

T.C.
BOLU ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MATEMATİKSEL DENEYİMİN FELSEFESİ: REUBEN HERSH

Yasemin CİHAN

BOLU-2020

T.C.
BOLU ABANT İZZET BAYSAL ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MATEMATİKSEL DENEYİMİN FELSEFESİ: REUBEN HERSH

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan
Yasemin CİHAN

Danışman
Prof. Dr. Soner DURMUŞ

BOLU, AĞUSTOS - 2020

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Yasemin CİHAN tarafından hazırlanan “Matematiksel Deneyimin Felsefesi: Reuben Hersh” adlı çalışma, jürimiz tarafından Matematik ve Fen Bilimleri Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Akademik Unvan ve Adı Soyadı

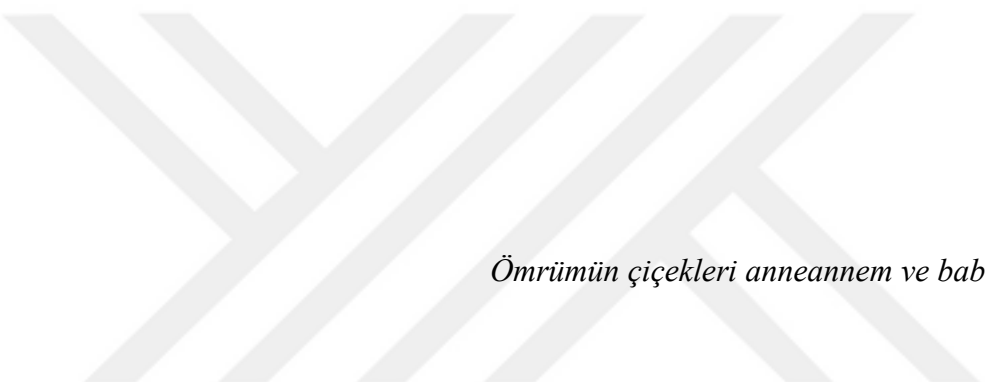
İmza

Üye (Tez Danışmanı) : Prof. Dr. Soner DURMUŞ
Üye : Doç. Dr. Hakan YAMAN
Üye : Doç. Dr. Şahin DANIŞMAN

ETİK İLKELERE UYULDUĞUNA İLİŞKİN BEYAN

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum, “MATEMATİKSEL DENEYİMİN FELSEFESİ: REUBEN HERSH” başlıklı çalışmanın yazılmasında bilimsel ve etik kurallara uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda atıfta bulunduğumu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin tamamının ya da bir kısmının bu üniversiteye veya başka bir üniversitede bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Yasemin CİHAN



Ömrümün çiçekleri anneannem ve babaanneme...

TEŞEKKÜR

Öğretmenlik eğitimimden bu yana ve bu tez çalışmasının ortaya çıkış ve oluşum sürecinde ilgi ve merakıma özen gösterip yollar açan, hayata ve matematiğe bütüncül baktığı gözlüğünü paylaşmayı esirgemeyerek bireysel ve meslek hayatımda kurduğum bağların daha güler ve sağlam olmasını sağlayan, öğrenme yolculuğumda kişisel duruşu ve çalışma prensibi ile bana örnek olan ve teşvik eden, kendisiyle çalışmış olmaktan onur duyduğum değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Soner DURMUŞ'a sabrı ve emekleri için sonsuz teşekkür ederim.

Bu araştırmanın gelişmesinde ve akademik anlamda ilerlememde çok değerli görüşleri ile destek veren kıymetli hocalarım Doç. Dr. Hakan YAMAN ve Doç. Dr. Şahin DANIŞMAN'a; değerli görüşleriyle çalışmamıza katkı sağladıkları için Prof. Dr. Faruk ÖZTÜRK'e ve öneri ve deneyimlerini her zaman paylaşan ve desteğini hep hissettiğim değerli hocam Arş. Gör. Dr. Ülkü AYVAZ'a ve lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca ders almış olduğum, soru ve fikirlerime her zaman titizlikle cevap verip değerli görüş ve önerilerini esirgemeyen tüm hocalarıma;

Öğretmenlik eğitimimin zenginleşmesinde rol oynayan ve görüşleriyle çalışmamıza katkılar sağlayan sevgili meslektaşlarım Mehtap YEŞİLÇİMEN, Satı AKGÜL ve Ayşe Öykü ÖLMEZ'e; bulunduğum ortamın varlığına en çok vesile olan Bolu'nun Babası kıymetli İzzet BAYSAL'a ve her geçen gün daha da verimli ve kaliteli hale gelmesinde emeği olan BAİBÜ Eğitim Fakültesi ailesine;

Çalışmaya başladığım süreçten beri öğrenme arzusuyla dolu ilmini benimle paylaşan, bana yol gösteren, zihnimi ve gönlümü genişleten kıymetli hocam Necla FİDAN'a çok teşekkür ederim.

Göreve başladığım günden bu yana desteklerini her zaman gösteren, bir parçası olduğum için mutluluk duyduğum Şehit Şeref Demir İlk ve Ortaokulu ailesindeki tüm çalışma arkadaşlarıma ve öğrenme yolculuklarına eşlik edebildiğim için bana kendimi hep şanslı hissettiren her biri biricik öğrencilerime çok teşekkür ederim.

Öğrenme arzusu ve iyiliğiyle bana örnek olan, desteğini ve sevgisini her zaman gösteren biricik dedem Hüseyin BAYRAMOĞLU'na; üzerimde emeği olan, saygısı ve nezaketi yegâne biricik dedem Talip CİHAN'a; kendilerinden sabrı, saflığı, tefekkürü, dua etmeyi, iyiliği öğrendiğim biricik babaannem Tenzile CİHAN ve biricik anneannem Safiye BAYRAMOĞLU'na da sonsuz teşekkür ederim. Hayatıma kattıkları eşsiz güzellikler için minnettarım.

Zor günlerden geçerken hızla yardıma koşan, çocukluğumun aynı yerinde duran kuzenim, oyun arkadaşım Halil ALUMUR'a çok teşekkür ederim.

Dostluğu hayatımın önemli bir parçası olan, birlikte büyüdüğüm kardeşim Tuba ÜNAL'a yaşadığım tüm güzelliklerde ve zorluklarda desteğini hiçbir zaman yanımdan ayırmadığı ve hayatımdaki varlığı için sonsuz teşekkür ederim.

Çoğu zaman birbirimizden uzakta olsak da sevgi ve desteğini hep yanımda hissettiğim, derdime ortak ve çare olan, gülmelerimi kat kat artıran, varlığıyla hayatıma anlam katan canım kardeşim Yasin CİHAN'a sonsuz teşekkür ederim.

Hayatım boyunca her zaman yanımda olan, zor durumda olduğumda ya da zorlandığımda daha da güçlenerek bana güç veren, iyiliğim ve faydalı şeyler yapmam için her türlü fedakârlığı sonuna kadar yapan, çocukları olmaktan gurur duyduğum, sevgileri sonsuz olan sevgili annem Rabia CİHAN ve sevgili babam Necmi CİHAN'a emekleri için sonsuz teşekkür ederim.

Yasemin CİHAN

İÇİNDEKİLER

ETİK İLKELERE UYULDUĞUNA İLİŞKİN BEYAN	İ
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	v
TABLolar LİSTESİ	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
KISALTMALAR LİSTESİ.....	x
ÖZET	xi
ABSTRACT.....	xiii
I.BÖLÜM.....	1
1.GİRİŞ	1
1.1.Reuben Hersh kimdir?	5
1.2.Araştırmanın amacı ve problemi	9
1.3.Araştırmanın önemi	10
1.4.Tanımlar	12
II. BÖLÜM	15
2. KURAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ LİTERATÜR.....	15
2.1.Matematik nedir?.....	15
2.2.Matematik felsefesinin ilgi alanı	18
2.3.Matematiksel nesneler ve yapı	25
2.4.Matematik felsefesi tarihinde yer alan düşünce okulları	27
2.4.1.Mutlakçı düşünce okulları.....	29
2.4.1.1.Platonculuk.....	30
2.4.1.2.Mantıkçılık	36
2.4.1.3.Oluşturmacılık	38
2.4.1.4.Biçimcilik (Formalizm).....	40
2.4.2. Modern matematik felsefesindeki gelişmeler	44
2.4.2.1.Yeni-Fregeciler (Yeni-Mantıkçılar).....	47
2.4.2.2.Nominalizm ve kurgusallık	47

2.4.2.3.Yapısalcılık (<i>Structuralism</i>)	49
2.4.2.4.Lakatos ve yanılabilirlik.....	50
2.4.2.5.Gelenekselcilik (<i>Conventionalism</i>).....	55
2.5.Matematik eğitimi felsefesi.....	56
III. BÖLÜM.....	67
3.YÖNTEM.....	67
3.1.Araştırmanın modeli	67
3.2.Veri toplama süreci.....	68
3.3. Geçerlik ve güvenirlik	70
3.4.Veri analizi.....	70
IV. BÖLÜM.....	74
4.BULGULAR.....	74
4.1.Reuben Hersh'e göre matematiğin tanımı	74
4.2.Reuben Hersh'e göre matematik felsefesinin ilgi alanı.....	76
4.3. Reuben Hersh'e göre matematik felsefesi tarihindeki düşünce okullarının değerlendirilmesi.....	82
4.3.1.Reuben Hersh'in ana akım matematik felsefesi (mutlakçı) düşüncelerini değerlendirmesi.....	87
4.3.2. Reuben Hersh'in "Hümanistler ve başına buyruklar (<i>maverick</i>)" adıyla sınıflandırdığı modern matematik felsefesindeki düşünceleri değerlendirmesi	97
4.4. Matematik eğitimi felsefesi ve Reuben Hersh	105
V.BÖLÜM	117
5. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....	117
5.1.Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesi	117
5.1.1.Reuben Hersh'e göre matematiğin tanımı ile ilgili sonuç ve tartışmalar	118
5.1.2.Reuben Hersh'e göre matematik felsefesinin ilgi alanı hakkında sonuç ve tartışmalar	119
5.1.3.Reuben Hersh'e göre matematik felsefesindeki düşünce okulları ile ilgili sonuç ve tartışmalar	120
5.2.Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesinin matematik eğitimi açısından değerlendirilmesi	123
5.2.1.Matematiği öğretenlere ilişkin sonuç ve tartışmalar.....	125

5.2.2. Matematiği öğrenenlere ilişkin sonuç ve tartışmalar	127
5.2.3. Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesinin matematik öğretim programlarına ilişkin sonuç ve tartışmalar	127
5.3. Öneriler	131
KAYNAKÇA	133
ÖZGEÇMİŞ	137



TABLolar LİSTESİ

Tablo 2.1. Felsefe alanları ve soruları.....	20
Tablo 2.2. Matematik felsefesinin ilgilenmesi gereken sorunların (Ernest, 1998, s. 51-52) felsefe alanları ile ilişkilendirilmesi.....	23
Tablo 2.3. Kanıt yöntemleri (Çevik, 2019, s. 19-26).....	61
Tablo 3.1. Tez çalışmasının doküman analizinde incelenen Reuben Hersh'e ait kaynakların listesi.....	69
Tablo 4.1. Reuben Hersh (1997)'in matematik felsefesi tarihindeki düşünceleri sınıflandırması.....	87

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Doğrusal zaman şeması.....	1
Şekil 1.2. Doğrusal ve döngüsel zaman şeması.....	2
Şekil 2.1. Kalemlik.....	25
Şekil 2.2. Matematiksel keşfe götüren keşifsel stratejiler için sadeleştirilmiş Lakatos modeli (Hersh vd., 2020, s. 324).....	64
Şekil 2.3. Freudenthal'ın matematikleştirme sürecinin şematığı (Baki, 2014, s. 294)...	65
Şekil 3.1. Reuben Hersh'in kaynaklarından elde edilen bulguların incelenmesinde belirlenen kategoriler.....	72
Şekil 4.1. Bulguların sınıflandırılması.....	74

KISALTMALAR LİSTESİ

TDK: Türk Dil Kurumu

USA: Amerika Birleşik Devletleri (United States of America)

AMS: Amerikan Matematik Topluluğu (American Mathematical Society)

NCTM: Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics)



ÖZET

MATEMATİKSEL DENEYİMİN FELSEFESİ: REUBEN HERSH

Cihan, Yasemin
Yüksek Lisans Tezi
Matematik ve Fen Bilimleri Anabilim Dalı
Matematik Eğitimi Bilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Soner Durmuş
Ağustos - 2020, 137 + xiv Sayfa

Bu araştırmada, bir pür (saf) matematikçi olan Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesinin anlaşılması ve bu bakış açısının matematik eğitimi açısından doğurgularının ortaya konulması amaçlanmaktadır. Matematiksel deneyim; matematik, matematikçi, matematik tarihi, matematik felsefesi, matematik eğitimi gibi birçok unsuru içerisinde barındırmaktadır. Bir matematikçi olarak Reuben Hersh, matematik felsefesi görüşlerinin oluşturulmasında kendi matematiksel deneyimine vurgu yapmaktadır. Araştırmanın amacı doğrultusunda nitel araştırma yöntemlerinden doküman inceleme yöntemi kullanılarak kitapları, makaleleri ve röportajları üzerinden Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesinin ne olduğunun anlaşılması sağlanmıştır.

Reuben Hersh'in matematik felsefesi tarihi içerisindeki düşüncelere eleştirel bir gözle baktığı, ana akım matematik felsefesi düşüncelerine katılmadığı/hiçbir felsefe okuluna bağlı olmayanlardan olduğu, kendi matematiksel deneyiminin felsefesini hümanistler ve başına buyruklar olarak sınıflandırdığı kategoride ele aldığı sonucuna varılmıştır. Ayrıca kendi yönelimini hümanist matematik felsefesi içerisinde “sosyal-kültürel-tarihsel” olarak adlandırması ile de matematiksel deneyiminin felsefesini; deneyimlerinin farkında olan insana ve insanın şekillendirdiği unsurlara vurgu yaparak betimlediği görülmüştür. Reuben Hersh'in deneyime vurgu yapan matematik felsefesinde matematiğin doğasına yönelik oluşturduğu görüşlerinin, matematik eğitiminde de öğrenci merkezli, öğretmenin rehber olduğu, matematik sınıflarının ve öğretim programlarının matematiğin doğasının özünü yansıtması gerektiği yönünde olduğu görülmüştür. Bu noktada ayrıca Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin

felsefesine olan bakış açısının matematik eğitimi açısından doğurgularının NCTM standartları ve ülkemiz Matematik Dersi Öğretim Programı'nda ele alınan yetkinlikler ile uyumlu olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Matematik Felsefesi, Matematik Eğitimi, Matematiksel Deneyim, Matematik Öğretimi.



ABSTRACT**PHILOSOPHY OF MATHEMATICAL EXPERIENCE: REUBEN HERSH**

Cihan, Yasemin

M. Sc. Thesis

The Department of Mathematics and Science Education

The Program of Mathematics Education

Supervisor: Prof. Dr. Soner DURMUŞ

August - 2020, 137 + xiv pages

In this study, it is aimed to understand the philosophy of Reuben Hersh's mathematical experience and to reveal the implications of this perspective in terms of mathematics education. Mathematical experience; it contains many elements such as mathematics, mathematician, history of mathematics, philosophy of mathematics and mathematics education. As a mathematician, Reuben Hersh emphasizes his own mathematical experience in forming his philosophy of mathematics. In line with the purpose of the research, it is provided to understand what the philosophy of Reuben Hersh's mathematical experience is through books, articles and interviews using document analysis method, which is one of the qualitative research methods.

It was concluded that Reuben Hersh critically viewed the thoughts in the history of mathematics philosophy, did not agree with the mainstream mathematics philosophy thoughts, and considered the philosophy of his mathematical experience as humanists and mavericks. In addition, by calling himself his own slant as "social-cultural-historical" within the philosophy of humanist mathematics to the philosophy of his mathematical experience; It is seen that he is depicted by emphasizing on the people who are aware of their experiences and the elements shaped by man. It has been seen that Reuben Hersh's views on the nature of mathematics in philosophy of mathematics, which emphasizes experience, are student-centered in mathematics education, that the teacher is a guide, and that mathematics classes and curricula should reflect the essence of mathematics nature. At this point, it is also concluded that the perspective of Reuben Hersh's philosophy of mathematical experience is compatible with competencies

regarded in our country's Mathematics Curriculum in terms of mathematics education and NCTM standards.

Key words: Philosophy of Mathematics, Mathematics Education, Mathematical Experience, Mathematics Teaching.



I.BÖLÜM

1.Giriş

İnsanların birbirleriyle iletişim kurmasını ve toplumların ortak süreçler yaşamasını sağlayan en önemli araç dildir. Konuştuğumuz dil; ihtiyaçlarımızı belirler, kültürümüzü şekillendirir ve bu süreç döngüsel ve dinamiktir. Yaşam süresi boyunca konuştuğumuz dil toplumların kültürünü şekillendirirken aynı zamanda bireysel algıları üzerinde de belirleyici bir kuvvete sahiptir. Örneğin Türkçe’de “geçmiş” kelimesi “arkada kalan hayat”; “gelecek” kelimesi de “daha gelmemiş, yaşanacak zaman” anlamlarına gelmektedir (TDK). And dağlarında yaşayan Aymara insanların dilinde ise bunun tam tersidir. Onlar geçmişi “önde” geleceği ise “arkada” algılamaktadır. Bu kelimelerin dillerine; geçmişin geleceğe yön verdiği, geleceğin ise geçmiş kadar tüm yönleriyle bilinmez olduğu algısı ile yansıyabileceği muhtemeldir. Hintçe’de ise dün, ‘beeta hua kal’; yarın ise ‘aane vaala kal’ diye söylenmektedir. İkisinde de ortak olan “Kal” (कल) sözü hem dün hem de yarın anlamlarına gelmektedir. Yani ister geleceğe doğru, ister geçmişe doğru ‘şu andan bir gün uzakta’ anlamındadır. Zamanın öncesi ve sonrasını betimlemek üzere astronom Sir Arthur Eddington, 1928 yılında yazdığı *The Nature of The Physical World* adlı kitabında “Zamanın Oku” adını verdiği simetrik olmayan lineer bir yapıdan bahsetmektedir.

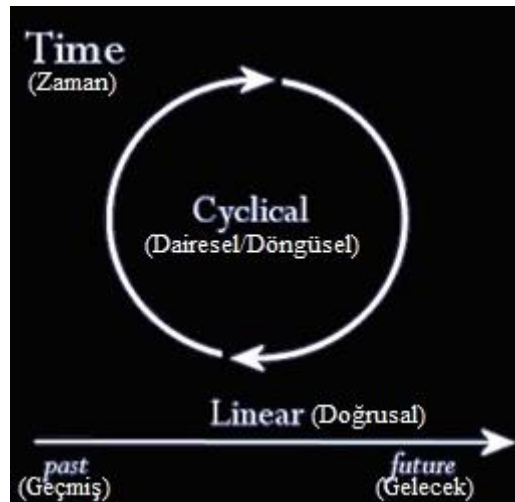


Şekil 1.1. Doğrusal zaman şeması.

Bu yapı geçmişi bildiklerimiz, geleceği de bilmediklerimiz anlamına alarak zamanın lineer bir yapıda sürdüğünü betimlemektedir. “Zamanın Oku” kavramı Eddington’dan sonra Zamanın Termodinamik Oku, Zamanın Kozmolojik Oku gibi

kavramlara dönüşmüştür. Şimdi ise bu kavram “Zamanın Algısal/Psikolojik Oku” olarak genişletilmiştir (Hawking, 2019).

Bu noktada bir de matematikçi ve fizikçi olan Henri Poincaré’den bahsetmek uygun olacaktır. 1890 yılında geliştirdiği ve kendi adıyla anılan Poincaré yinelenme teoremine (*Poincaré recurrence theorem*) göre, dinamikleri hacmini koruyan ve sınırlı mekânsal hacimle sınırlanan bir sistem, yeterli süre sonra, baştaki durumuna çok yakın bir biçimde yineleneyecektir. Eğer bir gaz alıp parçacıkları bir kutuya -kutunun köşesine- konulduğunda parçacıklar dağılacaklar ve sonra hareket edeceklerdir. Poincaré tekrarına göre, bu parçacıklar çok çok uzun zaman sonra kutunun köşesine geri döneceklerdir. Daha basit bir örnek ile açıklanabilirse, elde bir sürü iskambil destesi olduğunu ve bunların karşılıklı olarak iki kişiye dağıtıldığını varsayalım. Yeterince uzun süre bu dağıtım yapıldığında birinci kişiye dağıtılan kartlardan başta gelen papaz kartın daha sonra tekrar gelmesi ihtimali garantidir. Şekil 1.2.’de Poincaré’in tekrarlanan zaman algısının bir modeli görülmektedir. Buna göre, gelecek zamanda çok uzun geçmişin bir tekrarını yaşayabilir veya tam tersi düşünüldüğünde geçmiş zamanda gelecekte yaşanılacak bir olay erken yaşanıyor denilebilmektedir. Yani, zaman döngüseldir.



Şekil 1.2. Doğrusal ve döngüsel zaman şeması.

İnsanın en basitten en karmaşık şeylere ihtiyaç duyması, bunlara çözüm geliştirmeye çalışma ve aktarma çabasına girmesinden beri “matematik” denilen disiplin var olagelmıştır denilebilir. Bu çaba insanın doğası gereği bilgiler, dünyanın değişimi ve

kültürlerle beraber dinamik bir şekilde sürekli devam etmekte ve matematik geliştirmek ve değişmektedir. Tarihine bakıldığında matematik; hem kendi tarihini hem başka bilimlerin tarihini hem de insan yaşamını etkileyen önemli bir roldedir. Bu rol matematiğe; anadili farklı olan milletlerin ortak dilinin kendisi olduğu merkezi bir duruşu da beraberinde getirmektedir. Gauss'un "bilimlerin kraliçesi" (Coşkun, 2010, s. 104) şeklinde ilan ettiği matematiği bu denli merkezi yapan nedir?

Geçmişten günümüze, bilinenden bilinmeyene dek matematik, kendi içerisindeki konularını yer yer ve zaman zaman tekrar tekrar gündemine almıştır. Bu yüzden dinamik bir yapısı vardır. Bu dinamiklik Zamanın Oku gibi lineer bir yapıda değil; aksine döngüsel bir yapıdadır. Matematik tarihine bakıldığında örneğin; Fermat'ın Son Teoremi, ortaya konulduğundan yaklaşık 300 sene sonra ispatlandığında bu teorem Andrew Wiles'in yaşadığı dönemde tekrar gündemdeydi. Ancak denilebilir ki ilgisi olan beyinler var olduğu sürece zaten dünya gündemindeydi. Aradan geçen yüzlerce yıla rağmen matematik kendisini canlı tutan bir yapıya sahiptir. Bu canlılık, matematiğin zaman içerisinde döngüsel bir yapıda değiştiğini ve geliştiğini açıklamaktadır. Dolayısıyla matematikte zaman kavramı için "Zamanın yönü yoktur, geriye doğru gitme aynen ileriye doğru gitme gibidir." (Gür, 2019, s. 363) denilebilmektedir. Bu zamana değin gelmiş geçmiş matematikçilerin, filozofların, fizikçilerin, öğrencilerin vs. bu değişim ve gelişim içerisinde matematik yaparlarken sordukları bazı sorular tarihte matematik ve felsefe kavramlarını bir arada görmemizi sağlamıştır.

Bu araştırmaya, bir matematik öğretmenin mesleğine henüz başlarken sorduğu "Matematik neden bu kadar merkezi bir rol üstleniyor?", "Matematiği neden öğrenmek zorundayız veya öğretmeliyiz?" gibi sorulardan yola çıkılarak başlanmıştır. Zihinlerimizde bilinenden bilinmeyene doğru yönelmiş algısal bir zaman oku mevcuttur. Goethe, "sorabilmek için önce öğrenmek gerekir" demektedir (Baki, 2014, s. 218). Geçmişten şimdiye dek alınmış olan matematik eğitiminden sonra ve öğretmenlik mesleğine henüz başlarken bu işin nedenini soruyor olmak, belki de sorulan sorular ile matematiğin tam olarak bilinmiyor olduğunu gösteren bir çelişkiye düştüğü izlenimi verebilmektedir. Ancak bu çelişki, matematik felsefesi konusunda araştırmalar yapmaya

ve bu araştırmaların sorulara cevap vereceğine dair beklentiye itmiş; öğrenilen matematiği neden öğretmek ile asıl anlamının ne olduğunun cevabı verilemeyen bir işi yapma hissi bu araştırmanın doğmasına sebep olmuştur. Dolayısıyla bu çalışmanın oluşum aşamasında merak edilen başlıca konular matematiğin ve matematiği öğrenme/öğretme gerekliliğinin ne olduğudur. Öncelikle incelenen konu matematik felsefesi olmuş ve bu konuda okumalar yapılmıştır.

Maddy (1990; akt. Gür, 2019, s. 23-24), “Matematik filozofunun görevinin, matematiği reform etme değil, onu tanımlama ve açıklama olduğunu kabul ediyorum.” demektedir. Matematik felsefesi konusunda yapılan araştırmalar, bu çalışmanın son şeklinin meydana gelmesinde başlangıç noktası olmuştur. İlgili literatür incelendiğinde matematiğin ne olduğu, matematik felsefesinin ne anlama geldiği ve ilgi alanı, matematik felsefesinde ortaya çıkan düşünce okulları ve matematik eğitimi felsefesi adıyla matematik felsefesinin etkisiyle ortaya çıkmış öğrenme-öğretme yaklaşımları gibi temel başlıklara ulaşılabilmektedir. Bu başlıklar altında edinilen bilgilere göre, matematik felsefesi tarihinde birçok matematikçi, filozof veya diğer meslek gruplarından isimlerin matematik hakkında söylemleri olduğu görülmektedir. Platon, Hilbert, Brouwer, Wittgenstein, Gödel, Russell, Whitehead, Lakatos, Ernest, Freudenthal, Hersh, Quine gibi matematikçi, filozof, psikolog, eğitimci ve hem matematikçi hem filozoflar düşünce ve eylemleri ile matematik felsefesi tarihinde zikredilmekte olan isimlerdir (Baki, 2014; Gür, 2019). Bu isimler arasından bir pür matematikçi olan Reuben Hersh incelendiğinde onun kendi matematiksel deneyimlerinden yola çıkarak “matematiksel deneyiminin felsefesi” ile ilgili bir bakış açısı sunduğu görülmektedir. Bu çalışmada Reuben Hersh’in bu bakış açısı ve bunun matematik eğitimi açısından ifadesinin Türk okuyucusuna sunulması hedeflenmiştir.

Hedefin oluşum aşamasının ilk basamağı olan çalışmanın konusuna karar verildiğinde Reuben Hersh ile iletişime geçilmiştir. Kendisi bu tez çalışmasının oluşturulacak olmasını memnuniyetle karşılamıştır. Tezin meydana gelme sürecinde yardımcı olabilecek kaynaklar önermiş, kişilere yönlendirmiş ve kendi fikirlerini bizzat ifade etmiştir. Ancak ömrü bu çalışmanın tamamlanmış halini görmeye yetmemiş, Reuben Hersh 3 Ocak 2020 tarihinde vefat etmiştir. Süreçte bizzat görüşlerini teyit

ettirme imkânı kalmadığından, eserlerindeki ifadelerine bağlı kalarak görüşleri incelenmeye çalışılmıştır.

1.1.Reuben Hersh Kimdir?

Reuben Hersh, 9 Aralık 1927’de NewYork’ta doğmuştur. Kendisi matematikçi, yazar ve akademisyendir. İkinci Dünya Savaşı ile birlikte ailesinin başa çıkmak zorunda kaldığı sıkıntılar, evlenip iki çocuk sahibi olduğu, o sıralarda bir dergide, ardından bir makine atölyesinde çok çeşitli işlerde çalıştığı, 1956’da sağ başparmağının yarısını kaybederek geçirdiği ciddi bir iş kazası sonrasında işini bıraktığı ve matematikle olan ilgisi kendi yazdığı kaynaklardan bilinmektedir (Hersh, 2014; Hersh, Davis ve Marchisotto, 2015). Dolayısıyla bu başlık altında amaç Reuben Hersh’in tam bir biyografisini vermek değildir. Amaç, okuyucuya öncelikle Hersh’in matematik ile ilişkisinin nasıl olduğuna dair bilgi ve anekdotlar sunarak, kendi tabiriyle “hayatını adadığı iş” (Hersh, 2014, s. 17) olan matematiğe ve felsefesine bakışının ortaya koymaktır.

Reuben Hersh (2014, s. 17-20), matematik yapma sürecine yönelik duygu ve düşüncelerinden 86 yaşındayken yazdığı ‘*Experiencing Mathematics: What Do We Do, When We Do Mathematics?*’ kitabında şöyle bahsetmektedir:

Büyük bir felsefi karar verdim. Hayatımı dünyayı değiştirmeye adanmak yerine, zevk aldığım bir şeyi yaparak geçimimi sağlamaya çalışabilirdim! Bir süre sonra, üniversitede İngiliz Edebiyatı mezunu olmadan önce, matematikte ciddi uzmanlaşmayı düşündüğümü hatırladım. ... Her zaman matematiği sevdim, ama bunu asla bir hayatın adandığı iş olarak düşünmedim, çünkü Faşizmle savaşmak zorunda kaldım. Fakat sağ başparmağımın yarısını kestiğimde Faşizmle mücadele çabalarımın aldatılmış ve etkisiz olduğunu fark ettim. Bir makine atölyesinde yevmiyeli olarak çalışırken, halk kütüphanesinde Richard Courant ve Herbert Robbins tarafından yazılmış ilginç bir kitapla karşılaşmışım: *Matematik Nedir?* Kim olduklarını bilmiyordum, ama bu kitabı kütüphaneye geri vermeyi başaramadım. Kitabı

kaybettiğimi iddia ederek yalan söyledim ve kütüphanenin ihtiyacı olan parayı ödedim. Bugün elimde hala o kütüphane kopyası var! Bu öyküyü Richard Courant'a anlatmaya asla cesaret edemedim, yıllar sonra New York Üniversitesi'nde bir mezun olarak, Matematiksel Fizik Yöntemleri Cilt 2'nin İngilizce çevirisinde kopya editörü olarak atandım (evrensel olarak “Courant-Hilbert” olarak anılacaktır). 1957'de matematikte eğitim alma düşüncesi korkutucuydu. Ama bunu bir yaşam kuralı olarak görüyorum: Eğer bir şey yapmaktan korkarsam, o zaman gitmem ve yapmam gereken şey budur (Hersh, 2014, s. 17-20).

Bundan sonra Reuben Hersh, kararını vermiş ve çalışmalarına başlamıştır. Peter Lax, Paul Cohen gibi isimlerle birlikte çalışmış; Standford, Brown, Berkeley gibi üniversitelerde ders vermiş; çok uzun yıllar New Mexico Üniversitesi'nde akademisyenlik yapmış; The College Mathematics Journal, The Mathematical Intelligencer gibi dergilerde yazmış ve Ford, Chauvenet ödüllerine layık görülmüştür. Kendisi pür matematikçidir ve çalıştığı alan kısmi diferansiyel denklemlerdir. 1983 yılında; Reuben Hersh, Philip J. Davis ve Elena Anne Marchisotto ile birlikte yazdığı The Mathematical Experience (Gözden geçirilmiş yeni baskısı Tüm Yönleriyle Matematiksel Deneyim-2015-olarak Türkçeye çevrilmiştir.) adlı kitabı ile Ulusal Kitap Ödülü (*National Book Awards*) kazanmışlardır. Bu kitap bu tez için de çıkış noktası olan matematik felsefesi hakkında yazılmış bir kaynaktır. Reuben Hersh, o vakte kadar pür matematikçi olarak yer verdiği çalışmalarına aslında bambaşka bir boyut kazandırmıştır. Bunun, yani kendi çalışma hayatında olanların ne ifade ettiği ile ilgili şunları ifade etmektedir:

Yaklaşık beş yıl öncesine dek ben de sıradan bir matematikçiydim. Bunun gibi bir kitap yazmak ve benzeri riskli ve alışılmışın dışında şeyler yapmazdım. Kendime ait bir “alanım” –kısmi diferansiyel denklemler- vardı ve ben alanımın dışına çıkmazdım, en fazla yakın alanlardan birinin sınırlarında gezinirdim. İleri seviyelerdeki düşüncelerim, gerçek entelektüel hayatım ise yıllar önce yüksek lisans eğitimim esnasında özümlemiş olduğum kategori ve değerlendirme tarzlarını kullanmaya devam ediyordu. Bu tarzlardan ve kategorilerden hiç uzaklaşmadığım için, aslında onların da belli belirsiz farkındaydım. Onlar aslında bakmakta olduğum dünyanın değil, dünyayı algılayış biçiminin bir parçasıydılar. İlerlemem alanımdaki araştırmalarım ve yayınlarıma bağlıydı. Yani benimkine benzer bir eğitim almış olan

alanımdaki diğer çalışanlarla paylaşılan bakış açıları ve düşünme biçimleri konusunda ustalık kazanmanın getireceği önemli ödüller mevcuttu. Benim yaptıklarımın değerini onların yargıları belirleyecekti. Başka hiç kimse bunu yapabilecek nitelikte değildi ve zaten bir başkasının da bu konuyla ilgilenip ilgilenmeyeceği oldukça şüpheliydi. Kendimi bu bakış açısından özgür kılmak yani onu anlamak, birçok olası bakış açısı arasından yalnızca bir tanesinin geçerli olduğunun farkına varmak, onu istenildiği zaman kullanıp diğer zamanlarda kenara koyabilmek, bu bakış açısını diğerleriyle kıyaslamak ve değerlendirmek... Bunların hiçbirisi mesleğim ya da kariyerimin gereksinimlerinden değildi. Tersine, böyle olağan dışı ve belirsiz maceralar en iyimser ihtimalle kıymetli zamanın akılsızca boşa harcanması, en kötü ihtimalle ise psikoloji, sosyoloji ve felsefe gibi şaibeli ve şüpheli girişimlerle ilgilenmek olarak görülebilirdi. (Hersh, 2014, s. 1; Hersh vd., 2015, s. 1).

Tüm bunlardan Reuben Hersh'in çalışma hayatına farklı bir bakış açısıyla yaklaşmaya başladığı ve çalışmalarının yeni bir boyutta değerlendirilebileceğinin farkında olduğu anlaşılmaktadır. Hersh, matematik felsefesi ile ilgili çalışmalarının oluşmasında aklındaki düşünce ve soruları şu sözlerle tarif etmiştir: *“50 yaşımdan sonra, zihnim matematik yaratma ve keşfetmekten uzaklaştı ve farklı bir sorudan çok etkilendi. Bir matematikçi olmak ya da matematik yapmak ne demektir? ‘Matematik yaratmak ya da keşfetmek’ ne anlama geliyor? Matematik yaparken ne yaparız?”* (Hersh, 2014, s. 20). Bu sözler ile ilgili olarak Reuben Hersh'in yıllar boyu çalıştığı “pür” matematiğin *sonuçları* ve matematik felsefesine duyduğu ilgi ve düşüncelerinin ‘resmi’ başlangıcı yorumu yapılabilmektedir.

Esasında, gerçek şu ki matematik olarak adlandırdığımız bu garip etkinliğin, eğer varsa, amacı ve anlamına karşı duyduğum hayret ve hayranlığın, fiilî olarak matematik yapmaya duyduğum hayranlığa eşit, hatta daha güçlü olduğu bir noktaya geldim. Matematiği son derece karmaşık ve gizemli bir dünya olarak görüyorum. Bu dünyayı keşfe çıkmak ise tedavisinin imkânsız olduğunu düşündüğüm bir bağımlılıktır. Ben de diğerleri gibi bir matematikçiyim. Ama buna ek olarak, bu matematikçiye hayretle izleyen ve böyle garip bir yaratığın, böyle garip bir etkinliğin dünyaya gelmesi ve binlerce yıldır varlığını sürdürebilmiş olması karşısında daha çok hayrete düşen ikinci bir benlik, bir Öteki geliştirdim. (Hersh, 2014, s. 1; Hersh vd., 2015, s. 2).

Hersh'in bahsettiği noktada geliştirdiği öteki tabiri kendisine, yaptığı işe ve kendi tecrübelerine farklı bir boyuttan bakmak anlamındadır. Yani Hersh, kendinde kendisine dışarıdan bakan bir göz olmaya çalışan ikinci bir kişi olarak yeni araştırmalar yapmaya, yeni sorular üretmeye ve düşüncelerini geliştirmeye başlamıştır. Hersh bu durumun başlangıç noktasının Matematiğin Temelleri dersini vermeye başladığı gün olarak sayılabileceğini ifade etmektedir (Hersh, 2014, s. 1; Hersh vd., 2015, s. 2). *“Nerdeyse on beş yıldır, her düzeyde ve pek çok farklı konuda matematik öğretiyordum ama tüm bu derslerdeki meşguliyetim, matematik hakkında konuşmak değil, matematik yapmaktı. Burada ise artık amacım matematik yapmak yerine matematik hakkında konuşmak olmuştur.”* (Hersh, 2014, s. 2; Hersh vd., 2015, s. 3).

Kendi fikrinin Matematiğin Temelleri dersinde bahsettiği düşünce okullarından (oluşturmacılık, biçimcilik gibi) hangisine dayandığının belirsiz olması ve bu düşüncelerin yüzyıllar içerisinde geçirdiği dönüşümler hakkında net bir fikir sahibi olmaması Hersh'in bu alanda daha fazla araştırmalar yapmasını ve düşüncelerinin netlik kazanmasını sağlamıştır. Bu durumdaki beklentisini, *“Sayılar teorisi dersini öğrettikten sonra nasıl sayı teorisyeni olmamışsam, burada da matematiğin temelleri alanında araştırmacı olmak gibi bir beklentim yoktu.”* (Hersh, 2014, s. 2; Hersh vd., 2015, s. 2) şeklinde ifade etmiştir.

Matematiğin temelleri konulu dersime başlarken merkezi öneme sahip olduğuna inandığım ve dönemin sonunda cevabını bulacağımızı ya da en azından açıklık kazandıracağımızı umduğum soruları formüle ettim. Sayı nedir? Küme nedir? İspat nedir? Matematikte ne biliyoruz ve bunu nasıl biliyoruz? “Matematiksel kesinlik” nedir? “Matematiksel sezgi” nedir? Bu soruları formüle ederken cevapları bilmediğimi fark ettim. Elbette, bu pek şaşırtıcı da değildi. Çünkü bu tür “müphem” ve “felsefi” soruların matematikte aradığımız türden net cevapları olması beklenemezdi. Bu sorular hakkında her zaman fikir ayrılıkları olacaktır. Ama beni rahatsız eden kendi görüşümün ne olduğunu bilmemektir. Daha da kötüsü, dayanacak bir temelim, farklı fikirleri değerlendirecek, savunacak ya da onlara karşı çıkacak bir kriterim de yoktu. Matematikte ispat, bilgi ve gerçeklik konularında diğer matematikçilerle konuşmaya başladım ve içinde bulunduğum karmaşık belirsizliğin tipik olduğunu fark

ettim. Yine ayrıca, kişisel deneyimlerimiz ve içsel inançlarımız hakkında konuşma ve tartışmaya ne kadar aç olduğumuzu da gördüm. (Hersh, 2014, s. 2-3; Hersh vd., 2015, s. 4).

Buraya kadar Reuben Hersh'in çalışma hayatında yüzleştiği sorular ile ilgi ve araştırma alanının farklılaşarak yeni bir boyut kazanmasındaki süreçte kendisi, çevresi ve matematiğin temelleri hakkındaki gözlemleri verilmeye çalışılmıştır. Bunlar ve bu çalışmanın araştırma problemlerinin oluşmasında meydana gelen ilgi ve düşünceler oldukça benzerdir. Matematiğin (en azından bir yere kadar bile olsa) bilinen, öğrenilen ve öğreniliyor olan kısmının ortaya çıkardığı veya hiç bilinmese de yine de sorulabilen “matematiğin neye dayandığı/temellerinin ne olduğu” merak edilen bir konudur. Bir pür matematikçi olarak Reuben Hersh'in matematik, matematiksel deneyimleri ve matematik deneyiminin felsefesi ile ilgili geçirdiği bu süreçlerin de insani ve organik süreçler olduğu görülmektedir.

1.2.Araştırmanın Amacı ve Problemi

Matematiksel deneyim; matematik, matematikçi, matematik tarihi, matematik felsefesi, matematik eğitimi gibi birçok unsuru içerisinde barındırmaktadır. Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminde, matematiğin temelleri dersini vermeye başladığında *matematik yapmaktan çok matematik hakkında konuştuğunu* (Hersh, 2014, s. 2; Hersh vd., 2015, s. 3;) belirttiği gibi, çalışmalarının artık farklı bir boyutta meydana geldiği görülmektedir. Matematikçi olarak matematik felsefesi hakkındaki ifadelerinde kendi matematiksel deneyimlerinden yola çıkmaktadır.

Bu çalışmada, araştırmanın öznesi ve bir matematikçi olan Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesinin anlaşılması ve bu bakış açısının matematik eğitimi açısından doğurgularını ortaya koymak amaçlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki araştırma problemlerine cevap aranmaktadır:

1. Bir pür (saf) matematikçi olan Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesi nedir?
2. Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesine olan bakış açısının matematik eğitimi açısından doğurguları nelerdir?

1.3.Araştırmanın Önemi

Matematik Eğitimi alanında yapılan çalışmalar incelendiğinde örneğin Özkara (2019) tez çalışmasında, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiğe ve matematik eğitimine yönelik belirlenen anahtar kavramlara ilişkin bilişsel yapılarındaki değişimi incelemiştir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının en az “matematik felsefesi” anahtar kavramına yönelik cevap kelime ürettikleri görülmüş ve bu durumun öğretmen adaylarının “matematik felsefesi” kavramını diğer kavramlara (örneğin, matematiksel bilgi) göre yüzeysel olarak bildiğinin göstergesi olabileceği belirtilmiştir (Özkara, 2019). Aynı yıl yayınlanan bir diğer tez çalışmasında Akman (2019), matematik öğretmen adaylarının matematiğin doğasına ilişkin felsefi görüşlerinin incelenmesini amaçlamıştır. Buna göre Akman; öğretmen adaylarının matematiğin tanımı için matematik bilimdir ve matematik hayattır temalarını öne çıkardıkları ve büyük çoğunluğunun matematiğin hem icat hem de keşif olduğunu düşündükleri tespitine ulaşmıştır. Matematiksel bilginin doğasına ilişkin olarak öğretmen adaylarının matematiksel bilgilerin sonradan edinildiğini, matematiksel bilgilerin değişebileceğini düşündükleri ve matematiksel bilgilerin birikimlerle oluştuğu temalarını öne çıkardıkları görülmüştür (Akman, 2019, s. iv).

Matematik Felsefesi konusunda yukarıda örnek gösterilen çalışmalar dışında Felsefe bilimleri alanında da çalışmalara rastlanmaktadır. Yılmaz (2019) tez çalışmasında; Platon'un genel felsefesini ve matematiğe olan bakış açısını ana hatlarıyla ortaya koyarak Platon'un matematik felsefesindeki yönlendirici ağırlığını göstererek bilim dünyası üzerindeki etkisine ve seçkin konumuna işaret etmeyi amaçlamıştır. Aldemir (2008), matematikçi, fizikçi ve bilim felsefecisi olan Poincaré'nin bilim

anlayışını ortaya koyarken; Akçagüner (2019) ise Poincaré'nin matematik felsefesini odağa aldığı bir tez çalışması meydana getirmiştir. Akçagüner'e benzer bir tavır ile Takıcak (2016) Salih Zeki'yi; Öztürk (2011), Kurt Gödel'i; Özdemir (2014), Kant'; Elmas (2019), Thomas Khun'u çalışmalarının merkezine alarak onların matematik felsefesi görüşlerini incelemişlerdir.

Matematik felsefesinde yapılan çalışmalara hem matematik eğitimi hem de felsefe alanlarında rastlandığı görülmektedir. Aynı konunun iki farklı alanda çalışılması üslup ve yöntem açısından alanlara göre farklılıklar ortaya koymaktadır. Matematik eğitimi alanlarında yapılan çalışmalarda genel olarak amaç matematik eğitiminde matematiğin doğasına ilişkin görüşleri ortaya çıkarmak olmaktadır. Bu amaç doğrultusunda geliştirilen tezlerde daha çok nicel ve karma yöntemler kullanılmaktadır. Felsefe alanlarında matematik felsefesi konusu üzerine yapılan çalışmalarda ise matematikçi, filozof ya da bilim felsefecisi kimliğini taşıyan öznel merkezinde görüşlerin ortaya konulması ya da matematik felsefesi tarihi içerisindeki görüşlerin eleştirel bir yaklaşımla ele alınması amaçlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda yapılan tez çalışmalarının üslubu ve ortaya konuluşu, matematik eğitimi alanında yapılan tez çalışmalarına göre farklılık göstermektedir. Bu tez çalışması ortaya konulduğu şekliyle matematik eğitimi alanında yapılan çalışmalara örnek oluşturmaktadır. Felsefe alanında ise genel olarak giriş kısmının sonunda araştırmanın amacı verildikten sonra ilgili literatür çalışmanın öznesini oluşturan 'kişiden öncesi hakkında' başlığı ile verilmektedir. İkinci bölüm çalışmanın öznesi olan kişinin anlatıldığı ve üçüncü bölüm ise araştırma problemlerine cevap verildiği kısımlardır. Felsefe alanında yapılan tez çalışmalarında anlatım özne etrafında (öncesi, şimdi ve sonuç şeklinde) bir kurgu oluşturularak sunulmaktadır. Bu tarz bir anlatıma ise matematik eğitimi alanında yapılan çalışmalarda rastlanmamaktadır. Bu tez çalışması matematik eğitimi alanında yapılan ancak felsefe alanlarından sunulan tezlere benzer olarak bir pür matematikçi olan Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesinin ne olduğunu ve bu yaklaşımın matematik eğitimi açısından ne anlama geldiğinin eleştirel bir yaklaşımla sunulmasını amaçlamaktadır. Dolayısıyla felsefe alanındaki araştırmacılara benzer bir tavır, bu çalışmada matematik eğitimi araştırmacısı tarafından sergilenmektedir.

Matematik eğitimi alanında ele alınan yaklaşımlara tarihsel olarak bakıldığında matematikçi, eğitmen, psikolog, filozof, antropolog gibi ve daha birçok meslek grubundan isimlerin görüşlerinin temel alındığı veya izlerini taşıdığı görülmektedir. Örneğin, Türkiye’deki ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programında Piaget’nin bilişsel gelişim çalışmalarına dayanan Vygotsky, Dewey’in de katkıda bulunduğu oluşturmacı yaklaşımın izleri görülmektedir (İlhan ve Aslaner, 2019, s. 398). İçerik olarak bakıldığında bu tez çalışması bir pür matematikçinin matematiksel deneyiminin felsefesine dayandırdığı matematik eğitimi ve felsefesi hakkındaki görüşleri üzerinden, matematik eğitimindeki yaklaşımlara farklı bir bakış açısının sunulmasını hedeflemektedir. Matematik eğitiminde matematiğin doğasına yönelik olan ilgi, tutum ve inançların etkisinin önemli olduğu aşikârdır (Akman, 2019; Özkara, 2019). Dolayısıyla bu çalışma hem içerik hem de ortaya konuluş şekli olarak ve aynı zamanda matematik eğitimi açısından sonuçların bir matematikçinin kendi matematiksel deneyiminin felsefesinin bakış açısı dâhilinde sunulması başta matematik eğitimcileri ve matematik eğitimi araştırmacıları olmak üzere çalışmanın ilgililerine fayda sağlayacağı ve bakış açılarını zenginleştireceği öngörülmektedir.

1.4.Tanımlar

Yanılabilircilik (Fallibilism): Bilgi bağlamında, kesinliğin mümkün ya da erişebilir bir hedef olmadığını, bütün bilgi iddialarının ilke olarak yanlış olabileceğini savunan yaklaşımı ifade etmektedir (Cevizci, 2017, s. 452). “En açık inançlarımızın veya en temel bilgilerimizin dahi kesinlikten yoksun olup revize edilebileceğini savunan yanılabilircilik, bununla birlikte bilgiden vazgeçilemeyeceğini, bildiğimiz her şey için kesin sonuçlu haklılandırmalar bulmaya ihtiyaç duyulmadığını öne sürme noktasında, kuşkuculuktan ayrılmaktadır.” (Cevizci, 2017, s. 452). Yanılabilircilik, mantıksal-matematiksel bilgi benzeri aksiyomatik olarak doğru olan bilgilerin varlığını olumlarken, sadece deneyimsel bilginin yeni gözlemlerle revize edilebileceğini savunmaktadır. Yanılabilirciliğin en önemli temsilcisi olarak Amerikan pragmatist

filozofu Pierce gösterilmekle birlikte, yaklaşımın diğer temsilcileri arasında Reichenbach, Popper ve Quine bulunmaktadır (Cevizci, 2017, s. 452).

Yanlışlanabilirlik (Falsifiability): “Popper tarafından geliştirilen bilimsellik ölçütüdür. Aynı zamanda sınanabilirlik veya çürütülebilirlik olarak da geçen yanlışlanabilirlik, bir hipotez ya da teorinin çürütülebilmesi potansiyelini ifade etmektedir. Buna göre, Popper hiçbir bilimsel önerme ya da teorinin kesin sonuçlu veya nihai olarak doğrulanamayacağı kanaatindeydi. O, bu yüzden bilimsellik ölçütü olarak mantıkçı pozitivistin doğrulanabilirlik ölçütünün yerine yanlışlanabilirlik ölçütünü ikame etmiştir. Bilimin işinin hipotez ya da teorileri doğrulamaktan ziyade yanlışlamaya çalışmak olduğunu söyleyen Popper’a göre, yanlışlanabilirlik, bir teori ya da açıklamanın yanlışlanabilir sonuçları olmasını ifade etmektedir. Bu türden sonuçları yoksa eğer, o yanlışlanamayan ve dolayısıyla sözde bilimsel olan bir teori ya da açıklamadır.” (Cevizci, 2017, s. 452-453).

Hümanizm/İnsancılık: insanın her şeyin ölçüsü olduğunu savunan, insanı değerlerin yegâne kaynağı olarak gören anlayışı ifade etmektedir (Cevizci, 2017, s. 217). “Sorunlarının çözümünde, insanların, Tanrı’dan ziyade kendilerine güvenmeleri anlayışıdır.” (Bolay, 2013, s. 182). İslamiyet’te hümanizm ise insanı ne tabiata bağlamakta ne de tanrılaştırmakta; sadece Allah’a bağlamaktadır. İslamiyet’te insan, onu yeryüzünde Allah’ın halifesi yani vekili olarak kabul edilmektedir. Böylece insan maddeden, tabiatın ve içgüdülerin esaretinden kurtulmuş, ruhunun metafizik kaynaklarından kopması önlenmiş, beslenmesi temin edilmiş ve makineleşmesi önlenmiştir (Bolay, 2013, s. 186). Felsefede; ister mutlak olarak isterse tecrübe sahasında insanı sadece biyolojik bir tür değil, en yüksek değer olarak kabul eden, dolayısıyla ahlaklılığı kendinde ve başkasında insani olan her şeyi geliştirmekten, gerçek insani hayatın bütün şartlarını temin etmek için her şeyi yapmaktan ibaret gören anlayıştır (Bolay, 2013, s. 183). Epistemolojide ise; F. C. Schiller, sofist Protagoras’ın “İnsan her şeyin ölçüsüdür.” şeklindeki sözünü temel olarak almakta ve “hakikat insanidir” demektedir. Ona göre bir önermenin doğru veya yanlış olması sonuç önermelerinin pratik bir değerinin olmasına veya olmamasına bağlıdır (Bolay, 2013, s. 185).

Pragmatizm/Başarıcılık: Zekânın esas işlevinin insana eşyayı tanıtmak olmayıp, fakat onlar üzerinde pratik olarak tesir etmesine, faaliyet göstermesine imkân vermesi olduğunu söyleyen öğretilerdir (Bolay, 2013, s. 33). Bu felsefe nazarında bilginin doğruluk derecesi (değeri), akıl prensiplerine uygunluğu ile değil, pratik değerleriyle ve başarı etkisiyle ölçülür; bir fikrin doğru olması demek, konusuna değil deneye, tecrübeye uyması demektir. Bir fikir, yanlış da olsa, fiil haline gelebilirse, bir inanç, bir hurafe, fert ve toplum üzerinde değişiklik yapabiliyorsa o doğrudur. Hakikati yapan bizim fiilî varlığımızdır. Bilgi, yaşamının aleti olup sadece yaşama zaruretinden, insanın eşya üzerinde amelî fayda yapması için doğmuştur. Bu yüzden *fiil ile fikir* birdir. Bu felsefede önemli olan pratik hayattaki maddi başarıdır. Hakikat, bilimde mutlak değeri reddederek, yerini faydaya bırakmaktadır. Bu sebeple, başarıcılık, maddeciliğin bir başka çeşidi, öbür yüzü gibi görülmüştür (Bolay, 2013, s. 34-35).

II. BÖLÜM

2. Kuramsal Çerçeve ve İlgili Literatür

2.1. Matematik Nedir?

Tanımlar, kavramların ne olduğunu ve kavramlar üzerinde çalışırken nasıl davranmamız gerektiğini belirten ifadelerdir. Matematiğin tanımı tek değildir. Dünyanın mevcut durumunun geçmişten günümüze evrilişine bakıldığında; matematiğin üretilen tüm teknolojilerde, insanların günlük rutinlerinde yaptıkları en basit sayılabilecek işlerde bile yaşadığı görülebilmektedir. Alfred North Whitehead (akt. Gür, 2019, s. 21) matematiği, müzik ile birlikte ‘insan ruhunun belki de en önemli ürünü’ olarak nitelemiştir. Bu yaşamsallık matematiği tarih boyunca mutlak doğru bilgi haline getirmiş, uğraşçıların onu sürekli sorguladığı ve arayış içine soktuğu aynı zamanda da kendisinden koparamadığı bir disiplin olmuştur. Uğraşçıların kelimesinin daha uygun olacağını düşünülmüştür. Çünkü bir fizikçi, bir filozof, bir kimyacı, bir mühendis veya bir biyolog da matematikle ilgilenir. İlgi alanı dâhilinde olmasa bile uğraştığı alanda ihtiyaç duyacağı ilk şeylerden biri (illaki) matematik olacaktır. Gauss, matematiği “bilimlerin kraliçesi” olarak tanımlarken (Coşkun, 2010, s. 104) haklı olabilir. Fakat matematiğe bu denli merkezi bir duruş sağlayan nedir? Peki, Gauss’un söylemine göre gerçekten de matematiği bilim olarak mı kabul etmeliyiz? TDK sözlüğü bilim sözcüğünü, “Evrenin veya olayların bir bölümünü konu olarak seçen, deneye dayanan yöntemler ve gerçeklikten yararlanarak sonuç çıkarmaya çalışan düzenli bilgi, ilim.” şeklinde tanımlamaktadır. Bir konuya bilim denmesinin şartı olarak deneye dayanan yöntemler kullanılmasını ifade eden bu tanıma göre matematiğin deneysel yöntemlerle elde edilen sonuçları ortaya koyan bir alan olması gerekmektedir. Bu

noktada, matematiğin uğraş konularının deneysel yöntemlerle çalışılabilecek derecede duyularımızla algılayabildiğimiz, somut ve gerçek nesneler içermesi gerektiği düşünülebilir. Ancak matematiksel nesneler duyularımızla algılayabildiğimiz, soyut olmayan nesneler midir? Matematik gerçekten neyle uğraşmaktadır? Platon (2013, s. 227), Devlet kitabında, “Bilirsin ki, geometri, aritmetik ve onlara benzer bilimlerle uğraşanlar, tek, çift diye, üçgen, dörtgen diye, üç çeşit açılı diye birçok şeyi varsayarlar. Bunları bilinen şeyler gibi ele alırlar. Bunlardan ne kendilerine ne de başkalarına hesap vermeyi gerekli bulurlar artık. Sonra, bu varsayımlardan kalkıp basamak basamak yükselir, bir sonraki sonuçtan ötekine geçerek, önceden kafa yorduklarını ispat ederler.” şeklinde yanındakilere karşılık vermektedir. Matematik, gerçekten de verilen bilim tanımına göre bilim olarak kabul edilebilir mi? “Başlangıç seviyesi ya da sözlükler için uygun, sade bir tanım matematiği niceliklerin ve uzayın bilimi olarak tanımlar.” (Hersh vd., 2015, s. 6). TDK sözlüğünde ise matematik, “Aritmetik, cebir, geometri gibi sayı ve ölçü temeline dayanarak niceliklerin özelliklerini inceleyen bilimlerin ortak adı, riyaziye.” olarak tanımlanmaktadır. Bunlar ve literatürdeki daha birçok matematik tanımı ona ‘bilim’ der. “Dil alışkanlığıyla biz bunlara çok defa bilim dedik. Oysaki onlara, sanıdan daha aydınlık, bilimden daha karanlık anlamına gelen bir ad bulmalı. Bir aralık onlara, (akıl yoluyla bilme anlamına) çıkarma demiştik. Ama şimdi ad üstünde durmayalım. Konuşacak daha önemli meselelerimiz var.” (Platon, 2013, s. 256). Matematik bilim midir tartışmasının konumuzun bütünlüğünü koparacak olduğu düşüncesiyle, bu çalışmada matematiği bir ‘disiplin’ olarak ele alarak devam edilecektir.

Bir biyolog olarak tanınan, başlangıçta yaptığı çalışmalar matematiğe dayanmayan Charles Darwin (akt. Frenkel, 2016, s. 17), daha sonra otobiyografisinde: “Matematiğin en azından büyük öncü ilkelerini anlayacak kadar üzerine düşmediğim için oldukça pişmanım çünkü bu donanımına sahip olanlar, fazladan bir duyuya sahip görünüyorlar.” şeklinde yazmıştır. Matematikle uğraşanları bu denli yücelten nedir? Ian Stewart (2013), Genç Matematikçiye Mektuplar isimli kitabında bir aralık, “*Matematik nedir? Ne yazık ki, bazıları “Matematik, matematikçinin yaptığı şeydir.” tanımını önermiştir. Peki, matematikçi nedir? “Matematik yapan kişilerdir.”* (s. 46) diye

yazmıştır. Peki, böylesi bir cevaptan sonra bu tanımı basitleştiren ama ‘ne yazık ki’ ifadesindeki sitemle birlikte de zorlaştıran nedir?

Tarihsel olarak, matematik uzun süredir yanılmaz derecede güvenli bilgi paradigması olarak görülmektedir (Ernest, 1998, s. 1). Matematik tarih boyunca mutlak doğru bilgi ile eş tutulmuştur. İbn Haldun (akt. Gür, 2019)’un ‘geometri ile uğraşan birinin zekâsı artar ve zihni kolayca hataya düşmez’ şeklinde anmış olduğu geometrinin gücüne olan inanç hala korunmaktadır. “Evrenin görünüşünün arkasındaki gerçekleri (ideaları) anlamak için matematik eğitimi almak gerektiğini düşünen Platon’un, Akademi adlı ünlü okulunun kapısına “Geometri bilmeyen girmesin.” diye yazdığı rivayet edilmektedir.” (Gür, 2019, s. 22). Platon (2013, s. 247) “Devlet” kitabında, “Geometriyle az çok uğraşmış insanların şuna karşı bir diyecekleri olamaz: Bu bilimin konusu onu kullananların sandıklarından çok ayrı bir şeydir.” demektedir. Bu tezin ilgililerinin de en azından hayatlarının bir döneminde matematikle alakadar olduklarını/olmak zorunda oldukları varsayıldığından matematiğin yaşamdaki varlığı belki de merak edilen ilk meseledir. Platon’dan yıllar sonra Cahit Arf ise “İnsanoğlu bir gün sonsuza dek yaşamayı matematikle bulacaktır.” demiştir. Literatür incelendiğinde, insanın kendini ve yaşadığı evreni anlama isteğinde matematiğe başvurduğu aşikârdır. Peki, ‘gerçekten’ matematik nedir?

Alman matematikçi ve filozof Gottfried Wilhelm Leibniz (akt. Gür, 2011, s. 1), “Matematik olmaksızın, felsefenin derinliklerine nüfuz edemeyiz. Felsefe olmaksızın, matematiğin derinliklerine nüfuz edemeyiz. İkisi olmaksızın, hiçbir şeye nüfuz edemeyiz.” diyerek matematik ve felsefenin birbirlerinden ayrı düşünülemez olduğunu vurgulamıştır. Bu çalışmanın da içeriğini oluşturan matematik felsefesi; matematikçileri, filozofları, matematik eğitimcilerini, matematik öğrenenleri, matematik ile ilgilenenleri ve matematiği bir şekilde çalışmalarında kullananları ilgilendirmektedir. Bir pür matematikçi olan Reuben Hersh’in gözünden bu konuyu ele almadan önce matematik felsefesinin ilgi alanının ve matematik felsefesindeki ekollerin neler olduğunun açıklanması amaçlanmaktadır.

2.2. Matematik Felsefesinin İlgi Alanı

İnsan savunmasız, donanımsız dünyaya gelir ve dünyaya uyum sağlayabilmesi için birtakım adaptasyonlar geliştirmesi gerekmektedir. Örneğin, pençe gibi bir donanımı yoktur ve böyle bir donanımı kullanmayı gerektirebilecek ihtiyaç halinde tabiatla hayatta kalma şansı oldukça düşüktür. İnsanın diğer canlılardan en önemli ayırt edici özelliği düşünebilmesidir. Eksik donanımlarla geldiği dünyanın ilk hallerini tasavvur etmeye çalışıp ve bir de şimdiye bakıldığında uyum sürecine ortak olan konumdan, bu süreci neredeyse belirleyen konumuna gelmiş denilebilir. İnsan, eksikliklerinin farkına varıp tamamlamaya çalıştıkça zihnini daha fazla çalıştırmak durumunda kalmıştır. Soru sorma, çözüm üretme, araştırma gibi becerileri zaman geçtikçe gelişmiştir.

Bugün bakıldığında birçok disiplin ile birlikte bireysel ve toplumsal sorunlar çözülmektedir. Olası sorunları çözümleyebilecek kapasitede bireyler yetiştirmek için de toplumlar tarafından eğitim-öğretim planlamaları yapılmaktadır. Bilgi ve beceri edinme sürecinin sistemli bir parçası olarak tanımlanabilecek okul hayatı boyunca belli temel disiplinleri öğrenmek üzere yola çıkılmaktadır. Tüm bunlar olurken aynı zamanda bireysel katılımla hem bireysel hem de toplumsal olarak davranışlar ve sözler de değişmekte ve gelişmektedir. İnsan, hayatının tümünde edindiği bilgi ve becerileri geliştirip aynı zamanda tüm bunlara “ben bunları nereden biliyorum?” diye de sorabilecek yegâne canlıdır. Haklılık payı olan bu soru ve daha fazlasının üzerine çalıştığı disiplin olan felsefe için; insanın yaşadığı zamanda düzene uyum sağlama ve bunu yönetme sürecinin ne olduğunu ve nasıl olması gerektiğini soran ve cevap vermeye çalışan bir düşünme disiplini, denilebilir. Ancak felsefenin tanımıyla ilgili olarak Cevizci (2007) şunları söylemektedir:

Felsefeyi bütün çağlar, bütün kültürler ve bütün filozoflar için geçerli olacak şekilde tanımlamak neredeyse imkânsızdır. Bununla birlikte, bu, felsefenin ne olduğunun ortaya konamayacağı, felsefeyle ilgili olarak belli bir kavrayışa hiçbir şekilde ulaşamayacağı anlamına gelmez. *Farklı felsefe tanımlarından ve anlayışlarından hareket etmek; filozof*

adı verilen kişinin nasıl anlaşıldığından yola çıkmakla mümkündür. (Cevizci, 2007, s. 13).

Filozof, “bilgelik” ya da “hikmet” diye tercüme ettiğimiz *sophia*’yı seven, onun peşinden koşan, belli bir bilgi ya da bilgeliğe sahip olan kişi olarak tanımlanabilir (Cevizci, 2007, s. 14). Filozofu ‘bilge kişi veya hikmet sahibi kimse olarak’ ve ‘bilgelik dostu olarak’ iki şekilde ele alan Cevizci (2007), “*filozof, bilgi ya da bilgeliğe sahip olmaktan ziyade, onu arayan; bir şeye sahip olmaktan ziyade, bir şey olma gayreti içinde olan; dolayısıyla, belli bir yere ulaşmış olmaktan çok “yolda olan” kişidir*” (s. 14) demektedir. “Alman filozof Karl Jaspers’e göre; felsefe yapmak, yolda olmaktır” (Cevizci, 2007, s. 14). Bu çalışmanın araştırma problemlerinin doğmasına neden olan bilgi ve birikim; en temelde matematiğin niçin öğrenildiği/öğretilmek zorunda olduğu sorularına cevap aramaktadır. Sorular “yolculuk” sırasında ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla yolda olmak, felsefe yapmayı gerektirmiştir.

Felsefe yaparken ortaya çıkan sorular temel olarak felsefenin ontoloji, epistemoloji ve aksiyoloji denilen üç ana kolunda meydana gelmektedir. Ontoloji (varlık felsefesi), varlığı kendinde ele alarak kaynağını, özünü, nitelik ve kategorilerini araştıran felsefe dalıdır (Hilav, 2011, s. 249). ‘Varlık var mıdır?’, ‘Varsa içeriği, mahiyeti nedir?’, ‘Varlığın türleri nelerdir?’, ‘Maddesel varlık var mıdır?’, ‘Ruh var mı?’, ‘Bu ikisi arasındaki ilişkiler nelerdir?’, ‘Hareket, oluş bir varlık mıdır?’, ‘Varlığın nedenleri yani yoktan varlığa, vardan yokluğa oluş mümkün müdür?’ ve bunun gibi sorular varlık felsefesinin problem alanlarını oluşturmaktadır (Hatipoğlu, 2018, s. 9). “Epistemoloji (bilgi felsefesi), felsefenin bilgiyi genel olarak ele alan, bilgiyle ilgili problemleri araştıran, bilginin imkânını, kaynağını, doğasını, doğruluğunu ve sınırlarını inceleyen dalını meydana getirmektedir” (Cevizci, 2007, s. 33). “Sadece ilmî metotların etüdünü veya sentezini değil; esas olarak ilkelerin, hipotezlerin, bilginin mantıkî kaynağını (psikolojik değil), değerini nesnel kapsamını, geçerliliğini tayine tahsis edilen çeşitli ilimlerin elde ettikleri neticelerin eleştirici etüdüdür.” (Bolay, 2013, s. 45). Epistemoloji; ‘Bilginin doğası nedir?’, ‘Bilginin kaynağı nedir?’, ‘Nereye kadar bilebiliriz?’, ‘Herhangi bir şeyle ilgili olarak gerekçelendirilmiş bir inanca sahip olabilir miyiz?’ (Cevizci, 2007, s. 36), ‘Bilgiye ulaşmak mümkün müdür?’ gibi sorular

sormaktadır. Aksiyoloji ise, bugün geçerli anlamıyla, değerler üzerindeki her çeşit düşünceyi ifade etmektedir (Bolay, 2013, s. 77). ‘Değerlerin kaynağı var mı?’, ‘Değerler içimizde mi, dışımızda mı?’, ‘Nesnel mi, öznel mi?’, ‘Sabit mi, değişken mi?’, ‘Ahlak nedir?’, ‘Ahlaki davranışın amacı nedir?’, ‘Her dönem toplumlar için mutlak değerler var mı?’ gibi sorulara cevap aramaktadır. Tablo 1’de bu felsefe alanlarının soruları özet halinde verilmeye çalışılmıştır.

Tablo 2.1. Felsefe alanları ve soruları.

Varlık felsefesi (Ontoloji)	Bilgi felsefesi (Epistemoloji)	Değer felsefesi (Aksiyoloji)
-Etrafımızda var olan ve duyularımıza konu olan şeylerin gerçekliği var mıdır?	-Bilgi nedir?	-Ahlaki davranışın amacı nedir?
-Etrafımızda sürekli değişen şeylerin ardında değişmeyen bir varlık var mıdır?	-Bilgiye ulaşmak mümkün müdür?	-İnsan davranışları özgür müdür?
-Varlığın başlangıcı ve sonu var mıdır?	-Bilginin kaynağı nedir?	-Kaynak ve özellikleri bakımından ahlak yasasının kabulü/reddi?
	-Bilginin değeri nedir?	

Felsefe, ulaşılan bilgi birikimine bağlı olarak her zaman bilim ve teknolojinin ilerisinde olmalı ve sorularını bilim ve teknolojik gelişmelere ışık tutacak nitelikte sormalıdır (Baki, 2014, s. 219). İnsanın soruları ve cevapları yaşam içerisinde üretilen ve edinilen bilgi ve teknolojilere yön vermiştir. Bilim ve teknolojideki üretim ve gelişim çağımızda eskiye göre oldukça hızlı ilerlemektedir. Felsefenin görevi herhangi bir bilim dalında bilgi üretmek, teoremler kurmak veya hipotezler test etmek değildir. Felsefe, bilimin üzerine ışık tutmaktır (Baki, 2014, s. 219). İnsanların problem çözme, akıl yürütme becerilerini kullanmaya başlamasından bu yana gelişen matematik ise bu süreçte halen başvurulacak ilk disiplin sayılabilir. Bu denli gelişim gösterirken matematik tarihine bakıldığında zaman zaman krizler yaşanmış, uzun süre doğru kabul edilen bilgiler üzerine yeniden düşünülmüştür. Matematğin kendi içerisinde yaşattığı sorgulama evreleri, onun doğruluğunun, kesinliğinin, evrenselliğinin ne olduğuna karar verilme sürecinin ürünleridir. Aynı zamanda “Düşünce tarihinde, yeni ve güçlü bir yöntemin belirmesi ve bu yöntemi kullanarak başa çıkılabilen problemler üzerine

yapılan çalışmaların büyük bir hızla gelişip tüm ilgiyi çekmesi, bu sırada, bunun dışındaki problemlerin göz ardı edilmesi ve hatta unutulmaya başlanıp küçümsenmesi sıklıkla yaşanmıştır” (Lakatos, 2017, s. 9). Dolayısıyla ayrı düşünülemez bir birliktelikle felsefe disiplini bu noktada matematiğin bu sürecine dâhildir ve bu iki disiplin beraber yer/yol alır.

Temel olarak varlık, bilgi ve değerler alanlarında sorulara cevap aranan felsefe içerisinde matematikle ilgili ortaya atılan sorular, matematiğin neliği, niteliği ve ne işe yaradığı hakkındadır. Birçok düşünöre göre, matematik felsefesi, matematiği anlama çabasıdır (Gür, 2019). Bir şeyi anlama çabasına girdiğimizde onun ne olduğunu (sıfırdan) en baştan öğreniriz veya o şey hakkında belli bir birikime sahip olduktan sonra ne olduğunu sorgulamaya başlarız. Matematik felsefesi hakkında bahsedilen bu çaba; matematikle ilgili belli bir birikime sahip olduktan sonra matematikçilerin, matematik öğretenlerin ve öğrenenlerin, uygulamalı matematik yapanların, kısacası en genel anlamda diyebiliriz ki matematiğe ilgi duyanların bile vermek isteyebileceği bir çabadır. Bir önceki paragrafta Lakatos’un bahsettiği süreç, anlamak için uğraş verdiğimiz tüm çabalarda yaşadığımız durumları güzel bir şekilde özetlemektedir. Bu durumlarda insan anlamaya çalıştığı şeyin nereden geldiğini, ne olduğunu, ne işe yaradığını, ne ifade ettiğini sorgulamaktadır.

Felsefî açıdan bakıldığında, matematiksel bilginin doğası belki de matematik felsefesinin dikkate alması ve üzerinde düşünmesi gereken temel özelliktir. Bununla birlikte, kilit mesele, matematik ve matematiksel bilginin "bir açıklamasının ne olabileceği" üzerine kafa yormaktır (Ernest, 1998, s. 50). Baki’ye göre (2014, s. 219) matematik felsefesinin işlevi, matematik yapmaktan çok mevcut matematiksel bilgi birikimi üzerine düşünmek ve onun evreni ve mutlak hakikati yakalamada ne anlama geldiğini açıklamaktır. Geleneksel olarak ontolojik ve epistemolojik açıdan matematik felsefesinde ‘Matematiksel bilginin doğası nedir?’, ‘Matematiksel nesnelerin doğası ve kaynağı nedir?’ gibi sorulara cevaplar aranmaktadır. Ancak, bu soruların cevapları matematiğin doğası hakkında açıklayıcı bir açıklama getirmeyecektir. Çünkü bu "iç" sorular, matematiği insan düşüncesi ve tarihinin daha geniş bağlamında bulamamaktadır. Böyle bir bağlam olmadan, Lakatos'a göre, matematik felsefesi

içeriğini kaybeder (Ernest, 1998, s. 51). Ernest (1998, s. 50; akt. Gür, 2019, s. 24), bu noktada bilim felsefesindeki “kural-koyucu” (*prescriptive*) ile “tanımlayan, açıklayan, tarif edici” (*descriptive*) arasındaki ayrımın iyi bir kavramsal araç olarak hizmet edeceğini önermektedir. Bir sonraki başlıkta ele alacağımız mantıkçılık, biçimcilik gibi matematik felsefesi ekolleri, matematiğin doğasına ilişkin kural-koyucu tanımlar vermeye çalışmaktadırlar (Gür, 2019, s. 24). Bu görüşler matematiğin ne olduğundan ziyade nasıl olması gerektiği üzerinde dururlar (Ernest, 1998, s. 50). Matematik felsefesinin kapsamı içinde sadece matematiksel bilgi ve ontolojinin gerekçelendirilmesinden çok daha fazlası olmalıdır. Matematik çok yönlüdür ve bir önermesel bilginin yanı sıra, kavramları, özellikleri, teorileri, tarihi ve uygulamaları açısından da tanımlanabilir (Ernest, 1998, s. 51). “Her sorunun potansiyel olarak matematik felsefesine meşru bir görev ve meydan okuma sunduğu iddiasıyla Ernest (1998, s. 51-52), matematik felsefesinin alanını genişleterek, şu 13 sorun ile ilgilenmesi gerektiğini belirtir” (Gür, 2019, s. 25):

1. Matematiksel bilginin gerekçelendirilmesi.
2. Matematiksel nesnelerin niteliği ve ontolojik konumu.
3. Matematiğin bizden ve zamandan bağımsız olduğunu ileri süren Platonculuğun bu kadar makul ve başarılı bir bakış olmasının nedenlerinin açıklanması.
4. Matematikçinin pratiği ile matematiğin kendi niteliğinin (ne olduğunun) ilişkisi.
5. Öznel matematiksel bilgi ile kabul görmüş matematiksel bilginin ilişkisi.
6. İnsanın mevcut matematiği nasıl öğrendiği.
7. İnsanın matematiksel bilgiyi yeni bir bilgiye nasıl dönüştürdüğü.
8. Matematiksel bilginin gelişimi.
9. Dil, matematik ve (kil tabletlerden bilgisayarlara kadar) bilgi teknolojilerinin birbiriyle ilişkisi.
10. Tarihin matematik felsefesini nasıl aydınlatığı.
11. Matematik ile diğer bilgi alanları, değerler, kültür ve tecrübe ilişkisi.
12. Saf (pür) matematiğin, bilim ve ‘gerçek’ hayatta uygulamalarının çok kullanışlı olmasının açıklanması.

13. Matematiksel bilginin nasıl değerlendirildiği veya takdir topladığı, değerlendirme sürecinde herhangi bir ölçütler topluluğunun olup olmadığı.

Ernest (1998, s. 52); bu soruların hepsinin benzersiz birer felsefe soruları olmadığını, çünkü bazılarının verilebilecek cevapların matematik tarihi, sosyolojisi ve psikolojisinde veya başka yerlerde de bulunabileceğini ifade etmiştir. Gür (2019) de matematik felsefesindeki sorunların iki ana başlık altında toplanabileceğini özetlemektedir:

Birincisi klasik olarak adlandırabileceğimiz matematiksel epistemoloji ve ontoloji ile ilgili matematiksel bilginin nasıl mümkün olduğu ve matematiksel nesnelerin varlığına ilişkin daha temel sorunlar. İkincisi birincisine nazaran oldukça daha ‘genç’ sayılan matematik ve insan etkileşimini konu edinen sorunlar ki bu sorunlar doğal olarak sadece matematikle veya felsefeyle ilgili değil, tarih, psikoloji, sosyoloji ve eğitim gibi beşeri bilimlere de ilgilendirir (s. 26).

Aşağıda Gür’ün özetlediğinden yola çıkarak Ernest’in 13 sorusunun daha önce açıklanan felsefe alanlarında nerede yer aldıklarını ifade eden tablo sunulmaktadır.

Tablo 2.2. Matematik felsefesinin ilgilenmesi gereken sorunların (Ernest, 1998, s. 51-52) felsefe alanları ile ilişkilendirilmesi.

Ontolojik Sorular	Epistemolojik Sorular	Aksiyolojik Sorular
1. Matematiksel bilginin gerekçelendirilmesi	4. Matematikçinin pratiği ile matematiğin kendi niteliğinin (ne olduğunun) ilişkisi	3. Matematiğin bizden ve zamandan bağımsız olduğunu ileri süren <u>Platonculuğun bu kadar makul ve başarılı bir bakış olmasının nedenlerinin açıklanması</u>
2. Matematiksel nesnelerin niteliği ve ontolojik konumu	5. Özne matematiksel bilgi ile kabul görmüş matematiksel bilginin ilişkisi	4. Matematikçinin pratiği ile matematiğin kendi niteliğinin (ne olduğunun) ilişkisi
3. <u>Matematiğin bizden ve zamandan bağımsız olduğunu ileri süren Platonculuğun bu</u>	6. İnsanın mevcut matematiği nasıl öğrendiği	9. Dil, matematik ve (kil tabletlerden bilgisayarlara kadar) bilgi teknolojilerinin birbiriyle

kadar makul ve başarılı bir bakış olmasının nedenlerinin açıklanması		ilişkisi
4. Matematikçinin pratiği ile matematiğin kendi niteliğinin (ne olduğunun) ilişkisi	7. İnsanın matematiksel bilgiyi yeni bir bilgiye nasıl dönüştürdüğü	12. Saf (pür) matematiğin, bilim ve ‘gerçek’ hayatta uygulamalarının çok kullanışlı olmasının açıklanması
7. İnsanın matematiksel bilgiyi yeni bir bilgiye nasıl dönüştürdüğü	8. Matematiksel bilginin gelişimi	13. Matematiksel bilginin nasıl değerlendirildiği veya takdir topladığı, değerlendirme sürecinde herhangi bir ölçütler topluluğunun olup olmadığı
8. Matematiksel bilginin gelişimi	11. Matematik ile diğer bilgi alanları, değerler, kültür ve tecrübe ilişkisi	
9. Dil, matematik ve (kil tabletlerden bilgisayarlara kadar) bilgi teknolojilerinin birbiriyle ilişkisi	13. Matematiksel bilginin nasıl değerlendirildiği veya takdir topladığı, değerlendirme sürecinde herhangi bir ölçütler topluluğunun olup olmadığı	
10. Tarihin matematik felsefesini nasıl aydınlattığı		

Not: Üçüncü maddede yer alan matematik felsefesi sorununda Platonculuğun “matematiğin bizden ve zamandan bağımsız olduğu” tanımı ontoloji, “Platonculuğun bu kadar makul ve başarılı bir bakış olması” özelliği ise aksiyoloji içerisinde değerlendirilmeye alınmıştır.

Tablo incelendiğinde, matematik felsefesinin ilgilenmesi gereken sorunların ontolojik ve epistemolojik olmasının yanında aksiyoloji kategorisinde de değerlendirilmesi gerektiği görülmektedir. Ancak burada önemli olan başka bir nokta ise, bazı sorunların sadece ontoloji (1, 2, 10), sadece epistemoloji (5, 6, 11), sadece aksiyoloji (12), hem ontoloji hem epistemoloji (4, 7, 8), hem ontoloji hem aksiyoloji (3, 4, 9), hem epistemoloji hem aksiyoloji (4, 13) veya üç kategoride de (4) yer aldığı görülmektedir. Dolayısıyla bir sorunun; tek boyutta ya da iki boyutta cevaplanması gerekirken, üç boyutta da cevaplanması gerektiği durumlar vardır. Bu mevcut durum, sorunların matematik felsefesi içerisinde sarmal yapıda olduğunu göstermektedir.

2.3. Matematiksel Nesneler ve Yapı

Hepimizin nasıl bir şey olduğu ile ilgili fikir sahibi olduğu, sürekli olmasa bile en azından bir aralık uğraştığı, sürekli uğraşanların ise doğal karşıladığı bir şeydir matematik. Ancak bunun anlamı ile ilgili düşünmeye başladığımızda büyük bir gizemin içine girmiş gibi hissederiz. Aslında kimsenin görmediği şeyler hakkında çalışıyorsunuzdur ve hatta asıl işi matematik olmayanların bile günlük yaşamda en çok başvurdukları alandır ancak matematik duyularımızla bile algılayamadığımız şeylerden oluşur. Bu ‘şeylere’ “matematiksel nesneler” diyeceğiz. Zaten bu terim mevcuttur. TDK sözlüğü nesne kelimesini, belli bir ağırlığı ve hacmi, rengi olan her türlü cansız varlık, şey, obje, şeklinde açıklamaktadır. Yani nesne, duyularımızla algılanabilir, varlıkları elle tutulabilir. Örneğin Şekil 2.1’de yer alan nesneye kalemlik diyoruz. Kalemligi, gözümüzle görebilir, elimizle tutabiliriz.



Şekil 2.1. Kalemlik.

“Matematiksel nesne” terimi, adı geçen nesnenin bir tür varlığı olduğuna işaret eder (Hersh vd., 2015, s. 158). Hatta başka bir kavram ‘matematiksel yapı’ terimine de matematiksel nesne diyebildiğimiz zamanlar vardır (Hersh vd., 2015). Önce matematiksel nesne kavramıyla başlayalım. Örneğin sayılar matematiksel nesnelerdir. Bu durumda 2 sayısına matematiksel bir nesnedir diyebiliriz. Ancak 2 nerededir? Şekil 2.1’deki kalemlüğün içerisindeki kalem sayısıdır, diyebiliriz. Bu durumda 2 deyince hepimizin aklında bu resmin canlanması gerekmektedir. Kalemlik dediğimiz zaman hepimizin zihninde sadece bu resimdeki kalemlik değil de şekilleri, renkleri, tasarımları farklı farklı şekillerde canlanan bir sürü kalemlik olacağı gibi, 2 deyince de hepimizin zihninde yalnızca bu kalemlüğün içerisindeki kalem sayısını düşünmeyeceğizdir. 2

kalem, 2 silgi, 2 el, 2 ayak, şekil 2, 2 kişilik masa, 2 ayaklı hayvanlar, 2 gün öncesi gibi ifadeler kullanırken “2” sayısı farklı anlamlar taşır. Tıpkı kalemlğin yeri gelince bir kitap tutacağı, yeri gelince bir bardak, yeri gelince hamur kesme aracı olarak kullanılabilmesi gibi “2” sayısı da kullanıldığı bağlam içerisinde farklı anlamlar taşıyacaktır. Aslında kalemlğe yaptığımız şeyi 2 sayısı için de yapıyoruz. Dolayısıyla “2” sayısını elle tutup, gözle göremediğimiz halde “varlığını” bilerek, kabul ederek ve hatta sorgulamadan bile kullanabiliyoruz. Ancak örneğin 48194011120187419312192019 gibi günlük hayat rutinimizde ilişkilendirmediğimiz bir sayı ile karşılaşsak bu varlık meselesi hakkında sorgulamaya başlayabiliyoruz (Hersh vd., 2015) Gerçekten de matematiksel nesneler var mıdır?

Diğer kavram olan matematiksel yapı terimi için ise 2 sayısının da içerisinde bulunduğu reel sayılar sistemi örnek verilebilmektedir. Reel sayılar sistemi içerisinde 2 ile ilgili toplama, çıkarma gibi işlemler yapabilir, ilişkiler oluşturabiliriz. Hersh ve diğerleri (2015, s. 156-157), matematiksel yapı ile ilgili şöyle açıklama yapmaktadırlar:

Matematiksel yapı, bu yapının taşıyıcısı olarak ele alınabilecek bir nesne kümesi, bu taşıyıcı üzerinde tanımlanmış işlemler ya da ilişkiler kümesi ve taşıyıcıda yer alan 0, 1 gibi belli birkaç eleman kümesinden meydana gelmektedir. Bu temel içerik öğelerinin yapının “imza”sını oluşturduğu söylenir ve bunlar genelde n-elemanlı formda sunulur. Örneğin, $\langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ toplama ve çarpma ile birleştirilen ve belli iki elemanı 0 ve 1 olan reel sayılar kümesi demektir. Matematiksel yapı, imzanın elemanlar üzerinde kurallar belirleyen aksiyom kümesine bağlı olduğu hâllerde meydana gelir.

Matematiksel nesne ile matematiksel yapı arasındaki ilişki için ise Hersh ve diğerleri (2015, s. 157-158) şöyle söylemektedirler:

Matematiksel nesne ve bir matematiksel yapı arasında var olan ayrım müphemdir. Bu ayrım zamana ve kullanıma bağlı görünmektedir. Matematiksel yapı uzun süre boyunca sık kullanılır ve deneyim ve sezgi ile desteklenirse o zaman kendisine nesne gözüyle bakılabilir. Yani yapı olan reel sayılar (R), reel sayı çiftleri oluşturmak için $R \times R$ doğrudan çarpımı alındığında nesne olarak değerlendirilebilir.

Yani, 2'nin içerisinde bulunduğu reel sayılar sistemi (R) matematiksel bir yapıdır, ancak $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ doğrudan çarpımında matematiksel nesne olarak alınabilir. 2'nin ne olduğuna ilişkin anlamı bulunduğu yapı içerisinde değerlendirilir. Tek başına düşünülen matematiksel bir nesnenin hiçbir anlamı yoktur. Matematiksel nesneler anlamını yapıdan alır ve rolünü de bir yapı bünyesinde oynar (Hersh vd., 2015, s. 158).

2.4. Matematik Felsefesi Tarihinde Yer Alan Düşünce Okulları

Hiç kimsenin şimdiye dek görmediği şeyler hakkında nasıl konuşabiliyor ve bunları nasıl günlük yaşamımızın elle tutulur cisimlerinden daha iyi anlayabiliyoruz? Aristoteles fiziği epeydir ölü olduğu hâlde, Euclid geometrisi neden hâlâ geçerli? Matematikte neleri biliriz ve bildiğimizi nasıl biliriz? (Hersh vd., 2015, s. 356). Hardy (1996), *Bir Matematikçinin Savunması* adlı meşhur eserinde “‘Gerçek matematik’ ve ‘gerçek matematikçi’ den; ‘gerçek şair’ veya ‘gerçek şiir’ den bahseder gibi bahsettim.” (s. 94) diye yazarken “gerçek” kelimesini sıfat olarak kullandığını belirtmektedir. Ancak devamında ‘fiziksel gerçek’ ifadesinde olduğu gibi bir de “gerçek” kelimesini isim göreviyle kullanarak açıklamaktadır:

Benim için ve sanırım çoğu matematikçiler için ‘matematiksel gerçek’ diye tanımlayacağım başka bir gerçek vardır. Bu matematiksel gerçeğin niteliği hakkında gerek matematikçiler gerek felsefeciler arasında herhangi bir uzlaşma yoktur. Bazılarına göre ‘zihinsel’ dir ve onu bir bakıma biz yaratırız; diğerleri ise onun bizim dışımızda ve bizden bağımsız olduğu kanısındadır (Hardy, 1996, s. 95).

Bu kısımda matematiğin ne olduğunu bir temele dayandırmak isteyen ana akımların anlatılması amaçlanmaktadır. Matematiğin ne ile ilgilendiği matematik felsefesinde önemli bir konudur. Platon (2013)’ün, *Devlet* adlı kitabında, “her zaman için var olanı bilmeye yarar, doğup öleni bilmeye değil” (s. 247) diye bahsettiği şey geometridir. Ona göre ‘ideal olanı’ anlamak için gereken cevaplar geometride aranmalıdır. Platoncu görüşe göre matematiksel nesneler bizden bağımsız şekilde evrende zaten vardır. Baki (2014, s. 224), Platonculuğu şu şekilde açıklamaktadır:

Yunan filozofu Platon duyularla algılanan bu âlemin mutlak gerçekliğin yansıması veya gölgesi olduğunu, idealar âleminin gerçek âlem olduğunu söyler. Bu görüş 25 asırdır düşünce dünyamızı etkileyen idealist felsefenin çıkış noktasıdır. Matematik felsefesindeki Platonculuğun temel iddiası matematiğin nesneleri bizden, dilimizden, uygulamalarımızdan bağımsızdır. Bu görüşe göre matematiğin nesneleri bizden bağımsız olduğu için soyut nesnel gerçeklerdirler, çünkü onlar idealar âleminde gerçek varlığa sahiptirler. Bu nesneler idealar âleminde oldukları için keşfedilmektedirler, dolayısıyla matematikçi tarafından yaratılmamışlardır ve değişmezdirler.

Platoncu matematikçinin görevi, matematik yaparken matematiksel nesne ve yapıları keşfetmektir. Örneğin matematikçi filozof Frege'ye göre, Pisagor teoremi zaman-üstü bir doğruluğa sahiptir; matematikçiler Pisagor teoremini keşfetmeden önce bile, o bir gezegen gibi eskiden beri vardı (Gür, 2019, s. 31).

Diğer taraftan biçimciliğe göre, matematiksel nesneler mevcut değildir (Hersh vd., 2015, s. 357). Matematik formüllerden oluşmaktadır ve matematikçi bu formülleri icat eder. Formüller herhangi bir anlamı olmayan sembollerdir. “Bir formül fiziksel anlamda yorumlandığında anlam kazanır ve doğru ya da yanlış olarak değerlendirilebilir hâle gelir. Fakat bu doğruluk ya da yanlışlık sadece özel fiziksel yorumla alakalıdır.” (Hersh vd., 2015, s. 357). Matematiksel nesneler soyut nesnelerdir ve matematiğin tümü tutarlılık içerisinde değerlendirilir.

“Bu konuda yazarların çoğu, tipik çalışan bir matematikçinin hafta içinde Platoncu ve hafta sonunda biçimci olduğu konusunda anlaşır. Bir başka deyişle matematik yaparken, özelliklerini belirlemeye çalıştığı bir nesnel gerçeklikle uğraştığına inanmaktadır. Fakat sonra gerçekliğinin felsefi bir tanımını yapması istendiğinde, hiç inanmıyormuş gibi davranmayı daha kolay bulur” (Hersh vd., 2015, s. 359). Platoncular matematiksel nesneleri zaten var kabul ederler ve bunlarla işlemler yapabilirler, hipotezler test edebilir, teoremler oluşturabilirler. Biçimciler de bunları yaparlar ancak Platoncuların zaten var dediği matematiksel nesneleri kendileri icat ettiği zaman. “Gerçeklik ve varoluş sorusunda Platoncular ve biçimciler karşı taraflardadırlar ama

matematiğin pratiğinde hangi düşünme ilkelerinin kullanılacağı konusunda anlaşmazlığa düşmezler. Her ikisine de karşı olan ise oluşturmacılar. Oluşturmacılar gerçek matematiğin, sadece sınırlı inşalarla elde edilebilenler olduğuna inanır.” (Hersh vd., 2015, s. 358). 19. yüzyıl sonlarında ortaya çıkan bir matematik felsefesi ekolü olarak; bütün matematiksel doğruların, sadece aksiyom ve mantıksal çıkarım kullanılarak elde edebileceği görüşüne sahip olan mantıkçılar da vardır. Mantıkçılık, katıksız (pür) matematiğin, mantığın bir kolu olduğunu iddia eden bir düşünce okuludur (Gür, 2019, s. 42).

Genel hatlarıyla buraya kadar bahsedilen bu dört ekol, daha önce de açıklandığı gibi, matematiğin nasıl olması gerektiğini açıklayarak matematiği “kural-koyucu” (prescriptive) şekilde tanımlamaya çalışmaktadırlar. Bunların hepsi de matematiğin evrensel olduğuna, ortaya koyduğu bilginin de kesin ve tutarlı olduğuna inanan mutlakçılardır (Baki, 2014, s. 222). Ancak Ernest (1998, s. 51), matematiğin çok yönlü olduğunu vurgulayarak, bir öneri bilgisinin yanı sıra kavramları, özellikleri, teorileri, tarihi ve uygulamaları açısından da tanımlanabileceğini ifade etmektedir. Bu dört ekolün yanı sıra matematik felsefesi başka düşünce okullarını da barındırmaktadır. Matematik felsefesindeki hareketlilik, matematik felsefesi tarihinin doğrusal bir şekilde gelişmediğini göstermekte ve bütüncül/nesnel bir özetin verilmesini imkânsızlaştırmaktadır (Gür, 2019, s. 33). Literatürü incelediğimizde karşımıza birçok başlık çıkmakta ve bunlar matematik felsefesi tarihi içerisinde kesin çizgilerle belirlenmemektedir. Bu amaçla matematik felsefesindeki ana akımların ‘Mutlakçılık’ ve ‘Modern Matematik Felsefesi’ şeklinde iki büyük başlık altında bütüncül bir şekilde incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu başlıklar da özel olarak görüşlerin sunulduğu alt başlıkları barındırmaktadır.

2.4.1. Mutlakçı düşünce okulları

2.4.1.1. Platonculuk

“Monk (akt. Hersh vd., 2015)’a göre, matematik dünyası %65 oranında Platonculardan, %30 oranında biçimcilerden ve %5 oranında oluşturmacılar oluşmaktadır. Tipik bir matematikçi, hem Platoncu hem de gizli bir biçimcidir ya da olaylar gerektirdiğinde biçimci maskesi takınan gizli bir Platoncu. Oluşturmacılar ise oldukça nadirdir” (s. 360).

Tabiata bakıldığında birçok örüntü fark edilebilir. Ayçiçeği çekirdeklerinde, bal peteklerinde, örümcek ağlarında ve daha birçok varlık üzerinde hayrete düşülecek derecede düzenler keşfedilebilir. Bu hayret dolu yaklaşımlar, matematiğe ve matematiğin ilgilendiği konulara da yansımıştır. Altın oran, π sayısı gibi kavramların ortaya çıkmasında doğadan alınan ilhamın değeri yadsınamaz. Bu düşünceler sizi matematikte nesnelerin bizden bağımsız şekilde evrende zaten var oldukları fikrine götürmektedir. Yapılacak aslı işin ‘keşfetmek’ olduğu düşüncesi hâkimdir. Platonculuk denilen bu yaklaşım, matematiğe çok az ilgi duyan, matematiği az miktarda yapabilen, bildiklerini nasıl bildiğini açıklama gayreti istendiğinde en hızlı şekilde cevap vermek isteyen insanların en çok başvurduğu düşünce okulunun ismidir. “Realizm, soyut nesneleri somut nesneler gibi matematiksel gerçekliğin bir parçası sayar” (Yıldırım, 2015, s. 57). Dolayısıyla π sayısı soyut bir nesne olmasına rağmen π sayısının ‘varlığı’ bizden bağımsız bir nesne olarak gerçekliği ‘evrenseldir’.

Bir Matematikçinin Savunması kitabında, “Benim inancıma göre, matematiksel gerçeklik bizim dışımızdadır; bizim işlevimiz onu bulup çıkarmak ya da *gözlemektir*; ispatladığımızı veya tumtutarlı sözlerle *yarattığımızı* söylediğimiz teoremler; gözlemlerimizden çıkardığımız sonuçlardan ibarettir.” şeklinde yazan Hardy (1996, s. 95), Platoncu görüşü benimsemiştir. “Bernard Russell realist döneminde bu görüşü son derece açık bir dille ortaya koymuştur: “Aritmetik, Kolomb’un Amerika’yı keşfi anlamında bir keşiftir. O nasıl Kızılderilileri yaratmadıysa, biz de sayıları yaratmış değiliz. ... Bir şey var olduğu için düşünülebilir; var olma düşünülmüş olmanın sonucu değil, ön-koşuludur” (Russell, 1901; akt. Yıldırım, 2015, s. 57).

Pisagorculara göre her şey sayıdır. “Bütün yönleri itibarıyla evren, sayılar ve sayıların kendine has özellikleriyle yönetilir.” (Hersh vd., 2015, s. 105). Bu inancı sayı mistisizmi kavramıyla tanımlayabiliyoruz ancak “sayı mistisizminin Pisagorcular ile başlamadığı bilinen bir vakıa olsa da Pisagorcuların birçok mistik öğretiye sahip oldukları bilinmektedir” (Aczel, 2000; akt. Gür, 2019, s. 34). Her çağda ve her kültürde sayı mistisizmi ile olayların gizemleri çözülmeye, hastalıkların önlenmesine ve tedavi edilmesine çalışılmış, sayılar ve olayların ilişkisi inançları yönetmiştir. Sözelimi batı toplumlarında 13 sayısı uğursuz, Çinliler için 8 uğurlu bir sayıdır.

“Platoncu realizmde sayı türünden soyut nesneler, olgusal dünya ile nedensel ilişkisi olmayan, varlığı düşüncemizden bağımsız yetkin “form” ya da “idea”lardır. Bunlara ilişkin bilgimiz algıdan değil, aklın daha önce “idealar dünyası”nda kazanmış olduğu deneyimden kaynaklanır” (Yıldırım, 2015, s. 57). “Platonculuk, ontolojik realizm veya sadece realizm olarak da anılmaktadır. Bu terimler arasında ayrıma giden yazarlar da vardır. Literatürde bu terimler sıklıkla birbirinin yerine kullanıldığı için, burada biz bir ayrıma gitmeyeceğiz ve ‘Platonculuk’ olarak kullanacağız” (Gür, 2019, s. 31). Yani, Platon’a göre akıl ile idealar dünyasına ulaşılabilirdi ve bunun merkezinde geometri vardı. “Geometri rasyonalist felsefeciler Spinoza, Descartes ve Leibnitz için de benzer bir görev görmüştü. Platon gibi rasyonalistler de muhakeme yetisinin - bununla gerçekler gözlemden bağımsız şekilde a priori olarak algılanabilir- insan zihninin doğuştan gelen bir özelliği olduğunu düşünmekteydi” (Hersh vd., 2015, s. 364). “Matematiksel objelerin insan aklından bağımsız bir fikir âleminde var olması Newton ve Leibnitz için hiç de zor değildi. Hristiyan olarak İlahi Aklın varlığını kanıksamışlardı. Bu bağlamda sayı ve geometrik form gibi ideal objelerin var olması problem değildir” (Hersh vd., 2015, s. 365). Buna karşı olan görüş ise deneyimsel bilginin önemini vurgulayan Aristoteles’in tohumlarını oluşturduğu ampirizmdir. En önemli temsilcileri Locke, Berkeley, Hume ve S. Mill’dir. Örneğin “S. Mill’e göre, matematiksel bilgiyi elde etme yöntemi, temelde fizik gibi diğer tür bilgi edinme yöntemleri ile aynıdır, dolayısıyla matematiğin herhangi ciddi bir üstünlüğü yoktur. Mill’in görüşleri kendi çağında çok fazla revaç bulmamış olsa bile günümüzde kimi filozoflar Mill’in görüşlerini ciddiye almaktadırlar” (Shapiro; akt. Gür, 2019, s. 38-39).

On sekizinci yüzyılın sonlarına doğru klasik felsefenin doruk noktası, birbiriyle çelişkili olan rasyonalizm geleneği ile ampirizm geleneğini birleştirmeye çalışan Kant’la ortaya çıkmıştır. Kant’ın metafiziği Platon’un mirasının devamıdır: İnsan bilgisinde kesinlik ve zamansızlık arayışının. Kant, Hume’nin insan bilgisinde kesinliğin eleştirisine karşılık bulmak istiyordu. Yalnız akılla idrak edilebilenler -yani kendilerindeki şeyleri hiç bilemeyeceklerimiz- ile görünüşler -bize duyu algılarımızın anlattıkları- arasında kesin bir çizgi çizdi. Ama bütün dikkatli kuşkuculuğuna rağmen Kant’ın en büyük endişesi a priori bilgilerdi: Zamandan ve deneyimden bağımsız olan bilgiler. İki çeşit a priori bilgi belirledi. ‘Analitik a priori’, mantıksal analizle, kullanılan terimler itibarıyla doğru olduğunu bildiğimiz şeylerdi. Kant, rasyonalistler gibi, sadece mantıki olarak gerçek olmayan başka bir tür a priori bilgiye daha sahip olduğumuzu düşünüyordu. Bu ‘sentetik a priori’dir. Kant’a göre, uzay ve zaman hakkındaki öz sezgilerimiz böyle bilgilerdir. Bu öz sezgilerin insan aklının içsel bir parçası olduğunu öne sürerek bunların a priori doğasını açıklar. Bizim zaman bilgimiz sıralılık sezgisine dayalı olan aritmetikle sistemleştirilmiştir. Uzay hakkındaki bilgilerimiz de geometriyle sistemleştirilmiştir. Platon için neyse Kant için de sadece bir tür geometri vardır: Bizim, geometri diye adlandırılan diğer kavramsal sistemlerden ayırt etmek için Euclid geometrisi dediğimiz geometri. Geometrinin ve aritmetiğin gerçeklikleri bize aklımızın çalışma şekli yüzünden kabul ettirilmiştir. Bu, onların neden deneyimden bağımsız ve varsayıldığı gibi doğru olduğunu açıklar. Geometrinin ve aritmetiğin temeli olan uzay ve zaman hakkındaki öz sezgilerimiz, her insan aklı için evrensel olarak geçerli olmaları yönünden nesneldir. İnsan aklının dışında var olması yönünden hiç iddiada bulunulmamıştır ama Euclid miti Kant felsefesinin merkezî bir ögesi olarak kalır. A priori Kant dogması, yirminci yüzyılın ortalarına kadar matematik felsefesi üzerinde baskın bir etkiye sahip olmuştur. Üç temelci ekolün hepsi de matematiğe Kant’ın isnat ettiği özel rolü korumaya çalışmıştır (Hersh vd., 2015, s. 367-368).

“Matematik duyu deneyiminden, ebedî ve zaruri hakikatlerden bağımsız bilginin en belirgin örneği” (Hersh vd., 2015, s. 363) olarak, belki de kendisine en çok yanılmaz, en kesin gözüyle bakılan disiplindir. Reuben Hersh, ‘Euclid Miti’ kavramını şöyle açıklamaktadır: “Euclid’in kitaplarının, evren hakkında açık ve yalanlanamaz gerçekler içerdiğine yönelik inançtır” (Hersh, 1997, s. 135; Hersh vd., 2015, s. 363). TDK sözlüğünde mit kelimesi, efsaneleşen kavram veya kişi, şeklinde tanımlanmaktadır. Halen ders kitaplarında en temel geometri bilgisi olarak öğretilen

Euclid geometrisi büyük ve önemli bir efsanedir. “Euclid geometrisi, biçimselleşmiş tümdengelim sisteminin ilk örneğidir ve bu türden diğer bütün sistemlere model olmuştur” (Hersh vd., 2015, s. 7). Euclid’in “Elementler” adlı önemli eseriyle bunları ortaya koyması, “asırlar boyunca matematiğin sarsılmaz mutlak doğru olduğu inancı ile eş anlamlı olarak kullanılmıştır” (Gür, 2019, s. 35). “Euclid’in kurduğu sistemin yüzyıllar boyunca mutlak doğru gibi görünmesine rağmen ancak modern zamanlarda bu sistemde gedikler olduğu anlaşılmıştır” (Barker, 1964; akt. Gür, 2019, s. 35). Tarihte bu durumun yaşandığı özellikle ilk zamanlarda matematiğin kesinliğine olan inancı, mutlak olduğu bilgisi zedeleneyeceğinden sistemdeki gedikleri fark etmek veya söylemek büyük bir cesaret idi. Ancak bu ve buna benzer durumlar matematikteki gelişmelerin dönüşümünde önemli dönüm noktalarıdır. Matematik tarihi içerisinde “matematikte bunalımlar” başlığı altında bahsedilen bu dönüm noktalarından biri de Beşinci Postulat sorunu idi.

1. Herhangi bir noktadan başka herhangi bir noktaya bir doğru çizilebilir.
 2. Bir doğru istenildiği kadar yine bir doğru olacak şekilde uzatılabilir.
 3. Herhangi bir merkez ve bir uzunluk verildiğinde bir çember çizilebilir.
 4. Bütün dik açılar birbirine eşittir.
 5. Eğer bir doğru, iki doğruyu kestiğinde bu doğrunun aynı tarafındaki iç açılar iki dik açıdan küçükse, bu iki doğru o yönde uzatıldıklarında kesişir.
- (Sertöz, 2018, s. 2).

Ön doğru (TDK) anlamına gelen postulatlar, Euclid’in kurduğu bu sistemde tartışmasız kabul edilen önermelerdi ve tüm sistemin inşasında temel olarak görev yapmaktaydılar. “İlk dört postulat açık ve yalın bir şekilde ifade edilirken, beşinci postulat karmaşık ve çetrefil bir cümlede dile getirilmiştir. Sonra, diğer postulatların apaçık görünen doğruluğunu bu postulatla bulmamaktayız. Her iki yönden de önerme bir postulat olmaktan çok ispata muhtaç herhangi bir önerme görünümündedir” (Yıldırım, 2015, s. 34).

“Doğruluğu belli gerçeklerden başlayıp kesin kanıtlarla ilerleyen Euclid kesin, nesnel ve sonsuz bilgilere varmıştır” (Hersh vd., 2015, s. 363). “Metafiziksel felsefenin

yani evrenin doğası hakkında a priori kesinlikler belirlemeye çalışan felsefenin en önemli destekleyicisi” (Hersh vd., 2015, s. 363) olan Euclid’e olan inanç, on dokuzuncu yüzyılın ortalarına veya sonlarına kadar tartışmasız sürmüştür.

Euclid’in beşinci postulatında yer alan karmaşık ifadeler, önermenin postulat niteliği taşımadığının düşünülmesine yol açmıştır. Önermenin teorem olarak ispatlanması ya da daha temel ve açık görülen eşdeğer bir önerme ile değiştirilmesi gerekliliğini oluşturmuştur. 19. yüzyıla gelinceye dek beşinci postulatın “ispatı”, ya da hiç değilse daha basit ve açık başka bir önermeyle değiştirilmesi yolunda; Proclus, Ptolemy, John Wallis (1616-1703), 13. Yüzyılda yaşayan İranlı astronom ve matematikçi Nasr-ed-din gibi isimler ve daha birçok matematikçi pek çok girişimlerde bulunmuştur. Seçenek olarak ileri sürülen önermeler arasında en çok tutulana İskoç matematikçisi John Playfair (1748-1819)’e ait olandır: Modern ders kitaplarının hemen hepsinde yer alan bu önerme şöyle dile gelmektedir: Bir çizgi dışındaki herhangi bir noktadan o çizgiye bir, yalnızca bir paralel çizgi vardır. Proclus’un çalışmasında benzer bir önermeye yer vermesine rağmen; önermenin paralel postulat kimliğiyle yaygınlık kazanması Playfair’e aittir (Yıldırım, 2015, s. 34-35).

“Beşinci postulat” matematik tarihi boyunca değişim ve gelişimler göstermiştir. 1733’te İtalyan Jesuit papazı Girolamo Saccheri (1667-1733)’nin çalışmasının açıklanmasıyla yeni bir döneme girmiştir. Saccheri, olmayana-ergi yöntemini kullanarak Euclid’in beşinci postulatının yarattığı sıkıntıları gidermeye çalışır ancak çelişki elde edemez. Yine de “...kesinlikle yanlış olduğunu biliyorum...” ifadesini söyler” (Yıldırım, 2015, s. 36-37). “Saccheri farkında olmaksızın Euclid-dışı bir geometriye ulaşmıştı; ama onun durumu, bulduğu pırlantayı cam parçası sanan birine benziyordu” (Yıldırım, 2015, s. 37). Uzun yıllar boyunca paralel postulatın sorunu çözülememiştir. Ancak bu postulatın diğer postulatlardan bağımsız olabileceği şüphesi ilk kez büyük Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss (1777-1855)’ta kendini göstermektedir. (Yıldırım, 2015, s. 38). Aynı zamanlarda ama farklı yerlerde yaşayan Macar matematikçi Janos Bolyai (1802-1860) ve Rus matematikçi N. I. Lobachevsky (1792-1856)’de de aynı düşünce vardır. Bolyai’nin babası, Gauss ile arkadaşır ve oğlu için matematik dersi vermesini ister ancak Gauss reddeder. Bundan sonra subay olarak orduya katılan Janos Bolyai’nin matematiğe olan ilgisi devam etmiştir. Bolyai, üçgenin

iç açıların toplamının 180 dereceden küçük olduğu geometriyi araştırmaya başlamıştır. Yaptığı çalışmalar 1831’de yayımlanmış ve babası bir kopyasını Gauss’a yollamıştır. Gauss, çalışmaların doğruluğunu beyan etmiş ancak Bolyai’e övgü yazmamıştır. Üzülerek kendisinin de aslında zaten böyle bir çalışma yaptığını övmesi gerekenin, daha önce bulduğu için, kendisi olduğunu yazmıştır. Janos Bolyai ise üzülmüştür ve araştırmasını bir daha yayımlatmaya çalışmamıştır. Çünkü bu süreçte bir de kendisinden iki yıl önce yayımlanmış çalışmasıyla Lobachevsky de aynı fikri paylaşmıştı (Sautoy, 2008).

Gauss, Bolyai ve Lobachevsky aynı zamanda farklı yerlerde yaşamış ancak aynı fikir üzerinde çalışmış matematikçilerdi. Euclid-dışı geometri düşüncesine ilk ulaşan matematikçilerin Gauss ile Bolyai olduğu bilinmekle birlikte, bu tür bir geometriyi ilk gerçekleştiren kişi Lobachevsky’dir. Lobachevsky’nin oluşturduğu yeni geometride Euclid’in beşinci postulatı yerini şu postulata bırakmıştır: bir düzlem üzerinde bulunan m doğrusu dışındaki P gibi bir noktadan m doğrusuyla kesişmeyen birden fazla doğru geçer. Gauss, Bolyai ve Lobachevsky’nin oluşturduğu Euclid-dışı geometri literatürde “hiperbolik geometri” diye geçmektedir (Yıldırım, 2015, s. 39). Bu çalışmalar devrim niteliğindedir ama değerleri çok sonra anlaşılmıştır.

19. yüzyılda yaşayan Bernhard Riemann, çocukluğunda *Sayı Teorisi Hakkında Her Şey* kitabını okuyup anlamıştır. Bu kitabın yazarı ise paralel postulatı ispatlamaya çalışmış Fransız matematikçi A. M. Legendre (1752-1833)’dir. Riemann’ın matematiğe yaptığı en büyük katkılardan birinin 1852 yılında, kendisi 26 yaşındayken, gerçekleştirilen konferansta geometrinin temellerini açıklaması olmuştur. Riemann geometrisi, eliptik geometri diye de bilinmektedir. Ancak o dönemde devrim niteliğindeki açıklamaları anlaşılamamıştır. Kendisinden 50-60 yıl sonra yaşamış Einstein görelilik teorisini kurmada, Riemann geometrisinden yararlanmıştır. Eliptik geometrinin içerdiği uzay yorumuna ilişkin Einstein (akt. Yıldırım, 2015, s. 42)’in şu sözleri ilginçtir: “Bu yoruma büyük önem veriyorum. Ondan haberim olmasaydı, genel rölativite teorisini hiçbir zaman geliştiremeyecektim.” Euclid-dışı geometrilerin varlığının anlaşılması, matematiğin temelleri hakkında tartışmalara yol açmıştır.

2.4.1.2.Mantıkçılık

Asırlar önce, Pisagorcular arasında $\sqrt{2}$ sayısının keşfinin doğurduğu tedirginlik geometriye olan ilginin artmasına neden olmuştu. 19. Yüzyılda ise geometrideki kesinliğin azalması, bütün matematikteki kesinliğin azalması tehlikesini doğurdu (Gür, 2019, s. 39). “On dokuzuncu yüzyılın matematikçileri bu zorluğa göğüs gerdiler, Dedekind ve Weierstrass önderliğinde, matematiğin temeli olarak geometriden aritmetiğe geçiş yaptılar. Bunu yapmak için doğrusal sürekliliğin inşasını yani reel sayı sisteminin 1, 2, 3, ... tam sayılarından nasıl inşa edilebileceğini ortaya koymak gerekmektedir. Dedekind, Cantor ve Weierstrass’ın reel bir sayıyı tanımlamak ya da inşa etmek için rasyonel sayıların bir sonsuz kümesini kullanmak gerekiyordu. Böylece analiz ve geometriyi aritmetiğe indirgeme çabasında sonsuz kümeler matematiğin temellerine dâhil edildi” (Hersh vd. 2015, s. 369). Özellikle Cantor’ın çalışmaları matematik felsefesini derinden etkilemiştir. Georg Cantor (1845-1918), kümelerin farklı sonsuz büyüklüklere sahip olduğunu ispatlayarak, sonsuzluğu derecelendirmeyi başarmıştır (Barker, 1964; akt. Gür, 2019, s. 40).

Küme -yani farklı objelerin rastgele bir araya gelişi- fikri o kadar basit ve temeldi ki tüm matematiğin kendisinden inşa edilebileceği yapı taşı görevini pekâlâ üstlenebilirdi. Frege, küme teorisinin işlemlerini kullanarak hiçbir şeyden -yani boş kümeden- doğal sayıların inşa edilebildiğini gösterdiği için, aritmetik bile artık temel yapıdan ikincil seviyede olan bir yapıya indirgenebilirdi (ya da yükseltilebilirdi). Önceleri, küme teorisi mantığın neredeyse aynısı gibi gözüktü. Küme teorisinin içerme bağıntısı yani A’nın B’nin altkümesi olduğu, mantıksal gerektirme bağıntısı olarak her zaman “A ise B olur.” şeklinde yeniden yazılabilirdi. Bu nedenle küme teorisi mantığı tüm matematiğin temeli olarak hizmet edebilirdi. Bu bağlamda yorumlandığı şekliyle “mantık”, muhakeme kurallarının ve evrenin temel ilkelerine işaret eder. Çelişki yasası ve gerektirme kurallarına nesnel ve şüphe edilemez nazarıyla bakılıyordu. Tüm matematiğin sadece mantık yasalarının detaylandırması olduğunu göstermek, matematiğin geri kalan bölümlerine mantığın şüphe edilmezliğini aktarmak yoluyla Platonculuğu doğrulamak olurdu. Bu, Russell ve

Whitehead tarafından *Principia Mathematica*'da takip edilen “mantıkçı program” idi. Bütün matematik küme teorisine indirgenebildiğine göre, dikkate alınması gereken tek şey küme teorisinin temelidir. Buna rağmen görünürde şeffaf olan küme kavramının beklenmedik tuzakları olduğunu yine Russell'in kendisi keşfetti (Hersh vd., 2015, s. 369-370).

Burali-Forti'nin, 1897 yılında ortaya attığı paradoks, küme kuramı hakkında bazı şeylerin yanlış olduğu izlenimini vermiştir. Cantor da benzeri bir paradoksa kendi çalışmalarında ulaşmıştır. Ne var ki paradoks en meşhur halini 1902 yılında Russell'in elinde alacaktır. Bu paradoks yine Zermelo tarafından bağımsız olarak bulunmuştur. Bu paradoksların ortak özelliği, ‘kümelerin kümesi’ kavramının paradokslara yol açmasıdır.” (Gür, 2019, 40). “Russell paradoksunu anlatmak için bir “R-kümesi”ni “kendisini içeren bir küme” olarak tanımlarız (Örnek olarak “tam on bir İngilizce kelime ile tanımlanabilen tüm nesnelerin kümesi” verilebilir). Şimdi de farklı bir M kümesini ele alınız: Elemanları, R-kümeleri haricindeki olası tüm kümeleri içeren küme. M acaba bir R kümesi midir? Hayır. M acaba bir R kümesi değil midir? Yine hayır. Çıkarılacak ders: Tanımı karmaşık ama biraz hileli görünen M kümesi, kendisiyle çelişmekte olan bir kümedir (Hersh vd., 2015, s. 370).

Russell'in bu örneği Gottlob Frege (1848-1925)'ye göndermiştir. Frege (Hersh vd., 2015, s. 370), o sıralarda yayımlamak üzere olduğu çalışmasına şöyle bir dipnot eklemiştir: “Bir bilim adamı, tam da iş biterken temellerin çökmesinden daha nahoş bir şeyle karşılaşamaz. Bay Bertrand Russell'in gönderdiği bir mektup yüzünden, çalışma matbaadan neredeyse çıkmışken bu duruma düştüm.” Çünkü Frege'nin çalışmasının kalbinde kümeler kuramı vardı.

“Russell paradoksu ve diğer çelişkiler/antinomiler sezgisel mantığın klasik matematikten daha güvenli olmak yerine, daha riskli olduğunu gösterdi. Çünkü aritmetik ya da geometride hiç rastlanmayan türde çelişkilere neden olabiliyorlardı. Bu durum, yirminci yüzyılın ilk çeyreğindeki ünlü ihtilafların odağı olan “temeller krizi” idi. Buna karşın üç esas çözüm önerildi” (Hersh vd., 2015, s. 370-371): Mantıkçılık, oluşturmacılık ve biçimcilik.

Mantıkçılık düşüncesinde, matematik mantık demektir. “Amaç mantığı kullanarak, matematiği kesin biçimde tanımlanmış çıkarsama kurallarına ve aksiyomlara dayandırmaktır. Frege, “*Die Grandlagen der Arithmetik*” ile aritmetiği, Russell ise “*Principia Mathematica*” ile tüm matematiği mantığa indirgeme çabası içerisine girmiştir. Frege ve Peano gibi matematikçiler, aritmetiğin tüm kavramlarının mantık terimleri ile ifade edilebileceğini göstermeye çalışmıştır” (Baki, 2014, s. 233).

Frege’ye göre sayılar, soyut düşüncelerdir. Öyle ki bu soyut düşünceler, doğmayan ve ölmeyen, değişmeyen, bizden bağımsız nesnelerdir. Sayılar, denklik sınıflarının sınıfıdır. Örneğin iki sayısı bütün çiftlerin sınıfıdır (Hersh, 1997, s. 145). Bu yüzden Frege’ye göre aritmetik, Kant’ın iddia ettiği gibi zaman sezgisine dayalı *sentetik a priori* değil, mantığa dayanan *analitik a priori*dir. (Gür, 2019, s. 42-43).

Bugün matematik biliminin ulaşmış olduğu bilgi birikimi ve uğraş alanları düşünüldüğünde matematik evinin kurulmasında mantığın tek başına yeterli olmadığı görülmektedir. Özellikle, Gödel’in 1931 yılında yayımlandığı eksiklik teoremi ile birlikte matematikçilerin matematiğe bakışları değişmiştir. Başlangıçta matematikçileri şoka uğratan bu teorem zaman geçtikçe matematikçilerin matematiğin kesinliği, doğruluğu ve kendi içinde tutarlılığı ile ilgili inançlarını değiştirmiştir. Matematiğin ulaşılan bilgi birikimi, yapıları, problemleri mantığın dışında başka malzemelerin, araçların ve tekniklerin kullanılmasını gerektirmektedir. Russell matematiği tutarlı bir bilim dalı haline getirme uğruna yaptığı mantığa indirgeme çalışmalarını sonunda kaplumbağanın sırtına bir fili yerleştirmeye benzetmiştir (Baki, 2014, s. 235).

2.4.1.3.Oluşturmacılık

“Oluşturmacılığın iki tanınmış lideri L. E. J. Brouwer ile öğrencisi A. Heyting’dir. Brouwer’in 1907’de yayımlanan çalışması bu yolda ilk önemli adım olmakla birlikte, bu düşüncenin kökenini Kant’a, hatta Antik Yunan dönemine uzatanlar da vardır” (Yıldırım, 2015, s. 97). Oluşturmacılık, matematiği çelişkilerden ve

anlamsızlıklardan kurtarmak için matematiği yeniden inşa etme gayesi ile yola çıkmıştır (Gür, 2019, s. 47). “Kavram ve çıkarımlara somut içerik sağlayan bir sezgiyi matematiğin tek geçerli yöntemi sayan bir görüşü temsil etmektedir” (Yıldırım, 2015, s. 97).

Matematiğin sınırlı inşalarla elde edilebileceğini düşünen oluşturmacılar için “klasik matematikte geçerli sayılan pek çok ispatın bu ölçüte uymaması nedeniyle geçersiz sayılması gerekmektedir” (Yıldırım, 2015, s. 97). “Cantor’ın reel sayıların ispatı türü inşa edilemeyen ispatları ve Aritoteles’ten beri yürürlükte olan üçüncü seçeneğin olanaksızlığının kullanıldığı ispatları reddederler” (Gür, 2019, s. 47). “1960’lı yılların sonunda Bishop, üçüncü seçeneğin olanaksızlığı ilkesini kullanmayı reddetmiş, öte taraftan sezgici matematik ve klasik matematiğin ortak yönlerini alarak, Brouwer’in başlattığı sezgici programı revize etmeye çalışmış ve sezgiciliği, inşacılık olarak adlandırmıştır” (Shapiro; akt. Gür, 2019, s. 47-48). Literatürde oluşturmacılık (*constructivism*) düşüncesiyle; inşacılık, yapılandırmacılık veya sezgicilik şeklinde de karşılaşılmaktadır. Bu çalışmada oluşturmacılık olarak devam edilecektir.

“Brouwer’e göre, doğal sayılar bize, tüm matematiğin başlangıç noktası olan temel bir sezgiyle verilir. Brouwer, tüm matematiğin yapılandırmacı şekilde doğal sayıları temel alması gerektiğini söylemiştir. Yani matematiksel objeler, doğal sayılardan ve sınırlı sayıda adımda inşa edilerek başlamadığı müddetçe anlamlı olarak değerlendirilmezler ve var oldukları söylenemez. Var olmama varsayımının bir çelişkiye yol açacağını göstermek yeterli değildir” (Hersh vd., 2015, s. 371-372). Kronecker’e göre de, “matematiksel bir nesnenin var kabul edilebilmesi için bu nesnenin inşa edilebilirliğine ilişkin geçerli bir kural ya da işlemin ortaya konması gerekmektedir. Geçersiz bir işleme örnek olarak, Kronecker, ‘olmayana ergi’ yöntemini göstermiş, bu yöntemi geçersiz saymıştır” (Yıldırım, 2015, s. 97-98).

“İleri gelen pek çok matematikçi, oluşturmacı olmayan metotlar ve sonsuz kümelerin serbest kullanımı konusundaki şüphelerini paylaşmış ve fikir ayrılığına düştükleri noktaları ifade etmiş olsa da Brouwer’in, analizi, tepeden tırnağa yeniden yapılandırmaya yönelik çağrısı çoğu matematikçiye mantıksız gelmiş ve hatta bunun

fanatik bir görüş olduğu düşünölmüştür” (Hersh vd., 2015, s. 373). Bu konuda Hilbert (C. Reid; akt. Hersh vd., 2015)’in söylediğine göre; “Weyl ve Brouwer’in yaptığı Kronecker’in izinden gitmektir! Matematiği kurtarmak için zahmetli her şeyi başlarından atmak istiyorlar. ... (Bıraksan) matematiği parçalayıp ezecekler. Önerdikleri türden bir reformu takip edecek olursak en değerli hazinemizin çoğunu kaybetme riskine gireriz!” (s. 373).

“Bir matematik felsefesi ve özellikle de temelci bir epistemoloji olarak, oluşturmaçılık başarısız olmuştur. Hem matematiğin aksiyomatik temeli hem de mantığın kendisi için öznel inançların ortaya çıkışı, mutlakiyetçiliğin gerektirdiği matematik için yanılmaz bir temel sağlamaya yakın değildir” (Ernest, 1998, s. 24).

2.4.1.4. Biçimcilik (Formalizm)

“Popöler terimlerle, biçimcilik, matematiğin kurallara uyarak, kâğıt üzerinde izlerle oynanan anlamsız bir biçimsel oyun olduğu görüşüdür” (Ernest, 1998, s. 18). “Matematik, formalist öğreti açısından, soyut nesne ve ilişkileri konu alan simgesel bir sistemdir; öyle ki, sistemi oluşturan terimler anlamsız birer simge, ilişkileri dile getiren tümceler içerikten yoksun birer önerme kalıbıdır” (Yıldırım, 2015, s. 94). “Onlar ancak bir teoremin tanımında, ispatında veya bir problemin çözümünde kullanıldıklarında anlam ve içerik kazanırlar. Amaç matematiği soyut bir sistem olarak işlemek ortaya çıkan bu sistemi değerlendirirken tutarlılığı ölçüt olarak kullanmaktır” (Baki, 2014, s. 236). Biçimci matematik felsefesi görüşünün izleri Bishop Berkeley’in yazılarında bulunabilir, John von Neumann ve H. Curry de biçimci görüştedirler. Ancak biçimciliğin öncüsü David Hilbert’tir (Hersh, 1997).

Hilbert, klasik matematiğin tutarlılığını sergileyen matematiksel bir ispat sunarak matematiği Brouwer’in eleştirisinden koruma görevini üstlendi. Dahası, bunu, Brouwer’in reddedemeyeceği türden tamamen sonlu ve kombinatorik tipte argümanlarla yapmak istedi. Bu program üç adımı kapsamaktaydı:

1. Her klasik teoremin “doğru ispatının” aksiyomlardan başlayan ve her adımın mekanik olarak kontrol edilebildiği uygun bir formel dili ve çıkarım kurallarını tanıtınız. Bu büyük ölçüde Frege, Whitehead ve Russell tarafından daha önce başarılmıştı.
2. Bu formel dilin kombinatorik özelliklerinin, şu an dönüşüm formülleri için kurallar olarak bilinen, çıkarım kurallarıyla desteklenen permütasyon ve yeniden düzenlemelere tabi sonlu bir sembol kümesi olarak kabul edildiği bir teorisini geliştirmek. Bu teoriye “meta-matematik” denilmiştir.
3. Tamamen sonlu argümanlarla örneğin $1=0$ gibi bir çelişkinin bu sistemde türetilmeyeceğini kanıtlamak.

Bu şekilde, matematiğe tutarlılık garantisi verme açısından sağlam bir temel kazandırılmış olacaktı. (Hersh vd., 2015, s. 373).

“Hilbert ve onu izleyenlere göre matematik, mantığa indirgenerek değil, simgesel aksiyomatik bir yapıya dönüştürülerek temellendirilmeliydi. Onların gözünde klasik matematikte uygulanan tutarlılık yöntemi de yetersizdi. Örneğin, $1+1=2$ tümcesinde eşitliğin iki yanındaki sayılara, $1+1$ ile 2 ’nin, birbirinin yerine kullanabileceğimiz simgeler olmaktan çok başka bir anlam taşımadıkları gözüyle bakılmalıydı. Oysa klasik matematikte tutarlılık yoklaması, yorum ya da model yöntemine dayanıyordu. Buna göre matematiksel bir çalışmanın tutarlılığı, tutarlılığı varsayılan başka bir dizge model alınarak yoklanıyordu. Örneğin, geometrinin tutarlılığını göstermek için, aritmetiğin, ya da tersine aritmetiğin tutarlılığını göstermek için geometrinin model alınması gibi. Hilbert, “ispat teorisi” ya da “meta-matematik” diye bilinen çalışmasını öğrencisi Bernays ile ortaklaşa yazdıkları *Grundlagen der Mathematik* (Matematiğin Temelleri) adlı iki ciltlik yapıtında ortaya koyar. Ne var ki biçimciliğin Principia Mathematica’sı sayılan bu çalışmanın daha ilk cildi (1934) yayımlanmadan beklenmedik bir gelişmeyle karşılaşılır: Gödel teoremleri. Hilbert, matematikte tutarlılık ispatını çalışmasının ana sorunu olarak koymuştu. Bu program Gödel’in 1931’de yayımlanan çalışmasıyla umut kırıcı bir darbe yer.” (Yıldırım, 2015, s. 94-95).

John von Neumann (1964; akt. Gür, 2019, s. 45), Hilbert’in programını dört basamakta özetlemektedir:

1. Matematik ve mantıkta kullanılan bütün sembolleri belirlemek.
2. Klasik matematikte bu sembollerle elde edilen ‘anamlı’ diyebileceğimiz bütün teoremleri veya formülleri netleştirmek.
3. Klasik matematikte ‘ispatlanabilir’ diye bilinen formülleri inşa edebilecek bir inşa prosedürü sağlamak.
4. Klasik matematiğin bu formüllerini veya ispatlarını, aritmetiğin metotlarının sonlu uygulamalarıyla kontrol etmek.

“Gödel’in ‘eksiklik teoremleri’ olarak bilinen meşhur sonuçlar, 20. Yüzyılın düşünce tarihindeki en önemli anıtsal başarılarından biridir” (Gür, 2019, s. 48-49). “Hilbert formel dili kullanarak akıl yürütme ve çıkarım yoluyla ispatlanabilirliği ararken Gödel matematiksel akıl yürütmenin biçimselleştirilemeyeceğini göstererek ispatlanamazlığı keşfetmişti” (Baki, 2014, s. 238). “Gödel’in birinci teoremi, eksiklik teoremi olarak da bilinir. Buna göre, matematik sistemlerinde öyle teoremler vardır ki bu teoremlerin doğruluğu veya yanlışlığı o sistem içerisinde gösterilemez. Gödel’in bu eksiklik teoremi, matematikte bilinemez diye bir şeyin olmadığına inanan biçimcileri derinden sarsmıştır. Gödel’in ikinci eksiklik teoremi, sistemin güvende olup olmadığını anlayamayacağımızı yani bir sistemin tutarlılığının sistemin kendi içinde gösterilemeyeceğini ortaya koymuştur” (Gür, 2019, s. 49).

“Biçimcilik ve temel matematikteki ilgili araştırmalar felsefi ve matematiksel olmak üzere iki açıdan değerlendirilebilir. Felsefi olarak, tarihsel anlamda önemli ve ilginç olsa da, biçimcilik, mutlak temeller ile matematiksel bilgi sağlamada başarısız bir girişimdir. Özellikle epistemolojik açıdan, biçimci programın imkânsız olduğu gösterilmiştir” (Ernest, 1998, s. 20). “Gödel’in eksiklik teoremlerinin biçimciliğe indirdiği darbelerden sonra, biçimciliğin matematikçiler arasındaki destekçi sayısının azaldığı söylenebilir” (Gür, 2019, s. 49). Ancak burada, 1934’te kurulan ve 1950’li ve 1960’lı yıllarda etkili olmuş, biçimcilerden oluşan ‘Nicolas Bourbaki’ takma isimli bir gruptan söz edilebilir. “Bu grup lisansüstü ders kitapları yazmıştır. Bu biçimci anlayış, ülkemizin de dâhil olduğu birçok ülkenin eğitim kurumlarında da etkili olmuştur. Öte yandan son yıllarda, dünyada, özellikle Amerika’da eğitim fakültelerinde, biçimcilikten uzaklaşmaktadır. Günümüzde, matematik eğitiminde daha bir somut ve uygulamaya dönük yaklaşımlar güçlenmektedir” (Gür, 2019, s. 49-50).

“20. Yüzyılın ortalarına gelindiğinde, biçimciliğin ders kitaplarında ve matematik hakkındaki yazılarda dominant felsefi bakış açısı olduğu söylenebilir. Mantıkçılık kendine oldukça fazla sayıda destekçi bulmuş; oluşturmaçılık ise birkaç taraftarı ile kendi halinde devam etmiştir. Tabii ki Platonculuk o zaman ve dahi bütün zamanlarda neredeyse tüm matematikçiler tarafından, ‘bir yer altı dini’ gibi kabul görmekteydi ve görmektedir” (Hersh; akt. Gür, 2019, s. 50).

Ernest’e göre, bu üç anlayışın ortak özelliği olan matematiğe sağlam bir temel bulma iddiası epistemolojik olarak çökmüş gibi görünse de temalcilerin çalışması matematiksel açıdan verimli olmuştur. Shapiro’ya göre ise, mantıkçılık, felsefi ve matematiksel olarak ölmemiştir ve hala canlı bir araştırma alanıdır (Ernest ve Shapiro; akt. Gür, 2011, s. 39).

Matematiğin temelleri tartışmaları devam ederken, filozof Hilary Putnam farklı bir bakış açısı ile dikkatleri çekmiştir. 1967 yılında yazdığı bir makalede şöyle demektedir (Gür, 2019, s. 51):

Filozoflar ile mantıkçılar son elli yıl boyunca matematiğe bir “temel” bulma yolunda öylesine yoğun bir çaba içine girmişlerdir ki, yalnızca birkaç cılız ses matematiğin bir temele gereksinmesi olmadığını söyleme cesaretini gösterebilmiştir. Ben bu cılız seslere katılmak istiyorum. Kanımca matematik açıklık gerektiren bir konu değildir; temellendirilmesine ilişkin bir bunalımı da yoktur. Dahası, matematiğin temeli olmadığı gibi, bir temele ihtiyacı olduğunu da sanmıyorum (Putnam; akt. Yıldırım, 2015, s. 101).

Bir matematikçi olan Ian Stewart’ın düşünceleri de Putnam ile birlikte “günümüzün bakış açısını yansıtmaya bakımından ilginçtir” (Yıldırım, 2015, s. 101):

Tüm sağlamlaştırma çabalarına karşın matematiğin temelleri sallantılı durumundan çıkmış değildir. Belki de matematiği çökertecek yeni güçlüklerle karşılaşacağız. Ne ki, bu pek olası görünmüyor. Matematikçiler kimi mantıksal güçlükler karşısında matematiğin çökmesine izin vermeyeceklerdir. Unutmamak gerekir ki, sezgi her

zaman salt mantığı bastırmıştır. Teoremlerimiz uyum içinde kalıyor, bize anlayış ve heyecan sağlıyorsa, kimse bizden “kılı kırk yaran” mantıksal nedenlerle matematikten vazgeçmemizi beklemesin (Stewart; akt. Yıldırım, 2015, s. 101).

2.4.2. Modern matematik felsefesindeki gelişmeler

Yirminci yüzyıl, matematiğe temel bulma tartışmalarıyla geçmiştir. Buraya kadar isimleri zikredilen Frege, Russell, Brouwer, Hilbert, Gödel, Poincare gibi isimler iyi birer matematikçiydiler. “Yüzyılın ilk dönemlerinde uğraşılan sorunlar, matematiğin temelleri gibi global sorunlar ile tanım, teorem ve ispatın ne olduğu gibi konulardan müteşekkildi. Yüzyılın ikinci yarısında uğraşılan sorunlar ise ilk yarıda çözülmemiş olan bir kısım sorunlar ile yeni birtakım sorunlardan ibarettir. İkinci yarı temelde, matematik eğitimi almış veya matematik hakkında bilgi sahibi filozoflar tarafından şekillendirilmiş ve böylece matematik felsefesi hakkında ‘daha felsefi’ sorunlar üzerine yoğunlaşmıştır” (Gür, 2019, s. 52). Denilebilir ki matematik felsefesi, filozofların gözünden de ele alınmıştır. Bu dönemde bilgisayar ispatları ve grafikleri, uygulamalı matematiğin matematik felsefesi içindeki konumu tartışmaların gündeminde dikkat çekici olmuştur (Gür, 2019, s. 53-54).

Neredeyse 100 yılı aşkın süredir üzerinde çalışılan “Dört Renk Sanısı” 1976 yılında Kenneth Appel ve Wolfgang Haken tarafından ispatlanmıştır. Yüzyıllarca ispatlanamayan bir problemin ispatlanmış olması kadar, ispatı da büyük bir haber olmuştur. Çünkü “yayınlanan ispat, bilgisayar programları ve bu programların ulaştığı sonuçları içeriyordu. Programların takip ettiği ara basamaklar elbette yayınlanmamıştı ve bu sebeple yayınlanan ispatlar *her zaman geçerli olma ve ilke bazında eksikti*” (Hersh vd., 2015, s. 422). Dolayısıyla bilgisayar ispatını kabul edilip edilmeyeceği ve tabii ki ispatın ne olduğu konusu ciddi tartışmalar oluşturmuştur. Hersh ve diğerleri (2015) dönemin profillerine uygun olarak şöyle bir değerlendirme yapmışlardır: “Felsefeci açısından, insan mantığına dayanan bir ispat ile bir makinenin güvenilirliğine dayanan bir ispat arasında dağlar kadar fark vardır. Matematikçi açısından, mantığın

yanılabilirliği hayatın gerçeklerindendir ve bir makineyi, kendisinin olabileceğinden daha güvenilir bir hesap makinesi olarak hoşgörüyle karşılar” (s. 427).

Aynı zamanda Hersh (1997, s. 28) bir ironiye de dikkat çekmektedir (akt. Gür, 2019, s. 53): “On yıllarca, matematik filozoflarının bir kısmı, geçerli bir ispatın herhangi bir mekanik yolla kontrol edilebileceğinden bahsettiler; şimdi, bilgisayar tarafından uzun yıllardır çözülemeyen bir sorunun ispatı verilince, bazıları ‘Bu, bir ispat değildir!’ demektedirler.”

“Bir matematiksel teoremin ‘ciddi’ olup olmaması, uygulamadaki sonuçlarına değil (ki bunlar genellikle çok azdır), aralarında bağlantı kurduğu matematiksel fikirlerin taşıdığı ‘öneme’ bağlıdır.” diyen Hardy (1996, s. 67) ve onun gibi pek çok matematikçi matematik felsefesinde uygulamalı matematiğe pek önem vermemiştir. Ancak, “özellikle son yıllarda uygulamalı matematik ve fiziğin matematik felsefesi içerisindeki konumu neredeyse popüler bir hale gelmiştir” (Shapiro; akt. Gür, 2019, s. 53). Riemann geometrisinin Einstein’ın çalışmalarına kaynak olması, matematiğin Nobel ödülü sayılan Field Madalyasının 1990 yılında ilk defa bir fizikçiye verilmesi ve biyolog Charles Darwin’in matematiğe olan hayranlığı örnek gösterilebilir. “Neticede matematiğin öyle uygulamaları bulunmuştur ki bugün uygulamalı matematiği küçümseyen bir matematikçi bulmak oldukça zordur. Kaldı ki matematiğin dış dünyada neden bir karşılığının olduğu sorunu ile baş edemeyen bir matematik felsefesi, yaygın bir kabul görmekten uzak olacaktır” (Gür, 2019, s. 54).

Bu verilen örnekler, Euclid-dışı geometrilerin geniş kabul görmesi, küme ve grup kuramlarındaki gelişmeler matematiğin doğasıyla ilgili yerleşmiş mutlakçı anlayışları olumsuz etkilemiştir. “Mutlakçıların yaptığının tersine “matematik yapmanın” farklı bir yolu olması gerektiğini gösterme gayreti olarak niteleyebileceğimiz yarı-deneyselci görüş, Lakatos’un doktora çalışmalarına dayanır. Bu gayretin içinde matematiği temellendirme amacı yoktur. Yaklaşım matematikte kesinlik ve mükemmellik arayan mutlakçılara karşı bir duruştur” (Baki, 2014, s. 248). Adnan Baki bu yaklaşımı “*yarı deneyselci görüş*” olarak tanımlamaktadır. Genel olarak mutlakçılara karşı fakat aynı zamanda mutlakçı görüşten de beslenen bir yaklaşım

olduğu gözüyle ve döneminde bilim felsefesinde yaşanan gelişmelerin büyük etkisinden dolayı, bu çalışmada en genel anlamda kullanarak tanımlayabileceğimizi düşündüğümüz “*yanılabilirlik (fallibility)*” ifadesi kullanılacaktır.

Bu bölümde bahsedeceğimiz isimlerden biri ve matematikte bilgili bir filozof olan Imre Lakatos, Karl Popper’ın yanlışlanabilirlik teorisinin takipçilerinden biridir. Lakatos, kendisinin şüphecilik felsefesi ile birlikte ele alınacaktır. Mutlakçı olmayan bu görüş altında yirminci yüzyılın önemli filozoflarından olan Quine (1908-2000)’in matematik felsefesi hakkındaki görüşlerine de değinilecektir. Aynı zamanda tüm matematiksel varlıkların kümelerden ibaret olduğunu savunan Yeni-Mantıkçı, Platonculuk ve Biçimciliğe karşı duran Nominalist, Kurgucu ve Yapılsacı görüşlerin de açıklanması amaçlanmaktadır. Bu görüşlerin günümüz matematik felsefesinin şekillenmesinde katkıları büyüktür.

Filozof Willard Van Orman Quine, bazı dogmalara karşı çıkarak matematik felsefesi hakkındaki görüşleri ile adından söz ettirmektedir. Quine, ilk olarak Kant tarafından açıkça dile getirilen, olgulardan bağımsız bilinebilen veya olgularla bilinebilen analitik-sentetik ‘dogma’sına karşı çıkmaktadır. Quine’e göre dil ve dünya faktörleri, birbirine düğümlenmiş gibi iç içe geçmiştir bu ikisi arasında keskin bir ayrım yoktur. Quine’in ikinci savaş açtığı dogma, ‘indirgemecilik’tir. Bu dogmanın altında yatan şey, anlamlı her bir cümlenin, doğrudan tecrübe yoluyla doğrulanabilir cümlelerin mantıksal bir kombinasyonu olması gerektiği hakkındaki ‘dogma’dır (Shapiro; akt. Gür, 2019, s. 55).

Quine, bu dogmalar yerine ‘dikişsiz ağ’ (*seamless web*) benzetmesini önerir. Quine’e göre inanç sistemimiz bir ağ oluşturur ve bu sistemde her inanç başka bir inançla bağlantılıdır. Bu bağlantılardan bazıları mantıksal, bazıları dilseldir vs. Tecrübe ile doğrulanabilen, yani tecrübe ile ilişkili olan inançlar ağın sınırındadır. Yeni gözlemler, sayısız bağlantılar arasında değişiklik meydana getirir ve bu bağlantılar arasında yeni bir dengeye ulaşılan dek sürer. Quine’in bu bütüncül (holistik) görüşüne göre, bilim adamı bu bağlantı seçeneklerinden istediğini kullanabilir. Bu holistik bakış açısı, tecrübe yoluyla doğrulanabilen anlamlı her bir cümlenin mantıksal bir kombinasyona sahip olması gerektiği yönündeki ‘ikinci’ dogmayı reddeder. Quine, holizm ve

empirizme dayanarak matematiğin bilimde uygulaması bulunan kısımlarını kabul eder. (Shapiro; akt. Gür, 2019, s. 55). Quine'ın matematik hakkındaki görüşleri birçok eleştiri almıştır. Sözgelimi Quine'ın matematiksel gerçeklik, ancak fiziksel gerçeklik ile bilinebilir şeklindeki görüşüne Hersh (1997) karşı çıkmaktadır (Gür, 2019, s. 55).

2.4.2.1.Yeni-Fregeciler (Yeni-Mantıkçılar)

Bir diğer modern görüş 1950'li ve 1960'lı yıllarda ortaya çıkan Yeni-Fregeciler (Yeni-Mantıkçılar) denilen gruptur. Frege'nin matematiğe olan yaklaşımını merkeze alan çalışmalar bugün de devam etmektedir. Crispin Wright, Bob Hale ve Neil Tennant'ın çalışmaları bu hususta zikredilebilir (Shapiro; akt. Gür, 2019, s. 56). Onlara göre Zermelo-Fraenkel aksiyom kümelerinin bir uzantısı olan küme kuramı bütün matematik için temel oluşturmaktadır. Bütün matematik, küme kuramının içine gömülüdür ve özelde sayılar, genelde ise bütün matematiksel varlıklar kümelerden ibarettir (Kitcher ve Aspray; akt. Gür, 2019, s. 56).

Yeni-Mantıkçılık şu iki önerme ile karşımıza çıkmaktadır. Birincisi, matematiğin önemli bir özü *a priori* olarak bilinebilir. İkincisi, bu matematik ideal ile yani bizden bağımsız matematiksel nesnelerle ilgilenir. Yeni-Mantıkçılığa göre matematiksel dili kullanırken, demek istediğimiz şeyin bilgisi sayesinde, soyut gerçekliğin bilgisine ulaşırız. Bu tür görüşler, matematiğin *a priori* olduğunu ve nesnel doğrulara sahip olduğunu belirten geleneksel görüşü bırakmak istemeyen ve fakat ontolojik realizmin karşılaştığı epistemolojik sorunlardan kaçınmak isteyenler için caziptir (Shapiro; akt. Gür, 2019, s. 56).

2.4.2.2.Nominalizm ve Kurgusallık

1960'li ve 1970'li yıllarda, Platonculuk ve Biçimciliğe ciddi eleştiriler yöneltilmeye başlanmıştır. Nominalizm, kurgusallık ve yapısalcılık adı altında

açıklayacağımız bu düşünceler günümüz matematik felsefesini önemli ölçüde şekillendirmiştir. Chihara, 1970’li yıllarda matematiğin nominalist bir biçimini savunarak, Platonculuğa karşı gelmiştir. Chihara’nın çalışmaları, nominalizme olan ilginin artmasına neden olmuştur. Nominalizm (*Adcılık*), matematiksel nesnelerin varlığını inkâr eden, ontolojik olarak anti-realist olarak betimlenebilecek görüşün radikal bir biçimidir. Zaruriyet (*indispensability*) tartışması olarak bilinen, "Matematik bilim için temel teşkil eder mi?" sorusu nominalizmi anlamak açısından önem teşkil etmektedir. Quine ve Putnam’ın “Evet” demesi, nominalist Field’in ise karşı çıkıp, “Hayır” demesi ile başlayan tartışma günümüzde hâlâ devam etmektedir. Nominalistler, sayılar ve kümeler gibi matematiksel nesneleri varsaymaksızın, nasıl bir matematiğin bilim için gerekli olduğunu göstermeye çalışmaktadırlar (Brown, Kitcher ve Aspray; akt. Gür, 2019, s. 56). Çağdaş nominalizm, Chihara, Gottlieb ve Field’in her birinin öncülüğünü yaptığı üç farklı biçimde karşımıza çıkmaktadır (Kitcher ve Aspray; akt. Gür, 2019, s. 57).

Chihara, soyut nesnelerin varlığı kabul edilerek kurulan cümlelerin, ifadelerin sadece dilsel varlıklar olarak yeniden inşa edilebileceğini iddia eder. Yani Chihara’ya göre, matematiksel dil öyle sistemleştirilebilir ki matematiksel nesnelere gizliden veya açıktan bir referans söz konusu olmaz. Fakat burada, Chihara’nın, sisteminde tümevarım ve bütünlülük aksiyomlarının her ikisini de doğru kabul ettiğini belirtelim. Dolayısıyla Shapiro’nun belirttiği gibi Chihara, doğruluk-değeri açısından realisttir yani ona göre matematiksel cümleler zihin ve matematikçiden bağımsız nesnel bir doğruluğa sahiptirler (Shapiro; akt. Gür, 2019, s. 57). Gottlieb ise matematiksel nesnelerden kaçınmak için ‘ve’, ‘veya’ ve ‘bazı’ türü önerme bağlaç ve niceleyicileri yeniden yorumlamayı önerir (Kitcher ve Aspray; akt. Gür, 2019, s. 57). Field’in kurgusalılık (*fictionalism*) olarak adlandırdığı görüşe göre, edebi kurgu ürünü olan ‘Oliver Twist’ neyse, sayılar veya kümeler de aynı konumdadır (Shapiro; akt. Gür, 2019, s. 57). Field’e göre fiziksel kuramlar öyle bir şekilde yeniden kurulabilir ki, sayılara veya matematiksel nesnelere vurguya gerek kalmaz (Gür, 2019, s. 57).

“Kurgusalcıların, matematiksel nesnelere herhangi bir varlık atfetmeden, bu nesneleri bir ‘kurgu ürünü’ kabul edip bilim yapılabileceği iddiası günümüzde hâlâ tartışılmaktadır” (Hersh, 1997; akt. Gür, 2019, s. 57).

2.4.2.3.Yapısalcılık (*Structuralism*)

Yapısalcılık matematiği örüntü, model, kalıp ve şablon gibi anlamlara da gelen *pattern* bilimi olarak tanımlamaktadır (Shapiro; akt. Gür, 2019, s. 59). Matematiği örüntü bilimi olarak tanımlamak (Filozoflar Michael Resnik ve Stuart Shapiro tarafından kabul görmüştür.) bazı filozoflar için yeni olabilir, ancak matematikçiler için yeni değildir. Bourbaki de böyle tanımlamıştır ve bu tanıma ‘yapısalcılık’ diye adlandırmıştır (Hersh, 1997, s. 177). Hatta daha öncesinde Hardy (1996) de bu tanımlamaya uygun yazmıştır: “Matematikçinin kalıpları da bir ressamın veya şairinki gibi güzel olmak zorundadır; düşünceler ise renkler ve sözcükler gibi uyum içinde olmalıdır” (s. 63).

Kitcher ve Aspray (akt. Gür, 2019, s. 58)’a göre yapısalcılığın, Benacerraf’ın bir problemi olan, “Doğal sayıları, küme kuramının desteklediği ihtimallerden hangisiyle tanımlayacağız?” soruna bir tepki olarak ortaya çıktığını söylemek mümkündür. Bilindiği üzere, doğal sayıların küme kuramıyla gösterimi Zermelo ve von Neumann tarafından farklı şekillerde ortaya atılmıştır. Ernst Zermelo, 0’ı boş küme olarak, yani $\emptyset$ olarak, 1 sayısını $\{\emptyset\}$ olarak, 2 sayısını $\{\{\emptyset\}\}$ olarak, 3 sayısını $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ olarak vs. tanımlamayı önermiştir. John von Neumann ise 0’ı boş küme yani $\emptyset$ olarak, 1’i $\{\emptyset\}$ olarak, 2’yı $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ olarak, 3’ü $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ olarak vs. tanımlamayı önermişti. Peki, o zaman, bunlardan hangisi doğrudur? Bu soruya cevap olarak ortaya çıkan yapısalcılığın ana destekçileri Benacerraf, Hellman, Resnik ve Shapiro olarak sıralanabilir. (Gür, 2019, s. 58-59).

Yapısalcılar, doğal sayılar arasındaki herhangi bir ontolojik bağımsızlığı reddederler. Onlara göre bir doğal sayının özü, o sayının diğer doğal sayılarla ilişkisinde yatar. Aritmetiğin içeriği, basit bir soyut yapı olmasıdır ki bu yapıdaki örüntü, benzer özelliklere sahip herhangi bir sonsuz dizide de söz konusudur. Dolayısıyla 2 sayısı doğal sayılar yapısındaki 2. konumdan ibarettir; 5 sayısı, 5.

konumdan ibarettir vs. Sözelimi 7 sayısını asal sayı kılan bu sayının bizatihi kendisi değil bu yapıdaki konumu veya sırasından kaynaklanır (Shapiro; akt. Gür, 2019, s. 59).

“Biçimciliğin aksine, yapısalcılık matematiğe bir konu sağlar. Platonizmin aksine, aşkın soyut bir gerçekliğe dayanmaz” (Hersh, 1997, s. 177). Yapısalcılığın önemli bir temsilcisi sayılan Michael Resnik (akt. Gür, 2019, s. 59), meşhur bir makalesinin girişinde şöyle demiştir:

İddia ediyorum ki matematikte, yapılar içerisinde dizili 'içkin' niteliklere sahip nesnelerimiz yoktur, sadece yapılarımız vardır. Matematiğin nesneleri yani matematiksel sabitlerimizin ve nicelik belirleyicilerimizin işaret ettiği varlıklar, yapı içindeki yapısız noktalar veya konumlardır. Yapının içerisindeki bir konum olmaları itibarıyla yapının dışarısında bir hüviyetleri veya özellikleri yoktur.

2.4.2.4. Lakatos ve yanılabilirlik

Bu noktada yirminci yüzyılda ortaya çıkan ve aslında matematik felsefesinde de etkileri çok olan bir teoriden bahsetmekte fayda görülmektedir. *Yanlışlanabilirlik teorisi*yle adından söz ettiren Karl Popper, 1934 yılında yayımlanan *Bilimsel Araştırmanın Mantığı* eseriyle bilim felsefesi gündeminde devrim yaratmıştır. Popper (2019), “tümevarım işlemini yürütebileceğimiz tüm görgül olgular herhangi bir uzay-zaman bölgesiyle sınırlıdır” (s. 577) demektedir. “Tümevarımsal çıkarım, ‘görgül olarak incelenen’ bir bölgeden (bu bölgenin kendi içinde bir bütünlüğü olması gerekmez) incelenmiş başka bir bölgeye; ya da bilinen durumlardan bilinmeyen durumlara varma işlemidir” (Popper, 2019, s. 577). “Bilimde ‘temeller’ arayışı, geleneksel ‘tümevarımsal mantık’ problemine yani belli deney ve gözlemlerden genel kanunların ne şekilde türetildiği meselesine götürür” (Hersh vd., 2015, s. 383). Popper’ın yaklaşımı ise bahsedilen kitabın önsöz yazarları (Popper, 2019, s. 18) tarafından güzel bir şekilde özetlenmiştir:

Popper bilimi, bataklıkta kazıklar üzerine dikilmiş bir yapıya benzetir. Bu kazıklar hiçbir zaman “var olan” doğal ve sağlam bir tabana dayanmaz. Zaman zaman kazıkların sağlam bir temele dayandığı düşünülebilir; ama bu bir yanılgı olacaktır. Çünkü kazıklar yalnızca geçici bir süre için kendilerine sağlam bir dayanak bulmuştur. Bir süre sonra sağlam sanılan temel yine zayıflayabilir. Bu nedenle de kazıkların hep daha derine çakılması vazgeçilmez olmalıdır. İşte Popper’in bilim insanı, bıkmadan usanmadan, uçsuz bucaksız derinliklere uzanmaya çalışan; ulaştığı bilgiyi yalnızca geçici bir süre için güvenilir bilgi olarak kabul eden, bununla da yetinmeyip hep daha fazlasını arayan insandır. Bu da ancak bilginin “mutlak” olmadığı görüşüyle bağdaşmaktadır. Mutlak olmayan bilgi, doğru olmayan bilgidir, yanlışlanabilir bilgidir; evrenin herhangi bir yerinde “siyah tek bir kuğunun” var olabileceği kuşkusunun taşınmasıdır.

Burada Popper’in bir önermesine gönderme yapılmaktadır: “Örneğin, belirli bir zamana kadar Avrupa’da birçok beyaz kuğu gördük, siyah kuğulara hiç rastlamadık. İşte buna dayanarak varacağımız tipik bir tümevarım çıkarımı da, (büyük bir “olasılıkla”) diğer kıtalarda da tüm kuğuların beyaz olduğu savıdır” (Popper, 2019, s. 577).

Popper (2019) her ne kadar, “Tümevarımcı yaklaşım, adeta herkesin benimsediği bir yoldu ve hala da öyle. Bu nedenle de tanıtımlarım ciddiye alınmadı.” (s. 586) diye yazmış olsa da, çalışmalarının etkisi büyük olmuştur. Bilim felsefecisi ve matematik ile ilgilenen bir filozof olarak Imre Lakatos (1922-1974), Popper’in çalışmalarının etkisini kendi üretkenliğine yansıtmış büyük bir takipçisidir. Meşhur eseri İspatlar ve Çürütmeler’de (*Proofs and Refutations*) Lakatos (2017), şöyle bir sunuşla başlamaktadır:

Biçimci matematik felsefesinin oldukça derin kökleri vardır. Biçimci matematik felsefesi, dogmatist matematik felsefesinin son halkasıdır. İki bin yıldan daha uzun bir süredir, dogmatistler ve şüpheciler arasında bir tartışma vardır. Dogmatistler, insani zekâmızın veya hislerimizin gücüyle, gerçeğe ulaşabileceğimizi ve ulaştığımızı da anlayabileceğimizi iddia ederler. Şüphecilerse, öte yandan, (gizemli deneyimler dışında) ya doğruya hiçbir şekilde erişemeyeceğimizi ya da erişip erişemediğimizi bilemeyeceğimizi iddia ederler. Zaman zaman güncellenen bu dev tartışmada, matematik, dogmatiklerin gururlu kalesi olmuştur. Ne zaman o günkü matematiksel

dogmatizm bir “krize” girse, aşkın temeller ve gerçek bir netlikle sağlanan yeni bir dogmatist yorum, otoriter, yanılmaz ve çürütülemez matematiğin, “insanlığa hediye edilmiş bilimler arasında Tanrı’yı memnun etmiş olan tek Bilim”in (Hobbes, 1651; akt. Lakatos, 2017) görünümünü onarır. Çoğu şüphecî, dogmatist epistemolojinin kalesinin zaptedilemezliği noktasına doğru geri çekilmiştir. Bu mücadelenin vadesi şimdi dolmuştur (s. 12-13).

“Popper’ın *Sanılar ve Çürütmeler* adlı kitabını çağrıştıran *İspatlar ve Çürütmeler*’de Lakatos, Popper’ın doğa bilimleri için uyguladığı metodolojiyi matematiğe uyarlar” (Kitcher ve Aspray; akt. Gür, 2019, s. 60). Bu eser, şekil olarak öğretmen ve öğrencilerin diyaloglarından oluşmaktadır:

“Öğretmen, çokyüzlünün kenarlarının düzlemde ağ oluşturacak şekilde uzatıldığı ve birbiri ardına tek bir üçgene indirgendiği Euler formülünün Cauchy’ye ait geleneksel ispatını anlatır. İspat bittiği an sınıf bir sürü karşı-örnek üretir. Çatışma başlamıştır. İspat neyi ispatlamıştır? Matematikte neyi biliriz ve nasıl biliriz? Tartışma gittikçe hep daha derin, sofistike matematiksel ve felsefî düzeyde devam eder. Her an, birbiri ile yarışan birçok farklı bakış açısı ile bir karakterin, aklını değiştirip rakibinin bıraktığı pozisyona geçtiği geriye dönüşler vardır.” (Hersh vd., 2015, s. 386).

Yukarıdaki paragrafta bahsedilen Euler formülünde; Descartes (1635) ve Euler (1752) tüm çok yüzlüler için $V-E+F=2$ bağıntısının geçerli olduğunu ifade etmiştir. (V = Köşelerin sayısı, E = Ayrıtların sayısı, F = Yüzlerin sayısı)

Lakatos (2017), *İspatlar ve Çürütmeler*’in giriş bölümünde mutlakçılar hakkında yazdıklarında bahsettiği “*vadesi dolmuş mücadele*”yi gerçekleştirdiğini iddia etmemektedir. Bu konuda şunları yazmıştır:

İşbu vaka incelemesinin özü, matematiksel formalizmi zorlayacak olmasına rağmen, matematiksel formalizmin aşkın konumunu doğrudan doğruya zorlamayacaktır. Bu incelemenin mütevazî amacı, yarı-deneyssel informel matematiğin, şüphe duyulamaz teoremlerin sayısındaki düzenli artışla değil, spekülatif tahminler ve eleştirilerin durmadan ilerlemesiyle geliştiğini kanıtlar ve çürütmeler mantığıyla detaylandırmaktır (Lakatos, 2017, s. 13).

Lakatos; matematiğin monoton bir şekilde değil de spekülasyon, tahmin ve eleştirilerle birlikte büyüdüğünü tarif eden sözde-empirik kavramını da, matematik felsefesine katmıştır. Sözde-empirikçiler ile oluşturmacılar arasında benzerlikler mevcuttur. Aradaki fark, sözde-empirikçiler matematiği daha çok sosyal bir ürün olarak görürken, oluşturmacılar matematiğin sınırları içinde düşünmektedirler (Tymoczko; akt. Gür, 2019, s. 61). “Biçimciliğin temsilcileri (Lakatos’un, Zahar ve Worrall gibi dipnot kullanan insanlar için kullandığı terimi kullanacak olursak) formel sistemlerin hangi anlamda matematik modelleri olduklarını hiçbir zaman açıklamazlar. Matematiğin formel bir sistem gibi olması *gerektiğini* ifade eden kuralcı anlamda mı? Yoksa matematiğin formel sistem gibi *olduğunu ifade eden* betimleyici anlamda mı?” (Hersh, 1997, s. 215; Hersh vd., 2015, s.394). (Ernest’in bilim felsefesindeki “kural-koyucu” (*prescriptive*) ile “tanımlayan, açıklayan, tarif edici” (*descriptive*) arasındaki ayrımın iyi bir kavramsal araç olarak hizmet edeceği önerisine, Hersh tarafından yazılmış bir alıntı ile burada tekrar vurgu yapılmaktadır. Keza Lakatos’un düşüncesinin anlaşılması için gerekmektedir.). Baki (2014), Lakatos’un kanıtlama sürecini şöyle özetlemektedir:

Lakatos’a göre, kanıtlama sürecinde bir matematiksel kavramın veya bilginin tarihi gelişimine bakılmalıdır. Farklı bireylerin veya kültürlerin ürünü olan matematik nasıl oluyordu da aynı şeyleri söylüyor veya aynı hesapları yapıyordu. Lakatos bu sorunun farkındadır. Böyle bir matematiğin içinde a priori ve a posteriori bilgiler birlikte barınmaktadır. Matematiğin köklerinin deneye ve fiziksel dünyanın gözlemlerine dayandığına işaret edilmektedir. Gözlemlerin toplanması + sonuçların ifade edilmesi + gözlemlerden ortaya çıkan sonuçları destekleyen durumların yazılması. Bir başka deyişle yarı-deneyselci görüşe göre tümevarımlı olarak kurulan kavramlar, teoremler tündengelimli olarak kanıtlanıyor. Örneğin, Euler $V+F=E+2$ sonucunu tümevarımlı bir akıl yürütme ile ifade etti. Bu formülün sonsuz ağlar için de geçerli olduğu gösterilebilir mi? Lakatos bunun ancak dinamik bir kanıtlama süreciyle aşılabileceğini göstermeye çalışmıştır. (Baki, 2014, s. 251).

“Lakatos’a göre, ‘ispat’, informel matematik bağlamında gerçeği varsayımdan sonuca kırılmaz bir zincir hâlinde taşıyan mekanik bir işlem anlamından daha ziyade karşı-örneklerin baskısı altında daha detaylı ve gerçeğe yakın olmaya zorlanan

varsayımı, daha makul ve ikna edici hâle getiren açıklama, doğrulama ve detaylandırmalardır” (Hersh, 1997, s. 211-212; Hersh vd., 2015, s. 385).

Lakatos’un izindeki azınlık gruba göre, matematik felsefesi, doğa bilimleri felsefesinde olduğu gibi metodik sorunlarla da ilgilenmelidir (Gür, 2019, s. 60). Lakatos, kitabındaki Euler-Cauchy sanısının tarihsel gelişimini örnek alarak, şu metodik sorulara cevap aramaktadır: Matematik nasıl gelişir? Matematiksel ilerleme nedir? Matematiksel tanımlar nasıl revize edilir? İspatlar nasıl düzeltilir? Bu değişiklikleri yaparken matematikçinin izlediği metodolojik kurallar var mı? Varsa eğer, nedir bu kurallar? (Gür, 2019, s. 60-61).

Formül veya bir önerme önce matematikçinin bireysel ürünü olarak ortaya çıkar ve Popper’in benzetmesinde olduğu gibi bireyin üçüncü dünyasında diğer matematikçilerin eleştirisi ve dönütleriyle yeniden düzenlenir. Popper (1979) bilginin oluşumunu, bireyin çevresiyle etkileşimine sosyal bir boyut daha ekleyerek açıklamaktadır. Ona göre bireyin üç farklı dünyası vardır. Birinci dünyası kendi iç dünyasıdır. Bireyin birinci dünyada kurduğu bilgileri deneyimlerinden ve inançlarından kaynaklanmaktadır. İkinci dünya ise bireyin fiziksel çevresidir. Birey, birinci dünyada kurulan öznel bilgilerinin pratiklere uyup uymadığına, deneyimleri doğrulayıp doğrulamadığına bakar. Bu aşamaya kadar kurulan bilgiler öznel bilgilerdir. Bireyin üçüncü dünyası ise sosyal dünyasıdır. Örneğin, bir matematikçinin üçüncü dünyası kendi akademik çevresidir, birinci ve ikinci dünyada kurduğu bilgilerini paylaştığı konferans katılımcılarıdır, çalışmasını gönderdiği dergilerin hakemleridir veya seminerlerde kendisini dinleyenlerdir. Matematikçinin üçüncü dünyası kısaca “matematik dünyasıdır”. Bireyin kurduğu bilgiler üçüncü dünyada paylaşıyor ve doğrulanıyor ise ancak o zaman bu bilgiler nesnel bilgilere dönüşmüş olur (Baki, 2014, s. 251).

Lakatos’un yöntemi Popper’in üçüncü dünyasına karşılık gelmektedir. “Lakatos’a göre, matematik, doğa bilimleri gibi, *yanılabilir*dir. Lakatos, yanılabilirlik kavramını, Popper’in, *eleştirel yanılabilirlik* teriminden matematik felsefesine uyarlamıştır” (Ernest; akt. Gür, 2019, s. 60).

Matematiğe birçok farklı açıdan yaklaşılabilir. Yirminci yüzyılda, matematiğin felsefi bakış açısıyla sistematik yazımının büyük bölümü temelci gelenekte yer almaktadır (Hersh vd., 2015, s. 397). Matematiğin sosyal, kültürel, tarihsel, köklerine vurgu yapıp, matematiğin hayatın diğer parçaları gibi sosyal bir ürün olduğunu iddia eden hümanistler kendi tarihlerine başlangıç olarak Frege’yi değil, Lakatos’u alırlar. Son yıllarda, Hersh ve Ernest gibi hümanist veya sosyal oluşturmacılar, Philip Kitcher gibi natüralistler ve Thomas Tymoczko gibi sözde-empirikçiler Lakatos’un çalışmalarını ciddiye almaktadır (Ernest, Hersh, Kitcher ve Aspray ve Tymoczko; akt. Gür, 2019, s. 60).

2.4.2.5. Gelenekselcilik (*Conventionalism*)

“Mutlakçılardan ve yanılabilircilerden (yarı-deneyselcilerden) farklı olarak gelenekselcilere göre, matematiğin bilgileri ve doğrulukları dilbilim geleneklerinden etkilenir ve onlar tarafından şekillenir. Mantığın doğrulukları da ilgili önermelerin taşıdığı anlamlardan dolayı analitiktir” (Baki, 2014, s. 252). “Wittgenstein’a göre matematik bir dil oyunudur. Bu dil oyununun kendince kuralları vardır ve bu kurallar oyunun paydaşlarının uzlaşımı neticesinde belirlenir. Oyunun paydaşları insanlardır, doğrulanamayacak olan önermeler ve sonsuz sayılara ilişkin bildirimler içeren önermeler insanın inşa faaliyetini aşarlar, bu sebeplerle matematik insanın sonlu adımda inşa edebildiği ve doğruluğunu gösterebildiği önermelerden müteşekkil bir yapıdır” (Arslan, 2019, s. 186). “Böylece, Wittgenstein matematiğin temellerinin kullanılan dilin kurallarına indirgenmesiyle matematiksel bilginin gelişmesinin yolunun açılacağını düşünmektedir” (Baki, 2014, s. 252). Bu durumda şöyle bir çıkarım yapılabilir:

Matematiksel ve mantıksal doğrular dilin kabul edilen kurallarına ve gramerine bağlı ise bu durumda doğrular dilin kurallarını ve gramerini bozuyorsa yanılabilirlikleri söz konusudur. Eğer bir kanıt dilin kurallarına uyuyorsa onun yanılabilirliği söz konusu değildir. Wittgenstein’in matematiksel doğrulukla ilgili bu yaklaşımı Russell’in matematiksel doğruluğu mantığa indirgeyerek sağlama alma çabasını çağırıştırılmaktadır (Baki, 2014, s. 252).

2.5. Matematik Eğitimi Felsefesi

Buraya kadar tarihsel bir bakış açısıyla matematik felsefesi açıklanmaya çalışılmıştır. Bu tez çalışmasının ikinci araştırma problemi olan “*Reuben Hersh’in matematik felsefesine olan bakışı matematik eğitimi/öğretimi açısından neyi ifade eder?*” sorusuna dair sonuçları ortaya koymadan önce matematik eğitimi felsefesi hakkında bir literatür sunulmasının gerekliliği görülmüştür. Bu sebeple bu başlık altında, daha önce açıklanan matematik felsefesi düşüncelerinin ışığında, ‘matematik eğitimi felsefesi’ konusunun anlatılması amaçlanmaktadır. Baki (2014), matematik eğitimi felsefesinin ilgi alanı ile ilgili şunları söylemektedir:

Matematik felsefesinin matematik öğrenme-öğretme adına matematik sınıflarındaki yeri nedir? Matematiğin temellendirilmesi, matematiksel nesnelerin varlığı, matematiksel doğrulukların statüsü gibi konular müfredatın şekillendirdiği okul matematiğinin öğretildiği sınıflara nasıl taşınacaktır? Gibi sorular matematik eğitimi felsefesinin odaklandığı en temel sorulardır. Matematik eğitimi felsefesi bu meselelerin yanında matematik ile bireyin, matematik ile toplumun ilişkilerini de ele almaktadır. Matematik eğitimindeki yeri ve önemi vurgulansa da matematik felsefesinin öğrenme-öğretme ortamlarındaki yansımalarını doğrudan görmek oldukça zordur (Baki, 2014, s. 267).

Doğrudan görmenin zorluğuna rağmen farklı matematik felsefelerinin matematik eğitimini şekillendirdiği bir gerçektir. Matematiğe olan bakış açısının öğretim yöntemleri, öğrencilerin matematik algıları, öğretmenlerin eğitim-öğretimdeki rolleri, öğretim programları gibi sistem içerisindeki yapılara etkisi önemli ölçüdedir. “Matematik felsefesinin söz konusu bu etkileri eğitim alanında bilinen sosyal grupları da şekillendirmiştir. Eğitimde bilinen bu sosyal gruplar gücü ellerinde bulundurdıkları dönemde ülkenin eğitim sistemini amaçları doğrultusunda yönlendirmişlerdir” (Baki, 2014, s. 267).

Baki (2014, s. 268-285), matematik felsefesinden etkilenecek eğitimde ortaya çıkan bu sosyal grupları sırasıyla; sanayi odaklı, teknoloji odaklı, hümanist, ilerlemeci ve halkçı eğitimciler olarak beş grupta sınıflandırmaktadır. Bu sosyal grupları matematik, çocuk, matematiksel öğrenme, matematik öğretimi, matematiksel beceriye olan bakışları ve ölçme-değerlendirme yaklaşımları açısından altı farklı boyutta inceleyerek açıklamaktadır. Öncelikle, bu sınıflandırma temel alınarak, bu eğitimcilerin görüşleri yukarıda verilen sırayla açıklanacaktır.

“Eşitlik yok adalet var, faydalı birey” sloganıyla eğitimin amaçlarının sanayinin ihtiyaç duyduğu bireylerin yetiştirilmesine yönelik belirlenmesi gerektiğini savunan **sanayi odaklı eğitimcilere göre** matematik gerçeklerden ve yeteneklerden oluşan bilgi ve tekniklerin bir bütünüdür. Bu eğitimcilere göre matematiksel bilgi kesin olarak ya doğrudur ya da yanlıştır ve mutlakçı görüşün benimsenmesinin bir sonucu olarak matematik evrenseldir. Matematiksel doğrular ilgili otoriteden gelir, kesindirler ve sorgu kabul etmezler. Okullarda okutulan matematik temel aritmetik işlemlerle yürütülen hesaplamaların öğretilmesini içermelidir ve okul matematiği bilginin diğer alanlarından ayrılmıştır, sosyal değerlerden muaftır. Bu eğitimcilere göre çocuk boş bir kutudur ve bilgiler doğrudan aktarılmalıdır. Dolayısıyla öğretmen otoriterdir ve tekrarlar, katı disiplin matematiğin karakteristikleridir. Becerinin kalıtsal olduğu, çaba ile geliştirilebileceği görüşündedirler. Her seviyenin ihtiyacına göre okullar olması gerektiğini savunmaktadırlar. Öğrenmede sıkı çalışma, iş-gücü, kâğıt kalem çalışmaları ve alıştırımların önemli olduğunu söylemektedirler. Onlara göre matematik eğlenme değildir, oyunla öğrenilmez. Ölçme-değerlendirmede ise verilenler doğrudan geri istenir (Baki, 2014, s. 268-285).

Teknoloji odaklı eğitimciler, sanayi toplumundan teknoloji toplumuna geçiş sürecinde ihtiyaçların değişmesiyle sanayi odaklı eğitimcilerin devamı olarak ortaya çıkan sosyal gruptur. Onlara göre matematik, yararlı ve doğruluğu sorgulanmayan bilgi bütünüdür. Okullarda pür matematiğin prensipleri ve mantıksal çıkarımlarının yerine matematiğin çoklu uygulamaları öğretilmelidir. Önemli olan hangi uygulamanın daha kullanışlı ve faydalı olduğudur. Dolayısıyla çocuklara işe yarayan bilgiler doğrudan aktarılmalıdır. Kalıtsal yetenekler baskındır. Yetenekler doğrultusunda üst düzey

beceriler kazandırılmalıdır. Öğrenme ise birey dikkatli dinler, izler, gözler ve tekrarlırsa sağlanır. Öğretmenin görevi, açıklamak, göstermek ve yaptırmaktır. Ölçme-değerlendirmede sertifika ile derecelendirme, tamamlayıcı ve performans değerlendirme vardır (Baki, 2014, s. 268-285).

“Erdemli toplum, evrensel değerlere sahip sosyalleşmiş birey” sloganıyla, bireyin entelektüel gelişimini savunan *hümanist eğitimcilere göre* bireyler klasikleri okumakla ve saf bilgileri kazanmakla yetişmiş erdemli olabilirler. Matematik saf, mantıklı yapılanmış bilgi bütünü, insanlığın en yüksek başarısı, ilimlerin kralı, mutlak doğrunun somutlaşmış halidir. Uygulamalı matematik, saf matematiğin eksik ve aşağı bir yansımasıdır. Hümanistler, toplumu hiyerarşik bir yapıya ayırdığı gibi matematiği de iyi, saf ve doğru olarak sınıflandırmaktadırlar. Okul matematiği de bu hiyerarşik yapıya uymalıdır. Matematik yeteneği ve zekâsı kalıtsaldır ve becerilerin gelişmesi doğrudan buna bağlıdır. Amaç, en üst yeteneklilere değer veren hiyerarşik bir eğitim sistemi oluşturmaktır. Öğrenme, nesnel matematik bilgisinin ve onunla bağlantılı düşünce yöntemlerinin (sadece pür konularda) anlaşılmasıdır. Öğretmenin rolü ise açıklayıcıdır. Ölçme-değerlendirmede tamamlayıcı değerlendirme esastır, sınavlarda rekabet en iyi matematikçileri bulmanın bir yoludur (Baki, 2014, s. 268-285).

Toplumun dinamik bir yapı içinde sürekli değişerek geliştiğini ve bunun da sağlıklı devam edebilmesi için bilimsel ve teknolojik gelişmeleri anlayan, kullanan, paylaşan ve üreten bireylere ihtiyaç olduğunu düşünen *ilerlemeci eğitimcilere göre* matematiksel bilgi birey tarafından bilginin üzerinin açılması neticesinde yeniden keşfedilen mutlak doğrular bütünüdür. Keşif, deneyim sonucu olmaktadır. Problemlerin bireylere bağlı olarak farklılaşan çözüm yolları olabilir. Dolayısıyla beceriler çeşitlilik gösterir, bireyseldir. Bu farklılıklar uygun ortam sağlandığında (problem çözme, proje tabanlı öğrenme, grup çalışmaları vs.) ortaya çıkar ve matematik öğrenme isteğini artırır. Aynı zamanda çocuğun gönüllülüğü de eğitimde esaslardan biridir. Öğrenmede etkinlikler, oyunlar matematiği keşfetme için kullanılabilir. Bu durumda öğretmenin esas görevi de bilgileri doğrudan aktarmak değil, rehber konumunda keşif için ortamlar hazırlamaktır. Olumlu yönlerin ölçülmesine dayalı bir değerlendirme esastır. Şekillendirici ve tanı-koyucu değerlendirmeler önerilmektedir (Baki, 2014, s. 268-285).

Üretim biçimi yaşam biçimini, yaşam biçimi kültürü şekillendirir diyerek bilginin insandan bağımsız olmadığına göre mutlak ve değişmez olmadığını savunan ***halkçı eğitimciler*** bu yönüyle sosyal oluşturmacılığı ve yarı-deneyselseliği benimserler. Dolayısıyla onlara göre matematik yanılabilir, sosyal ve kültürel bir üründür. (Bu görüş etnomatematik olarak ifade edilmektedir (Baki, 2014, s. 285).) Okul matematiği, matematiğin doğasını sosyal bir yapı olarak yansıtmalı ve en önemli amacı kritik düşünme becerisini kazandırmak olmalıdır. Öğrenme, kavramları tartışma, problem çözme ve kurma yoluyla matematikle aktif bağlantıya geçmesi sonucu gerçekleşir. Bunların sosyal etkileşim içerisinde gerçekleşmesi öğrenmeyi daha kolay ve işlevsel yapar. Öğretimde soru-cevap, tartışma, grup çalışması karşıt örnekler bulma, kanıtlama ve çürütme etkinlikleri sosyal etkileşime olanak sağladığı için önemlidir. Öğrenci kendisine sunulanı niçin öğrenmesi gerektiğini sorgulamalı ve kritik düşünme becerisi geliştirmelidir. Ölçme değerlendirmelerde kullanılacak ürün doyusu, başarı kayıtları, sorular veya projeler gibi araçlar matematiğin sosyal yönünü ortaya çıkaracak nitelikte olmalıdır. Öğretmen öğrenciyle kendisi ile ilgili değerlendirmeleri tartışmalı ve uzlaşmaya varmalıdır. Bu aynı zamanda öğrencinin öz değerlendirme yapmasını da sağlamaktadır (Baki, 2014, s. 268-285).

Buraya kadar matematik felsefesinden etkilenen sosyal gruplar ve bu grupların başta matematiğin kendisi olmak üzere beş farklı boyutta daha incelemesi açıklanmaya çalışılmıştır. Toplulukların matematiği algılayışlarının onların diğer açılardan incelenen özelliklerini de şekillendirdiği görülmektedir. Tarih boyunca filozoflar, sahip olunan bilginin doğası ile ilgili ‘*Ne biliyoruz ve nasıl biliyoruz? Bildiklerimiz mutlak hakikati yansıtır mı?*’ gibi sorular üzerinde düşünmüşlerdir (Baki, 2014, s. 288). Dolayısıyla temel olarak matematiğin algılanış biçiminin üzerine düşünceleri barındıran matematik felsefesi de matematiğin değdiği yaşamı etkilemiştir. Okul matematiğinin yapısı düşünüldüğünde ise matematiğin toplum sistemlerinin belki de en büyük ayağı olan eğitim-öğretim faaliyetlerinde yer aldığı görülebilmektedir. Matematiğin değdiği yaşam ifadesindeki kastın en fazla eğitim-öğretim faaliyetlerini kapsadığı anlaşılabilmektedir.

“Eğitimde bütünleştirici yaklaşımın öncülerinden olan Jean Piaget (1896-1980) ilk defa mutlak doğrunun araştırılmasına karşı çıkarak bilgiyi mutlak doğru olarak almak yerine onu zayıftan kuvvetliye doğru güvenilirliği ve geçerliliği değişen bir süreç gibi düşünmüştür” (Baki, 2014, s. 288). Yani, bilginin mutlak doğruluk derecesi onun güvenilirliğine ve geçerliğine bağlıdır. “Benzer şekilde Von Glasersfeld (1991) bilginin bireysel olarak kurulduğunu ve hiç kimsenin bize evren hakkında kesin bir şey söyleyemeyeceğini iddia etmektedir” (Baki, 2014, s. 289). Von Glasersfeld’e göre ‘var olmak’, en geniş anlamıyla zamanda ve mekânda bir yere sahip olmak anlamına gelmektedir. Ama Kant’ın söylediği gibi, eğer zaman ve mekân bizim deneyimlerimizle oluşturduğumuz formlar iseler ve bizim deneyimimiz dışındaki ontolojik bir gerçekliğe ait değilseler, mekân ve zaman tanımadan bizim bir şeyi tahayyül etmemizin bir yolu yoktur. Bu yaklaşım, deneyimden önce bilgiye ulaşmayı hedeflediği için von Glasersfeld, bunun yerine yaşam bilgimize nasıl ulaştığımızı göreceli olarak kapsamlı bir şekilde açıklayan bir teori geliştirilmeye çalışılmalı önerisinde bulunmuştur. Von Glasersfeld’e göre bilgi her zaman oluşturmacı/inşacı bir etkinliğin sonucudur ve dolayısıyla pasif bir alıcıya aktarılamaz. Her bilen tarafından etkin bir şekilde inşa edilmelidir demektir (Glasersfeld, 2005). Bu da “hakikat” hakkındaki bilgimizin bizim kendi tecrübemiz olduğuna işaret etmekte ve “hakikat” ile bireysel deneyimler sonucu kurulan bilginin birbirini tutup tutmadığını karşılaştırabilecek bir otoritenin de olamayacağı sonucunu vermektedir. Bu felsefi bakış, gerçeklik ile tam örtüşen bilgiyi kurmayı ümit edemeyeceğimizi ve bizim bilebileceğimiz hakikat ancak bizim hakikat ile ilgili tecrübelerimizdir anlamına gelmektedir (Baki, 2014, s. 289).

Matematiksel bilginin doğası ve mutlaklığı, bu felsefi bakış matematiğe yansıtılarak, birçok matematikçi tarafından tartışılmıştır. Bunlardan biri olan Brouwer de mantıkçıların ve biçimcilerin aksine matematiksel bilgide de yanılsamalar olabileceğini düşünerek, bize mutlak doğru bilgi gibi gelen bazı matematiksel kabullere karşıt örnekler geliştirmiştir. Baki (2014), Brouwer’in bir karşıt örneğini şu şekilde aktarmaktadır:

Brouwer, Aristo’nun “bir şey ya doğrudur ya da yanlıştır” temel kabulüne benzemeyen “bir sayı, ya sıfırdır, ya pozitifdir ya da negatiftir” kuralına π sayısının

ondalık açılımını örnek olarak göstermiştir. Brouwer bu örneğinde iki π sayısı oluşturuyor. $\pi_1=3,14\dots p$ ve $\pi_2=3,14\dots r$ ve bu iki sayıyı birbirinden çıkarıyor $\pi_2-\pi_1=q$. Brouwer'a göre hiç kimse q sayısının pozitif, negatif veya sıfır olduğunu gösteremez. Çünkü virgülden sonra π sayısı ardışık olarak belli bir sayıyı tekrar edebilir. Bu sayı 0 olabilir. Virgülden sonra belli bir yerde bu sayı arka arkaya devam edebilir. Bu durumda r ve p 'nin yerleri farklı olsa da arka arkaya devam eden sıfırlardan olabilir. Bunun anlamı $p=r$ dir (Baki, 2014, s. 289).

Baki, bu örneğin matematiksel kesinliğin yanında matematiğin zaman bağımlılığı boyutu da olduğunu söylemektedir. Brouwer'in zamanında henüz bilgisayar teknolojisi ile π sayısı virgülden sonra milyon basamağa kadar genişletilemediği için; bu örnekte π_2 ve π_1 sayılarını tahmini olarak oluşturmuştur. Böylece Brouwer'in örneği matematiksel bilginin doğasının deneysel (*empirical*) ve aynı zamanda zaman-bağımlı (*time dependent*) olduğunu ima etmektedir. Ünlü Türk matematikçi Harizmi de "Hiç kimse çemberin çevresini tam olarak hesaplayacak kesin bir yol bulamaz. Benim verebileceğim en iyi yöntem, çapı $22/7$ ile çarpmaktır. Bu en kolay ve en çabuk yoldur. En doğrusunu Allah bilir." diyerek Brouwer gibi bizim bilebileceğimiz hakikatin ancak bizim tecrübelerimizle sınırlı olduğunu düşünmektedir (Baki, 2014, s. 289-290).

Matematikte bir argümanın ispatlanması, hipotezi doğru iken hükmünün de doğruluğunun gösterilmesi anlamına gelmektedir. Kanıt, argümanı savunmak için gerekli olan araçtır. Bir önermenin kanıtı farklı yöntemlerle yapılabilmektedir (Çevik, 2019, s. 19).

Tablo 2.3. Kanıt yöntemleri (Çevik, 2019, s. 19-26).

Kanıt Yöntemleri
Düz kanıt
Devrik kanıt
Çelişkiye indirgeme/Olmayana ergi
Tümevarımla kanıt

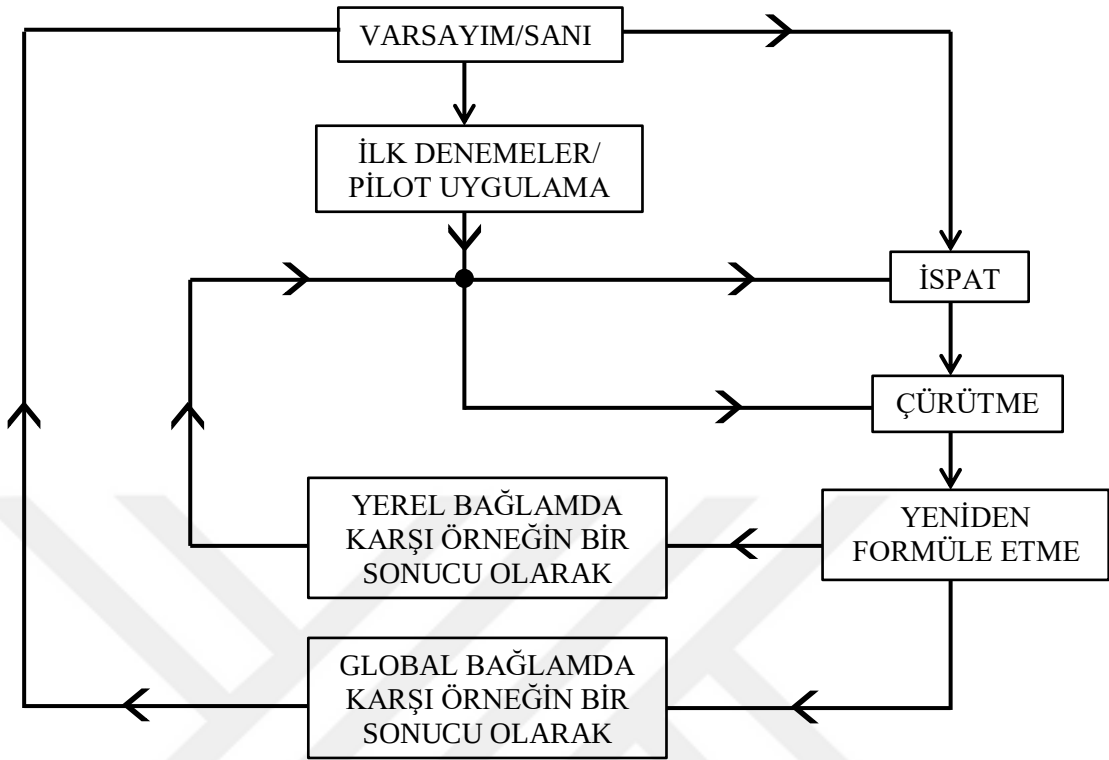
Matematik tarihi boyunca problemlerin ispatlanmasında Tablo 2.3.'te yer alan ispat çeşitlerinin hepsi kullanılmıştır. Örneğin; neredeyse 2300 yıl kadar önce Euclid,

$\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olmadığına ispatını olmayana-ergi yöntemini kullanarak vermiştir. Bu ispata göre; öncelikle $\sqrt{2}$ 'nin rasyonel olduğu kabul edilir. Dolayısıyla rasyonel sayı tanımına göre $\sqrt{2}$ sayısı a/b şeklinde iki tam sayının (aralarında asal tam sayılar olmalı) birbirine oranı olarak yazılabilmektedir. Yani ispatlanması beklenen iddia $\sqrt{2}$ sayısının a/b şeklinde yazılabildiği a ve b ($b \neq 0$) gibi iki tam sayı yoktur, olur. Buraya kadar varsayılan haline göre şu işlemler yapılabilmektedir: $\sqrt{2}=a/b$ ve $2=a^2/b^2$. Buradan $a^2=2b^2$ ifadesine ulaşılabilmektedir. Yani a^2 sayısı çifttir, dolayısıyla a sayısı da çifttir. Bu da m bir tam sayı olacak şekilde $a=2m$ biçiminde yazılabilir. Buradan $a^2=4m^2=2b^2$ ve $2m^2=b^2$ ifadesinden b^2 'nin çift, yani b 'nin de çift sayı olduğu sonucuna ulaşılabilmektedir. Bu da n bir tam sayı olacak şekilde $b=2n$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda hem a sayısı hem de b sayısı herhangi m ve n tam sayılarının iki katı şeklinde yazılabilen çift sayılardır sonucuna ulaşılmaktadır. Dolayısıyla ilk başta varsayılan a ve b ($b \neq 0$) aralarında asal olan tam sayılardır ifadesiyle çelişki bulunmuş olur. Yapılan işte, hükmün olumsuzundan hareketle hipotezin olumsuzu elde edilmiştir. İspat yapılırken kullanılan bu yöntem olmayana-ergi yöntemi denir.

Başka bir örnek olarak öğretmenin 1'den 100'e kadar olan sayıların toplamını istemesinin ardından çok kısa bir süre sonra cevap vererek küçük yaşlarda matematiğe ilgisinin ne derece önemli olduğu belli olan Gauss'un ardışık sayılar toplamının ispatı tümevarım yöntemiyle yapılabilmektedir. Önerme ($P(n)$) şu şekildedir: n bir doğal sayı olmak üzere, 1'den n 'ye kadar olan ardışık sayıların toplamı $n.(n+1)/2$ 'dir. Tümevarım ile ispat şöyle başlatılır: $P(1)=\frac{1.(1+1)}{2}=1$ 'dir. Bunun k doğal sayısı için doğru olduğunu varsayarak $k+1$ için ispatlayalım. $P(k)=1+2+3+\dots+k=\frac{k.(k+1)}{2}$ olur. $P(k+1)=1+2+3+4+\dots+k+(k+1)$ ifadesinde 1'den k 'ye kadar olan doğal sayıların toplamı bundan önce $P(k)=\frac{k.(k+1)}{2}$ şeklinde bulunduğu için $P(k+1)=\frac{k.(k+1)}{2}+(k+1)$ olur. Bu ifadedeki toplama $P(k+1)=\frac{k.(k+1)+2.(k+1)}{2}$ yapıldıktan sonra $P(k+1)=\frac{(k+1)+(k+2)}{2}$ ifadesine ulaşılır. Dikkatle bakıldığında bu toplamın $P(k+1)=\frac{(k+1)+((k+1)+1)}{2}$ biçiminde yazılabildiği anlaşılmaktadır. Dolayısıyla burada özel bir durumdan genel bir duruma doğru önermeler işlenerek tümevarım ispatı yapılmıştır. Elbette ki Gauss'un ardışık

sayılar toplamının tümevarım dışında başka şekilde de ispatları mevcuttur. Yöntem olarak tümevarımın sınırlı kaldığı örnekler de bulunabilmektedir.

Matematik tarihi içerisinde ispatlama yöntemlerinin tartışıldığı ve hatta -örneğin olmayana-ergi yöntemiyle yapılan ispatların doğruluğuna inanmayan oluşturmacılar gibi- yeni düşünceler ortaya çıkardığı zamanlar vardır. Matematik eğitimi felsefesi başlığına kadar olan kısımda, *tümevarımlı olarak kurulan kavramlar, teoremler tümdengelimli olarak kanıtlanıyor* (Baki, 2014, s. 251), şeklinde bir açıklama ile yarı-deneyselci görüşün fikri bildirilmişti. Bu durum matematiğin tümdengelimli doğasını önemsiz yapmak yerine, matematiğin deneysel yanının görülmesine yardımcı olmuştur (Baki, 2014, s. 290). Lakatos'un Popper'ın yanlışlırlık teorisini matematik felsefesine yansıttığı kendi görüşlerini pür deneysellikten ayırmak için yarı-deneysellik (*quasi-empiricism*) terimini kullanmıştır. Lakatos matematiğin sadece pür deneysel bir tecrübe olmadığını söylerken onun sadece tümdengelimli, teorik ve soyut bir bilgi de olmadığını belirtmektedir (Baki, 2014, s. 290). Lakatos kendi görüşlerini *İspatlar ve Çürütmeler* kitabında Euler formülünün Cauchy'ye ait geleneksel ispatını anlatan bir örneği sınıf ortamında, öğretmen ve öğrencilerin tartışmaları üzerinden anlatmaktadır. İddiaların doğruluğu hipotezler, örnekler ve karşı örneklerle geliştirilerek ispatlanmıştır. Lakatos'un kitabında şekil olarak böyle bir anlatım biçimini kullanması bizim onun görüşlerinin matematik öğrenimi ve öğretimine uyarlanmasını anlamamızı kolaylaştırmaktadır.



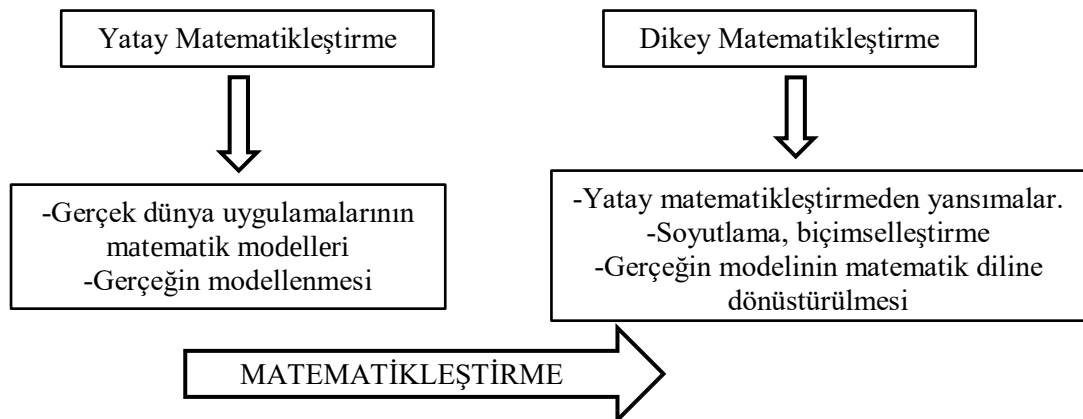
Şekil 2.2. Matematiksel keşfe götüren keşifsel stratejiler için sadeleştirilmiş Lakatos modeli (Hersh, Davis ve Marchisotto, 2020, s. 324).

Lakatos'un matematik yapma yaklaşımına göre “tartışma yoluyla, fikirlerin paylaşılması yoluyla böyle bir ortamda öğrencilerin akıl yürütme ve problem çözme becerilerini geliştirebileceği açıktır” (Baki, 2014, s. 302). Genel anlamıyla matematik kültürü için formülleştirilen Lakatos'un ispat ve çürütmelere dair bu keşifsel örneği, kuşkusuz, bireyler tarafından yeni matematik üretme süreçlerine de uygulanabilir (Hersh vd., 2015, s. 324).

Matematik felsefesinin matematik öğrenme ve öğretme yaklaşımlarına etkisinin, yani matematik sınıflara taşınmasının bir başka örneği olarak Freudenthal'in gerçekçi matematik yaklaşımı verilmektedir. Amerika'da 1960'lı yıllarda başlayan modern matematik hareketine benzer bir hareket olarak gerçekçi matematik (*realistic mathematics*) bir öğrenme öğretme yaklaşımı olarak 1970'li yıllarda Hollanda'da ortaya çıkmıştır. Bu yaklaşım günümüzde bağlam temelli öğrenme yaklaşımı olarak önerilmektedir. Freudenthal okullarımızda matematiği öğrencinin karşısına işlemsel bilgiye odaklanan, tamamlanmış ve son şekli verilmiş kapalı bir sistem olarak çıkarmak

yerine insan etkinliği olarak çıkarılması gerektiğini vurgulamaktadır. Bu şekilde matematiğin daha anlamlı ve daha gerçekçi olacağını belirtmektedir. Freudenthal'ın matematiği insan etkinliği olarak görmesi ve matematiğin tarihsel gelişiminin matematikçilerin gerçek hayat problemleri üzerinde çalışmalarıyla mümkün olduğuına işaret etmesi Freudenthal'i bir uzlaşı arayışı içinde deneyselcilerle biçimciler arasında bir yere oturtmaktadır.

Freudenthal, matematiği matematikleştirme etkinliği olarak tanımlamaktadır. Bu noktada matematik ğretiminde matematiğin tarihinden yararlanılmasına ve insan etkinliği olarak gerçek hayat durumlarıyla ilişkilendirilmesine vurgu yapmaktadır. Matematiğin zihinde canlandırılan ve anlamlaştırılan etkinlikler ile yaparak yaşayarak öğrenilebileceğini savunmaktadır. Bunun sadece matematikçilerin etkinlikleri değil, tarih boyunca insanların uğraştığı gerçek hayat problemleri olduğunu da vurgulamaktadır. Yani, öğrenciye sunulan matematik kendi bağlamından uzak olmamalıdır. Freudenthal önce gerçek hayatın matematikleştirildiğini, ardından formel matematik bilginin elde edildiğini söylemektedir. Bu süreci yatay matematikleştirme ve dikey matematikleştirme olarak ele almış ve aşağıda bu sürecin şematiği gösterilmiştir (Baki, 2014, s. 293-294).



şekil 2.3. Freudenthal'ın matematikleştirme sürecinin şematiği (Baki, 2014, s. 294).

Yatay matematikleştirme sürecinde karşılaşılan durumu anlamak ve açıklamak için bireyin gözlemler yapması, deneyler/ölçümler yapması, veri toplaması, modeller, grafikler, şemalar ve tanımlar kullanması gerekmektedir. Dikey matematikleştirme

sürecinde ise bu veriler, modeller, grafikler, şemalar ve tanımlar kullanılarak karşılaşılan durumun sembolleştirilmesi, formülleştirilmesi, soyutlaması yapılır. Bu sürecin sonunda yeni bir tanıma, formüle veya teoreme ulaşarak soyutlama tamamlanır (Baki, 2014, s. 294).

Matematikleştirmede gerçek dünyadan seçilen bir örnekle başlamak etkinliği tümevarımlı bir keşfe dönüştürür. Ancak tümdengelimli keşfetme ya da yeniden inşa etme de söz konusudur ve üzerinde çalışılacak durumun gerçek hayattan seçilmesi gibi bir zorunluluk yoktur. Önemli olan üzerinde çalışılacak durumu öğrencinin zihninde canlandırmasıdır. Gerçekçi matematikte amaç matematiğin öğrenci için anlamlı olması ve kendisine sunulan durumu “realize” etmesi, zihninde canlandırması, mantıklı hale getirmesidir (Baki, 2014, s. 294-297).

Matematiğin yanılabilir, sosyal ve kültürel bir ürün olduğunu savunan etnomatematik görüşünün yansıtıldığı sınıf örnekleri de mevcuttur. Baki (2014, s. 303-306), Belçika’da bir okulda yürütülen etnomatematik projesindeki Kızılderili çadırı örneğini Selçuklu kümbetinin inşasıyla ilgili bir örneğe uyarlayarak, etnomatematiğin okul matematiğine uygulanabileceğine dair örnek sunmaktadır.

Buraya kadar matematik felsefesinin öğrenme ve öğretme yaklaşımlarına yansımalarının anlaşılabilmesi için birtakım örnekler sunulmuştur. Matematik sınıflarına getirilebilecek etkinliklerin pratikte zenginleştirilmesinin çok kolay olmadığını ifade eden Baki (2014, s. 306-307), bu zorluğun önündeki en önemli engelin öğretmenlerin matematiğin doğasıyla ilgili, kendi rolleriyle ve öğretme ile ilgili inançları olduğunu söylemektedir. Öğretmenin felsefeyi öğretime katmasının öğretimi zenginleştireceğine inanması gerektiğini de vurgulamaktadır.

Örnek gösterilen birçok öğrenme ve öğretme yaklaşımlarından ve bir önceki paragrafta yer verilen görüşten dolayı; bu çalışmanın araştırma problemlerine daha sağlıklı cevaplar üretilebilmesi için matematik felsefesinin matematik sınıflarına etkisinden söz etmenin gerekliliği görülmüştür.

III. BÖLÜM

3.Yöntem

3.1.Araştırmanın Modeli

Bu araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden biri olan “doküman inceleme” kullanılmıştır. “Doküman incelemesi, hem basılı hem de elektronik materyalleri incelemek veya değerlendirmek için sistematik bir işlemdir. Diğer araştırma yöntemlerinde olduğu gibi, doküman incelemesi de anlam çıkarmak, anlayış kazanmak ve ampirik bilgi geliştirmek için verilerin incelenmesini ve yorumlanmasını gerektirir” (Bowen, 2009; akt. Özkan, 2020, s. 2). Bu araştırma Reuben Hersh’in matematiksel deneyiminin felsefesinin ne olduğunun anlaşılmasını ve Hersh’in matematiksel deneyiminin felsefesinin matematik eğitimi açısından doğurgularını ortaya koymayı amaçlamaktadır. “Doküman incelemesi, araştırma konusuyla ilgili bir dokümanın özetini çıkarmak veya açıklamasını yapmaktan ziyade dokümanın içeriğinin bir analizini ve çoğu durumda da belirli bir tarihsel veya çağdaş bağlam içerisinde dokümanda verilmek istenen mesajın, niyetin ve güdünün incelenmesini içermektedir” (Harvey, 2018; akt. Özkan, 2020, s. 3). Dolayısıyla Hersh’in matematiksel deneyiminin felsefesinin ne olduğunun anlaşılması, bunun matematik eğitimi açısından doğurgularının ortaya çıkarılarak matematik eğitimi için anlayış kazanılması hedeflendiğinden bu araştırmada araştırma yöntemi olarak doküman incelemesi kullanılmıştır. “Doküman incelemesi, araştırma yöntemlerinin birincil kaynağı olarak çeşitli dokümanların toplanması, gözden geçirilmesi, sorgulanması ve analizi olarak tanımlanabilmektedir” (O’leary, 2004; akt. Özkan, 2020, s. 5). Bu bütünlüğe uygun olarak yapılan bu araştırmada, bahsedilen aşamalar devam eden başlıklarda doküman incelemesinin kavramsal desteği ile birlikte açıklanmaktadır.

3.2. Veri Toplama Süreci

“Dokümanlar, bir araştırmacının müdahalesi olmadan kaydedilen metin (kelimeler) ve resimler içermektedir.” (Bowen, 2009, s. 27). “İşitsel ve görsel kayıtlar gibi materyalleri de kapsayan dokümanlar, genellikle, yazılı bir metne sahip olmaları esas özellikleri olan eserlerdir” (Scott, 1990; akt. Özkan, 2020, s. 15). “Dokümanlar bir amaca yönelik olarak yazılmıştır, belirli varsayımlara dayanmaktadır, belirli bir şekilde ya da tarzda sunulmaktadır ve bu ölçüde araştırmacı, dokümanların kökenini, amacını ve orijinal kitesini tam olarak bilmelidir” (Grix, 2001; akt. Özkan, 2020, s. 15).

Bu araştırmanın araştırma problemleri bir pür matematikçinin matematiksel deneyiminin felsefesinin ne olduğunun bir açıklamasını sunmayı ve bu bakış açısının matematik eğitimi açısından doğurgularının ortaya konmasını hedeflediğinden, ele alınan dokümanlar, bizzat Reuben Hersh’in kaleminden çıkmış ve dilinden söze dökülmüş olan yazılı ve görsel/işitsel kaynaklardan oluşmaktadır. Araştırmanın konusuna karar verildiğinde Reuben Hersh ile ilgili farklı kaynakların araştırması yapılmıştır. Araştırma sürecinin ilk safhalarında iletişime geçilen Reuben Hersh de araştırmada kullanılabilecek kaynaklar önermiştir. Örneğin dokümanlar arasında Reuben Hersh hakkında, kendisinin 90. doğum gününe özel olarak yazılan ve bizzat onayladığı *Humanizing Mathematics and its Philosophy: Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh* (Sriraman, 2017) adlı kitap da bu araştırmanın verilerinden biri olmaktadır. Dolayısıyla araştırmada kullanılan dokümanlara; araştırmacının kendi araştırmasının yanında, Reuben Hersh’in bizzat kendi önerileri üzerine de ulaşılmıştır. Ele alınan dokümanların listesinin son hale gelmesi süreci içerisinde dokümanlar okunurken ve literatür taraması yapılırken, eldeki dokümanların yararlandığı kaynaklar da zaman zaman eklenerek dokümanların listesi ve sayısı aşağıda sunulan Tablo 3.1. deki haline ulaşmıştır. Doküman incelemesi yöntemi içerisinde Reuben Hersh’in kitapları, makaleleri, kitap incelemeleri ve röportajları bu araştırmanın dokümanlarını oluşturmaktadır.

Tablo 3.1. Tez çalışmasının doküman analizinde incelenen Reuben Hersh'e ait kaynakların listesi.

Sıra No	Kaynağın Adı	Kaynağın Türü	Kaynakça
1	Tüm Yönleriyle Matematiksel Deneyim	Kitap	Hersh, R., Davis, P. J. & Marchisotto, E. A. (2015). (Çev. Durmuş S. & Erçuar İ.O.) Ankara: Nobel Yaşam. (Orijinal Çalışmanın Yayın Tarihi 1995).
2	What is Mathematics, Really?	Kitap	Hersh, R. (1997). New York: Oxford
3	18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics	Kitap	Hersh, R. (Ed.) (2006). USA: Springer
4	Experiencing Mathematics What Do We Do, When We Do Mathematics?	Kitap	Hersh, R. (2014). USA: AMS
5	Sevgi mi, Nefret mi? Matematik Aşkı - Matematik Efsaneleriyle Savaşmak	Kitap	Hersh, R. & John-Steiner, V. (2018). (Çev. Kesici, Ö.) Ertem Basım Yayın: Doruk. (Orijinal Çalışmanın Yayın Tarihi 2011).
6	Humanizing Mathematics and its Philosophy: Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh	Kitap	Sriraman, B. (Ed.) (2017). Switzerland: Birkhäuser
7	A University Mathematician's View of What's Wrong with University Mathematics Education	Makale	Hersh, R. (1995). Humanistic Mathematics Network Journal, 12(8).
8	Heron' Area Formula: What About a Tetrahedron?	Makale	Hersh, R. (2004). The College Mathematics Journal, 35(2), 112-114.
9	Independent Thinking	Makale	Hersh, R. (2003). The College Mathematics Journal, 34(2), 112-115.
10	Death and Mathematics Poems	Makale	Hersh, R. (2013). The Mathematical Intelligencer, 35(1).
11	Freud on Math	Makale	Hersh, R. (1995). The Mathematical Intelligencer, 17(4).
12	How to Do and Write Math Research	Makale	Hersh, R. (1997). The Mathematical Intelligencer.
13	Under-represented Then Over-represented: A Memoir of Jews in American Mathematics	Makale	Hersh, R. (2010). The College Mathematics Journal, 41(1), 2-9.
14	The "Origin" of Geometry	Makale	Hersh, R. (2002). The College Mathematics Journal, 33(3), 2-9.

15	Some Proposals for Reviving the Philosophy of Math	Makale	Hersh, R. (1979). Advances in Mathematics, 31, 31-50.
16	An Interview with AMS author Reuben Hersh	Röportaj (5 video)	https://www.youtube.com/watch?v=tYgiVnQubyw&list=PLW-VhlPXy1DW6al9dr8rsXKvDIXc7vhhq
17	How Humans Learn to Think Mathematically, Exploring The Three World of Mathematics by David Tall	Kitap incelemesi	Hersh, R. (2015). The American Mathematical Monthly, 122(3), 292-296.
18	Elements of Math From Euclid to Gödel by John Stillwell	Kitap incelemesi	Hersh, R. (2017). The American Mathematical Monthly, 124(5), 475-478.
19	Novelty Wins, “Straight Toward Objective” Loses! or Book Review: Why Greatness Cannot Be Planned: The Myth of The Objective by Kenneth O. Stanley and Joel Lehman	Kitap incelemesi	Hersh, R. (2015). Journal of Humanistic Mathematics, 5(2), 161-165.
20	“What Kind of Thing Is a Number?” A Talk With Reuben Hersh	Röportaj	https://www.edge.org/conversation/reuben_hersh-what-kind-of-thing-is-a-number

Not: Tablo 3.1. de verilen kaynakların tümünün incelenmesiyle, Reuben Hersh’in birçok kaynağında tekrarlarına rastlanmıştır. Dolayısıyla tümünün incelenmesine rağmen, araştırma içerisinde kaynak gösterilen dokümanlar tümü değildir.

3.3. Geçerlik ve Güvenirlik

İncelenen doküman sayısı ve çeşidinin fazla olması bu araştırmanın güvenilirliğini artırırken; Reuben Hersh’in neredeyse 40 yıla yayılmış ve aralarında uzun veya kısa zaman farkıyla yayınlanan eserlerinde sağladığı bütünlük araştırmanın geçerliğini artırmaktadır. Geçerlik ayrıca, Reuben Hersh’in eserlerinde ve söylemlerinde tekrar eden ve tekrarı olsa da güncellenen birçok kavramın görülmesiyle de desteklenmektedir.

3.4. Veri Analizi

“Doküman incelemesinde analitik işlem süreci, dokümanlarda yer alan verilerin bulunmasını, seçilmesini, değerlendirilmesini (anlamlandırılmasını) ve sentezlenmesini içermektedir” (Bowen, 2009; akt. Özkan, 2020, s. 2). “Doküman incelemesi, özellikle içerik analizi yoluyla daha sonradan ana temalar, kategoriler ve olay örnekleri hâlinde düzenlenmiş olan veriyi (parça, alıntı veya tüm bölümleri) açığa çıkarmaktadır” (Labuschagne, 2003; akt. Bowen, 2009, s. 28). Bu çalışmada da araştırma yöntemi olarak kullanılan doküman incelemesine uygun olarak, verilerin analiz edilmesinde “içerik analizi” kullanılmıştır.

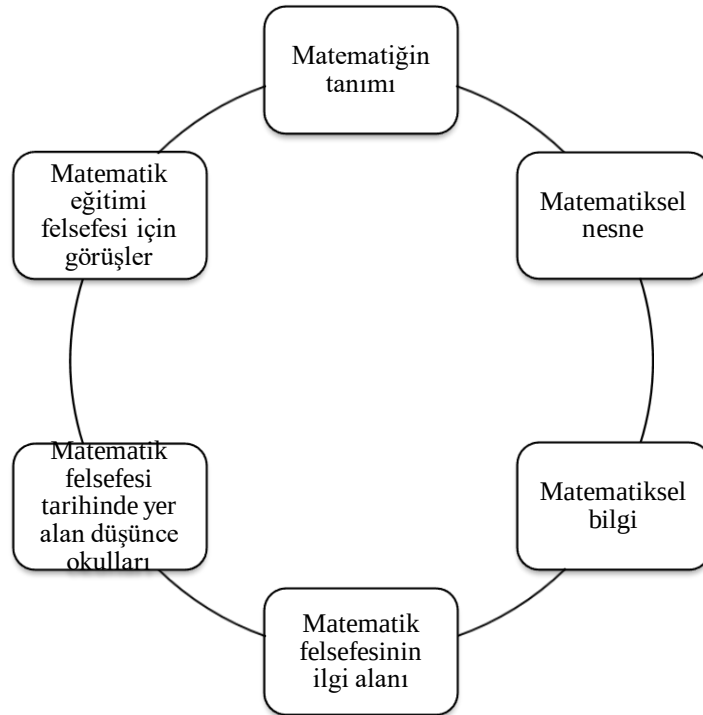
“İçerik analizi, dokümanlardan, dokümanların içeriğine tekrarlanabilir ve geçerli çıkarımlar yapmak için kullanılan bir tekniktir” (Krippendorff, 2004; akt. Özkan, 2020, s. 37). “İçerik analizinde temel amaç, toplanan verileri açıklayabilecek kavram ve ilişkilere ulaşmaktır” (Yıldırım ve Şimşek, 2018, s. 242). “Çıkarsama mefhumunun bilhassa önemli olduğu içerik analizinde, araştırmanın amacına ulaşması için analitik kurgular veya sonuç çıkarmaya yönelik kurallar kullanır” (White ve Marsh, 2006; akt. Özkan, 2020, s. 37).

“İçerik analizi, belgelerden röportajlara, medya ürünlerinden kişisel görüşmelere kadar her türlü yazılı materyal ile gerçekleştirilebilir” (Cohen ve diğerleri, 2007; akt. Özkan, 2020, s. 39). Reuben Hersh’in yazarı/konuşmacısı olduğu ve önerdiği yazılı ve işitsel/görsel kaynaklardan oluşan dokümanların analiz edilmesinde kullanılan “içerik analizinde, temelde yapılan işlem, birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlayabileceği bir biçimde düzenleyerek yorumlamaktır” (Yıldırım ve Şimşek, 2018, s. 242). Verilere ulaşıldıktan sonra verilerin belirli kategorilere ayrılması ve veriler arasında ilişkilerin oluşturulması süreci başlamaktadır. Bir kategori oluşturabilme, metnin dikkatlice okunmasını gerektirmektedir. Defalarca okumak ise kategorileri daha geniş başlıklar altında ele almayı sağlamaktadır (Bastem, 2018, s. 44).

Literatür taraması esnasında bir matematik felsefesi tarihi içerisinde yer alan düşüncelerin neredeyse tüm ilgili kaynaklarda ele alındığı görülmüştür. Dolayısıyla bir matematik felsefesi düşüncesinin açıklanmasında gerekli olabilecek kavramlara literatür

taraması sırasında karar verilmiştir. Reuben Hersh'in dokümanlarının incelenmesi ve elbette tüm araştırmalarda olduğu gibi literatür taraması araştırmanın bütününe yayılan, kapsayıcı süreçlerdir. Yapılan dikkatli okumalar, bir matematik felsefesi düşüncesinin açıklanmasında gerekli olabilecek kavramların kuramsal çerçeve ve ilgili literatür kısmındaki başlıklar haline gelmesini sağlamış; matematiğin tanımı, matematiksel nesneler, matematiksel bilgi, matematik felsefesinin ilgi alanı, matematik felsefesi tarihinde yer alan düşünce okulları, matematik eğitimi felsefesi şeklinde kategoriler oluşturulmuştur. Bu kategoriler bulgular kısmında Reuben Hersh'in görüşlerinin sunulmasında da kaynak olmaktadır.

Tablo 3.1.'de verilenlere göre bu araştırmada 6 kitap, 5 video ve 1 metin şeklinde yer alan röportajlar, 1 kitap incelemesi ve 4 makale doküman olarak kullanılmıştır. Dokümanlardan elde edilen verilerin analizinde ilgili literatür kısmında belirlenen kategoriler temel alınırken, dokümanların incelenmesinin devam ettiği süreçte de kategoriler yeniden ve yeniden şekillenmiştir. Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesinin en iyi şekilde anlaşılması için literatür taraması ve dokümanların incelenmesinden elde edilen kategoriler aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.



Şekil 3.1. Reuben Hersh'in kaynaklarından elde edilen bulguların incelenmesinde belirlenen kategoriler.

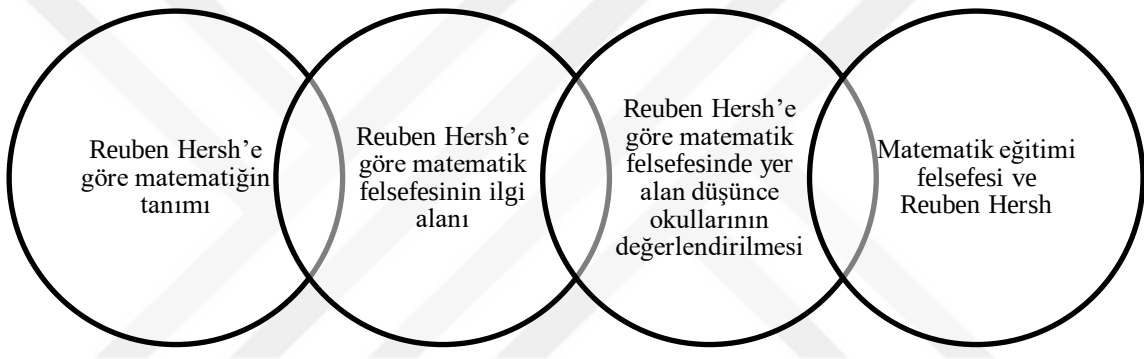
Verilerin analizi sırasında Reuben Hersh'in genel olarak Şekil 3.1'de belirlenen kategorilerdeki kavramlar hakkında yazdığı/söylediği görülmüştür. Verilerin analizinden elde edilen bulguların sunumu, kuramsal çerçeve ve ilgili literatür kısmında verilen anlatım ile benzerlik taşımaktadır. Reuben Hersh kitaplarında yer verdiği içerikleri bütüncül bir yaklaşımla sunarken, anlatımında olgusal ve tarihsel bir tavır takınmaktadır. İncelenen dokümanların içeriğinde ve anlatımında görülen bu yaklaşım, bu araştırmanın bulgularının sunulmasına da etki etmiştir. Bulgular, belirlenen kategoriler altında incelenerek Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesini ve matematik eğitimi felsefesi görüşlerini en iyi şekilde yansıtmak üzere, bütüncül ve tarihsel bir anlatım ile sunulmaktadır. Bu noktada bulguların sunumunda belirlenen başlıklar aşağıdaki gibi son şeklini almıştır:

- Reuben Hersh'e göre matematiğin tanımı
- Reuben Hersh'e göre matematik felsefesinin ilgi alanı
- Reuben Hersh'e göre matematik felsefesinde yer alan düşünce okullarının değerlendirilmesi
 - Reuben Hersh'in ana akım matematik felsefesi (Mulakçı) düşüncelerini değerlendirmesi
 - Reuben Hersh'in "Hümanistler ve başına buyruklar (maverick)" adıyla sınıflandırdığı modern matematik felsefesindeki düşünceleri değerlendirmesi
- Matematik eğitimi felsefesi ve Reuben Hersh

IV. BÖLÜM

4.Bulgular

Araştırmanın bulguları Şekil 4.1.de verilen kategorilerde sunulmaktadır.



Şekil 4.1.Bulguların sınıflandırılması

4.1.Reuben Hersh'e göre matematiğin tanımı

Reuben Hersh (1979), matematiğin fikirlerle ilgilendiğini ifade ederek matematiksel bilginin özelliklerini şu üç noktada belirtmektedir: (1) Matematiksel nesneler insanlar tarafından icat edilir veya yaratılır. (2) Bunlar keyfi olarak değil, var olan matematiksel nesnelerle yapılan etkinliklerden ve bilim ve günlük yaşamın ihtiyaçlarından kaynaklanır. (3) Bir kez yaratıldığında, matematiksel nesneler iyi belirlenmiş, keşfedilmede büyük zorluk yaşayabileceğimiz, ancak bunlar hakkındaki bilgilerimizden bağımsız olarak sahip olunan özelliklere sahiptir. Hersh, çelişkilerin analiz edilmesi ve felsefi sonuçlarının incelenmesi ile matematiksel bilginin

özelliklerinin, anlaşılması gereken deneyimin gerçekleri olduğunu ifade etmektedir (Hersh, 1979, s. 44).

Matematiksel nesnelerin insanlar tarafından icat edildiğini veya yaratıldığını söylemek; onları kayalar, X ışınları veya dinozorlar gibi doğal nesnelerden ayırmaktır. Oluşturulduktan ve iletdikten sonra, matematiksel nesneler *oradadır (there)*. İnsan kültürünün bir parçası haline gelirler, yaratıcılarından ayrılırlar. Bu nedenle, onlar keşfedebilecek veya edilemeyecek, kendilerine ait iyi belirlenmiş özelliklere sahip oldukları için şimdi nesnedirler. Bir sayı, bir matris ve bir küme birer matematiksel nesnedir. Sayma fikrine sahip olmak için paraları, blokları veya çakıl taşlarını kullanma deneyimine ihtiyaç vardır. Bir açı fikrine sahip olmak için kâğıdın veya kumun üzerinde, kesişen düz çizgiler çizme deneyimine ihtiyaç vardır (Hersh, 1979, s. 44-45). Dolayısıyla matematiğin ilgilendiği fikirler, insan zihninin ürünleridir. İnsan zihni de fikirlerle doludur. Bu fikirler ise deneyimle gelişmektedir.

Matematikle en az ilgilenen ya da onunla ilgilenen diğer insanları gözlemleyen kimseler bile, matematiksel çalışmanın fikirlerle çalışmak olduğunun farkındadır. Semboller tıpkı müzikal puanlar, müziğe yardımcı olduğu gibi düşünmeye yardımcı olarak kullanılır. Müzik önce gelir, notaya çevirme daha sonra gelir. Dahası, notaya çevirme asla bestecinin müzikal düşüncelerinin tam bir somut örneği olamaz. Şöyle biliyoruz ki, bir dizi aksiyom ve tanım, bir matematiksel düşüncenin ana özelliklerini tanımlama çabasıdır. Yalnız, formal olarak açıkça kullanmadığımız o fikre ait bir yön kalabilir, çünkü bu konuda olası bir şüpheyi götürecek bir durumdan haberdar olduğumuz karşı bir örnek görmemiş olabilir (Hersh, 1979, s. 40).

Hersh, deneyimlerin fikirleri ve fikirlerin de matematiksel düşüncelerin ana özelliklerini tanımladığını ifade etmektedir. Ancak bu noktada her bir insanın deneyimlerinin farklı farklı iken aynı zamanda bunlardan oluşan fikirlerin ürettiği matematiksel düşüncelerin nesnel olması çelişkili bir durum gibi görünebilmektedir. Ortak görüşümüzün örtük özelliklere sahip olduğunu ifade eden Hersh (1979), bunun nasıl olduğunu dilbilim problemleriyle karşılaştırarak açıklamaktadır:

Hiç kimse, dilin konuşmacılar tarafından bilinmeyen gizemli, karmaşık özelliklere sahip olmasının nasıl olduğunu açıkça bilmiyor. Yine de, hiç kimse bu özelliklerin odağının dış dünyada veya ideal bir dünyada değil, konuşmacı dil kültüründe olduğundan şüphe duymaz. Matematiksel nesnelerin özellikleri de paylaşılan fikirlerin özellikleridir (Hersh, 1979, s. 46).

Buradan matematiğin dünyadaki “gerçekliklere” nasıl uyabildiği sorusuna Hersh (1979) bu düşüncesi ile uyumlu bir cevap üretmektedir: *“İnsanlar dünyada yaşarlar ve tüm fikirleri eninde sonunda, insanların biyolojik doğasına ve fiziksel çevresine dayanan kültürleri ve tarihleriyle kırıldıkları dünyadan gelir. Matematiksel fikirlerimiz, akciğerlerimizin bu gezegenin atmosferine uygun olması nedeniyle dünyaya uyar”* (s. 46).

İkinci bölüm içerisinde matematiğin tanımı verilmeye çalışılırken Platon, Cahit Arf, İbn Haldun, Gauss, Whitehead gibi isimlerin matematik hakkında söyledikleri ifadeler yer verilmiştir. Dolayısıyla matematiğin nasıl bir şey olduğu ile ilgili birçok cümle olmasına rağmen, matematik budur denilebilecek, herkes tarafından net bir şekilde ifade edilebilen tek bir tanım cümlesinin varlığından söz edilememektedir. Reuben Hersh (vd., 2015), matematik felsefesinde kendi matematiksel deneyimine vurgu yaparken, matematiğin tanımının ne olduğu sorusuna da şöyle bir cevap üretmiştir: *Matematiğin tanımı değişir. Her bir nesil ve her bir nesil içinde düşünce üreten matematikçiler kendi kanaatlerine göre tanımlar formüle ederler* (s. 8).

4.2.Reuben Hersh’e göre matematik felsefesinin ilgi alanı

Reuben Hersh (1979), matematik felsefesi hakkındaki tutumunu ortaya koymak için (1) çalışan matematikçinin felsefi durumunun ne olduğu, (2) bu durumun nasıl ortaya çıktığı ve (3) kaçmanın mümkün olabildiği bir yön önerdiği üç argüman sunmaktadır. Çalışan matematikçinin felsefi durumunu şöyle ifade etmektedir:

Bu konuda yazarların çoğu, tipik çalışan bir matematikçinin hafta içinde Platoncu ve hafta sonunda biçimci olduğu konusunda anlaşır. Bir başka deyişle matematik yaparken, özelliklerini belirlemeye çalıştığı bir nesnel gerçeklikle uğraştığına inanmaktadır. Fakat sonra gerçekliğinin felsefi bir tanımını yapması istendiğinde, hiç inanmıyormuş gibi davranmayı daha kolay bulur (Hersh, 1997, s. 32; Hersh vd., 2015, s. 359).

Hersh (1979); Frege ve Russell'dan Brouwer, Hilbert ve Gödel'e kadar büyük temelci tartışmaları döneminin sonucu olarak matematik felsefesinde mevcut bir çıkmazda olduğunu ve çoğu matematikçinin çalışmalarının doğası ve anlamı hakkında iki çelişkili görüşle yaşadığını belirtmektedir. İhtiyaç duyulan şey mantıkçılık, biçimcilik veya sezgiciliğin çeşitli 'okullarının' devamının değil, yeni bir başlangıç olduğunu ifade etmektedir. Ancak getirilebilecek alternatiflerin mümkün olabilmesi için öncelikle bu düşünce okullarının tarihsel kökenlerine geri dönmek, ortak noktalarının ne olduğunu ve matematik ve felsefesinde nasıl yer ettiklerinin anlaşılmasının gerekliliğini vurgulamaktadır (Hersh, 1979). Dolayısıyla birinci bölümde matematik felsefesindeki düşünce okulları tarihsel bir bakış açısıyla sunulmaya çalışılmıştır. Bu bölümde ise bu düşünce okulları özel olarak Reuben Hersh'in kişisel görüşleri dâhilinde ele alınacaktır. Ancak öncesinde yer verilen matematik ile olan ilişkisi ve matematik felsefesi hakkındaki tutumundan yola çıkılarak, Hersh'in matematik felsefesi görüşlerinde dikkat çektiği noktalara yer verilmesinin gerekliliği görülmektedir. Hersh'in üçüncü argüman olarak ortaya koyduğu yeni yaklaşımlar ise, onun matematik felsefesi hakkındaki tutumunu ifade etmektedir.

“Matematik felsefesinin kapsamı içinde sadece matematiksel bilgi ve ontolojinin gerekçelendirilmesinden çok daha fazlası olmalıdır. Matematik çok yönlüdür ve bir öneri bilgisinin yanı sıra kavramları, özellikleri, teorileri, tarihi ve uygulamaları açısından da tanımlanabilir” (Ernest, 1998, s. 51). Birinci bölüm içerisinde Paul Ernest'in matematik felsefesinin ilgilenmesi gereken 13 sorun verilip, bu sorunlar felsefenin ontoloji, epistemoloji ve aksiyoloji alanlarına göre sınıflandırılmıştır (bkz. Tablo 2.1.). Ancak bu sınıflandırmada bazı sorunların bir, bazı sorunların iki ve bazı sorunların ise üç farklı felsefe alanında yer bulduğu görülmüştür. Bu da matematik felsefesinin ilgilenmesi gereken sorunların çok yönlü olduğunu vurgulamaktadır.

Ernest'ten etkilenen Hersh de herhangi bir matematik felsefesi görüşünü sınamak için yedi hususa dikkat çekmektedir (Gür, 2019, s. 61). Bu hususları sıralamadan önce Hersh'e göre matematik felsefesine matematikçi ve filozofun yaklaşımının tasvirinin sunulması amaçlanmaktadır.

Matematik felsefesi temel olarak matematiğin doğasını anlamaya çalışmaktadır. Bunu yaparken ortaya konan tanımlamalar, üretilen sorular ve cevaplar hem matematik hem de felsefe içerisinde yer bulabilmektedir. Dolayısıyla felsefenin bir kolu olarak filozofların da, matematiği anlama çabasını veren biri olarak matematikçilerin de matematik felsefesi hakkında tutumları, inançları ve ifadeleri olabilmektedir. Bu noktada matematikçilerin matematik üretmede, insanın matematik anlayışını geliştiren insanlar olduğu ifade edilmektedir. Başka bir deyişle bu, matematik ilerledikçe onu düşünceye dâhil etmek ve düşünce daha karmaşık hale geldikçe yeni matematiksel kavramlar ve yapılar üretmek anlamındadır. Matematiğin konusu düşünceleri yansıtacak şekilde değişmektedir (Thurston, 2006). Ancak; “matematikçiler, matematiği çevreleyen felsefi konuları nadiren tartışırlar; başka birinin bu işi üstlendiğini varsaymaktadırlar” (Hersh, 1979, s. 34). Hersh (1979), filozofların matematik felsefesi hakkında olan ifadelerinde genel olarak yeterli olunamadığını ifade etmektedir:

Profesyonel filozofun, istisnasız, profesyonel matematikçiye söyleyecek çok az şeyi vardır. Gerçekten de profesyonel matematikçinin ne yaptığına dair fikirleri uzak ve yetersizdir. Ancak ne yaptığımızı anlamak için zorlu teknik koşullar göz önüne alındığında kesinlikle bu gerçek utanılacak bir şey değildir. Yine de, bir matematikçi, felsefi karışıklığından rahatsız olursa, kütüphanesindeki kitaplarda ve dergilerde yardım aradığında, hayal kırıklığına uğrayacağı söylenmelidir. Matematik hakkında yazan bazı filozoflar, aritmetik ve temel geometriden daha gelişmiş herhangi bir matematikle tanışmamış görünüyorlar (Hersh, 1979, s. 34).

Ancak Hersh bu noktada matematikçilerin de felsefi söylemlerinin etkileyici örneklerinin az sayıda olduğunu, çünkü çoğu matematikçi tarafından bilinmediğini ifade etmektedir. Ayrıca başka bir sebep olarak da felsefi söylem sanatının bugün en parlak olan matematikçiler arasında bile iyi gelişmediğini göstermektedir. Titiz argüman, tam

gelişmiş analizler ve gelen karşı örneklere itirazların, matematiksel konular kadar felsefi konularda da dikkate alınması gerektiğini belirtmektedir (Hersh, 1979, s. 34-35). Ayrıca Hersh, matematik felsefesinin, diğer çalışma alanlarıyla karşılaştırılabilir modeller oluşturduğunu da ifade etmektedir. Matematik tarihi, bilgisayar bilimleri ve bilişsel sinirbilim gibi alanların da tıpkı matematik felsefesinin felsefe yöntemlerini kullanarak tanımlamaya çalışması gibi olduğunu belirtmektedir. Çünkü Hersh bunların her birinin kendi matematik modelini sunduğunu ifade ederken, felsefi “pozisyonların” da birer model olduğundan söz etmektedir (Hersh, 2017, s. 23). Bu sebeple Hersh; bir düşüncüyü ortaya koymak için bunun belli kriterler ele alınarak değerlendirilmesi gerektiğini ifade ederek matematik felsefesi için kriterleri listelemektedir. Matematik felsefesi dâhil hiçbir felsefenin ele alınan tüm kriterler tarafından tatmin edici olmayacağını da belirtmektedir ancak matematik felsefesi için Hersh’in ortaya koyduğu kriterler değerlendirme yapmak için önemli bir bakış açısı sağlamaktadır. Bunlar 13 tanedir ve devam eden paragraflarda açıklanmaktadır (Hersh, 1997, s. 24).

(1)Yayılma alanı (*breadth*); yeterli bir matematik felsefesinde, en azından ana akım matematiksel araştırmaların aktif bir alanının farkında olunmasını ifade etmektedir. Hersh matematik felsefesi hakkında oluşturacak ifadeler için matematikte tartışılan (en azından en revaçta olan) meselelerin bilinmesi gerekliliğini, kuantum mekaniği veya görelilik bilmeden bilim felsefesi hakkında yazılamayacağına benzetmektedir. **(2) Epistemoloji ve bilim felsefesi ile bağlantılar:** Matematik felsefesi epistemoloji ve bilim felsefesi ile ifade edilmelidir. Hersh bu noktada, matematik görüşünün fiziksel bilimlerle ve matematiksel bilgi görüşünün genel olarak bilgi görüşü ile uygunluğuna dikkat çekmektedir. Çünkü genellikle matematik felsefesi zihin, bilim veya topluma atıfta bulunulmaksızın yapılmaktadır. Bu nedenle, yeterli bir matematik felsefesi için epistemoloji ve bilgi felsefesi ile bir bağlantıya ihtiyaç vardır. **(3) Uygulamaya karşı geçerlilik (*valid against practice*):** Matematik felsefesi beş çeşit matematiksel uygulamaya karşı test edilmelidir: araştırma, uygulama, öğretim, tarih, hesaplama. Pascal, Descartes, Leibniz, d'Alembert, Hilbert, Brouwer, Poincare, Renyi ve Bishop gibi matematiğin birçok önemli filozofu aynı zamanda matematiksel araştırmacılarıdır. Matematiksel araştırma, matematik felsefesi için gereklidir. Uygulamalı matematiği göz ardı eden veya onu sonradan düşünülen bir davranış olarak

gören bir matematik felsefesi de güncel değildir. Saf ve uygulamalı matematik arasındaki ilişki merkezi bir felsefi sorudur. Bu zorluğa kör bir matematik felsefesi yetersizdir. Yine bu büyük matematikçiler hem saf hem de uygulamalı matematik yapmakla kalmamışlardır, saf ve uygulamalı çalışmaları genellikle birbirini beslemektedir. Matematiğin öğretilmiş ve öğrenilmiş olması da ilginç bir gerçektir (hatta bazen öğretildiği ama öğrenilmediği daha ilginç). Matematiğin nasıl öğrenildiği hakkında çok az şey bilinmektedir. Hersh; çarpım tablosunu veya Peano aksiyomlarını ezberleyerek değil de matematiğin bilgisayar kullanarak, problem çözerek ve sohbet ederek daha çok okuma ve dinleme yoluyla öğrenildiğini ifade etmektedir. Bu gerçeklerle bağdaşmayan matematiğin doğasının bir açıklaması ise yanlış olacaktır. Ayrıca yeterli bir matematik felsefesi, matematik tarihiyle uyumlu olmalıdır. Bu tarihe ışık tutabilmelidir. Hesaplama ise, matematiksel uygulamanın önemli bir parçasıdır. Hesaplama makinelerinin matematiksel kanıtta kullanımı tartışmalıdır. Biçimci ve mantıkçı matematik felsefelerinin matematiğin özünün biçimsel mantık anlamında kanıt olduğunu söylemesi, matematiksel teoremlerin ifadelerini ve kanıtlarını resmileştirmeye yönelik Bertrand Russell ve Alfred Whitehead'in *Principia Mathematica*'sı, bilgisayarların saf matematik araştırmalarındaki kullanımının yaygınlaşması... Yeterli bir matematik felsefesi bu tartışmalara ışık tutmalıdır. **(4) Zarafet/Güzellik (*elegance*):** Matematiksel kuramlarda felsefi olanlardan daha yaygındır. Güzellik veya zarafet arzu edilen bir şeydir ancak önkoşul değildir. **(5) Ekonomiklik:** “Zarafet gibidir: arzu edilir, ancak isteğe bağlıdır” (Hersh, 1997, s. 28). **(6) Anlaşılabilirlik (*comprehensibility*):** Anlaşılabilirlik tüm yazarlar tarafından değil, okuyucular tarafından değerlendirilir. **(7) Kesinlik (*precision*):** Başka hiçbir felsefe dalının kesinliği ummadığını fark ederseniz, matematik felsefesinde kesinlik hassasiyetinin vazgeçilmezliği belirginleşmektedir. Matematik kesindir; felsefe olamaz. Hersh; matematik felsefesinin tanım ve kanıtlarla matematiğin bir dalı olmasını beklemeyi, manzaralarla sanat felsefesinin bir sanat dalı olabileceğini düşünmeye benzetmektedir. Dolayısıyla matematik felsefesi de dâhil olmak üzere felsefi uzmanlıklar eleştirdikleri alanın standartları ile değil, felsefi standartlarla değerlendirilmelidir. Biçimci ve mantıkçı düşüncelerde felsefi problemler kesinleştirilmek için matematiksel problemlere dönüştürmeye çalışmışlardır. Bu, matematiksel olarak verimli bir süreci ifade edebilirken, felsefi olarak doğru bir yönlendirme değildir. Matematik felsefesi matematik ile ilgilidir ancak felsefenin bir

parçasıdır. Hersh; matematik felsefesini matematiğin bir dalı olarak değil, matematiksel deneyime dayanan felsefi bir girişim olarak düşünmeyi önermektedir. **(8) Sadelik (simplicity):** Basit bir durumda kesinlik/hassasiyet elde etmek karmaşık olandan daha kolaydır. **(9) Tutarlılık (consistency):** Bu mantıkçılar ve mantıklı düşünen filozoflar açısından değerlidir. “Bourbaki; tarihsel olarak konuşursak, matematiğin çelişki içermediği elbette doğru değildir, demektedir” (akt. Hersh, 1997, s. 31). Hersh, Bourbaki’ye katılarak matematikçilerin kanıt sürecinde çelişki özgürlüğüne ulaştığını ifade etmektedir. Frege de kurduğu yapının çöktüğünü üzüntü ile ifade etmiştir (akt. Hersh, 1997): “*Matematikte kurulan yapılar çöküyor -ilgisini yitiriyor, unutuluyor-soruları artık ilginç olmadığı için ya da başka bir teori onlara daha iyi cevap verdiği için; çelişkiler yüzünden değil*” (s.32). **(10) Özgünlük, Yenilik (originality, novelty):** Bu kriter diğer felsefe ve filozoflarla ilgilidir. Felsefi yazının tamamen yeni olması nadirdir. Matematik felsefesinde de temel fikirler Platon ve Aristoteles’e dek dayanmaktadır. Dolayısıyla bu noktada öncüller sonrakileri gerektirmektedir. **(11) Kesinlik ve Şüphesizlik (certitude and indubitability):** Bu noktada Hersh temelci arayışların sürdürdüğü matematik felsefesi düşünce okullarının kesinlik veya şüphe yokmuşçasına davranmalarının modern matematik ve felsefesindeki gelişmelere bakarak yersiz olduğunu ifade etmektedir. Çünkü bugün matematik felsefesinde kesinlik ve şüphesizlik hedefleri terk edilmiştir. Dolayısıyla yeterli bir matematik felsefesi, kanıtın matematikteki özel rolünü açıklamalıdır. **(12) Uygulanabilirlik (applicability):** Bu matematiksel uygulamalara değil, felsefi uygulamalara atıfta bulunmaktadır. Kişinin felsefesi, evrende evde bulunma hissini veya açık bir vicdanla uyku yeteneğini artırabilir. Ama aynı zamanda felsefi problemleri analiz etmede, belki de bir ya da ikisini çözmede de yardımcı olmalıdır. **(13) Kabul edilebilirlik (acceptability):** Hersh, bu kriterin hiçbir zaman açıkça talep edilmediğini ancak yine de pratikte en önemli olduğunu ifade etmektedir. “Zamanlarının ötesinde” olan ve onlarca, hatta yüzlerce yıl göz ardı edilen matematiksel teorilerin kabul edilebilirliğini; devletlerin politikaları, savaşlar ve milletlerin kültürlerini meydana getiren bakış açıları etkilemiştir (Hersh, 1997, s. 25-34).

Reuben Hersh’e göre, matematiksel bir düşüncenin felsefi açıdan değerlendirilebilmesi için yukarıda verilen on üç kriterden ilk üç tanesi felsefenin

matematik ile olan ilişkisi ile ilgilidir (dışsal). Diğerleri ise matematiğin felsefi düşünce içerisindeki kriterleridir. Hersh, bu on üç kriterin hepsinin gerekli olmadığını ancak ilk üçünün önemli olduğunu vurgulamaktadır (Hersh, 1997, s. 28).

“Matematiğin makul bir felsefi beyanı olduğu iddiasını taşıyan her felsefi ekol, aşağıdaki soruların her birine tatmin edici cevaplar verebilmelidir” (Gür, 2019, s. 61):

1. Matematiği diğer beşeri bilgilerden farklı kılan şeyler nelerdir?
2. Matematik ne hakkındadır veya matematiğin konusu nedir?
3. Matematik hakkında evrensele yakın bir uzlaşa niçin vardır?
4. Matematiksel bilgiyi nasıl elde ederiz?
5. Matematikçinin sosyal olaylardan etkilenmesine rağmen, matematik niçin zaman, mekân ve ırk gibi değişik unsurlardan bağımsızdır?
6. Sonsuz var mıdır?
7. Soyut ve pür matematik, ‘gerçek’ dünyada nasıl bu kadar karşılık bulabilmekte ve kullanışlı olabilmektedir? (Hersh, 1997).

4.3. Reuben Hersh’e göre matematik felsefesi tarihindeki düşünce okullarının değerlendirilmesi

Reuben Hersh, yazdığı iki kitabında “Matematiğin Ön ve Arka Yüzü” (*Mathematics Has a Front and a Back*) başlığı altında bir makalesine yer vermektedir (Hersh, 1997, s. 35-37; Hersh, 2014, s. 35-39). Bu başlığı ve bu başlık altındaki içeriği Amerikalı sosyolog Erving Goffman’ın *The Presentation of Self in Everyday Life* adlı kitabında ‘Bölgeler ve Bölge Davranışı’ (*Regions and Region Behavior*) bölümünde yer verdiği “ön” ve “arka” kavramlarından yola çıkarak oluşturmuştur. Goffman, “ön”ü kamuoyunun kabul edildiği, “arka”yı ise hariç tutulduğu bölgeler olarak ele almaktadır. Hersh de buna göre bir restoranda ön servis alanıdır, arka ise mutfaktır; bir tiyatrodaki sahnenin önü seyirciler içindir, sahne arkası ise oyuncular, kostümler içindir benzetmelerini yapmaktadır. Genel olarak “ön” halkın kabul edildiği, “arka” ise profesyonellerle sınırlı bir bölge olup hizmet vermeye hazırlanmaktadır. Hersh buradan

yola çıkarak matematiğin de “ön” ve “arka” cephelerine sahip olduğunu belirtmektedir. Bir yemek odası veya mutfakta olduğu gibi fiziksel anlamda bölgelerden bahsetmediğinin de altını çizmektedir, çünkü matematik herhangi bir fiziksel ortamla ilişkili değildir, matematik sadece bir faaliyettir şeklinde ifade etmektedir (Hersh, 1997, s. 35; Hersh, 2014, s. 35).

Matematiğin “ön” cephesi, tamamlanmış formdaki matematiktir; dersler, ders kitapları, dergiler gibi. Ön cephe alt bölgelere ayrılır: birinci sınıf, ikinci sınıf, üçüncü sınıf gibi. Matematiksel halk profesyonelleri, lisans ve lisansüstü öğrencilerini içermektedir. Ön cephedeki matematik resmi, kesin, düzenli ve soyuttur. Tanımlara, teoremlere ve sözlere ayrılmıştır. Her soru ya cevaplanır ya da ‘açık soru’ olarak nitelenir. Her bölüm başında belirlenmiş bir hedef vardır ve bölüm sonunda o hedefe ulaşılmaktadır. Matematiğin “arka” cephesi ise çalışan matematikçiler arasındaki matematiktir. Arka cephe de alt bölgelere; sonlu grup teorisyenlerine, sayısal doğrusal cebircilere, standart dışı diferansiyel topolojistlere ve benzerlerine ayrılırlar. Arkadaki matematik tamamlanmamış (*fragmentary*), gayri resmi, belirsiz (*tentative*) ve sezgiseldir (Hersh, 1997, s. 36; Hersh, 2014, s. 36).

Matematiğin doğasına yönelik olarak sahip olduğumuz iki veri mevcuttur. Birinci olgu matematiğin insan icadı olduğudur. Matematikçiler bunu bilir çünkü bu icadı onlar yapar. İkinci olgu da dünyaya getirdiğimiz bu şeylerin, bu geometrik şekiller, aritmetik fonksiyonlar ve cebirsel operatörlerin, bizlere yani yaratıcılarına hala gizemli olduğudur (Hersh, 2014, s. 47-48; Hersh vd., 2015, s. 449).

Lakatos’un icat ettiği “temelcilik” kavramı mantıkçılık, oluşturmacılık, biçimcilik düşüncelerini ifade etmektedir. Reuben Hersh de Lakatos’un bu ifadesine katılarak ‘*What is Mathematics, Really?*’ kitabında mutlakçı düşünce okullarını “ana akım” (*mainstream*); modern matematik felsefesi içerisinde yer alan düşünceleri ise “hümanistler ve başına buyruklar (*maverick*)” olarak ele almaktadır. Ayrıca bunun dışındaki bazı kitaplarında da matematik felsefesi tarihindeki düşünceleri açıklamakta ve eleştirilerini sunmaktadır (Hersh, 2014; Hersh vd., 2015). Ana akım için matematiğin insanüstü-soyut, ideal, yanılmaz ve ebedi olduğunu ifade etmektedir. Ana akımın üyeleri Pisagor, Platon, Descartes, Spinoza, Leibniz, Kant (kısmi üye olmak üzere),

Frege, Russell, Carnap'tır (Hersh, 1997, s. 91-92). Hümanistler ve başına buyruklar (*mavericks*) grubunu ise Hersh şöyle açıklamaktadır:

Hümanistler ise matematiği bir insan etkinliği, bir insan yaratımı olarak görürler. Aristoteles, Locke, Hume ve Mill gibi isimler bu anlamda hümanistti. Russell geleneğinin dışındaki modern filozoflar (*mavericks*) arasında Peirce, Dewey, Roy Sellars, Wittgenstein, Popper, Lakatos, Wang, Tymoczko ve Kitcher (kendiliğinden şekillendirilmiş bir *maverick*) bulunmaktadır. Filozof olarak etiketlenmemiş bazı ilginç yazarlar vardır: psikolog Jean Piaget; antropolog Leslie White; sosyolog David Bloor; kimyager Michael Polanyi; fizikçi Mario Bunge; eğitimciler Paul Ernest, Gila Hanna, Anna Sfard; matematikçiler Henri Poincare, Alfred Renyi, George Polya, Raymond Wilder, Phil Davis ve Brian Rotman. (Hersh, 1997, s. 92).

Reuben Hersh, ön ve arka arasındaki ayrımın amacının sadece müşterilerin yemek pişirmesine engel olmak değil; aynı zamanda müşterilerin yemek pişirme hakkında çok fazla şey bilmelerini de engellemek olduğunu ifade etmektedir. Yiyeceğin lezzetinin veya sahnedeki aktristin oyunculuğunun sırrındaki efsanenin korunmasının, ön/arka ayrımı ile sağlandığını belirtmektedir. Ön tarafta sunulan lezzetli yiyeceğin arka tarafta pişirildiğini bilmemek 'efsanesi' çoğu durumda müşterinin yemek yerken daha fazla zevk almasını sağlayabilir, hatta gerekli olabilmektedir. Daha genel olarak efsanelerin belli bir alegorik veya mecazi güce sahip olan öyküler olduğunu söylemektedir. Kelimenin tam anlamıyla doğru değildirler ancak nesiller geçtikçe hayatta kalmaktadır: Kralların ilahi hakkı, Noel veya paskalya mitleri gibi (Hersh, 2014, s. 36). Dolayısıyla Hersh bir efsane olmanın onun gerçeğini veya sahteliğini gerektirmediğini belirtmektedir. Mitler, gerçeklikleri bilinebilir olmasa da, sosyal kurumları onaylamakta ve desteklemektedir. Örneğin Tanrı'nın zihnine açık bir kanalın yokluğunda kanıtlanamayacağı veya çürütülemeyeceği için kimse kralların ilahi hakkının yanlış olduğunu söyleyememektedir. Ancak, zamanında bu güvenilir ve bir amaca hizmet eden yararlı bir inanç olan efsanedir (Hersh, 1997, s. 38; Hersh, 2014, s. 36-37). Hersh, buradan yola çıkarak matematiğin de mitleri/efsaneleri olduğundan söz etmektedir. Sosyal kurumları destekleyen mitlere benzer şekilde, matematiğin mitleri de matematik kurumunu destekleyen ve haklı çıkaran inançlardır. Euclid miti ve Russell,

Brouwer ve Bourbaki'nin mantıkçılık, oluşturmaçılık ve biçimcilik mitleri (Hersh, 1997; Hersh, 2014; Hersh vd., 2015) örnek olmakla birlikte Hersh daha genel mitlerden de söz etmektedir (Hersh, 1997, s. 37-38; Hersh, 2014, s. 36-37). Bunlar aşağıda verilmektedir:

(1) *Birlik (Unity)*: Şimdi ve sonsuza dek bölünemez tek bir matematik vardır. Matematik tek/ayrılmaz bir bütündür.

(2) *Nesnellik (Objectivity)*: Matematiksel gerçek veya bilgi herkes için aynıdır. Özellikle kimin keşfettiğine bağlı değildir; aslında bunu hiç kimsenin keşfedip keşfetmediği doğru olandır.

(3) *Evrensellik (Universality)*: Matematik bildiğimiz gibi olabilecek tek matematiktir. Quasar X9'dan küçük yeşil varlıklar bize matematik ders kitaplarını gönderirse, biz yine $A = \pi.r^2$ bulurduk.

(4) *Kesinlik (Certainty)*: Matematik, önermelerin hakikatleri dikkate alındığında, sonuçların mutlak kesinliğine ulaşan “kanıt” veya bazen “titiz kanıt” olarak adlandırılan bir yöntemle sahiptir. (Hersh, 1997, s. 37-38; Hersh, 2014, s. 37).

Hersh, *birliği* açıklayabilmek için saf ve uygulamalı matematikçilerin çoğu zaman birbirlerinin çalışmalarından habersiz olduklarını ve genellikle oldukça farklı standartlara ve ölçütlere göre çalıştıklarını gördüğünü örnek göstererek prensipte iddia edilen 'birliğin', pratikte mevcut olmadığını belirtmektedir. *Nesnellik* için; matematikte neyin “doğru” veya “kabul edilmiş” olduğu konusunda inanılmaz derecede yüksek bir fikir birliği olduğunu belirtir ancak bunun yanında ve aynı derecede önemli olan, “ilginç”, “önemli”, “derin” veya “zarif” meselesi olduğunu da eklemektedir. Bu estetik veya sanatsal kriterlerin kişiden kişiye, uzmanlıktan uzmanlığa, on yıldan on yıla kadar büyük ölçüde değiştiğini ve hatta belki de matematikteki yargıların sanat ya da müzik alanındaki estetik yargılardan daha objektif olmadıklarını ifade etmektedir. *Evrensellikte* örnek gösterdiği Quasar X9 gezegenindeki varlıklarla edebiyat, sanat veya matematik konuşmak için, iletişimi düşünülebilir kılacak bizim gibi varlıkları temel alınması gerektiğini belirtmektedir. Dolayısıyla ancak o halde karşılaştırma olasılığının evrensel değil; o varlıkların “bizim gibi yeterli” olma şartına bağlı olduğunu ifade etmektedir. *Kesinlik* için ise, $2+2=4$ eşitliğini örnek göstermektedir. $2+2$ 'nin her zaman 4 olmadığı durumlar bulunmasa bile, çoğunluğun $2+2=4$ olduğu konusunda kesindir

şeklinde hemfikir olduğunu belirtmektedir. Çağdaş matematik teoremleri için eşitliğin kesin olduğu iddiasının oldukça farklı bir konu olduğunu ifade etmektedir. Birçoklarında, kanıtları titizlikle kontrol edilmemiş başka teoremlere dayanan düzinelerce sayfa dolusu kanıt olduğunu ve bu kanıtların ‘çok kolaylıkla görüldüğü gibi’, ‘standart bir argümanın sonucu olarak öğrenebiliriz ki’ veya ‘basit bir hesaplama şu sonucu verir’ vb. gibi ifadelerle tamamlanmış iddiasında bulunmadıklarını vurgulamaktadır. Kesinliğin de birlik için olduğu gibi pratikte değil, prensipte olduğunun iddia edilebileceğini ifade etmektedir (Hersh, 1997, s. 37-39; Hersh, 2014, s. 37-39).

Elbette mitler doğru olmak zorunda değil; kullanışlı olmaları gerekir. Her ne olursa olsun şu açıktır ki matematikçiler birliğe, nesnellığe, evrenselliğe ve kesinliğe inanmak isterler. Tıpkı Amerikalıların Amerikan Anayasası’na veya diğer milletlerin kendi krallarına, cumhuriyetlerine inanmaları gibi. Fakat inanıyor olsalar bile, daha iyisini bilirler. Matematikte veya başka herhangi bir yerde profesyonel olmanın önemli bir parçası “önden” “arka” ya geçmektir. Ve bu geçişin bir parçası, mesleğin mitlerine karşı daha az naif, daha karmaşık bir tutum geliştirmektir. Öndeki hanımefendinin rujuna ihtiyacı vardır; ancak sahne uzmanları, sahne arkasında sıradan, günlük bir yüzle gördükleri aynı oyuncu olduğunu bilir (Hersh, 1997, s. 39; Hersh, 2014, s. 39).

Hersh, ana akım felsefenin matematiğin bir “arka cephesi” olduğunu bilmediğini ifade etmektedir. Burada tamamlanmış, yayınlanmış matematik (ön) kendi kendini idare eden bir varlık olarak alınmaktadır. Daha kötüsü olarak ise ana akım felsefenin -gerçek cepheye- gerçek makale, tezlere bakmadığını; idealleştirilmiş metinleri, matematiksel metinlerin olduğu ve olması gerektiği gibi değil de mantıkçıların sahip olacağı şekilde tasarlandığını belirtmektedir (Hersh, 1997, s. 36). *“Eğer mutfağın farkında değilseniz, bir restoran yemeğini anlayamazsınız. Yine de kendinizi bir matematik filozofu olarak sunabilirsiniz; sadece kamu tüketimi için yıklanan ve ütülenen yayınların farkında olun. Üç tarihi okuldan sadece sezgisellik matematik üreticisine dikkat eder. Biçimciler, mantıkçılar ve Platonistler akşam yemeği için masaya oturduklarında, önlerindeki sebzeli yahniyi kendi kendine yaratılmış, özerk bir varlık olarak tartışır”* (Hersh, 1997, s. 39).

Reuben Hersh (1997), “*What is Mathematics, Really?*” adlı kitabının ikinci bölümünde ‘ana akım’ ve ‘hümanistler ile başına buyruklar (*mavericks*)’ olarak iki sınıfa ayırdığı matematik felsefesi tarihindeki düşünceleri aşağıdaki tablodaki şekilde sınıflandırmaktadır:

Tablo 4.1. Reuben Hersh (1997)’in matematik felsefesi tarihindeki düşünceleri sınıflandırması.

Bölümler	Bölüm içerisinde ele alınan isimler ve başlıklar
Krizden önce ana akım	Pisagor, Platon, Yeni-Platonculuk, Augustinus, Emperor Pope, Thomas Aquinas, Cardinal Cusa, Rene Descartes
Ana akım felsefe zirvede	Spinoza, Leibniz, Berkeley, Kant, Bir mit olarak Euclid
Krizden bu yana ana akım	Temelcilik, Mantık, Frege, Russell, Bouwer, Bishop, Gödel
Temelcilik ölür/ana akım yaşar	Husserl, Carnap, Quine, Putnam, Bourbaki, Kurgusalılık
Hümanist ve başına buyrukların atası	Aristo, Euclid aksiyomları, John Locke, David Hume, D’Alembert, John Stuart Mill
Modern hümanist ve başına buyruklar	Peirce, Poincare, Wittgenstein, Lakatos, Hungarian tarzı, Leslie White ve Raymond Wildes
Çağdaş hümanist ve başına buyruklar	Karl Popper, Kitcher, Jean Piaget, Paul Ernest, etnomatematik

4.3.1. Reuben Hersh’in ana akım matematik felsefesi (Mutlakçı) düşüncelerini değerlendirmesi

Reuben Hersh (1997, s. 92), kimsenin matematiğin ne zaman başladığını bilmediğini ancak matematik felsefesinin başlangıcının Pisagor ile olduğunu (Heath; akt. Hersh, 1997, s. 92) ifade etmektedir. Pisagor için, “matematiği anlamak ilahi yaratıcı bilgeliğin anahtarını bulmaktı (Tarnas; akt. Hersh, 1997, s. 93)”. “Pisagor, ‘Her

şey sayıdır.’ der. Sayı mistisizmi bu özdeyişi harfi harfine alır. Bütün yönleri itibarıyla evren, sayılar ve sayıların kendine has özellikleriyle yönetilir” (Hersh vd., 2015, s. 105). “Pisagor ile başlayan matematik ve teolojinin birleşimi, Yunanistan’da, Orta Çağ’da ve modern zamanlarda Kant’a kadar dini felsefeyi karakterize etmiştir” (Hersh, 1997, s. 95). Russell (akt. Hersh, 1997, s. 95), düşünce alanında bu kadar etkili olan başka birini tanımadığını belirtmektedir. Duyuları değil akılı açıklayan sonsuz dünya anlayışının, Pisagor’dan türetildiğini ve Platonizm olarak görülen şeyin özünde Pisagorizm olduğunu ifade etmektedir.

Pisagor’dan farklı olarak Platon bol miktarda yazılı eser bırakmıştır (Hersh, 1997, s. 97). “Devlet” kitabında, doğup öleni bilmeye değil her zaman için var olanı bilmeye yarayan ve değişmeyenin bilgisi olarak ifade ettiği bilgi geometri bilgisidir. (Platon, 2013, s. 247). Hersh, eserlerinden yola çıkarak Platon’un, bugün anlaşılan şekilde bir ‘matematik felsefesine’ sahip olmadığını belirtmektedir. “*Matematik Platon’un felsefesinin merkezinde yer alır. Görünür, değişebilir varlıkların fiziksel dünyasının bir yanılsama olduğuna inanıyordu. Gerçek olan görünmez, tinsel/maddi olmayan (immaterial), sonsuzdur. Matematik gerçektir çünkü tinsel/maddi olmayan (immaterial) ve sonsuzdur. Kişinin "iyiye" doğru yükselişinde bir basamak taşı olarak, görünmez gerçekliğin en güzel yanı olan dine bağlıdır. Matematik kavramına meydan okumak onun dinine meydan okumak olacaktır*” (Hersh, 1997, s. 99). Hersh; Platon’un, Sokrates ve Menon adlı bir köleyi konuşturduğu Menon adlı eseri ile geometrik akıl yürütmeyi anladığını gösterdiğini belirtmektedir. Sokrates, Menon’a geometri ile ilgili soruya verdiği cevaplardaki yanlışları söyleyerek onun doğru cevabı bulmasını sağlamaktadır. Ruhun ölümsüzlüğüne inanan Sokrates böylece “*doğmadan önce geometriyi hatırladığımızın kanıtı olarak, bir oyun*” (Hersh, 1997, s. 101) oynamıştır. Hersh, Platon’un meşhur eserlerinden biri olan Menon’un popülaritesinin felsefeden değil, edebi erdemlerden kaynaklandığını ifade etmektedir (Hersh, 1997, s. 101). Keza Menon’daki asıl soru erdemin öğrenilebilir/öğretilbilir bir şey olup olmadığıdır.

Platon’un düşüncesine göre; “sayılar fikirlerin veya maddi olmayan (*unmaterial*) ebedi gerçekliklerin sadece örnekleri (*examples*) veya modelleri (*samples*) değildir. Tüm fikirler sayıdır! Örneğin maddi olarak var olan birçok at, ideal atın

tezahürleri veya örnekleridir. Ancak $5+5=10$ ifadesindeki 5'ler maddi olarak var değillerdir, ideal veya soyut denilebilir ve yine de ikisi de vardır. Platon, bu ikilemden kaçmak için “*Mathematicals*”ı icat etmiştir. Onlar “ideal”in altında önemsiz varlıklardır. Filozofların ‘bir çelişki tarafından durdurulduğunda, bir ayırım icat etmek’ kuralının erken bir örneği olarak karşımıza çıkmaktadır” (Hersh, 1997, s. 102).

Yeni-Platoncu felsefe içerisinde anılan Augustinus (akt. Hersh, 1997, s. 103-104)’a göre; “yedi ve üçün on etmesi, sadece şimdi değil her zaman olan bir şeydir.” Bu yüzden sayıdaki bu bozulmaz gerçeğin kendisi ve akıl yürüten herhangi bir kişi için ortak olduğunu ifade etmektedir. Hristiyan teolojisi ve felsefesinin başyazarı Thomas Aquinas ise Aristoteles’i kilise doktrininin içine yerleştirmiştir. “Matematiği, maddi nesnelerle ilgilenen fizik ve doğa bilimlerinden ve önemsiz nesnelerle ilgilenen teoloji veya metafizikten ayırmak için Aquinas (akt. Hersh, 1997, s. 106-107), “Varlık hareketlerine göre maddeye bağlı olmalarına rağmen, anlaşıldıklarında bunu yapmayan bazı şeyler vardır, çünkü mantıklı madde tanımlarına dâhil edilmemiştir: örneğin, çizgiler ve sayılar. Şimdi matematik bu nesnelerle ilgileniyor.” demektedir. Ayrıca Aquinas (akt. Hersh, 1997, s. 107), “Matematik, doğal ve ilahi bilim arasında orta düzeyde olduğu için, ikisinden de daha kesindir; doğal olandan daha fazladır, çünkü düşüncesi hareketten ve maddeden kesilir; doğal bilim insanının düşüncesi maddeye ve harekete yönelir.” şeklindeki ifadesiyle de matematiğin kesinliği üzerine yorum yapmaktadır.

Aquinas’ı Katolik bir filozof olarak düşünmek ve onu fizik ve teoloji arasında matematik yerleştirdiğini görmek, onun bir Platonist olduğu gibi görünebilir. Ancak matematik analizi Platonik değil Aristotelesçidir. Matematik, önemliliklerini dışlamak için tanımlanan gerçek nesneleri inceler. Bu, Aristo’nun matematiksel nesneleri gerçek nesnelerden soyutlama olarak analiz etmesinin bir ifadesidir. Aristoteles der ki: Matematiksel bir nesne elde etmek için, matematiksel nitelikler hariç gerçek nesnenin tüm niteliklerini görmezden gelin. Aquinas diyor ki: matematiksel nesneyi, gerçek nesnenin maddi özelliklerinden arınmış olacak şekilde tanımlayın. Aquinas’ı Hümanistlere ve başına buyruklara (*mavericks*) taşımak için cazipim ama eğer birisi Ana akımsa, odur. Ana akım filozoflar ile hümanist veya başına buyruk (*maverick*)

filozoflar arasındaki sınıflandırma (herhangi bir sınıflandırma gibi) her zaman bir teklif değildir (Hersh, 1997, s. 108).

Reuben Hersh, felsefe ansiklopedisinde teolog, filozof ve matematikçi olarak tanımlanan Cusa Nicholas'ın görüşlerine de yer vermektedir: "Cusa'ya göre, bir insan sadece gerçeği bilmede zihnin sınırlarının farkındaysa bilge olur. ... Bilgi öğrenilmiş cehalettir (*docta ignomntia*). Doğal bir gerçek arzusu ile donatılmış, insan bunu rasyonel bir sorgulama ile araştırır ki bu da kesin olarak varsayılan bir şeyden hala şüphe duyulan bir sonuca doğru bir harekettir. Böylece zihin gerçeğe yaklaşır, ama asla onunla çakışmaz. ... Dolayısıyla en iyi bilgi varsayımdır" (Hersh, 1997, s. 109). Burada Cusa'nın, Aristotelesçilerin egemen olduğu bir zamanda, Platonist olduğunu da belirtmektedir. "Aristotelesçilere sürekli olarak çelişkisizlik ilkesinde ısrar ettikleri ve inatla gerçekte çelişkilerin uyumluluğunu kabul etmeyi reddettikleri için eleştiriyordu. Bunu kabul etmelerini sağlamak neredeyse bir mucize gerektirir ve yine de bu kabul olmadan mistik teolojinin yükselmesi imkânsızdır. Aristoteles'in sadece çoğulculuğu ve çelişkileri görebileceği birliği ve sadeliği görmek için sürekli çabaladı" (Hersh, 1997, s. 109).

Reuben Hersh; felsefe öğrencilerinin kendilerinden okumaları beklenen Descartes'ın "Yöntem Üzerine Konuşmalar" (*Yöntem, Optik, Geometri ve Meteoroloji Üzerine Konuşmalar*, 1637) eserinde matematiksel şaheseri Geometri'yi (*La Géométrie*) içerdiğinin farkında olmadıklarını belirtmektedir. Öte yandan da matematik öğrencilerinin yanlış eğitildiklerini, Geometri'sinin (*La Géométrie*) felsefe üzerine yapılan büyük bir çalışmanın parçası olmadığını değil, Descartes'ın analitik geometrinin kurucusu olduğunu bilmeleri gerektiğini ifade etmektedir (Hersh, 1997, s. 110). Hersh'in ifadesiyle Descartes Euclid idealini (Kendinden belirgin aksiyomlardan başlayın, yanılmaz sonuçlarla (*infallible deduction*) devam edin) kucaklamaktadır ancak Descartes kendi araştırmasında Öklid ideallerini unutmuştur. Hersh, Descartes'ın Geometri'sinde (*La Géométrie*) aksiyom, teorem veya kanıt gibi etiketlere (*label*) rastlanmadığını belirtmektedir (Hersh, 1997, s. 112).

Klasik Yunanistan'da ve yine Rönesans ve sonrasında, matematikçiler "sentetik" ve "analitik" olmak üzere iki yol ayırdılar. Sentetik yol Euclid idi:

aksiyomlardan çıkarımlara, teoremlere. Analitik mod, bir sorunla başlar ve bir çözüm bulmak için "analiz" edersiniz. Bugün buna "sezgisel" veya "problem çözme" yaklaşımı diyebiliriz. Akademik matematiğin resmi sunumunda, sentetik norm vardı ve hala vardır. On dokuzuncu ve yirminci yüzyılların temelcilik düşünceleri, matematiği sentetik modu ile tanımlamaktadır - gerçek aksiyomlar ve ardından garantili doğru sonuçlar vermek için doğru çıkarımlar. Zihnin Yönü İçin Kurallarında Descartes sentetik yöntemde ısrar ediyor. Ancak Geometri'deki kendi araştırması sadece analitik modu kullanır. Sorunları çözüyor. Sorunları çözmek için etkili yöntemler bulur. Asla aksiyomlarla uğraşmaz. Descartes'ın matematik kesinliği hakkındaki inancı, okuyucuların en azından Descartes'ın kendi matematiğinin hatasız olmasını beklemesine yol açabilir. Ama elbette, göreceğimiz gibi, Geometri'nin diğer matematik kitaplarında olduğu gibi hataları var. Kesinlik (*certitude*) sadece bir hedeftir. Geometri'de Descartes, sorgulanamayan aksiyomlar veya reddedilemez akıl yürütme iddiasında bulunmaz. Matematiksel araştırmalarda normal olan sezgisel, pragmatik stili takip eder. Bu onun Metodu ile açıkça çelişmektedir (Hersh, 1997, s. 112).

Reuben Hersh, Descartes'ın "Meditasyonlar" eserinin özünün, ilk olarak Descartes'ın var olduğunu kanıtlayarak dünyanın var olduğunu ve sonra Descartes'ın düşüncelerini düşünerek Tanrı'nın var olduğunu ve aldatıcı olmadığını bir kanıt olduğunu ifade etmektedir. Aldatmayan bir Tanrı'nın varlığında her şeyin kolay olacağını belirtir. Descartes'ın beşinci meditasyonda üçgenin geometrisine dayanarak Tanrı'nın var olduğuna dair "matematiksel" bir kanıt verdiğine dikkat çekmektedir. Descartes'ın özünde Platon'un köken aldığı ve Locke, Berkeley ve Leibniz'e geçtiği iddiasını vurgulamaktadır: "Matematiğin kesinliği dinin kesinliğini ima eder" (Hersh, 1997, s. 116).

On sekizinci yüzyılın sonlarına kadar din, akademik yazımda nadiren sorgulandı. Matematik ve teoloji felsefesi birbirini tutan ikiz ağaçlardı. Platon'un Menon'u ve Descartes'ın beşinci meditasyonu, dinin üstesinden gelen matematikleri gösterir. Berkeley ve Leibniz'in yazıları matematik felsefesini destekleyen dini göstermektedir. Fiziksel olmayan ve hatta fiziksel ve fiziksel olmayan tüm gerçekliklerin Tanrı'nın zihninde yer aldığı düşüncesi, matematiğin doğası sorusuna tam bir cevaptı. Matematik felsefesinde son zamanlarda yaşanan sıkıntılar, dinin

bilimden uzaklaştırılmasının bir sonucudur. Din genelde çürümez. Entelektüel çevrelerde Buber, Kierkegaard, Maharishi ve Nagarjuna'nın öğrencileriyle tanışsınız. Ancak dine artık bilimde bir rol verilmiyor. Newton, keşiflerinin Tanrı'nın yüceliğine düştüğünü söyledi, ancak Laplace Napolyon'a Tanrı'yı gereksiz bir hipotez olarak bulduğunu söyledi. Bugünün bilim adamı kiliseye katılabilir veya kapanabilir, ancak Tanrı'nın isteğini mikrobiyoloji veya parçacık fiziğinde bir bulmacayı açıklamak için kullanmayı hayal etmezdi. Kant bölen çizgidir. Göreceğimiz gibi, hala felsefesinde Tanrı vardır. Bu temel çalışma, *Saf Aklın Eleştirisi* laiktir. Tanrı, *Pratik Akıl Eleştirisi*'nde, ikinci olarak, tabiri caizse görünürdür. Kant'ın ardından, ana akım felsefe laik oldu. Belki de teoloji kendi kendine yeterli bağımsızlık aşamasına gelmiş ve psikoloji gibi felsefeden kopmuştur. Belki de bilim adamlarından saygı duymak isteyen filozoflar, dini gettolaştırmadaki bilim adamlarının örneklerini izlediler (Hersh, 1997, s. 122-123).

Hersh (1997), öte yandan Spinoza'nın doğrudan matematik felsefesine girmemesine rağmen dolaylı etkisinin önemli olduğunu belirtmektedir. Kutsal Kitap ve Vahyi itibarsızlaştırmaya katkısı ve nihayetinde bilimi laikleştirmesi ile matematik felsefesinde önemli rol oynadığını ifade etmektedir: “*Böylece matematik felsefesinin modern ikilemini yaratmaya yardımcı oldu*” (Hersh, 1997, s. 123). Hersh sözün özü; Platon, Descartes ve Spinoza'nın dini ilerletmek için sözde matematiğin kesinliğini kullandığını belirtir. Öte yandan George Berkeley'in ise bunun için matematiğin eskikliğini kullandığını belirtmektedir. Berkeley'in ‘The Analyst’ (1734) kitabının matematikçilere matematikçi olarak meydan okuyan tek felsefi eleştiri olduğundan söz eder. Berkeley'e göre sayılar var değildir, rakamlar anlamsız sembollerdir. Dahası; güneş, ay, ağızdaki dişlerin hepsi bir görünüştür: “Onlar, biz ve diğerleri, sadece Tanrı'nın zihnindeki düşünceleriz.” Hersh bunu, soyutlamaların ve genel kavramların olmadığı doktrininin bir parçası olduğunu ifade etmektedir. Berkeley'i bugünün felsefi dilinde katı bir nominalist olarak adlandırmaktadır (Hersh, 1997, s. 128-129; Hersh vd., 2015, s. 361).

Hersh, burada, ana akım matematik felsefesinin zirve yaptığı dönem yazarlarından biri ve hem matematikte hem felsefede dev bir isim olarak tanımladığı Leibniz'in biçimsel bir dili olduğundan ve tüm doğru muhakemenin doğrudan

hesaplama olacağı bir dil hayal ettiğinden söz etmektedir. Birkaç kısa eser yayınlayan, zorlayıcı (*compulsive*) bir yazar olan Leibniz'in yayınlanmamış düşüncelerinin modern mantığın öncüsü olduğunu ifade etmektedir (Hersh, 1997). “Kant Frege, Hilbert ve Brouwer'ın arkasında dururken; Leibniz ve Hume, Kant'ın arkasında durur. Kant'ın metafiziği bazen Leibniz'in rasyonalizmini Hume'un ampirizmine bağlamak için bir çaba olarak tanımlanır” (Hersh, 1997, s. 127).

Reuben Hersh; 18. yüzyılın sonunda klasik felsefeyi zirveye ulaştıran Kant'ın metafiziğinin, Platonik insan bilgisinde zamansızlık arayışının devamı olduğunu belirtmektedir. A priori bilgisini sentetik ve analitik olmak üzere ayırt eden Kant'ın temel varsayımının, "evrensel insan sezgisi temelinde deneyimlerden bağımsız içerikli bilginin (sentetik a priori) kurulabileceği" olduğunu ifade etmektedir. Kant, Saf Aklın Eleştirisi (1781) eserinde geometrinin temelini uzay sezgisi ve aritmetiğin temelini zaman sezgisi olarak verirken; Pratik Aklın Eleştirisi'nde (1788) sentetik a priori terimini kullanmadan üçüncü bir sezgi olarak ahlaki sezgiyi (dinin temeli) vermektedir (Hersh, 1997, s. 129-135). Hersh (1997), Kant'ın matematik felsefesi ile dinin ahlaki-sezgisel versiyonu arasındaki bağlantıyı şöyle açıklamaktadır:

Descartes ve Leibniz'den farklı olarak, Kant Tanrı'nın varlığının kesinliğini desteklemek için matematik kesinliğini (zaman ve mekân) kullanmaz. Görev sezgisini zaman ya da mekân sezgilerinden bağımsız olarak görür. Tanrı teorisini matematik teorisinden ayrı tutar. Ama ikisi de aynı mantığa sahiptir. Her ikisi de sezgiye dayanır: duyulardan, çalışmadan veya öğrenmeden gelen, ama zihin doğasından gelen bilgi. Doğru ve yanlış, zaman ve mekân gibi, evrensel sezgilerdir. Uzay sezgimiz geometriye, zaman sezgimiz aritmetiğe, görev sezgimiz ilahiyata yol açar. Tanrı'nın zihninde, matematik felsefesindeki zorluklar ve bulmacalar ortadan kalkar. Sayılar nasıl var? Matematiksel gerçekler neden kesin ve zamansız görünüyor? Matematik neden "gerçek dünyada" çalışır? Tanrı'nın zihninde sorun değil (s. 134-135).

Hersh (1997) bugünün Platonizmi ile ilgili sorunun, matematiği Tanrı'nın zihninde bir düşünce tutmak istemesine rağmen Tanrı'dan vazgeçmesi olduğunu ifade etmektedir (s. 135).

On dokuzuncu yüzyılın ortalarına veya sonlarına kadar sorgulanmayan, ilgili literatür kısmında da açıklanan Euclid miti hakkında ise Reuben Hersh (1997); gerçekliğin doğası hakkında a priori bir kesinlik arayan metafizik felsefeye en büyük destek olduğunu ifade etmektedir (s. 135). On dokuzuncu yüzyıla dek matematikçiler ve filozoflar arasında evrensel olan Euclid miti, geometrinin en güvenilir ve en sağlam bilgi kolu olduğuna inanmaktayken, Euclid-dışı geometrilerin varlığının tanınması inançları yeniden şekillendirmiştir (Hersh, 1997, s. 135-136). Bu noktada rasyonalizm ve ampirizm arasındaki tartışmalardan bahsetmekte fayda görülmektedir. Reuben Hersh *‘Tüm Yönleriyle Matematiksel Deneyim’* ve *‘What Is Mathematics, Really?’* kitaplarında bu durum hakkında şöyle söylemektedir:

İlk olarak rasyonalizm ve skolastik felsefe arasında, sonra da rasyonalizm ve ampirizmin yeni radikal akımları arasında meydana gelen felsefi tartışmalarda geometrinin kutsallığına hiç karşı çıkılmamıştır. Felsefeciler fiziksel dünyayı keşfetmek için sadece (insanlara Yaratıcı’nın hediyesi olan) muhakemeye mi sahip olduğumuzu yoksa fiziksel objeleri ve onların Yaratıcı’sını keşfetmek için duyularımızın mı olduğu konusunda anlaşılamamışlardır. Bu tartışmalarda iki taraf da diğer tüm bilgiler problemlili olsa da geometrinin problemlili olmadığı görüşünü kabullenmiştir. Hume, sadece matematik ve doğa bilimleri kitaplarını, ünlü “ateşlere atın” direktifinden muaf tutmuştur. Hume bile matematiksel bilginin vaziyetinin tanımlanmasında bir problem görmemişti. Rasyonalistlere göre, kendi dünya görüşlerini tasdik etmenin en güzel örneği matematikti. Ampirikler için ise, matematik, dikkate alınmaması veya bir şekilde mazerette bulunulması gereken utanç verici bir karşı örnekti. Eğer, net bir şekilde görüldüğü gibi, matematik duygu algılarımızdan bağımsız bilgi içeriyorsa ampirizm tüm beşerî bilgileri açıklamada yetersiz kalacaktır. Bu mahcubiyet hâlâ beraberimizdedir, matematik felsefesinde yaşadığımız problemlerin sebeplerinden biridir. Modern bilimsel bakış açısının, asrın sadece son yüzyılında beğeni kazandığını unutmaya meyilliyiz. Russell ve Whitehead’ın zamanına kadar, sadece mantık ve matematik doğrudan muhakeme melekeleri ile elde edilmiş bilgiler olarak savunulabiliyordu. Matematiğin ampirizm ve rasyonalizm arasındaki kavgada hep özel bir yeri olmuştur. Sokaktaki matematikçi, matematiğin bilgi olduğu yönündeki sağduyusu ile rasyonalizmin son kalıntısıdır (Hersh, 1997, s. 135-136; Hersh vd., 2015, s. 366).

On dokuzuncu yüzyılda birden fazla düşünülebilir geometrinin varlığının tanınması ve matematiğin dayandığı geometrik sezginin analiz ile *sollanması* şeklinde iki kriz yaşanmıştır. Reuben Hersh (1997) on dokuzun yüzyılın meydan okuyan matematikçileri ve Platonculuk, biçimcilik ve oluşturmaçılık denilen üç standart dogmayı sunan matematiğin temelleri tartışmaları ile ilgili şöyle yorum sunmaktadır:

Matematik felsefesinin ders kitabı resmi tuhaftır. Cantor'un set teorisindeki zorluklar nedeniyle konunun 19. yüzyılın sonlarında ortaya çıktığı izlenimini edirsiniz. Bir "temellerde kriz" den bahsedildi. Temelleri onarmak için üç okul ortaya çıktı. Otuz kırk yıl boyunca kavga ettiler. Ancak üçünün hiçbirisi temelleri düzeltemedi. Hikâye altmış yıl kadar önce bitiyor. Whitehead ve Russell mantığından vazgeçtiler. Gödel'in eksiklik teoremi Hilbert'in biçimciliğini kontrol etti. Matematiksel dünyanın çoğu tarafından göz ardı edilen oluşturmaçılığı öğütleyen Brouwer, Amsterdam'da kaldı. Bu bölüm matematik felsefesinde kritik bir dönemdi. Kelimelerin anlamında çarpıcı bir değişimle, matematik felsefesinin vakıfçılık tarafından tahakküm altına alınması, matematik felsefesinin temellerle özdeşleşmesi haline gelmiştir. Tuhaf bir izlenim bıraktık: Matematik felsefesi, set teorisindeki çelişkilerle uyanmıştı. Kırk ya da elli yıl boyunca aktifti. Sonra tekrar uykuya daldı. Elbette her zaman matematiksel düşüncenin felsefi bir arka planı olmuştur. Vakıfçı dönemde, önde gelen matematikçiler felsefi konularda kamuoyunda tartışmalara giriştiler. O dönemi anlamak için önce ve sonra neler olduğuna bakın. İki tarihin takip edilmesi gerekir: Matematiğin felsefesi ve matematiğin kendisi. "Kriz" Öklid efsanesi ile gerçek olan matematikçilerin gerçek pratiği arasında uzun süredir devam eden bir tutarsızlık gösterdi (s. 138).

Hersh matematiğin temelleri tartışmalarına daha net bir açıklığı getirirken matematiğin doğasına yönelik olarak sahip olduğumuz iki mevcut olgudan söz etmektedir:

(1) "Birinci olgu matematiğin insan icadı olduğudur. Matematikçiler bunu bilir çünkü bu icadı onlar yapar. Herkesin bildiği aritmetik ve geometri, Allah vergisi gibi görünmektedir çünkü bunlar her yerde mevcuttur ve âdeta daima da var olmuşlardır. Topolojistler tarafından kullanılan en son cebirsel araçlar, sözde-diferansiyel operatörlerin en son varyasyonları o kadar yakın zamanda icat edildi ki

mucitlerin isim ve adreslerini bilebiliyoruz. Darphaneden yeni çıktıkları için hâlâ ıslıl ışıklar. Ama akrabalık ilişkisini de görebiliyoruz. En son yenilikten en antik olana dek aile benzerliği gayet belirgin. Aritmetik ve geometri, uzamdaşlık/homotopi teorisinin geldiği yerden -yani insan beyninden- doğmuştur. Her gün milyonlarca bunları diğer insanların beyinlerine işlemeye çabalamaktadır.”

(2) “İkinci olgu da dünyaya getirdiğimiz bu şeylerin, bu geometrik şekiller, aritmetik fonksiyonlar ve cebirsel operatörlerin, bizlere yani yaratıcılarına hâlâ gizemli olduğudur. Bunlar, ancak büyük çaba ve zekâ kuvvetiyle keşfettiğimiz özelliklere sahiptir. Keşfetmek için beyhude çabaladığımız diğer özellikleri vardır, hiç şüphe etmediğimiz özellikleri bile vardır. Matematikteki problem çözme faaliyetinin tümü ikinci olgu için kanıttır” (Hersh, 1997, s. 139-140; Hersh, 2014, s. 47-48; Hersh vd., 2015, s. 449).

Reuben Hersh; biçimcilik matematiğin insan zihninin icadı olduğunu tanıdığı, matematiksel nesnelerin hayal ürünü/hayali olduğunu ifade ettiğinden biçimciliğin birinci olgu üzerine inşa edildiğini belirtmektedir (Hersh, 2014, s. 48; Hersh vd., 2015, s. 449). Matematiğin uymak zorunda olduğumuz kendine özgü kuralları olduğunu kabul eden Platonculuğun ise ikinci olgu üzerine inşa edildiğini belirtmektedir. “1375803629’un asal sayı olup olmadığını bilmiyorum ama asal sayı olup olmadığını seçmenin bana kalmadığını biliyorum. Yani benim bu sayıyı yazmamla beraber ne olduğuna zaten karar verilmişti bile. Bu hayali nesneler kesin özellikler taşır. Hayali nesneler hakkında gerçek olgular *mevcuttur*” (Hersh, 2014, s. 48; Hersh vd., 2015, s. 449-450). Reuben Hersh (Hersh vd., 2015, s. 448), burada sözü edilmekte olan ifadeleri ilk olarak “*Tüm Yönleriyle Matematiksel Deneyim*” adlı kitabında, ‘*Hayali Nesneler Hakkında Gerçek Olgular*’ başlığında yazdığı içerikte kullanmıştır. Daha sonra 2014 yılında yayınlanan “*Experiencing Mathematics: What Do We Do, When We Do Mathematics?*” adlı kitabında da aynı başlıklı (Hersh, 2014, s. 47) içeriğe yer veren Hersh (2014)’in şu ifadesi önem taşımaktadır: “Bugün hayalî (*imaginary*) kelimesinden pişmanım, zihinsel (*mental*) daha iyi olurdu.” (s. 27).

AMS’nin röportajında Hersh (2014) matematiğin temelleri hakkındaki düşünce okulları için şöyle söylemektedir: “*Ben şahsen ne düşündüğüme karar vermeye çalıştım.*

Üç düşünce de yanlıştı, katılmıyorum. Üçü de mantık temelinde değil. Ben bir matematikçiyim, matematik yapıyordum. Matematik benim başlangıç noktam, bu bir gerçek. Matematiği öğrendim, matematiği yapıyorum. Bu insanların ne hakkında konuştuğu yabancı ve garip bir şey değildi benim için. Bu üçünü de üç farklı şekilde nasıl bildiğimi düşündüm. Kendimi kötü hissettim. Ne yaptığınızı bile bilmeden nasıl bir matematikçi olabileceğinizi düşünün.” Hersh; araştırmaları, çalışmaları ve ortaya koyduğu ürünlerle verdiği çabasından elde ettiği düşüncesini ise şöyle açıklamaktadır:

Birinci olgu Platoncu bakış açısıyla kabul edilemez bir olgudur. Matematiksel nesneler, bizim cehaletimize ya da tercihlerimize meydan okuyarak neyseler o oldukları için, insan zihninden bağımsız bir anlamda gerçek olmalıdırlar. Açıklayamadığımız ya da anlamadığımız bir şekilde maddi dünyanın ve insan zihninin dışında var olmaktadır. Yapılandırmacı bakış açısından ise ikinci olgu kabul edilemez bir olgudur. Matematik bizim icadımız olduğu için, matematikte var olan hiçbir şey bilinene -yani aslında yapısalcı yöntemlerle ispat edilene- kadar doğru olmaz. Biçimciye gelince... Basit bir şekilde her şeyi inkâr ederek bu ikilemden kaçır. Matematiksel nesne yoktur, bu durumda matematiksel nesnelerin doğası ile ilgili bir problem de yoktur (Hersh, 2014, s. 48-49; Hersh vd., 2015, s. 450).

4.3.2. Reuben Hersh’in “Hümanistler ve Başına Buyruklar (*maverick*)” adıyla sınıflandırdığı modern matematik felsefesindeki düşünceleri değerlendirmesi

Reuben Hersh, daha sonra yer verdiği düşüncelere ‘Temelcilik Ölür/Ana Akım Yaşar’ başlığı altında devam etmektedir. Yapısalcılık ve kurgusallık hakkında rapor verdiğini belirttiği bu bölümü ‘ana akımın hikâyesini güncellemeye çalışma’ şeklinde tanımlamaktadır (Hersh, 1997, s. 165). Platonculuk ve Biçimciliğe alternatif düşüncelerin üretildiği zamanları ifade etmeye çalışmaktadır.

“Matematik örüntü bilimidir” (Steen, 1988) tanımlamasını; filozoflar Michael Resnik ve Stuart Shapiro örüntü bilimi (*science of patterns*) olarak adlandırırken, matematikçiler (Bourbaki) yapısalcılık (*structuralism*) olarak adlandırmışlardır (Hersh,

1997, s. 177-178). Reuben Hersh, yapısalcılığın tam bir açıklama olarak tatmin edici olmadığını belirtmektedir. Saunders MacLane'in elementer veya analitik sayı teorilerinin nesneler hakkında örüntülerden çok daha makul bir şekilde anlaşıldığını ifade etmesini örnek göstererek, Resnik ve Shapiro'nun örüntü ile kastettikleri şeyin bir kâğıt parçası gibi değil de maddi olmayan bir örüntü (*nonmaterial pattern*) olduğunu belirtmektedir. Ancak Hersh, matematikçilerin arada sırada fiziksel modeller kullandıklarını belirterek ifadelerini çürütmektedir. Ayrıca fizikçi, kimyager, gök bilimci, jeolog, tarihçi, sosyolog, psikolog, edebiyat eleştirmenleri gibi meslek gruplarının da maddi olmayan örüntüler üzerinde çalıştıklarını da eklemektedir. Hersh bu şekilde matematiği, 'maddi olmayan örüntülerin bilimidir', olarak açıklayamayacağımızı ifade etmektedir. Dolayısıyla Hersh, Resnik ve Shapiro'ya katılmaz ve 'matematiksel örüntüleri' açıklamanın, 'matematiği' açıklamaktan daha kolay olmadığını belirtmektedir (Hersh, 1997, s. 177-178). Ancak bunun yine de bir zorluk yaratacağını belirterek şöyle açıklamaktadır:

Matematik, matematiksel örüntüler üzerinde çalışmaktır” artık konuya fazla kapsayıcı olmayacak, ama yine de metodolojiye fazla kapsayıcı olacaktır. Bazı insanlar matematiksel kalıpları, örneğin geometrik kalıpları; bilgisayar grafikleri, fiziksel modeller veya istatistiksel örnekleme yoluyla inceliyorlar. Gösterici akıl yürütmenin büyük bir kullanımı olmaksızın çeşitli ampirik modellerden herhangi biri tarafından. Bunu yapan insanlar matematiksel kalıplar üzerinde çalışıyorlar. Onlar matematikçi değiller. Matematiğin tanımı, “matematiksel düşünme biçimi” olan metodolojiyi içermelidir. Son olarak "Matematik, matematiksel kalıpların matematiksel çalışmasıdır" demenin doğru olacağına inanıyorum. Doğru ama heyecan verici değil.” (Hersh, 1997, s. 178).

Reuben Hersh bu noktada Penelope Maddy'nin “Matematikte Gerçekçilik” (*Realism in Mathematics*) adlı kitabında yapısalcılığın set-teorik gerçekçiliğinden sadece sözel olarak farklılık gösterdiğini belirttiğini ifade etmektedir. Ancak yapısalcılık ile set-teorik gerçekçiliği temelde aynı görmekte güçlük çektiğini belirtmektedir. Hersh'e göre; örüntüden daha çok bir set fikrimiz vardır ancak Bourbaki'nin adlandırdığı “yapı” terimi daha kapsayıcıdır (Hersh, 1997, s. 178-179).

Yapısalcı tanım matematiksel pratiğe uyar, çünkü her şey dâhil. Tüm matematik kolayca kendi kapsamına girer. Neredeyse her şey onun altına da düşüyor. Matematiğin set-teorik resmi ikna edici değildir, çünkü set teorisi ana akım matematiğin büyük kısmı ile ilgisizdir. Yapısalcılık zıt eksikliğe maruz kalmaktadır. Sadece matematikte değil, tüm analitik düşüncede de mevcut olan bir şeyi tanır. Set-teorik resim kısıtlayıcıdır; aşırı kapsayıcı olan yapısalcı tablo (Hersh, 1997, s. 179).

Reuben Hersh, öte yandan kurgusalılık hakkında, Cantor'ın sayılamayacak kadar çok gerçek sayı olduğunu kanıtlamasını hatırlatmaktadır. Kendi düşüncelerini açıklamadan önce ise şöyle bir soru bırakmaktadır: “*Gerçekten çok fazla gerçek sayı var mı, yoksa bir masal mı?*” (Hersh, 1997, s. 179). Sıradan matematikçilerin “*onlar var*” derken; kurgusalistlerin ise “*yok*” dediğini, bilimin, matematiksel varlıkların gerçek varlığını gerektirmediğini (W. V. O. Quine'nin iddia ettiği gibi) göstermeye çalıştıklarını belirtmektedir (Hersh, 1997, s. 179). Bu noktada kurgusalist olarak adlandırılabilen matematik filozoflarından Charles Chihara'nın matematik ve Shakespeare'nin Hamlet'i arasında yaptığı benzetmeyi örnek göstermektedir:

Charles Chihara matematik ve Shakespeare'in Prenses Hamlet'i arasında bir benzetme yapar. Hamlet bir kurgu, ama onun hakkında çok şey biliyoruz. Hamlet'e katılan bir sahne yönetmeni, Hamlet hakkında Shakespeare'in yazdığından daha fazlasını biliyor. Hamlet muhtemelen üzüm yedi. Kesinlikle kızarmış armadillo yemedi. Matematikte, var olmayan şeyler hakkında da sonuçlara varıyoruz. Sayılar, Hamlet gibi kurgulardır (Hersh, 1997, s. 180).

Ayrıca bazı kurgusalistlerin de materyalist olduğunu belirtmektedir. Materyalistlerin, düşündükleri gibi, sadece düşünülebilir ve hacim işgal eden maddi nesneler gerçek olduğundan, matematiğin gerçek olmadığını, bir kurgu olduğunu ifade ettiklerini açıklamaktadır. Ancak burada bir “*kurgu*” olmanın ne demek olduğunun daha fazla açıklanmadığına da vurgu yapmaktadır. “*Kurgu olmayan bilgi, ampirik bilime karşılık gelir; kurgu ise matematiğe karşılık gelir!*” (Hersh, 1997, s. 180). Reuben Hersh (1997, s. 180), “*kurgusalılık Platonizm'i reddeder*” demekte ve bu anlamda kendisinin kurgusal biri olduğunu ifade etmektedir. Ancak kendisinin Chihara ve Field ile aynı gemide olmadığını da belirtmektedir. “*Matematikte çalışırken gerçek bir şeyle*

çalıştığımızı dair inancımız kitlesel bir yanılsama değildir. Her birimiz için matematik dışsal bir gerçekliktir. Onunla çalışmak, nesnel karakterine boyun eğmemizi gerektirir. Olmasını istediğimiz gibi değil. Bu tarafsızlıkla karşılaşmadan matematiğin gerçekliğini reddetmek etkisizdir.” (Hersh, 1997, s. 181). Reuben Hersh, kurgusallığın insan yaratıcılığını merkeze taşıdığını ve bunun bir teori değil, bir metafor olduğunu vurgulayarak ifadelerine şöyle devam etmektedir:

Sayılar fiziksel nesne değildir. Yine de onlar bireysel bilincimizin dışında var olurlar. Onlarla dışsal varlıklar olarak karşılaşırız. Ödev notları veya hız biletleri kadar gerçekler. Sosyal-kültürel yapılar anlamında gerçekler. Onların varlığı, kafamızı tanımamız ya da vurmamız gereken diğer sosyal yapıları kadar hissedilir. Bu yüzden sayıları kurgu olarak adlandırmak yanlıştır, ne Hamlet gibi ne de insan aklının/beyninin yarattıkları olsa da, ne fiziksel ne de aşkın gerçekliğe sahip olmasalar da. Materyal olmayan gerçekleri - zihinsel gerçeklik ve sosyal-kültürel-tarihsel gerçeklik - tanıyarak başlamalıyız. Sonra matematiğin zihinsel ve fiziksel yönleri olan bir sosyal-kültürel-tarihsel gerçeklik olduğu anlaşılmaktadır. Bu bir kurgu mu? ABD Yüksek Mahkemesi ve ana faiz oranı ve beyzbol flama yarışı kurgu ise, tabii ki. Ama değil. Matematik hem kurgusal bir gerçeklikti hem de gerçekçi bir kurgudur. İlginç olan soru, gerçek ve hayali olanı iç içe geçirmektir (Hersh, 1997, s. 181).

Reuben Hersh, Platonculuk ve biçimciliğe karşı oluşturulan alternatif düşüncelerle ilgili görüşlerinden sonra Hümanistler ve başına buyruklar olarak sınıflandırdığı grupta birçok isme yer verirken, bu grubun tohumlarını atan kişinin Aristoteles olduğunu belirtmektedir. Pisagor veya Platon’a kıyasla modern olan Aristoteles’in matematik felsefesinde ilk hümanist olduğunu ifade etmektedir (Hersh, 1997, s. 182).

Aristoteles'in matematik felsefesinde anahtar kavram soyutlamadır. Sayılar ve geometrik figürler, boyut ve şekil (geometrik şekiller durumunda) veya "sayı olarak çokluk" (*numerosity*) (sonlu kümeler durumunda) dışında hiçbir şey kalmayınca kadar alakasız özellikler (renk, yer, fiyat vb.) Bir kenara bırakılarak fiziksel nesnelerden soyutlanır. İlköğretim matematiğinin bir hesabı olarak, bu kötü değil. Bugün yetersizdir, çünkü matematik dairelerden, üçgenlerden ve sayma sayılarından

çok daha fazlasını içerir. Soyutlama ifadesi açık ve makul. Ancak yirminci yüzyıl standartlarına göre kesin değildir. Soyutlamanın resmi bir tanımını vermek zor olurdu (Hersh, 1997, s. 182).

Hersh, bir insan yaratımı olarak matematik fikrinin Artistoteles ve ampiristler John Locke, David Hume ve John Stuart Mill ve diğerleri tarafından birçok defa savunulduğunu belirtmektedir (Hersh, 1997, s. 182). John Locke için kapsayıcı bir matematik felsefesi olmadığından ancak matematiğin insan zihninin bir yaratılışı ve aktivitesi olduğunu anladığından bahsetmektedir (Hersh, 1997, s. 186). David Hume için ise, diğer bilimler gibi matematiğin sadece olası bilgi verdiğini kabul eden yirminci yüzyıldan önce bilinen tek filozof olduğunu ve matematiksel büyüme ve keşif sürecinde matematikçiler topluluğunun rolünü şu şekilde açıkça tanımladığını belirtmektedir:

Tüm gösterici bilimlerde kurallar kesin ve yanılmazdır, fakat bunları uyguladığımızda, yanıltıcı ve teşvik eden fakültelerimiz onlardan ayrılmaya ve hataya düşmeye çok yatkındır. ... Biliminde bu kadar uzman olan hiçbir Cebirci veya Matematikçi yoktur, keşfinden hemen sonra herhangi bir gerçeğe güvenmek ya da herhangi bir şey olarak değil, sadece bir olasılıktır. Ama yine de arkadaşlarının onayı ile öğrenilir ve öğrenilen dünyanın evrensel rızası ve alkışları ile en mükemmel hale getirilir. Şimdi, bu kademeli güvence artışının yeni olasılıkların eklenmesinden başka bir şey olmadığı açıktır (Hume; akt. Hersh, 1997, s. 188-189).

Hersh (1997), Hume'un bu tanımlaması için, kendisinin felsefe metinlerinde matematiğe ilişkin yanıtladığı nadir ifadelerden birini söylediğini ifade etmektedir: “*Ne kadar doğru!*” (s. 189). Diğer tarafta John Stuart Mill'den bahsederken, matematik felsefesinde ampirizmin yeniden canlanması Mill'e yeni bir bakış gerektirdiğinden söz etmektedir. Matematik yasalarının fiziksel gerçeklikle ilgili nesnel gerçekler olduğu ana tezinde Mill, bunların dünyayı gözlemleyerek öğrendiğimiz temel ilkelere veya yasalardan türetildiğini belirtmektedir. Hersh; Mill'e göre örneğin 3 sayısının, gözlemlenen üçlülerden yapılan genelleme ile 1 ve 2'den bağımsız olarak tanımlandığını ifade etmektedir (Hersh, 1997, s. 195). Bu noktada Hersh, Karl Popper'ın tümevarımla ilgili “beyaz kuğu/siyah kuğu” önermesine gönderme yaparak Mill'in fikrini şöyle açıklamaktadır:

" $2+1=3$ " bir gözlem gerçeğidir, aslında "tüm kuğular beyazdır"dan farklı değildir. Avustralya'da siyah kuğuların olduğu ortaya çıktı. $2 + 1$ 'in bazen üç olmadığı ortaya çıkabilir. Ancak bu yasanın muazzam bir teyidine sahip olduğumuzdan, haklı olarak bu yasaya muazzam bir güven duyuyoruz. Mill'in fikri Aristoteles'in fikrine yakındır. Ancak Mill de radikal veya paradoksal görünüyor, çünkü Mill'in zamanına göre akılcı-idealist matematik felsefesi baskın hale gelmişti (Hersh, 1997, s. 195-196).

Reuben Hersh'in matematik felsefesi tarihindeki düşünceleri sınıflandırdığı ikinci kısmın devamında yer verdiği isimler, modern ve çağdaş hümanist matematik felsefesi adı altında topladığı isimlerdir. Bunlar arasından takıçilerinin pragmatist William James ve John Dewey olduğu, pragmatizmin kurucusu Charles Sanders Peirce'in görüşleri de bu listede yer almaktadır. Hersh, James, Dewey ve Peirce'nin üçünün de matematiği deneyüstü bir hiper gerçeklikten ziyade bir insan etkinliği olarak gördüklerini belirtmektedir (Hersh, 1997, s. 199). Öte yandan Wittgenstein'in matematikte düzenler tespit ettiğini ancak onun bunları bilmiyor veya umursamıyor olduğunu şöyle benzetmektedir: "*Mutfaktaki kolaylığı -patates saymak, ahşap ölçmek-kabul etti. Matematiksel kolaylığı tanımadı.*" (Hersh, 1997, s. 206). Wittgenstein'in "(1) *Matematik, sadece yaptığımız bir şeydir.*" ve "(2) *Bunu başka bir şekilde de yapabilirdik.*" şeklindeki ifadelerinden ilkinde doğru ikincisine ise saçma demek ve ikinci ifadenin ilk önemli görüşü gizlediğini belirterek bunların yeniden ifadesini ve eleştirilerini şöyle vermektedir:

(1) Yeniden ifade edilebilir: "Matematik topluluğun bir faaliyetidir. İnsanlardan ayrı bir kısmı yoktur." Doğru. Frege'nin Platonizmi için cesur bir düzelticidir. (2) Yeniden ifade edilebilir: "Matematiği istediğimiz gibi yapabiliriz." Bu o kadar yanlış ki, ilk ifadenin değerini gizliyor (Hersh, 1997, s. 206).

Reuben Hersh, bu noktada Wittgenstein'in dil ve matematik arasındaki benzetmesine ilişkin olarak dilin ve matematiğin her ikisinin de ayrı kuralları olduğunu belirtmektedir. Dil için; dilbilgisinin alanının geleneksel veya bir anlamda keyfi olduğunu ve içsel bir zorunluluk tarafından belirlenmediğini ifade etmektedir. Ancak matematiğin farklı olduğunu da eklemektedir: "*Matematik, yarı saydam bir iletişim*

aracından daha fazlasıdır. Kapsamı vardır. Kuralları keyfi değildir. Kuralları matematiksel kolaylık ve matematiksel zorunluluk ile belirlenirler.” (Hersh, 1997, s. 206).

“Hümanistik matematik felsefesini tarihini tarih öncesinden ayırmak istiyorsak; Aristoteles, Locke, Hume, Mill, Peirce ve Wittgenstein’in tarihöncemiz olduğunu söyleyebiliriz. Tarihimiz Frege ile değil Lakatos ile başlar.” (Hersh, 1997, s. 208). Reuben Hersh ‘*What Is Mathematics, Really?*’ kitabında bu sözlerin ardından anlattığı Lakatos’a diğer birçok kitabında da yer vermektedir. Keza kuramsal çerçeve ve ilgili literatürde de bahsedildiği gibi Karl Popper’ın bilim felsefesinde oluşturduğu yanlışlanabilirliğini (*falsifiability*) Lakatos, matematik felsefesine matematiğin yanlışlanabilirliği (*fallibility*) şeklinde uyarlamıştır (Gür, 2019, s. 60). Reuben Hersh (Hersh vd., 2015, s. 395), Lakatos’un “*Proofs and Refutations*” kitabının tesirinin, mantık ve meta-matematiğin sunduğu manzara ile tamamen çelişkili olan bir felsefi matematik manzarası sunmasında olduğunu ifade etmektedir. Lakatos’un tarzını ve fikrini şöyle özetlemektedir: *“Matematik, doğal bilimler gibi, yanlışlanabilir, şüpheden ari değildir ve hata ve dikkatsizlikten asla tamamen özgür olmayan teorilerin eleştirilmesi ve düzeltilmesiyle büyür. Bir problem veya varsayımdan başlandığında, aynı zamanda ispat ve karşı-örnek arayışı vardır. Yeni ispatlar eski karşı-örnekleri açıklar, yeni karşı-örnekler eski ispatları çürütür. Lakatos’a göre, “ispat”, informel matematik bağlamında gerçeği varsayımdan sonuca kıramaz bir zincir hâlinde taşıyan mekanik bir işlem anlamına gelmez. Daha ziyade karşı-örneklerin baskısı altında daha detaylı ve gerçeğe yakın olmaya zorlanan varsayımı, daha makul ve ikna edici hâle getiren açıklama, doğrulama ve detaylandırmalardır.”* (Hersh, 1997, s. 211-212; Hersh vd., 2015, s. 385).

Reuben Hersh (Hersh vd., 2015, s. 385), böylece Lakatos’un bilgi bilimini biçimselleştirilmiş matematiğe değil de matematiğin, matematik öğrencilerine ve matematikçilere bilinen hâline, büyüme ve keşfetme sürecindeki formel matematiğe uygulamış olduğunun kanaatine varmaktadır. Lakatos’un matematiğe ve kendi üzerine olan etkisinden şöyle söz etmektedir:

Biri matematiğin ne olduğunu sorarsa kendi pratikleriyle bunun ne kadar az uyduğu gayet farkında olan matematikçilerin ortaya koyduğu formel sistemler modeline yönelik eleştirileri bulmak zor olmasa da cevap verirken formel sistemler modelini kullanmak kolaydır. Fakat Frege'den beri dikkate değer hiçbir filozof, matematiği temelcilik ya da formel mantıkta yer alan terimler dışında kalan terimlerle ele almamıştır. En iyi düzeltici, tamamıyla değişik bir modelle karşılaşmaktır. Bu, Lakatos'un *Proofs and Refutations* adlı kitabında bize vermiştir (Hersh vd., 2015, s. 397).

Reuben Hersh'in çağdaş hümanist matematik felsefesi içerisinde yer verdiği yazarlar arasında Karl Popper, Philip Kitcher, William Aspray, Jean Piaget, Paul Ernest vardır. Karl Popper'ın bilim felsefesinde meydana getirdiği düşünceler Lakatos'u etkilediği gibi Reuben Hersh'e de örnek olmaktadır. Diğer bir yazar Philip Kitcher'ın da hümanist matematik felsefesine önemli katkıları olduğunu belirtmektedir:

Bir kuşağın matematiksel bilgisi, ebeveyninin kuşağının bilgisine dayanır. Araştırma dergilerinin matematiği, matematik topluluğu tarafından eleştiri ve hakemlik yoluyla doğrulanır. Çoğu matematiksel makale bir bakışta anket yapmak için çok uzun süre kullandığından, kabul etmek belirsizdir. Yetkili bir şüpheci tarafından tartışıldığı takdirde iddiamızı tekrar gözden geçiririz. Bu nedenle, inancımız tüm deneyimlerden önce *değildir*: sosyal deneyimlerimize bağlıdır! (Hersh, 1997, s. 224). “Deneyim! Gerçekten her şeyin arkasında bu var. Tecrübe asla gerçeği garanti etmez.” (Hersh, 2014, s. 81).

Reuben Hersh, matematik felsefesi ile matematikçileri sosyal birer varlık olarak ele almasının Kitcher'ın en önemli noktalarından biri olduğunu ifade etmektedir. Kitcher'in Thomas Khun'un '*bilimsel değişim, yalnızca teoride değil, uygulamada da değişiklik anlamına geldiği*' ilkesini benimseyerek matematiksel pratiğin beş bileşenini (dil, metamatik görüş, kabul edilen sorular, kabul edilen ifadeler, kabul edilen gerekçeler) tanımladığını belirtmektedir. Reuben Hersh, bu beş bileşenin uyumlu olması ve biri değişirse, diğerlerinin de ona göre değişmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Titizlik, genelleme, soru-genelleme, soru-cevap ve sistematizasyondan oluşan Kitcher'ın tanımladığı matematiğin geliştiği beş rasyonel ilkenin sırayla meydana geldiğinde matematiksel pratiğin bir dizi rasyonel adımla önemli ölçüde

değiştirilebileceğini vurguladığını belirtmektedir. Hersh, bu açıklayıcı programın güçlü ve ikna edici olduğuna kanaat getirirken matematiğin tarihsel analizine kalıcı bir katkı olması gerektiğini de ifade etmektedir (Hersh, 1997, s. 225).

Reuben Hersh çocuklarda soyut düşüncenin gelişimi konusundaki titiz gözlemleriyle bilişsel psikolojide devrim yaratan psikolog Jean Piaget'nin çalışmalarından da etkilenmiştir. Piaget'nin gözlemlediği almak, koymak, hareket ettirmek, kullanmak olarak çocukların aktif olarak öğrendiklerine istinaden ilişkili bedensel hareketlerin zihin/beyinde iz bıraktığını hatırlatmaktadır. Piaget'nin sayma ve doğal sayı kavramlarının etkinlik yoluyla elde edilmesi önerisine göre çocuk alır ve koyar, düğmeler, madeni paralar ve çakıl taşlarını idare eder ve işler. Hersh bu faaliyetler ile nesnelerin temel özelliklerinin çocuğun zihninde/beyninde bir temsile ulaşacağını ifade etmektedir. Ayrıca akla gelebilecek Aristoteles'in sayı ve şekli soyutlama olarak açıklamasının pasif bir gözlem olduğunu da hatırlatmaktadır.

Sayımdan harekete geçin. Ayırlık kavramı, fasulye ve boncuklarla oynamaktan geldiğinden, üç boyutlu hareket ve mekân kavramları, üç boyutlu bedenlerimizi üç boyutlu uzayda hareket ettirmekten gelir. Kolunu kaldır, başını çevir, kolunu indir. Böylece üç boyutlu sürekliliğin yapısını öğrenirsiniz. Bu bilgi olmadan, yola bile çıkamazdın. Bu bakış açısı, hem zihinsel hem de fiziksel gerçeklikten bağımsız olarak soyut nesneler olarak Platonist sayı ve mekân anlayışından bir kaçıştır (Hersh, 1997, s. 227).

4.4. Matematik eğitimi felsefesi ve Reuben Hersh

Reuben Hersh'in giriş kısmında tanıtıldığı kısım da göz önünde bulundurularak akademisyen matematikçilerin üniversitelerde ders verdiği aşikârdır ve denilebilir ki işlerinin bir kısmında matematik eğitimcisidirler. Hersh, 'Matematiğin Temelleri' dersini vermeye başladığında, o derste matematik yapmaktan çok matematik hakkında konuştuğunu fark ettiğini belirtmektedir (Hersh, 2014, s. 2; Hersh vd., 2015, s. 3). Reuben Hersh'in kendi dersi ile ilgili bu deneyimini paylaşması ve dahası matematik

eğitimi üzerine görüşlerine yer vermesi, eserlerinde sıkça görülmektedir. Buradan yola çıkarak bu başlık altında bir pür matematikçi olan Reuben Hersh'in kitap, röportaj ve makalelerinden elde edilenlere göre matematik eğitimi ve felsefesi ile ilgili görüşlerine yer verilmektedir.

İlgili literatür ve kavramsal çerçeve kısmında matematik felsefesinin matematik sınıflarını nasıl etkilediğine değinilmektedir. Görülmüştür ki matematiğin doğasına yönelik olarak geliştirilen anlayışlar ve içerisinde bulunan zamanın sosyal ve politik durumları matematik eğitimi yaklaşımlarını şekillendirmektedir. Reuben Hersh, matematiğin doğasını anlamaya yönelik oluşturduğu fikirlerinin aktarımını matematik eğitimi, matematik toplulukları, matematik kültürü, öğrenme, öğretme gibi kavramların sunumuyla da destekleyerek vermektedir. Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesi ve etkilendiği Imre Lakatos, Paul Ernest gibi yazarlar hakkındaki görüşleri onun matematik eğitimi üzerine olan düşünceleri ile ilgili anlaşılır bir resim çizilmesinde etkili olmaktadır.

Matematik eğitimi süreci içerisinde öğrenme, öğretme, yöntem, algı gibi birçok kavram ve öğrenci, öğretmen, sınıf, okul, öğretim programı gibi sistem içerisindeki birçok yapı üzerine tartışma yapılabilir. Bir matematik sınıfı için bu kavram ve yapılara bütüncül olarak bakıldığında zeminde matematiğe yönelik oluşturulan algı, yargı ve önyargıların önemli ölçüde etkisinin olduğundan söz edilebilmektedir. Reuben Hersh (Hersh ve John-Steiner, 2018)'in, psikolog Vera John-Steiner ile birlikte yazdığı, *Sevgi mi? Nefret mi? Matematik Aşkı: Matematik Efsaneleriyle Savaşmak (Loving and Hating Mathematics)* adlı kitabında, tanınmış matematikçilerin kendileri hakkındaki konuşmalarına da yer vererek, temel olarak matematik alanının ve uygulayıcılarının çarpıtılmış ve basmakalıp görünümünün üstesinden gelme amacını taşımaktadır. Bunun için; matematiksel başlangıçlar, matematik kültürü, avuntu olarak matematik, bağımlılık olarak matematik, arkadaşlıklar ve ortaklıklar, matematik toplulukları, matematikte cinsiyet ve yaş, matematik öğretimi ve okul matematiği başlıkları altında birçok matematikçinin deneyimleri örnek gösterilmektedir (Hersh ve John-Steiner, 2018). Hersh (2018, s. 93), bir matematikçinin deneyiminin, matematik disiplininin içinde bulunduğu uzun tarihten etkilendiğini ifade etmektedir. Dolayısıyla Hersh'in

“matematiksel deneyiminin felsefesi” görüşündeki merkezi terim olan “deneyimler”, matematiğe yönelik olarak oluşturulmuş efsaneleri çürütmek üzere önemli birer destek olmaktadır. Bu kitap aşağıda verilen dört efsaneyi çürütmeye çalışmaktadır:

- (1) Matematikçilerin diğer insanlardan farklı ve duygusal karmaşıklıktan yoksun oldukları efsanesi.
- (2) Matematiğin yalnız yapılan bir uğraşı olduğu düşüncesi.
- (3) Matematiğin genç insanların işi olduğu düşüncesi.
- (4) Matematiğin yüksek eğitim için etkili bir filtre olduğu inancı (Hersh ve John-Steiner, 2018, s. 9-12).

Hersh (Hersh ve John-Steiner, 2018), birinci efsaneye ilişkin olarak matematiksel deneyimin heyecanın ve umutsuzluğun ikiz kutupları arasında ilerlediğini belirtmektedir: “*Duygusal hayatta dengeyi sağlamak çok kolay değildir; bu matematikle ilgilenenler için özellikle çok daha zordur; açıkça belirlenmiş bir yol olmadan kesinliğin peşinde olmak onları bazen umutsuzluğa sürükleyebilir. Matematikçilerin kendi özel, ayrı düşünce dünyalarında kendilerini matematiğe vermeleri, matematikteki başarılarının ve aldıkları hazzın merkezindedir.*” (s. 8-9). Hayatın iki anlamlı ve çelişkili ve matematiğin de hayatın bir parçası olduğunu dolayısıyla bu zıt duyguların matematiksel çalışma süreci içerisinde her seviyede mevcut olduğunu ifade etmektedir:

Matematiğin felsefesi tüm matematiksel durumu –içerik olduğu kadar işlemi- tanımladığından ötürü, doğal olarak iki anlamlı olacaktır. William Byers’in yazdığı gibi, “Mantık bir yönde hareket eder; bu hareket açıklık, ahenk ve yapının yönündedir. Anlam bulanıklığı diğer yönde hareket eder; bu hareket ise değişkenlik, açıklık ve açığa çıkma yönündedir. Matematik bu iki kutup arasında bir o yana bir bu yana hareket eder... Matematiğe bu gücü veren bu iki farklı bakış açısı arasındaki etkileşimdir.” (Hersh ve John-Steiner, 2018, s. 351).

Hersh, matematikçilerin sürüncemede kaldıkları bazı hipotezleri yeniden çözmek için diğer matematikçilerden birinin zorlu yolculuğu hakkında hikâyeleri sevgiyle anıp el üstünde tuttuklarından bahsetmektedir. Bu tür hikâyelerin yeniden ve yeniden anlatılarak matematiksel tarih ile kültürün bir parçası olduğunu belirtmektedir.

Dolayısıyla Reuben Hersh, matematiksel hayatın duygusal ve sosyal olduğuna vurgu yaparak ilk iki efsaneyi çürütmektedir (Hersh ve John-Steiner, 2018).

Üçüncü efsanenin varlığını ise Hersh, Hardy'den bir alıntı ile ifade etmektedir: “*Şu matematik genç adamların oyunudur.*” Hersh, bu efsaneyi çürütmek için matematikçilerin hayatlarındaki olgunluk, yaşlanma ve cinsiyet konularına değinmektedir. Erkek ve kadın herkesin, hayatta gerçekleştirmek istedikleriyle ilişki içinde kalmanın birçok yolunu yaratarak, ileriki yaşlarında da üretmeye devam ettiklerini konu almaktadır. Hersh (Hersh ve John-Steiner, 2018), matematikçilerin genç insanların işi olduğu efsanesine karşı gösterdiği bir kanıt olarak Hardy'nin (1996, s. 45) “Bir Matematikçinin Savunması” kitabının başında yazdığı “*Matematik hakkında yazıyorum; çünkü 60 yaşını geçmiş her matematikçi gibi, esas işimi hakkıyla yapabilmem için gereken zihin gücüne, enerjiye ve sabra artık sahip değilim.*” ifadelerine eleştiri yayımlayan Louis Joel Mordell'in ifadelerini alıntılarlamaktadır:

Bir şeyler yapmak, yeni teoremler kanıtlamak, matematiğe bir şeyler eklemek ve diğer matematikçilerin yaptığı şeyler hakkında konuşmamak bir matematikçinin fonksiyonudur. Bir matematikçinin gerçek fonksiyonu matematiği geliştirmektir. Şüphesiz ki yeni sonuçların üretimi yapabileceği en önemli şeydir, fakat başlatabileceği veya içinde yer alacağı daha başka aktiviteler vardır. Hardy bunların tümünün paylaşımına sahip oldu. Altmış yıl önce matematik bitirme sınavlarının reformunda liderlik etti. Hardy, Londra Matematik Topluluğunun iki kere sekreteri ve başkanı oldu... Hepimiz çok iyi biliyoruz ki yaşımız ilerledikçe en verimli dönemimizde değilizdir. Birçoğumuz, Hardy dışında, bu kaçınılmaz şeyi kabul ederiz. Belki geçmiş işimizin bir bölümünü düşünerek huzur bulabiliriz. Genç matematikçilere yardımcı da olabiliriz (akt. Hersh ve John-Steiner, 2018, s. 264).

Dördüncü efsane olan matematiğin yüksek eğitim için etkili bir filtre olduğu inancı, diğer efsanelere nazaran okul matematiği, öğrenci, öğretmen kavramlarını daha çok içermektedir. Reuben Hersh'in bu efsaneyi çürütmeye karşı ortaya koyduğu örnek ve görüşlerinin içerisinde matematikçilerin özellikleri, matematikçi olmak, matematikçi olmayı istemek, matematik öğrenmek, matematiği öğretmek gibi ifadelerle rastlanmaktadır. Bu kısımda elde edilen bulgular Reuben Hersh'in deneyim ile

matematik eğitimi ve felsefesi üzerine görüşlerinin sunulmasında köprü görevi görmektedir.

İnsanların matematik ile olan ilişkilerinin nasıl olduğu ve dereceleri farklı farklıdır. Genel olarak bir matematikçiye matematik ile uğraşmasının neden veya nasıl olduğu sorulduğunda aklına çocukluk, gençlik veya yetişkinlik yıllarından anımsadığı bir tutkusundan veya heyecanını hala hissettiği bir anısından bahsettiği görülmektedir. Anneli Lax'ın ikinci dünya savaşı tarafından parçalanmış çocukluğunda kaçış olarak bahsettiği matematik, bugün Anneli Lax'i tanınmış bir matematikçi yapmıştır. Henüz okumadan hesap yapabilen Gauss'un, çocukken 1'den 100'e kadar olan sayıların toplamının cevabını birkaç saniye içinde vermesi ve bunu sayı çiftleri oluşturarak yaptığını söylemesi yaşlılığında anlattığı bir anısıdır (Hersh ve John-Steiner, 2018, s. 18-19). Başka bir matematikçi Jenny Harrison şöyle demektedir: *“Üç problem ilgimi çekti ve ben de onları anlamaya çalışmak istedim: bilincin doğası, zaman ve ışık. Sorun, bunu en iyi nasıl yapacağımdı. En sonunda, bana güvenebileceğim cevapları verebileceğine inandığım için matematikte karar kıldım.”* (akt. Hersh ve John-Steiner, 2018, s. 21). Reuben Hersh, matematik öğrencileri için kendilerini başarının garanti olmadığı bu alana adanmanın yoğun bir tecrübe olduğunu ifade etmektedir. Sonuç kestirilemezken birini bu yoğun çabaya iten şeyin ve matematikçilerin paylaştığı özelliklerin odaklanma gücü, sebat, merak, heyecan, enerji ve kararlılık olduğunu söylemektedir. Dolayısıyla matematiksel çalışma sürecinin her seviyesinde mevcut olan zıt duyguların bir matematikçi olma seçiminde genç bir öğrencide hem heyecan hem de korku olarak görülebileceği ifade edilmektedir.

Hersh'in yukarıdaki paragrafta bahsettiği matematik öğrencisi profilinde çoğunlukla matematikçi olmayı seçmiş biri görülmektedir. Elbette ki matematik öğrenen herkes veya matematik öğrettiği sınıftaki bir öğretmen her öğrencisinin matematikçi olmayı seçmeyeceğini bilebilmektedir. Örneğin tıp, reklamcılık gibi sektörler için okullarda verilen matematiğe gerçekte ne kadar ihtiyaç duyulmaktadır? Hersh, bugün matematiğe çalışmanın öğrencinin ilgisine göre seçebileceği bir seçenek değil zorunluluk olduğunu ifade etmektedir.

Hersh, matematikçilerin özel etkinliklerinin öğretme ve araştırma olduğunu ifade etmektedir. Buradan bir öğretmen için temel sorunun öğrencileri için ne yaptığı sorusu olduğunu vurgulamaktadır: *“Birçok genç öğrencinin bu titiz disiplin ile yüz yüze geldiğinde hissettiği ötekileştirmeyi yenmek için yardımcı oluyor musunuz? Çözüm baştan savma olduğunda kendi kafa karışıklığınızı paylaşıyor musunuz?”* (Hersh ve John-Steiner, 2018, s. 352). İnsanların matematiği sevmiyor olarak doğmadıklarını, onu sevmemeyi okulda öğrendiklerini belirtmektedir (Hersh ve John-Steiner, 2018, s. 319). Okul matematiğinin öğrenilmesinde ve öğretilmesinde Hersh’in eserlerinde daha çok öğretmenler üzerine söylemlerinin olması dikkat çekicidir. Hersh, öğretmenlerin matematik yaşamının hem bilişsel hem de motivasyonel taraflarına örnek olduklarını ve modeller olarak sürekliliği öğrettiklerini belirtmektedir. Örneğin, okul matematiğini hoş bulmayan öğrenciler için öğretmenlerin sergileyebilecekleri bir yaklaşım olarak şöyle bir örnek vermektedir:

Okulda matematiği sinir bozucu bulan çocuklar için, algoritmalarındaki monoton tekrar bir tür yabancılaşmaya neden olur. Tersine, öğretmen problem çözme, tahmin etme ve sezgiyi içeren daha geniş bir yaklaşım sunduğunda öğrenciler fikirlerle daha serbest, oyun benzeri bir deney tecrübesinin içine girerler. Örnekler, görselleştirme ve mantıksal kurallar aracılığı ile düşünür ve iletişim kurarlar (Hersh ve John-Steiner, 2018, s. 59).

Hersh’in örnek gösterdiği bu yaklaşımda öğretmenin sınıftaki rolüne vurgu yaptığı görülmektedir. Bu bulguları daha iyi desteklemek ve detaylandırmak üzere, Reuben Hersh’in *“Bir Lise Hazırlık Okulu Matematik Öğretmeninin İtirafı”* başlığı altında kurguladığı görüşme örnek gösterilebilmektedir. Kurgulanan görüşme kırklı yaşlarının başında beyzbol takımına koçluk yapan, matematik, fizik ve fen bilgisi öğretene ancak fizik dünyasındaki gelişmeleri takip etmekte zorlandığı için, fizik yerine matematik öğretmeyi tercih eden, matematik alanında yüksek lisans diplomasına sahip Ted Williams takma isminde, New England’da bulunan kaliteli bir özel okulun Matematik Bölüm Başkanı ile yapılmaktadır. Ayrıca Ted Williams’ın sınıf ortamında matematik felsefesi ve tarihinin çok fazla işlemediği de söylattirilmiştir.

Matematiğin icat mı yoksa keşif mi olduğu sorusuna hemen şu cevabı vermiştir: “İkisi birbirinden çok farklı değil. Neden bunu çözmeye çalışarak vakit harcayalım? Önemli olan şey matematiğin zevkli olduğu gerçeğidir. Öğrencilerime aktarmaya çalıştığım gerçek bu.”

Bu soruda diretildiği zaman da “Keşif olduğunu düşünüyorum.” diye cevap vermiştir.

Matematiğin tutarlılığı üzerinde şimdiye dek düşünüp düşünmediği sorulduğunda ise “Russell paradoksunu ve benzeri şeyleri duydum ama tam olarak anlamıyorum. Bana göre, matematik kumdan kaleye benziyor. Güzel görünüyor ama kumdan inşa edilmiş.”

“Peki, kumdan inşa edilmişse öğrencilerinizle konuşurken matematik üzerine çalışmayı nasıl meşrulaştırıyorsunuz?”

“Onlara sayıların yalan söylemediğini belirtiyorum. Bunun doğru olduğunu biliyorsunuz. Bunun aksini iddia eden bir karşı örnek bulan hiç kimse yok. Ama bana sorarsanız sorunun tamamı benimle alakalı değil.” (Hersh vd., 2015, s. 304-305).

Buradaki diyaloga göre Hersh, matematiğin keşif veya icat olduğu sorusuna verilebilecek cevap içerisinde matematiksel tutarlılık ve kesinliği de göz önünde bulundurulmasına dikkat çekmektedir. Ayrıca donanımlı bir matematik öğretmenine sorulabilecek sorular arasında şunlara da yer vermektedir:

- “Uygulamalı/pür matematik arasında fark var mıdır?”
- “Matematik niçin uygulanabilir?”
- “ π sayısı insanlardan bağımsız var olabilir mi? Samanyolu X-9’den gelen küçük, yeşil adam π sayısını anlayabilir mi?”
- “Matematikte güzellik var mıdır?”
- “Programlama bir tür matematik midir?”
- “Matematiksel sezgi diye bir şey var mıdır?”
- “Matematiğin mistik bir boyutu var mıdır?”
- “Matematiksel araştırmalar ne yönde ilerliyor?” (Hersh vd., 2015, s. 304-306).

Bu konuşma kurgusu, bir matematik öğretmenin matematiğin doğasına yönelik ve matematik eğitime yönelik olan görüşlerinin bir örneğini yansıtmaktadır. Reuben Hersh, kişinin matematiğin ne olduğuna dair olan anlayışının, nasıl sunulması gerektiğine dair kavramı etkilediğini ifade etmektedir (Hersh, 1979, s. 33).

Reuben Hersh (Hersh vd., 2015, s. 314), otoriter sunuş tarzı ile ideal sunuşun farkını ve gerçekte olanı şöyle ifade etmektedir:

İster sınıfta ister kitapta olsun, matematiksel sunumlar çoğunlukla otoriter olarak algılanır ve bu durum öğrencilerde içleme duygusu yaratabilir. İdeal olarak, matematik öğretimi, “Gelin, beraber mantık yürütelim.” çağrısında bulunur. Maalesef, genellikle bunun yerine öğretmenin ağzından dökülen sözcükler, “Bakın, size bunun böyle olduğunu ifade ediyorum.” olur (Hersh vd., 2015, s. 314).

Bunun bir problemin ispatının zorlama yoluyla yapıldığını işaret ettiğini belirtmektedir. Bu durumun meydana gelmesinin birkaç sebebini şöyle açıklamaktadır: kısıtlı olan süre, bazı öğretmenlerin çok parlak görünme isteği veya öğretmenin bilgisiz veya hazırlıksız olması (Hersh vd., 2015, s. 314). Bunun yanında sınıftaki öğrencilerin sergilediği direncin, kırgınlık ve reddedişin sebepleri hakkında ise şöyle söylemektedir:

İncelenen konuya karşı duyulan hatırı sayılır tahammülsüzlük duygusudur. Bu tahammülsüzlük, şaşırtıcı olmakla birlikte, genelde iyi öğrencilerde görülür. Bu öğrenciler genelde konuyu bir an evvel anlamayı talep ederler. Matematik bu öğrenciler için hep kolay olmuştur. Kavrayış ve sezgilerini kolayca kazanmışlardır ancak daha ileri seviyede matematiğe doğru ilerledikçe konuların zorluğu da artmaktadır. Deneyimleri eksiktir. Stratejiden yoksundurlar. Değişiklik yapmayı bilmezler. Anlayış sancılı hâle gelir. Aktarılabilecek bilgilerin onlarca, yüzlerce parlak insanın yüzyıllar boyunca ortaya koyduğu düşüncelerin nihai sonucu olduğunu belirtmek öğrenciler üzerinde çok az etki yaratır. Bir şeyi anında kavrama arzusu çok güçlüdür ve sonuç itibarıyla güçten düşürücü hâle gelebilir. (Eğer bunu hemen anlamazsam o zaman asla anlayamam, dolayısıyla umurumda da olmaz.) (Hersh vd., 2015, s. 315).

Bunun dışında Hersh; dünyada kendisinininkinden daha büyük bir zekâ ve kavrayış olduğunu kabullenmeye karşı psikolojik bir isteksizlik veya “matematik zekâsı olan” ve “matematik zekâsı olmayan” insanların bulunduğu şeklinde yaygın bir düşüncenin mevcut olabileceğini de sebep olarak göstermektedir. Direncin, matematik zekâsına sahip olmayanlar için içsel limitlere karşı gösterilen doğal bir tepki olabileceğini

belirtmektedir. Piyanist ya da buz patencisi olmanın herkes için mümkün olmadığını dolayısıyla matematik için de bu durumun neden farklı olabileceğine dikkat çekmektedir. “Kavrayış ışığının zihinde yanması, dönüm noktası, “*Hah, şimdi anladım!*” anı, gerçekten yeni olan bir şeyin, birey için yeni bir anlayışın, toplum önüne sürülmüş yeni bir kavramın ortaya çıkmasını sembolize eder.” Ancak insanların örnek ve öğretiyile çıraklığa benzer bir şekilde ustalardan gördüğünü taklit ederek öğrendiğinin de açık olduğunu ifade etmektedir (Hersh vd., 2015, s. 315-316). Reuben Hersh (Hersh vd., 2015) bazı somut deneyimleri ele alarak etkilendiği yazarlar olan George Polya ve Imre Lakatos’un yaklaşımlarını ele almaktadır.

Reuben Hersh, Pólya’yı; birçok alanın temeline katkı yapan parlak zekâlı bir matematikçi ve bunun yanı sıra muhteşem bir öğretmen, öğretmenlerin öğretmeni ve yorumcu olarak tarif etmektedir. Hersh Pólya’nın, keşfin bir zanaat olduğuna, keşfetme ve icat etme yetisinin öğrencileri keşfin prensiplerinden haberdar eden ve bu prensipleri uygulama fırsatı veren bir eğitimle geliştirilebileceğine inandığını ifade etmektedir (Hersh vd., 2015, s. 317).

İnanılmaz derecede zengin bir içeriğe sahip olan ve ilki 1945’te yayımlanan bir seri kitapta, deneyimlerinden elde ettiği keşfin ve icadın bu prensiplerini hem öğreti hem de örnek yoluyla açıklamıştır. Bu kitaplar her seviyede ve inanılmaz ilginçlikte problemin yanı sıra strateji, usul, püf noktaları, pratik yollar, iyi tavsiyeler, anekdotlar ve matematik tarihçesi ile dolup taşan bir hazinedir. Pólya “How to Solve It” adlı kitabının (bu amaçla boş bırakılan) sayfalarında aynı adı taşıyan, evrensel bir plan tasvir etmiştir (Hersh vd., 2015, s. 317).

Bu evrensel plan; problemi anlamak, bir çözüm planı bulmak, planı uygulamak ve elde edilen sonucu incelemek şeklinde dört adımdan oluşmaktadır. Pólya’nın *Nasıl Çözmeli?*’nin cevabı olarak problem çözme temelinde oluşturduğu keşif stratejisi eğitim ve eğitim dışında birçok alanda da farklı şekillerde sürmektedir. Reuben Hersh sonraki araştırmacıların Pólya’nın fikirlerini farklı şekillerde devam ettirdiklerini belirtmektedir. Örneğin; A. H. Schoenfeld, üniversite seviyesinde en sık kullanılan keşfe götüren prensipleri analiz, inceleme ve çözümün doğrulanması şeklinde listelemektedir (Hersh vd., 2015, s. 317-320). Eğitim dışında bir alan için ise Polya’nın yaklaşımına benzer bir

şekilde ortaya çıkan ve empati kurma, tanımlama, fikir üretme, prototip ve test etme şeklinde beş adımdan oluşan tasarım odaklı düşünme (*design thinking*) örnek gösterilebilmektedir.

Reuben Hersh, Pólya'nın çalışmalarını uygulamalı pedagojiye indirgemeye çalışan denemelerin sonuçlarını yorumlamanın zor olduğunu ifade etmekte ve öğretmek işinin bir ustanın parlak fikrinden çok daha fazlasını gerektirdiğini vurgulamaktadır (Hersh vd., 2015, s. 323). Başka bir örnek olarak ise etkilendiği yazarlardan biri olan Imre Lakatos'un "matematiksel keşfin mantığı" ile ilgili yazıları eserlerinde dikkat çekmektedir. Reuben Hersh, öğrenme ve öğretme bölümü içerisinde Lakatos'un metodu ile ilgili deneyimlerinden şöyle bahsetmektedir:

Genel anlamıyla matematik kültürü için formüleleştirilen Lakatos'un ispat ve çürütmelere dair bu keşifsel örneği, kuşkusuz, bireyler tarafından yeni matematik üretme süreçlerine de uygulanabilir. Bu kitabın yazarı, verdiği derslerde bu yöntemi kısmen başarıyla kullanmıştır. Öğrencilere belirli ve çözülmesi gereken bir problem yerine olası bir buluşa gidebilecek açık uçlu bir durum sunmanın yaratacağı ilk şaşkınlık anı aşılabılır ve aşılmalıdır. Bu yapıldıktan sonra, daha iyi olan öğrenciler, işlenen materyaller üzerinde hâkimiyet kurduklarını hissettikleri bir canlanma ve özgürlük duygusu yaşar (Hersh vd., 2015, s. 324).

Bu noktada Hersh (1997)'in bir röportajında, Hümanistik matematiği nasıl öğretiyorsun, sorusuna verdiği cevap önem taşımaktadır. Hersh kendi deneyimlerinden bahsetmeden önce iyi bir matematik öğretmenin örneklerle başladığını, önce soruyu sorup sorunun ne olduğunu hemen söylemediğini ve sınıfın vücut dili ve göz hareketlerine karşı uyanık olduğunu tasvir etmektedir. Hatta öğrencilerin gözlerinin yuvarlamaya veya geriye yaslanmaya başladıklarında, yapmakta olduğu çözümü durdurmasını ve bir şekilde onları yanıt vermeye zorlaması gerektiğini, hatta öğretmenin "Anlamadım" da diyebileceğini önermektedir. Lakatos'tan etkilenen Hersh (1997), kendi deneyiminden ve buradaki kilit meseleden şöyle söz etmektedir:

Öğrencilerin ödevleri vardı; bir şey üzerinde çalışmaları ve daha sonra sınıfta bunun hakkında konuşmaları gerekiyordu. Bir gün gönüllü çağırdım. Gönüllü

yok. Bekledim. Bekledim. Sonra, çok cesur hissederek, odanın arkasına gittim, oturdum ve hiçbir şey söylemedim. Bir süre için ve bir süre için daha. Sonra bir öğrenci tahtaya kalktı, sonra da bir diğeri. Çok iyi bir sınıf olduğu ortaya çıktı. Anahtar, susmaya istekli olmamdı. Yüzlerce kez yaptığım, "Tamam, sana göstereyim" diyerek kolay olan şeyi yapmış olurdum. Bu belki de çoğu, öğretmenler için en büyük zorluktur, çok fazla konuşmamak. Sessiz olun. İki veya üç dakika sessizlik olursa dünyanın sona erdiğini düşünmeyin.

Hersh; Lakatos'tan da etkilenen Paul Ernest'in *Matematik Eğitimi Felsefe'sinin* toplumsal gerçekliğin bir parçası olarak matematik felsefesini yeniden inşa etme hareketinde en kapsamlı ve anlaşılır olanlardan biri olduğunu belirtmektedir. Yapılandırmacı psikolojide Piaget ve Vygotsky, oluşturmacı sosyolojide de Bloor ve Restivo'dan önemli ölçüde bahseden Ernest'in matematik felsefesinde sosyal oluşturmacıliktan söz eden ilk kişi gibi görüldüğünü ifade etmektedir (Hersh, 1997, s. 228). Ernest'in içeriğinde Lakatos'un yanılabilirciliği ve Wittgenstein'in gelenekselciliği hakkındaki vurgularına da dikkat çekmektedir:

Sosyal oluşturmacılik, matematiği sosyal bir yapı olarak görür. Matematiğin gerçeklerinin oluşturulmasında ve gerekçelendirilmesinde insan dilinin, kurallarının ve anlaşmasının, kilit bir rol oynadığını kabul ederek, gelenekselciliği (Wittgenstein) kullanır. Matematiksel bilgi ve kavramların geliştiği ve değiştiği görüşü de dâhil olmak üzere yarı-deneyselelciikten Lakatos'un yanılabilirci (fallibilist) epistemolojisini alır. Lakatos'un matematiksel bilginin, matematiksel keşif mantığını kullanarak varsayımlar ve çürütmeler yoluyla büyüdüğü felsefi tezini de benimser. ... Sosyal oluşturmacıliğin merkezi odağı, sadece gerekçelendirmesinden ziyade matematiksel bilginin doğuşudur. ... Öznel ve nesnel matematik bilgisi birbirinin yaratılmasına ve yeniden yaratılmasına katkıda bulunur (akt. Hersh, 1997, s. 228).

Reuben Hersh; Freudenthal ve kurduğu enstitüsünün güncel deneyimlerden alınan problemler üzerine kurulu geliştirmiş olduğu "gerçekçi matematik eğitimi" yaklaşımının, 'matematiği en iyi şekilde öğretmenin onu yeniden icat ederek olduğunu' öğrettiğinden söz etmektedir. Bunu matematik reformlarından biri olarak sayan Hersh, başka bir reform olarak, Rus psikolog Vladimir V. Davydov'u örnek göstermektedir. Davydov; yalnızca günlük deneyimler boyunca kazanılamayan geniş kavramların

öğretmenler tarafından tanıştırılması gerekliliği görüşünü takdim eden, psikolojinin Mozart'ı kabul edilen Vygotsky'den etkilenmiştir. Vygotsky, Piaget'nin çalışması ile ortak yönere sahiptir ancak farklılıklarından bir tanesi bilimsel kavramlara yaptıkları vurgu olmaktadır. Hersh her iki programın da ağırlıkların, alanların ve çocukların boylarının karşılaştırılması gibi somut deneyimlerle başladığını, bunun Rus yaklaşımında da şematik olarak sunulduğunu ve karmaşık sayıların artışı ile öğrencilerin yeni formlar icat ettiklerini belirtmektedir. Bu yaklaşımın avantajlarından birinin, bir problemi yeniden kurmaya bir anlam sağlaması olduğunu ifade etmektedir. Bir başka eğitim reformu olarak da, el ile hesaplama, oyun ve günlük deneyimlere vurgu yapan, Kaliforniya'daki Lawrence Berkeley Ulusal Laboratuvarı'nda gerçekleştirilen Matematik Ailesi grubu aktivitelerini örnek göstermektedir. Hersh, reform programlarını öncelikli vurgusunun matematiği öğrenenlere bilişsel olarak yapmak olduğunu ancak reformun zihinsel zorlukların ötesinde geliştiğini; matematik öğrenmenin duygusal bir halini de içerdikini ifade etmektedir (Hersh ve John-Steiner, 2018, s. 325-326).

V.BÖLÜM

5. Tartışma, Sonuç ve Öneriler

5.1.Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesi

Bu başlık altında bu tez çalışmasının araştırma problemlerinden biri olan “*Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesi nedir?*” sorusuna, buraya kadar sunulan kuramsal çerçeve ve bulgular nazarında cevap verilmeye çalışılmaktadır. Reuben Hersh'in kaynaklarından elde edilen ve genel olarak bir matematik felsefesi düşüncesinin anlaşılması için gerekli ve yeterli olabilecek ‘matematiğin tanımı, matematik felsefesinin ilgi alanı, matematik felsefesi tarihindeki düşünce okulları ve matematik eğitimi felsefesi’ şeklinde yer almakta olan kategoriler Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesi ile ilgili birtakım sonuçlar ortaya çıkarmaktadır. Görülmüştür ki Reuben Hersh hem kişisel hayatında hem de çalışma hayatında tıpkı birçok insanda olduğu gibi düşünme, karar verme, problem çözme gibi zihinsel süreçlerden geçmiştir. Hersh'in hayatını adadığı işi olan matematiğin doğasını anlamaya yönelik olarak verdiği çabaları, onun çalışma hayatının ikinci yarısı denilebilecek bir kısımda “matematik felsefesi” içerisinde meydana gelmiştir. Bu noktada ise Hersh, matematik felsefesi ile ilgili çalışmalarında Imre Lakatos, Paul Ernest, Karl Popper gibi yazarlardan etkilenmiş ve yaşadığı süreçlerden farksız kılarak oluşturduğu kendi görüşleri ile “matematiksel deneyiminin felsefesi” şeklinde bir bakış açısı meydana getirmiştir.

5.1.1.Reuben Hersh'e göre matematiğin tanımı ile ilgili sonuç ve tartışmalar

Matematiğin ontolojik olarak varlığından söz edildiğinde keşfedilmesi beklenen bir gizem (Platoncular), kurallara uyarak kâğıt üzerinde izlerle oynanan anlamsız biçimsel bir oyun (Ernest, 1998, s. 18) (Biçimciler) veya sınırlı inşalarla elde edilebilen bir disiplin olduğu (oluşturmacılar) görüşüne sahip Mutlakçıların etkisi yirminci yüzyılın ikinci yarısına dek görülmektedir. Yirminci yüzyılın ikinci yarısından sonrası “matematik eğitimi almış veya matematik hakkında bilgi sahibi filozoflar tarafından şekillendirilmiş ve böylece matematik felsefesi hakkında ‘daha felsefi’ sorunlar üzerine yoğunlaşmıştır” (Gür, 2019, s. 52). “*Matematik benim başlangıç noktam, bu bir gerçek.*” (AMS, 2014) diyen Reuben Hersh matematik olarak adlandırılan konunun varlığının soru değil bir olgu olduğunu ifade etmektedir (Hersh, 2014, s. 49-50; Hersh vd., 2015, s. 452). Ona göre “bu olgu, “anlaşıldığında ihtilafsız olan”, çok güçlü ve nihai fikirler hakkındaki akıl yürütme ve argüman biçimlerinin varlığından ne bir eksik ne bir fazladır.” (Hersh, 2014, s. 49-50; Hersh vd., 2015, s. 452). Dolayısıyla Reuben Hersh’e göre matematik anlaşmazlık konusu olmayan bir şekilde, zihinsel etkinliklerin varlığından söz edilebildiği kadar var olan bir olgudur. Matematiğin bir tanımının verilmesinin gerekliliği nazarında ise, matematiğin tanımının tek olmadığı, birçok meslek grubundan farklı yazarlara ait birçok farklı tanım ile görülmüştür. Buna istinaden Reuben Hersh’in şu ifadesi dikkat çekmektedir: *Matematiğin tanımı değişir. Her bir nesil ve her bir nesil içinde düşünce üreten matematikçiler kendi kanaatlerine göre tanımlar formüle ederler* (Hersh vd., 2015, s. 8). Hersh matematiğin, insanların uygulama ve kavramlarının bir koleksiyonu olduğunu ifade etmektedir (Hersh, 2015). Reuben Hersh’in bakış açısına göre matematiğin tanımı meydana gelirken; tanımı yapacak matematikçinin/kişinin deneyimleri ve içinde bulunduğu zamanın önemi yaptığı matematiğe ve matematiğe olan bakış açısına yansımaktadır. Dolayısıyla matematiğin varlığından söz edildiğinde ve tanımı verildiğinde Reuben Hersh’in *matematiksel deneyime* vurgu yapmakta olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

5.1.2.Reuben Hersh'e göre matematik felsefesinin ilgi alanı hakkında sonuç ve tartışmalar

Bu araştırmanın ikinci kısmında matematik felsefesinin ilgi alanı kategorisi içerisinde matematik ile felsefenin birbirine gerekliliği ve uyumu hakkında kuramsal çerçeve sunulmuştur. Bulgular kısmında ise Reuben Hersh (1979)'in, matematik felsefesi hakkındaki tutumunu ortaya koymak için (1) çalışan matematikçinin felsefi durumunun ne olduğunu, (2) bu durumun nasıl ortaya çıktığını ve (3) kaçmanın mümkün olabildiği bir yön önerdiğini ifade eden üç argümanı sunulmaktadır. Burada Reuben Hersh'in açıklamalarında matematikçi ve filozofu karşılaştırdığı görülmektedir. Reuben Hersh (2014) AMS ile verdiği röportajında herhangi bir filozofun kendisini söndürme hakkı olduğunu belirtmektedir: *“Diyebilirler ki hiç felsefe okuluna gitmedi. Ancak yine de felsefi meselelerle yüzleşmeden bunu yapmak zorundayım, utanmadan devam edeceğim. Ben sadece bir matematikçiyim.”* Bu noktada Hersh'in matematik felsefesi hakkında söz sahibi olabilmesinin ardında ‘matematikçi’ olduğunu vurguladığı görülmektedir. Dolayısıyla Hersh, matematik felsefesi ile ilgili düşüncelerini belirtirken kendi matematiksel deneyimlerine dayanmaktadır.

Öte yandan hem Hersh'in matematikçi ve filozof karşılaştırmalarına hem de matematik ve felsefenin birlikteliği görüşüne istinaden birtakım sonuçlar ortaya çıkmaktadır. *“Felsefe, dünya hakkında bir araştırma olmalı ve mevcut bilimlerin başarılarını kullanabilmelidir. Aslında, hümanistik disiplinler bilimlere karşı olmayan fakat bilim ile birlikte insanları inceleyen disiplinlerdir.”* (Cellucci, 2017, s. 53). Bu noktada Richard Courant ve Herbert Robbins tarafından yazılmış *‘What Is Mathematics?’* kitabının giriş bölümünde yer verilen; *insan beyninin bir ifadesi olarak matematiğin aktif irade, düşünen mantık ve estetik mükemmelliğe duyulan arzuyu yansıttığı* tanımlaması uygun görülmektedir. (akt. Stewart, 2013, s. 38). Stewart (2013, s. 38), bu yazarların tek başına matematik nedir sorusunun yanıtını verebilecek olanın matematiğin kendi içindeki felsefe değil, aktif deneyimler olduğunu vurguladığını aktarmaktadır. Reuben Hersh ise kendi alanının felsefesi ile uğraşan bir matematikçi olarak, Courant ve Robbins'in sorularını *“matematiğin ne olduğunu söyleyerek değil, ne olduğunu göstererek”* yanıtladıklarını gözlemlemiştir. (Stewart, 2013, s. 38-39). Stewart

(2013, s. 39), Hersh'in de aynı başlığa sahip bir kitap yazarak anlattıklarının gelenekselin dışında yanıtlar olduğunu belirtmektedir. Courant ve Robbins'i okumanın kendisi için önemli olduğunu anlatan Hersh de, matematik felsefesini kendi matematiksel deneyimlerine dayandırmaktadır. Matematik felsefesi tarihindeki tartışmalarda matematik ve felsefeyi bir yerlere çekmek yerine; matematik ve felsefenin birbiri için olan gerekliliğinin anlaşılmasını şu sonuç ile basitçe ifade etmektedir: *“Bizim çıkardığımız sonuç, matematiği, ona uyum sağlayamayacak kadar küçük olan bir felsefeye uydurmak için kırpmamak, bunun yerine, felsefi kategorilerin, matematiksel deneyimimizin gerçekliğini kabul edecek şekilde genişletilmesini talep etmek gerektiğidir.”* (Hersh, 2014, s. 49; Hersh vd., 2015, s. 453).

5.1.3.Reuben Hersh'e göre matematik felsefesindeki düşünce okulları ile ilgili sonuç ve tartışmalar

Matematiğin temelleri tartışmasına getirilen metaforlardan biri matematiğin 'temelleri olan bir binaya' benzetilmesidir. Kazılan bir çukurun sağlam olacağı düşünülen bir temelle doldurulup üzerine her geçen zamanda kat çıkılan bir bina; doğal afetlerle bir zaman sonra yıkılabilir. Mutlakçı görüşü benimseyenler binanın temellerinin sağlam, değişmez ve yıkılmaz olduğuna kanaat getirmişlerdir. Hersh (2014) ise, bu noktada matematiğin bir ağaca benzetildiğini aktarmaktadır: *“Bir ağacın kökleri vardır, temel değil. Dallar büyürken kökler büyür. Eski kökler yeni kökler olarak ölebilirler. Değişmez olması gereken sağlam ve kalıcı bir temel gibi değil.”* (s. 125). Dolayısıyla Hersh'in görüşleri içerisinde matematik; tıpkı Lakatos'un dediği gibi yanılabilir, değişmez değildir. Tıpkı bir ağacın kökleri ve dallarının büyümesi gibi gelişmektedir ancak zamanı geldiğinde ve koşullar gerektirdiğinde bazı dallar ve kökler çürümektedir. Hersh matematiğin, *“bilime benzer bir uzlaşmayı elde etme ve yeniden üretilebilir sonuçlar kurma yeteneğine sahip beşerî bilimlerin bir parçası”* olduğunu ifade etmektedir. Sözün özü, matematiğin doğasının süreci bu şekildedir.

Bu araştırmada üçüncü olarak ele alınan matematik felsefesi tarihindeki düşünce okulları ile ilgili olarak Reuben Hersh kendi görüşlerini ana akım felsefe içerisine almamaktadır. Ana akım felsefeden beslenmiştir ancak eleştirileri vardır. Hersh (2014; Hersh vd., 2015), matematik felsefesinin Platoncu görüşleri ile ilgili “*Matematik, ideal, önceden var olan, geçici olmayan bir gerçekliğin incelenmesi değildir.*”; biçimci görüşleri ile ilgili ise “*Matematik satranç gibi, düzmece sembol ve formülleri olan bir oyun da değildir.*” şeklindeki ifadeleriyle kendisinin bu görüşlerde olmadığını belirtmektedir. Fakat bu düşüncelere alternatif üretmek ve matematiksel deneyime vurgu yapmak üzere şu sonuçları vermektedir:

Eğer Platonculuk, oluşturmaçılık ve biçimciliği bir müddet unutmayı kabullenirsek matematiksel deneyimden öğrendiğimiz iki olguyu başlangıç noktamız olarak alabiliriz:

Olgu 1: Matematik bizim icadımızdır, zihnimizdeki fikirler hakkındadır.

Olgu 2: Matematiksel nesnelerin, keşfedelim ya da keşfetmeyelim, kesin özelliklere sahip olması anlamında, matematik nesnel bir gerçekliktir.

Kendi deneyimimize inanıp bu iki olguyu kabul edecek olursak bu durumda, bu ikisinin bir araya nasıl getirilebileceğini sormak zorundayız: Bunlara çelişkili değil, uyumlu olacakları şekilde nasıl bakabiliriz? Ya da daha iyi ifade etmek istersek burada uyumsuzluk ya da çelişki bulma konusunda bizi zorlayan hangi varsayımlarda bulunduğumuzu görmek zorundayız. Daha sonra, matematiksel deneyimin gerçekliğini kabul edecek kadar geniş bir bakış açısı geliştirmek üzere bu ön koşullardan kurtulmaya çalışabiliriz (Hersh, 2014, s. 49; Hersh vd., 2015, s. 450-451).

‘Hümanistler ve başına buyruklar (*maverick*)’ adıyla sınıflandırdığı diğer gruptan ise oldukça etkilenmekte, kendi görüşlerini hümanist matematik felsefesi içerisinde görmektedir. Ayrıca bu grubun içerisinde saydığı yazarların meslek gruplarının filozof ve matematikçi olmasının dışında psikolog, sosyolog, eğitimci, fizikçi ve kimyager olması da oldukça dikkat çekmektedir. Buradan Reuben Hersh’in matematik felsefesi konusunda keskin bir kalıp aramadığı anlaşılmaktadır. Hersh’in eserlerinde farklı meslek gruplarından yazarların görüşlerine yer vermesi onun, matematik felsefesinin çok yönlü bir yapı içerisinde yer aldığına ve çok yönlülükte yer alan yazarların matematiği kendi perspektiflerinden ele almalarıyla deneyimlerine vurgu

yaptığının da göstergesi olmaktadır. Bu noktada Reuben Hersh'in, Karl Popper'in üç dünya görüşünü de "matematiksel deneyimin hiç bozulma göstermeksizin uyum sağlayabileceği bir bağlam" olarak gösterdiği de eklenmelidir (Hersh, 2014, s. 49; Hersh vd., 2015, s. 451). Birinci dünya fiziksel, ikinci dünya ise bilinç dünyasıdır. *"Evrin sürecinin daha ileri aşamalarında, sosyal bilinç, gelenekler, dil, teoriler, sosyal kurumlar yani insanlığın maddi olmayan tüm kültürü ortaya çıkar. Bunların varlığı toplumun üyelerinin bireysel bilinçlerinden ayrılamaz. Ama aynı olarak bireysel bilinç fenomeninden farklıdır, farklı bir seviyede anlaşılacak zorundadırlar."* (Hersh, 2014, s. 49; Hersh vd., 2015, s. 452). Reuben Hersh'in açıkladığı üçüncü dünya ise kültür dünyası olarak adlandırılabilir. Hersh matematiğin, üçüncü dünyada yer aldığını ifade etmektedir (Hersh, 2014, s. 49; Hersh vd., 2015, s. 452).

Matematiğin gerçekten de bir konusu vardır ve önermeleri anlamlıdır. Ancak, anlam, harici, beşerî olmayan bir gerçeklikte değil, insanoğlunun ortak anlayışında bulunacaktır. Bu bakımdan, matematik bir ideoloji, din ya da sanat formuna benzemektedir: Beşerî anlamlarla muhatap olur ve sadece kültür bağlamında anlaşılır. Başka bir deyişle matematik, hümanistik bir incelemedir. Beşerî bilimlerin biridir (Hersh, 2014, s. 50; Hersh vd., 2015, s. 452).

İfadelerinde görülerek de desteklenmektedir ki, Hersh'e göre, matematik insanın içerisinde yer aldığı ve insan etrafında şekillenen sosyal, kültürel ve tarihsel olgulardan bağımsız bir yerde değildir. Kendi görüşlerini hümanistler ve başına buyruklar olarak sınıflandırdığı grup içerisinde gören Hersh, hümanist matematik felsefesinde kendi yönelimini "sosyal-kültürel-tarihsel" veya sadece "sosyal-tarihsel" olarak ifade ettiğini belirtmektedir (Hersh, 1997, s. 182). Dolayısıyla matematik; edebiyat, tarih, sanat gibi diğer beşeri alanların uğraşları ile benzerlik taşımaktadır. Bu noktada Hersh, matematiğin bu diğer beşeri bilimlerden ayrılmasındaki ayrıcalığının ise matematiğin bilime benzeme niteliği olduğunu ifade etmektedir: *"Matematiğin sonuçları, aynı doğa bilimlerinin sonuçları gibi dayatmacıdır. Bu sonuçlar sadece fikir ürünleri değildir ve edebiyat eleştirisindeki fikirler gibi kalıcı uzlaşmazlıklara maruz da değildir."* (Hersh, 2014, s. 50; Hersh vd., 2015, s. 452). Bu noktada belirtilmelidir ki konu bütünlüğünün sağlanamayacağı iddiasıyla bu araştırmanın da uzakta durduğu matematik bilim midir tartışmasında Reuben Hersh'in de keskin görüşleri mevcut değildir. Matematiksel

deneyime vurgu yapan Hersh, içinde bulunduğu zamanın şartlarına göre matematiğin doğa bilimleri gibi yanılabilir ve sonuçlarının doğa bilimlerinin sonuçları gibi dayatmacı olduğu yönüyle bilime benzeme niteliği ile diğer beşeri bilimlerden ayrıldığını ifade etmektedir.

Hümanist matematik felsefesinde kendi yönelimini “sosyal-kültürel-tarihsel” olarak adlandıran Reuben Hersh’in matematiksel deneyiminin felsefesi hakkındaki nihai sonuç, yine kendi deneyimlerinden aktardığı şekliyle oluşturduğu bu paragrafta verilmektedir:

Matematikçiler olarak, ideal nesneler icat ettiğimizi bilir, sonra da bunlara ait olguları keşfetmeye çabalarız. Bu bilgiyle uyuşmayan her felsefe matematik için çok küçüktür. Felsefecilerin hücumuna uğradığımızda biçimcilik köşesine çekilmemize gerek yoktur. Matematiksel doğruluğun nesnelliğine olan inancımızın, beşerî düşünceden farklı bir ideal gerçeklik gerektirmesi anlamında Platonik olduğunu kabul etmek zorunda da değiliz. Lakatos ve Popper’in çalışmaları, modern felsefenin matematiksel deneyimin doğruluğunu kabul etmeye muktedir olduğunu göstermektedir. Bu da matematiğin meşruluğunun olduğu gibi, yani yanılabilir, düzeltilebilir ve anlamlı kabul edilmesi anlamına gelir (Hersh, 2014, s. 50; Hersh vd., 2015, s. 452-453).

5.2.Reuben Hersh’in matematiksel deneyiminin felsefesinin matematik eğitimi açısından değerlendirilmesi

Öğretime geçmeden önce bir ‘derse hazırlık’ sürecinin yaşanması kaçınılmazdır. Bu süreç içerisinde öğretmenlerden, öğretilmesi hedeflenen konunun derinlemesine bilgisine ve öğretim yöntemlerine hâkim olunması beklenmektedir. Hazırlıktan sonraki ders esnasında yaşananlar ve bundan sonra yapılan değerlendirme süreci de eklendiğinde; bir öğretim süreci için ders öncesi, ders sırası ve ders sonrası şeklinde kabataslak üç bölümden bahsedilebilmektedir (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2014). Genel olarak öğretmenlerin yaşadığı bu süreci pür matematikçi olan

Reuben Hersh de, üniversitelerde girdiği derslerde ‘matematik öğretmeni’ rolüne bürünerek yaşamıştır. Kendisi matematiği hayatını adadığı işi haline getirme sürecinde, sadece bir iş değil hayatı boyunca zevk alması gereken bir iş yapmak zorunda olduğundan ve matematiğe olan ilgisinin meyve vereceği tohumlar attığından bahsetmektedir. Kendisi çalışma hayatının neredeyse yarısına geldiğinde denilebilecek, matematiğin temelleri dersini vermeye başladığı bir zamanda, önceden verdiği derslere göre bu derste amacının *matematik yapmaktan çok matematik hakkında konuşmak* olduğunu fark ettiğini belirtmektedir (Hersh, 2014; Hersh vd., 2015). Dolayısıyla matematiğin doğasına yönelik fikirlerinin sistemli bir şekilde meydana geldiği süreci başlamıştır. Bu süreç Reuben Hersh’in kendi matematiksel deneyimi üzerinden “matematiksel deneyimin felsefesi” hakkında bir bakış açısı ortaya konmasını sağlamıştır. Özet olarak burada verilen Reuben Hersh’in yaşadığı süreçlerin, matematik öğrenen veya öğreten kişilerin yaşadığı/yaşayabileceği süreçlerle benzerlik gösterdiği söylenebilmektedir. Dolayısıyla bu sürecin anlaşılması matematik eğitimi ve eğitimcileri açısından örnek teşkil etmekte ve bir pür matematikçinin kendi matematiksel deneyiminin felsefesi hakkındaki bakış açısının bu camiaya farklılık katacağı inancını oluşturmaktadır.

Bakıldığında Reuben Hersh, matematiğin doğasına yönelik olan inançların matematik sınıfına da etki ettiğini vurgulamaktadır. Buna göre matematiğin doğası; matematik felsefesi, matematik tarihi, matematiksel kanıt, matematiksel sezgi, matematiksel araştırmalar, matematiğin icat veya keşif olduğu sorusu, matematiksel doğruluk, uygulamalı ve pür matematik, matematiksel güzellik kavramlarını içermektedir. Reuben Hersh’in de bu kavramları bütüncül bir şekilde ele alarak matematik eğitimi üzerine birtakım görüşleri ortaya çıkarılmıştır.

Reuben Hersh’in matematiksel deneyiminin felsefesini *sosyal-kültürel-tarihsel* olarak adlandırmasının matematik eğitimi görüşlerine de yansıdığı yadsınmamaktadır. Hersh (2015), matematik eğitimi ve matematik araştırmasının aynı alanda insan faaliyetleri olduğunu ve felsefi temellerinin uyumlu olmasının doğal karşılanacağını ifade etmektedir. Hersh’in görüşlerine değer veren Ian Stewart (2013)’in, matematikte öğrenim görmeyi ve bu alanda muhtemel bir kariyer yapmayı planlayan genç birine

mektuplarından oluşan *Genç Matematikçiye Mektuplar* isimli kitabında matematik eğitimi ile ilgili şu cümlesi dikkate değer görülmektedir: “*Matematiği kültürel bağlam içerisinde vermek, tarihsel gelişim hikâyesini anlatmak ya da okul kitaplarında yer almayan çözülmemiş problemlerin zenginliğinden ve hatta başlıkların varlığından bahsetmek, sınava hazırlanmak için geriye daha az zaman kalmasına neden olur.*” (s. 51). Stewart’ın cümlesi öğretmen, öğrenci ve matematik bağlamında matematik eğitiminin kapsamının özünde nasıl olması gerektiğini ifade etmektedir.

5.2.1. Matematiği öğretmenlere ilişkin sonuç ve tartışmalar

Matematik eğitimi süreci içerisinde öğretmen, öğrenci, öğretim programı, öğretim yöntemleri, matematiğin içeriği gibi birçok unsur mevcuttur. Bu tez çalışması Reuben Hersh’in matematiksel deneyiminin anlaşılmasını ve bunun matematik eğitimi açısından doğrularını ortaya koymayı amaçlayarak, esas olarak matematiğin doğasını anlamaya yönelik düşüncelerin anlaşılması ile beraber matematik eğitimi üzerine bir bakış açısının gelişeceğine olan inanç üzerine inşa edilmeye çalışılmıştır. Bu inanca yönelik olarak elde edilen bulgular incelendiğinde Hersh’in matematiğin doğasını anlamaya yönelik düşünceleri ve düşüncelerinin oluşum süreci, matematik öğretmenlerinin sınıf içerisinde yaşadığı/yaşayabileceği soru ve sorunlara cevap verme süreciyle benzerlik göstermektedir. Reuben Hersh’in matematik eğitimi üzerine olan görüşleri incelendiğinde daha çok matematiği öğretmenlere vurgu yaptığı görülmektedir. Bu başlık altında Reuben Hersh’in matematiği öğretmenler ile ilgili görüşlerine dayanılarak ortaya çıkan sonuçlara yer verilecektir.

Matematiğin doğası içerisinde yer alan kavramlara bütüncül olarak yaklaşılması halinde matematiğin sabır ve tahammül gerektiren bir disiplin olduğu aşikârdır. Bu açık durum teoremlerin ispatları ve ispat çeşitleri, yüzyıllar boyunca çözülemeyen problemlerin varlığı gibi tecrübelerle desteklenebilmektedir. Matematiğin tarihsel gelişimi içerisinde meydana gelenler ve matematik felsefesine yansıyanlar matematiğin doğasının anlaşılmasında veri kaynaklarıdır. Bu veri kaynakları matematik

sınıfı içerisinde öğretmenin öğretim yöntemlerini kolaylaştırabileceği gibi, öğrencilerin öğrenmelerini de daha kolay ve kalıcı hale getirecektir. Keza matematik tarihi ve felsefesi, Reuben Hersh'in 'deneyime' vurgu yapması gibi, insani süreçlerden meydana gelmektedir. Dolayısıyla tarihi ve felsefesi, matematiğin tamamen soyut ve uzak bir disiplin olduğu algısının önüne geçebilecek niteliktedir. Ancak bu noktada, Hersh'in daha çok öğretmenlere yaptığı vurguları göz önünde bulundurulduğunda, matematik öğretmenlerinin, matematiğin doğasının özünü matematik sınıflarına ne derecede ve nasıl yansıtabildiği tartışmalı bir durumdur. Yapılan çalışmalar içerisinde ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematik ve matematik eğitime yönelik belirlenen anahtar kavramlara (matematik öğrenme, matematiğin doğası, matematik öğretimi... gibi) ilişkin bilişsel yapılarındaki değişim içerisinde 'matematik felsefesi' kavramına yönelik üretilen cevapların en az sayıda olduğu görülmüştür (Özkara, 2019). Hersh'in kendi deneyimlerinde ifade ettiği gibi yapıyor olduğu işin doğasının özü hakkındaki tartışmalara vakıf olmak ve kendi düşüncesinin oluşması için araştırmalar yapmak, öğretmenlerin matematiğin doğası ile ilgili algılarının gelişmesini sağlayacak ve zengin bakış açılarının öğrenilmesi/üzerine düşünülmesi öğretim yöntemlerinin gelişmesine ve mesleki anlamda doyumun artmasına katkı sağlayacaktır. Aynı zamanda deneyimlerin nesiller boyunca aktarılmasıyla oluşan matematik içerisindeki tarihsel, sosyal ve kültürel sürecin benzerinin matematik sınıflarına yansması, hem öğretilen/öğrenilen konunun doğasına uyumlu hem de kalıcı izli ortamların oluşmasına fırsat tanımaktadır.

Bu noktada sözü edilmesi gereken bir diğer kavram da öğretim yöntemleri olmaktadır. Bilginin en doğru kaynağı, en kesin bilgi sahibi olarak görülebilen öğretmenlerin bir de matematik öğrettiği öğrenildiğinde toplumda zor ve aynı zamanda havalı bir iş yapıldığı algısına dönüşebilmektedir. Ancak genel olarak öğretmenlerin ve özelde matematik öğretmenlerinin en doğru ve kesin bilgi sahibi olmalarıyla ilgileri yoktur. Herkes hayatının bir yerlerinde bir zaman matematik ile ilgilenmiştir/ilgilenmektedir. Ancak bu işi matematik öğretmeni olarak yapıyor olmanın farkı öğretim yöntemleri ile ortaya konulmaktadır. Öğretim yöntemleri, daha önceki paragrafta bahsedilen matematiğin doğasının matematik sınıflarına yansıtılmasında çeşitlendirmeye, zenginleştirmeye ve geliştirmeye olanak sağlamaktadır. Dolayısıyla matematiği öğretmenlerin matematiğin oluşum süreçlerinin modellemesini matematik

sınıflarında meydana çıkarması öğretim yöntemlerinin kullanılması ve çeşitlendirilmesiyle mümkün olacaktır. Matematiğin doğasındaki problem çözme, ilişkilendirme, akıl yürütme ve iletişim becerilerinin kazandırılması; soru-cevap, beyin fırtınası, kartopu, problem çözme, tartışma gibi ve daha birçok farklı öğretim yöntemleri ile daha kalıcı hale gelmektedir.

5.2.2. Matematiği öğrenenlere ilişkin sonuç ve tartışmalar

Matematik eğitimi içerisinde önemli rol oynayan matematiği öğretmenlerin elbette ki matematiği öğrenenlerle ilişkisinin de ne denli önemli olduğu tartışmasıdır. Reuben Hersh'in deyimiyle matematiğin doğası sosyal-kültürel-tarihseldir. Doğasına aykırı veya kendi doğası işin içerisine katılmadan verilen bir eğitim-öğretim etkinliğinin ne derece etkili ve sağlam süreçler oluşturabileceği/sonuçlar doğurabileceği tartışmaya açıktır. Reuben Hersh' göre matematiğin oluşum sürecinin bir modellemesi matematik sınıflarında yaşatılmalıdır. Tarihi, felsefesi, problem çözme süreçleri ile matematik zaten insani ve zengin deneyimler yaşatabilecek düzeyde bir disiplindir. Matematik sınıfı içerisinde ortaya çıkacak zihinsel ürünlerin oluşum sürecinin, matematiğin oluşum sürecinin bir modellemesi şeklinde öğrencilere yaşatılması, onların kendi zihinsel deneyimleriyle ortaya çıkaracakları ürünlere daha kolay ve kalıcı şekilde ulaşmasına imkân verecektir. Dolayısıyla tarihinin ve felsefesinin matematik öğrenme sürecine dâhil edilmesi matematiği öğrenenlerin deneyimlerinin zenginleşmesine ve onlara daha çok cesaret ve fırsat verilmesine yol açacaktır.

5.2.3. Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesinin matematik öğretim programlarına ilişkin sonuç ve tartışmalar

Bu çalışmanın kuramsal çerçeve kısmında verilen matematik felsefesinin etkisiyle ortaya çıkmış matematik eğitimi yaklaşımları hakkındaki düşünceler bulgular kısmında Reuben Hersh nazarında tekrar ele alınmaktadır. Görülmektedir ki bir pür

matematikçi olması ile Reuben Hersh de matematik eğitimi yaklaşımlarını değerlendirmektedir. Freudenthal, Jean Piaget, Vygotsky, Paul Ernest gibi yazarlar bu isimler arasındadır. Hersh'in özellikle psikolog Vera-John Steiner ile birlikte yazdığı *Sevgi mi? Nefret mi? Matematik Aşkı: Matematik Efsaneleriyle Savaşmak (Loving and Hating Mathematics)* kitabında matematikte reformlar adı altında Amerika, Hollanda ve Rus'yadaki eğitim yaklaşımlarını açıklaması ve değerlendirmesi de görülmektedir. Hersh, matematiğin doğasına yönelik inançların matematik eğitimi yaklaşımlarına etki edeceği inancını taşıyarak matematikçi nazarında görüşlerini belirtmektedir.

“Matematik eğitimindeki reform hareketleri için itici güç, ‘okuma, yazma ve aritmetiğe’ vurgu yapan ‘temellere dönüş’ hareketine tepki olarak 1980’lerin başlarında başlamıştır.” (Van de Walle vd., 2014, s. 1). Reuben Hersh; Philip Davis ve Elena Anne Marchisotto ile birlikte kaleme aldığı ve 1983 Ulusal Kitap Ödülü’ne layık görülen ‘Tüm Yönleriyle Matematiksel Deneyim’ adlı kitabının ilk baskısından sonra, 1989’da, Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (*NCTM: National Council of Teachers of Mathematics*) Standartları’nın oluşturulduğunu belirtmektedir. Kitabının önsözündeki ifadeleriyle bu standartların, kendi ortaya koyduklarını büyük oranda doğruladığını ifade etmektedir (Hersh vd., 2015, s. xviii).

NCTM’nin yayımladığı *Okul Matematiği İçin İlkeler ve Standartlar*, yüksek kalitede matematik eğitimi için eşitlik, öğretim programı, öğretim, öğrenme, değerlendirme ve teknoloji olan altı ilkeden söz etmektedir. Bu ilkeler; herkes adına yüksek beklentiler (*eşitlik*), hem günlük hem de genel öğretim programlarında matematiğin önemi üzerine odaklanan ve tutarlı bir yapı (*öğretim programı ilkesi*), öğrencilerin ihtiyaçlarına yönelik öğretim (*öğretim ilkesi*), öğrencilerin matematiği anlamaları ve ifadelerinde matematiksel dil kullanmaları (*öğrenme ilkesi*), sadece öğrencileri değil öğrencilerin öğrenmelerini zenginleştirmek ve onlara rehberlik etmek için yapılan değerlendirmeler (*değerlendirme ilkesi*) ve matematik öğrenimi ve öğretiminde esas olan teknolojiyi (*teknoloji ilkesi*) içermektedir. NCTM, yayımladığı bu ilkelere göre beş öğrenme alanı standardı (sayılar ve işlemler, cebir, geometri, ölçme, veri analizi ve olasılık) ve beş süreç standardı (problem çözme, akıl yürütme ve ispat,

iletişim, ilişkilendirme, temsil) da yayımlamıştır (Van de Walle vd., 2014). Bu ilkeler ve standartlara göre matematik yapmanın ne anlama geldiği şöyle açıklanmaktadır:

Matematik, bir sürü örnek çözmek veya öğretmenin açıkladığı yöntemleri taklit etmekten daha öte bir şeydir. Matematik yapmak problem çözmek için yöntem geliştirme, bu yöntemleri uygulama, bunların bir sonuca götürüp götürmediğini görme ve verdiğiniz cevapların anlamlı olup olmadığını kontrol etme anlamına gelmektedir. Sınıflarda “matematik yapmak” gerçek dünyada matematik yapma işini mümkün olduğunca aslına uygun bir şekilde modelleyebilmelidir (Van de Walle vd., 2014, s. 13).

2000 yılındaki güncellenmiş halinin üzerinden aktarılan NCTM ilkeleri ve standartlarının daha sonraki yıllar içerisinde güncellenmesi ve beş süreç standardına Ulusal Araştırma Konseyi (*National Research Council*) 'nin Ekleme raporunda belirtilen matematiksel yeterlilik zincirlerinin eklenmesi ile bugün son hali NCTM yerine “*The Common Core Standards*” olarak karşımıza çıkmaktadır. *The Common Core Standards* bugün 41 eyaletin kendi zamanlarına göre şekillendirerek temel aldığı standartların bütünü temsil etmektedir. Sözü edilen beş süreç standardı *uyarlanabilir akıl yürütme, stratejik yeterlilik, kavramsal anlayış, prosedürel akılcılık ve üretken eğilim* yeterlilikleri de eklenerek genişletilmiştir (Common Core State Standards for Mathematics, s. 6).

Ülkemizde örneğin Arık (2007), yaptığı tez çalışmasında İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı 3-5.sınıf sayılar öğrenme alanı kazanımlarını NCTM standartları ve Singapur İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nın kazanımları ile örtüşüp örtüşmediğini belirlemeyi amaçlamaktadır. Araştırmasının sonucunda ise NCTM standartları ile tamamen örtüşmediğini, Singapur İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı ile ise biçimsel olarak benzerlik taşıdığını ortaya koymuştur (Arık, 2007). Altındağ (2017) ise, 2013-2014 eğitim öğretim yılında uygulamaya konulan Ortaokul 5. Sınıf Matematik Dersi Öğretim Programının, Stake'in Uygunluk-Olasılık modeline göre değerlendirmesini yapmıştır. Değerlendirmesi içerisinde öğretim programının içeriğinin NCTM standartlarına daha uygun bir hale getirilmiş olmasını

olumlu bir yön olarak sunmaktadır. Dolayısıyla ülkemizde yapılan çalışmalar da NCTM'nin ilke ve standartlarına uyumu önemsemektedir.

Ülkemizdeki Matematik Dersi Öğretim Programı'nda "öğrencilerin hem ulusal hem de uluslararası düzeyde; kişisel, sosyal, akademik ve iş hayatlarında ihtiyaç duyacakları beceri yelpazeleri olan yetkinlikler Türkiye Yeterlilikler Çerçevesi'nde (TYÇ) belirlenmiştir" (MEB, 2018, s. 5). Anadilde iletişim, yabancı dillerde iletişim, matematik yetkinlik ve bilim/teknolojide temel yetkinlikler, dijital yetkinlik, öğrenmeyi öğrenme, sosyal ve vatandaşlıkla ilgili yetkinlikler, inisiyatif alma ve girişimcilik, kültürel farkındalık ve ifade olmak üzere sekiz yetkinlik yer almaktadır. Bunlar içerisinde "matematiksel yetkinlik, günlük hayatta karşılaşılan bir dizi problemi çözmek için matematiksel düşünme tarzı geliştirme ve uygulamadır. Düşünme (mantıksal ve uzamsal düşünme) ve sunmanın (formüller, modeller, kurgular, grafikler ve tablolar) matematiksel modlarını farklı derecelerde kullanma beceri ve isteğini içermektedir." (MEB, 2018, s. 6). Matematiksel yetkinlikte beklenen matematiksel düşünme tarzı geliştirme ve uygulama, matematik yapma, matematik hakkında tartışma süreçlerini içeren matematiğin doğasının matematik sınıflarına yansıtılması ile mümkün olacaktır. Reuben Hersh'in deneyime vurgu yaparak bahsettiği sosyal-kültürel-tarihsel süreç, matematiksel yetkinliğin insani bir süreç ile beraber kazanılmasını sağlayacaktır. Ayrıca okul programı içerisinde yer alan matematik dersi, günlük hayat problemleri içerisinde ve diğer disiplinler ile birlikte bakıldığında, hem destekleyici hem de tamamlayıcı bir rol üstlenmektedir.

Görülmektedir ki Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesi ve matematik eğitimi ile ilgili görüşleri Dünya standartları ile uyum içerisinde. Ülkemiz Matematik Dersi Öğretim Programı'nın hazırlanmasında da farklı ülkelerin son yıllarda benzer gerekçelerle yenilenip güncellenen öğretim programları incelenmiş ve yurt içinde ve yurt dışında eğitim öğretim ve programlar üzerine yapılan akademik çalışmalar taranmıştır (MEB, 2018, s. 8). Bir pür matematikçinin matematiğin doğasını anlamaya yönelik görüşlerinin matematik eğitimi açısından doğurgularının ortaya konması matematiğin öğretimi, öğrenimi, öğretim programlarındaki yeri gibi birçok

unsuru içermekte olan matematik eğitimi anlayışlarının geliştirilmesinde örnek teşkil etmektedir.

5.3.Öneriler

Reuben Hersh bir matematikçi, matematiğin içinden biri, olarak kendi matematiksel deneyiminin felsefesini sunarken matematiğin doğasının içeriğindeki birçok unsuru ele almaktadır. Onun matematiksel deneyiminin felsefesinin anlaşılması ile birlikte akademisyen olması ve farklı meslek gruplarıyla çalışmış olması matematik eğitimi açısından da görüşlerine ulaşmamızı sağlamıştır. Oluşan tartışmalara ve elde edilen sonuçlara istinaden bu araştırmanın gelecek çalışmalara kaynak olması halinde aşağıda birtakım öneriler sunulmaktadır:

- Matematiği öğretenlerin mesleklerinin oluşum ve asıl süreçlerinde yaşadıkları deneyimler, bir pür matematikçi olan Reuben Hersh'in deneyimleri ile benzerlik göstermektedir. Bu sebeple matematik eğitimcilerinin matematiğin doğasına yönelik görüşlerinin oluşmasında ve gelişmesinde bu araştırma onlara kaynaklık edebilir.
- Bir matematikçinin matematiğin doğasına yönelik görüşleri, mesleki deneyimlerini zenginleştirmede matematik öğretmenlere “içeriden” bir bakış açısı sağlayabilir.
- Bu araştırma matematik camiasındaki akademisyenler, matematik öğretmenleri ve matematik öğretmen adayları ile matematiğin doğasını anlamaya yönelik olarak yapılacak çalışmaların oluşturulmasında ve analiz edilmesinde kaynak sağlayabilir.
- Bu araştırmanın içerisinde zaman zaman yer verildiği gibi psikoloji, eğitim bilimleri, sosyoloji, felsefe, antropoloji, edebiyat, pedagoji gibi farklı meslek gruplarına mensup kişilerin matematiğin doğasına yönelik görüşleri incelenebilir. Böyle bir çalışma matematik camiasına dışarıdan bir bakış açısı sunarak katkı sağlayabilir.

- Matematik camiasına mensup kişilerin matematiksel deneyimlerinin çeşitlendirilmesi ve geliştirilmesine yönelik araştırmalar ve uygulamalar yapılabilir.
- Reuben Hersh'in matematiksel deneyiminin felsefesinin matematik eğitimi açısından değerlendirilmesi ülkemiz öğretim programlarının geliştirilmesinde güncel bir bakış açısı olarak ele alınabilir.



KAYNAKÇA

- (1997). What Kind of Thing Is a Number? A Talk With Reuben Hersh. 5 Nisan 2019 tarihinde https://www.edge.org/conversation/reuben_hersh-what-kind-of-thing-is-a-number sitesinden alınmıştır.
- (2014). An Interview with AMS author Reuben Hersh. 13 Mart 2019 tarihinde <https://www.youtube.com/watch?v=tYgiVnQubyw&list=PLWVhlPXy1DW6al9dU8rsXKvDIXc7vhhq> sitesinden alınmıştır.
- Akçagüner, K. (2019). *Poincaré'nin Matematik Felsefesi ve Yeni Bir Aritmetik İnşa Etmenin Olanaksızlığı*. Orta Doğu Teknik Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- Akman, Ş. (2019). *Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiğin Doğasına İlişkin Felsefi Görüşlerinin İncelenmesi*. Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Zonguldak.
- Aldemir, A. (2008). *Henri Poincare'nin Bilim Anlayışı*. Ankara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- Altındağ, A. (2017). *Ortaokul 5. Sınıf Matematik Dersi Öğretim Programının Stake'in Uygunluk-Olasılık Modeline Göre Değerlendirilmesi*. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Arık, G. (2007). *İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı 3-5. Sınıflar Sayılar Öğrenme Alanı Kazanımlarının NCTM Standartları ve Singapur Kazanımlarına Göre Değerlendirilmesi*. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Arslan, M. (2019). *Wittgenstein'da Matematiğin Temelleri Sorunu*. İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul.
- Baki, A. (2014). *Matematik Tarihi ve Felsefesi*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.
- Bastem, N. (2018). *A. Vahap Akbaş'ın Çocuk Eserlerinin Eğitsel Değerler Bakımından İncelenmesi*. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Bolay, S. H. (2013). *Felsefe Doktrinleri ve Terimleri Sözlüğü*. (11. Basım). Ankara: Nobel Yayıncılık.
- Bowen, G. A. (2009). Document Analysis as a Qualitative Research Method. *Qualitative Research Journal*, 9 (2), 27-40.

- Cellucci, C. (2017). *Rethinking Knowledge The Heuristic View*. USA: Springer
- Cevizci, A. (2007). *Felsefeye Giriş*. (2. Basım). Bursa: Sentez Yayınları.
- Cevizci, A. (2017). *Felsefe Sözlüğü*. (6. Basım). İstanbul: Say Yayınları.
- Common Core Standarts for Mathematics. 20 Temmuz 2020 tarihinde http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf sitesinden alınmıştır.
- Coşkun, A. (2010). Matematikçiler Prensi Carl Friedrich Gauss. *Bilim ve Teknik*, 511, 104-106. https://bilimteknik.tubitak.gov.tr/system/files/biltek_arsiv/S-511-104.pdf
- Çevik, A. (2019). *Matematik Felsefesi ve Matematiksel Mantık*. İstanbul: Nesin Yayıncılık.
- Elmas, E. (2019). *Thomas Kuhn, Paradigma ve Matematik: Bir “Devrimsel” Şema*. Kocaeli Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Kocaeli.
- Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany: State University of New York Press.
- Frenkel, E. (2016). *Aşk ve Matematik*. (2. Basım). (Çev. Keskin, C.) İstanbul: Paloma Yayınevi. (Orijinal Çalışmanın Yayın Tarihi 2013).
- Glaserfeld, E. (2005). Radikal Oluşturmacılık Hakkında Sorular ve Cevaplar. (Çev. Durmuş S.) *Liberal Düşünce Dergisi*, 10 (38), 237-252. <http://www.libertedownload.com/LD/arsiv/38-39/19-ernst-von-glaserfeld-radikal-olusturmacilik-hakkinda-sorular-ve-cevaplar.pdf>
- Gür, B. (2019). *Matematik Felsefesi*. Ankara: Fol yayınları.
- Hilav, S. (2011). *Felsefe El Kitabı*. (3. Basım). İstanbul: Yapı Kredi Yayınları.
- Hardy, G. H. (1996). *Bir Matematikçinin Savunması*. (9. Basım). (Çev. Arık, N.) Ankara: TÜBİTAK.
- Hatipoğlu, C. (2018). *Aksiyoloji Ve Örtük Program: Ortaöğretim Kurumları Öğretmenlerinin Görüşleri*. Bartın Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bartın.
- Hawking, S. (2019). *Zamanın Kısa Tarihi* (66. Baskı). İstanbul: Alfa Bilim.
- Hersh, R. (1979). Some Proposals for Reviving the Philosophy of Math. *Advances in Mathematics*, 31, 31-50.

- Hersh, R. (1997). *What is Mathematics, Really?*. New York: Oxford.
- Hersh, R., Davis, P. J. ve Marchisotto, E. A. (2015). *Tüm Yönleriyle Matematiksel Deneyim*. (Çev. Durmuş S. ve Erçuar İ.O.) Ankara: Nobel Yaşam. (Orijinal Çalışmanın Yayın Tarihi 1995).
- Hersh, R., Davis, P. J. ve Marchisotto, E. A. (2020). *Tüm Yönleriyle Matematiksel Deneyim*. (Gözden geçirilmiş 2. Basım). (Çev. Durmuş S. ve Erçuar İ.O.) Ankara: Nobel Yaşam. (Orijinal Çalışmanın Yayın Tarihi 1995).
- Hersh, R. (2014). *Experiencing Mathematics What Do We Do, When We Do Mathematics?*. USA: AMS.
- Hersh, R. (2015). How Humans Learn to Think Mathematically, Exploring The Three World of Mathematics by David Tall. *The American Mathematical Monthly*, 122(3), 292-296.
- Hersh, R. (2017). Pluralism as Modeling and as Confusion. Sriraman, B. (Ed.), *Humanizing Mathematics and its Philosophy: Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh*. (19-29). Switzerland: Birkhäuser.
- Hersh, R. ve John-Steiner, V. (2018). *Sevgi mi, Nefret mi? Matematik Aşkı - Matematik Efsaneleriyle Savaşmak* (Çev. Kesici, Ö.) Ertem Basım Yayın: Doruk. (Orijinal Çalışmanın Yayın Tarihi 2011).
- İlhan, A. ve Aslaner, R. (2019). 2005'ten 2018'e Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programlarının Değerlendirilmesi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 46, 394-415.
- Lakatos, I. (2017). *Kanıtlar ve Çürütmeler*. (2. Basım). (Çev. Başkent, C.) İstanbul: Nesin Yayıncılık. (Orijinal Çalışmanın Yayın Tarihi 1976).
- MEB. (2018). *Matematik Dersi Öğretim Programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.
- Özdemir, M. (2014). *Kant'ta Aritmetiğin Sentetik A Priori Olarak Olanaklılığının Matematik Felsefesi Açısından Önemi ve Matematik Eğitime Yapabileceği Katkıları*. Maltepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul.
- Özkan, U. M. (2020). *Eğitim Bilimleri Araştırmaları İçin Doküman Analizi Yöntemi*. (3. Basım). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

- Özkara, M. (2019). *İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiğe ve Matematik Eğitime Yönelik Bilişsel Yapılarındaki Değişiminin İncelenmesi*. Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak.
- Öztürk, A. B. (2011). *Kurt Gödel'in Eksiklik Teoremleri ve Platonculuğu Üzerine Felsefi Bir İnceleme*. Pamukkale Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Denizli.
- Platon. (2013). *Devlet*. (24. Basım). (Çev. Eyüboğlu S. ve Cimcoz M. A.) İstanbul: Türkiye İş Bankası Yayınları.
- Popper, K. R. (2019). *Bilimsel Araştırmanın Mantığı*. (9.Basım). İstanbul: Yapı Kredi Yayınları.
- Sautoy, M. (2008). The Story of Maths. BBC. 24 Mart 2019 tarihinde <https://www.dailymotion.com/video/x16ksd8> sitesinden alınmıştır.
- Steen, L.A. (1988). The Science of Patterns. *Science*, 240, 611-616. <http://www.statlit.org/pdf/1988-Steen-Science.pdf>
- Stewart, I. (2013). *Genç Matematikçiye Mektuplar*. İstanbul: Profil Yayıncılık.
- Takıcak, M. (2016). *Salih Zeki'nin Matematik Felsefesi ve Matematik Eğitimi Yaklaşımı*. Ankara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- TDK (Türk Dil Kurumu) (2011). *Güncel Türkçe Sözlük*. Ankara: TDK Yayınları. <https://sozluk.gov.tr/>
- Thurston, W. P. (2006). On Proof and Progress in Mathematics. Hersh, R. (Ed.), 18 *Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*. (37-54). USA: Springer
- Van de Walle, J., Karp, K. S. ve Bay-Williams, J. (2014). *İlkokul ve Ortaokul Matematiği Gelişimsel Yaklaşımla Öğretim*. (Çev. Durmuş S. Ed.) Ankara: Nobel Yayıncılık.
- Yıldırım, C. (2015). *Matematiksel Düşünme*. (13. Basım). İstanbul: Remzi Kitabevi.
- Yıldırım A. ve Şimşek H. (2018). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yılmaz, E. (2019). *Matematik Felsefesinde Platonculuk*. Çankırı Karatekin Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Çankırı.

ÖZGEÇMİŞ

Yasemin CİHAN, 1995 yılında Bolu’da doğdu. İlk, orta ve lise düzeyindeki eğitimlerini Bolu’daki okullarda tamamladı. 2013-2017 yılları arasında Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde lisans eğitimini tamamladı. 2018 yılında Kars ilinde bir köy okuluna Matematik Öğretmeni olarak atandı. Mesleki deneyimini zenginleştirmek için Milli Eğitim Bakanlığı bünyesinde öğretmen olarak çalışmaya başlayana dek okullarda gönüllü faaliyetlerde bulundu. Aynı zamanda matematik eğitimi, teknoloji ve matematik, zekâ ve yetenek konularında birçok kongre ve eğitime katıldı. 2017-2020 yılları arasında Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Matematik Eğitimi Tezli Yüksek Lisans programını tamamladı. Halen Kars ilinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaya devam etmektedir.

İletişim Bilgileri: yascihan6@gmail.com