2009). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş* (4. Baskı). Trabzon.
- Doğan, A., Sulak, H. ve Cihangir, A. (2002, Eylül). İlköğretim matematik eğitimi anabilim dalı öğrencilerinin özel fonksiyonlar ile fonksiyonlarda limit, türev ve türev uygulamaları konularındaki yeterlikleri üzerine bir araştırma. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Duru, A. (2006) Bir fonksiyon ve onun türevi arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorluklar. Yayınlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Ekiz, D. (2003). *Eğitimde araştırma yöntem ve metotlarına giriş: nitel, nicel ve eleştirel kuram metodolojileri*. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Ergene, B. (2011). Matematik öğretmen adaylarının türev konusundaki teknolojik pedagojik alan bilgilerinin çoklu temsiller bileşeninde incelenmesi. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Fennema, E. & Franke, M. L.(1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 147–164). New York: Macmillan.
- Fisher, G. L.(2001) Comparing writing with interviews and exams as assessments of studets' understanding of the concept of the derivative. Unpublished doctoral dissertation, University of Wisconsin-Madison.
- Goerd, S. L. (2007) The effect of emphasizing multiple representations on calculus students' understanding of the derivative concept. Unpublished doctoral dissertation, University of Minnesota.
- Goldin, G.A. (1998), Observing mathematical problem solving through task-based interviews. In A.R. Teppo (Ed.), *Qualitative research methods in mathematics mathematics education* (pp. 40-62). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Gür, H. ve Barak, B.(2007). Ortaöğretim 11. sınıf öğrencilerinin türev konusundaki hata örnekleri. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi*, 7(1), 453-480.

- Hacıömeroğlu, E. S. (2007). Calculus students' understanding of derivative graphs: problems of representations in calculus. Unpublished doctoral dissertation, Florida State University.
- Hacısalıhoğlu, H. H., Hacıyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown, L. M., İbikli, E. ve Brown, S., (2000). *Türk dil kurumu matematik terimleri sözlüğü*. Ankara: Bizim Büro Basımevi Yayın Dağıtım.
- Hahkioniemi, M. (2005). Is there a limit in the derivative? Exploring students' understanding of the limit of the difference quotient. <http://fractus.uson.mx/Papers/CERME4/Papers%20definitius/14/Haikionemi.pdf> adresinden 23 Kasım 2012 tarihinde edinilmiştir.
- Hauger, G. (1998). High school and college students' knowledge of rate of change. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, Michigan.
- Hauger, G.S. (2000). Instantaneous rate of change: a numerical approach. *International Journal of Mathematical Education of Science and Technology*, 31(6), 891-897.
- İşleyen, T. ve Akgün, L. (2009, Ekim). Matematik Öğretmen Adaylarının Türev ve Diferansiyel Kavramlarını Algılama Düzeyleri, XVIII. Ulusal Eğitim Bilimleri Kurultayı, Ege Üniversitesi, İzmir.
- Karataş, İ. ve Güven, B. (2003). Problem çözme davranışlarının değerlendirilmesinde kullanılan yöntemler: Klinik mülakatın potansiyeli. *İlköğretim-Online*, 2(2).
- Kendal, M. and Stacey, K.(2003) Tracing learning of three representations with the differentiation competency framework. *Mathematics Education Research Journal*, 15(1), 22-41.
- Krouse, J.L.(2000) The effect of writing assignments on high school calculus students' understanding of the derivative concept. Unpublished doctoral dissertation, University of Pittsburgh.
- Lloyd, G.M. and Wilson; M. (1998). Supporting innovation: the impact of a teacher's conception of function on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(3), 248-274.
- Milli Eğitim Bakanlığı (2009). *İlköğretim 6-8 Matematik Dersi Öğretim Programı*. Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı (2011). *Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı*. Ankara.
- Murphy, L.D.(2003). Using computer based laboratories to teach graphing concepts and the derivative at the college level. Unpublished doctoral dissertation, University of Illinois.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.

- Özgen, K. (2011). Yapılandırmacı öğrenme yaklaşımı kapsamında, öğrencilerin öğrenme stillerine uygun öğrenme etkinlikleri geliştirilmesi: Fonksiyon ve türev kavramı örnekleme. Yayınlanmamış doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.
- Park, J. (2011) Calculus instructors' and students' discourses on the derivative. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University.
- Pinkza, M.K. (1999) The relation between college calculus students' understanding of function and their understanding of derivative. Unpublished doctoral dissertation, University of Minnesota.
- Pustejovsky S. F. (1999) Beginning calculus students' understanding of the derivative: three case of studies. Unpublished doctoral dissertation, Marquette University.
- Selden. John. Selden, Annie, & Mason, Alice. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. In J. J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning* (pp. 31-45). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Serhan, D. (2000) The effect of using graphig calculater on students' concept images of the derivative at a point. Unpublished doctoral dissertation, Arizona State University.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Stein, M. K., Baxter, J. A., and Leinhardt, G. (1990). Subject-matter knowledge and elementary instruction: a case from functions and graphing. *American Educational Research Journal*, 27(4), 639-663.
- Tall, D. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12,151-169.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J. & Giordano, F. (2005). *Thomas' Calculus* (11th Edition). Pearson Education. Addison-Wesley.
- Thompson, P.W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1, 21-44.
- Ubuz, B. (2001). First year engineering students' learning of point of tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 20 (1), 113-137.
- Ubuz, B.(1999). Genel matematikte (Calculus) öğrenci hataları. *Matematik Dünyası*, 5, 9-11.

- URL-1.<http://otmg.meb.gov.tr/YetGenel.html> Öğretmenlik Mesleği Genel Yeterlikleri.17 Kasım 21012
- URL-2.<http://otmg.meb.gov.tr/yeterlikdos/MATEMATİK/MATEMATİK.pdf> Milli Eğitim Bakanlığı Öğretmen Yetiştirme ve Eğitimi Genel Müdürlüğü Ortaöğretim Projesi Matematik Öğretmeni Özel Alan Yeterlilikleri. 18 Eylül 2012.
- Van Dooren, W., Verschaffel, L., and Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 319-351.
- Viholainen, A. (2006). Why is a discontinuous function differentiable?. Proceeding 30th conference of the international group of the psychology of mathematics Education (pp.329-336). Prague, Czech Republic
- White, P. and Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 79-95.
- Yıldız, N. (2006) Matematik eğitiminde türev öğrenimi ve öğretimi ile ilgili sorulmuş bazı etkin sorular ve cevapları hakkında öğrencilerin ve öğretim elemanlarının görüşleri üzerine bir fenomenografik çalışma. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Zandieh, M. (2000) A theoretical framework for analyzing students understanding of the concept of derivative. *Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS) Issues in Mathematics Education*, 8, 103-127.
- Zaskis, R. and Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17(4), 429-439.

EKLER

Ek 1. Türev-Limit Yazılı Sınav Soruları

Aşağıdaki soruları dikkatlice okuyup soruların altında bırakılan boşluklara cevaplandırınız.

1) Türev kavramını kendi cümlelerinizle açıklayınız.

2) f fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon ise aşağıdakilerden hangisi/hangileri f fonksiyonunun a noktasındaki türevini verir? Neden?

I. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

II. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

III. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

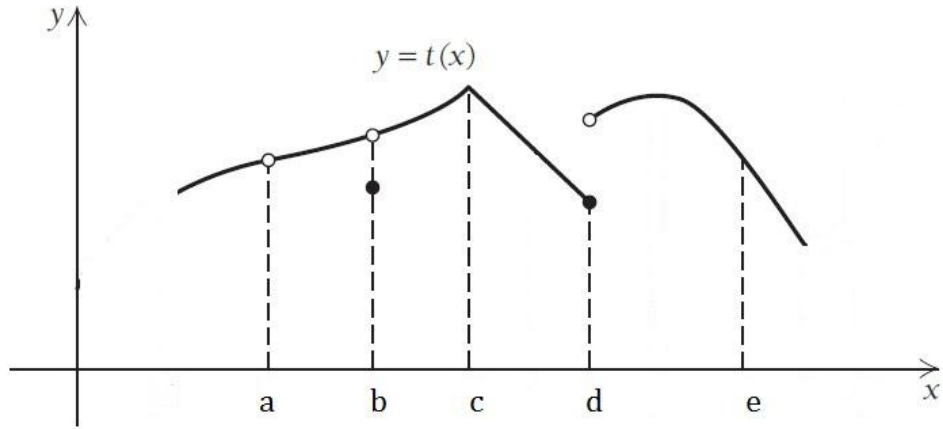
3) Türevin tanımını kullanarak $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 1$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $x=2$ noktasında türevini hesaplayınız.

Ek 1'in devamı

- 4) Aşağıda f fonksiyonunun $x = 5$ noktası ve civarındaki bazı noktalarda aldığı değerler verilmiştir. Bu bilgileri $f'(5)$ 'yi hesaplamak için kullanınız. Cevabınızı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.

x	4,997	4,998	5,000	5,001	5,002
$f(x)$	15,470	15,482	15,500	15,508	15,515

- 5) Aşağıda grafiği verilen fonksiyonun hangi noktada ya da noktalarda türevi yoktur? Cevaplarınızı açıklayınız.



Ek 2. Türev-Değişim Oranı Yazılı Sınav Soruları

1) Bir hareketlinin t zamanına bağlı olarak aldığı yol $x(t) = 4t^2 + 3$ fonksiyonu ile veriliyor (t saniye, x metre)

a) Hareketlinin $t = 1$ ve $t = 1 + h$ zaman aralığındaki ortalama hızını h 'nin aşağıdaki değerleri için bulunuz.

i) $h = 0,1$

ii) $h = 0,01$

iii) $h = 0,001$

b) **a şıkında verdiğiniz cevapları** kullanarak hareketlinin $t = 1$ deki anlık hızını yaklaşık olarak hesaplayınız.

2) Aşağıdaki tabloda bir hareketlinin yol (cm)-zaman (sn) değişimine ait değerler verilmiştir.

t	0	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	2
$x(t)$	6,000	83,040	89,318	89,932	90,000	90,068	90,678	96,640	142,000

a) Hareketlinin

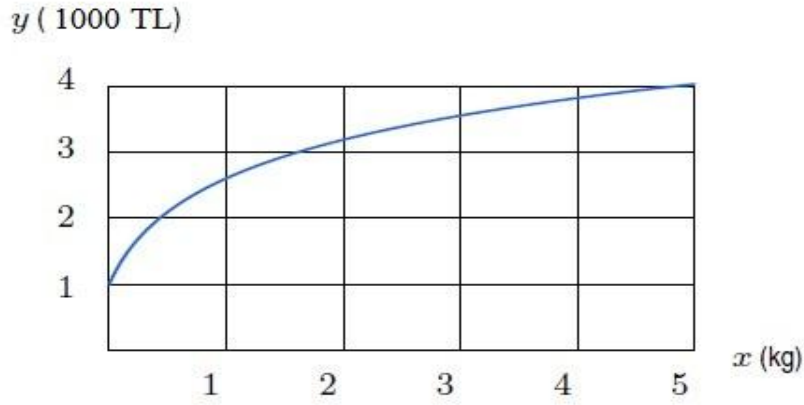
i) $0 \leq t \leq 1$

ii) $1 \leq t \leq 2$ zaman aralıklarındaki ortalama hızını bulunuz.

Ek 2'nin devamı

- b) Hareketlinin $t = 1$ zamanındaki anlık hızını hesaplamaya çalışınız. Cevabınızı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.

3) Aşağıdaki grafik bir kimyasal maddenin üretim maliyetinin kilogramına göre değişimini göstermektedir.



Grafikteki bilgilerden yararlanarak;

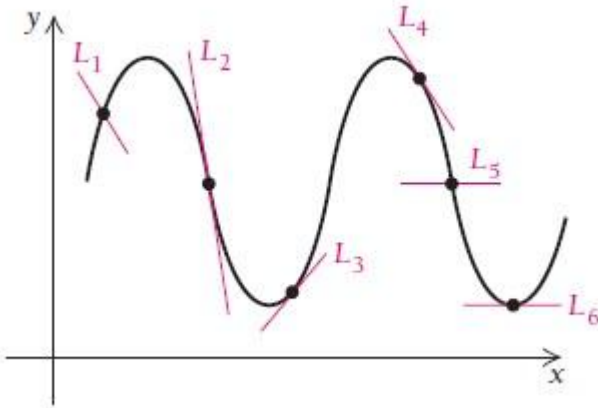
- a) Üretim maliyetindeki ortalama fiyat değişim oranının $[0,3]$ ve $[3,5]$ aralıklarının hangisinde daha büyük olduğunu belirleyiniz. Cevabınızı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.
- b) Üretim maliyetinin anlık değişim oranı $x = 1$ ve $x = 4$ noktalarından hangisinde daha büyüktür? Cevabınızı nasıl elde ettiğinizi açıklayınız.

Ek 3. Türev-Teğet/Eğim Yazılı Sınav Soruları

1) Türev ile eğim arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

2) Teğeti tanımlayınız.

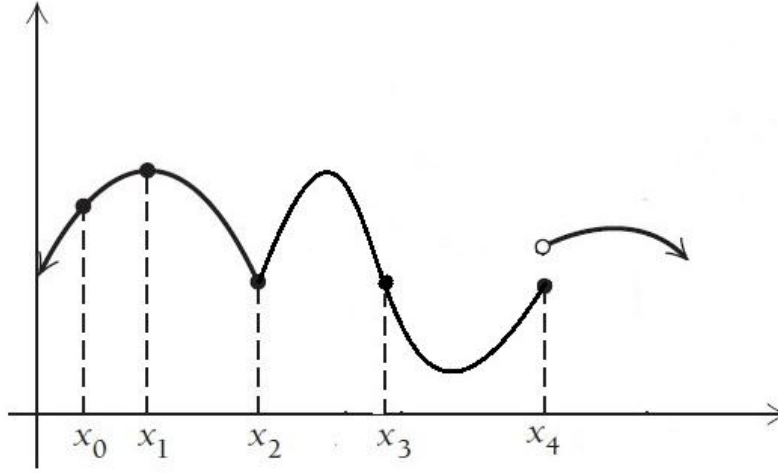
3) Aşağıdaki grafikte çizilen doğrulardan hangileri eğriye o noktada teğettir? Nedenini açıklayınız?



Ek 3'ün devamı

4) Bir f fonksiyonunun $(1,7)$ noktasındaki teğeti $(-2,-2)$ noktasından geçiyorsa $f'(1)$ 'i bulunuz.

5) Aşağıda verilen noktalarda $(x_0, x_1, x_2, x_3$ ve $x_4)$ fonksiyona teğet çizilebilir mi? Eğer öyleyse teğeti çizin. Çizilen teğetlerin eğimi hakkında ne söylenebilir?



9. ÖZ GEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ

1982 yılında Ankara’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Trabzon’da sırasıyla Namık Kemal İlkokulu, Zehra Kitapçıoğlu Ortaokulu ve Affan Kitapçıoğlu Lisesi Yabancı Dil Ağırlıklı Bölümü’nde tamamladı. Yüksek öğrenimini Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesinde tamamladı. 2008 yılında Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik(İngilizce) Bölümü’nden mezun oldu.

2009 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Anabilim dalı Matematik Eğitimi alanında yüksek lisans programını kazandı. 2007 yılından itibaren Ankara ve Trabzon’da çeşitli özel eğitim kurumlarında matematik öğretmenliği yapmaktadır. İngilizce bilmektedir.

İLETİŞİM BİLGİLERİ:

Adres : Gökay AÇIKYILDIZ, Toklu Mahallesi Aksu Sokak No:19/4 TRABZON

E-mail : gokayayildiz@hotmail.com

Telefon : 0505 779 00 44